Enriques, Federigo

Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique

Revue de Métaphysique et de Morale **XXIV** (1917), pp. 149-164.

SUR QUELQUES QUESTIONS

SOULEVÉES PAR L'INFINI MATHÉMATIQUE

1. *Impossibilité de trouver l'infini dans l'expérience concrète.* — *L'expérience*, envisagée dans le sens strict du mot, c'est-à-dire l'expérience concrète, ne saurait nous fournir l'idée de l'infini. Est-ce que nous voulons affirmer que le monde sensible, l'univers, ne renferme nulle part une infinité d'objets; qu'il n'*existe* pas une infinité inépuisable d'étoiles, qu'il n'y a jamais *eu* une infinité d'états du monde s'écoulant dans un passé éternel?

Nous n'en savons rien; mais ce ne sont pas de pareilles hypothèses métaphysiques que nous voulons nier par l'affirmation précédente. En effet de telles hypothèses ouvrent à notre sensibilité une infinité d'objets possibles; leur contenu est donc une *virtualité* et non une *actualité* d'expériences; il est d'ailleurs évident que l'idée même de cette virtualité ne saurait être suggérée par le seul fait de l'expérience : lors même qu'il existe une infinité d'étoiles, personne ne saurait les *voir* ou les compter. Il y a en effet, à cet égard, une limite infranchissable qui tient essentiellement à la nature de notre esprit : on ne saurait percevoir ni représenter dans notre imagination ou penser effectivement, l'un à côté de l'autre ou l'un après l'autre, une infinité d'objets. C'est même là la *définition* la plus simple du *fini*, dont l'infini est la négation : est fini tout assemblage d'objets qu'on pourra théoriquement épuiser par la pensée en pensant distinctement les dits objets l'un après l'autre ou l'un à côté de l'autre.

2. *Expérience rationalisée : infini potentiel et infini actuel.* — L'infini qui ne relève pas de l'expérience concrète, nous est imposé par ce postulat : que l'expérience peut être idéalisée par la raison; c'est-à-dire peut être *conçue* de façon abstraite, *sub specie æternitatis*. — En effet l'expérience conçue nous met en face de deux sortes d'infini : l'*infini actuel* et *l'infini potentiel*.

1° On conçoit qu'il existe des objets tels que « une *ligne* » et « les *points* appartenant à une ligne » dont le rapport logique est celui d'une *classe* à ses *éléments*, mais qui nous amènent à considérer des classes renfermant une infinité d'éléments, c'est-à-dire des *classes infinies*.

C'est là une forme de ce qu'on appelle l'infini actuel : un concept qui se trouve défini d'une part comme un objet propre et qui d'autre part peut être considéré vis-à-vis d'un autre concept de façon à embrasser une infinité de déterminations de celui-ci.

Le concept d'une *limite* par rapport à une *suite* d'approximations successives est aussi un infini actuel du même genre. Le rapport logique de la fraction 1/3 par rapport à la suite

$$0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333\ldots,$$

peut être considéré comme un *rapport d'appartenance* : c'est ce que l'on exprime en disant que les valeurs approchées de 1/3 sont les fractions décimales maxima *contenues* en 1/3. D'ailleurs la limite 1/3 paraît immédiatement sous l'aspect d'une totalité actuellement infinie si l'on écrit

$$1/3 = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$$

2° D'autre part on conçoit des expériences *répétables* en des conditions données qui se reproduisent périodiquement, et qui donnent lieu à des *suites* que l'*on peut prolonger indéfiniment* : on a ainsi ce qu'on appelle l'*illimité* ou l'*infini potentiel*. Par exemple la suite

$$0{,}3,\ 0{,}33\ldots,$$

peut être définie, sans connaître sa valeur limite, par sa loi de formation qui consiste à ajouter un « 3 » aux décimales du terme précédent.

Note. — La distinction entre infini actuel et infini potentiel que nous venons d'établir sur le terrain de la connaissance, ne saurait être établie au point de vue métaphysique en disant que le premier cas correspond à l'hypothèse d'une *infinité de données* réelles, et le second à *une possibilité illimitée de constructions par la pensée*. Cette manière de concevoir la distinction repose au fond sur une conception non critique de la connaissance, qui semble avoir été celle d'Aristote. On suppose que l'existence d'un objet réel entraîne l'existence d'un objet *donné* dans la pensée. Par conséquent l'impossibilité de penser effectivement une infinité d'objets reçoit une interprétation métaphysique : on en est amené à nier la possibilité d'un univers infini.

Mais, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, l'infinité de l'univers n'a pas cette signification par égard à notre pensée; elle lui offre seulement une possibilité illimitée d'expériences, c'est-à-dire un infini potentiel.

3. *Peut-on atteindre l'infini par la raison pure? réalisme et nominalisme.* — La question se pose maintenant de savoir si, en dehors de toute expérience, l'idée de l'infini ne pourrait être fournie par le travail de la pure *raison*. Cette question acquiert une signification précise par les considérations suivantes. L'esprit reconnaît en lui-même la faculté de déterminer d'avance la répétition illimitée de certains actes de la pensée, et ainsi de définir des suites potentiellement infinies. De pareilles constructions pourront être interprétées de deux façons différentes : les uns diront qu'il s'agit ici d'une *expérience psychologique* qui se trouve idéalisée et rationalisée au même titre que l'expérience en général; les autres y verront au contraire un fait *sui generis*, un reflet de la conscience intérieure qui est la base même de toute rationalisation de l'expérience. En ce sens on pourra admettre que soit par la pure raison, soit par la conscience que l'esprit possède de sa propre nature, on est amené à l'infini potentiel, puisqu'on construit par la pensée des suites d'objets indéfiniment prolongeables.

Alors il s'agit de répondre à la question suivante : supposons donnée potentiellement par la pensée une infinité d'objets, on demande s'il y a lieu de considérer défini logiquement un nouvel objet de la pensée qui en exprime la totalité ou la limite, lors même que les dits objets ne sont pas construits par rapport à un concept de ce genre que l'on suppose donné *a priori*.

La réponse à cette question dépend en premier lieu d'une tendance fondamentale de l'esprit; elle sera négative ou en quelque sorte positive suivant qu'on se sent porté vers le *nominalisme* ou vers le *réalisme*.

Réalisme et nominalisme, voilà deux noms qui nous rappellent des controverses célèbres au moyen âge. L'objet de ces controverses ne nous intéresse peut-être pas aujourd'hui ou tout au moins ne nous intéresse plus de la même manière; mais ce qui faisait le fond de l'opposition des écoles, je veux dire l'opposition des tendances, est tout aussi vivant de nos jours. Nous retrouvons le nominalisme dans la tendance qui procède du particulier au général par une marche *inductive*; au contraire si l'on aime à descendre du général au particulier en suivant une marche *déductive*, c'est que notre intelligence conçoit en quelque mesure à la façon des réalistes le rapport des idées générales aux objets singuliers.

D'après leurs tendances d'esprit on peut prévoir les réponses que nominalistes et réalistes vont donner à la question que nous avons posée, tout à l'heure. Nous tâcherons de représenter l'opposition des idées par l'exposé des thèses suivantes :

Thèse des nominalistes. — Une classe, exprime simplement l'association des éléments qui la composent. Partant si l'on se donne une suite infinie d'objets

$$a_1 \; a_2 \ldots,$$

il y a lieu de former les classes

$$c_2 = (a_1 \, a_2), \; c_3 = (a_1 \, a_2 \, a_3) \ldots \; c_n = (a_1 \ldots \, a_n),$$

mais on ne saurait pousser ce procédé de réunion jusqu'à embrasser dans une classe actuellement infinie la totalité des objets $(a_1 \, a_2 \ldots)$ que notre pensée peut ajouter l'un à l'autre par construction progressive. On en conclut que cette classe totale est définie d'une façon *transcendante*, c'est-à-dire par une suite d'actes de la pensée qui ne saurait être achevée ; c'est là un mode de définition vicieux, et le concept qu'on prétend en tirer ne saurait avoir droit d'existence logique.

Faut-il aller plus loin et déclarer *a priori* absurde tout concept qui ait avec $a_1 \, a_2 \ldots$ le rapport d'une totalité à ses éléments? Faut-il nier de même toute signification à la limite d'une suite infinie?

C'est là une conséquence que des empiristes tels que Berkeley ont cru pouvoir tirer d'un nominalisme rigoureux. Mais cette position sceptique vis-à-vis de toute rationalisation de l'expérience se trouve dépassée déjà chez Stuart Mill. Un conceptualisme critique admettra donc qu'une infinité de représentations ou d'expériences possibles puisse être contenue dans un concept. On sera amené à reconnaître des concepts, également suggérés par l'expérience, qui se trouvent l'un par rapport à l'autre dans la situation d'une classe infinie à ses éléments. On en a déjà vu des exemples.

Mais, d'après la doctrine de l'empirisme critique, on devra tenir pour fixé le point suivant : la construction d'un concept nouveau représentant une infinité d'objets donnés, suppose toujours un postulat c'est-à-dire une *induction de l'expérience*; on ne saurait admettre l'existence logique d'un tel concept à titre d'*axiome* ou de *nécessité rationnelle*.

Une infinité d'objets ne peut être regardée *a priori* comme une *classe*, une suite infinie ne définit pas *a priori* une *limite*.

Thése des réalistes. — La classe, ce n'est pas purement un produit de notre activité associative. Au contraire l'association psychologique n'est qu'un moyen empirique de restituer le tout original qui préexiste en droit aux individus associés. Partant si l'on trouve dans la pensée une possibilité illimitée de construction, il faut admettre que la suite

$$a_1\, a_2 \ldots$$

qui en est engendrée, correspond à une infinité actuelle qui *existe en soi* et que la raison peut reconnaître par un acte synthétique, dépassant les associations psychologiques effectuées dans l'expérience. De même la limite de la suite, que notre imagination ne sait pas atteindre, a aussi une existence logique que la raison pose également *a priori*.

Mais de pareilles réponses renferment quelques imprécisions; on peut souhaiter de sortir du vague en invitant les réalistes à exprimer leur pensée par des affirmations susceptibles de vérification. Par là on sera en mesure de juger, mieux que la tendance réaliste, la valeur des doctrines que le réalisme a suggéré dans cet ordre de questions.

Nous sommes amené à distinguer *deux formes historiques du réalisme*.

4. *La doctrine réaliste dans sa première forme historique*. — La fondation de l'analyse infinitésimale est le champ propre où les tendances réalistes ont trouvé leur épanouissement.

Il y a une *doctrine réaliste*, qui lors même qu'elle n'est pas explicitement énoncée se dégage comme notion implicite dans les procédés de cette analyse. Il est vrai qu'une telle doctrine n'est jamais venue au jour sous forme d'affirmations générales, car on a eu toujours quelque conscience des difficultés soulevées par l'emploi de l'infini, les critiques anciennes à cet égard ayant conservé de la force et obligé les mathématiciens à défendre leurs nouvelles conquêtes. Il n'en est pas moins vrai que l'esprit qui préside à l'analyse infinitésimale renferme une invitation à étendre à l'infini les inductions que l'on a reconnues valables en général pour des nombres aussi grands que l'on voudra. C'est cette invitation qu'exprime de façon caractéristique un mot célèbre que d'Alembert prononçait devant un étudiant qui lui avait fait part de ses scrupules : « Continuez, la foi viendra! »

Si l'on cherche à reconnaître quel est le contenu de la « foi » que l'on invoque ainsi, un simple exemple suffit à nous le faire comprendre. Je citerai le suivant : On a reconnu que les aires des polygones réguliers de n côtés sont proportionnelles aux carrés des apothèmes. Cette proposition étant vraie pour $n = 3, 4, 5...$, on la tiendra vraie aussi pour $n = \infty$, en énonçant que « les aires des cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons ».

Je suppose qu'on ait poussé plus loin l'examen de semblables méthodes constituant l'analyse infinitésimale et je tâcherai d'en dégager les principes généraux sous la forme suivante :

1° Toute suite infinie

$$a_1 \; a_2 \ldots$$

peut être considérée comme une suite d'approximations successives d'une limite.

2° Toute infinité d'objets peut être considérée comme une totalité formant une « classe ».

3° Toute proposition qui est reconnue vraie pour tous les éléments a_n d'une suite infinie

$$a_1 \; a_2 \ldots$$

s'étend immédiatement à la limite pour $n = \infty$.

4° De même toute proposition qui est valable pour les classes

$$(a_1 \, a_2) \; (a_1 \, a_2, \, a_3) \ldots (a_1 \ldots a_n),$$

quel que soit n, s'étend à la classe formée par la totalité des éléments a_n.

Je crois qu'on doit reconnaître dans ces principes la *doctrine réaliste*, constituée à l'occasion de l'analyse infinitésimale, *sous sa première forme historique.*

Mais j'entends que cette affirmation soit entourée des réserves que je vais formuler.

5. *Les paradoxes des limites et la critique de l'analyse infinitésimale.* — A la vérité je doute qu'un mathématicien, parmi les pionniers de l'analyse infinitésimale, eût souscrit sans restrictions aux quatre principes énoncés ci-dessus. Il est fort probable que la connaissance de quelques exceptions évidentes l'auraient retenu. Peut-être les principes énoncés auraient-ils été souscrits par quelque philosophe plus soucieux de la cohérence de ses propres tendances que de la vérité de ses affirmations?

Ce n'est pas la question de fait qui nous intéresse ici. Une doctrine philosophique fait partie — en un certain sens — de l'histoire de la philosophie, lors même que personne ne se trouve pour la représenter dans sa pureté, si on peut la découvrir vive et agissante dans certaines tendances d'esprit et dans certaines constructions scientifiques.

A cet égard on ne saurait douter du réalisme que j'ai essayé de traduire par des formules précises. Peut-être pourrais-je rappeler aussi quelques questions soulevées entre mathématiciens, par exemple la question de savoir si la série indéterminée

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

représente 1 ou 0 ou plutôt 1/2; questions qui témoignent d'un attachement aux principes réalistes formulés ci-dessus.

Mais le véritable baptême de la doctrine réaliste vient de ses adversaires; les principes mêmes que nous avons dégagés des procédés de l'analyse vont être mis en lumière et en même temps réfutés par la critique inaugurée au commencement du siècle passé. C'est alors qu'un Abel et un Cauchy se montreront scandalisés de l'emploi de *séries divergentes et indéterminées* sur lesquelles on croyait fonder des conclusions en analyse. On rappellera des anciens paradoxes et on en construira des nouveaux, pour montrer qu'un pareil usage de l'infini est illégitime, qu'on n'est pas en droit de supposer une limite à des suites qui n'en admettent pas, ni d'étendre à la limite les inductions prouvées successivement pour tous les termes d'une suite illimitée; on fera toucher du doigt que, par des suppositions de ce genre, on peut prouver tout ce que l'on veut, soit par exemple que $1 = 2$, c'est-à-dire le faux aussi bien que le vrai.

6. *Le paradoxe de Galilée touchant la totalité des nombres entiers.* — Parmi les paradoxes que Bolzano et Cauchy empruntent à leurs

devanciers, il convient de citer celui de Galilée qui vise à démontrer l'impossibilité de considérer la suite des nombres entiers

$$1, 2, 3...,$$

comme une classe actuellement infinie. Il s'agit de la remarque que cette classe est *équivalente* à une partie de la classe même, c'est-à-dire qu'on peut établir une correspondance entre les nombres entiers 1, 2, 3, et les nombres pairs 2, 4, 6, ou les carrés parfaits 1^2, 2^2, 3^2, de façon que ces nombres — d'une espèce particulière — figurent en *nombre égal* à celui de tous les nombres.

On a vu d'abord dans cette conclusion une absurdité tenant au concept même de la classe C actuellement infinie. En effet, on tenait pour vraie *a priori* à l'égard de toute classe, une proposition que l'on reconnaît pour les classes finies, c'est-à-dire qu' « une classe ne saurait être équivalente à une de ses parties ».

Mais qui nous autorise à cette extension ? Si on suppose que la proposition en question soit vraie pour les classes formées de n objets, il est aisé de démontrer qu'elle subsistera aussi pour les classes de $n+1$ objets. On obtient ainsi une démonstration inductive, de n à $n+1$, valable pour toute classe finie. De quel droit énoncera-t-on que la proposition subsiste pour $n = \infty$?

D'après l'analyse développée plus tard par Georges Cantor, le paradoxe de Galilée et de Cauchy (que Renouvier, Evellin et tous les finitistes ont exploité successivement) cesse de témoigner que le concept d'un infini actuel constitue une absurdité. A la vérité la classe infinie

$$C = (1, 2, 3...)$$

ne constitue pas un concept contradictoire, mais simplement un concept nouveau dont on ne peut pas prévoir les propriétés par simple extension des propriétés du fini ; un concept qui rompt avec les prévisions induites du fini, nous obligeant à admettre que « le tout peut être équivalent à une de ses parties ».

7. *Le postulat de continuité et la critique de Du Bois Reymond.* — Les paradoxes touchant les limites et les séries divergentes ou indéterminées, aussi bien que les paradoxes de Galilée et de Cauchy concernant la totalité des nombres entiers, ruinent également la doctrine réaliste que nous avons formulée par les principes du n° 4. Faut-il en conclure que tout réalisme mathématique est en même

temps, condamné? La plupart des critiques qui ont renouvelé les fondements de l'analyse infinitésimale n'hésiteraient pas à souscrire à cette interprétation. Mais un philosophe doué d'une grande pénétration, P. Du Bois Reymond, a perçu qu'il y a ici une question de tendances, et que déjà le *postulat fondamental de la théorie des limites* (la *continuité* de la ligne) peut être appuyé à deux conceptions philosophiques opposées. Ce sont celles qu'il désigne par les noms de *idéalisme* et *empirisme*, où d'autres déjà, avant moi, ont reconnu le *réalisme* et le *nominalisme* du moyen âge.

Constatant cette opposition d'idées, Du Bois Reymond ne prétend aucunement résoudre en faveur d'un parti; par le dialogue où il fait discuter l'idéaliste et l'empiriste, il veut seulement représenter deux manières de voir que, en fin de compte, il semble juger également légitimes.

Il s'agit de justifier la croyance à la continuité de la ligne, c'est-à-dire le postulat suivant :

Si l'on se donne une suite illimitée de grandeurs croissantes

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots,$$

restant inférieures à une grandeur assignée :

$$a_n < \mathrm{L};$$

il *existe* une *grandeur limite* :

$$l = \lim_{n=\infty} a_n,$$

telle que

$$a_n < l,$$

et la différence $l - a_n$ peut être réduite à une différence aussi petite que l'on voudra en prenant n assez grand.

L'empiriste de Du Bois Reymond se borne à constater à ce propos que la suite

$$a_1 \ a_2 \ldots$$

suffisamment prolongée nous amène à des grandeurs que l'expérience ne suffit plus à discerner; c'est dans cette zone nébuleuse qu'on place la limite. Et l'hypothèse qu'on fait à ce sujet n'a en somme qu'une valeur symbolique. (Si, au lieu de s'en tenir à l'expérience concrète, on fait intervenir la *rationalisation* de l'*expérience géométrique*, le *postulat de la continuité* nous paraîtra justement relever de cette exigence rationnelle que les expériences puissent être représentées par un concept!)

A l'encontre de l'empiriste, l'idéaliste de Du Bois Reymond ne voit plus dans l'introduction de la limite un postulat qu'il faut tâcher de rattacher à l'expérience; l'idéaliste invoque ici une nécessité rationnelle, c'est-à-dire le principe d'existence que nous avons déjà formulé au *n°* 4 comme faisant partie de la doctrine réaliste. La suite

$$a_1 \ a_2 \ldots$$

qui est illimitée dans la pensée, doit être infinie *en soi*, et il y aura — après tous les éléments a_n — un *dernier* élément que la raison conçoit, lors même que la pensée empirique ne saurait l'atteindre; c'est précisément la limite l.

Mais on pourrait objecter : n'y a-t-il pas des suites de grandeurs *sans limite*? ce fait ne constituerait-il une condamnation irrévocable du principe réaliste?

La réponse n'est pas difficile. Si les réalistes — dont je ne partage d'ailleurs pas les convictions — veulent me le permettre, je vais essayer de défendre leur point de vue, ainsi que je crois qu'ils le feraient eux-mêmes, à l'égard de la question précédente.

Admettons en principe que toute suite illimitée d'objets $a_1 \ a_2 \ldots$, définit un *dernier* élément. Si $a_1 \ a_2 \ldots$ sont des grandeurs, il y a lieu de demander si le dernier terme de la suite prendra place aussi dans l'échelle des grandeurs.

Or cette échelle est un ensemble ordonné, et dans le cas où $a_1 a_2 a_3 \ldots$ font des oscillations qui demeurent supérieures à une limite fixe, c'est-à-dire lorsque la série

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots$$

est indéterminée, on impose à la lim a_n des conditions contradictoires puisqu'on cherche une grandeur qui occuperait deux places distinctes dans une même échelle. Il y en a assez pour conclure qu'une suite $a_1 a_2 \ldots$, correspondant à une série $a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots$ indéterminée, ne saurait définir une *grandeur-limite*; et la question reste ouverte de savoir si la limite d'une telle suite peut recevoir un sens dans un domaine différent (les réalistes seront toujours tentés de chercher à introduire des êtres nouveaux auxquels corresponde un emploi légitime des séries indéterminées!).

Le cas d'indétermination écarté, ou bien la suite de grandeurs

$$a_1\ a_2 \ldots$$

admettra une grandeur-limite *finie*, ou bien elle tendra à l'*infini*, et une nouvelle espèce de grandeurs s'introduira ici pour les réalistes. En ce sens, le *principe d'existence de la limite* sera conservé par les réalistes, à titre d'*axiome*.

8. *La doctrine réaliste sous sa seconde forme historique.* — Par les considérations qui précèdent on tâche de modifier la doctrine réaliste formulée au *n*° 4, de façon à la mettre à l'abri des objections de ses adversaires. Ce travail de rénovation donnant lieu à une *seconde forme historique du réalisme* a été poursuivi de nos jours par un esprit puissant, que j'ai eu déjà occasion de nommer, j'entends parler de Georges Cantor, le fondateur de la *théorie des ensembles*.

D'autres théoriciens éminents ont étendu le programme de Cantor. Parmi ceux-ci je citerai le philosophe B. Russell, qui a développé dans le sens le plus large les conséquences philosophiques du réalisme, introduit ainsi en mathématiques.

Je tâcherai de dégager la doctrine contenue dans le nouveau réalisme en rattachant les constructions cantoriennes à l'usage tout à fait général d'un principe unique, que je formulerai de la manière suivante :

Principe fondamental. — Toute infinité d'objets virtuellement définis, peut être considérée comme une totalité formant une classe et constituant un *nouvel* objet logique. A la différence de ce qu'on admettait dans la doctrine du *n*° 4, on conçoit que les propriétés de cet objet seront absolument nouvelles, c'est-à-dire qu'il ne sera pas légitime de les énoncer *a priori* par une *induction étendue* du fini à l'infini.

Cet usage *transcendant* de la raison est jugé le point faible de la doctrine réaliste sous sa première forme historique.

Les applications que d'après Cantor et les cantoriens on fait du principe fondamental sont des plus étendues.

Considérons d'abord la suite des nombres entiers

$$1,\ 2,\ 3 \ldots;$$

la totalité de ces nombres forme une classe qu'on appelle *dénombrable*.

Or, étant donnée une classe C, on peut former en général une *classe de classes*, K, ayant comme éléments toutes les classes possibles formées par les éléments de C. L'existence logique de C entraîne celle de K d'après le principe fondamental de la doctrine réaliste. On démontre que K a une *puissance supérieure* à C, c'est-à-dire que C, équivalente à une partie de K, ne saurait être équivalente à K (il est impossible d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de C et ceux de K).

Si l'on part de la classe

$$C = (1, 2, 3...)$$

et que l'on construise toutes les classes ordonnées de nombres

$$(a_1\, a_2 ...),$$

on obtient une classe K, dont les éléments viennent correspondre aux nombres (généralement irrationnels) :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1\, a_2} + \frac{1}{a_1\, a_2\, a_3} + \cdots$$

Il est aisé d'en *déduire* l'existence logique de cet ensemble de nombres réels, qu'on appelle le *continu numérique*, et qui possède une puissance supérieure à l'infinité dénombrable (1, 2, 3...). Cet ensemble correspond d'ailleurs au continu géométrique dont la définition résulte des postulats de la Géométrie; mais, tandis que cette construction prend pour base une expérience rationalisée, la démonstration que l'on obtiendrait par la voie indiquée dessus à la prétention de *se passer de postulats*; elle n'invoque que le principe fondamental du nouveau réalisme, qui est conçu comme un *axiome* d'ordre purement logique.

D'autre part, reprenons la suite des nombres entiers :

$$0, 1, 2..., n...,$$

que, par commodité, on a fait commencer par zéro.

Le nombre ordinal n qui figure ici désigne en même temps le nombre cardinal de la classe $(0, 1... n - 1)$.

La totalité des nombres (0, 1, 2...) correspondra donc à un *nombre ordinal infini* (ou *transfini* d'après l'expression de Cantor), qui désignera une place immédiatement successive aux nombres finis, 0, 1, 2... Eu égard aux propriétés nouvelles de ω, on dira que ω est le *premier* nombre entier qui *suit* les nombres finis, plutôt que le considérer comme le *dernier* terme de la suite

$$0, 1, 2\ldots,$$

Par ce procédé on construit rationnellement ce qu'on peut appeler la *limite idéale* de la suite donnée. La possibilité logique de ce concept résulte d'ailleurs, pour les empiristes, du fait qu'il y a des suites de points ou de nombres données *a priori* par rapport à une limite ainsi que nous l'avons remarqué dès le début de cet article. Par exemple ω sera le « nombre ordinal » servant à désigner la place de $1/3$ dans la suite :

$$0{,}3,\ 0{,}33\ldots,\ 1/3.$$

9. *Les paradoxes de la théorie des ensembles.* — Les déductions qui précèdent renferment déjà un conflit virtuel entre réalistes et nominalistes.

S'il s'agit de nominalistes qui consentent à la rationalisation de l'expérience, le désaccord ne portera pas sur la légitimité de concevoir le *continu numérique* comme classe non dénombrable, ou sur la légitimité des *transfinis ordinaux*. Mais ces conceptions, ont une valeur différente pour les deux partis. Pour les réalistes, elles sont légitimes *a priori* et servent même à établir la possibilité logique de certaines constructions géométriques; au contraire, pour les nominalistes, elles ne sauraient tirer leur droit d'existence que de ces constructions, c'est-à-dire d'un ensemble de *postulats*, exprimant une rationalisation de l'expérience.

Mais en somme le conflit n'aura pas de graves conséquences, puisqu'on s'accorde sur l'existence logique et sur les propriétés des concepts, dont on discute l'origine. Que telle proposition figure dans l'exposition d'une théorie arithmétique formelle à titre d'axiome, au lieu que — dans une autre exposition géométrique — elle paraît déduite d'un postulat concernant les grandeurs, on se fera finalement une raison de la différence et on ne s'y arrêtera davantage.

Cependant une pareille suspension des hostilités ne saurait signifier une véritable paix entre réalistes et nominalistes.

Le conflit virtuellement ouvert va éclater aussitôt que les premiers pousseront leurs constructions au delà des intuitions suggérées par l'expérience. Et, malheureusement pour les réalistes, de nouveaux paradoxes, ceux qu'on a coutume de désigner comme *paradoxes de la théorie des ensembles*, se trouveront arrêter la marche ascendante du nouveau réalisme.

Rappelons brièvement en quoi consistent les contradictions auxquelles on est acculé.

I. *Classe de toutes les classes.* — D'après le principe fondamental de la doctrine réaliste, il doit exister une *classe de toutes les classes*, C, renfermant tous les objets possibles, et ayant une puissance supérieure ou égale à toute autre. Or les classes contenues en C peuvent être regardées comme les éléments d'une nouvelle classe K, qui a une puissance supérieure à C.

II. *Paradoxe de Russell.* — Considérons les classes C qui ne renferment pas elles-mêmes parmi leurs éléments; l'ensemble de toutes ces classes, forme une classe K, dont on démontre qu'elle jouit en même temps de deux propriétés contradictoires : K doit renfermer et ne pas renfermer soi-même parmi ses éléments.

III. *Antinomie de Burali-Forti.* — Considérons la suite des nombres transfinis ordinaux

$$1, 2..., \omega, \omega + 1...;$$

elle constitue ce que Cantor appelle un ensemble *bien ordonné*, c'est-à-dire tel que tout groupe qui en fait partie possède un *premier* élément.

On peut toujours prolonger la suite des ω à l'aide des principes suivants :

1° Après un nombre a on peut placer un nombre successif $a + 1$;

2° En supposant définie une suite bien ordonnée infinie, satisfaisant à n'importe quelle condition, on sera en droit de construire un nouveau transfini correspondant à la totalité des nombres que l'on suppose définis, et prenant place après eux.

C'est ainsi que Cantor prolonge effectivement la suite des ω en introduisant les nombres limites $2\,\omega$, $3\,\omega$.... et puis le nombre-limite de ces limites et ainsi de suite.

De cette façon on définit virtuellement tous les ensembles bien ordonnés dénombrables. Faudra-t-il s'arrêter ici? Cantor n'y voit pas de raison. La totalité des ensembles bien ordonnés dénombrables servira à définir un nouveau transfini Ω, correspondant à une puissance supérieure.

S'il en est ainsi continuons à prolonger la suite au delà de Ω. Le même principe que nous avons employé dans nos constructions nous donnera le droit de parler de la *totalité absolue* des nombres ordinaux transfinis, et ainsi de placer à la fin de notre suite un *dernier élément.* Mais l'existence de ce transfini maximum constitue une absurdité; c'est là l'antinomie de Burali-Forti.

10. *Conclusions.* — On a beaucoup raisonné au sujet des paradoxes de la théorie des ensembles. Mais des raisonnements ingénieux ne sauraient violer la vérité qui s'impose de toute évidence. Le principe même du nouveau réalisme en est condamné. C'est ce que reconnaît par exemple implicitement, M. H. Dingler dans sa note récente « Ueber die logischen Paradoxien der Mengelehre » (*Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, 1913), lorsqu'il affirme que « la définition d'une classe comme totalité des éléments satisfaisant à des conditions données, devra être accompagnée de la *démonstration d'existence logique* du nouveau concept que l'on introduit ainsi ».

Je veux bien accepter ce point de vue en ajoutant toutefois la remarque suivante : une démonstration de ce genre ne saurait être fournie généralement par des arguments logiques, mais devra faire appel à des postulats empruntés à une rationalisation de l'expérience. Ainsi donc les constructions des réalistes ne seront autorisées qu'autant qu'elles restent dans le domaine des êtres que l'intuition expérimentale nous a déjà fait connaître ou peut nous faire connaître.

Si d'après ce critérium nous essayons de juger les constructions plus discutées de la théorie des ensembles, nous nous expliquons clairement les attaques des nominalistes envers le nombre transfini Ω de Cantor, ou envers le *principe des choix en nombre infini* adopté par Russell et par Zermelo, etc. De pareils concepts et principes, aussi bien que les propositions qu'on prétend établir par leur usage, ont suscité toutes les défiances des mathématiciens nominalistes. Les paradoxes de la théorie des ensembles prouvent que de pareils doutes ne sont que trop fondés, puisque le principe même du nouveau réalisme se trouve ébranlé par ces contradictions.

Que vais-je conclure? Je ne dirai pas que le réalisme est mort et qu'il s'agit de l'ensevelir. Je crois, en effet, qu'une tendance de l'esprit humain ne saurait mourir. Mais peut-être avons-nous le droit d'enregistrer l'insuccès partiel de la doctrine réaliste, sous sa seconde forme historique. De même que la première est tombée du fait des paradoxes touchant les limites et les séries divergentes ou indéterminées, de même la nouvelle doctrine (et avec elle toute une série de prétendues démonstrations) est virtuellement tombée du fait d'avoir soulevé les paradoxes de la théorie des ensembles. Le seul infini actuel dont les Mathématiques ont à s'occuper c'est celui que l'on peut reconnaître, non pas dans l'*expérience concrète*, mais dans la *rationalisation de l'expérience*.

Le rationalisme pur a échoué dans ses prétentions, mésaventure qui lui est arrivée d'ailleurs en d'autres domaines de la spéculation et de la recherche. Mais nous devons nous réjouir qu'il y ait eu des hommes assez confiants dans la force de leur pensée pour essayer de pareilles voies : il ne faut pas oublier que le réalisme de la Renaissance nous a donné l'Analyse infinitésimale et le réalisme sous sa seconde forme historique reste lié à la théorie des ensembles.

Ces bénéfices méritent bien qu'on lui pardonne les fautes que la critique a mises en lumière.

FEDERIGO ENRIQUES.