Enriques, Federigo

Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica $f(xyz) = 0$ con funzioni razionali di due parametri

Math. Annalen **IL** (1897), pp. 1-23.

Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(xyz) = 0$ con funzioni razionali di due parametri.*)

Di

Federigo Enriques a Bologna.

Introduzione.

1. Nella teoria della risoluzione delle equazioni algebriche con più variabili, si presentano successivamente due problemi generali:

1) data un' equazione

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

decidere se e come essa possa *risolversi* ponendo $x_1 x_2 \ldots x_n$ funzioni razionali di $n - 1$ parametri e (eventualmente anche) di determinate funzioni irrazionali di questi parametri;

2) assegnare le irrazionalità numeriche che vengono a comparire nei coefficienti delle anzidette funzioni razionali, considerato come campo di razionalità (nel senso di Kronecker) quello definito dei coefficienti dell' equazione

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0.$$

Questo secondo problema si collega al primo, riferito ad equazioni con un numero maggiore di variabili, perchè se nell' equazione $f = 0$ si suppone che i coefficienti varino dipendendo razionalmente da più parametri, le nominate irrazionalità numeriche divengono irrazionalità algebriche, funzioni di questi parametri.

In ordine al primo problema le equazioni algebriche

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

vengono distribuite in *classi*, ponendosi in una medesima classe due equazioni che si possono trasformare l'una nell' altra mediante una trasformazione birazionale sulle $x_1 x_2 \ldots x_n$

In ordine al secondo problema si possono distribuire le equazioni

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

*) I principali resultati contenuti in questo lavoro sono stati riassuntivamente enunciati in una nota inserita nei Rendiconti delle R. Accademia dei Lincei, Dec. 1895.

di una data classe in più *sotto-classi*, ponendo in una medesima sottoclasse due equazioni che si possono trasformare l'una nell' altra mediante una trasformazione birazionale su $x_1 x_2 \ldots x_n$, *a coefficienti razionali*.

Per brevità diremo che due equazioni sono trasformabili l'una nell' altra se appartengono alla medesima classe, e che sono trasformabili, l'una nell' altra, *razionalmente*, se appartengono alle medesima sottoclasse; vale a dire è sottinteso che la parola „trasformazione" denoti nel seguito „trasformazione birazionale" e che l'aggettivo „razionale" ad essa aggiunto, si riferisca alla razionalità dei coefficienti della trasformazione.

2. La più semplice risoluzione che un' equazione algebrica

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

può ammettere, è una risoluzione con funzioni razionali di $n-1$ parametri, ottenuta ponendo

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(u_1 \ldots u_{n-1}), \\ x_2 = x_2(u_1 \ldots u_{n-1}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = x_n(u_1 \ldots u_{n-1}), \end{cases}$$

dove le espressioni del 2^0 membro sono razionali.

Le formule (1) saranno *in generale invertibili*, cioè permetteranno di esprimere inversamente i parametri $u_1 \ldots u_{n-1}$ come funzioni razionali delle $x_1 \ldots x_n$ legate dalla relazione $f=0$: ma può darsi invece che le formule (1) non sieno invertibili univocamente per modo che ad un gruppo di valori $x_1 \ldots x_n$ corrispondano più gruppi di valori $u_1 \ldots u_{n-1}$.

Se le (1) sono invertibili, esse stabiliscono una trasformazione dell' equazione

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0$$

nell' equazione lineare

$$u_n = 0.$$

Per $n=2$ (Lüroth) e per $n=3$ (Castelnuovo) è stato dimostrato che se un' equazione $f=0$ ammette una risoluzione con funzioni razionali non invertibili, essa ammette altresì una (altra) risoluzione con funzioni razionali invertibili; perciò tutte le equazioni

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (n=2 \text{ o } n=3)$$

risolubili con funzioni razionali, formano l'unica classe che ha per tipo l'equazione $x_n = 0$.

Dunque per $n=2$, $n=3$, il problema di determinare le equazioni $f(x_1 \ldots x_n) = 0$ risolubili con funzioni razionali si riduce al problema di caratterizzare la anzidetta classe di equazioni.

Tale problema è notoriamente risoluto: per $n=2$ da Clebsch; per $n=3$ dal sig^r Castelnuovo: si hanno infatti, nel 1^0 caso un carattere (il *genere*), nel 2º caso tre caratteri (il *genere geometrico* e *numerico* ed il *bigenere*), e l'annullarsi dei generi costituisce la condizione caratteristica della nominata classe di equazioni (risp. per $n=2$, $n=3$).

Sorge ora la questione:

Da quali irrazionalità si può far dipendere la risoluzione con funzioni razionali delle equazioni aventi i generi nulli?

E quindi: A quante sotto-classi o tipi di sotto-classi danno luogo le nominate equazioni?

Riferiamo tale questione ai casi $n = 2$, $n = 3$.

I) Per $n=2$ la questione è stata posta e risoluta dal sig^r Noether*):

Un' equazione

$$f(xy) = 0$$

risolubile con funzioni razionali d'un parametro (ossia di genere zero), può essere risoluta in tal modo *razionalmente* o coll' *estrazione di un radicale quadratico* (da aggiungersi al campo di razionalità dei coefficienti).

Pertanto si hanno due tipi di sotto-classi di equazioni

$$f(xy) = 0$$

di genere zero (l'equazione lineare e l'equazione quadratica).

Si noti che se una equazione $f(xy)=0$ è stata risoluta con funzioni razionali non invertibili (di un parametro), si può, *razionalmente*, ottenere una (nuova) risoluzione di essa con funzioni razionali invertibili.

II) In questo lavoro ci proponiamo di trattare il problema analogo a quello sopra enunciato, per le equazioni fra tre variabili: „da quali irrazionalità si possa far dipendere la risoluzione di una equazione

$$f(xyz) = 0$$

con funzioni razionali invertibili di due parametri (supposta possibile)": la questione analoga che si riferisce alla risoluzione dell' equazione $f(xyz) = 0$ con funzioni razionali non invertibili, comporta in qualche caso una soluzione più semplice, come verrà notato.

Il resultato a cui perveniamo può essere riassunto nell' enunciato:

Se un' equazione

$$f(xyz) = 0$$

è risolubile con funzioni razionali di due parametri (ossia ha tutti i generi nulli), si può sempre farne dipendere la effettiva risoluzione con funzioni razionali invertibili, da operazioni razionali (di eliminazione), dall' *estrazione di radicali quadratici e cubici*, e dalla risoluzione di una delle *equazioni per la bisezione degli argomenti:*

a) delle *funzioni abeliane di genere* 3,

b) o di *funzioni abeliane di genere* 4,

c) o delle *funzioni iperellittiche di genere* p ($= 1, 2, 3 \ldots$).

---

*) „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen", Mathem. Annalen Bd. III.

Il procedimento su cui è fondato il presente studio conduce a distinguere le equazioni $f(xyz)=0$, risolubili con funzioni razionali, in 4 *famiglie*: quelle della prima famiglia (due tipi di sotto-classi analoghe a quelle delle equazioni di genere zero tra due variabili) si risolvono coll' estrazione d'un radicale quadratico (al più); quelle della seconda famiglia danno luogo a più tipi di sotto-classi e la loro risoluzione si riattacca al caso a) dell' enunciato o all' estrazione di radicali quadratici e cubici; quelle della terza e quarta famiglia dan luogo a due tipi di sotto-classi, e la loro risoluzione si riattacca risp. ai casi b) e c) dell' enunciato.

Si aggiunga che delle equazioni della 2ª famiglia può sempre ottenersi una risoluzione con funzioni razionali, astrazione fatta dalla condizione d'invertibilità, colla sola estrazione di radicali quadratici e cubici.

3. Nell' ultima parte del lavoro i resultati ottenuti vengono applicati alla studio della risoluzione dell' equazione in 4 variabili

(1) $$f(x_1 x_2 x_3 x_4)=0,$$

e danno luogo alle seguenti conclusioni:

a) Quando le equazioni

$$f(x_1 x_2 x_3 a)=0,$$

ottenute dalla (1) col dare ad x_4 un valore costante, sono risolubili con funzioni razionali, l'equazione (1) può sempre essere risoluta esprimendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ come funzioni di tre parametri costruite con operazioni razionali e coll' estrazione di radicali quadratici e cubici.

b) Quando sono risolubili con funzioni razionali (di due parametri) tutte le equazioni

$$f(x_1, x_2, x_3, a x_3 + b)=0$$

(in $x_1\, x_2\, x_3$), la (1) è risolubile ponendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ funzioni di tre parametri $u\ v\ w$ e di un radicale quadratico che porta sopra un polinomio (di particolar forma) in $u\ v\ w$.

c) Quando sono risolubili con funzioni razionali (di due parametri) tutte le equazioni in $x_1\, x_2\, x_3$

$$f(x_1, x_2, x_3,\ a x_2 + b x_3 + c)=0;$$

la (1) può risolversi ponendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ funzioni razionali di tre parametri (astrazion fatta dalla condizione d'invertibilità).

Nella risoluzione della

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4)=0,$$

nei casi precedenti, si ottengono semplificazioni corrispondentemente al fatto che le equazioni in 3 variabili di cui l'enunciato discorre appartengono all' una piutosto che all' altra famiglia.

Del resto non è affatto escluso che della nominata equazione $f(x_1 x_2 x_3 x_4)=0$, nei casi sopra enunciati, possa ottenersi con diverso procedimento una risoluzione più semplice. Gli esempi in proposito che ho considerato provano soltanto questo, che: se tutte le equazioni $f(x_1\, x_2\, x_3\, a) = 0$ sono risolubili con funzioni razionali, non si può, in alcuni casi, risolvere $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ ponendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ funzioni razionali di x_4 e di due altri parametri $u\, v$, cone avverrebbe se l'anzidetta risoluzione delle equazioni $f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$ si effettuasse razionalmente, o irrazionalmente in modo tale che le irrazionalità numeriche introdotte non venissero a dipendere dal parametro x_4.

4. Nella introduzione che precede le questioni formanti oggetto di questo lavoro sono state esposte diffusamente in una forma puramente algebrica: è infatti l'interesse algebrico che in esse sembra a noi prevalente.

Nel corso del lavoro, dovendo ricorrere a procedimenti geometrici, faremo anche uso del linguaggio geometrico. Parleremo dunque della classe delle superficie razionali, e di sotto-classi di questa classe; di irrazionalità da cui può farsi dipendere la rappresentazione piana d'una superficie razionale; diremo che una superficie razionale viene trasformata *razionalmente* in un' altra data (o razionalmente rappresentata su di essa), ecc ecc in luogo di riferire le anzidette locuzioni alle corrispondenti equazioni.

Potremo ancora considerare indifferentemente, in luogo di superficie della spazio ordinario S_3, superficie appartenenti ad iperspazi: ciò corrisponde ad estendere le considerazioni relative ad equazioni $f(xyz) = 0$ a sistemi equivalenti di equazioni tra più variabili.

Distinzione delle superficie razionali in 4 famiglie.

5. Sia F una superficie razionale, d'un certo ordine n, in S_3, o in uno spazio più elevato S_r $(r > 3)$. Si dice *punto multiplo proprio* (o *isolato*) per F, un punto O di essa tale che la sezione di F con un piano (o iperpiano) per O abbia un genere inferiore a quello della sezione generica.

La superficie F può essere trasformata *razionalmente* in un' altra superficie, ad essa riferita punto per punto, priva di punti multipli propri.

Il procedimento che può servire ad effettuare una tale trasformazione è quello che andiamo ad esporre, riservandoci a giustificare subito dopo le affermazioni su cui esso riposa.

Ecco dunque il procedimento in parola.

Si considerino tutte le varietà V_m di un ordine m assai elevato dello S_r (o S_3) cui F appartiene: *i punti multipli propri di F essendo in numero finito*, le V_m passanti per essi formano un sistema lineare ampio quanto si vuole (preso m assai grande); questo sistema si lascia staccare razionalmente da quello di tutte le V_m. Si riferiscano proiettivamente le sezioni di F colle indicate V_m (considerate come elementi del sistema lineare che esse formano) agli iperpiani di un conveniente S_ϱ, e si trasformi così la F in una nuova superficie F' di cui le sezioni iperpiane rappresentino quindi le nominate sezioni della F colle V_m.

Ad ogni punto multiplo proprio di F (punto base pel sistema delle V_m) corrisponde sopra F' una curva (semplice o multipla) e in generale anche un certo numero di punti multipli propri su di esse.

La F' non possiede altri punti multipli propri che quelli provenienti nel detto modo dai punti multipli propri di F. Applichiamo ora ad F' una trasformazione analoga a quella fatta subire ad F, ciò che può farsi pure razionalmente. *Dopo un numero finito di operazioni il procedimento ha termine* e si arriva ad una superficie trasformata di F priva di punti multipli propri.

Dobbiamo giustificare le affermazioni sulle quali riposa la validità del procedimento indicato.

La cosa è molto facile posto che si tratta d'una superficie F razionale.

Rappresentiamola punto per punto sul piano e sia $|C|$ il sistema della immagini delle sue sezioni iperpiane: ad un punto multiplo proprio di F corrisponde sul piano una *curva fondamentale propria* di $|C|$, ossia una curva che presenta *una* condizione alle C che debbono contenerla, e diminuisce il genere delle curve residue. Si può escludere che qualcuna di tali curve sia ridotta all' intorno d'un punto base di $|C|$; basta per ciò (eventualmente) trasformare $|C|$ in guisa che esso abbia tutti i punti base distinti; ciò è possibile per un noto teorema del sig^r Noether*). Ora una curva fondamentale propria per $|C|$ è egualmente curva fondamentale propria del sistema $|mC|$ multiplo di $|C|$ secondo un qualsiasi intero m, sistema rappresentativo del sistema delle sezioni di F con tutte le V_m.

Il procedimento di trasformazione fatto subire alla superficie F si traduce sul piano rappresentativo nel modo seguente:

1) si moltiplichi il sistema $|C|$ per un conveniente intero m e si stacchino da esso le curve fondamentali proprie di $|C|$ ed $|mC|$: perchè questo sia possibile, preso m assai grande, occorre provare che le dette curve sono in numero finito;

2) una curva X fondamentale propria per $|C|$ può costituire una o più curve fondamentali proprie per il sistema innanzi costruito

*) „Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function . .“ Mathem. Annalen t. IX e „Rationale Ausführung der Operationen . .“, ibid. t. XXIII. Cfr. anche Bertini „Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche“, Rendic. Istituto lombardo 1888.

$$|C'| = |mC - X - \cdots|;$$

in tal caso ciascuna di queste curve fondamentali proprie deve essere staccata da un multiplo conveniente del sistema $|C'|$:
occorre provare che ripetendo convenientemente queste operazioni si arriva ad un sistema privo di curve fondamentali proprie.

In definitiva tutto ciò che basta provare per la giustificazione del procedimento sopra indicato è contenuto nella affermazione seguente: si può prendere un multiplo così elevato del sistema $|C|$, che, estratte da esso una o più volte le curve fondamentali proprie di $|C|$ o le sue parti irriducibili, si ottenga un sistema residuo per cui tali curve o parti irriducibili non sono più fondamentali.

Questa affermazione si giustifica per assurdo con un semplice calcolo numerico.

Si neghi l'affermazione precedente. Allora da un sistema $|mC|$ multiplo di $|C|$, si possono sempre estrarre curve fondamentali (proprie) pel sistema, finchè la dimensione del sistema stesso lo permette. Ammettiamo dunque tale ipotesi.

Indicato con s l'ordine delle curve piane C, e con $h_1, h_2, \ldots h_\sigma$ le molteplicità dei punti base di $|C|$, si ha che le dimensione del sistema $|mC|$ $m$plo di $|C|$ vale (almeno)

$$\frac{ms(ms+3)}{2} - \Sigma_i \frac{mh_i(mh_i+1)}{2}$$

ossia

$$m^2 \frac{s^2 - \Sigma h_i^2}{2} + m \frac{3s - \Sigma h_i}{2},$$

dove

$$s^2 > \Sigma h_i^2.$$

Al crescere di m il valore dell' espressione precedente dipende essenzialmente dal 1° termine, il quale diviene (da un certo punto in poi) maggiore di

$$m \frac{3s - \Sigma h_i}{2} + sm.$$

Allora, nella ipotesi sopra enunciata, si deve poter estrarre dal sistema $|mC|$ d'ordine sm, sm curve fondamentali proprie; il sistema residuo, per m assai alto, viene ad avere una dimensione quanto si vuole elevata, mentre, l'ordine di ciascuna curva fondamentale di $|C|$ essendo ≥ 1, l'ordine di tale sistema residuo sarebbe nullo (o negativo).

Tale assurdo prova ciò che sopra è stato enunciato. E rimane quindi stabilito che:

Ogni superficie razionale può essere trasformata razionalmente in un' altra priva di punti multipli propri.

6. Sia F una superficie razionale priva di punti multipli propri, e indichiamone con n l'ordine: possiamo supporre che F sia (o sia stata proiettata da punti esterni) in S_3.

Supposto che le sezioni piane di F abbiano il genere $\pi > 1$, consideriano le $\infty^{\pi-1}$ superficie φ_{n-3} d'ordine $n - 3$ aggiunte ad F: queste superficie possono essere determinate *razionalmente* data F, poichè la determinazione di una di esse, passante per $\pi - 1$ punti generici dati, è algebrica e univoca (data F): il problema concreto di assegnare le equazioni delle φ_{n-3}, con operazioni di eliminazione, a partire dall' equazione di F, è analogo a quello che il sig^r Noether ha risoluto per le curve algebriche piane*); questo problema a noi, non importa qui di trattare.

Accade, in generale ($\pi > 3$), che le superficie φ_{n-3} segano su F (fuori della curva multipla) un sistema lineare di curve irriducibili, *semplice*, cioè tale che le curve di esso passanti per un punto generico di F non passano in conseguenza per altri punti variabili col primo; in tal caso questo sistema è anche privo di curve fondamentali proprie**).

Allora se riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema (o ciò che è la stesso le φ_{n-3}) agli iperpiani $S_{\pi-2}$ di un $S_{\pi-1}$, si ottiene *razionalmente* una superficie F' trasformata di F, ancora priva di punti multipli propri.

Noi proietteremo (eventualmente) la F' in S_3, e applicheremo ad F' (se è possibile) una trasformazione analoga a quella operata su F, costruendo una nuova superficie F'' ecc.

Otteniamo razionalmente una serie di superficie, l'una trasformata della precedente col procedimento indicato,

$$F\, F'\, F''\, F''' \ldots :$$

si tratta di decidere se il procedimento avrà termine dopo un numero finito di operazioni, e a quale ultima superficie ci condurrà.

Per esaminare la questione, supponiamo rappresentata la superficie razionale F sopra un piano, e sia $|C|$ il sistema delle immagini delle sezioni piane di F (immagini aventi un certo ordine m): vediamo di costruire sul piano i successivi sistemi $|C'|\; |C''| \ldots$ rappresentativi (delle sezioni piane) risp. di $F'\; F'' \ldots$.

Tale costruzione si effettua subito, giacchè un teorema noto***) ci avverte che $|C'|$ non è altro che il sistema delle curve d'ordine $m - 3$ aggiunte alle C, spogliato eventualmente di parti fisse, ossia

*) „Rationale Ausführung ...“ l. c.

**) Castelnuovo „Sulle superficie di genere o“, Memorie della Società Italiana delle Scienze, ser. III, t. X, 1896.

***) Enriques „Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche — III, 3 —“, Memorie dell' Accademia di Torino, 1893 — e „Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche — 31 —“, Memorie della Società Italiana delle Scienze 1896. Cfr. anche Humbert, Math. Annalen Bd. 45, 1895.

il *sistema aggiunto* a $|C|$: analogamente $|C''|$ è il sistema aggiunto a $|C'|$ ecc.

Gli ordini delle curve di tali sistemi decrescono dall' uno all' altro di 3 (almeno), quindi il procedimento di aggiunzione si esaurisce.

L' ultimo sistema aggiunto $|C^\nu|$ (∞^1 almeno) si compone di curve razionali o ellittiche, o di gruppi di curve razionali o ellittiche d'un fascio.

Per conseguenza la serie delle superficie

$$F\, F'\, F'' \ldots,$$

necessariamente si arresta. Però essa può aver termine o quando ha termine la serie dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$, se questi sistemi sono tutti irriducibili e semplici, o prima. Nel primo caso l'ultima superficie F^ν della serie è una superficie e sezioni razionali o ellittiche. Per esaminare il secondo caso bisogna domandarci quand' è che il procedimento di aggiunzione applicato nel piano, a partire dal sistema $|C|$ irriducibile, semplice e privo di curve fondamentali proprie, può condurre ad un sistema lineare riducibile, o non semplice. La risposta a tale questione è la seguente *):

Nel procedimento di aggiunzione applicato a $|C|$ il primo sistema non più irriducibile, semplice, che può incontrarsi è:

a) un fascio di curve razionali o un sistema costituito con gruppi di curve di un tal fascio, se il penultimo sistema aggiunto è costituito di curve iperellittiche;

b) oppure una rete di curve ellittiche (trasformabile in una rete di cubiche con 7 punti base);

c) oppure un sistema lineare ∞^3 di cure di genere due, trasformabile nel sistema delle sestiche con 8 punti base doppi.

Se ne ricava che se la serie delle superficie

$$F\, F'\, F'' \ldots$$

non termina con una superficie a sezioni razionali o ellittiche, essa termina con una superficie a sezioni iperellittiche, oppure con una superficie la cui successiva trasformata (secondo il procedimento indicato) è un piano doppio con quartica limite rappresentato sul piano semplice dalla rete di curve ellittiche, o un cono quadrico doppio con sestica limite rappresentato sul piano semplice dal sistema ∞^3 delle curve di genere due.

Possiamo dire che negli ultimi due casi il piano o risp. il cono doppio chiudono la serie delle superficie $F\, F'\, F'' \ldots$, e sono superficie (doppie) trasformate di F, ottenute razionalmente.

---

*) Cfr. l'aggiunta del sig^{r} Castelnuovo alla mia memoria „Sui piani doppi di genere uno", Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1896.

Anzi nel riassumere i resultati stabiliti, possiamo considerare i piani doppi con quartica limite come superficie a sezioni ellittiche (d'ordine 2), e però possiamo enunciare che:

Le superficie razionali prive di punti multipli propri si distinguono in 4 famiglie secondochè il procedimento d'aggiunzione a partire dalle loro sezioni piane (o iperpiane) conduce a rappresentare la superficie, senza aggiunta di irrazionali numerici:

1) *sopra una superficie a sezioni razionali,*

2) *o sopra una superficie a sezioni ellittiche* (d'ordine $n \geq 2$) *che, per $n > 2$, è priva di punti doppi,*

3) *o sopra una superficie a sezioni iperellittiche possedente un fascio razionale di coniche,*

4) *o sopra un cono quadrico doppio con sestica di diramazione.*

I 4 tipi di superficie qui enumerati possono dunque riguardarsi come tipi a cui si possono sempre ricondurre le superficie razionali con una trasformazione effettuata senza aggiunta di irrazionalità.

Procediamo ad esaminare partitamente le irrazionalità da cui dipende la rappresentazione piana delle superficie delle 4 famiglie enumerate.

Le irrazionalità da cui può farsi dipendere la rappresentazione piana delle superficie razionali delle 4 famiglie.

7. 1ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia sono le superficie a sezioni razionali; dunque (in S_3) il *piano, la quadrica, le rigate razionali* d'ordine > 2, e la *superficie romana di Steiner**) (del 4⁰ ordine con un punto triplo ecc).

Per rappresentare una quadrica sul piano basta la proiezione da un suo punto, e la determinazione di un punto della quadrica esige l'estrazione d'un radicale quadratico.

Una rigata razionale d'ordine > 2 si può rappresentare sul piano, riferendo proiettivamente gli elementi (generatrici) del suo fascio di rette alle rette d'un fascio nel piano, e proiettando da un qualsiasi asse ciascuna generatrice sulla retta corrispondente del detto piano. La prima operazione esige in sostanza la rappresentazione punto per punto d'una sezione piana della rigata sopra una retta, ossia la rappresentazione sulla retta d'una curva razionale; essa si effettua dunque razionalmente o estraendo un radicale quadratico**).

Infine la superficie di Steiner si rappresenta sul piano razionalmente con proiezione dal punto triplo.

---

*) Cfr. Picard „Sur les surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales", Crelle's Journal Bd. C, 1886.

**) Noether, l. c. Mathem. Annalen Bd. III.

In conclusione, dunque:

Le superficie razionali della 1^a *famiglia si possono rappresentare sul piano estraendo (al più) un radicale quadratico.*

8. 2^a *famiglia*. Tipo di questa famiglia sono le superficie razionali a sezioni ellittiche: possiamo (razionalmente) renderle normali in uno spazio assai elevato; esse divengono allora superficie (non rigate) d'un certo ordine n in S_n, dove $9 \geq n \geq 2$. Tali superficie sono state studiate dal sig^r Del Pezzo*).

Dobbiamo analizzarle partitamente a seconda del loro ordine n.

a) $n = 2$, „piano doppio con quartica di diramazione".

La sua rappresentazione sul piano semplice è stata data dal Clebsch**). L'equazione da cui tale rappresentazione dipende è quella che serve a separare le tangenti doppie della quartica, vale a dire è l'equazione per la bisezione dell' argomento delle funzioni abeliane di genere 3.

b) $n = 3$, „superficie cubica".

Essa si rappresenta sul piano doppio con quartica limite per proiezione da un suo punto: la determinazione di un suo punto importa la risoluzione di un' equazione del 3^0 grado, ossia l'estrazione d'un radicale quadratico e d'un radicale cubico.

Dopo ciò la rappresentazione della superficie sul piano semplice può effettuarsi mediante la risoluzione dell' equazione delle tangenti doppie alla quartica limite del piano doppio, semplificata però in questo caso perchè della nominata equazione è data una radice (è data la tangente doppia della quartica sezione del piano tangente alla superficie cubica nel centro di proiezione scelto)***).

c) $n = 4$, „superficie del 4^0 ordine F_4 normale in S_4, che, per proiezione da un punto esterno, dà una superficie del 4^0 ordine di S_3 dotata di conica doppia".

La superficie viene rappresentata sul piano doppio con quartica limite per proiezione da un punto della conica doppia: la determinazione di un tal punto esige (al più) l'estrazione d'un radicale quadratico; dopo ciò la questione di rappresentare la superficie sul piano semplice è ricondotta al caso a), dove però la relativa equazione appare semplificata essendo data una coppia di tangenti doppie alla quartica limite; è noto, anzi che la nominata equazione si riduce ad un' equazione di

*) „Sulle superficie dello n^0 ordine immerse nello spazio ad n dimensioni", Circolo Matematico di Palermo, t. I. Cfr. anche il mio lavoro nei Mathem. Annalen Bd. 46.

**) „Ueber den Zusammenhang . . .", Mathem. Annalen Bd. III.

***) Il consueto modo di Schläfli per rappresentare la superficie cubica sul piano conduce a risolvere *l'equazione delle* 27 *rette* della superficie, equazione studiata dai sig^i Klein e Burkhardt, e da loro risoluta.

5^0 grado e all' estrazione di 4 radicali quadratici: infatti tale circostanza è rappresentata geometricamente dal fatto che la costruzione di due rette sghembe sopra una superficie cubica F_3 di cui è data una retta r, dipende dalla separazione dei 5 piani tritangenti alla F_3 passanti per r ecc.

d) $n = 5$ „superficie F_5 del 5^0 ordine normale in S_5“.

Questa superficie F_5 si può rappresentare sul piano razionalmente. Basta procedere nel seguente modo.

Si proietti la F_5 da punti esterni in S_3: la superficie proiezione, del 5^0 ordine, possiede una curva doppia del 5^0 ordine dotata di punto triplo (triplo per la superficie)*). A questo punto triplo corrisponde su F_5 una terna di punti che viene così determinata razionalmente: si seghi ora F_5 con un S_3 passante per i 3 punti della terna nominata, costruiremo in tal modo razionalmente su F_5 una coppia di punti. Proiettiamo F_5 dalla coppia di punti in S_3: la superficie proiezione è una superficie cubica su cui è data (razionalmente) una coppia di rette sghembe; ora questa superficie cubica (e quindi F_5) si rappresenta sul piano razionalmente, col noto procedimento del sig^r Schläfli, usando della congruenza lineare di rette che ha come direttrici le rette della coppia nominata.

e) $n = 6$, „superficie F_6 del 6^0 ordine in S_6“.

Per rappresentarla sul piano basta fissarne un punto O, proiettarla dal piano tangente in esso sopra una quadrica, e quindi proiettare la quadrica da un suo punto che può essere fissato razionalmente come immagine di un punto infinitamente vicino ad O sulla superficie obiettiva.

Vediamo da che si può far dipendere la determinazione di un punto della superficie F_6 di S_5.

Basta evidentemente determinare su F_6 una retta.

Ora (e ciò che si afferma qui vien subito verificato esaminando la rappresentazione piana di F_6 col sistema delle cubiche per 3 punti base, non in linea retta) sopra F_6 vi sono 6 rette le quali si distribuiscono in due terne; quelle di una terna sono incidenti a quelle dell' altra e sghembe fra loro. Dunque l'equazione del 6^0 grado da cui dipende la separazione delle 6 rette su F_6 si spezza in due equazioni del 3^0 grado (corrispondenti alle due terne) separabili coll' estrazione d'un radicale quadratico.

Mediante la risoluzione di equazioni siffatte si può quindi rappresentare la F_6 sul piano.

f) $n = 7$, „superficie F_7 del 7^0 ordine in S_7“.

---

*) Cfr. Clebsch, Cremona e soprattutto Caporali „Sulle superficie del 5^0 ordine dotota di una curva doppia del 5^0 ordine“, Annali di Matematica, s^e II, t. 7.

La F_7 (come risulta dalla sua rappresentazione piana) contiene 3 rette; due sghembe fra loro e l'altra incidente ad esse: da quest' ultima retta (che è costruibile razionalmente) la F_7 vien proiettata in una superficie di Veronese di S_5, e quindi da punti esterni sulla superficie di Steiner in S_3; dunque (v^i a)), la F_7 si può rappresentare sul piano razionalmente.

g) $n = 8$, „superficie F_8 dell' 8^0 ordine in S_8".

Vi sono due tipi di superficie F_8: la superficie rappresentabile sul piano col sistema delle cubiche con un punto base, e quella rappresentabile col sistema delle quartiche con due punti base doppi: ambedue possono rappresentarsi sul piano razionalmente.

Invero la F_8 di 1^a specie possiede una retta da cui viene proiettata in una rigata del 5^0 ordine di S_5, la quale si rappresenta sul piano razionalmente. Invece la F_8 di 2^a specie possiede una rete di quartiche dotata di un punto base semplice, e da questo punto viene proiettata nella F_7 di S_8 che, come abbiam visto, si rappresenta sul piano razionalmente.

h) $n = 9$, „superficie F_9 del 9^0 ordine in S_9".

La rappresentazione piana della F_9 può farsi dipendere dalla determinazione di un suo punto, dal quale le F_9 vien proiettata su una F_8 di S_8.

Vediamo come si può determinare un punto della F_9 risolvendo soltanto un' equazione di 4^0 e una di 3^0 grado, mentre a priori apparirebbe soltanto la possibilità di far dipendere la determinazione di un punto di F_9 dalla risoluzione di un' equazione di 9^0 grado.

Notiamo per questo che la relazione tra una cubica e la sua hessiana nel piano (rappresentativo di F_9), si rispecchia in una relazione per la quale ad ogni sezione iperpiana di F_9 corrisponde un' altra sezione iperpiana, razionalmente determinabile, che chiameremo la hessiana della prima.

Ora fra le sezioni iperpiane di F_9, che sono curve ellittiche, si distinguono quelle equianarmoniche: le sezione hessiana corrispondente ad una sezione equianarmonica di F_9 si spezza in 3 cubiche secantisi due a due in *un* punto. In un fascio di sezioni iperpiane di F_9 ve ne sono 4 equianarmoniche: se ne può determinare *una* risolvendo una equazione dal 4^0 grado; dopo ciò si potranno separare i 3 punti doppi della sua curva hessiana su F_9 (spezzata in 3 cubiche) risolvendo un' equazione del 3^0 grado: dunque colla risoluzione delle menzionate equazioni di 4^0 e 3^0 grado (che importano l'estrazione di radicali quadratici e cubici) si può determinare un punto di F_9 e quindi rappresentare la F_9 sul piano.

Riassumendo i resultati ottenuti avremo il seguente enunciato:

Le superficie razionali della 2^a famiglio si possono rappresentare senza introdurre irrazionalità

1) *sopra il piano semplice,*

2) *o sopra il piano doppio con quartica di diramazione,*

3) *o sopra la superficie cubica di* S_3,

4) *o sopra la superficie del* 4^0 *ordine con conica doppia di* S_3 (o ciò, che è lo stesso, sulla superficie normale del 4^0 ordine in S_4 di cui questa è proiezione),

5) *o sopra la superficie del* 6^0 *ordine a sezioni ellittiche di* S_6,

6) *o sopra la superficie del* 9^0 *ordine a sezioni ellittiche di* S_9.

La rappresentazione piana di queste superficie razionali della 2^a *famiglia si può sempre ottenere estraendo radicali quadratici e cubici e risolvendo un' equazione per la bisezione delle funzioni abeliane di genere* 3.

Osservazione. Sia data una superficie F e sopra di esse una rete di curve ellittiche. Allora (seguendo il sig^r^ Castelnuovo)*) si può rappresentare la F sopra una involuzione del piano, nel modo seguente.

Si prenda su F un punto O e si considerino le curve (ellittiche) C della rete passanti per O: esse formano un fascio razionale. Indicando con n l'ordine delle nominate curve C, resta determinata su ciascuna C una serie completa g_n^n: la serie segata sulla C dai piani (o iperpiani) del suo spazio, resa completa. Il punto O contato $n-1$ volte dà luogo ad *un* gruppo della g_n^n che ha un punto residuo O'. Variando la C nel fascio, O' descrive su F una curva razionale K coordinata ad O.

Prendiamo ora un punto O' sulla K; la curva razionale K' ad esso coordinata su F, descriverà una serie razionale ∞^1. Possiamo far corrispondere le curve della serie alle rette d'un fascio nel piano, riferendo queste rette ai punti della K: ciò si effettua razionalmente, perchè la K (pel modo di costruzione) è già rappresentata sopra il fascio delle curve C per O, e quindi sul fascio delle tangenti (ad esse e) ad F in O. Dopo ciò possiamo riferire punto per punto ciascuna K' alla corrispondente retta del fascio nel piano; anche ciò si effettua (in modo analogo) razionalmente. Ne risulta una rappresentazione della F sopra una involuzione dal piano, rappresentazione costruita razionalmente appena è dato il punto O di F.

Deduciamo:

Una superficie razionale della 2^a *famiglia può essere rappresentata sopra una involuzione piana coll' introduzione delle sole irrazionalità occorrenti a fissarne un punto; ossia coll' estrazione di radicali qaadratici e cubici* (al più).

Vale a dire:

Un' equazione della 2^a *famiglia può essere risoluta con funzioni razionali non invertibili mediante la sola estrazione di radicali quadratici*

*) „Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche", Rendic. Accad. dei Lincei, 1894.

e cubici: le irrazionalità superiori, di cui si è discorso, compariscono solo quando si voglia una risoluzione di essa con funzioni razionali invertibili.

9. 3ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia sono le superficie, a sezioni iperellittiche, contenenti un fascio lineare di coniche.

La rappresentazione piana di tali superficie è stata data dal sig^r Noether*) il quale ha dimostrato l'esistenza di una curva unisecante le coniche del fascio sopra la superficie, curva da cui dipende (razionalmente) la menzionata rappresentazione.

Per vedere da quali irrazionalità si possa far dipendere la costruzione della unisecante e quindi la rappresentazione della superficie basterà estendere ciò che Clebsch**) ha fatto per la superficie del 4⁰ ordine con retta doppia. Procediamo dunque nel modo seguente. Cominciamo dal riferire proiettivamente gli elementi (coniche) del fascio sulla superficie, alle rette di un fascio nel piano: tale riferimento di un ente razionale ad un fascio di raggi, esige (al più) l'estrazione di un radicale quadratico. Dopo ciò proiettiamo (da un punto del suo piano) ciascuna conica sulla corrispondente retta: con questa costruzione (effettuabile razionalmente) si rappresenta la data superficie sopra un piano doppio con curva di diramazione C_{2n}, d'un certo ordine $2n$, dotata di un punto $(2n-2)$plo O.

Una curva, sopra la superficie, unisecante le coniche del fascio, dà nel piano una curva d'un certo ordine m, avente il punto O come $(m-1)$plo, e tangente, ovunque la incontra, alla C_{2n}.

Per $m=2n-2$ possiamo risolvere il problema della determinazione di una F_m siffatta, colla estrazione di radicali quadratici e la risoluzione di un' equazione per la bisezione delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n}. Supponiamo qui, dapprima, che C_{2n} sia irriducibile; denotiamo con p il genere di essa curva. Si prendano su C_{2n} $n-1$ punti generici che possono determinarsi (con altrettante estrazioni di radicali quadratici) sopra $n-1$ rette uscenti da O. Allora (come è noto) vi sono 2^{2p} curve C_{2n-2}, d'ordine $2n-2$, aggiunte a C_{2n} che toccano C_{2n} negli $n-1$ punti assegnati ed altrove in p punti: la separazione di queste C_{2n-2} dipende appunto dalla risoluzione di un' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane (iperellittiche) inerenti a C_{2n}***).

---

*) l. c. Mathem. Annalen Bd. III.

**) „Ueber die Abbildung algebraischer Flächen ...", Mathem. Annalen Bd. I; „Ueber den Zusammenhang ...", ibid. Bd. III.

***) Cfr. Clebsch e Gordan „Theorie der Abel'schen Functionen, S. 265". L'equazione, come è noto, si riduce ad una equazione di grado $2p+2$ e all' estrazione di radicali quadratici. Questo fatto fondamentale risale a Riemann. Cfr. a questo proposito vari lavori nei Mathematische Annalen, di Weber (Bd. 13), Noether (Bde. 14, 16), e, per $p=2$, di Burkhardt (Bd. 35).

Lievi modificazioni occorrono pel caso che C_{2n} sia riducibile. In tal caso lo spezzamento di C_{2n} può supporsi consistere soltanto nello staccarsi da essa di un certo numero h di rette distinte per O, in guisa che la residua curva C_{2n-h} sia irriducibile ad abbia O come punto $(2n-h-2)$plo: invero nella curva di diramazione d'un piano doppio si può sempre contare una volta sola (al più) le componenti multiple, e d'altra parte se da C_{2n} si staccasse una curva unisecante le rette per O (fuori di O) tale curva fornirebbe già sopra la data superficie una unisecante delle coniche del fascio ivi considerato.

Denoteremo ora con p il genere di C_{2n-h}. Ciò posto si prenda su ciascuna delle h rette per O facenti parte di C_{2n}, una delle due intersezioni con C_{2n-h}; si hanno così h punti di C_{2n-h}: ulteriormente si fissino (come innanzi) su C_{2n-h}, $n-1-h$ punti, e si considerino le curve C_{2n-h-2} d'ordine $2n-h-2$ aggiunte a C_{2n-h} che passano per questi $n-1-h$ punti e toccano ivi la C_{2n-h}, e che passano inoltre (semplicemente) per gli h punti prima nominati: queste C_{2n-h-2} segano su C_{2n-h} una serie g^p_{2p}; fra esse vi sono 2^{2p} C_{2n-h-2} che toccano (fuori dei punti fissati) la C_{2n-h} in p punti; tali curve toccano, ovunque la incontrano, la C_{2n} di diramazione del piano doppio. La loro determinazione dipende dalla risoluzione di un' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n-h}.

Come abbiamo innanzi accennato, una curva unisecante le rette per O (fuori di O) e tangente alla C_{2n} di diramazione dal piano doppio ovunque la incontra, rappresenta due curve unisecanti le coniche del fascio sopra la data superficie F, curve staccabili coll' estrazione di un radicale quadratico. Data una di queste curve unisecanti si può rappresentare la superficie F sul piano, proiettando ogni conica di F sopra una retta del suo piano dal punto della nominata unisecante posto sopra la conica.

Concludiamo che:

Le superficie razionali della 3^a famiglia si possono rappresentare sul piano coll' estrazione di radicali quadratici e la risoluzione di un' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni iperellittiche di genere (qualsiasi) p.

10. 4^a *famiglia.* Tipo di questa famiglia è il cono quadrico doppio con sestica di diramazione (genere 4).

Questo cono quadrico doppio si riduce (per proiezione da un suo punto) al piano doppio con sestica di diramazione dotata di due punti tripli infinitamente vicini: la rappresentazione di questo piano doppio sul piano semplice è dovuta al sig^r Noether*) che l'ha ottenuta

*) „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen", Sitzungsberichte der physik. medicin. Soc. zu Erlangen, 1878, 14. Januar.

mediante la determinazione delle cubiche aggiunte alla sestica, che la toccano ovunque la incontrano, cubiche spezzate nella retta dei due punti tripli e in una conica per essi. Veramente il sig^r^ Noether (l. c. p. 85) nota soltanto come data *una* tal conica tritangente alla detta sestica il piano doppio dato si riconduce al piano doppio con quartica limite; ma se in luogo di una sola, vengono date più, $\varrho > 1$, convenienti coniche tritangenti, il piano doppio si può ricondurre (razionalmente) ad una superficie a sezioni ellittiche d'ordine $\varrho + 1$, e quindi (p. e. per $\varrho = 4$) rappresentarsi razionalmente sul piano semplice. Dunque la rappresentazione sul piano semplice del cono quadrico doppio con sestica di diramazione di genere 4, si può ottenere determinando i piani tritangenti alla nominata sestica. Perciò *il problema della rappresentazione piana delle superficie della* 4^a^ *famiglia si può ridurre alla risoluzione dell' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane di genere* 4 inerenti alla sestica, equazione da cui dipende la separazione dei $2^3(2^4 - 1)$ piani tritangenti alla sestica stessa*).

11. Riassumendo:

La rappresentazione piana delle superficie razionali si può far dipendere, oltrechè da operazioni razionali e dall' estrazione di radicali quadratici e cubici, dalla risoluzione di una delle equazioni per la bisezione degli argomenti

delle funzioni abeliane di genere 3 *o* 4,

o delle funzioni iperellittiche di genere p $(= 1, 2, \ldots)$.

Applicazioni alle varietà con un sistema lineare di superficie razionali.

12. I resultati ottenuti innanzi permettono una applicazione immediata alle varietà algebriche V (di tre dimensioni) che posseggono un *fascio* di superficie razionali, cioè un sistema di superficie razionali siffatto che per ogni punto della varietà passi *una* superficie del sistema.

Ci limiteremo al caso più notevole in cui il fascio (considerato come un ente ∞^1 di cui le superficie sono gli elementi) sia razionale. Possiamo allora riferire proiettivamente gli elementi (superficie) del fascio su V agli iperpiani (S_3) passanti per un piano fisso di S_4 (o agli iperpiani d'un fascio in uno spazio più elevato) e rappresentare ciascuna superficie su una superficie del corrispondente iperpiano; *purchè questa operazione si compia razionalmente* si otterrà una trasformazione birazionale facente passare dalla data varietà ad una varietà avente come sezioni iperpiane di un fascio le superficie costruite; questa trasformazione risulterebbe invece irrazionale, se nell' eseguire l'operazione precedente comparissero delle irrazionalità numeriche, giacchè, al

*) Cfr. Clebsch e Gordan, „Theorie der Abel'schen Functionen" S. 264; Weber, Math. Ann. 13, Noether ibid. 28, 33; Schottky, Crelle's Journal 103.

variare della superficie nel dato fascio su V, queste irrazionalità verrebbero a dipendere da un parametro.

Ciò posto esaminiamo partitamente i 4 casi che si ottengono corrispondentemente alle 4 famiglie cui le superficie del fascio su V possono appartenere.

13. a) Se le dette superficie appartengono alla 1ª famiglia, si può anzitutto trasformare V in una varietà W di S_4 le cui sezioni iperpiane d'un fascio sieno a sezioni razionali: ciascuna di queste superficie F si può rappresentare *razionalmente* sul piano appena se ne sia determinato un punto. Si otterrà dunque la rappresentazione di W sopra S_3, rappresentando le dette superficie F risp. sopra i piani per una retta in S_3, purchè si costruisca su W una curva unisecante le F.

Ora una tale curva esiste sempre: infatti si seghi W con un iperpiano generico; questo iperpiano sega le F secondo curve razionali formanti un fascio razionale sulla superficie φ sezione di W coll' iperpiano; come il sig^r Noether*) ha dimostrato esiste sempre una curva unisecante quelle del fascio su φ, questa curva sega in *un* punto le F. Risulta così provato che:

Le varietà (di tre dimensioni) contenenti un fascio razionale di superficie razionali della 1ª famiglia si possono rappresentare punto per punto su S_3, rappresentando le nominate superficie sui piani per una retta in S_3.

14. b) Si abbia una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 2ª famiglia: si può supporre che la varietà sia in S_4, e le superficie del fascio sieno le sezioni iperpiane per un piano fisso, e sieno superficie F a sezioni ellittiche di un certo ordine $n \leq 9$ (incluso il caso $n = 2$ in cui la V si riduce ad un S_3 doppio con superficie limite d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$ pla). Per $n = 5$ o per $n = 7, 8$ la V si può rappresentare su S_3 rappresentando punto per punto le F sopra i piani d'un fascio.

Per $n = 4$ si può rappresentare ciascuna F sopra un piano doppio con quartica limite, razionalmente, appena si sia determinato un punto della conica doppia di F: ora le coniche doppie delle superficie F formano una superficie su cui si può costruire una unisecante di quelle coniche**) (se le dette coniche sono spezzate la affermazione vale ancora); dunque per $n = 4$ si può sempre rappresentare la varietà V sullo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$ pla.

Concludiamo che:

---

*) l. c. Mathem. Annalen Bd. III.

**) Noether l. c.

Una varietà V con un fascio di superficie razionali F della 2ª famiglia si può rappresentare

1) *sopra le S_3 in modo che le F vengano rappresentate sui piani d'un fascio;*

2) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$ pla, rappresentando le F sui piani doppi per questa retta (dotati di quartica limite);*

3) *o sopra una varietà di un certo ordine m in S_4, dotata di piano $(m - 3)$ plo, rappresentando le F sulle superficie cubiche sezioni della varietà cogli iperpiani pel detto piano;*

4) *o sopra una varietà di S_4 possedente un fascio di superficie sezioni del 6⁰ ordine a curve sezioni ellittiche, immagini delle F;*

5) *o sopra una varietà di S_4 possedente un fascio di superficie sezioni del 9⁰ ordine a curve sezioni ellittiche, immagini delle F.*

Se vi è su V una curva unisecante le F, la V nei casi 4), 5) si può rappresentare nel modo 1) sullo S_3 semplice, e nel caso 3) si può rappresentare nel modo 2) sopra uno S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$ pla.

Infatti le superficie razionali a sezioni ellittiche degli ordini 6 e 9 si possono rappresentare sopra un piano razionalmente dato un loro punto; mentre, dato un punto di una superficie cubica, questa vien proiettata da esso sul piano doppio con quartica limite.

È dubbio se tali riduzioni possono ottenersi in generale. Certo è soltanto che i casi 2) e 3) dell' enunciato non possono sempre ridursi al caso 1). Per convincersene basta considerare il fascio generale di superficie cubiche di S_3, e riconoscere (come è facile) che non è possibile trasformarlo in un fascio di piani mediante una trasformazione cremoniana.

15. c) *Una varietà V con un fascio di superficie razionali della 3ª famiglia si può rappresentare sopra una varietà contenente una congruenza (d'indice 1) di coniche* (cioè un sistema ∞^2 di coniche tale che per un punto ne passi una): la congruenza sarà razionale se è razionale il fascio delle superficie considerate.

La dimostrazione dell' enunciato è immediata posto che già sappiamo potersi trasformare ogni superficie della 3ª famiglia, razionalmente, in una superficie con un fascio di coniche; basta notare che una serie di fasci di coniche appartenenti alle superficie d'un fascio dà appunto luogo ad una congruenza (d'indice 1).

Come corollario si ha subito:

Una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 3ª famiglia si può rappresentare sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di punto $(2n - 2)$ plo.

Omettiamo la ovvia dimostrazione.

Digressione. Notiamo piuttosto un' altra forma (alquanto più comprensiva) che si può dare facilmente ai resultati precedenti:

Una varietà V che contenga una congruenza (*d'indice* 1) *di curve razionali, si può trasformare in una varietà con una congruenza di coniche.*

Questo teorema appare come una diretta estensione del teorema del sig[r] Noether relativo alle superficie con un fascio di curve razionali (l. c.), e si può dimostrare collo stesso procedimento, generalizzato. È da notarsi che le coniche della congruenza su V possono essere riferite alle rette d'un cono di S_4 (o, in particolare d'una stella di S_3) se esiste su V una superficie che le seghi in *un* punto: una tale superficie esiste sempre se le dette curve sono d'ordine dispari (cfr. Noether l. c.); ma nel caso opposto non esiste sempre, neppure se la congruenza è razionale: infatti si hanno esempi in proposito relativi alle congruenze di coniche di S_3, di cui il sig[r] Montesano ha assegnato i tipi irriducibili per trasformazioni birazionali*).

Un corollario della precedente osservazione ci permette di affermare che:

Una congruenza (d'indice 1) *di curve razionali d'ordine dispari in S_3 si può sempre trasformare birazionalmente in una stella di rette.*

16. d) Si abbia una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali F della 4ª famiglia: la V si può trasformare in una varietà doppia W riferendo le F ai coni quadrici doppi con sestica limite, d'un fascio: siccome questo fascio è razionale si può costruire una curva unisecante i detti coni quadrici (cfr. n⁰ 13); si può quindi proiettare ciascun cono quadrico doppio dal punto della curva unisecante che gli appartiene, sopra un piano doppio con sestica limite dotata di due punti tripli infinitamente vicini. Così si perviene al resultato:

Una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 4ª famiglia si può rappresentare sopra lo S_3 doppio dotato di superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ con due punti $(2n-3)$ *pli infinitamente vicini* (congiunti da una retta $(2n-6)$ pla).

17. Si abbia una varietà V (algebrica, di tre dimensioni) contenente una *rete* di superficie razionali F; cioè un sistema ∞^2 di esse, tale che per due punti generici di V ne passi *una* (sistema necessariamente razionale, essendo sottintesa la irriducibilità delle F**)). Le F passanti per un punto generico di V formano un fascio razionale: il punto base del fascio tien luogo di una curva unisecante le F. Per

*) Montesano „Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio", Rendic. dell' Accad. di Napoli 1895.

**) Enriques „Una questione sulla linearità ecc.", Rendic dell' Accad. dei Lincei 1893.

conseguenza ricordando i resultati ottenuti per le varietà con un fascio di superficie razionali, possedenti una unisecante, si avrà:

Una varietà V con una rete di superficie razionali può sempre essere rappresentata

1) *sopra lo S_3 semplice,*

2) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ con retta $(2n-4)$ pla,*

3) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di punto $(2n-2)$ plo,*

4) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di due punti $(2n-3)$ pli* (congiunti da una retta $(2n-6)$ pla).

Nel caso 2) si può rappresentare la V sopra una involuzione di S_3 (cfr. n⁰ 8) ossia risolvere con funzioni razionali non invertibili di tre parametri, l'equazione della V.

Un resultato analogo si ottiene anche nei casi 3) e 4), col procedimento che andiamo ad indicare, sotto le condizioni che dal procedimento stesso appariranno necessarie.

Ragioniamo come se le superficie razionali F della rete su V sieno tutte prive di punti multipli propri: non è questa una restrizione che introduciamo, perchè, se tale ipotesi non fosse verificata, sarebbe facile di mostrare come si possa trasformare V in modo che contemporaneamente tutte le F della rete perdano i loro punti multipli propri.

Ciò posto, col procedimento di aggiunzione esposto si può (nei casi 3), 4) che stiamo considerando) costruire razionalmente sopra ciascuna F un fascio (ultimo aggiunto) di curve C, fascio di curve razionali (3)), o fascio di curve ellittiche aggiunto al sistema ∞^3 di curve di genere due (4)).

Poniamoci nel caso 3) e supponiamo che le intersezioni delle superficie F (due a due) non si compongano delle curve razionali C, sopra nominate. Allora le curve C su V sono ∞^3: le C per un punto O di V formano una serie ∞^1 razionale, essendovi una C sopra ogni F pel punto O, visto che le F per O formano un fascio razionale: tracciamo sopra una F una qualsiasi curva razionale K; le ∞^2 C che si appoggiano a K in un punto formano una serie razionale ∞^2 e (essendo la K arbitraria) invadono tutta la varietà V:

possiamo far corrispondere agli elementi C della detta serie razionale ∞^3, le rette d'nna stella in S_3, e rappresentare ciascuna C sulla corrispondente retta, ciò che si effettua razionalmente avendosi sopra ogni C *un* punto*), il punto in cui essa C si appoggia alla K. Così si viene a far corrispondere ad ogni punto di S_3 *un* punto di V_3.

*) Noether l. c.

Poniamoci invece nel caso 4) e supponiamo che le intersezioni delle F due a due, non si compongano delle curve ellittiche C. Queste C sono dunque ∞^3, e le ∞^1 C passanti per un punto O di V formano una serie razionale. Sopra ogni C per O si può costruire razionalmente un punto A residuo di O contato $n-1$ volte rispetto alle serie g^n_n determinata su C dagli iperpiani dello spazio cui essa appartiene: variando C per O il punto A descrive una curva razionale K_0.

Ad ogni punto A di K_0 corrisponde analogamente una curva razionale K_A e l'insieme di queste curve costituisce una superficie φ su V, che si può riferire, razionalmente, ad una involuzione sopra un piano.

È facile costruire una serie ∞^1 razionale di superficie φ su V; basta far variare il punto O sopra una curva razionale su V (p. e. appartenente ad una F): allora se si fan corrispondere gli elementi φ della serie ai piani d'un fascio in S_3, e si rappresenta ciascuna φ sopra una involuzione appartenente al piano omologo (operazione che si compie razionalmente), si sarà in definitiva rappresentato V sopra una involuzione di S_3.

Concludiamo:

Se una varietà V contiene una rete di superficie razionali di cui le mutue intersezioni variabili non si compongono di curve razionali o ellittiche, la V può essere rappresentata sopra una involuzione di S_3, in modo che ad ogni punto di S_3 corrisponda un punto di V.

18. Il precedente teorema dà luogo ad un corollario relativo alle varietà V possedenti un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali F, le cui intersezioni, due a due, sieno irriducibili. In questo caso se le intersezioni di due F sono razionali o ellittiche si ha sopra ciascuna F una rete di curve razionali o ellittiche (segata dalle altre F) onde ciascuna F può essere riferita, razionalmente, ad una superficie razionale della 1ª o 2ª famiglia e quindi ad una involuzione piana.

Abbiamo dunque:

Una varietà contenente un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali ad intersezioni variabili irriducibili può essere rappresentata sopra una involuzione di S_3.

19. Tutti gli enunciati precedenti possono essere tradotti sotto forma algebrica, come nell' introduzione.

Per averne l'espressione più semplice, giova supporre la V in S_4, e supporre che le superficie razionali formanti il fascio, o la rete, o il sistema lineare ∞^3, su V, sieno sezioni iperpiane di essa. Allora si può prendere risp. come fascio, rete, sistema ∞^3 degli iperpiani secanti, il fascio

$$x_4 = a,$$

o la rete

$$x_4 = ax_3 + b,$$

o la stella

$$x_4 = ax_1 + bx_2 + c$$

dove a, b, c sono parametri. È inutile ripetere quì gli enunciati che si trovano nell' introduzione. Ci limitiamo a notare che, relativamente all' ultimo caso, si può sopprimere in esso la condizione di irriducibilità delle mutue intersezioni delle ∞^3 superficie razionali (segate su V dagli iperpiani d'una stella), giacchè tali intersezioni possono esser riducibili soltanto se la V è un cono (razionale). Pertanto siamo condotti ad enunciare il resultato:

Si abbia una equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

e si supponga che tutte le equazioni

$$f(x, x_2, x_3, \; ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0$$

(dove a, b, c sono parametri fissi) *sieno risolubili ponendo* $x_1\, x_2\, x_3$ *funzioni razionali di due parametri; allora la equazione*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

si può risolvere ponendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ *funzioni razionali di tre parametri* (fatta astrazione dalla condizione di invertibilità).

Come caso particolare desumeremo la possibilità di risolvere con funzioni razionali di 3 parametri: l'equazione generale del 3^0 grado in 4 variabili (resultato cui il sig^r Noether è giunto direttamente nel modo più semplice); l'equazione

$$x_4^2 = f_4(x_1 x_2 x_3)$$

dove f è un polinomio generale del 4^0 grado; l'equazione

$$x_4^2 = f(x_1 x_2 x_3)$$

dove f è un polinomio di 6^0 grado che posto $= 0$ rappresenta una superficie del 6^0 ordine con due rette triple infinitamente vicine ecc. Ma le risoluzioni ottenute di tali equazioni sono tutte risoluzioni con funzioni razionali (di 3 parametri) non invertibili. Se, in altro modo, si possano risolvere le predette equazioni con funzioni razionali invertibili (di 3 parametri), è una questione che rimane tuttora insoluta.