Enriques, Federigo

La evolución del concepto de la geometria y la escuela italiana durante los útimos cincuenta años

Revista Mat. hisp.-amer. **II** (1920), pp. 1-17.

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE LA GEOMETRÍA Y LA ESCUELA ITALIANA DURANTE LOS ÚLTIMOS CINCUENTA AÑOS

POR

F. ENRIQUES

TRABAJO PUBLICADO EN LA
REVISTA MATEMÁTICA
HISPANO - AMERICANA

MADRID
1920

Establecimiento tipográfico de Fortanet, Libertad 29.

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE LA GEOMETRÍA Y LA ESCUELA ITALIANA DURANTE LOS ÚLTIMOS CINCUENTA AÑOS

1. Al joven que por el año 1870 se iniciaba en la ciencia matemática, aparecía ésta dividida en dos grandes ramas, constitutivas de dos disciplinas autónomas: Análisis y Geometría. La Geometría acababa de nacer—o renacer—, ya que, en la primera mitad del siglo XIX, Poncelet, Steiner, Staudt,..., creadores de la Geometría proyectiva, renovaron el método sintético de los griegos. Pero este método había superado ya el restringido campo de las cuestiones elementales, relativas a las curvas y superficies de segundo orden, y extendió sus horizontes a más vastas aplicaciones: a las curvas y superficies algébricas de orden superior. Con los trabajos de Chasles y De Jonquières, en Francia; con los de Möbius, Plücker y Steiner, en Alemania; de Salmon, Cayley y Sylvester, en Inglaterra, y de Cremona, en Italia, la Geometría superior había alcanzado sus primeros triunfos.

Es verdad que no todos los trabajos indicados fueron concebidos y desarrollados con método sintético; en los de Plücker, por ejemplo, se halla el desarrollo moderno de la Geometría analítica, que, por obra de los geómetras ingleses, primero, y Aronhold y Clebsch, después, ha tenido un nuevo desarrollo con la teoría de las formas invariantes. Pero aun en estos desarrollos del método analítico se advierte el influjo de las concepciones sintéticas; el formalismo algébrico viene subordinado a las nuevas intuiciones, para hacerlo adaptable a los nuevos objetos de estudio, que el joven matemático de la época a que nos referimos podía ver ante sí como un fin esencialmente distinto de los que los Euler, Lagrange, Gauss, Abel, etc., habían señalado al Análisis moderno.

La distinción así concebida entre los campos del Análisis y de la Geometría fomentaba, naturalmente, el ideal del purismo, que surge también de las exigencias de la renovación crítica de la ciencia. Perfeccionar el métodò sintético hasta el punto de hacer innecesaria toda ayuda del Álgebra, era, más o menos explícita, la aspiración de todo geómetra; había quien llegaba a proclamar, rígidamente, que la Geometría acaba cuando se habla del número; ¡alguna vez, se llegaba a permitir contar los vértices y lados de un polígono, con tal que no se pasase más allá del número entero! Por otra parte, también los analistas, con la vista fija en la estrella weierstrassiana, se complacían en manifestar que era ya llegado el tiempo de librar al Análisis de las *falaces*, o al menos *extrañas*, intuiciones espaciales; transformar todo el edificio de la Matemática moderna en una teoría rígidamente formalista, ajena al mundo externo, y suprimir todo dinamismo de conceptos, sustituyendo los pseudopasos al infinito con cadenas de desigualdades, parecía ser la finalidad del Análisis para quienquiera que tuviese idea de la dignidad lógica de la ciencia.

No se pretende negar que estas tendencias puristas, cuyos aspectos más criticables hemos puesto de manifiesto, hayan producido un notable perfeccionamiento de los instrumentos de investigación y afinado el sentido crítico de los matemáticos, en orden a cuestiones delicadas. Pero, al fin, la época del purismo parece que en gran parte ya pasó; el movimiento de las ideas en los últimos cincuenta años, observado en los más conspicuos representantes de la Matemática, parece que al fin tiende, no ya a la distinción particularista de Análisis y Geometría, sino a la reafirmación de la unidad del pensamiento y de la ciencia matemática.

En este movimiento, ¿en qué ha venido a parar el concepto de la Geometría? ¿Qué suerte ha tocado, en particular, a aquel método sintético puro de investigación, que, según hemos dicho, se presentaba hace cincuenta años tan pródigo en promesas?

Jueces superficiales han sentenciado que aquellas promesas se han frustrado, que *la Geometría ha muerto* y que ya es tiempo de hacerle el funeral. Nosotros, por el contrario, creemos que, en realidad, sólo una particular encarnación histórica del espíritu geométrico ha sido superada por el progreso de las ideas modernas, pero que el espíritu que animaba aquella forma histórica vive y se extiende hoy a una esfera más alta de problemas, unido a la tradición profunda del pensamiento matemático. En este artículo queremos, precisamente, aclarar, con consideraciones y ejemplos, este nuevo concepto de la Geometría que percibimos en la conciencia de los matemáticos contemporáneos.

2. Puesto que se ha hablado de un *muerto*, vayamos al lecho del *enfermo*.

Hemos dejado la Geometría de hace cincuenta años en pleno fervor purista. Además de la tendencia crítica general, ya señalada, había algunos motivos particulares que influían en el ánimo de los geómetras. Fundábanse, en efecto, grandes esperanzas en la fecundidad de los conceptos que la Geometría proyectiva, aun moviéndose en un campo limitado, se había mostrado capaz de crear, merced a una vigorosa generalización de las intuiciones ordinarias. Mientras de una parte las generaciones de las formas geométricas elementales se extendían a figuras más elevadas, abriendo el camino a elegantes exposiciones, de otra, el mismo espíritu geométrico se revelaba potentísimo en el estudio de las cuestiones más vastas sobre los entes algébricos, y apenas tomaba del Álgebra algunas premisas, a modo de principios o porismas (así llamados por Chasles) puestos como fundamento de la nueva ciencia. En tales condiciones, el propósito de librar completamente a la Geometría de este auxilio era muy natural, y los esfuerzos hechos en tal sentido por nuestro venerado maestro De Paolis y por Kötter, para consagrar así el triunfo del purismo, deben ser considerados con reconocimiento por una generación posterior que no olvide la deuda que ella misma ha contraído con el momento histórico que la ha precedido.

Mas, aparte la cuestión de la pureza del método, la visión geométrica de los entes algébricos atraía por su novedad, ya que los objetos de estudio se presentaban cada vez más abundantes y fáciles. Parecía como si al geómetra se abriese un mundo nuevo, en el que bastaba abrir la mano para recoger abundante cosecha de descubrimientos, y donde la imaginación, en triunfal carrera, abría siempre nuevas puertas encantadas, como en un palacio construído por hadas. Era tal, en efecto, el seductor carácter de esta Geometría, que el espíritu se encontraba, no ya frente a problemas planteados de siglos, enigmas terribles por su dificultad, sino más bien frente a cuestiones bellas y curiosas que, no advertidas antes, descubrían al observador mil verdades inesperadas; la misma solución del problema daba o sugería su planteamiento.

Apenas los geómetras vislumbraron este mundo encantado, el anuncio de la tierra prometida atrajo rápidamente a los hombres maravillados. Por todas partes se multiplicaron los geómetras. Nuestro país, que había tenido a Cremona, no quedó ciertamente rezagado; aquella fué la época en que, según decía graciosamente un compañero y maestro mío, bastaba sembrar una alubia para ver nacer un geómetra.

Mas muy pronto fué denunciada abiertamente la ilusión de la facilidad en la investigación. Un ingenioso matemático italiano calificó ciertas orientaciones como *Tictacgeometría*, frase pintoresca que tuvo gran éxito. El punto débil de aquella Geometría artificiosa, que multiplicaba los entes, dando rienda suelta a una imaginación desbordada (y ni siquiera tan rica como a primera vista podría creerse), fué puesto de manifiesto por Segre, en su artículo «*Su alcuni indirizzi nella investigazione geometrica*», publicado en la *Rivista Matematica* de Turín.

Pero ya el enfermo agonizaba; la Geometría de tic-tac había dejado de existir para la ciencia. El pobrecillo, sin darse cuenta, seguía combatiendo, y había muerto.

Faltaba aún la identificación del cadáver. Denunciar la vanidad de ciertas pseudoinvestigaciones de vanos investigadores es, efectivamente, muy fácil, pero cosa inútil si la crítica no significa también algo para la orientación de los investigadores más serios. Ocurrió, naturalmente, preguntarse si aquella enfermedad, que se manifestaba en los derroteros de decadencia, no sería, por ventura, indicio de una crisis más profunda que afectaba, quizás sin saberlo, a los mismos espíritus superiores, del mismo modo que los vicios o defectos de las tendencias sociales, políticas, artísticas, suelen manifestarse de modo más vivo en los peores secuaces de aquellas tendencias, pero no dejan de empañar, en parte al menos, hasta la obra de los mejores.

El defecto de la orientación de los estudios geométricos, a través de prudentes reservas, había sido advertido por Segre en el citado artículo; consistía, señaladamente en que el problema venía subordinado al método de resolución, o creado directamente por el método; los medios, pues, eran antepuestos a los fines.

He hablado de problemas y fines, como si la investigación del matemático tuviese señalados sus términos naturales, y no fuese, por el contrario, libre creación de un espíritu fantástico. ¿En nombre de qué principio pretendemos limitar esta libertad, o medir de algún modo el valor de sus creaciones? Cuestión es ésta extremadamente delicada. Cierto que la ciencia matemática no puede ser regulada por limitaciones *a priori;* que se mueve con libertad, del mismo modo que el arte, y no podría doblegarse a servir, por ejemplo, exigencias de aplicaciones prácticas, sin ser herida de muerte en su desarrollo. Pero aunque no puedan ponerse trabas a este desarrollo en nombre de criterios utilitarios, ¿se sigue de aquí que la medida de la importancia científica deba quedar puramente a merced del arbitrio individual? Tanto valdría admitir que el puro capricho individual establezca por sí mismo las leyes de lo bello; y, antes bien, el mismo criterio estético aparece quizás insuficiente en este orden de ideas.

Realmente, la belleza de ciertas investigaciones matemáticas sirve, en alguna medida, para justificarlas; pero el derecho a la existencia así adquirido no las permite aún formar parte de la gran línea histórica del progreso, que parece moverse con una especial continuidad (reveladora de leyes eternas del espíritu humano) en torno de algunos problemas tradicionales. Sólo enlazándose con la tradición puede una orientación científica ver consagrado definitivamente su valor.

Desde este punto de vista, la crítica frecuentemente dirigida contra la Geometría de hace treinta o cuarenta años, aparece a nuestra vista suficientemente justificada, puesto que aquella Geometría párecía completamente absorta en la contemplación de los objetos formados por ella misma, sin conexión visible con los *grandes problemas*. Por una singular coincidencia, también la orientación, en cierto modo contrapuesta al purismo geométrico, o sea el Análisis aritmetizante, sufría la misma suerte, apartándose del estudio de la *realidad matemática*, históricamente definida, para proseguir más allá de las necesidades de la exigencia crítica, el estudio de las *funciones no razonables (funzioni disonesti)* que no admiten derivada. Y la generalidad con que pretende avalorar este campo de investigaciones, respecto al de las funciones razonables, *(onesti)*, objeto del cálculo infinitesimal ordinario, no modifica el juicio, puesto que el progreso de la ciencia no consiste en poseer verdades más generales en un sentido cualquiera, que a veces se reducen a vacías abstracciones, sino en la posesión de verdades de significado más rico y fecundo, a las cuales se llega con frecuencia a través de la consideración de casos particulares característicos. El lector podrá aclarar por sí mismo estos conceptos, si le parecen confusos o paradójicos, recordando algunos brillantes descubrimientos de Gauss; p. ej., las series hipergeométricas.

3. He admitido que el concepto de la Geometría de hace cincuenta años correspondía a una visión un poco restringida de la Matemática, justificada, si se quiere, por la exigencia histórica de la elaboración de un método, pero, en todo caso, inferior al deber que incumbe a quien no aparte la vista de los grandes problemas tradicionales. De aquí provino el aislamiento de la disciplina geométrica, que fué su *enfermedad*, a la cual siguió pronto el anuncio de *muerte*.

Entretanto, por el contrario, iba realizándose una evolución del concepto de la Geometría, por el cual esta orientación llegaba a unirse y a tocar —según nuevos puntos de vista— los grandes problemas tradicionales del Análisis. Tal evolución fué obra de numerosos científicos y pensadores, que en diversos países, en formas y aun tiempos distintos, trabajaron para transformar la herencia del pensamiento geométrico.

La escuela italiana presenta en este punto un interés particular (que, por la analogía de condiciones, puede tener también valor en España), por la circunstancia de que la Geometría ha florecido en Italia más ampliamente, y por ello la transformación de la orientación geométrica se ha desenvuelto más lentamente, al extremo que se puede dudar que el desarrollo haya alcanzado todavía su término natural. De todos modos, la escuela de los geómetras italianos ha conseguido aportar valiosa contribución a algunos grandes problemas, al menos en el campo de la teoría de las ecuaciones y de las funciones algébricas; y estos éxitos han llamado la atención de eminentes matemáticos extranjeros (como Poincaré, Picard, Painlevé) que se han encontrado en el mismo terreno de investigación. Es legítimo, por tanto, afirmar que nuestra escuela, a diferencia de otras, que en otros países han seguido por el viejo camino del purismo, se ha incorporado al gran tronco de la tradición matemática, y de aquí que las reflexiones que un geómetra italiano puede hacer hoy en torno al concepto de la Geometría quizás tengan por esta parte algún interés.

4. En las controversias sociales y políticas sucede a veces que, hombres al parecer separados por aspirar a cosas diversas, se aproximan y aunan sus esfuerzos para cooperar a un fin superior, que se impone, en ciertos momentos históricos, a entrambas partes, con la fuerza de la evidencia o de la necesidad; así, por ejemplo, ante la patria en peligro, se unen los partidos, y olvidando sus diferencias, se aprestan a servirla igualmente; entonces suelen advertir que lo que ellos creían diversidad de objeto era más bien diversidad de temperamento, ya que se puede servir a la patria de distintas maneras.

La historia de las rivalidades entre *geómetras* y *analistas* ha revelado análogamente que no separaba a los dos campos rivales tanto la diferencia de objeto cuanto la variedad de aptitudes del ingenio, por lo cual, de ambas partes se podía cooperar a los mismos fines, si bien con criterio algún tanto diverso acerca de los elementos que constituyen la importancia de los problemas y se enlazan con los varios aspectos de su resolución.

Los geómetras descubrieron esta duplicidad de la mente de los matemáticos el mismo día en que, renunciando a proseguir la Geometría como disciplina autónoma, dirigieron sus miradas a la obra de los analistas, y se preguntaron a sí mismos cuál de aquellos trabajos fuese para ellos más interesante o de contenido más próximo, no ya a los objetos, sino a las modalidades y hábitos del espíritu que habían cultivado.

Entonces cayeron en la cuenta de que su Geometría no es, en realidad, más que un desarrollo particular del *Análisis cualitativo*, que haciendo suyo propio el programa de «sustituir los pensamientos a los cálculos» ha renovado y fecundado todos los grandes problemas de la Matemática durante el siglo XIX. De aquí que la evolución del concepto de la Geometría en los últimos cincuenta años ha conducido simplemente al resultado de fundir —en la conciencia del geómetra— la orientación geométrica con la orientación sintética y cualitativa del Análisis, entendido en la acepción más general. Y claro es que no se trata de reconstruir sobre esta base una distinción que es incompatible con el sentido más amplio de los problemas, sino solamente de aclarar una diversidad de aspectos en la obra constructiva de la Matemática, diversidad a la que algunas inteligencias son especialmente sensibles.

Quisiera ahora explicar en qué consiste, a mi juicio, el significado y el valor de este *Análisis cualitativo,* que el geómetra reconoce como objeto propio de su particular interés y terreno más adecuado a la naturaleza de su ingenio, al cual, en suma, se extiende el antiguo concepto de la Geometría, que ha recibido como patrimonio legado, puesto que no sabe ni quiere renunciar a llamar la propia disciplina con este nombre inmortal.

La explicación deberá consistir, necesariamente, en presentar algunos ejemplos, a los que no se pretende dar un orden que responda a criterios prefijados, y en los que, por tanto, no se buscará clasificación alguna de problemas o de resultados, según su presunto valor. Será un libre examen de varias cuestiones, enlazadas de algún modo con los grandes problemas tradicionales de la Matemática, que dará ocasión para exponer algunos puntos de vista sobre los objetos que por cualquier razón han llamado la atención o despertado más o menos intensamente el interés de los autores.

5. Para aclarar la distinción entre Análisis cualitativo y cuantitativo, tomaremos como punto de partida el problema clásico de la ecuación algébrica.

Dada una ecuación algébrica $f(x) = o$, se pide su *resolución.* Si, por ejemplo, la ecuación es de segundo grado, se resolverá expresando la x por medio de un radical cuadrático, o desarrollándola en fracción continua periódica mediante un algoritmo puramente racional, pero infinito. Ambos modos de resolver el problema son plenamente satisfactorios; sin embargo, según las tendencias o los fines propuestos, cada uno hará resaltar diversos aspectos de éstos como especialmente importantes. Quien, ante todo, desea una fórmula para la resolución numérica, fácilmente aplicable en la práctica, quedará tan satisfecho con un método como con el otro, pues los dos le llevan con igual facilidad al cálculo del número pedido, ya que se trata en un caso de divisiones repetidas (rápidamente convergentes), y en el otro, de la extracción de la raíz cuadrada, operación hacia la cual, el que suscribe, ha experimentado una franca antipatía desde sus primeros estudios en el Gimnasio, pero que, al fin y al cabo, no detiene ciertamente la marcha del matemático y mucho menos del calculador.

Otro, por el contrario, juzga que el interés particular de resolver la ecuación de segundo grado (con uno u otro de los métodos dichos) supera al resultado de saber calcular la incógnita; p. ej., que el valor de la fórmula que contiene un radical cuadrático consiste en la posibilidad de su interpretación geométrica como construcción gráfica, o también, más generalmente, en las propiedades cualitativas del radical, bien conocidas al algebrista. Lo propio puede decirse de la resolución mediante una fracción continua periódica, puesto que la periodicidad del desarrollo constituye precisamente una propiedad cualitativa característica de la irracional cuadrática.

Si pasamos de la ecuación de segundo grado a las ecuaciones de grado superior, es de esperar que la misma diversidad de criterios dé lugar a diversos sentidos, en los que se busque o intente la resolución, según que prevalezca el fin del cálculo aritmético más rápido, o el que se refiere al modo de expresión de la incógnita mediante los coeficientes literales, o sea a la estructura de la fórmula de resolución.

En el campo de la teoría cualitativa de las ecuaciones es, naturalmente, donde el geómetra encontrará un objeto propio de estudio. Descubrirá fácilmente que sus métodos y sus intuiciones le habilitan para rendir, en este campo, importantes servicios.

Esta afirmación no necesita ser demostrada, porque tiene en su favor la historia. En efecto, sabido es que la teoría de las ecuaciones de segundo grado nació de los problemas sobre la equivalencia de los rectángulos tratados por los griegos, y en fin de cuentas no es más que un revestimiento de aquellas antiguas doctrinas geométricas. Análogamente, la teoría de las ecuaciones de tercero (y cuarto) grado nació de la obra de los algebristas italianos del siglo XVI, gracias a consideraciones análogas a las que da lugar la equivalencia de los prismas.

Pero merece la pena añadir que en este punto también las intuiciones de la Geometría moderna son capaces de aportar su contribución, y de modo particularmente sugestivo, a la resolución del problema propuesto. En efecto, la estructura de la fórmula de resolución de la ecuación cúbica corresponde precisamente a la circunstancia de que una terna de puntos sobre una recta puede considerarse —de dos modos— como ciclo de una proyectividad periódica de tercer orden, cuyos puntos de coincidencia vienen definidos como covariantes de la terna; por esto, la ecuación de segundo grado que sirve para separar los dos puntos reconduce la ecuación propuesta a otra del tipo $x^3 = a$ (*).

(*) Véase ENRIQUES: *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, per cura de O. Chisini, L.° 1.°, § 5, vol. I. Bologna, Zanichelli. 1915.

Sin necesidad de extendernos en consideraciones sobre la resolución geométrica de la ecuación de cuarto grado, veamos que este orden de consideraciones está en conexión con la doctrina general de la resolubilidad de las ecuaciones algébricas, basada en la teoría de los grupos de sustituciones, según Galois. En esta doctrina, el geómetra encuentra un objeto de estudio que, por el carácter sintético y por la forma de intuición abstracta, no difiere de los de su actividad habitual, y, por otra parte, la interpretación más obvia de los grupos de operaciones le lleva directamente al campo propio de la Geometría. Baste recordar aquí las cuestiones relacionadas con los grupos de sustituciones lineales sobre una variable compleja, que Klein ha ilustrado con los grupos de rotaciones de los poliedros regulares, y que pueden también construirse mediante el análisis de las proyectividades sobre la recta (en el sentido de la Geometría algébrica) (*), y la importancia de tales cuestiones vendrá suficientemente aclarada, haciendo resaltar el enlace que tienen con la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales integrables algébricamente, a la que Klein y Wimann reducen el problema general de la resolución por series de las ecuaciones algébricas, el cual viene así a depender (en los desarrollos de los autores citados), del estudio de los grupos finitos de homografías de un espacio de un número cualquiera de dimensiones.

6. Si de las ecuaciones algébricas con una incógnita se pasa a las que tienen dos o más variables, la aclaración geométrica de los problemas mediante curvas, superficies, etc., se presenta inmediata; tanto, que esto constituye precisamente el campo propio de la Geometría tradicional en nuestras escuelas. Sin embargo, la evolución de las ideas se advierte aquí en el modo, hoy ya corriente, de plantear las cuestiones. El geómetra de nuestros días identifica, en efecto, la teoría de los entes arriba nombrados con la teoría de las funciones algébricas, que constituye, como es sabido, la rama de la teoría de funciones analíticas en que la determinación cualitativa adquiere el máximo significado.

Por esto, los geómetras modernos se inclinan cada vez más a identificar la propia orientación de sus estudios con la fundada por Riemann, el pensador que parece haber ejercido influencia más honda en la Matemática del siglo XIX. En efecto, los resultados capitales de las investigaciones riemannianas, por ejemplo, la distinción de las funciones algébricas o de sus cuerpos según el género p; los teoremas sobre la existencia y sobre el grado de arbitrariedad de las funciones algébricas con puntos de ramificación y polos asignados, constituyen la parte esencial de doctrinas, que

(*) Véase ENRIQUES: Op. cit., L.°, 2.°, § 10.

Clebsch, Brill y Nöther han construído como «Geometría sobre las curvas algébricas», acentuando el significado propiamente algébrico. Las condiciones de resolubilidad de una ecuación $f(x, y) = 0$, por medio de funciones racionales o elípticas de un parámetro ($p = 0$ y $p = 1$, respectivamente), y la asignación de los tipos de orden mínimo a que pueden reducirse las curvas mediante transformaciones birracionales, pueden servir como ejemplos para aclarar el interés de estos problemas.

Los desarrollos de dichos geómetras sobre las curvas fueron nuevamente tomados en consideración hacia el año 1890, en la escuela italiana, por Segre y Castelnuovo, que aportaron nuevos métodos, y, en particular, las intuiciones de la Geometría hiperespacial. De las curvas se pasó bien pronto a las superficies, cuyo estudio ya había intentado Nöther, haciendo resaltar su dificultad; se trataba ante todo de construir una teoría completa de sus caracteres invariantes (lo cual fué la obra de Enriques entre 1893-94 y 1896), y, por tanto, de resolver una serie de problemas determinados de clasificación. Trataré de dar algún ejemplo de la naturaleza de tales problemas.

Ya hemos dicho anteriormente que la condición de resolubilidad de una ecuación $f(x, y) = 0$ mediante funciones racionales se expresa simplemente anulando el género p de la curva f. Mas, cuando se examina el problema análogo para las ecuaciones $f(x, y, z) = 0$, se adquiere inmediatamente una idea de la dificultad que presenta el paso de las curvas a las superficies. En efecto, el género p de la curva admite dos definiciones que para curvas irreducibles conducen a un mismo valor, como carácter numérico (dependiente del orden n y del número δ de los puntos dobles de la curva), y como carácter geométrico o funcional, esto es, como número de los parámetros que entran en la construcción de ciertas funciones racionales invariantes (las curvas adjuntas de orden n—3 a que dan origen las cantidades bajo el sino integral de las integrales abelianas de primera especie). Mas, para las superficies, ya las observaciones de Cayley, Zeuthen y Nöther, vinieron a poner en claro que las definiciones análogas conducen a caracteres distintos, a los cuales se da el nombre de género numérico (o aritmético) p_a, y de género geométrico p_g. Resulta, pues, que la racionalidad de una superficie $f(x, y, z) = 0$ exige, ante todo, que sean nulos simultáneamente sus dos géneros p_a y p_g. Pero estas condiciones no son suficientes, ya que las superficies de género cero poseen otro carácter invariante que puede tomar diversos valores positivos, y que Enriques ha introducido con el nombre de *bigénero*. Castelnuovo demuestra que las condiciones de racionalidad de una superficie f se expresan anulando, además del género numérico, el bigénero (1896).

Fijémonos un momento en el concepto del bigénero. Refiriéndonos a una superficie f de un cierto orden n, dotada simplemente de una curva doble (caso general desde el punto de vista de la teoría que nos ocupa), el género geométrico de f viene dado por el número de las superficies de orden $n-4$, linealmente independientes, que pasan por la curva doble; el bigénero, en cambio, corresponde a las superficies de orden $2\,n-8$, que pasan doblemente por la misma curva. Claro es que se podrán definir análogamente otros caracteres invariantes de las superficies, cuales son, en general, los multigéneros (*plurigénere*) de orden $i = 3, 4...$ Estos números se emplean para caracterizar la familia de las superficies reducibles al tipo cilíndrico $f\,(x,\ y) = 0$ (en la cual están comprendidas, como caso particular, las superficies racionales). Se encuentra precisamente que esta familia se puede definir por la anulación del cuadrigénero y el sextigénero que llevan como consecuencia la anulación de los multigéneros (Enriques, 1904). No bastaría aquí, naturalmente, la consideración de los multigéneros de orden inferior, como se ve con ejemplos concretos. Añadamos que, profundizando sobre estos ejemplos, se ha llegado a definir, mediante invariantes, las superficies que poseen un grupo continuo de transformaciones birracionales en sí mismas, a las cuales se ligan representaciones paramétricas por medio de funciones elípticas e hiperelípticas.

El haber nombrado tales representaciones me lleva a decir alguna cosa del aspecto trascendental de la teoría de las superficies. Para extender la teoría de las integrales abelianas, ya Clebsch y Nöther hubieron de considerar, sobre una superficie algébrica ciertas integrales dobles, que —en casos particulares— conducen al género geométrico. Picard, en cambio, ha tenido la idea genial de introducir la consideración de las integrales de diferenciales totales, que se ha visto es de la mayor fecundidad. El enlace de las teorías de Picard con las de la escuela italiana se ha iniciado hacia el 1903, sobre todo por obra de Severi, llegándose a reconocer que la existencia de las integrales de primera especie de Picard pertenecientes a una superficie depende de la diferencia entre el género geométrico y el númerico, y lo que es más, que el número de las integrales linealmente independientes es precisamente igual a esta diferencia (Enriques, Severi y Castelnuovo). Este resultado llegó a interesar especialmente a Poincaré, que nos dedicó unas de sus últimas Memorias.

7. Las últimas investigaciones indicadas se refieren a un campo que tiene, históricamente, estrecha afinidad con el cálculo integral. Pero de modo más directo, toda la teoría de la integración de las ecuaciones diferenciales ha venido a caer en el campo de la actividad geométrica, desde el momento en que Sophus Lie las ha basado sobre el concepto de los grupos de transformaciones. Ya Klein observó, repetidamente, que la mente de Lie concibió su propia doctrina en forma geométrica, y sólo más tarde decidióse a darle un desarrollo más analítico por el deseo de hacerla más popular entre los matemáticos. Es claro, pues, que solamente a través de las intuiciones geométricas originarias, puede ser profundamente comprendido el trabajo de investigación de aquella admirable teoría, como debe hacer quien quiera ponerse en condiciones de proseguirlo.

Es verdad que hoy este orden de estudios parece un poco descuidado, sea por desilusión de las esperanzas demasiado ambiciosas que los primeros resultados habían suscitado, sea por la dificultad de los problemas que al investigador se presentan sin resolver; más es lo cierto que el fervor de pocos años ha parece haberse apagado. Todavía quedan valerosos cultivadores que no cejan de hacer tentativas sobre las más graves cuestiones que el genio de Sophus Lie nos legó en herencia. En la escuela italiana, Ugo Amaldi ha llegado muy adelante por este camino.

A propósito de esto, me ocurre aquí hacer notar que la teoría de la integración de las ecuaciones diferenciales se ha aproximado todavía más estrechamente a los objetos de estudio tradicionalmente cultivados por los geómetras, en cuanto se refiere a las ecuaciones lineales. Picard, en efecto, ha sentado las bases de esta doctrina sobre el concepto del grupo de racionalidad de la ecuación, que es un grupo continuo de homografías en un espacio multidimensional. Numerosas investigaciones proseguidas en Italia sobre las ecuaciones lineales (Fano, Enriques, etc.) están precisamente relacionadas con la consideración del grupo de Picard.

Si a lo dicho se añaden los magníficos trabajos de Poincaré, Picard y Painlevé sobre las ecuaciones algébrico-diferenciales (en conexión con las curvas y las superficies algébricas), se tendrá una idea más adecuada de lo que significa el espíritu geométrico para el desarrollo actual de los problemas del cálculo integral. En otro sentido, la integración de las ecuaciones entre derivadas parciales ha recibido buen impulso con los métodos de la Geometría diferencial, de la cual tiene hoy Italia el mayor maestro en Luis Bianchi.

8. ¿En qué situación se encuentra hoy la moderna actividad de los geómetras respecto al Cálculo diferencial? Me refiero expresamente a la actividad de los modernos, por ser sobradamente conocido que los orígenes de esta rama del Análisis se enlazan con los problemas sugeridos por la Geometría, como los de la tangente y de los máximos y mínimos.

Conviene, ante todo, observar que de las dos escuelas, de Leibniz y de Newton, fundadores del Cálculo diferencial, la primera es la que principalmente ha influído en la orientación de los estudios comúnmente seguida, puesto que no sólo ha sido adoptada por las ventajas que presenta el simbolismo de Leibniz (que a principio del siglo pasado se impuso hasta a los mismos analistas ingleses), sino que se ha seguido por la vía señalada por el filósofo alemán en el desarrollo del concepto de función, al cual está ligado el nombre de Dirichlet, y al presente se suele tratar del modo más general de las funciones $f(x)$, definidas en un cierto intervalo de la variable real, independientemente de toda expresión particular analítica; de aquí la tendencia a prescindir de toda intuición geométrica para tomar sólamente algunas hipótesis sobre la existencia de ciertos límites.

El espíritu de un geómetra no está hecho para admirar incondicionalmente este género de progreso. Su amor a la intuición, mejor todavía, la preferencia que está dispuesto a dispensar siempre al concreto particular sobre la generalidad abstracta, le atraen, naturalmente, hacia los conceptos de la escuela newtoniana, algunos de cuyos aspectos y resultados positivos merecen que no se pierdan. En efecto, el estudio que Newton hizo de las funciones $y(x)$, refiriéndose al caso particular de las funciones en que la y está ligada a la x por una ecuación algébrica, enseña también algo de nuevo con respeto al caso general de las funciones explícitas unívocas en un cierto campo; pues, además del desarrollo de Taylor, ha dado como resultado un análisis más completo de las singularidades.

No sin estupor me ocurrió recientemente hacer resaltar que las restricciones puestas habitualmente en los tratados de Cálculo para el estudio de los puntos de inflexión y cuspidales excluyen la mitad de los casos posibles puestos en claro por Cramer, esto es, el punto de inflexión en que la curvatura se hace infinita (en lugar de nula) y el cuspidal en que la curvatura es nula (en vez de infinita), donde se tiene también la continuidad de las derivadas segundas, y estas singularidades corresponden, sin embargo, a funciones simplicísimas del tipo $y = x^{\frac{m}{n}}$ (*).

Por otra parte, el análisis profundo de la singularidad de las funciones algebroides tiene importancia no despreciable en el Cálculo diferencial. A este orden de estudios se refieren, como es sabido, los desarrollos de Puiseux, que —por este lado— bien pueden enlazarse a la tradición newtoniana y —en el campo geométrico propiamente dicho— la descomposición de las singularidades de las curvas algébricas en puntos múltiples infinitamente próximos, obtenida por Nöther mediante la trasformación cuadrática.

(*) ENRIQUES-CHISINI: Op. cit., L. 4.°, § 28, vol. II; Bologna, 1918.

La comparación de los trabajos que se refieren a estas dos vías de investigación resulta muy instructiva, pues de este modo se ha llegado a profundizar la definición de las singularidades algébricas o algebroides caracterizándolas mediante condiciones diferenciales. Tenemos, pues, una contribución directa de la Geometría al cálculo diferencial en una cuestión delicada. Es de notar también alguna tentativa para extender tales resultados al estudio de las singularidades de las funciones de dos variables. ¿Será necesario recordar aquí que el Análisis de las singularidades algebroides de las funciones de una o dos variables está ligado al problema de los máximos y mínimos de las funciones de dos o tres variables, respectivamente?

Efectivamente, la existencia de un máximo o de un mínimo de la función $z\,(x,\,y)$ que se supone desarrollable en serie de Taylor en el entorno del punto de que se trata (v. gr., del origen de coordenadas), exige, en primer lugar, que el plano tangente a la superficie $z = z\,(x,\,y)$ en aquel punto sea paralelo al plano $(x,\,y)$. Pero esta condición dista mucho de ser suficiente. Es preciso, pues, considerar si dicho punto en la superficie es elíptico, hiperbólico o parabólico; este último constituye el caso dudoso. El resolver la duda (a la cual corresponde, *en general*, una respuesta negativa), nos ha llevado a analizar completamente (desde el punto de vista de la realidad de las ramas) la singularidad de la curva $z\,(x,\,y) = 0$, sección del plano tangente con la superficie dada, y se trata, precisamente, de una singularidad algebroide.

La teoría de los máximos y mínimos de las funciones de dos variables ha sido llamada así en una Memoria póstuma de L. Scheffer (publicada en el tomo XXXV de *Math. Ann.).* Todavía parece que puede continuarse útilmente este análisis utilizando los estudios más recientes relativos a las singularidades de las curvas. Además, es de suponer que se prosiga el análisis indicado, en cuanto se refiere a los máximos y mínimos de las funciones de tres (o más) variables, lo cual conduce a la consideración de las singularidades de las superficies algébricas. El caso de los máximos y mínimos de funciones de tres variables ligadas por una relación puede también aclararse mediante el examen de las singularidades (algébricas) pertenecientes a las curvas alabeadas; y cosa análoga puede decirse para los casos a que conduce la extensión natural de estos ejemplos.

9. Las consideraciones y ejemplos que preceden me parecen suficientes para demostrar cuanto he afirmado al principio: que la actividad del geómetra puede hoy desarrollarse y, efectivamente, se desarrolla, en cualquier campo del Análisis matemático; que, en una palabra, no existe *diversidad de objetos* que separe el Análisis y la Geometría, sino una diferencia de *espíritu,* debida no sólo a la tradición histórica, sino más bien a la *diversa mentalidad* de dos tipos de matemáticos.

Si no temiéramos ser demasiado prolijos en un asunto que consideramos suficientemente aclarado, podríamos mostrar fácilmente que es frecuente reconocer la mentalidad estrictamente analítica precisamente en los trabajos que toman nombre de la Geometría, en tanto que se ha advertido la mentalidad sintética o geométrica en investigaciones que el más rígido ortodoxo deberá clasificar como pertenecientes al Análisis.

Mas preferimos discutir sobre el valor de la mentalidad geométrica, contestando algunas objeciones que contra ella se hacen todavía.

Se afirma que, precisamente las cuestiones del Análisis cualitativo que atraen a los espíritus geométricos, son las más alejadas del campo de las aplicaciones físicas, de las cuales nace la importancia de las Matemáticas. ¿Para qué hacer un estudio profundo de las funciones algébricas o de las trascendentes en conexión con ellas, cuando (aparte las más sencillas) no responden a los problemas de la Física matemática?

Observaciones de este género no se expresan o proclaman, es cierto, abiertamente; mas no por eso son menos peligrosas. Antes bien; son tanto más peligrosas cuanto más escondidas queden en los pliegues de una crítica fragmentaria que no puede ser rebatida públicamente, mediante un detenido examen filosófico del asunto.

El criterio inspirador de esta crítica cae por su base apenas se le tome como principio general para valorar la historia de las Matemáticas, ya que se reduce substancialmente a reconocer que el desarrollo de los problemas matemáticos, que de uno u otro modo plantea la ciencia de la naturaleza, tiende siempre a sobrepasar los motivos originarios y también a tomar nuevos significados, en relación con las exigencias mismas del pensamiento matemático. ¿Se dirá por esto que las ecuaciones algébricas pierden su valor apenas se pase de las ecuaciones de segundo grado, que son casi las únicas que se presentan en las aplicaciones prácticas? ¿Deberemos, por el mismo motivo, acusar al Análisis de ir más allá del estudio de las funciones elípticas, que aparece justificado por el uso que de ellas se hace en el problema del movimiento de los cuerpos rígidos? ¿A qué se reduciría entonces la historia de las Matemáticas? ¿Y qué progreso podría tener un pensamiento cercenado y mutilado en su libertad de desarrollo?

Seguramente, la primera en sufrir los efectos de una limitación de esta naturaleza sería la ciencia física, ya que, si bien se mira, el germen más grande y levadura más eficaz de su progreso consiste quizás en aquella especie de dualismo que todo filósofo advierte entre la realidad objetiva que nuestro pensamiento tiende a comprender y expresar, y la forma subjetiva de esta expresión cual se traduce en la exigencia matemática. Por otra parte, es fácil observar que los críticos del espíritu geométrico, propensos a disminuir el valor de las cuestiones del Análisis cualitativo, no aceptarían, efectivamente, en su propio campo, aquellas limitaciones al desarrollo de las Matemáticas, a las cuales quisieran someter las doctrinas criticadas. Antes bien, con demasiada frecuencia los vemos invocar un interés físico remoto, como un simple pretexto para justificar el desarrollo de doctrinas puramente analíticas. Pero mayor peso parece tener la observación siguiente: que la mentalidad estrictamente analítica no se aproxima más a una fecunda comprensión de los problemas físicos que la mentalidad geométrica. Aclaremos y justifiquemos esta afirmación.

Ocurre preguntarse: ¿Cuál es la contribución del espíritu matemático en el progreso de la Física? Quizás la respuesta más común es ésta: el Análisis matemático recibe de la Física algunos problemas que envuelven el cálculo de ciertas cantidades; al Análisis toca precisamente responder a tales determinaciones cuantitativas. Y puesto que las leyes más generales de la Física han encontrado su expresión en ciertas ecuaciones diferenciales, al Análisis toca precisamente *integrar las ecuaciones de la Física matemática*. Pero basta un pequeño conocimiento de la historia de la Física teórica para reconocer que los grandes progresos de la ciencia jamás han estado en consonancia con este programa. No digo ya que el cálculo efectivo de las cantidades físicas sea indiferente a los fines de la Física; muy lejos estoy de ignorar la importancia directa que dicho cálculo puede tener en las aplicaciones prácticas, especialmente cuando se encuentren modos de cálculo efectivamente rápidos y precisos; pero me parece muy otro el verdadero interés de la Física teórica, que es al fin —como la Geometría— una construcción sintética del pensamiento, con la cual se quiere también abrazar, en una visión unificada, un mundo de relaciones imaginadas, y que, por lo tanto, aparece estérilmente vacía y abstracta, si —dejando aparte toda explicación intuitiva de los fenómenos— se reduce a una pura descripción de sus relaciones cuantitativas.

¿Será preciso insistir en que el ideal puramente descriptivo y económico de la ciencia, en el que pareció encerrarse un momento cierto positivismo físico, no responde al desarrollo actual de la Física teórica, que persigue —con nuevas energías— la construcción de un mundo invisible más simple y armónico, y en él busca la explicación de todos de los fenómenos?

Añádase que del positivismo físico ligado al nombre de Mach se ha abusado singularmente por intérpretes propaladores de una comprensión puramente formal de la Física matemática.

Pasemos ahora a expresar más claramente nuestro pensamiento. El matemático no debe aportar a la Física solamente métodos de cálculo para determinaciones cuantitativas necesarias, sino también su espíritu constructivo, que ha de desenvolverse en un trabajo de coordinación de las imágenes y de elaboración de los conceptos. Desde este punto de vista, la mentalidad del geómetra se revela apta para la comprensión y crítica de las teorías físicas, bastante más aún que la mentalidad estrictamente analítica.

Es verdad que el geómetra difícilmente podrá avenirse al modo abstracto de cultivar la Física matemática, que deliberadamente prescinde del contenido intuitivo de las hipótesis; cierto que pondrá su principal interés en las cuestiones que el analista suele tomar ya resueltas como dato de su trabajo; y así no podrá conformarse con saber que ciertos órdenes de fenómenos se traducen en ecuaciones diferenciales de un cierto tipo, si no se le da a entender el porqué. Mas si estas formas del espíritu escrutador de la naturaleza han tenido siempre, y tienen todavía, en el progreso de las teorías físicas, un puesto no despreciable, difícilmente se podrá negar que la mentalidad geométrica, por aquello en que precisamente se contrapone a la analítica, tiene una misión propia que cumplir; que puede reclamar el derecho, no digo de sustituir a aquélla, sino más bien de completarla, imprimiendo una orientación a la crítica de las teorías físicas. Si otros piensan que los geómetras no están preparados para esto, no nos será preciso salir de la escuela italiana para mostrar que los arduos problemas de la filosofía natural solicitan vivamente el interés de los hombres que forman parte de ella; que alguno de éstos ha iniciado y conducido —en sentido nuevo— en el terreno filosófico la crítica de los principios de la Mecánica y, en particular, de las teorías electromagnéticas relativistas, que tanto prometen; que otros han sometido a una revisión —igualmente filosófica— el cálculo de probabilidades; que todos, en una palabra, ponen vigilante atención a las orientaciones del pensamiento que tienen valor para la Física moderna, aspirando a un conocimiento más completo de las hipótesis que se nos presentan.

Séanos lícito, en fin, desear y augurar una fecunda aproximación entre geómetras y físicos; son espíritus hermanos, hechos para entenderse y comprender, de un modo semejante, la contribución que se puede pedir —en este campo— al Análisis cuantitativo, el cual ha impuesto, demasiado quizás, en la historia reciente de la Física matemática, sus propios criterios lógicos formales, contribuyendo así a un convencionalismo científico y a un pragmatismo filosófico que, desgraciadamente, ha disminuído en el pensamiento contemporáneo el valor de la ciencia.

F. ENRIQUES.