ENRIQUES, FEDERIGO

Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche

Rendiconti Circ. Mat. Palermo (I) **X** (1896), pp. 30-35.

UN'OSSERVAZIONE RELATIVA ALLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLE CURVE ALGEBRICHE.

Nota di **Federigo Enriques**, in Bologna.

Adunanza del 25 agosto 1895.

1. La presente Nota trae origine da una questione inerente alla rappresentazione parametrica algebrica d'una curva.

Si abbia una curva algebrica C che, senza restrizione, possiamo supporre piana, data da un'equazione

$$f(x, y) = 0.$$

La più generale rappresentazione parametrica algebrica della curva si ottiene ponendo le x, y funzioni razionali d'un parametro t e d'un irrazionale X legato a t da un'equazione di grado n in X

$$\varphi(X, t) = 0,$$

mediante le formule

$$(1) \qquad x = f_1(X, t), \qquad y = f_2(X, t):$$

si può dire allora che le

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

sono funzioni *irrazionali di grado n* in t.

Avviene *generalmente* che le formule (1) insieme alla $f(x, y) = 0$

permettono di esprimere inversamente X, t come funzioni razionali di x, y; cioè dànno una rappresentazione parametrica *semplice* della curva C; ma in casi particolari può accadere l'opposto. In ogni caso però si deve supporre che *un* valore di X resti determinato, quando sono dati x, y, t [in guisa da soddisfare alle (1)]; altrimenti x, y resulterebbero funzioni razionali di t e di una funzione razionale di X e si dovrebbero riguardare come funzioni irrazionali del parametro t aventi un grado $< n$.

Abbiamo dunque in ogni caso al variare di t [mediante le (1)] una serie razionale di gruppi di n punti sulla curva C: per un noto teorema di Lüroth si può supporre che i gruppi della serie corrispondano *biunivocamente* ai valori del parametro t, bastando altrimenti sostituire al parametro t un nuovo parametro τ funzione razionale di t; supposto ciò, le formule (1) daranno una rappresentazione parametrica semplice della curva C (ossia ciascun punto di C corrisponderà ad *un* valore di t) se i nominati gruppi di n punti su C formano una involuzione lineare g^1_n; accadrà invece l'opposto se quella serie di gruppi è tale che un punto di C appartiene a più d'un gruppo (ha l'*indice* $\delta > 1$). Che cosa potrà dirsi in quest'ultimo caso relativamente alla rappresentazione parametrica della curva C?

La risposta è data dal seguente enunciato:

Se le coordinate dei punti d'una curva algebrica

$$f(x, y) = 0$$

si esprimono come funzioni irrazionali di grado n d'un parametro t ed ogni punto della curva corrisponde a più valori di t;

1) *o le x, y si possono riguardare come funzioni irrazionali di grado n d'un parametro τ che è alla sua volta funzione razionale di t;*

2) *oppure la curva è trasformabile in una curva d'ordine n* (eventualmente multipla), ed ammette quindi infinite rappresentazioni parametriche semplici di grado n e di grado $< n$.

Stante le considerazioni precedenti risulta chiaro che questo enunciato è contenuto nel seguente enunciato geometrico (da cui si ottiene per $r = 1$):

Sopra una curva algebrica, una serie razionale ∞^r $(r \geq 1)$ *di gruppi di* n *punti è lineare* (involutoria) *o è contenuta in una serie lineare più ampia* $g^s_n (s > r)$.

2. Sopra una curva algebrica C esista una serie razionale ∞^1 di gruppi di $n\,(>1)$ punti di un certo *indice* $m > 1$.

Supponiamo dapprima che gli m gruppi della serie definiti da un punto generico della C non abbiano comuni altri punti variabili con esso, o come diremo brevemente che la data serie sia *semplice*.

Gli elementi (gruppi) della serie possono riferirsi biunivocamente ai punti della curva K razionale normale d'ordine m in S_m: allora ad un punto della C corrispondono m punti della K (omologhi ai gruppi appartenenti sulla C al punto dato) e quindi ad un punto della C corrisponde un iperpiano (S_{m-1}) segante sulla K gli m punti; al variare del punto della C si ha così in S_m una serie ∞^1 di iperpiani, e gli elementi della serie (iperpiani) corrispondono biunivocamente ai punti della C; per un punto della K passano n dei nominati iperpiani, dati dagli n punti della C che compongono il gruppo (della data serie) corrispondente ad esso. Si può dire che la serie d'iperpiani considerata sia di classe n, cioè che per ogni punto di S_m (anche fuori di K) passino n iperpiani di essa?

La risposta affermativa alla precedente questione vien data da una considerazione del sig. Segre (*).

Se la classe della serie di iperpiani fosse $\delta > n$, soltanto per un punto appartenente all'inviluppo della serie potrebbero passare meno di δ iperpiani, ed in conseguenza tutti i punti della K (per ciascuno dei quali passano solo n iperpiani distinti) apparterrebbero al nominato inviluppo; ma allora (la K appartenendo all'inviluppo della serie di iperpiani), per una nota proprietà degli inviluppi, ogni iperpiano di essa serie sarebbe tangente alla K, e quindi non la segherebbe più in m punti (distinti), contro il supposto.

Ora operiamo in S_m una trasformazione reciproca; agli iperpiani della nostra serie corrisponderanno i punti d'una curva C' d'ordine

---

(*) *Introduzione alla Geometria sopra l'ente algebrico semplicemente infinito*, n° 23 (Annali di Matematica, 1894).

n (in corrispondenza biunivoca coi punti di C), ed ai punti di K gli iperpiani di una serie di classe m, seganti sulla C' i gruppi di n punti della serie razionale ∞^1 di grado n e indice m trasformata di quella supposta esistente sulla C.

La C' può (eventualmente) appartenere ad un spazio S_s con $s < m$ dimensioni; allora la data serie di grado n e indice m sulla C risulta immersa in una serie lineare g_n^s (dello stesso grado).

Supponiamo ora, ciò che per un momento avevamo escluso, che sulla C la data serie non sia semplice, cioè che i gruppi di m punti di essa determinati da un punto generico abbiano comune, oltre quel punto, altri $\nu - 1$ punti ($\nu > 0$) variabili con esso; allora la serie risulta *composta* mediante i gruppi d'una involuzione γ_ν di grado ν, e considerando gli elementi (gruppi) di questa come i punti d'una curva, si può ancora applicare il ragionamento precedente: si deduce ancora che sulla C la data serie è contenuta in una serie lineare dello stesso grado g_n^s ($1 < s \leqq m$) (composta coi gruppi della γ_ν). Infine osserveremo che per $m = 1$ la serie è una g_n^1.

Sussiste dunque in ogni caso il teorema sopra enunciato per le serie ∞^1. Ma esso si estende subito alle serie di dimensione > 1, notando che in tal caso la serie stessa può riguardarsi come contenente infinite serie razionali ∞^1 aventi comune un gruppo di n punti, e quindi tutta la serie razionale risulta contenuta nella g_n^s completa a cui il detto gruppo di n punti appartiene.

3. Il teorema enunciato al n° 1 trova la sua più semplice espressione nel caso ($n = 2$) delle curve iperellittiche ed in questo caso esprime una proprietà nota (*): questa può anche enunciarsi dicendo che « *sopra una curva iperellittica di genere $p \geqq 1$ ogni involuzione irrazionale è trasformata in sè stessa dalla (o da ciascuna) g_2^1 appartenente alla curva* ».

Ed è anche da osservarsi che lo stesso fatto si può riguardare come

(*) Cfr. Painlevé, *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre*, ch. II (Annales de l'École Normale, 1891); Segre, *Introduzione*, ecc., op. cit.; nota al n° 67.

la proprietà degl'integrali iperellittici (di 1ª specie)

$$I = \int_{x_0}^{x} \psi[x \sqrt{\varphi(x)}]\, dx$$

riducibili ad ellittici, di ammettere una trasformazione birazionale (involutoria) in sè stessi e di trasformarsi in integrali ellittici mediante una sostituzione razionale

$$x = \theta(X).$$

Basta invero ricordare come l'esistenza di un integrale iperellittico I riducibile ad un integrale ellittico coi periodi ω, ω', porti di conseguenza l'esistenza d'una curva ellittica

$$p(I \mid \omega, \omega'), \qquad p'(I \mid \omega\,\omega')$$

trasformata razionale della

$$y^2 = \varphi(x),$$

ossia porti l'esistenza d'una involuzione ellittica su quest'ultima curva (e viceversa) (*).

4. Passando ad estendere il teorema del n° 2 alle superficie, stabiliamo che:

Sopra una superficie algebrica una serie razionale (di dimensione $\geqq 1$*) di curve è sempre contenuta totalmente in un sistema lineare.*

Supponiamo che la serie in questione sia ∞^1.

Se essa non è un *fascio* (sistema lineare ∞^1), per ogni punto della data superficie F passa un numero finito $\nu > 1$ di curve della serie: considerando le curve della serie come gli elementi d'un ente algebrico razionale ∞^1 K, ad ogni punto della superficie F corrisponde un gruppo di ν elementi su K. Inversamente si può sup-

(*) Cfr. a proposito della riducibilità degli integrali abeliani (in particolare iperellittici) Picard, Appell, Brioschi, Goursat, Poincaré (Bulletin de la Société Mathématique e Comptes Rendus; 1882-86), come anche Kowalevsky (Acta Mathematica, 1884).

porre senza restrizione (analogamente a ciò che si è fatto nel n° 2) che la data serie di curve su F sia *semplice* e quindi a ciascuno dei detti gruppi di ν elementi su K corrisponda *un* punto di F. Figuriamoci l'ente K come una serie di iperpiani d'indice ν in un S_ν: ai punti di F vengono allora a corrispondere i punti d'una superficie ψ in S_ν (ciascun punto di ψ essendo comune ai ν iperpiani della serie che corrispondono al punto omologo di F): gli iperpiani della serie non sono tangenti a ψ in tutti i punti della linea sezione, altrimenti per ogni punto di ψ passerebbero meno di ν iperpiani; quindi la serie di curve che essi segano su ψ (ciascuna curva essendo contata una volta) viene contenuta totalmente nel sistema lineare delle sezioni iperpiane di ψ.

Il teorema stabilito per le serie di curve ∞^1 si estende alle serie razionali di dimensione > 1, usufruendo della estensione alle superficie dei teoremi sulle serie g_n^r complete relativi alle curve, estensione che si ha colla più generale considerazione dei sistemi normali comunque riducibili (*).

La proposizione stabilita deve essere confrontata coll'interessante teorema del sig. Humbert (**): « Sopra una superficie algebrica « *priva di integrali di differenziali totali* di 1ª specie, *ogni* serie alge- « brica di curve è contenuta totalmente in un sistema lineare ».

Il teorema del sig. Humbert è più generale rispetto alla natura delle serie di curve, che noi supponiamo razionale; esso racchiude invece una restrizione, che non compare nel nostro enunciato, relativamente alla natura della superficie.

Cutigliano Pistoiese, 12 agosto 1895.

FEDERIGO ENRIQUES.

(*) Cfr. la mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie dell'Accad. dei XL, 1895).

(**) *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (Comptes Rendus, 1893).