
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$. Nota I

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **VII** (1897), pp. 234-240.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques" promosso dal

*Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali*

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Estratti dal vol. VII. 1° sem., serie 5^a, fasc. 8° e 9°. — Sedute del 17 aprile e 1° maggio 1898.

SUI PIANI DOPPI DI GENERE LINEARE

$$P^{(1)} = 1$$

N O T A

DI

FEDERIGO ENRIQUES



**DONO
DEL
PROF. S. PINCHERLE**

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$.*
Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

1. I caratteri di una superficie algebrica: *genere superficiale, numerico e geometrico, genere lineare e bigenere* ⁽¹⁾, verranno denotati rispettivamente con p_n , p_g , $p^{(1)}$, P .

Studieremo superficie

$$z^2 = f(xy),$$

ossia *piani doppi* $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$, dove la *curva di diramazione* $f(xy) = 0$, se pure riducibile, può supporre non contenere parti multiple.

Abbiamo dimostrato che per una superficie qualunque si ha

$$P \geq p_n + p^{(1)}$$

purchè esista sopra la superficie una effettiva *curva canonica* (d'ordine > 0), e risulta anche

$$P \leq p_g + p^{(1)}$$

se $p^{(1)} > 0$.

Abbiamo già determinato ⁽²⁾ tutti i piani doppi pei quali

$$p_n = P = 1$$

(e quindi anche $p_g = p^{(1)} = 1$), cioè i piani doppi che corrispondono a superficie di genere superficiale 1 sopra le quali *manca* la curva canonica.

Ci proponiamo ora di indicare, in questa Nota, la classificazione dei piani doppi per cui

$$p^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad P > 1,$$

fra i quali rientrano i piani doppi di genere superficiale 1 possedenti una effettiva curva canonica ellittica. La classificazione s'intende fatta assegnando i *tipi* cui i nominati piani doppi $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$ possono ricondursi con una trasformazione birazionale su x, y .

(1) Cfr. il cap. VI della mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*. Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896; oppure: Castelnuovo e Enriques, *Sur quelques récents résultats...* Mathematische Annalen, Bd. 48.

(2) *Sui piani doppi di genere uno*. Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896.

I tipi dei piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$ e bigenere $P > 1$, sono i seguenti:

I. *Piani doppi con curva di diramazione C_{2n} , d'ordine $2n(n > 3)$, dotata d'un punto O $(2n - 4)^{p^{10}}$ o $(2n - 3)^{p^{10}}$ e*

1) nessun'altra singolarità

$$p_n = p_g = n - 2 \qquad P = 2n - 5;$$

2) un punto $4^{p^{10}}$ distinto da O

$$p_n = p_g = n - 3 \qquad P = 2n - 6;$$

3) r coppie di punti $3^{p^{10}}$ infinitamente vicini allineate con O (che è essenzialmente $(2n - 4)^{p^{10}}$) sopra rette facenti parte di C_{2n}

$$p_n = n - 2 - r, \quad p_g = p_n \text{ o } p_g = 0, \quad P = 2n - 5 - r;$$

4) r punti $4^{p^{10}}$ infinitamente vicini ad O $(2n - 4)^{p^{10}}$, o r punti $3^{p^{10}}$ infinitamente vicini ad O $(2n - 3)^{p^{10}}$ ($3r \leq 2n - 3$)

$$p_n = p_g = n - 2 - r \qquad P = 2n - 5 - 2r;$$

5) r punti $4^{p^{10}}$ infinitamente vicini ad O (essenzialmente $(2n - 4)^{p^{10}}$) ed inoltre h (> 0) coppie di punti $3^{p^{10}}$ infinitamente vicini ad O sopra rette per O facenti parte di C_{2n} ($4r + 3h \leq 2n - 4$)

$$p_n = p_g = n - 2 - r - h \qquad P = 2n - 5 - 2r - h.$$

II. *Piani doppi di cui la curva di diramazione si compone di r curve C_{3s} con 9 punti $s^{p^{10}}$ comuni (appartenenti ad un fascio di Halphen), ed eventualmente anche (per r, s dispari ed $s > 1$) della cubica C_3 che passa pei 9 punti:*

$$p_n = 1 \qquad p_g = \left[\frac{r+1}{2} \right]$$

$$P = \frac{3r-4}{2} \qquad \text{per } s = 1 \qquad (r \text{ pari}),$$

$$P = \left[\frac{3r}{2} \right] \qquad \text{per } s = 2$$

$$P = \left[\frac{3r+1}{2} \right] \qquad \text{per } s = 3$$

$$P = \left[\frac{3r+2}{2} \right] \qquad \text{per } s > 3.$$

Viene qui designato in generale col simbolo $[q]$ il massimo intero contenuto nel numero q .

È notevole il fatto mostrato dagli esempi in cui $P > p_g + p^{(1)}$, fatto che non ha riscontro per $p^{(1)} \geq 1$.

Si osservino in particolare nella categoria I i piani doppi del tipo 3, di genere 0 o 1, aventi il bigenere $P = n - r$ o risp. $P = n - 6$; il conto delle costanti ne prova l'effettiva esistenza almeno per $n \leq 16$ o risp. $n \leq 27$.

Per $n = 5$ si ottiene un piano doppio del tipo 3 che non rientra nelle condizioni dell'enunciato, ma offre esempio di una superficie coi generi $p_n = -1$ $p_g = 0$ di cui il bigenere vale $P = 1$, la quale non può quindi essere riferita ad una rigata ellittica come le superficie note fin qui coi caratteri $p_n = -1$ $p_g = 0$.

2. Alla ricerca dei piani doppi che hanno i caratteri assegnati

$$(p^{(1)} = 1, P > 1),$$

dobbiamo far precedere alcune osservazioni relative alla determinazione delle curve canoniche e bicanoniche di un piano doppio di cui è data la curva di diramazione C_{2n} (d'ordine $2n$).

Le immagini delle curve canoniche, aumentate di eventuali componenti eccezionali che corrispondono a punti semplici della superficie, sono date da curve doppie C_{n-3} d'ordine $n - 3$, assoggettate ad avere opportune singolarità nei punti multipli di C_{2n} (1).

Se la C_{2n} ha punti multipli ordinari, distinti, è facile vedere (2) che ogni punto $2i^{p_{10}}$ per essa è $(i - 1)^{p_{10}}$ per le C_{n-3} , ed ogni punto $(2i + 1)^{p_{10}}$ di C_{2n} è del pari $(i - 1)^{p_{10}}$ per le dette C_{n-3} .

È noto, fino dagli esempi presentatisi al sig. Nöther, che le molteplicità imposte alle C_{n-3} possono aumentare se la C_{2n} ha punti multipli infinitamente vicini.

Volendo ricercare la molteplicità imposta alle C_{n-3} da un punto O , multiplo per C_{2n} , a cui sieno infinitamente vicini altri punti multipli, si faccia nel piano una trasformazione quadratica generale, avente in O un punto fondamentale. Allora ad O viene a corrispondere una retta fondamentale o , che entra come parte nella trasformata di C_{2n} , e precisamente deve essere contata un numero pari o dispari di volte secondo la molteplicità di O per C_{2n} . Nel primo caso, questa retta a , come componente della curva di diramazione d'un piano doppio può ugualmente esser tolta; ma nel secondo caso essa figura essenzialmente, una volta, unita alla residua parte C' della detta trasformata. Ora la C' verrà ad avere su a dei punti multipli che corrispondono ai punti multipli di C_{2n} cadenti nell'intorno di O , ed hanno le stesse molteplicità di essi. Queste molteplicità si trovano aumentate di 1 per la $C' + a$. Di qui, se si considerano le trasformate delle C_{n-3} e si ritorna poi alle C_{n-3} , si deduce che le molteplicità che loro impongono i punti multipli di C_{2n} che cadono nell'intorno (di 1° ordine) di O , sono da valutarsi come se questi punti avessero per C_{2n} una molteplicità superiore di 1 a quella effettiva, da cui può risultare che le C_{n-3} debbano avere nel punto O stesso una molteplicità maggiore di quella innanzi assegnata. Con ciò si è tenuto conto dei

(1) Cfr. il § 5 della mia Nota *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1896.

(2) Cfr. *Introduzione* . . . cap. VI.

punti multipli di C_{2n} che cadono nell'intorno di 1° ordine del punto O. Se si vuol tener conto dei punti multipli di essa che sono nell'intorno di 2° ordine, occorre far uso di una trasformazione quadratica applicata a C' prendendo come punto fondamentale uno dei punti multipli che la C' ha su a . Applicando successivamente questo processo di trasformazione, fino a *sciogliere* la singolarità della C_{2n} nel punto O, e ritornando sempre alla C_{2n} , è facile determinare in ogni singolo caso le molteplicità che vengono imposte alle C_{n-3} in O e nei punti multipli infinitamente vicini ad esso. Ma l'espressione generale di queste molteplicità, quando è data la composizione del punto O, si presenta un po' complicata, soprattutto nel caso in cui i punti multipli dell'intorno di O si succedano sopra rami non lineari.

Pel nostro scopo basta indicare il seguente risultato relativo al caso in cui i punti multipli di C_{2n} , infinitamente vicini ad ogni punto multiplo proprio O, si trovino sopra rami lineari passanti per O.

Indicando con r, s, t, \dots le molteplicità dei punti A, B, C ... di C_{2n} che si succedono sopra un qualsiasi ramo lineare avente l'inizio in un punto r^{plo} O, e facendo uso del simbolo $[\varrho]$ per denotare la parte intera del numero ϱ , si ha:

Le C_{n-3} sono assoggettate alle condizioni di avere

1) la molteplicità $\left[\frac{i}{2} - 1 \right]$ in A;

2) la molteplicità *complessiva* $\left[\frac{r+s}{2} - 2 \right]$ in A, B (per modo che i rami lineari di curva per A, B, abbiano complessivamente riunite tante intersezioni colle C_{n-3});

3) la molteplicità complessiva $\left[\frac{r+s+t}{2} - 3 \right]$ in A, B, C ecc.

Di qui si ricava in particolare che, nelle ipotesi introdotte: ogni punto $2i^{\text{plo}}$ per C_{2n} ha sempre la molteplicità $i - 1$ per le C_{n-3} e non maggiore; ogni punto $(2i + 1)^{\text{plo}}$ di C_{2n} risulta $(i - 1)^{\text{plo}}$ o i^{plo} , al più, per le C_{n-3} . Si ricava ancora che le singolarità più semplici della C_{2n} , abbassanti di 1 il genere (numerico) del piano doppio, sono: un punto 4^{plo} , o due punti 3^{plo} infinitamente vicini, ossia un punto $[3, 3]$.

Passando ora alla determinazione delle immagini delle curve bicanoniche sul piano doppio che ha come curva di diramazione C_{2n} , osserveremo che qui sono anzitutto da distinguere due casi, secondochè le dette immagini B sono curve doppie e quindi d'ordine doppio delle C_{n-3} , ossia d'ordine $2n - 6$ ($B \equiv C_{2n-6}$), oppure curve semplici d'ordine $4n - 12$ ($B \equiv C_{4n-12}$); nel 2° caso esse non formano più, generalmente, un sistema lineare.

Le condizioni di molteplicità delle immagini B delle curve bicanoniche, relative ai punti multipli di C_{2n} , discendono dal fatto che il sistema bicanonico è doppio del canonico; quindi un punto ordinario $2i^{\text{plo}}$ o $(2i + 1)^{\text{plo}}$

di C_{2n} sarà $2(i-1)^{p_0}$ per le $B \equiv C_{2n-6}$ (doppie), e $4(i-1)^{p_0}$ per le $B \equiv C_{4n-12}$ (semplici). Ma occorrono speciali riguardi quando si hanno punti multipli infinitamente vicini. Così se la C_{2n} ha un punto $[3, 3]$ (pel quale le immagini C_{n-3} delle curve canoniche debbono passare semplicemente) le $B \equiv C_{2n-6}$ dovranno *passare semplicemente per i due* punti tripli infinitamente vicini che lo compongono e le $B \equiv C_{4n-12}$ dovranno passarvi doppiamente (1). E per noi basta limitarci all'osservazione relativa a questo caso.

3. Veniamo ora alla determinazione dei piani doppi pei quali

$$p^{(1)} = 1 \qquad P > 1.$$

Le superficie corrispondenti posseggono ∞^{p-1} curve bicanoniche di cui il genere vale $3p^{(1)} - 2 = 1$; queste curve costituenti un sistema lineare sono dunque composte colle curve ellittiche K di un fascio, giacchè l'esistenza di un sistema lineare ∞^2 di curve ellittiche irriducibili porterebbe l'annullarsi del genere e del bigenere della superficie, la quale anzi risulterebbe (2) razionale o riferibile ad una rigata ellittica.

Ora la superficie F che è immagine di un piano doppio di generi $p^{(1)} = 1$, $P > 1$, è trasformata in sè stessa da un'involuzione (razionale) I , la quale trasformerà in sè stessa ogni curva K del fascio nominato, o scambierà fra loro le curve K accoppiandole. In ogni caso le curve K avranno come corrispondenti, sul piano doppio, le curve L di un fascio, e le L saranno razionali (I) o ellittiche (II).

4. Poniamoci nel primo caso. Effettuando all'occorrenza una trasformazione birazionale del piano si può (3) supporre ridotto il fascio delle L ad un fascio di rette, avente un certo centro O . Allora la curva di diramazione C_{2n} del piano doppio avrà in O la molteplicità $2n - 4$, o, in particolare, $2n - 3$. Si può anche supporre la C_{2n} già ridotta (con trasformazioni quadratiche speciali aventi un punto fondamentale in O) ad avere soltanto punti multipli distinti da O , o punti multipli infinitamente vicini ad O che si succedono sopra rette per O . Infine si può supporre che la C_{2n} abbia l'ordine minimo tra quelle che si ottengono colle trasformazioni suindicate. E appena necessario avvertire che in C_{2n} debbono sempre essere comprese, *una volta*, quelle curve fondamentali (che nascono da punti del piano nelle trasformazioni precedenti) le quali verrebbero a figurare in essa un numero dispari di volte.

(1) Cfr. Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, § 15.

(2) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1894.

(3) Nöther, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*. Mathem. Annalen, III.

Date le ipotesi precedenti le singolarità di C_{2n} che possono influire abbassando il genere del piano doppio, sono soltanto (cfr. n. 2): se O è $(2n - 4)^{p_0}$ dei punti 4^{p_1} o dei punti $[3, 3]$ (coppie di punti tripli infinitamente vicini) se O è $(2n - 3)^{p_0}$ dei punti tripli infinitamente vicini ad O o dei punti $[3, 3]$; ciascuna di queste singolarità abbasserà di 1 il genere del piano doppio, poichè i gruppi di $n - 3$ rette per O rappresentanti le curve canoniche, dovranno contenere come parte fissa la retta congiungente O con un siffatto punto singolare.

Ma, per la irriducibilità ad ordine minore della C_{2n} , dovranno essere osservate le seguenti condizioni:

a) Se la C_{2n} ha un punto 4^{p_0} A distinto da O , essa non possiede, oltre A ed O , alcun punto singolare influente sul genere. Infatti un tal punto non potrebbe essere fuori di OA , e d'altra parte neppure su OA senza che questa retta si staccasse due volte da C_{2n} e dovesse quindi esser tolta dalla C_{2n} stessa.

b) Se la C_{2n} ha un punto 4^{p_0} infinitamente vicino ad O , non può avere punti $[3, 3]$ distinti da O .

c) La C_{2n} non può avere due punti 3^{p_1} infinitamente vicini, distinti da O e non allineati con esso: se O è $(2n - 3)^{p_0}$ la C_{2n} non può avere neppure un punto $[3, 3]$ infinitamente vicino ad O (due punti 3^{p_1} consecutivi su una retta per O) giacchè la sua congiungente con O si staccerebbe due volte da C_{2n} e dovrebbe quindi essere soppressa.

Restano così i seguenti casi tipici:

1) C_{2n} con O $(2n - 4)^{p_0}$ o $(2n - 3)^{p_0}$, senza altri punti multipli o con un punto 4^{p_0} A distinto da O .

Le curve canoniche sono date da tutti i gruppi di $n - 3$ rette per O , o risp. dai gruppi di $n - 4$ rette aumentati della parte fissa OA ; quindi

$$p_g = p_n = n - 2 \quad \text{o risp.} \quad p_g = p_n = n - 3.$$

In quanto alle curve bicanoniche, esse sono composte colle curve ellittiche K rappresentate doppiamente sopra le rette per A ; esse vengono date dunque dai gruppi di $2(n - 3)$ rette per O di cui fa parte, eventualmente, la OA contata due volte, perciò

$$P = 2n - 5 \quad \text{o} \quad P = 2n - 6.$$

2) C_{2n} con O $(2n - 4)^{p_0}$, r punti 4^{p_1} infinitamente vicini ad O , h punti $[3, 3]$ infinitamente vicini ad O (su altrettante rette per O che si staccano da C_{2n}), dove

$$4r + 3h \leq 2n - 4.$$

Le rette per O contenenti i punti 4^{p_1} si staccano una volta da tutti i gruppi canonici C_{n-3} di $n - 3$ rette per O e due volte dai gruppi bicanonici

nici di $2(n - 3)$ rette; le rette per O contenenti i punti $[3, 3]$ si staccano pure una volta dai gruppi C_{n-3} ma pure una volta sola dai gruppi bicanonici; per conseguenza si trova

$$p_g = p_n = n - 2 - h - r \qquad P = 2n - 5 - h - 2r.$$

3) C_{2n} con O $(2n - 4)^{\text{plo}}$ ed h punti $[3, 3]$ su rette per O che si distaccano dalla C_{2n} . In questo caso si trova (come precedentemente)

$$p_n = n - 2 - h \qquad P = 2n - 5 - h \qquad p_g = p_n \text{ o } p_g = 0$$

se il p_n risulta negativo.

4) C_{2n} con O $(2n - 3)^{\text{plo}}$ ed r punti 3^{li} infinitamente vicini ad O . Questo è un caso particolare del caso 2); ancora

$$p_g = p_n = n - 2 - r \qquad P = 2n - 5 - 2r.$$

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$.*
 Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA (1).

5. Discutiamo ora il caso II in cui le immagini L delle parti variabili irriducibili delle curve bicanoniche, sul piano doppio, sono curve ellittiche, costituenti un fascio. Seguendo il sig. Bertini, questo fascio può essere ricondotto birazionalmente ad un fascio di curve C_{3s} (d'ordine $3s$) con 9 punti s^{pli} (fascio di Halphen). Indichiamo con C_{2n+6} la curva di diramazione del piano doppio così trasformato e con $x_1, x_2 \dots x_9$ le sue molteplicità nei 9 punti base delle C_{3s} .

Le curve canoniche (unitamente a qualche curva eccezionale) verranno rappresentate da curve C_n passanti pei detti 9 punti con certe molteplicità $h_1, h_2 \dots h_9$, dove

$$x_i = 2h_i + e_i$$

essendo $e_i \leq 2$.

Ora poichè le C_{3s} rappresentano, sulla superficie, delle curve ellittiche K componenti un fascio, privo di punti base, esse non vengono incontrate dalle C_n nè dalla C_{2n+6} , sicchè

$$\begin{aligned} 3ns - \sum h_i s &= 0, \\ (2n + 6) \cdot 3s - \sum (2h_i + e_i) \cdot s &= 0, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} 3n - \sum h_i &= 0 \\ 6n + 18 - 2\sum h_i - \sum e_i &= 0, \end{aligned}$$

da cui

$$\sum e_i = 18 \quad e_i = 2 \quad x_i = 2h_i + 2.$$

Calcoliamo ora il genere lineare $p^{(1)}$ del piano doppio che deve essere uguale ad 1, tenendo conto del numero virtuale delle intersezioni di due curve canoniche, il quale vale $p^{(1)} - 1$:

Se nella C_n non entrano parti eccezionali, si ottiene

$$x^2 - \sum h_i^2 = p^{(1)} - 1 = 0.$$

(1) V. pag. 234.

Ma se nella C_n entra una C_δ composta di curve eccezionali, e passante pei nominati punti h_i plⁱ di C_n colle molteplicità y_i ($\leq h_i$), si avrà

$$p^{(1)} - 1 = (n - \delta)^2 - \sum (h_i - y_i)^2 = 0.$$

D'altra parte, considerando le intersezioni di $C_{n-\delta}, C_\delta$, si dedurrà

$$\sum h_i y_i \leq \delta(n - \delta).$$

Si ricava

$$\begin{aligned} n^2 - \sum h_i^2 - \delta^2 - \sum y_i^2 &\geq 0 \\ n^2 - \sum h_i^2 &> 0. \end{aligned}$$

In ogni caso sussiste dunque la disuguaglianza

$$n^2 - \sum_1^9 h_i^2 \geq 0.$$

Ora, tenendo conto dell'eguaglianza

$$3n - \sum_1^9 h_i = 0,$$

si può concludere

$$h_1 = h_2 = \dots = h_9 = \frac{n}{3}.$$

Infatti n^2 rappresenta il minimo valore della somma dei quadrati di 9 numeri h_i , tali che $\sum_1^9 h_i = 3n$, onde per altri valori dati ai numeri h_i riuscirebbe $n^2 - \sum h_i^2 < 0$.

Segue in particolare che n è divisibile per 3 ($2n + 6 = 6m$), e $\delta = 0$, ossia non vi sono, sul piano doppio, curve eccezionali.

Ora poichè la $C_{2n+6} = C_{6m}$ deve avere le molteplicità $\frac{n}{3}$ nei 9 punti base s^{pli} per le C_{3s} , essa dovrà comporsi di un certo numero r di C_{3s} , ed eventualmente anche (per s dispari > 1) della cubica C_3 che passa i 9 punti nominati:

$$C_{6m} = r C_{3s} \quad (6m = 3rs)$$

oppure

$$C_{6m} = r C_{3s} + C_3 \quad (1) \quad (6m = 3rs + 3).$$

Allora le immagini delle curve canoniche sul piano doppio saranno curve $C_{3n} = C_{3m-3}$ composte colle C_{3s} e colle C_3 ,

$$C_{3m-3} = x C_{3s} + y C_3.$$

(1) Questo risultato non è a priori evidente come si potrebbe credere pel fatto che le C_{3s} debbono rappresentare curve ellittiche. Nella C_{2n+6} potrebbero invero entrare come parti delle componenti della C_s supposta spezzata.

L'equazione d'analisi indeterminata

$$3m - 3 = 3sx + 3y,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore di x che è

$$x = \left[\frac{m-1}{s} \right],$$

ossia rispettivamente

$$x = \left[\frac{rs-2}{2s} \right] \quad \text{o} \quad x = \left[\frac{rs-1}{2s} \right].$$

Sarà quindi

$$p_g = x + 1.$$

Tuttavia il numero virtuale delle C_{3m-3} è sempre 1, così il genere numerico del piano doppio vale in tutti i casi $p_n = 1$.

In quanto alla determinazione delle curve bicanoniche, e quindi del bi-genere, del piano doppio, osserviamo che la C_{6m} di diramazione unita ad una C_{3m-6} aggiunta alle C_{3m-3} immagini delle curve canoniche, rappresenta appunto una curva bicanonica. Questa osservazione si può stabilire, sia come corollario di una proposizione generale che si dimostra appoggiandosi alle proprietà fondamentali delle curve canoniche e bicanoniche, sia direttamente per questo caso, giacchè, indicata con $f(xy) = 0$ l'equazione della C_{6m} , si può verificare che il piano $z = 0$ fa parte di una superficie d'ordine $2(6m - 4)$ biaggiunta rispetto alla

$$z^2 = f(xy).$$

Dalla osservazione precedente si ricava che le curve bicanoniche non sono rappresentate doppiamente, ma solo semplicemente sul nostro piano doppio; l'ordine delle immagini ($C_{12(m-1)}$) delle curve bicanoniche sarà dunque $4(3m - 3)$, essendo $3m - 3$ l'ordine delle immagini (doppie) delle curve canoniche, e similmente la molteplicità delle $C_{12(m-1)}$, in ogni punto $2m^{\text{plo}}$ di C_{6m} , sarà $4(m - 1)$. Da ciò si deduce che le $C_{12(m-1)}$ debbono risultare composte colle C_{3s} ed eventualmente anche (per $s > 1$) colle C_3 :

$$C_{12(m-1)} = u C_{3s} + v C_3.$$

L'equazione d'analisi indeterminata in u, v ,

$$12(m - 1) = 3su + 3v,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore intero di u , che è

$$u = \left[\frac{4(m-1)}{s} \right],$$

ossia rispettivamente

$$u = \left[\frac{2rs - 4}{s} \right] \quad \text{o} \quad u = \left[\frac{2rs - 3}{s} \right].$$

Ma, in generale, non tutte le $C_{12(m-1)}$ così composte, saranno immagini di curve bicanoniche del piano doppio, e quindi il bigenere P potrà risultare inferiore ad $u + 1$.

Si osservi infatti, che ogni C_{3s} (entrando come parte variabile nell'immagine di qualche curva bicanonica) rappresenta *due* curve ellittiche K sopra la superficie riferita al piano doppio. Ora le K formano su questa superficie un fascio, avente un certo genere π , e le parti variabili delle curve bicanoniche costituiscono i gruppi di una serie lineare completa g_u^{P-1} nell'ente ∞' (fascio) che ha per elementi le K , onde se $\pi > 0$

$$P - 1 < u.$$

Il genere π del fascio si può valutare tenendo conto del numero r delle C_{3s} che entrano a comporre la C_{6m} . Invero l'ente fascio contiene una g'_2 costituita dalle coppie di K rappresentate sopra una stessa C_{3s} ; gli elementi di coincidenza della g'_2 sono costituiti dalle C_{3s} che fanno parte di C_{6m} ed eventualmente anche (per $s > 1$) dalla cubica C_3 che passa pei 9 punti base delle C_{3s} ; si avrà dunque

$$2 + 2\pi = r \quad \text{o} \quad 2 + 2\pi = r + 1,$$

secondo la parità o disparità di r , cioè

$$\pi = \left[\frac{r - 1}{2} \right].$$

Ma poichè, in tutti i casi,

$$u \geq 2 + 2\pi \quad (\text{essendo } 3rs \geq 12),$$

la serie g_u^{P-1} è non speciale, sicchè

$$P - 1 = u - \pi.$$

Si deduce rispettivamente

$$P = \left[\frac{2rs - 4}{s} \right] - \left[\frac{r - 3}{2} \right] \quad \text{o} \quad P = \left[\frac{2rs - 3}{s} \right] - \left[\frac{r - 3}{2} \right].$$

Si presentano dunque i seguenti casi:

1) La C_{6m} è composta di $r = 2m$ cubiche d'un fascio ($s = 1, r = 2m$)

$$p_g = m = \left[\frac{r + 1}{2} \right] \quad P = 3m - 2 = \frac{3r - 4}{2}.$$

2) La C_{6m} è composta di $r = m$ sestiche C_6 aventi 9 punti doppi comuni

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2} \right] \quad P = \left[\frac{3r}{2} \right].$$

3) La C_{6m} è composta di r C_9 con 9 punti 3^{pli} comuni, ed eventualmente anche (per r dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2} \right] \quad P = \left[\frac{3r+1}{2} \right].$$

4) La C_{6m} è composta di r C_{3s} ($s > 3$) con 9 punti s^{pli} comuni, ed eventualmente anche (per r ed s dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2} \right] \quad P = \left[\frac{3r+2}{2} \right].$$