Enriques, Federigo

Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XXV** (1916), pp. 607-613.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
Estratto dal vol. XXV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 9°. — Seduta del 7 maggio 1916.

SULLA

TEORIA DELLE SINGOLARITÀ DELLE CURVE ALGEBRICHE

NOTA

DEL CORRISP.

FEDERICO ENRIQUES

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche.* Nota del Corrisp. FEDERICO ENRIQUES.

1. Nella teoria delle singolarità delle curve algebriche è fondamentale la decomposizione della singolarità ottenuta dal Nöther mediante trasformazioni quadratiche, per la quale una singolarità qualsiasi viene ad esser concepita come riunione di punti multipli infinitamente vicini, cui s'aggiungono dei punti di diramazione semplici. La fecondità di questo concetto conferisce alla teoria noetheriana una decisa superiorità sulle rivali teorie di Smith e di Halphen, che riescono ugualmente a sciogliere i problemi fondamentali d'intersezione, basandosi sugli sviluppi in serie di Puiseux. Così i progressi ulteriori che la dottrina delle singolarità ha conseguito (ad esempio per opera di Bertini, Segre ecc.) appaiono perfezionamenti e svolgimenti dell'indirizzo che assume come punto di partenza la trasformazione quadratica.

Ora l'istrumento della trasformazione, per quanto semplice e appropriato, introduce qualcosa di estraneo nello studio della singolarità: ciò che conferisce una effettiva esistenza ai punti infinitamente vicini, legittimando il passaggio al limite che è simboleggiato da questo concetto, è la proprietà che essi contano come i punti proprî — secondo la loro molteplicità — nel computo delle intersezioni di due curve e parimente nel computo delle condizioni di passaggio per curve d'ordine abbastanza elevato.

Questa veduta ci ha guidato a ricercare una *definiziona diretta dei punti infinitamente vicini*, conducendoci ad un nuovo svolgimento della teoria delle singolarità delle curve, sia dal *punto di vista algebrico-aritmetico*, sia da quello del *calcolo differenziale.* Una esposizione diffusa della teoria così disegnata si troverà nel secondo volume delle nostre *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, redatto con la valida collaborazione del dottor Oscar Chisini; qui ci proponiamo di indicare rapidamente i concetti fondamentali della trattazione e i principali resultati che ne conseguono.

2. Osserviamo anzitutto che, nel caso di singolarità costituite di rami lineari, una definizione diretta dei punti infinitamente vicini che la compongono viene pôrta semplicemente dai contatti dei singoli rami; ma, nel caso dei rami superlineari, occorre considerare, oltre tali contatti, anche i punti multipli successivi appartenenti ad un ramo. La determinazione di questi è stata raggiunta dal Nöther mediante trasformazioni quadratiche, nella Nota *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier* [1]; ma per il nostro scopo deve essere nuovamente guadagnata, riprendendo l'analisi di Halphen relativa alle intersezioni di due rami.

Si abbiano i due rami d'ordine ν, μ:

$$(1) \qquad y = ax + b\,x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + c\,x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \cdots$$

$$(2) \qquad z = ax + b'x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + c'x^{\frac{\mu+\mu'+\mu''}{\mu}} + \cdots$$

$$(b \neq 0\,, c \neq 0 \ldots \quad , \quad b' \neq 0\,, c' \neq 0 \ldots)\,,$$

dei quali si cerca il numero delle intersezioni assorbite nell'origine. Consideriamo i ν valori di y: $y_1\, y_2 \ldots y_\nu$; e i μ valori di z: $z_1\, z_2 \ldots z_\mu$, e formiamo lo sviluppo in serie del prodotto

$$\pi(y_i - z_k)\,,$$

che riesce razionale in x. Il numero che si cerca vien dàto dal minimo esponente a cui figura la x in codesto sviluppo. Si trova così che, per

$$b \neq b'\,,$$

il numero delle intersezioni dei due rami (1) e (2) è uguale al più piccolo dei due numeri

$$\mu\nu + \mu\nu' \quad , \quad \mu\nu + \mu'\nu\,.$$

Questa formula vale anche nel caso $b = b'$, salvo che sia contemporaneamente

$$\mu\nu' = \mu'\nu\,, \quad \text{cioè} \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu}\,;$$

[1] Circolo matematico di Palermo, tomo IV, pag. 89 (1890).

ma, se

$$b = b' \quad , \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu} \quad , \quad c \neq c' ,$$

il numero delle intersezioni dei due rami cresce, su $\mu\nu' + \mu'\nu$, del più piccolo fra i due numeri

$$\bar{\mu}\,\nu'' \quad \text{e} \quad \bar{\nu}\,\mu'',$$

designando $\bar{\mu}$ e $\bar{\nu}$ i massimi comuni divisori di μ, μ' e ν, ν' rispettivamente.

Per $c = c'$,

$$\bar{\mu}\,\nu'' = \bar{\nu}\,\mu'' , \quad \text{cioè} \quad \frac{\nu''}{\bar{\nu}} = \frac{\mu''}{\bar{\mu}} ,$$

si procede analogamente.

Fermiamoci, per semplicità, sul primo caso: $b \neq b'$. Sviluppiamo $\frac{\nu'}{\nu}$ e $\frac{\mu'}{\mu}$ in frazione continua, e supponiamo che si abbia

$$\frac{\nu'}{\nu} = h + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cdots + \cfrac{1}{h_i + \cfrac{1}{h_{i+1} + \cdots + \cfrac{1}{h_s}}}}} ,$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = h + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cdots + \cfrac{1}{h_i + \cfrac{1}{k_{i+1} + \cdots + \cfrac{1}{k_r}}}}} ;$$

$$\nu' = h\nu + \nu_1 \quad , \quad \nu = h_1\nu_1 + \nu_2 \ldots \nu_{s-1} = h_s\nu_s \qquad (\nu_s = \bar{\nu}),$$

$$\mu' = h\mu + \mu_1 \quad , \quad \mu = h_1\mu_1 + \mu_2 \ldots \mu_{r-1} = k_r\mu_r \qquad (\mu_r = \bar{\mu}),$$

con

$$k_{i+1} < h_{i+1} .$$

Allora si riconosce che il più piccolo dei due numeri $\mu\nu'$ e $\mu'\nu$ equivale alla somma

$$h\mu\nu + h_1\mu_1\nu_1 + \cdots + h_i\mu_i\nu_i + k_{i+1}\mu_{i+1}\nu_{i+1} + \mu_{i+2}\nu_{i+1} .$$

Questo resultato si lascia interpretare dicendo che i due rami hanno a comune, oltre l'origine,

h punti di molteplicità ν per (1), e μ per (2);
h_1 punti di molteplicità ν_1 per (1), e μ_1 per (2);

. . . .

e finalmente k_{i+1} punti di molteplicità ν_{i+1} per (1), e μ_{i+1} per (2); ed un punto di molteplicità ν_{i+1} per (1), e μ_{i+2} per (2).

Così, tenendo fermo il ramo (1) e facendo variare in (2) i valori aritmetici di μ e μ', si è condotti a definire i punti multipli successivi del ramo (1) dipendenti dal termine $bx^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}}$ della serie di Puiseux che lo rappresenta: *il ramo d'ordine ν, rappresentato dalla* (1), ***possiede un gruppo di punti multipli successivi all'origine, in corrispondenza al primo termine della serie successiva ad** ax, **e precisamente** h **punti** ν^{pli}, h_1 **punti** ν_1^{pli} ..... h_s **punti di molteplicità** $\nu_s = \bar{\nu} =$* m. c. d. (ν, ν').

In modo analogo, proseguendo la discussione, si è condotti a riconoscere l'esistenza di punti multipli successivi del ramo, in corrispondenza al termine seguente della serie, e così di seguito: *la determinazione dei punti multipli del ramo* (1) *dipende dal procedimento di divisioni successive per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri ν, ν', ν'' ...., cioè fra gli esponenti della variabile $x^{1/\nu}$ nella serie* (1); è ovvio che questo procedimento conduce all'unità, poichè altrimenti il ramo (1) sarebbe d'ordine > 1.

3. Ora la definizione dei punti successivi d'un ramo pone in evidenza la distinzione fondamentale fra *punti liberi*, che corrispondono ad una coordinata suscettibile di variare (col ramo) in modo continuo, e *punti satelliti*, susseguenti a qualche punto libero e corrispondenti, non già ad un parametro-coordinata, ma ad un elemento aritmetico dello sviluppo in frazione continua di $\frac{\nu'}{\nu}$ o di $\frac{\nu''}{\bar{\nu}}$, ...

Punti satelliti s'incontrano soltanto su rami superlineari; ed il passaggio d'una curva per tali punti costituisce anzi la circostanza caratteristica onde hanno origine i rami superlineari di essa. Per uno studio approfondito dei rami, in rapporto a codesti punti, si può far uso opportunamente d'uno schema grafico, che qui non ci fermeremo a descrivere, ma su cui vorremmo tuttavia attirare l'attenzione del lettore, rimandando, per ogni chiarimento, alle citate *Lezioni* di prossima pubblicazione.

Dopo avere definito i punti successivi d'un ramo, e riconosciuto il significato della loro molteplicità in rapporto alle intersezioni di due rami, si ottiene la definizione dei punti multipli d'una curva, sommando per ciascun punto le molteplicità dei rami di essa che vi passano. Allora la struttura della singolarità verrà pienamente rappresentata, con una opportuna sovrapposizione degli schemi grafici dei singoli rami, da un diagramma, che può essere denominato *albero della singolarità*; il quale pone in evidenza le molteplicità e le posizioni dei punti infinitamente vicini che costituiscono la singolarità, in ispecie la distinzione fra i punti liberi e i punti satelliti e i diversi aggruppamenti di questi.

La conoscenza di tali molteplicità e posizioni vale a determinare la separazione dei rami, giacchè il passaggio di f per punti satelliti traduce in altra forma la circostanza che ai punti multipli condensati nella singolarità si aggiungono anche dei punti di diramazione. Perciò è lecito dire che *una qualsiasi singolarità è definita completamente dalle molteplicità della curva in un gruppo di punti infinitamente vicini, tenuto conto delle posizioni di questi.*

4. La teoria, così disegnata dal punto di vista aritmetico, deve essere completata con lo studio delle *condizioni differenziali che caratterizzano il passaggio d'una curva per punti infinitamente vicini, e le relative molteplicità* [1]. Qui in particolare si fornirà la prova diretta che i punti improprii di molteplicità r impongono, come i punti proprii. $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni lineari ai coefficienti d'una curva f che debba contenerli.

Per scrivere le accennate condizioni differenziali, caratterizzanti i punti — semplici o multipli — infinitamente vicini all'origine, occorre anzitutto possedere l'*espressione generale delle derivate successive d'una funzione composta* $f(x, y)$, ove $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. Le formule di cui si discorre costituiscono una generalizzazione di quelle adoperate dallo Stolz [2] nel problema della separazione dei rami, limitatamente al caso dei rami lineari. Ma, anzichè proseguire il procedimento dello Stolz, noi siamo pervenuti allo scopo trattando questa questione di calcolo differenziale in rapporto alla teoria generale dolle operazioni: questa via ha il vantaggio di mostrare in qualche modo *a priori* la natura delle formule ricercate; lo sviluppo dei calcoli riesce necessario soltanto per la determinazione dei coefficienti numerici che vi figurano.

Or dunque osserviamo che la derivata n-ma della funzione composta $f(x, y(x))$ nasce applicando ad f la potenza n ma dell'operazione indicata dal simbolo

$$\Delta_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right);$$

[1] Il concetto di tali condizioni fu da noi accennato, e svolto in rapporto a casi particolari, fino dalle nostre lezioni dell'anno 1897-98 (cfr. il Programma pubblicato nel fascicolo di aprile 1889 del Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche).

[2] Math. Annalen, Bd. VIII, pag. 415 (1875).

le operazioni che figurano come addendi entro il simbolo Δ_n non sono permutabili, ma dànno luogo ad una quasi-permutabilità: cioè sono permutabili a meno d'un fattore numerico che dipende dall'espressione a cui si suppongono applicate. Da queste proprietà segue che lo sviluppo di $\Delta_n^n f$ — o, ugualmente, di $\Delta_n^m f$ (con $m > n$) — si può ottenere mediante le formule che valgono ad esprimere la potenza d'un polinomio, salvo a modificare opportunamente i coefficienti numerici che in questo sviluppo figurano. Analoghe formule si otterranno per le derivate successive di f, ove x e y sieno funzioni di un parametro t.

Ciò posto, si possono scrivere facilmente le condizioni differenziali che caratterizzano i punti multipli infinitamente vicini d'una curva f. Se il punto proprio $O = (ab)$ deve avere per f la molteplicità r, si hanno, come osservò già il De Gua, le $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni

$$\frac{\partial^i f}{\partial x^h \, \partial y^k} = 0 \quad , \quad i = h + k < r \qquad (x = a_1 y = b)$$

che si possono anche scrivere

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} f = \Delta_0^0 f = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} f = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial^{r-1}}{\partial y^{r-1}} f = 0 \\ \Delta_0 f = \frac{\partial}{\partial x} f = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \Delta_0 f = 0 \ldots\ldots \frac{\partial^{r-2}}{\partial y^{r-2}} \Delta_0 f = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_0^{r-1} f = \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} f = 0 . \end{array} \right.$$

Le condizioni perchè la f possegga un punto di molteplicità s nel punto O_1, vicino ad O nella direzione y, si lasciano esprimere in modo affatto analogo, venendo date da

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^r f \;\; = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y'} \Delta_1^r f \;\; = 0 , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial^{s-1}}{\partial y'^{s-1}} \Delta_1^r f = 0 \\ \Delta_1^{r+1} f = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y'} \Delta_1^{r+1} f = 0 , \ldots \frac{\partial^{s-2}}{\partial y'^{s-2}} \Delta_1^{r+1} f = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_1^{r+s-1} f = 0 . \end{array} \right.$$

Così analogamente si scrivono le condizioni perchè la f possegga dati punti multipli succedentisi sopra rami lineari, cioè punti multipli (o semplici) liberi, determinati mediante coordinate che sono derivate successive della funzione implicita $y(x)$.

In qual modo si esprimerà il passaggio e la molteplicità di f per punti satelliti di qualche punto libero, cioè le singolarità elementari onde resulta la singolarità di f nel caso di rami superlineari? Si tratti, per esempio, di caratterizzare il *passaggio di f per punti satelliti del punto* s-plo O_1: questo passaggio *viene caratterizzato dalle molteplicità della radice y' per le equazioni* $\Delta_1^r f = 0$, $\Delta_1^{r+1} f = 0$, ... $\Delta_1^{r+s-1} f = 0$, quando la prima molteplicità sia $> s$. Così, per esempio, se la y' è radice multipla d'ordine $2s$ per $\Delta_1^r f = 0$, d'ordine $2s - 2$ per $\Delta_1^{r+1} f = 0$, ... e d'ordine 2 per $\Delta_1^{r+s-1} = 0$, la f (avente già in O la molteplicità r) passerà per O_1 con la molteplicità s, e ancora con la molteplicità s per il primo punto satellite di O_1 che viene definito sui rami di second'ordine per $O O_1$.

In generale, per determinare le molteplicità della curva f nei punti satelliti di O_1 , si figureranno coi punti di coordinate intere $(i\,l)$, sopra successive linee orizzontali, le condizioni $\frac{\partial^l}{\partial y'^l} \Delta_1^{r+i} f = 0$, che designano la molteplicità della radice y' per l'equazione $\Delta_1^{r+i} f = 0$, e quindi si separeranno in tanti gruppi triangolari le condizioni che rispondono ai diversi punti satelliti di O_1. Questa separazione si compie facilmente mediante un opportuno *diagramma*; e, operando con questo, si vede nascere *l'albero della singolarità*, a cui si è poc'anzi accennato.

Aggiungeremo che l'indicato diagramma sta in una semplice relazione col noto *diagramma di Newton* che serve alla separazione dei rami mercè il calcolo degli ordini d'infinitesimo: e così questo classico metodo appare in una nuova luce, venendo *collegato ad un procedimento più espressivo che porge l'analisi completa della singolarità negli elementi che la costituiscono.*

5. Il carattere riassuntivo di questa Nota non ci consente di trattenerci sulle applicazioni della teoria qui rapidamente abbozzata. Tuttavia vogliamo accennare ad un problema che non sembra essere stato trattato per lo innanzi in una forma generale. S'imponga ad una curva f, d'ordine abbastanza elevato, di passare — con certe molteplicità virtuali assegnate — per dati punti infinitamente succedentisi sopra un ramo superlineare; allora accade che le molteplicità effettive della f risultino diverse dalle virtuali, almeno quando non sieno soddisfatte certe condizioni di diseguaglianza. Il nostro problema ha per oggetto di *determinare le molteplicità effettive di f in funzione delle suddette molteplicità virtuali.*

Della risoluzione di codesto problema si può indicare un'applicazione interessante, cioè il calcolo delle *molteplicità effettive delle curve polari* nei punti infinitamente vicini che costituiscono una singolarità di f.