Enriques, Federigo

Osservazioni sulle falde di una superficie algebrica nell'intorno di un punto singolare

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **XXI** (1917), pp. 102-107.

PROF. FEDERIGO ENRIQUES

OSSERVAZIONI sulle falde di una superficie algebrica nell' intorno di un punto singolare

NOTA

letta alla R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna
nella Sessione del 19 Maggio 1917

BOLOGNA
TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1917

Estratto dal *Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.* — Anno Accademico 1916-17.

Classe di Scienze Fisiche - Sezione di Scienze Fisiche e Matematiche

La distinzione dei rami di una curva algebrica $f(xy) = 0$ nell' intorno d'un punto singolare si presenta sotto due aspetti pienamente concordanti:

1° Essa corrisponde alla riducibilità della funzione algebrica $y(x)$ nell' intorno del punto: invero ciascun ramo corrisponde a una funzione irreducibile in quell' intorno, la quale resulta ad un valore nel caso dei rami lineari, gli assi essendo orientati in modo generico.

2° La medesima distinzione in rami viene pôrta dalla distinzione delle curve approssimanti: rette, parabole e altre curve osculatrici ai rami; l'esistenza di curve approssimanti diverse permette di separare rami diversi, che verranno poi approssimati ulteriormente da curve d'ordine superiore.

Ora, passando alle superficie considerate nell' intorno d'un punto singolare, vi è luogo a definire le *falde* di esse estendendo le due definizioni precedenti, ma questa estensione conduce a due concetti diversi.

Atteniamoci al concetto che si ottiene estendendo la prima delle definizioni dei rami e poniamo quindi la seguente

Definizione. La superficie f, considerata nell' intorno d'un punto r-*plo* 0, dicesi costituita da una sola *falda* (d'ordine r) se gli r valori della funzione algebrica $z(xy)$ costituiscono una medesima *funzione analitica irreducibile nell' intorno del punto*, prolungandosi per continuità uno nell' altro. (Si parla di r valori, supponendo sempre gli assi coordinati orientati in modo generico).

Quando la funzione $z(xy)$ sia riducibile nell' intorno del punto, la superficie f si decomporrà in un certo numero di falde, aventi certi ordini v_1, $v_2, \ldots$, dove

$$r = \Sigma v_1 .$$

La definizione data si applica immediatamente ai casi elementari del punto doppio conico e dei punti biplanari delle curve nodali.

È ovvio che una superficie f, considerata nell' intorno di un punto doppio conico, viene costituita da una sola falda. Invece, nell' intorno di nn punto biplanare di una curva doppia, la f riesce costituita da due falde lineari distinte. Questa asserzione si lascia giustificare in base a un noto teorema di Halphen (*), che porge la rappresentazione parametrica delle due falde mediante serie di potenze; una verifica geometrica della medesima asserzione viene offerta dalla possibilità di sciogliere la curva doppia con una conveniente trasformazione (per esempio con una trasformazione monoidale dello spazio): allora all' intorno di un punto biplanare della curva doppia vengono a corrispondere gl' intorni di due punti semplici distinti.

Ora che cosa si dirà di un punto biplanare isolato? la superficie, considerata nell' intorno del punto, sarà costituita da una o da due falde?

(*) Annali di Mat. s^e^ 2^a^ t. 9 (1878).

È facile riconoscere che la superficie f, considerata nell' intorno di un punto biplanare isolato (e in generale nell' intorno di un punto multiplo isolato qualsiasi), viene costituita da una sola falda irreducibile, ai sensi della nostra definizione.

Dell' asserto possono darsi due dimostrazioni.

Ansitutto basta osservare che una sezione piana di f, parallela all' asse z e vicina al punto singolare 0, contiene due tangenti parallele al nominato asse, i cui punti di contatto sono vicini ad 0: a codesti punti di contatto corrispondono punti di diramazione della funzione $z(xy)$, ove si scambiano i due valori della funzione vicini ad 0.

D' altronde se la f, considerata nell' intorno del punto 0, si scinde in due falde, f e f_2, queste f e f_2 possono ritenersi come due superficie analitiche distinte che si segano secondo una curva passante per 0, la quale riesce doppia per f.

Ora vi è luogo ad osservare che:

Una superficie f, *considerata nell' intorno d' un punto biplanare isolato,* 0, *quantunque costituita da una sola falda irreducibile, dà luogo alla distinzione di due falde parziali, che possono essere approssimate con superficie approssimanti diverse, in un ordine d' approssimazione grande quanto si vuole*: queste due falde parziali hanno per altro a comune l' intorno del punto $0'$ successivo ad 0 sopra la retta d' intersezione dei due piani osculatori.

Si riesce alla anzidetta distinzione di due falde parziali di f nell' intorno di 0, sciogliendo la singolarità 0, ad esempio con una trasformazione quadratica, in guisa che l' intorno di f si muti in una coppia di rette a e b aventi a comune un punto $0'$: la superficie trasformata f' si lascia approssimare lungo le rette a e b da superficie diverse, ma le due striscie corrispondenti alle rette nominate hanno a comune l' intorno del punto $0'$.

Conviene avvertire esplicitamente che le superficie approssimanti le due falde parziali di f nell' intorno di 0, avranno in 0 una certa moltiplicità, sicchè una falda parziale verrà approssimata soltanto da una falda parziale: superficie passanti semplicemente per 0 possono approssimare quanto si vuole una falda parziale di f con esclusione dell' intorno di $0'$.

L' osservazione precedente mette in evidenza che i due criteri su cui si fonda la distinzione dei rami di una curva algebrica, estesi alle superficie, conducono a due concetti diversi. Il punto di vista delle trasformazioni birazionali della superficie, conduce — in generale — alla considerazione di falde parziali, cioè una falda parziale di f — nell' intorno del punto singolare 0 — può corrispondere all' intorno di una curva irreducibile, sopra una trasformata di f.

2. Emerge in particolare da quanto ho detto che la costruzione indicata nella mia Nota precedente, del 7 Maggio 1916, porge *superficie razionali di cui una falda parziale approssima una falda parziale di* f, nell' intorno di un punto (o di una curva) singolare.

Ora si pone naturalmente il problema « se una falda completa di f, nell' intorno di un punto 0, possa approssimarsi con una falda completa dello stesso ordine, appartenente ad una superficie razionale ». Tale domanda comporta certo una risposta affermativa, ove si dimostri che:

L' intorno di un punto i-plo, 0, *sopra una superficie* f *si può sempre approssimare con una superficie razionale* φ, *avente parimente in* 0 *un punto i-plo*, e ciò in un ordine di approssimazione grande quanto si vuole, diguisachè — 0 essendo un punto isolato — si abbiano sopra f e φ gli stessi punti multipli infinitamente vicini ad 0.

Il teorema enunciato risulta da un semplice computo di costanti, nella maniera che segue.

Pongasi — per semplicità di discorso — che il punto 0 sia un punto isolato (non appartenente alla curva multipla di f), e suppongasi inoltre che l'ordine di f sia molto alto rispetto alla singolarità 0 (alla sua composizione ecc.); quest'ultima ipotesi si può sempre realizzare sommando ad f una qualsiasi superficie non passante per 0. Ora assumasi in 0 l'origine delle coordinate: la singolarità 0 di f (o meglio l'intorno di 0 su f, in un ordine di approssimazione arbitrario) resta pienamente caratterizzata da un certo numero di coefficienti, relativo ai termini di ordine più basso che figurano in f. Infatti se f e φ sono due superficie — d'ordine abbastanza alto — che hanno comuni i primi termini fino ad un certo grado r, accade che la superficie $f - \varphi = 0$ ha in 0 un punto r-*plo*, ed allora — per r assai elevato — le f e φ hanno le stesse intersezioni coi rami, lineari e superlineari, uscenti da 0, fino ad un certo intorno; perciò esse hanno a comune anche i punti multipli vicini ad 0, i quali (appartenendo a tutte le polari di f) non possono andare oltre un certo intorno di 0.

Ciò posto, si costruisca la superficie razionale φ per eliminazione di u e v fra le equazioni

$$\varphi) \left\{ x = \frac{\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)}, \; y = \frac{\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)}, \; z = \frac{\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)}, \right.$$

dove le φ designano polinomi arbitrari; disponendo delle costanti che entrano come coefficienti in questi polinomi, si possono uguagliare f e φ fino ad un certo ordine, sicchè appunto f verrà approssimata come si vuole da φ, nell'intorno di 0.

Lo stesso computo di costanti vale anche a provare che *l'intorno di un punto i-plo sopra una superficie algebrica si può approssimare ponendo per* x, y, z, *tre polinomi di due variabili* u *e* v.

Ora si può chiedere di trasformare la dimostrazione della possibilità di una superficie razionale approssimante, nella costruzione effettiva di una tale superficie, rimovendo in tal guisa le obbiezioni che un semplice computo di costanti (non controllato mediante il principio di Plücker-Clebsch) porta naturalmente con sè. Ma dei procedimenti costruttivi che possono occorrere a tale scopo, non intendiamo di occuparci in questa Nota.