Enriques, Federigo and Castelnuovo, G.

Sur une classe de surfaces algébriques

Comptes Rendus Acad. Sciences Paris **CXXXI** (1900), pp. 739-742.

Sur une classe de surfaces algébriques ;

PAR MM. G. CASLELNUOVO ET F. HENRIQUES.

« On connaît plusieurs résultats concernant les surfaces algébriques qui contiennent une série linéaire de courbes, dont le genre π est assez petit par rapport à la dimension. Surtout les cas correspondant aux premières valeurs de $\pi (\pi = 0, 1, 2)$ ont fait l'objet de nombreuses recherches. Nos études récentes sur les surfaces nous ont amenés à une proposition tout à fait générale qui renferme les résultats rappelés ci-dessus, et d'où l'on peut déduire des corollaires fort intéressants :

» *Si une surface algébrique contient un système linéaire de courbes* C *de genre* $\pi > 0$ *se coupant deux à deux en n points, où*

$$n > 2\pi - 2,$$

la surface est rationnelle ou bien elle peut être ramenée (par une transformation birationnelle) *à un cylindre* $f(x, y) = 0$ *de genre* $p > 0$.

» Lorsque les courbes C ont des points fixes multiples, il faut évaluer les nombres n et π en tenant compte des ordres de multiplicité de ces points.

» On parvient au théorème énoncé par le procédé de réduction, dont nous avons fait usage en plusieurs recherches, qui consiste à remplacer le système des courbes C par son *adjoint,* et ainsi de suite.

» Ce résultat découle d'un examen approfondi du dernier système adjoint auquel on est amené.

» En laissant de côté les explications assez longues que le sujet exigerait, qu'il nous soit permis d'appeler l'attention sur quelques conséquences remarquables du théorème énoncé.

» 1. *Si une surface algébrique contient une série continue de courbes ration-*

nelles C, *la surface est elle-même rationnelle, ou bien elle peut être ramenée à un cylindre de genre supérieur à zéro.*

» On peut justifier cette proposition en distinguant deux cas :

» *a*. Si les courbes C forment un *faisceau* (c'est-à-dire qu'il passe *une* courbe par chaque point de la surface) la transformation de la surface en un cylindre est déjà connue.

» *b*. Dans le cas contraire, on sait, d'après M. Humbert, que les courbes C seront contenues dans un système linéaire de dimension > 1; et le système aura le genre π si les C ont π points doubles mobiles, tandis que deux courbes du système (ou deux C) se couperont en $n > 2\pi - 2$ points, comme il est facile de le reconnaître. C'est donc le cas d'appliquer notre proposition.

» On peut aussi énoncer le théorème (1) sous une autre forme remarquable :

» Si les coordonnées des points d'une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

sont des fonctions rationnelles de

$$X, Y, Z \quad \text{où} \quad F(X, Y) = 0,$$

$$(\alpha) \qquad x = \psi_1(X, Y, Z), \qquad y = \psi_2(X, Y, Z), \qquad z = \psi_3(X, Y, Z),$$

et si les formules (α) ne sont pas invertibles d'une manière rationnelle, on pourra toujours exprimer x, y, z par des fonctions rationnelles de trois nouveaux paramètres u, v, w, liés par une relation de la forme

$$\varphi(u, v) = 0,$$

et cela de telle sorte que u, v, w s'expriment à leur tour par des fonctions rationnelles de x, y, z.

» Lorsque l'équation $F(X, Y) = 0$ se réduit à $X = 0$, on a la proposition bien connue concernant la *rationalité des involutions planes*.

» 2. Une seconde application du théorème concerne la *détermination des surfaces admettant une série de transformations birationnelles en elles-mêmes, qui n'engendrent pas un groupe d'ordre fini : ces surfaces sont rationnelles ou bien elles peuvent être ramenées à des cylindres.*

» Ainsi se trouve comblée la seule lacune que les profondes et belles recherches de MM. Picard et Painlevé laissaient encore subsister dans la théorie des surfaces admettant une série continue de transformations birationnelles en elles-mêmes.

» Il est aisé de déduire la proposition (2) de notre théorème général.

» Soit F une surface d'un certain ordre n, admettant une série continue de transformations birationnelles en elles-mêmes.

» Lorsque ces transformations n'engendrent pas un groupe d'ordre fini, en les multipliant entre elles on aura une série ∞^r de transformations pour chaque valeur arbitrairement grande du nombre r.

» Appliquons maintenant ces ∞^r transformations aux courbes C sections planes de F, dont le genre sera désigné par π.

» Nous obtiendrons une série de systèmes linéaires; chaque système sera composé de courbes C_r de genre π se coupant deux à deux en n points mobiles et ayant des points bases doués de certaines multiplicités i_1, i_2, ...; on aura

$$\Sigma i > n - (2\pi - 2)$$

lorsque r est assez grand.

» Or toutes les courbes C_r appartiendront à un même système linéaire de courbes de genre $\Pi = \pi + \sum \frac{i(i-1)}{2}$, se coupant deux à deux en $N = n + \Sigma i^2$ points, et il y aura lieu d'appliquer notre proposition, puisqu'il résulte

$$N > 2\Pi - 2. »$$

(5 novembre 1900.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
29422 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.