Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche

Zanichelli, Bologna, 1924. (pubbl. per cura di O. Chisini)

LEZIONI

SULLA

TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

DI

FEDERIGO ENRIQUES

PUBBLICATE PER CURA DEL DOTT. OSCAR CHISINI

VOLUME III

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

LIBRO QUINTO

CURVE
E FUNZIONI ALGEBRICHE
DI UNA VARIABILE

Capitolo I

Le serie lineari sopra una curva.

1. Introduzione. — Le teorie che ci proponiamo di svolgere — spesso comprese sotto il nome di *geometria sopra una curva* — si riferiscono alle funzioni algebriche di una variabile indipendente, le quali vengono definite come funzioni razionali dei punti di una curva, ovvero come funzioni monodrome sopra una superficie di Riemann.

Sia $f(xy) = 0$ una curva algebrica piana, e si assuma una funzione razionale

$$t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_2(xy)},$$

che verrà da noi considerata per i punti *sopra la curva*, cioè per valori di x e y soddisfacenti alla

$$f(xy) = 0:$$

la t costituirà evidentemente una funzione algebrica della variabile indipendente x (o, analogamente — se si vuole — della y), suscettibile di essere definita per mezzo dell'equazione

$$r(xt) = 0,$$

che si ottiene eliminando y fra le

$$f(xy) = 0, \quad \varphi_1(xy) - t\varphi_2(xy) = 0.$$

In luogo di una curva piana si può assumere una curva gobba C (appartenente allo $S_3 = (xyz)$ o a uno spazio di maggior dimensione), definita da un conveniente sistema di equazioni (cfr. L. 1°, § 23, L. 3°, § 18): una funzione razionale t dei punti della curva risulta ugualmente una funzione algebrica della x, data dalla equazione $r(xt) = 0$ che si ottiene eliminando le variabili y, z.... Ciò appare in special modo evidente se la curva C è definita esprimendo le coordinate dei suoi punti come funzioni razionali dei punti di una curva piana, quale è — per esempio — una sua proiezione.

Una funzione algebrica $t(x)$ si può anche definire qualitativamente come funzione monodroma priva di singolarità essenziali sopra una superficie di Riemann. Ma tale considerazione troverà posto più avanti e potrà anche essere lasciata da parte in una prima lettura di questo libro, per cui si richiede come premessa un minimo numero di cognizioni geometriche, affatto elementari.

Ora, nello studio delle funzioni razionali sopra le curve, mireremo particolarmente a quelle proprietà che non mutano quando la curva data, C, venga sostituita con una sua *trasformata birazionale*, C'. Si dice che C' è una trasformata birazionale di C quando fra C e C' interceda una corrispondenza biunivoca, in modo che le coordinate dei punti dell'una siano funzioni razionali di quelle dei punti dell'altra: in tal caso è chiaro che ogni funzione razionale su C dà una funzione razionale su C' e viceversa, avendosi un semplice cambiamento di variabili nella funzione algebrica.

Come caso particolare, se C è una *curva razionale*, cioè una curva i cui punti corrispondano biunivocamente ai valori di un parametro (o ai punti di una retta), le funzioni razionali sopra C diventano semplicemente *funzioni razionali d'una variabile*, corrispondenti a involuzioni sopra la retta (cfr. L. 2°, § 3).

Ripigliando il discorso generale, diremo ora che, nella nostra teoria, è lecito passare indifferentemente da curve piane a curve gobbe e da queste a quelle, per mezzo di una corrispondenza biunivoca che può essere, per es., una proiezione. In conseguenza di ciò si può anche supporre che la curva a cui ci si riferisce sia una curva dello spazio ordinario priva di punti singolari, ovvero una curva piana dotata soltanto di punti doppi o multipli a tangenti distinte.

Infatti si è visto che:

1) Una curva piana dotata di singolarità qualunque si può ridurre, con trasformazioni quadratiche del suo stesso piano, ad una curva dotata soltanto di punti multipli a tangenti distinte, ognuno dei quali corrisponde a un gruppo di punti semplici della primitiva (L. 5°, § 15).

2) Data una curva piana, dotata di singolarità qualunque, si può sempre ottenere una curva iperspaziale priva di punti multipli di cui essa sia proiezione (L. 5°, § 30).

3) Ed ogni curva iperspaziale priva di singolarità può proiettarsi in una curva gobba dello spazio ordinario parimenti priva di singolarità, ed anche in una curva piana dotata di soli nodi (ibidem).

Le osservazioni precedenti conferiscono un valore generale alla geometria sopra la curva che si studi con particolare riferimento a curve piane dotate di punti doppi o multipli a tangenti distinte, ovvero a curve gobbe prive affatto di singolarità; alle quali curve ci riferiremo nel seguito. Così un primo studio di queste teorie riuscirà accessibile anche a chi non abbia in alcuna guisa esaminate le questioni attinenti all'analisi delle singolarità. Ma, per chi abbia acquisito le nozioni elementari intorno a tale argomento, avremo cura di indicare, ove occorra, in apposite note, come si modifichino o si applichino le considerazioni che andremo svolgendo, nel caso di curve dotate di singolarità superiori.

Ora conviene esaminare se la corrispondenza birazionale fra due curve C e C' possa presentare delle eccezioni. Scriviamo a tal fine le formule della trasformazione birazionale della curva C di equazione $f(xy) = 0$, che, per semplicità di discorso, supponiamo piana:

$$X = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}, \quad Y = \frac{\varphi_2(xy)}{\varphi_0(xy)}, \dots \quad f(xy) = 0.$$

La trasformazione indicata conduce da un punto di C, che collocheremo nell'origine O delle coordinate ($x = 0$, $y = 0$), ad un punto ben definito di C', ogniqualvolta le X, Y.... non abbiano forma indeterminata. L'indeterminazione che si presenti per qualcuna di queste funzioni fratte dovrà esser tolta, per quanto è possibile, in base al principio di continuità.

Pongasi, p. es., che sia

$$\varphi_1(00) = 0, \quad \varphi_2(00) = 0.$$

Se il punto O è semplice per C (ed escludendo che l'asse y sia tangente alla curva) possiamo sviluppare la funzione implicita $y(x)$, definita dall'equazione $f(xy) = 0$, per mezzo della serie di MAC-LAURIN, ed allora anche i polinomi $\varphi_0(xy)$ e $\varphi_1(xy)$ risulteranno espressi come serie

$$\varphi_0 = \Sigma a_i x^i \qquad (a_0 = 0, \ ....)$$
$$\varphi_1 = \Sigma b_i x^i \qquad (b_0 = 0, \ ....);$$

quindi il limite per $x = 0$ di $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$, assumerà un valore determinato (che potrà anche essere zero o infinito).

Ma se O è un punto *r-plo* per C, l' equazione $f(xy) = 0$ non definisce più *una* funzione implicita $y(x)$ bensì r funzioni corrispondenti alle r tangenti, che si suppongono distinte (cfr. L. 1°, §§ 11 e 12, note): allora si ottengono r limiti, generalmente diversi, del rapporto $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$. Così un *punto r-plo* di C dà luogo ad una *eccezione* per la corrispondenza biunivoca fra C e C'.

Si può rimuovere ogni eccezione, ristabilendo in ogni caso la biunivocità della corrispondenza che lega una curva alla sua trasformata, ove si ponga la seguente convenzione:

Un punto r-plo, O, della curva C (in cui si abbiano r tangenti diverse) deve essere considerato come la *sovrapposizione di r punti distinti* della curva, $O_1 O_2 \dots O_r$, *appartenenti agli r rami* passanti per O.

Nota. Le cose dette innanzi si estendono al caso in cui la curva C abbia in O una singolarità composta di r rami lineari comunque tangenti fra loro. Quando in O si abbiano dei rami superlineari, rappresentati dai noti sviluppi di PUISEUX $x = t^\nu$, $y = \Sigma a_i t^i$, per ognuno di questi rami si ha ancora un punto omologo ad O nel passaggio da C e C', e così il numero dei punti corrispondenti ad O risulta minore di r. Tuttavia, per ragioni di continuità — ritenendo la C come caso particolare di una curva con rami lineari (cfr. L. 5°, § 19) — si dovrà sempre considerare il punto O come la sovrapposizione di r punti, alcuni dei quali sono fra loro infinitamente vicini: una cuspide d' ordine ν corrisponde precisamente a ν punti semplici infinitamente vicini.

Terminiamo questa introduzione con un

Richiamo di alcune nozioni preliminari contenute nei precedenti volumi. Sebbene queste nozioni vengano introdotte di nuovo e sviluppate largamente nel seguito, giova talvolta riferirsi ad esse in esempi o note, o anche semplicemente per comodità di linguaggio.

Il *genere* p di una curva piana d'ordine n con δ punti doppi (nodi) vale (cfr. L. 2°, § 23 o L. 3°, § 17)

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta.$$

Se ci sono punti multipli, ogni punto *r-plo* conta per $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi. (Cfr. anche L. 4°, § 14, Vol. II, p. 412).

Il genere p può essere anche definito in relazione ad un fascio O di rette, n-secanti la curva (d'ordine $n+r$ con O *r-plo*), giacchè le tangenti altrove condotte da O sono precisamente in numero di $2n+2p-2$ (L. 3°, § 17).

Il genere può anche esser definito come carattere topologico della superficie di Riemann, il cui ordine di connessione vale $2p$ (L. 2°, § 36).

Il genere è invariante per trasformazioni birazionali della curva (L. 3°, § 17). La più espressiva dimostrazione algebrica di questo teorema risulterà dal § 8.

Una curva *razionale,* cioè riferibile punto per punto ad una retta, ha il genere $p=0$. Questo teorema è stato dimostrato mercè il computo del numero dei punti doppi (cfr. L. 2°, § 23); esso risulta pure dall' invarianza del genere sopra enunciata (L. 3°, § 13); ovvero della semplicissima osservazione che ricorre nella Nota del seguente paragrafo (pag. 16). Più avanti, § 7, riusciremo anche a invertire il teorema, dimostrando che tutte le curve di genere $p=0$ sono razionali.

2. Le involuzioni g_n^1 sopra una curva. — La considerazione delle funzioni razionali, d'ordine n, di un parametro conduce, come sappiamo, alle involuzioni sopra una retta (L. 2°, § 3). Questo concetto si estende alle curve algebriche qualsiansi, considerando — in luogo della corrispondenza $[n, 1]$ fra due rette — la corrispondenza $[n, 1]$ fra una curva f ed una retta r. I gruppi G_n di f che corrispondono ai punti della retta formano una serie che si può definire mediante le due proprietà seguenti:

1) è *razionale,* cioè i suoi gruppi G_n corrispondono biunivocamente ai valori di un parametro:

2) possiede la proprietà *involutoria*, per cui ogni punto di f appartiene ad *un* G_n.

Una involuzione razionale di gruppi di n punti sopra la curva f, dicesi costituire una ***serie lineare*** g_n^1, ***di dimensione*** 1 e ***di ordine*** n.

Allo stesso modo che sopra la retta, anche sopra una curva qualsiasi, le g_n^1 si possono definire quali serie dei gruppi di livello di una funzione razionale, come segue.

Si abbia una curva (irriducibile) $f(xy) = 0$ che, per semplicità di discorso, supponiamo piana e dotata soltanto di punti multipli a tangenti distinte. Costruiamo sopra f una funzione razionale

$$t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)};$$

questa funzione riprende lo stesso valore in una serie di gruppi, costituiti ciascuno di un certo numero n di punti, che diconsi *gruppi di livello*: fra i quali figurano il gruppo degli *zeri* ($t = 0$) per cui $\varphi_1 = 0$, e il gruppo dei *poli* ($t = \infty$) per cui $\varphi_0 = 0$.

È appena necessario avvertire che il numero n si mantiene invariato per il gruppo di livello, corrispondente a qualsiasi valore di t, ove si tenga conto dei punti di esso che vadano all' infinito e di quelli che diventino infinitamente vicini: soltanto il caso dei punti d' indeterminazione sarà da esaminare più avanti.

Ora, se si suppone data una corrispondenza $[n, 1]$ fra la curva f e una retta su cui sia disteso il parametro t, è ovvio che la t risulta una funzione razionale del punto di f, e che i suoi gruppi di livello sono i G_n della g_n^1 definita dalla corrispondenza.

Reciprocamente una qualsiasi funzione razionale $t(xy)$ pone una corrispondenza $[n, 1]$ fra la curva f e la retta su cui è disteso il parametro t, dove ai punti della retta corrispondono i gruppi di livello della funzione; perciò ***sopra una curva f i gruppi di livello di una funzione razionale t formano una serie lineare g_n^1***: se $t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}$, ***la stessa serie è segata dalle curve del fascio***

$$\varphi_1(xy) - t\varphi_0(xy) = 0.$$

Tuttavia conviene fare particolare attenzione ai punti base del fascio che cadono sopra f. In un punto siffatto la funzione $\frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}$ assume forma indeterminata, ma il valore di essa si lascia definire per continuità rimovendo così l'apparente eccezione. Questo passaggio al limite è già occorso nella introduzione, ma giova qui illustrare la cosa con riferimento al caso elementare, per stabilire l'opportuno confronto con il caso particolare delle involuzioni sopra la retta.

Pongasi che le curve φ_0 e φ_1 passino semplicemente per un medesimo punto semplice di f, che collocheremo nell'origine O delle coordinate. Allora, sviluppando la funzione implicita $y(x)$ definita da $f(xy)=0$ con la serie di Mac-Laurin, si otterrà nell'intorno di O

$$t=\frac{\varphi_1[x, y(x)]}{\varphi_0[x, y(x)]}=\frac{a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_1x+b_2x^2+\ldots}=\frac{a_1+a_2x+\ldots}{b_1+b_2x+\ldots},$$

dove a_1 e b_1 sono diversi da zero, escludendosi il contatto di φ_1 e di φ_0 con f. Con ciò si ottiene un' *espressione analitica di t che elimina l'apparente indeterminazione* di t in O; ma questa espressione è valida solo *in piccolo*, cioè nel senso della analisi differenziale, vale a dire per un intorno di O entro il quale le serie sono convergenti, ed oltre questo intorno deve essere sostituita secondo le regole del prolungamento analitico (cfr. L. 2°, § 30). Tenuto conto di questa limitazione si ha dunque analogia col caso di indeterminazione della funzione $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}$ definita sopra la retta x, dove un fattore x, comune a φ_1 e φ_0, può essere soppresso.

Ma quando si definisce la funzione t sopra f mediante la sua espressione algebrica $t=\frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_2(xy)}$ (valida per i punti della curva considerata nella sua integrità), allora la presenza di punti in cui l'espressione diventa apparentemente indeterminata, non è in generale eliminabile. Valga ad esempio il caso della g_2^1 che viene segata sopra una cubica passante per O dalle rette $y-tx=0$; dove la funzione $t=\frac{y}{x}$ diviene indeterminata per $y=0$, $x=0$. È chiaro che la g_2^1 anzidetta non può essere segata sulla cubica da un fascio di curve non aventi punti base sopra di essa, perchè ciascuna di queste segherebbe la cubica in un numero di punti variabili multiplo di 3.

Ora, come già abbiamo veduto sopra la retta, nel caso che l'espressione razionale

$$t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}$$

abbia dei punti di indeterminazione sopra f, giova estendere il concetto della g_n^1 definita come serie dei gruppi di livello di t, aggiungendo ai gruppi variabili della g_n^1, dei *punti fissi* (convenzionalmente scelti), i quali figurino tra gli anzidetti punti d'indeterminazione apparente e che si riguarderanno come punti di *voluta indeterminazione*, e quindi insieme come poli e come zeri, *della funzione* t. Questa convenzione si giustifica per ragioni di continuità, allorchè si voglia considerare la involuzione data come caso particolare di una involuzione di ordine più elevato, dipendente da un parametro: e propriamente avuto riguardo alle osservazioni che seguono.

Si consideri una curva d'ordine n passante per l'origine delle coordinate, O, e su di essa la g_n^1 segata dalle rette di un fascio col centro O' vicino ad O:

$$t = \frac{y - k}{x - h},$$

la quale — per $O' = O$ — si riduce a

$$t = \frac{y}{x}.$$

Il valore della funzione t nel punto $O = (00)$ è $\frac{k}{h}$, e perciò tende a un qualsiasi valore prefissato facendo avvicinare O' ad O secondo una direzione conveniente. In tal guisa appare come la funzione $t = \frac{y}{x}$ possa ritenersi costituita da una g_n^1 i cui gruppi contengono il punto fisso O, in cui si attribuiscono a t tutti i valori, e che perciò si aggiunge ai gruppi di livello formanti la g_{n-1}^1 segata, fuori di O, dalle rette per O.

La convenzione precedente, relativa ai punti fissi di una *involuzione (parzialmente degenere)* conduce, per generalità, a considerare involuzioni *totalmente degeneri*, costituite da un solo gruppo di punti fissi, e perciò non più serie di *dimensione* 1, ma di *dimensione* 0. Si ha una siffatta involuzione (g_n^0 che — tolti i punti fissi — si riduce a g_0^0) segando f con un fascio di curve che la contenga (totalmente o parzialmente), e così assumendo

$$\varphi_1(xy) = k\varphi_0(xy) + \psi(xy)f(xy).$$

In questo caso la funzione

$$t = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}$$

si riduce, sulla curva f, alla costante k.

(Che l'esempio precedente abbia valore generale risulta dall'estensione del principio di LAMÉ che dà luogo al teorema di GERGONNE (L. 2°, § 16), ovvero si dimostra con le considerazioni analitiche che ricorrono nell'osservazione più avanti: pag. 13).

Esempî ed esercizii.

1) Si consideri la funzione $t = x$ sopra la cubica

$$f = y^2 - (x^3 - px + q) = 0:$$

la t definisce su f una g_2^1, ovvero una g_3^1 con punto fisso. Dove? Indicare la coppia della g_2^1 che dà i poli di t.

2) Si consideri la funzione

$$t = \frac{x^2 + y^2 - 1}{\alpha x + \beta y + \gamma}$$

sopra la cubica

$$f = (x^2 + y^2)(x - y) - x - y = 0.$$

Tolti i punti fissi (quali?), la t definisce una g_4^1. Indicare i poli e gli zeri di t.

3) Sopra la cubica

$$f = xy + (x^2 + y^2)(x - y) = 0,$$

si consideri la funzione

$$t = \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2 - y},$$

eliminando i suoi punti d'indeterminazione apparente, così da avere — come serie dei gruppi di livello — una g_2^1 priva di punti fissi.

Si determinino gli zeri e i poli della funzione t.

4) Si determinino, come nell'esercizio precedente, poli e zeri della funzione

$$t = \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2 - y},$$

sopra la cubica

$$f = -x^2 + (x^2 + y^2)(x - y) = 0.$$

Osservazione. Come già abbiamo veduto nel caso della retta, la stessa g_n^1 sopra una curva, che viene definita dalla funzione t, viene definita ugualmente dalla funzione

$$\tau = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}.$$

La sostituzione lineare ha il solo effetto di cambiare il valore di t che spetta ad ogni singolo gruppo della g_n^1. Così appare che tutti i gruppi della g_n^1 (come le curve del fascio da cui vengono segati) figurano ugualmente entro la serie, poichè si può assumere ad arbitrio in essa il gruppo dei poli, il gruppo degli zeri e il gruppo unità ($\tau = 1$) determinando, in tal guisa, la sostituzione precedente.

Giova qui rilevare esplicitamente che « una funzione razionale sopra la curva f è determinata, a meno di un fattore costante, dai suoi poli e dai suoi zeri », e così *ogni g_n^1 è determinata da due qualunque dei suoi gruppi.*

Infatti se t e τ sono due funzioni razionali sopra f, aventi gli stessi poli e gli stessi zeri (colla stessa molteplicità e però cogli stessi ordini d'infinito e d'infinitesimo), il rapporto $\theta = \frac{t}{\tau}$ è una funzione razionale su f priva di poli e quindi una costante.

Che effettivamente una funzione algebrica $\theta(x)$ priva di poli si riduca a una costante, risulta da ciò, che essa soddisfa a una equazione a coefficienti costanti. Infatti si scriva l'equazione che la lega alla x:

$$F(\theta x) = 0;$$

in questa i coefficienti delle potenze di θ sono funzioni simmetriche intere delle radici, e però prive di poli come la θ stessa; pertanto questi coefficienti, che sarebbero *a priori* funzioni razionali di x, si riducono a delle costanti. (Si può aggiungere che, se la funzione θ è irreducibile, la F si ridurrà alla potenza di un binomio lineare in θ).

Veniamo ora ad un' osservazione nuova di grande importanza.

Una stessa funzione t può essere definita sopra la curva $f(xy) = 0$ da diverse espressioni

$$\frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)} \quad \text{e} \quad \frac{\psi_1(xy)}{\psi_0(xy)},$$

in quanto essa può venire subordinata da funzioni razionali che sono diverse nel piano (xy). La condizione perchè ciò accada si ottiene annullando la differenza

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} - \frac{\psi_1}{\psi_0}$$

per tutti i punti di f, ciò che dà:

$$\varphi_1\psi_0 - \varphi_0\psi_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } f).$$

Il significato geometrico di questa osservazione è che: *una stessa* g_n^1 *può essere segata sopra la curva* f *da diversi fasci di curve.* Valga ad esempio il caso della g_n^1 segata sopra una cubica f_3 dalle rette passanti per un suo punto O. Questa stessa g_2^1 viene segata sulla cubica dalle coniche di un fascio i cui punti base $LMNP$ sono le ulteriori intersezioni di f con una conica ψ_0 passante per due punti AA' di essa allineati con O. Infatti si può dimostrare che le coniche per $LMNP$ segano su f coppie di punti allineati con O. Ciò è una conseguenza immediata del teorema dei 9 punti base di un fascio di cubiche (L. 2°, § 15). Sia ψ_1 una qualsiasi conica per $LMNP$, segante ulteriormente f nei punti B e B': la ψ_1 presa insieme con la retta AA' forma una cubica che sega f nei 9 punti $LMNP$, $BB'AA'O$; quindi anche la cubica composta della conica ψ_0 e della retta BB' — passando per 8 fra quei punti — dovrà contenere il nono punto O, il quale dovrà appartenere alla retta BB'. c. d. d.

In questo esempio si verifica pure facilmente, sotto forma geometrica, la condizione per l'equivalenza di due funzioni $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ e $\frac{\psi_1}{\psi_0}$, $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_0 = 0$ essendo due rette per O e $\psi_1 = 0$ e $\psi_0 = 0$ due coniche per $LMNP$ seganti su f_3 le stesse coppie: basta notare che la f_3, passando per i 9 punti comuni a $\varphi_1\psi_0$ e $\varphi_0\psi_1$, appartiene al loro fascio; ciò da

$$\varphi_1\psi_0 - k\varphi_0\psi_1 = f_3,$$

e si trova poi $k = 1$ tenendo conto della coppia unità.

Esempio. Sopra la retta $y = 0$ la g_n^1 dei gruppi di livello della funzione razionale

$$t = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}$$

appare segata dal fascio

$$\varphi_1(x) - t\varphi_0(x) = 0,$$

le cui curve si spezzano in n rette parallele all'asse y. La stessa g_n^1 si può segare con le curve del fascio

$$\varphi_1(x) + y\cdot\theta_1(xy) - t\,\{\varphi_0(x) + y\cdot\theta_0(xy)\} = 0.$$

Una conseguenza della osservazione precedente è che: *aggiungendo ad una g_n^1 un gruppo G_m di m punti fissi, arbitrariamente scelti sopra la curva f, si ottiene sempre una g_{m+n}^1.*

Infatti se la g_n^1 viene segata su f dalle curve d'un fascio

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 = 0,$$

si può sempre sostituire a questo fascio secante un altro fascio di curve contenente fra i suoi punti base i punti del gruppo G_m: basta a tal uopo aggiungere alle φ_0 e φ_1 una curva fissa θ che contenga G_m, e — se si vuole un fascio di curve irreducibili — prendere

$$\psi_0 = \theta\varphi_0 + f, \qquad \psi_1 = \theta\varphi_1 + f.$$

Nota. In ciò che precede appare esteso alle curve il concetto della funzione razionale, e della relativa g_n^1, sopra una retta. Ma alcune delle proprietà elementari delle g_n^1 non si estendono ugualmente passando dalle rette alle curve.

Sopra la retta abbiamo che:

1) Due gruppi di n punti determinano sempre una g_n^1, cioè i poli e gli zeri di una funzione razionale possono essere assunti ad arbitrio.

2) Una g_n^1 possiede $2n-2$ punti doppi.

3) Sussiste il teorema di LÜROTH, cioè: la serie ∞^1 dei gruppi di livello di una funzione razionale è caratterizzata dalla *proprietà involutoria*, per cui ogni punto della retta appartiene ad un gruppo.

E queste tre proprietà non valgono in generale per le curve:

1) Consideriamo una cubica priva di punto doppio, e sopra di essa due terne di punti G_3 e G_3' appartenenti ad una g_3^1: si dimostra che se la terna G_3 è costituita di punti in linea retta, altrettanto avviene per la G_3', e quindi una terna di punti non allineati presa insieme alla G_3 non può appartenere ad una medesima g_3^1.

Se G_3 e G_3' appartengono ad una g_3^1, questa verrà segata da un fascio di curve φ_n d'ordine n, aventi $3n-3$ punti base sopra la data cubica f_3. Ora se i tre punti di G_3 sono sopra una retta φ_1, si deduce che i nominati $3n-3$ punti base (sezioni ulteriori di una φ_n) appartengono ad una curva φ_{n-1} d'ordine $n-1$: e ciò essendo, segue che i punti di G_3', sezioni ulteriori di una φ_n' che passa per le intersezioni f_3 e φ_{n-1}, devono essere in linea retta.

La riduzione qui accennata (che, per $n=3$, si riduce al teorema dei 9 punti base di un fascio di cubiche) si svolgerà, per semplicità di discorso, nell'ipotesi $n=4$.

Allora abbiamo che i 12 punti comuni ad f_3 e a φ_4 appartengono, come punti base, a un sistema lineare ∞^3 di quartiche

$$(ax+by+c)f_3+\varphi_4=0,$$

e per ciò essi presentano 11 condizioni indipendenti alle ∞^{14} quartiche del piano, cioè una quartica che contenga 11 punti del $G_{12}=(f_3\varphi_4)$ contiene di conseguenza il dodicesimo. Ciò posto — essendo $G_{12}=G_3+G_9$ — se i punti di G_3 stanno sopra una retta φ_1, una cubica φ_3 che contenga 8 punti del G_9 contiene anche il nono.

In conseguenza anche nel gruppo $G_{12}'=(f_3\varphi_4')=G_9+G_3'$, il G_9 stando sopra una cubica φ_3, si deduce che la retta congiungente due punti di G_3' contiene anche il terzo.

Si noti che la deduzione fatta esige veramente che f_3 non abbia punti doppi. Se f_3 ha un punto doppio O, esiste una serie g_3^1 che contiene due terne arbitrarie G_3 e G_3'. Tale serie è segata dal fascio determinato dalle coniche φ_2 e φ_2' contenenti (oltre G_3 e G_3') il punto O e un altro punto A di f_3; se per es. i punti di G_3 sono in linea retta, la conica φ_2 risulta spezzata in questa retta e nella retta OA, senza che ciò implichi affatto che debba spezzarsi anche la φ_2'.

L'osservazione che due terne comunque scelte sopra una cubica dotata di punto doppio appartengono ad una g_3^1, risulta chiara *a priori* ove si pensi che codesta cubica è razionale, cioè biunivocamente riferibile a una retta, per il che basta eseguire una proiezione di essa dal suo punto doppio.

Ora è interessante notare che: *se sopra una curva* accade, per un certo valore di n, che *due gruppi qualsiansi* G_n e G_n' *appartengano a una* g_n^1, *la curva è razionale.*

Infatti pongasi che G_n e G_n' abbiano $n-1$ punti a comune; definiremo allora sopra la curva $f(xy)=0$ una funzione razionale $t(xy)$ relativa a una g_n^1 con un solo punto variabile, il quale corrisponde biunivocamente ai valori del parametro t.

2) Sopra una curva piana d'ordine n dotata di

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

nodi, si consideri la g_n^1 segata da un fascio di rette col centro esterno alla curva: vi sono

$$2n-2+2p$$

punti doppi della g_n^1, corrispondenti alle tangenti condotte da quel centro. Si vede così che il numero di quei punti doppi è maggiore di $2n-2$ appena $p>0$. E così appare che per le curve razionali (dove si hanno $2n-2$ punti doppi come sulla retta) deve essere $p=0$. Ciò è stato da noi dimostrato anche in altri modi (Cfr. L. 2°, § 23; L. 3°, § 17).

3) La proprietà espressa dal Teorema di Lüroth significa: se sopra una retta r esiste una serie *involutoria* ∞^1 di gruppi di punti G_n (cioè una serie γ_n^1 tale che ogni punto di r appartenga ad *un* G_n), si può porre una corrispon-

denza $[n, 1]$ fra r ed un' altra retta r' in modo che ai punti di r' corrispondano i G_n; onde la γ_n^1 è una g_n^1.

Questa proprietà non si estende alle curve, perchè si può avere una corrispondenza $[n, 1]$ fra due curve C e C', la seconda delle quali sia di genere $p > 0$ e però non razionale: in tal caso si trova sopra C una involuzione γ_n^1 i cui punti non possono corrispondere biunivocamente ai valori di un parametro, e quindi non sono i gruppi di livello di una funzione razionale: codesta *involuzione irrazionale* γ_n^1 non è una g_n^1.

Otterremo l' esempio di una γ_n^1 irrazionale considerando una sestica gobba C_6 segata sopra una quadrica da un cono cubico col vertice, O, esterno; una sezione piana del cono cubico porge una cubica C' di genere $p = 1$, in corrispondenza $[1, 2]$ con la C_6. In tal guisa resta definita sulla C_6 una involuzione irrazionale γ_2^1, costituita dalle coppie di punti allineati con O (ogni punto di C_6 appartenendo ad *una* coppia).

D' altronde si costruisce nel modo più generale una curva $f(xy) = 0$ possedente una involuzione irrazionale γ_q^1, partendo da una curva non razionale $\gamma(\xi\eta) = 0$ ed eseguendo sulle variabili ξ e η una sostituzione razionale

$$\xi = \xi(xy), \quad \eta = \eta(xy),$$

che farà corrispondere — in generale — ad ogni punto $(\xi\eta)$ di γ un numero finito q di punti (xy).

Viceversa, è chiaro che ogni involuzione γ_q^1 appartenente ad una curva f può essere definita in tal guisa, mediante una corrispondenza $[q, 1]$ tra f ed una curva γ i cui punti rappresentano i gruppi dell' involuzione. Questa affermazione è evidente *a priori* per chi si riferisca al concetto della geometria astratta, poichè basta chiamare « punti » i gruppi di γ_q^1, assumendo, per es. come coordinate di un gruppo le funzioni simmetriche elementari delle coordinate dei suoi punti. E si ottiene, nel modo più semplice, l' equazione di una curva piana γ, rappresentante la γ_q^1, prendendo sopra f le funzioni razionali simmetriche dei punti $(x_i y_i)$ dei suoi gruppi

$$\xi = x_1 x_2 \dots x_q$$

$$\eta = y_1 y_2 \dots y_q.$$

Saranno ξ ed η funzioni razionali di (xy):

$$\xi = \xi(xy), \quad \eta = \eta(xy),$$

ed eliminando x e y con l'aiuto dell'equazione $f(xy) = 0$, si avrà l'equazione richiesta $\gamma(\xi\eta) = 0$.

(Si può provare che quando gli assi abbiano posizione generica, la corrispondenza fra le curve γ e f è effettivamente $[1, q]$ e non $[1, rq]$; invero, se la f passa semplicemente per l'origine O e gli assi x e y non contengono altri punti del gruppo di γ_q^1 determinato da O, si trova un solo gruppo della γ_q^1 corrispondente ai valori $x = y = 0$).

3. **Nota: funzioni razionali sopra una superficie di Riemann.** — Le funzioni algebriche $t(x)$ che abbiamo definito come funzioni razionali dei punti di una curva $f(xy) = 0$, si lasciano anche definire qualitativamente come funzioni analitiche, *monodrome sopra una superficie di Riemann.*

Considerata nel piano della variabile complessa x, la $t(x)$ è una funzione polidroma che ha in generale lo stesso numero di rami della $y(x)$ e gli stessi punti di diramazione: se si fa girare la x attorno ad uno dei punti di diramazione suddetti, i rami della y e i corrispondenti rami della t subiscono la medesima sostituzione, sicchè le due funzioni algebriche hanno lo stesso gruppo di monodromia (cfr. L. 2°, § 32). Viceversa dimostriamo che:

Data una funzione algebrica ad n rami, $y(x)$, definita dall'equazione

$$f(xy) = 0,$$

tutte le funzioni algebriche $t(x)$ che posseggono lo stesso gruppo di monodromia sono funzioni razionali dei punti della curva f.

Infatti scriviamo le funzioni simmetriche miste

$$\begin{aligned}
t_1 + t_2 + \dots\dots\dots\dots + t_n &= \varphi_1(x) \\
y_1 t_1 + y_2 t_2 + \dots\dots\dots\dots y_n t_n &= \varphi_2(x) \\
y_1^2 t_1 + y_2^2 t_2 + \dots\dots\dots + y_n^2 t_n &= \varphi_3(x) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_1^{n-1} t_1 + y_2^{n-1} t_2 + \dots\dots y_n^{n-1} t_n &= \varphi_n(x);
\end{aligned}$$

queste φ_i, restando invariate per le sostituzioni del gruppo di monodromia comune alle $y(x)$ e $t(x)$, saranno funzioni razionali della x. Ora, risolvendo le n equazioni lineari in $t_1, t_2 \dots t_n$ che figurano nel quadro soprascritto (il determinante relativo non si annulla per un x generico), otterremo

$$t_1 = F(x, y_1, y_2, y_3 \dots y_n),$$

dove F designa una funzione razionale simmetrica rispetto alle $y_2, y_3 \dots y_n$. Ma, fissato un x generico e noto che sia il corrispondente valore numerico y_1, le funzioni simmetriche di $y_2, y_3 \dots y_n$ risultano funzioni razionali dei coefficienti della equazione

$$\frac{f(xy)}{y - y_1} = 0;$$

per ciò la F appare funzione razionale di x e y_1. La stessa espressione F si ottiene per t_2 in rapporto a y_2, etc., stante il carattere simmetrico del nostro sistema di equazioni: onde in fine risulta

$$t = F(xy) \qquad \text{c. d. d.}$$

Ora una funzione analitica $t(x)$ che possegga il gruppo di modromia della $y(x)$ si può ritenere come monodroma sopra la superficie di Riemann ad n fogli relativa al gruppo. Pertanto *le funzioni razionali sopra una curva* $f(xy) = 0$ *si lasciano definire come funzioni analitiche monodrome dotate soltanto di poli sulla corrispondente superficie di Riemann.*

Riprendiamo il teorema precedente che afferma la possibilità di esprimere razionalmente la funzione algebrica $t(x)$ per la x e la $y(x)$, collo stesso gruppo di monodromia, allo scopo di esaminare se, e fino a che punto, esso sia invertibile. È data dunque, sopra la curva $f(xy) = 0$ una funzione razionale $t(xy)$, contenente effettivamente y, e si chiede se essa debba possedere necessariamente lo stesso gruppo di monodromia della $y(x)$.

Osserviamo che se (come t di x e y) anche y è funzione razionale di x e t, vi è — per ogni x — corrispondenza biunivoca fra i rami delle funzioni algebriche $y(x)$ e $t(x)$, e quindi identità dei due gruppi di monodromia. Se invece accade che y non si esprima razionalmente per x e t, vorrà dire che — per ogni x — ad un ramo della y corrisponde un ramo della t, ma a un ramo della t corrispondono $q > 1$

rami della y; allora il gruppo di monodromia della $t(x)$ appare in isomorfismo meriedrico col primo; gli n rami della $y(x)$ vengono separati in $n' = \frac{n}{q}$ sistemi, in corrispondenza ai rami della t, ed è evidente che per ogni cammino chiuso della x nel piano della variabile complessa codesti sistemi si scambiano fra loro, per modo che il gruppo di monodromia della $y(x)$ riesce imprimitivo.

Il resultato conseguito si accorda con le seguenti considerazioni algebriche. Scriviamo

$$t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}, \quad f(xy) = 0,$$

e la resultante ottenuta eliminando y:

$$\gamma(xt) = 0.$$

Dopo ciò, se si procede ad eliminare t fra le equazioni

$$t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)} \quad \text{e} \quad \gamma(xt) = 0,$$

si otterrà un resultante $F(xy)$ che conterrà certo $f(xy)$ come fattore; ma in generale f non coinciderà con F, poichè ad ogni punto $(\bar{x}\,\bar{t})$ della γ corrisponderà un certo numero r di punti, sezioni della curva $\varphi_0(xy) - \bar{t}\varphi_1(xy) = 0$ colla retta $x = \bar{x}$, e di questi un certo numero (in generale $r - 1$) saranno fuori di f, descrivendo una curva f': avremo così $F = f \cdot f'$.

Ora ricordiamo un noto teorema della teoria delle equazioni algebriche (¹): se l'equazione irreducibile $F(y) = 0$ è ottenuta eliminando t fra due equazioni del tipo

$$\begin{cases} \varphi_0(y) - t\varphi_1(y) = 0 \\ \gamma(t) = 0, \end{cases}$$

il gruppo di Galois della $F(y) = 0$ è imprimitivo, escluso soltanto il caso che la prima delle equazioni predette contenga la y linearmente e la determini così in modo razionale.

Nell'ipotesi che $F(y)$ sia riducibile (in un certo campo

(¹) Cfr. per es. BIANCHI « Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni.... ». Pisa, Spoerri, 1900. Cap. V, § 71, pag. 160.

di razionalità), il resultato si estende ad un suo fattore irreducibile $f(y)$, semprechè ad una radice $\bar{t}$ della $\gamma(t)=0$ non corrisponda una sola radice comune alle equazioni $\varphi_0(y)-t\varphi_1(y)=0$, $f(y)=0$, che così venga determinata in modo razionale. E, se $\gamma, \varphi_0, \varphi_1, f, F$ contengono un parametro x, il teorema sussiste ancora, sostituendo al gruppo di Galois dell'equazione $f(y)=0$ il gruppo di monodromia della funzione algebrica $y(x)$: i rami di questa si distribuiscono, dunque, in $n'\left(=\frac{n}{q}\right)$ sistemi d'imprimitività corrispondenti ai q rami della funzione $t(x)$, definita dalla $\gamma(xt)=0$.

D'altronde, se ad ogni $t(x)$ corrispondono q (>1) valori della $y(x)$, vuol dire che — sopra la curva f — due gruppi appartenenti alle serie g_n^1 e g_m^1 definite da $x=$ cost. e $t=$ cost. ed aventi a comune un punto P_1 hanno, di conseguenza, a comune $q-1$ punti coniugati, i quali — variando P_1 — descrivono con esso una involuzione γ_n^1; questa involuzione ha per immagine la curva $\gamma(xt)=0$, ed è lineare o meno secondochè tale curva è o no razionale. I gruppi G_q della involuzione, con cui si *compongono* i G_n della g_n^1, mettono in evidenza i sistemi di imprimitività in cui si distribuiscono i rami della $y(x)$.

Riassumiamo i risultati ottenuti, enunciando il teorema:

Se t è una funzione razionale sopra la curva $f(xy)=0$ (contenente effettivamente y), le due funzioni $t(x)$ e $y(x)$ posseggono in generale il medesimo gruppo di monodromia, ed è la y esprimibile razionalmente per x e t, come t per x e y. Fa eccezione il caso che il gruppo di monodromia della $y(x)$ sia imprimitivo e quello della $t(x)$ sia il gruppo complementare che scambia i sistemi di imprimitività; nel qual caso le due serie lineari date sulla curva f per $x=$ cost. e $t=$ cost. resultano composte mediante una medesima involuzione γ_q^1.

Consideriamo ora l'insieme delle funzioni algebriche che sono monodrome sopra la riemanniana della curva f, fra le quali figurano le x, y: questo insieme si dice costituire un *corpo* o una *classe di funzioni algebriche*: due qualunque di esse $X=\frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}$ e $Y=\frac{\psi_1(xy)}{\psi_0(xy)}$ sono legate da una relazione algebrica $F(XY)=0$ che si ottiene eliminando x e y fra le

$$X=X(xy), \quad Y=Y(xy), \quad f(xy)=0.$$

A prima vista le x e y appaiono come funzioni particolari entro il corpo; ma si riconosce che esse possono essere sostituite con due altre funzioni generiche X e Y, in quanto *il corpo è definito ugualmente dalla curva f e dalle sue trasformate birazionali.*

Si tratta di provare che la trasformazione fra $f(xy)=0$ e $F(XY)=0$ riesce in generale univocamente invertibile, sicchè ogni funzione razionale di x e y si esprime ugualmente per X e Y. La dimostrazione dell'asserto si lascia ricondurre a ciò che si è visto innanzi, ove si cambi dapprima una sola delle x e y, per es. la y nella $Y(xy)$, sostituendo così alla curva $f(xy)=0$, una sua trasformata $f'(xY)=0$, e passando poi da f' a F col cambiamento di x in $X(xY)$. Ma giova trattare direttamente la sostituzione generale di x e y in X e Y, riprendendo ed estendendo le considerazioni svolte innanzi, allo scopo di determinare le condizioni sotto le quali sussiste il teorema che abbiamo in vista.

Dunque, preso un punto generico del piano (XY), le due equazioni

$$\frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}=X, \quad \frac{\psi_1(xy)}{\psi_0(xy)}=Y,$$

definiscono un gruppo di punti del piano (xy). Quando il punto (XY) appartenga alla $F(XY)=0$, ottenuta eliminando (x e y) fra le equazioni

$$X=\frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}, \quad Y=\frac{\psi_1(xy)}{\psi_0(xy)}, \quad f(xy)=0,$$

allora uno dei punti del gruppo suddetto viene a cadere sulla curva $f(xy)=0$; se le X, Y sono scelte in modo *generale*, non vi è ragione perchè ve ne cada più di uno. Così, tenendo conto della $f(xy)=0$, le x e y risulteranno funzioni ad un valore, e quindi razionali sopra F. Il caso d'eccezione resulta dalla considerazione della g_n^1 e della g_m^1 definite su f da $X=\text{cost.}$, $Y=\text{cost.}$

Prendasi sopra f un punto generico, P, e siano G_n e G_m i due gruppi della g_n^1 e della g_m^1 che lo contegono, per i quali X e Y assumano i valori X_p e Y_p. In generale accadrà che questi due gruppi non hanno altro punto comune fuori di P, ed allora il punto $P'=(X_pY_p)$ della F ha come corrispondente su f il solo punto P. Dunque, se la corrispondenza fra

f e F non è univocamente invertibile, bisogna che si avveri la seguente circostanza: due gruppi della g_n^1 e della g_m^1 che abbiano un punto a comune hanno di conseguenza a comune un gruppo G_q (composto di $q > 1$ punti). In questo caso è chiaro che i G_q formano una involuzione γ_q^1 (razionale o irrazionale) giacchè ogni punto di f appartiene ad un G_q. Così ogni gruppo della g_n^1 risulta composto di un certo numero $n' = \frac{n}{q}$ gruppi G_q, e analogamente si dica per i gruppi della g_m^1. Pertanto, se *la corrispondenza fra f e F non è univocamente invertibile, le involuzioni lineari g_n^1 e g_m^1 sono composte con una medesima involuzione* γ_q^1 (razionale o irrazionale). Il caso più semplice si ha quando la γ_q^1 coincida con una delle due involuzioni date, per es. $\gamma_q^1 = g_n^1$ $(q = n,\ m = nm')$; questo caso corrisponde all'ipotesi che Y sia funzione razionale di X, così che ad ogni valore di X corrisponde un solo valore di Y. Più in generale se la γ_q^1 è razionale $(\gamma_q^1 = g_q^1)$, X e Y risultano funzioni razionali di una medesima $t(xy)$ i cui gruppi di livello danno la g_q^1. Ma si possono anche avere g_n^1 e g_m^1 composte con una γ_q^1 irrazionale, definita per mezzo di una corrispondenza $[q, 1]$ fra la curva f ed una curva (non razionale) $\gamma(\xi\eta) = 0$; allora X e Y resultano funzioni razionali sopra la curva γ.

Osservazione. Abbiamo usato della locuzione « funzione analitica sopra una superficie di Riemann »; questa locuzione ci è stata suggerita dall'uso della riemanniana ad n fogli cui conduce la funzione $y(x)$ definita dall'equazione algebrica $f(xy) = 0$. Ora, se in luogo della $f(xy) = 0$ (di grado n rispetto ad y) si considera una sua trasformata birazionale $F(XY) = 0$, avente un certo grado m in Y, si otterrà al posto della primitiva riemanniana R, una riemanniana R' ad m fogli; e le due superficie R e R' risulteranno *rappresentate conformemente* l'una sull'altra, giacchè la funzione analitica $X(x)$ vale a rappresentare conformemente (cioè conservando gli angoli) ogni area del piano x, in cui si mantenga regolare, sull'area corrispondente del piano X (cfr. L. 2°, § 30). Viceversa, si abbiano due riemanniane R e R' rispettivamente ad n e m fogli, corrispondenti a due equazioni $f(xy) = 0$ e $F(XY) = 0$, e pongasi che le dette R e R' sieno rappresentate conformemente l'una sull'altra *senza eccezione*: allora le curve $f = 0$

e $F=0$ si potranno riguardare come trasformate birazionali l'una dell'altra. Infatti, tanto X come Y risultano funzioni analitiche ad n valori della variabile complessa x, dotate soltanto di poli e di punti di diramazione, che cadono nei punti di diramazione della $y(x)$, dando luogo al medesimo gruppo di monodromia; perciò X e Y sono funzioni razionali di x e y. E lo stesso si dica per x e y rispetto a X e Y.

Le osservazioni fatte permettono di ritenere *funzionalmente equivalenti due riemanniane a fogli quando esse possono essere rappresentate biunivocamente e conformemente* (senza eccezione) *una sull' altra*; con riguardo a questo concetto di equivalenza, la frase « funzione analitica sopra una superficie di Riemann » è suscettibile di acquistare un significato geometrico preciso, giacchè per es. all'esistenza di una funzione razionale di grado m (g_m^1) sopra una superficie di Riemann R, corrisponde una determinata rappresentazione conforme della R sopra un piano che si trova con essa in corrispondenza $[1, m]$, dando luogo ad una riemanniana equivalente ad m fogli.

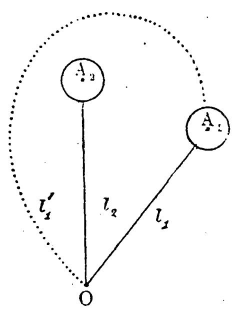
In ciò che precede ci si riferisce sempre a superficie di Riemann costituite da fogli piani sovrapposti e convenientemente congiunti lungo un sistema di tagli. Tuttavia è lecito anche di considerare superficie deformate nello spazio, purchè si escludano quelle deformazioni continue delle superficie flessibili ed estendibili che alterino comunque gli angoli; in altre parole: *superficie topologicamente equivalenti*, come accade di considerare nella ricerca dei caratteri numerici di connessione (cfr. L. 2°, §§ 34-38) *non* debbono riguardarsi come *funzionalmente equivalenti*, il criterio di questa equivalenza più ristretta rimanendo — come si è detto — la possibilità della rappresentazione biunivoca conforme.

Qui è opportuno osservare che in generale non è possibile rappresentare conformemente (senza eccezione) due superficie più volte connesse l'una sull'altra: vero è che nella geometria differenziale si dimostra che date due superficie F e F' si ottiene generalmente una rappresentazione conforme dell'una sull'altra facendo corrispondere due sistemi di linee $u=\text{cost}$, $v=\text{cost}$ isotermi [per ciascuno dei quali l'elemento lineare assume la forma $ds^2=\lambda(uv)(du^2+dv^2)$ cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, cap. 3, § 37, pag. 70]; ma questo resultato concerne superficie F e F'

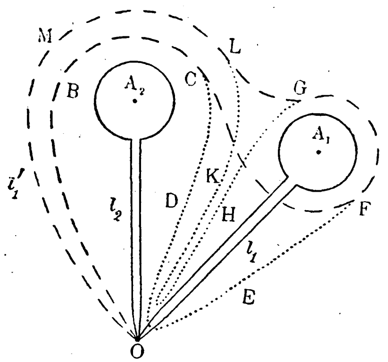
concepite in piccolo, cioè convenientemente limitate nel senso della geometria differenziale, in particolare dunque semplicemente connesse. Quando invece si tratta di superficie considerate nella loro integrità, e comunque soddisfacenti a condizioni di natura analitica, il prolungamento delle linee di un sistema isotermo darà luogo a difficoltà ed eccezioni; perchè queste linee non costituiranno più sistemi d'indice 1 (fasci) ed inoltre potranno dar origine a punti di singolarità, ed anche avvolgersi sulla superficie in guisa che una di esse penetri infinite volte in una stessa regione, ecc.

A chiarimento del concetto di equivalenza sopra esposto, noteremo ancora che: data una riemanniana ad n fogli, coi punti di diramazione $A_1 A_2 \dots A_m$, si ottengono superficie conformemente equivalenti quando si tengano fissi i detti punti facendo variare i tagli OA_1, $OA_2 \dots OA_m$, le dette superficie venendo riferite fra loro in modo che si corrispondano i punti associati ad uno stesso valore della variabile indipendente x. Ciò è d'accordo col teorema stabilito che il gruppo di monodromia definisce il corpo di funzioni algebriche.

Ma in quale senso si debba definire la riemanniana ad n fogli, quando i tagli, variando, vengano ad attraversarsi l'un l'altro, deve essere convenientemente precisato. Sappiamo che una riemanniana R viene costruita congiungendo un punto O del piano della variabile complessa coi punti di diramazione $A_1 A_2, \dots A_m$, mediante un sistema di linee (tagli o cappi) OA_1, OA_2, ... OA_m, non attraversantisi fra loro, che si succederanno in un certo ordine (definito dall'ordine delle tangenti in O), per es. nell'ordine indicato dagli indici $12 \dots m$: nell'annessa figura quest'ordine corrisponde al solito verso positivo di rotazione del piano, da destra a sinistra. Ora



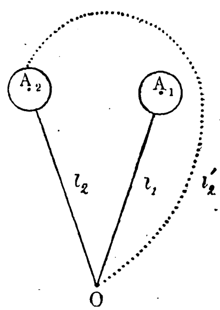
sostituiamo alla linea $l_1 = OA_1$ una linea l_1', terminata ai medesimi estremi, che insieme ad l_1 avvolga il punto A_2, come si vede nella figura: ciò significa « far passare l_1 dalla destra alla sinistra di A_2 ». Ebbene questo passaggio equivale topologicamente ad un movimento del punto A_1 per cui esso attraversi il taglio l_2 ($= OA_2$), sicchè la sostituzione S_1, relativa ad l_1, verrà trasformata con la S_2 relativa ad l_2: $S_1' = S_2 S_1 S_2^{-1}$ (cfr. L. 2°, § 34, vol. I, pag. 361). In modo diretto (cioè lasciando fermo il punto A_1) si riconosce la stessa cosa osservando che il cappio l_1' equivale alla somma del cappio l_2 percorso in senso negativo, più il cappio l_1, più il cappio l_2, percorsi positivamente: la figura che qui presentiamo rende evidente codesta equivalenza di cammini (per deformazione continua senza attraversamento dei punti di diramazione):



$$l_1' = OBCFGLMO =$$
$$= OBCDOEFGHOKLMO =$$
$$= l_2^{-1} + l_1 + l_2 .$$

Similmente se si fa passare l_2 alla destra di l_1, la sostituzione relativa S_2, tenuto conto del verso in cui si percorrono i cammini, si trasformerà mediante l'inversa di S_1:

$$S_2' = S_1^{-1} S_2 S_1 .$$



Queste osservazioni permettono di assegnare in senso funzionale la riduzione delle riemanniane ad un tipo canonico, cui già accennammo da un punto di vista puramente topologico, dimostrando così, nel suo significato proprio, il

Teorema di Lüroth-Clebsch. *La superficie di Riemann ad n fogli, rappresentativa di una funzione algebrica ad n rami $y(x)$, coi punti di diramazione semplici $A_1 A_2 \ldots A_m$ $(m = 2n + 2p - 2)$, si può sempre costruire scegliendo un conveniente sistema di tagli susseguentisi OA_1, $OA_2 \ldots OA_m$, rispetto a cui i rami* (opportunamente numerati) *subiscono le trasposizioni*

$$\underbrace{(12)(12) \ldots (12)(12)}_{(2p+2 \text{ volte})}\ (23)(23)\ (34)(34) \ldots (n-1, n)(n-1, n).$$

In vista delle applicazioni che questo teorema riceverà nel seguito, vogliamo svilupparne qui la dimostrazione, stabilendo successivamente i seguenti punti.

1) Si può ottenere che siano consecutivi tutti i cappi

(cui corrispondono sostituzioni) operanti sopra un medesimo ramo 1.

Sia infatti l_1 un cappio operante sul ramo 1, e indichiamo con G_1 l'insieme dei cappi ad esso consecutivi (a destra e a sinistra) che operano ancora su 1; se tutti gli altri cappi non operano su 1 (chè allora la nostra proposizione sarebbe dimostrata), il primo cappio alla sinistra di G_1, trasportato alla destra di G_1, verrà trasformato mediante le inverse delle sostituzioni di G_1 e potrà operare o meno sopra 1; nel primo caso esso verrà aggregato all'insieme G_1, nel secondo a un insieme complementare G_1', costituito dai cappi consecutivi posti alla destra di G_1 i quali non operano su 1. Al gruppo G_1 andranno anche aggiunti gli altri cappi operanti su 1 che — per lo spostamento del cappio indicato — vengano a trovarsi ad esso consecutivi. Eseguendo lo stesso trasporto successivamente sui singoli cappi posti alla sinistra di G_1 (che non appartengono a G_1'), si ottiene in definitiva che tutti i cappi appartengano a G_1 o a G_1', sicchè quelli operanti sul ramo 1 sono tutti consecutivi.

2) L'insieme, G_1, dei cappi operanti sopra il ramo 1 può essere supposto contenere successivamente due cappi $(1a)$, due cappi $(1b)$, due cappi $(1c)$...., i rami a, b, c, essendo uguali o diversi fra loro.

Sia infatti $(1a)$ la sostituzione relativa al primo cappio l_a di G_1; se il cappio posto alla sinistra di questo è diverso da $(1a)$ portato alla destra non opera più su 1, e viene quindi tolto dal G_1 e aggregato al G_1'. Così facendo si viene a rendere consecutivo al detto cappio $(1a)$ un secondo cappio $(1a)$; invero non può accadere che il gruppo G_1 si riduca al solo cappio $(1a)$ poichè il prodotto di tutte le nostre m sostituzioni deve dare l'identità e quelle di G_1' non operano sul ramo 1.

Ottenuta così una coppia di scambi $(1a)$ relativi a due cappi consecutivi, sia $(1b)$, con b diverso od uguale ad a, lo scambio relativo al primo cappio l_b (di G_1) alla sinistra di questi. Se il cappio posto alla sinistra di l_b dà uno scambio diverso da $(1b)$ trasportato alla destra di l_a viene trasformato mediante il prodotto $(1a)(1a)(1b)$ e quindi, non operando più su 1, viene aggregato al G_1'. Si troverà così un secondo cappio $(1b)$ consecutivo ad l_b, la cui esistenza effettiva si riconosce come precedentemente. Similmente dopo i due scambi $(1b)$ si avranno due scambi $(1c)$ e così via.

3) L'insieme G_1 si può supporre composto di un numero pari di cappi (12).

Infatti anzitutto possiamo indicare con 2 il ramo a, sicchè i due cappi consecutivi $(1a)$ danno due cappi (12). Se $b \neq a$, si possono portare i due cappi $(1b)$ alla destra dei due cappi $(1a)$, lasciando invariati questi e trasformando quelli in due cappi (ab) che così cessano di far parte di G_1: infatti dai quattro cappi consecutivi

$$\begin{array}{cccc} (1b) & (1b) & (1a) & (1a) \\ \mathrm{IV} & \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array},$$

facendo passare III e IV alla destra di II si ha

$$\begin{array}{cccc} (1a) & (ab) & (ab) & (1a) \\ \mathrm{IV} & \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array},$$

e facendo ora passare I alla sinistra di II e III si ha

$$(1a) \quad (1a) \quad (ab) \quad (ab).$$

Similmente si opera se $c \neq a, \ldots$. sicchè in definitiva resta in G_1 un numero pari di scambi $(1a)$, cioè di scambi (12).

4) *Teorema di* LÜROTH. Tutti gli m cappi possono essere distribuiti in $n-1$ gruppi consecutivi: il gruppo G_1 di un numero pari di cappi (12), il gruppo G_2 di un numero pari di cappi (23), il gruppo G_3 di un numero pari di cappi (34).... Infatti poichè il gruppo di monodromia è transitivo, fuori del G_1 esisteranno dei cappi che operano su 2; facendo astrazione dai cappi del gruppo G_1, possiamo operare sui restanti in modo analogo a quello seguito nei numeri 1), 2), 3) sicchè tutti i cappi contenenti la determinazione 2 possono essere supposti costituire il gruppo G_2 di un numero pari di cappi (23). Si può anche supporre che G_2 sia immediatamente alla sinistra di G_1, portando per es. alla destra di questo tutti i cappi intermedi. E nello stesso modo si costruiscono gli altri gruppi G_3....

5) Se il gruppo G_i possiede quattro cappi $(i, i+1)$, due di questi possono essere trasformati in due cappi $(i, i-1)$ venendo così aggregati al gruppo G_{i-1}.

Posto, per semplicità di scrittura $i=1$, si considerino i 6 cappi consecutivi (gli ultimi due di G_1 e i primi quattro di G_2):

$$\begin{array}{cccccc} (23) & (23) & (23) & (23) & (12) & (12) \\ \mathrm{VI} & \mathrm{V} & \mathrm{IV} & \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array};$$

facendo passare il cappio II alla sinistra del cappio III si ha:

$$\begin{array}{cccccc} (23) & (23) & (23) & (13) & (23) & (12) \\ \mathrm{VI} & \mathrm{V} & \mathrm{IV} & \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array},$$

facendo poi passare IV e V alla destra di III si ha

$$\begin{array}{cccccc} (23) & (13) & (12) & (12) & (23) & (12) \\ \mathrm{VI} & \mathrm{V} & \mathrm{IV} & \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array},$$

facendo passare II alla sinistra di III e IV si ha:

$$\begin{array}{cccccc} (23) & (13) & (23) & (12) & (12) & (12) \\ \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \mathrm{IV} & \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array},$$

e infine, facendo passare V alla destra di IV si ha

$$\begin{array}{cccccc} (23) & (23) & (12) & (12) & (12) & (12) \\ \mathrm{VI} & \mathrm{V} & \mathrm{IV} & \mathrm{III} & \mathrm{II} & \mathrm{I} \end{array}:$$

6) Infine si può supporre G_1 formato da $2p+2$ cappi (12), G_2 da due cappi (23), G_3 da due cappi (34) .... G_{n-1}, da due cappi $(n-1, n)$.

Infatti basta applicare successivamente il procedimento 5) ai gruppi G_i $(i > 1)$, che avessero più di due cappi.

Così viene dimostrata la prop. 6) che costituisce il complemento recato da Clebsch al teorema di Lüroth (4).

4. Serie lineari g_n^r. — Il concetto della g_n^1, considerata come sezione di una curva fondamentale $f(xy)=0$ con un fascio di curve

$$\lambda_0\varphi_0(xy)+\lambda_1\varphi_1(xy)=0,$$

si lascia generalizzare, definendo così le *serie lineari* g_n^r, segate su f da un sistema lineare. L'*ordine* n della serie sarà il numero dei punti intersezioni variabili di f con le curve φ del sistema, ovvero questo numero aumentato del numero dei *punti fissi* (apparenti fra i punti base delle φ) che si aggiungano convenzionalmente agli anzidetti gruppi variabili. La *dimensione* r della serie designa il numero dei parametri essenziali da cui dipendono i suoi gruppi, e perciò equivale alla dimensione del sistema $|\varphi|$

$$\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_r\varphi_r=0,$$

purchè un G_n della g_n^r appartenga ad una sola φ, cioè quando f non sia contenuta (totalmente o parzialmente) nel detto sistema.

Nel caso che si abbia un sistema di curve di dimensione $r+s$

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + ... \lambda_r\varphi_r + ... + \lambda_{r+s}\varphi_{r+s} = 0$$

che seghi sopra f una g_n^r, accade che ogni gruppo G_n di questa appartiene ad ∞^s curve φ, formanti un sistema lineare, tra le quali ve ne sono ∞^{s-1} spezzate, che si ottengono imponendo alle nominate di contenere un altro punto di f. Così il nostro sistema $|\varphi|$ contiene, entro di sè, un sistema lineare ∞^{s-1} di curve, riducibili nella f e in una parte residua, il quale può supporsi rappresentato da

$$\lambda_{r+1}\varphi_{r+1} + \lambda_{r+2}\varphi_{r+2} + ... + \lambda_{r+s}\varphi_{r+s} = 0;$$

è chiaro che la data g_n^r è segata su f dal sistema lineare ∞^r

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_r\varphi_r = 0,$$

che non contiene più f, poichè

$$\lambda_{r+1}\varphi_{r+1} + \lambda_{r+2}\varphi_{r+2} + ... + \lambda_{r+s}\varphi_{r+s}$$

si annulla per tutti i punti di f.

La precedente definizione si estende alle curve gobbe sostituendo al sistema lineare delle curve φ un sistema lineare $|\varphi|$ di superficie o di ipersuperficie: la dimensione della serie segata dal sistema ∞^{r+s}, sarà r anzichè $r+s$ ($s \geq 1$), se vi sono ∞^{s-1} superficie o ipersuperficie del sistema che contengono la curva.

Del resto la definizione della g_n^r sopra una curva si può dare in modo intrinseco, rendendola indipendente dal carattere proiettivo di f come curva piana o gobba, ed anche dalla scelta di un particolare sistema secante; infatti: *una g_n^r sopra una curva si può definire come la serie dei gruppi di livello di un sistema lineare di funzioni razionali aventi i medesimi poli*:

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + ... + \lambda_r t_r = \text{cost}.$$

Anzitutto è chiaro che la serie segata dal sistema lineare

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_r\varphi_r = 0,$$

è la serie dei gruppi di livello del sistema lineare di funzioni

$$\lambda_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \lambda_2 \frac{\varphi_2}{\varphi_0} + \dots + \lambda_r \frac{\varphi_r}{\varphi_0}$$

che contengono lo stesso gruppo di poli ($\varphi_0 = 0$). Viceversa, se sono date r funzioni razionali $t_1, t_2, \dots t_r$ con gli stessi poli, si riducano queste allo stesso denominatore φ_0, scrivendo:

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad t_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0}, \dots t_r = \frac{\varphi_r}{\varphi_0};$$

allora il gruppo delle intersezioni di f e φ_0 conterrà i poli delle t, ed altri punti in cui si annullano contemporaneamente tutti i numeratori $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_r$ di queste funzioni: pertanto la serie dei gruppi di livello del sistema delle funzioni t verrà segata su f dal sistema di curve, superficie o ipersuperficie,

$$\lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r = 0.$$

Dal confronto delle due definizioni della g_n^r appare che il gruppo dei poli del sistema $\Sigma \lambda_i t_i$ figura entro la serie dei gruppi di livello come un altro gruppo qualsiasi. Il cambiamento di esso corrisponde ad eseguire sopra $t_1, t_2, \dots t_r$ una sostituzione lineare.

Rileviamo in modo esplicito che ugualmente dalle due definizioni della g_n^r si deduce quel complesso di proprietà per cui essa può essere considerata come un sistema lineare di enti, cioè — astrattamente — come uno spazio lineare di punti ad r dimensioni, S_r (dove la g_n figura come retta): due gruppi qualsiansi di una g_n^r appartengono ad una g_n^1 contenuta in essa (proprietà rispondente a quella che due curve di un sistema lineare determinano un fascio appartenente al sistema); tre gruppi della g_n^r non appartenenti a una g_n^1 determinano una g_n^2 contenuta in essa; e in generale $h+1$ gruppi della g_n^r non contenuti in una g_n^{h-1}, cioè indipendenti, appartengono ad una g_n^h entro la g_n^r, ciò che porta: « una g_n^{h-1} ed un G_n fuori di essa, entro la g_n^r, appartengono ad una g_n^h » (proiezione della g_n^{h-1} dal nominato G_n).

D'altra parte si hanno le proprietà di intersezione delle serie lineari contenute in una g_n^r, che si riassumono nella seguente: una g_n^h e una g_n^k, appartenenti a una g_n^r, e non a una serie lineare di dimensione minore, hanno a comune una g_n^s con $s = h + k - r$, e quindi un gruppo $G_n = g_n^0$ per $r = h + k$, e nessun gruppo se $r > h + k$.

Aggiungasi che la prima delle proprietà sopra accennate vale già a caratterizzare la serie lineare g_n^r sopra una curva, cioè:

se una serie ∞^r di gruppi di n punti è tale che due gruppi qualsiansi appartengano ad una g_n^1 contenuta nella serie, questa è una g_n^r.

Infatti due G_n della nostra serie, Σ, determinano una g_n^1 entro Σ. Se non vi sono G_n fuori di questa g_n^1 il teorema è dimostrato; se vi è un G_n fuori della g_n^1, proiettando la g_n dal G_n si ottiene una g_n^2 contenuta in Σ, e così via fino a esaurimento della serie Σ. (Il teorema qui stabilito si riduce sostanzialmente a quello che porge la proprietà caratteristica dei sistemi lineari di curve piane, incontrato nel L. 1°, § 14).

Ora osserviamo che: data sopra una curva f una g_n^r, i gruppi di questa che contengono un punto generico (che non figuri già fra i punti fissi) formano una g_n^{r-1} che ha quel punto come fisso. Infatti il punto dato impone una condizione lineare alle φ del sistema secante.

Dall'osservazione precedente segue il teorema più generale: se si impone ai gruppi di una g_n^r di contenere $s\,(\leq r)$ punti generici, si ottiene una serie lineare g_n^{r-s} che ha quei punti come fissi. In particolare, per $s = r$, si ha la

Proprietà involutoria delle g_n^r: r punti generici della curva appartengono ad *un* gruppo della serie. Questa proprietà, per $r > 1$, conduce a caratterizzare le g_n^r, quando si escludano le serie formate da tutti i gruppi di r punti della curva ($n = r$) o, più generalmente, quelle che si ottengano prendendo ad r ad r i gruppi di una involuzione irrazionale γ_q^1 ($n = qr$): questo teorema dovuto a Castelnuovo-Humbert si troverà dimostrato nel § 41.

Se una curva f viene trasformata birazionalmente in una f', ogni g_n^r data su f si trasforma in una g_n^r sopra f'. Ciò si rende manifesto sia sostituendo razionalmente le coordinate $x\ y\ldots$ nell'equazione del sistema delle (curve etc.) φ secanti la g_n^r, sia facendo appello alla definizione intrinseca della g_n^r stessa.

Ora, all'esistenza di una g_n^r sopra una curva f (comunque definita a meno di una trasformazione birazionale) si lega una particolare trasformazione di f che dà origine ad una curva $C_n{}^r$ di uno spazio S_r, definita a meno di una trasformazione proiettiva; sulla quale curva la nostra g_n^r viene segata dal sistema degli iperpiani. Quindi in questo ordine di considerazioni, il problema di riconoscere se una curva (piana o gobba) sia proiezione di un'altra, ovvero se due curve siano proiezioni di una medesima, si ricondurrà a vedere se una serie lineare sia contenuta in un'altra.

Si consideri, sopra una curva rappresentata in coordinate omogenee da $f(x_0x_1x_2)=0$, una serie lineare g_n^r $(r \geq 2)$ priva di punti fissi, la quale venga segata dal sistema lineare di curve

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_r\varphi_r = 0;$$

e riferiamoci al caso generale di una g_n^r *semplice*, cioè tale che i gruppi di essa contenenti un punto generico non contengano di conseguenza altri punti variabili col primo. Ponendo

$$y_0 = \varphi_0(x_0x_1x_2), \quad y_1 = \varphi_1(x_0x_1x_2), \dots \quad y_r = \varphi_r(x_0x_1x_2),$$
$$f(x_1x_2x_3) = 0$$

si definisce nello $S_r = (y_0y_1 \dots y_r)$ una curva C_n che riesce d'ordine n e in corrispondenza biunivoca con f; sopra la quale la g_n^r (trasformata della data) viene segata dagli iperpiani

$$\lambda_0y_0 + \lambda_1y_1 + \dots + \lambda_ry_r = 0.$$

Si vede che una qualsiasi curva K_n di ordine n appartenente ad S_r (e non ad un S_{r-1}), che sia in corrispondenza biunivoca con f, e di cui le sezioni iperpiane siano gruppi della g_n^r, coincide con la C_n o con una sua trasformata proiettiva. Giacchè si passa dall'una all'altra curva mediante l'omografia in cui si corrispondono gli iperpiani seganti gruppi omologhi della g_n^r.

Infatti:

1) la corrispondenza posta in tal guisa fra gli iperpiani di S_r è biunivoca, perchè ogni gruppo della K_n, così come un gruppo della C_n, appartiene ad un solo iperpiano; altrimenti apparterrebbe ad un fascio e la curva starebbe nell'iperpiano di questo che ne contenga un punto ulteriore;

2) l'anzidetta corrispondenza fra gli iperpiani di S_r è un'omografia, poichè agli iperpiani di un fascio, seganti

una g_n^1 su C_n, corrispondono gli iperpiani di un fascio seganti su K_n la g_n^1 omologa;

3) nell'omografia così ottenuta, ad un punto P di C_n, considerato come centro di una stella di iperpiani che sega la g_n^{r-1} dei gruppi di g_n^r contenenti P come punto fisso, corrisponde un punto, definito ugualmente dalla g_n^{r-1} con punto fisso, omologa della precedente, e quindi un punto appartenente alla K_n.

La *trasformazione* definita innanzi analiticamente, che fa passare da una *curva f contenente una* g_n^r ad una C_n di S_r su cui la ***serie*** viene ***segata dagli iperpiani***, si può comprendere in modo sintetico come un'applicazione della ***geometria astratta***; (si confronti ciò che è detto per le serie lineari sopra la retta nel L. 2°, § 6, Vol. I, pag. 189 e seg.).

Infatti abbiam visto che i gruppi di una g_n^r si possono riguardare come i punti — ovvero come gli iperpiani — di uno spazio lineare ad r dimensioni, in cui la retta — o rispettivamente il fascio di iperpiani — corrisponda ad una g_n^1 contenuta nella g_n^r. Adottando la seconda interpretazione si viene a porre una omografia fra la g_n^r e lo S_r concepito come spazio di iperpiani, e si riesce in tal guisa a definire, a meno di una trasformazione proiettiva, la curva C_n. Effettivamente un punto generico, P, della f determina una g_n^{r-1} entro g_n^r che lo contiene come punto fisso, e a questa g_n^{r-1} corrisponde una stella di iperpiani dello S_r, avente un certo centro P': al variare di P, il punto P' descrive la curva C_n.

Abbiamo detto che la C_n è in generale in corrispondenza biunivoca con f, e a questo caso ci siamo riferiti nelle considerazioni precedenti. Consideriamo ora il caso di eccezione alla invertibilità della corrispondenza, in cui « i gruppi di g_n^r contenenti un punto fisso generico $P = P_1$, contengono di conseguenza altri $q-1$ punti fissi $P_2 \dots P_q$, suscettibili di variare con P ». Al variare di P su f, i gruppi analoghi a $P_1 P_2 \dots P_r$ descrivono una *involuzione* γ_q^1 (lineare o no), e tutti i gruppi della g_n^r sono composti con gruppi di questa. In tal caso il punto P', costruito nello S_r, risponde non solo al punto P, ma a tutto il gruppo della γ_q^1 da esso definito, sicchè la corrispondenza fra f e la curva C, descritta da P', è una corrispondenza $[q, 1]$. E la curva C, che rappresenta l'involuzione γ_q^1, riesce d'ordine $n' = \frac{n}{q}$; ma — in virtù della corrispondenza che la lega ad f — si può ritenere come una C_n ridotta a una $C_{n'}$ *multipla secondo il numero* q: su questa si può dire ancora che gli iperpiani seghino la data g_n^r *composta* con la γ_q^1.

Nota. Si badi che le curve multiple riescono definite, per ora, soltanto in rapporto alla trasformazione che dà loro origine, cioè come enti o modelli particolari di una data classe di curve algebriche. Invero è ovvio che curve birazionalmente distinte possono essere rappresentate sopra una medesima curva multipla secondo un certo numero: così, per es., la conica per proiezione da un punto esterno e la cubica per proiezione da un suo punto, si rappresentano ugualmente sopra la retta doppia, eppure la prima curva è razionale ($p=0$), mentre la seconda è di genere $p=1$ e quindi non razionale (cfr. § 2, pag. 16).

Ma, almeno nel caso più semplice delle curve razionali doppie, si può vedere come la classe della curva doppia resta definita quando si dia sulla curva C il gruppo G dei ***punti di diramazione***, cui rispondono le coincidenze della relativa g_2^1. Infatti si riuscirà allora ad esprimere le coordinate dei punti di una curva della classe in funzione di un radicale quadratico portante sopra i punti di C e determinato dal G. Su ciò non ci diffondiamo ora, limitandoci a proporre allo studioso un esempio:

Si consideri la quartica K di genere 1, intersezione della quadrica $x^2+y^2+z^2=1$ e di un cilindro quadrico $C(xy)=0$, il cui vertice O sia il punto all' infinito dell' asse z, e sopra K la serie g_4^2 segata dai piani per O; questa serie conduce a trasformare K in una conica doppia C (proiezione di K da O). Sulla C si hanno quattro punti di diramazione che rispondono alle generatrici del cono tangenti all' altra quadrica, venendo segati dalla conica $\theta(xy)=x^2+y^2-1=0$. E si vede che i punti di K si ottengono come funzioni razionali dei punti (xy) di C e della $\sqrt{\theta(xy)}$. Così la curva doppia C, tenuto conto dei quattro punti di diramazione, offre un' immagine ben definita della K.

Questa osservazione si lascia estendere con alcuni essenziali complementi, come vedremo nel § 38; qui ci limiteremo a rilevare l' aspetto riemanniano della questione.

Sulla superficie di Riemann R', relativa alla curva multipla C_n, si possono ritenere deposti i valori di una funzione algebrica capace di definire i punti f, avendosi q valori della funzione per ogni punto P' di R': i q rami della anzidetta funzione algebrica si potranno permutare fra loro quando P' descrive un ciclo di R', ovvero un giro chiuso riducibile a un cappio avvolgente un punto di diramazione (in cui due valori coincidono).

Andiamo ora ad esaminare la relazione intercedente fra due curve che siano proiezioni una dell'altra, e per semplicità di discorso, consideriamo dapprima il caso di una curva gobba dello spazio ordinario, $C_n{}^3$, e di una sua proiezione piana $C_n{}^2$. Pongasi che la seconda curva sia proiezione della prima da un punto O, che dovrà essere esterno alla $C_n{}^3$, altrimenti la proiezione ne abbasserebbe l'ordine. Allora sulla $C_n{}^3$ si vedono la g_n^3 segata da tutti i piani dello spazio, e la g_n^2 segata dai piani per O, che naturalmente è contenuta nella g_n^3. Proiettando da O, la g_n^2 viene segata sulla $C_n{}^2$ dalle rette, e la g_n^3 si trasporta, su questa curva, in una serie che dovrà dunque contenere la g_n^2 stessa.

Reciprocamente: se sopra una curva piana $C_n{}^2$, si ha una g_n^3 contenente la g_n^2 segata dalle rette, la $C_n{}^2$ si può ritenere come proiezione di una curva gobba $C_n{}^3$ sulla quale i piani segano i gruppi della $C_n{}^3$. Infatti, se si costruisce questa $C_n{}^3$ così definita dalla g_n^3, su tale curva si vede che la g_n^2, corrispondente a quella segata dalle rette su $C_n{}^2$, viene segata dai piani di una stella, e, proiettando dal centro O di questa, si ottiene una curva piana proiettivamente identica alla $C_n{}^2$.

Le considerazioni precedenti vanno modificate leggermente nel caso che O appartenga a $C_n{}^3$, come punto semplice o multiplo, nel qual caso la sua proiezione piana risulta una curva $C_m{}^2$ d'ordine $m < n$. Si designi con $i = n - m$ la molteplicità di O per la $C_n{}^3$; allora è chiaro che la g_n^2 segata su $C_n{}^2$ dai piani per O, diviene sopra $C_n{}^2$ la g_m^2 segata dalle rette, completata con gli i punti fissi che si ottengono come traccie delle tangenti alla $C_n{}^3$ in O (che, per semplicità, possiamo supporre distinti). Dunque si vede che, sulla $C_m{}^2$, la g_m^2 segata dalle rette è ancora contenuta nella g_n^3 proveniente dalla serie delle sezioni piane di $C_n{}^3$, ma soltanto in modo *parziale*, cioè quando si stacchino gli i punti fissi corrispondenti ad O.

La considerazione precedente si inverte: se sopra una $C_m{}^2$

si ha una g_n^3, con $n > m$, che contenga parzialmente la g_m^2 segata dalle rette, la curva piana $C_m{}^2$ è proiezione di una curva gobba d'ordine n, da un suo punto di molteplicità $i = n - m$.

Ora non vi è difficoltà a generalizzare le cose dette.

Si abbia nello spazio ad s dimensioni una curva $C_m{}^s$, d'ordine m, sulla quale dunque gli iperpiani segano una g_m^s; *condizione necessaria e sufficiente perchè la $C_m{}^s$ sia proiezione di una $C_n{}^r$ d'ordine n di un S_r ($m \leq n$, $s < r$), è che la g_n^s sia contenuta, totalmente o parzialmente, in una g_n^r* (che corrisponde alla serie delle sezioni iperpiane di $C_n{}^r$).

Per conseguenza: se sopra una curva f, definita nel piano o in uno spazio qualunque a meno di una trasformazione birazionale, sono date una g_m^s e una g_n^r, la proprietà della g_m^s di essere contenuta entro la g_n^r ($s < r$) esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè le due curve $C_m{}^s$ e $C_n{}^r$, immagini di f relative alle due serie, possano ritenersi l'una proiezione dell'altra: la proiezione verrà fatta da uno spazio S_{r-s-1}, che avrà con la $C_n{}^r$ a comune $n - m$ punti, computati secondo le loro molteplicità.

Esempi.

1) La cubica piana con punto doppio è proiezione di una cubica gobba.

2) La cubica piana senza punti doppi non è proiezione di una cubica gobba. Altrimenti tutte le ∞^3 terne di punti della cubica sarebbero equivalenti (cfr. § 2, pag. 15).

3) La quartica piana con 2 punti doppi è proiezione di una quartica gobba di S_3, ed anche di una quintica di S_4.

5. Serie complete e curve normali. — Sopra una curva f, due gruppi di n punti

$$G_n \quad \text{e} \quad G_n',$$

si dicono *equivalenti*, e si scrive

$$G_n \equiv G_n',$$

se appartengono a una medesima g_n^r; se $r > 0$ ciò significa che i due gruppi appartengono a un medesima g_n^1.

In ogni caso esiste una funzione razionale (intrinsecamente definita su f a meno di una costante moltiplicativa) la quale possiede come poli i punti di G_n e come zeri i punti di G_n'; ogni punto comune a G_n e G_n' è un punto d'indeterminazione da computarsi insieme come polo e zero della funzione suddetta, la quale è costante in tutti gli altri punti della curva se G_n e G_n' coincidono.

Segue dalla definizione che l'equivalenza dei gruppi soddisfa alle due prime proprietà fondamentali delle relazioni d'uguaglianza.

1) *Proprietà riflessiva*: $G \equiv G$.

2) *Proprietà simmetrica*: se $G \equiv G'$, si deduce $G' \equiv G$.

Sussiste anche la

3) *Proprietà transitiva*: se $G \equiv G'$, $G \equiv G''$,

si deduce

$$G' \equiv G''.$$

Infatti per l'equivalenza di G e G' esiste sulla curva f una funzione (razionale) t la quale ha i suoi poli nei punti di G e i suoi zeri nei punti di G' (se vi è un punto comune a G e G' questo figura come un punto di indeterminazione di t che non deve esser tolto). Similmente esiste una funzione τ che ha come poli i punti di G e come zeri i punti di G''. Le funzioni

$$\lambda t + \mu\tau$$

hanno come gruppi di livello i gruppi di una g_n^2 che comprende G' e G'': dunque questi sono equivalenti. La g_n^1 a cui appartengono resta definita semplicemente dalla funzione

$$\frac{t}{\tau},$$

dove si tolga l'indeterminazione apparente nei punti di G.

Ora si ha che:

Sopra una curva f, la totalità dei gruppi equivalenti ad un dato G_n appartiene ad una serie lineare g_n^r ($r \leq n$, $r \geq 0$), che dicesi serie completa, determinata dal G_n.

Questa serie viene data combinando linearmente le funzioni razionali indipendenti che hanno come poli i punti del G_n (resultando $r = n$ solo nel caso che tutti gli ∞^n gruppi di punti della curva siano fra loro equivalenti). D'altronde, tenuta presente la proprietà transitiva dell'equivalenza, questo teorema si riduce a quello, incontrato nel precedente paragrafo, che afferma: «una serie ∞^r di gruppi di n punti è lineare se due qualsiansi dei suoi gruppi determinano una g_n^1 contenuta in essa ».

La g_n^r *completa* determinata dal gruppo G_n, viene ***definita ugualmente a partire da uno qualunque dei suoi gruppi*** (proprietà transitiva dell'equivalenza).

È anche ovvio che: la serie completa si può definire come una serie lineare che non è contenuta in un'altra più ampia dello stesso ordine.

Ordunque, se è data sopra f una serie g_n^s che non sia completa, potremo costruire una g_n^{s+1} che la contiene, ed ancora, se questa non è completa, una g_n^{s+2}, ecc., fino a che giungeremo ad una g_n^r completa. Questo procedimento di completazione introduce successivamente degli elementi arbitrari nella scelta delle successive serie sopra nominate; ma il teorema precedente ci dice che la serie completa a cui si arriva è indipendente da tale arbitrarietà, venendo determinata dalla g_n^s, o anche solo da un gruppo qualsiasi di questa.

Nel seguito la serie lineare completa determinata da un gruppo G_n, o da una serie lineare g_n, di cui non importa indicare la dimensione, verrà designata con

$$|G_n| \quad \text{o} \quad |g_n|.$$

Al concetto di serie g_n^r completa risponde quello di curva C_n^r *normale*: dicesi normale una curva d'ordine n appartenente ad uno spazio di dimensione r (e non ad un S_{r-1}), la quale non si lasci dedurre come proiezione da una curva dello stesso ordine appartenente ad uno spazio di maggior dimensione.

Ricordando le osservazioni del precedente paragrafo, appare ovvio che:

La curva C_n^r, d'ordine n in S_r, è normale se la g_n^r segata sopra di essa dagli iperpiani è completa.

Quindi, tenuto conto dell'unicità della serie completa che contiene una serie data: *Una curva d'ordine n, di uno spazio qualsiasi, che non sia normale, si può dedurre come proiezione da una curva normale, che è ben definita a meno di una trasformazione proiettiva.*

Conviene rilevare che questo teorema è assai espressivo. Si abbia, per es., una curva piana non normale C_n, d'ordine n; in generale la C_n potrà ritenersi proiezione di diverse curve gobbe C_n', C_n'',.... dello spazio ordinario, e non vi è alcun motivo perchè queste siano proiettive fra loro. Però se C_n' e C_n'' non sono proiettive, esse non saranno normali, e ciascuna potrà dedursi come proiezione da una o più curve dello stesso ordine dello spazio S_4. Ora, così procedendo, si arriva, per vie diverse, a costruire curve normali di un certo spazio, aventi come proiezione la C_n: il nostro teorema dice che, qualunque sia la via seguita, si arriva sempre ad una medesima curva normale o a curve normali proiettive fra loro.

Ciò che si è detto per una C_n piana vale parimente per una curva gobba, di uno spazio qualsiasi: sempre accade che curve normali aventi una medesima proiezione dello stesso ordine sono fra loro proiettive.

Osservazione. Ad illustrare le cose precedenti giova recare un esempio in cui si vede una curva dedotta come proiezione di due altre (non normali) che non sono proiettive fra loro.

A tale scopo si considerino sopra una retta a due qualsiansi serie lineari generiche g_4^3: queste non saranno trasformabili proiettivamente l'una nell'altra, giacchè le proiettività della retta sono ∞^3, e quindi altrettante sono le g_4^3 proiettive ad una data, mentre tutte le g_4^3 sono ∞^4 (come i punti o gli iperpiani di S_4). Inoltre le due g_4^3 (essendo contenute nella g_4^4), avranno a comune una g_4^2.

Le serie date corrisponderanno a due quartiche gobbe razionali C_4' e C_4'' (aventi rispettivamente come sezioni piane i gruppi delle due g_4^3), dalle quali si deduce come proiezione una medesima quartica piana C_4, corrispondente alla g_4^2 comune alle due g_4^3. È chiaro che fra C_4' e C_4'' si ha una corrispondenza biunivoca Ω, dove si corrispondono i punti che danno origine ad un medesimo punto di C_4; dimostriamo che questa corrispondenza non è proiettiva. Infatti si consideri un gruppo G_4' segato su C_4' da un piano generico, e la sua immagine su C_4: si ha così una quaterna che non appartiene alla g_4^3 corrispondente alla C_4'', altrimenti le due g_4^3 da cui siamo partiti coinciderebbero; pertanto alla quaterna G_4' non può corrispondere su C_4' una quaterna di punti appartenenti ad un piano.

Ora si può dubitare che fra C_4' e C_4'' interceda una proiettività Π, diversa dalla corrispondenza Ω. Ma in tal caso la II, indurrebbe su a una corrispondenza biunivoca, cioè una proiettività, trasformante l'una nell'altra le due g_4^3 da cui siamo partiti.

Notizia storica. La considerazione fondamentale della serie completa determinata da uno dei suoi gruppi, compare in BRILL e NOETHER (1873) attraverso il così detto Teorema del resto (*Restsatz*) che porge la costruzione di codeste serie sopra una curva piana, mediante curve aggiunte (cfr. § 11 e § 15 e 16).

Ma il concetto della serie completa si rende indipendente da questa sua particolare costruzione in SEGRE e CASTELNUOVO (1888-90), i quali provano direttamente — ricorrendo a particolari modelli proiettivi — che « due serie lineari aventi a comune una serie dello stesso ordine sono contenute in una medesima serie più ampia ».

Nella dimostrazione di SEGRE ricorre la rigata che congiunge i punti omologhi di due curve, appartenenti a spazi indipendenti, rappresentative delle due serie date. La dimostrazione di CASTELNUOVO, secondo la semplificazione indicatane dal BERTINI, muove dalla costruzione della curva piana d'ordine n che si ottiene riferendo prospettivamente due g_n^1, aventi un G_n a comune, a due fasci di raggi, costruzione che viene poi estesa alle curve gobbe iperspaziali.

Queste particolari costruzioni si possono lasciare da parte, seguendo la via del testo, cioè mettendo esplicitamente in luce il significato algebrico delle serie lineari, come ha fatto ENRIQUES (1901); il che può dirsi implicito nella trattazione di RIEMANN.

6. Somma e sottrazione delle serie. — *Definizione.* Sopra una curva algebrica f, siano G_n e G_m due gruppi rispettivamente di n, m punti, il gruppo G_{n+m} costituito dal loro insieme si dice la loro *somma*, e si indica con

$$G_{n+m} = G_n + G_m .$$

Si dice anche che G_n è ottenuto sottraendo il G_m dal G_{n+m}, e si scrive:

$$G_n = G_{n+m} - G_m .$$

Si hanno i seguenti teoremi:

1) *Somme di gruppi equivalenti sono equivalenti,* cioè se

$$G_n \equiv G_n', \quad G_m \equiv G_m',$$

si deduce

$$G_n + G_m \equiv G_n' + G_m'.$$

Infatti esiste una funzione razionale t che ha come poli i punti di G_n e come zeri i punti di G_n', e una τ che ha come poli i punti di G_m e come zeri i punti di G_m'; quindi la funzione $t\tau$ ha come poli i punti di $G_n + G_m$ e come zeri i punti di $G_n' + G_m'$.

2) *Se da gruppi equivalenti si sottraggono gruppi equivalenti i resti sono equivalenti,* cioè se

$$G_n + G_m \equiv G_n' + G_m' \quad \text{e} \quad G_n \equiv G_n'$$

si deduce

$$G_m \equiv G_m'.$$

Invero esiste una funzione t che ha come poli i punti di $G_n + G_m$ e come zeri i punti di $G_n' + G_m'$, e similmente una τ che ha come poli i punti di G_n e come zeri i punti di G_n'; perciò la funzione $\frac{t}{\tau}$, ove si tolga l'indeterminazione apparente nei punti di G_n di G_n', avrà come poli i punti di G_m e come zeri i punti di G_m'.

Osservazione. Come corollario del teorema 1), se

$$G_n \equiv G_n',$$

si deduce

$$2G_n \equiv 2G_n', \quad 3G_n \equiv 3G_n' \text{ ecc.}$$

ma il passaggio inverso non è lecito in generale. Così, ad esempio, sopra una cubica piana di genere 1, si considerino i punti di contatto di due tangenti condotte da un punto O che appartenga alla curva: quei due punti, contati due volte, costituiscono due particolari coppie della g_2^1 segata dalle rette per O; ma i due punti non sono equivalenti, giacchè altrimenti apparterrebbero a una g_1^1 e la curva sarebbe razionale.

Appare pertanto che la relazione di equivalenza fra gruppi di punti su f gode delle medesime proprietà che la congruenza di numeri rispetto a un modulo: si vedrà in seguito come essa si esprima con una relazione di tal natura (Teorema di ABEL).

Siano g_n e g_m due serie lineari appartenenti ad una curva f, e si considerino i gruppi formati sommando un gruppo della prima ed uno della seconda:

$$G_{n+m} = G_n + G_m, \quad G'_{n+m} = G_n' + G_m', \ldots;$$

il G_{n+m} e il G'_{n+m}, essendo equivalenti, determineranno una g^1_{n+m}, che in generale non sarà formata da gruppi composti con quelli delle due serie; ma, in ogni caso, per il carattere transitivo dell'equivalenza, tutte le g^1_{n+m} analoghe saranno contenute in una serie lineare, la cui dimensione dipenderà dal numero dei gruppi linearmente indipendenti che si ottengono sommando un G_n e un G_m. Codesta serie g_{n+m}, se non è completa, sarà contenuta in una serie completa

$$|g_{n+m}| = |g_n + g_m|,$$

che si definirà come *serie* (completa) *somma delle due date*: questa serie riesce naturalmente determinata da un qualsiasi gruppo $G_n + G_m$.

Come caso particolare della somma di due serie, si può considerare la *serie doppia* di una data, e quindi anche le *serie multiple* secondo un intero qualunque.

Ora giova addurre un esempio effettivo della possibilità sopra enunciata che la *minima serie somma* g_{n+m} differisca dalla serie completa $|g_{n+m}|$ definita innanzi (e che, di solito, si considera nella teoria delle operazioni sopra le serie). A tale scopo si assuma la quartica f con un punto doppio O, la quale è di genere $p = 2$. Su questa f si hanno due g^1_3 segate da due fasci di rette i cui centri A e B siano due punti generici della curva; è anche ovvio che le due g^1_3 sono complete, perchè, se la f contenesse una g^2_3, si lascierebbe trasformare in una cubica, e però il suo genere varrebbe $p = 1$. Ebbene, la minima somma delle due g^1_3 è la serie g^3_6 segata dalle coniche per A e B; ma questa g^3_6 non è completa, essendo contenuta nella g^4_6 che viene segata sopra f dalle cubiche che passano per $O, A, B,$ e per altri due punti di f allineati con O.

Quanto alla dimensione della minima serie somma di due (o più) altre, è chiaro che questa non può scendere al di sotto della somma delle dimensioni degli addendi. Questo limite inferiore è anche effettivamente raggiunto. Così accade per il multiplo minimo di una g^1_n, che tuttavia non dà luogo in generale a una serie completa. Per es. sulla quartica f di genere 2, il doppio della g_2^1 segata dalle rette per O è la g_4^2 i cui gruppi sono composti di due coppie della g_2^1; e il triplo della g_2^1 è la g_6^3 formata da tutte le terne di coppie della g_2^1: codesta g_6^3 non è completa, essendo contenuta nella g_6^4 che viene segata sopra f dalle cubiche passanti doppiamente per O e tangenti ivi ai due rami della f, e nel sistema lineare delle dette cubiche è contenuto il sistema parimente lineare delle terne di rette per O.

La *sottrazione delle serie* si lascia definire come l'operazione inversa dell'addizione; e dà luogo alle seguenti osservazioni.

Si abbia una serie completa $|g_{n+m}|$, e pongasi che un suo gruppo G_{n+m} contenga parzialmente un G_n di una seconda serie g_n:

$$G_{n+m} = G_n + G_m.$$

Allora la serie completa $|g_{n+m}|$ determinata dal G_{n+m} sarà la somma delle serie complete determinate dal G_n e dal G_m.

Rileviamo gli aspetti più interessanti di questa proprietà, enunciando i seguenti teoremi:

1) *Se una serie completa* $|G_{n+m}|$ *contiene parzialmente un gruppo di una* g_n, *essa ne contiene tutti i gruppi,* o — come si dice — contiene la serie.

2) *Se una serie completa* $|g_{n+m}|$ *contiene parzialmente un gruppo* G_n *di una* g_n, *togliendo il* G_n *da tutti i gruppi della* $|g_{n+m}|$ *che lo contengono, si ottiene una serie residua* $|g_m|$ *completa, la quale non varia con la scelta del* G_n *entro la* g_n;

3) *E, a sua volta, la* $g_n|$ *è residua di ciascun gruppo della* g_m.

Queste proprietà costituiscono la prima parte di un teorema dato da Brill e Noëther sotto il nome di ***Restsatz* o *teorema del resto*** (cfr. § 11).

Osservazione. In rapporto alla sottrazione delle serie, si può estendere il concetto dell'*equivalenza* a *gruppi virtuali* definiti sopra una curva come « differenze di gruppi dati », indipendentemente dalla questione d'esistenza.

Sieno G_n, G_m', Γ_n, Γ_m' dei gruppi di punti comunque dati su f per cui

$$G_n + \Gamma_m' \equiv \Gamma_n + G_m';$$

in luogo di questa relazione potremo sempre considerare la equivalenza dei gruppi virtuali

$$G_n - G_m' \equiv \Gamma_n - \Gamma_m',$$

la quale si lascia definire in generale ricorrendo ad un qualsiasi gruppo ausiliario X (anche diverso da $G_m' + \Gamma_m'$) che sommato ai due gruppi virtuali dia luogo a gruppi effettivamente esistenti; infatti, se per un certo X, si ha

$$X + G_n - G_m' \equiv X + \Gamma - \Gamma_m',$$

la stessa relazione sussisterà per qualsiasi X che assicuri l'esistenza dei gruppi paragonati. I gruppi virtuali s'introducono qui — di fronte all'equivalenza — come i ***numeri negativi*** nella Teoria analitica di Peano, e così l'uso della relazione estesa viene giustificato ***a priori***.

7. **Curve dei primi generi.** — Innanzi di procedere nella teoria generale delle serie lineari sopra una curva di genere p, e sebbene ciò non sia strettamente necessario a questo oggetto, vogliamo esaminare particolarmente le curve dei primi generi $p = 0, 1$. (La Nota relativa ai casi $p = 2, \ldots$ costituirà soltanto una esercitazione per lo studioso).

Giova premettere una disuguaglianza, cui soddisfa la dimensione di una g_n^r sopra una curva di genere p qualsiasi: dimostriamo infatti che si ha

$$r \geq n - p,$$

mentre ricordiamo che si ha d'altra parte (§ 4)

$$r \leq n.$$

La disuguaglianza sopra enunciata si ottiene riferendoci ad una curva piana f d'ordine m con $\delta = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$ punti doppi, contando l'ordine e la dimensione delle serie segate su f dalle curve φ (dette *aggiunte*), che passano semplicemente per i suoi punti doppi. Questo computo permette di stabilire la disuguaglianza per le serie definite come sezioni di curve aggiunte; donde si passa poi al caso generale.

Or dunque si considerino le curve aggiunte φ_{m-3+h} d'ordine $m-3+h$ con $h \geq 0$: per $h=0$ si vede che il numero delle intersezioni di f con una φ, fuori dei punti doppi, è

$$m(m-3)-2\delta=2p-2.$$

Per $h>0$ le intersezioni di f con una φ, fuori dei punti doppi, si otterranno — anche senza eseguire il calcolo diretto — col sommare mh a quelle di una φ_{m-3}: così l'ordine della serie staccata dalle φ_{m-3+h} varrà

1) $$n=2p-2+mh;$$

questa formula vale anche per $p=0,1$, sebbene per $p=0$ non esistano φ_{m-3} aggiunte. Essa si estende d'altra parte ad h negativo, ogni qualvolta esistano le φ_{m-3-h}.

La dimensione r della serie g_n^r, segata su f dalle φ_{m-3+h}, si valuta subito nell'ipotesi che i punti doppi di f presentino per le φ condizioni indipendenti (sistema $|\varphi_{m-3+h}|$ non sovrabbondante), ciò che accade certo per h abbastanza grande, e — in ogni caso — si ottiene così un limite inferiore della dimensione richiesta.

Ora avremo, supponendo h assai grande (ed in ispecie $h \geq 3$):

2) $$r=\frac{(m-3+h)(m+h)}{2}-\delta-\frac{h(h-3)}{2}-1,$$

giacchè ogni gruppo intersezione di f con una data φ_{m-3+h} appartiene ad un sistema di tali curve con la dimensione $\frac{(h-3)h}{2}+1$, determinato dalla suddetta φ_{m-3+h} e dalle curve spezzate nella f e in una curva d'ordine $h-3$.

Dalla formula 2) posto

$$\delta=\frac{m(m-3)}{2}-p+1$$

si ricava

3) $$r=p-2+mh,$$

d'onde, per la 1),

4) $$r=n-p.$$

Se la serie g_n^r segata su f dalle φ_{m-3+h} non fosse completa [1], si avrà in ogni caso

5) $$r \geq n - p.$$

Ora questa diseguaglianza si estende ad una qualsiasi g_n^r completa segata sopra f.

Anzitutto essa viene verificata per la serie che si ottenga imponendo alle φ_{m-3+h} di passare per un certo numero n' di punti fissi presi su f, poichè togliendo codesti punti l'ordine della serie diminuisce di n' e la sua dimensione diminuisce di n' al più.

Ora, se è data comunque sopra f una g_n^r, si può sempre scegliere un h così alto che esista una φ_{m-3+h} passante per un G_n della g_n^r, la quale segherà altrove f in un certo numero n' di punti formanti un $G_{n'}$; pertanto la serie segata su f dalle φ_{m-3+h} per $G_{n'}$, riuscirà contenuta nella serie completa g_n^r determinata dal nostro G_n, avendo una dimensione $\leq r$. Si deduce che: *per ogni g_n^r completa appartenente ad una curva f di genere p si ha sempre $r \geq n - p$.*

Osservazione. Giova rilevare che per la serie g_n^r segata su f dalle aggiunte φ_{m-3+h}, non sussiste certo l'uguaglianza $r = n - p$, quando sia $h = 0$, o *a fortiori* per $h < 0$. Infatti la dimensione della serie g_{2p-2}^r, segata dalle φ_{m-3} risulta

$$r \geq \frac{(m-3)m}{2} - \delta = p - 1.$$

Il teorema che una g_n^r appartenente ad una curva di genere p possiede una dimensione $r \geq n - p$, li lascia precisare facilmente per i più piccoli valori di p.

Anzitutto se $p = 0$, essendo

$$n \geq r, \quad r \geq n - p,$$

si deduce

$$r = n,$$

cioè « ogni serie lineare completa è una g_n^n ». Da ciò segue in ispecie che ogni curva d'ordine n e di genere 0 è proiezione di una curva normale $C_n{}^n$ di uno spazio S_n.

[1] Di fatto la serie è completa: questo teorema fondamentale resulterà dimostrato nel § 11 e — in modo più diretto — nel § 16.

Ora una tale C_n^n viene proiettata da $n-1$ dei suoi punti sopra una retta, e perciò è razionale. La dimostrazione di ciò si ha ugualmente, in forma non proiettiva, partendo da una g_n^n qualsiasi ($n > 0$) di cui si fissino $n-1$ punti, in guisa da ottenere una residua g_1^1, la quale permette di far corrispondere la curva data, punto per punto, ad una retta (cfr. il § 2). Così viene dimostrato il

Teorema di CLEBSCH: *Le curve di genere $p=0$ sono razionali.*

Osservazione. La dimostrazione originale del teorema si riduce alla precedente, ove si ricordi come è stata ottenuta la diseguaglianza $r \geq n-p$. Presa una curva piana f d'ordine n con $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi, si considerino le curve aggiunte φ_{n-2} d'ordine $n-2$ passanti per $n-3$ punti fissi di f; si ha così un fascio di curve secanti la f in *un* punto variabile che viene a corrispondere biunivocamente al parametro del fascio.

Ora vale la pena di rilevare che il teorema di CLEBSCH conduce subito al

Teorema di LÜROTH. *Se le coordinate dei punti d'una curva algebrica, $f(xy)=0$, si lasciano esprimere razionalmente per un parametro t, mediante formule*

$$x=\varphi(t), \quad y=f(t)$$

che non sieno univocamente invertibili, la f è razionale cioè le coordinate dei suoi punti si possono esprimere mediante funzioni razionali invertibili di un altro parametro τ, che è — a sua volta — funzione razionale di t.

Nell'ipotesi dell'enunciato, fra la retta su cui è disteso il parametro t e la curva f intercede una corrispondenza $[n, 1]$, con $n > 1$, e i gruppi di punti della retta che corrispondono ai punti di f, formano una involuzione γ_n^1: si tratta di provare che la γ_n^1 è una serie lineare g_n^1. La dimostrazione di ciò è stata fornita nel L. 2°, § 3, dove appunto il teorema di LÜROTH fu dato come proprietà caratteristica delle g_n^1 sopra la retta. Ma qui otteniamo una nuova dimostrazione del resultato in parola, calcolando il genere p di f, sulla base della conoscenza del numero dei punti doppi della γ_n^1, che è dato dalle coincidenze di una corrispondenza $[n-1, n-1]$, e però vale certo $2n-2$. Infatti se la f è d'ordine m (con punti multipli a rami lineari) il numero delle tangenti ad esse per un punto generico O del piano vale $2m+2p-2$, e ciascuna tangente porge un punto doppio della g_m^1 segata su f dalle rette per O, cui risponde sulla retta (della t) un gruppo G_n di n punti doppi. D'altronde alla g_m^1 segata su f dalle rette per O corrisponderà sulla retta nominata una g_{mn}^1 composta colla γ_n^1, la quale possiederà $2mn-2$ punti doppi, e precisamente $2n-2$ punti doppi per la γ_n^1 e $2m+2p-2$ gruppi G_n. Si deduce

$$(2m+2p-2)n+2n-2=2mn-2,$$

ossia

$$p=0. \qquad \text{c. d. d.}$$

Nota. Tra le curve razionali si trovano in particolare *le $f(xy)=0$ che ammettono una rappresentazione parametrica mediante polinomi*:

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t). \tag{6}$$

Queste curve *sono caratterizzate dalla condizione di possedere un solo punto all'infinito origine di un unico ramo* lineare o superlineare [1].

Anzitutto è chiaro che la curva f rappresentata dalla 6) possiede un solo punto all'infinito, corrispondente a $t=\infty$, e che la f passa per questo punto improprio con un solo ramo, lineare o superlineare.

Reciprocamente se una curva f di genere 0 possiede un solo punto all'infinito O, per cui passa con un solo ramo, quando si rappresenti f sopra una retta, ad O corrisponderà un sol punto O' che — mediante una sostituzione lineare — potrà portarsi all'infinito. Allora, riferendosi alla rappresentazione parametrica della f,

$$x=\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \quad y=\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)},$$

si vede che non dovranno esservi radici (finite) per $\varphi_3(t)=0$, riducendosi dunque φ_3 ad una costante; in altre parole si avrà

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t). \qquad \text{c. d. d.}$$

(1) Cfr. F. ENRIQUES, « Rendiconti dell'Acc. di Bologna », maggio 1922

Il teorema stabilito riconduce la *classificazione* delle curve $f(xy)=0$, d'ordine n, rappresentabili con polinomi, all'*analisi delle singolarità* dei rami superlineari: si avrà all'infinito un punto i-plo $(i<n)$, origine di un ramo d'ordine i e di classe $n-i$, essendo tangente la retta all'infinito. Quindi, per ciascun valore di i, saranno possibili diverse singolarità, assorbenti un certo numero $p-p'$ $(p'\leq 0)$ di punti doppi; la curva f dovrà possedere inoltre p' punti doppi propri, o singolarità equivalenti.

Lo sviluppo di questa analisi costituirà un ottimo esercizio per lo studioso delle teorie contenute nel libro 4°. Qui ci limitiamo al caso delle curve d'ordine $n=3$, 4.

Per $n=3$ le cubiche piane rappresentabili mediante due polinomi, si dividono in 2 tipi:

1) cubiche con un punto doppio proprio e una tangente di flesso all'infinito;

2) cubiche con una tangente cuspidale all'infinito.

Per $n=4$ si hanno i seguenti tipi:

1) quartiche con tre punti doppi (o con un punto triplo) propri e con tangente quadripunta all'infinito;

2) quartiche con un punto doppio proprio e con una cuspide di seconda specie all'infinito, per cui la retta all'infinito è tangente;

3) quartiche con una cuspide di terza specie all'infinito, dove pure la retta all'infinito è tangente;

4) un ramo cuspidale del terz'ordine con tangente all'infinito.

Sia ora $p=1$. La dimensione di una serie completa g_n^r vale

$$r\geq n-1,$$

e quindi $r=n-1$, oppure $r=n$; ma l'esistenza di una g_n^n (per $n>0$) porta che la curva sia razionale e quindi di genere $p=0$; si deduce

$$r=n-1.$$

Ogni gruppo di n punti sopra una *curva di genere* $p=1$ appartiene ad una *serie completa* g_n^{n-1}; ossia ogni curva d'ordine n e di genere 1 diventa normale in uno spazio S_{n-1}.

Partendo da una terna di punti si costruisce una g_3^2, e perciò:

ogni curva di genere 1 si può trasformare birazionalmente in una cubica piana, la quale, per essere $p=1$, sarà priva di punti doppi; questa si dedurrà anche da una qualsiasi curva normale C_n^{n-1} $(n > 3)$, proiettando da $n-3$ punti (semplici).

Risulta anche di qui l' inversione del teorema precedente: *una curva contenente una g_n^{n-1} completa per $n \geq 3$ è di genere 1.* Infatti codesta curva si lascia trasformare in una cubica piana (normale). La proprietà precedente non si estende ad $n=2$, come appare già dall' esempio di una quartica con un punto doppio, dove le rette per questo segano una g_2^1.

Osservazione. Vale la pena di osservare che varie proprietà della cubica piana stabilite nel L. 2°, § 22, appaiono ora come semplici corollari del teorema generale relativo alla dimensione delle serie complete appartenenti alla curva di genere 1. Così, per es., la proprietà che « i 9 punti base di un fascio di cubiche presentano soltanto 8 condizioni indipendenti alle cubiche del piano che debbano contenerli », traduce la proprietà che i 9 punti considerati sopra una delle due cubiche appartengono ad una g_9^8. Analogamente si dica per il gruppo G_{3n}, segato sopra la cubica da una curva qualsiasi di ordine $n > 3$.

Parimente la proprietà che « coppie di punti di una cubica allineati con un punto fisso O, vengono proiettate da un punto della curva in altre coppie allineate con un punto O' » risulta da ciò che la g_2^1 segata dalle rette per O si trasforma per proiezione in un' altra g_2^1, e che questa g_2^1, essendo completa, è determinata da una sua coppia $A'B'$, e però viene segata sulla cubica dalle rette che passano per il punto O' ulteriormente segato dalla retta $A'B'$.

Nota. Sulle *curve di genere* $p=2$ l' uguaglianza $r=n-p$ fra i caratteri di una g_n^r completa, non sussiste più incondizionatamente. Si ha infatti un' eccezione corrispondente alla g_2^1 (canonica) che sopra la curva — supposta d' ordine n — segano le aggiunte φ_{m-3}; e — in accordo coi teoremi generali che stabiliremo più avanti — questa eccezione è unica.

Ma poichè anche questo caso si lascia trattare direttamente, ci fermeremo un momento ad illuminarlo: chi non ami soffermarsi può passare al teorema di RIEMANN e ROCH, le cui applicazioni alle curve iperellittiche (§ 12) comprendono le curve di genere 2.

Or dunque abbiamo, per una g_n^r completa su una curva di genere $p=2$,

$$r \geq n-2.$$

Ma per $n>2$ non può essere $r=n-1$, nè $r=n$, giacchè se ne dedurrebbe $p=1$ o rispettivamente $p=0$. Si conclude dunque che:

Sopra una *curva di genere* $p=2$ *ogni gruppo di* $n>2$ *punti appartiene ad una serie completa* g_n^{n-2}.

Per $n=2$ si ha l'eccezione già avvertita della g_2^1 che, sopra una quartica piana dotata di un punto doppio O, viene segata dalle rette per O. Ma è interessante notare che sopra una curva di genere 2 non si possono avere due g_2^1; infatti:

Una curva f *contenente due* g_2^1 *è di genere* 1, salvo il caso in cui si riduca al genere 0, le due serie essendo incomplete e avendo una coppia a comune.

Per dimostrare questo teorema conviene trasformare la data curva, f, in un'altra, piana, su cui le due g_2^1 vengano segate dalle rette di due fasci, A e B. A tale scopo basterà riferire proiettivamente ciascuna delle due g_2^1 al fascio corrispondente; allora ogni punto P di f, appartenendo a una coppia della prima g_2^1 e ad una coppia dell'altra, definisce due rette dei fasci A e B, che si segano in un punto P', il quale descrive la curva trasformata di f. Se le due g_2^1 sono date da

$$t=\frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad \tau=\frac{\psi_1}{\psi_0},$$

e i punti A e B sono i punti all'infinito degli assi, la trasformazione richiesta si ottiene ponendo

$$X=\frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad Y=\frac{\psi_1}{\psi_0}.$$

Ora la curva f', trasformata di f, venendo segata in due punti dalle rette per A e dalle rette per B, sarà — in generale — una curva del quart'ordine avente A e B come punti doppi, dalla quale potrà staccarsi una o due volte la retta AB.

Infatti, se m è l'ordine della f', A e B sono punti $(m-2)$-pli e, avuto riguardo alle intersezioni della retta AB, si ha

$$(m-2)+(m-2) \leq m,$$

da cui

$$m \leq 4,$$

cioè

$$\begin{array}{ll} m=4 & A \text{ e } B \text{ doppi,} \\ m=3 & A \text{ e } B \text{ semplici,} \\ m=2 & A \text{ e } B \text{ esterni ad } f'. \end{array}$$

Pertanto se la f' è una quartica con due punti doppi A e B, il suo genere sarà $p=1$, riducendosi a $p=0$ se la curva ha un punto doppio ulteriore che corrisponde a una coppia comune alle due g_2^1 date su f. È ovvio che in tal caso le due g_2^1 sono contenute in una g_2^2 completa. Alla stessa conclusione si arriva se f' è una cubica. E, finalmente, se essa è una conica (non passante per A e B), si trova $p=0$, e si ha pure una coppia comune alle due g_2^1, sopra la retta AB.

(Si può caratterizzare il caso particolare in cui la f' — curva immagine di una corrispondenza [2, 2] fra forme di prima specie — si riduce ad una cubica o ad una conica, dicendo che esso è il caso della *posizione prospettiva* dei due fasci: infatti la f' sarà una cubica quando il raggio AB comune ai due fasci risponda a due coppie delle g_2^1, date su f, che abbiano un punto in comune; se poi la f' si riduce ad una conica, quelle due coppie, corrispondenti al raggio AB, coincidono. Cfr. L. 1°, § 17).

Dopo ciò consideriamo sopra una curva f di genere $p=2$ una quaterna di punti. Essa definirà una g_4^2 mediante la quale la f si lascierà trasformare in una curva piana normale d'ordine 4, che — per essere $p=2$ — dovrà avere un punto doppio. Tuttavia si può dubitare che questa trasformata f' si riduca ad una conica doppia: ciò avverrà se la g_4^1 è composta con le coppie di una g_2^1, corrispondenti ai punti di una conica. Ma, siccome la f non può contenere che una sola g_2^1, se si prende una quaterna che non sia composta di due coppie di questa g_2^1, si otterrà certo una g_4^2 semplice, e così risulterà dimostrato il

Teorema: *Ogni curva di genere $p=2$ si può trasformare in una quartica piana con un punto doppio.*

Non procederemo più oltre in quest'ordine di considerazioni, giacchè il problema della dimensione delle serie complete su una curva di genere p riceverà una soluzione generale mediante gli sviluppi del § 11. Dei quali lo studioso sarà indotto a meglio comprendere il valore, ove gli piaccia adoperarsi intorno ai seguenti:

Esercizi.

I) Dimostrare che: *una curva contenente una g_n^{n-2} completa, per $n > 4$, è di genere $p = 2$.*

Occorre dimostrare che $p < 3$, e ci si riconduce al caso di una quintica gobba $C_5{}^3$ normale nello spazio ordinario. Si può arrivare allo scopo richiamando i risultati del L. 3°, § 43 (cfr. in ispecie vol. II, pg. 301).

Si può anche porgere la dimostrazione richiesta facendo vedere che la $C_5{}^3$ è sezione di una quadrica e di una superficie cubica, onde da un suo punto viene proiettata in una quartica dotata di punto doppio. Per provare che $C_5{}^3$ appartiene ad una quadrica, si considererà la serie g_{10}^7 segata su di essa dalle ∞^9 quadriche dello spazio ecc.

II). Dimostrare che: *Sopra una curva di genere $p = 3$, ogni gruppo di $n > 4$ punti appartiene ad una g_n^{n-3} completa.*

Dedurne la trasformazione delle curve di genere $p = 3$ in quintiche piane f_5.

Esaminare le singolarità di tali f_5.

Indicare le eccezioni al teorema precedente per $n < 4$.

III) Dimostrare che: *Se una curva contiene una g_n^{n-3}, per $n > 6$, il suo genere vale $p = 3$* (per $n = 6$ il teorema non è vero, come appare dall'esistenza della sestica di S_3 intersezione di una quadrica con una cubica, sulla quale i piani segano una g_6^3).

Indicheremo rapidamente la traccia della dimostrazione: si consideri una curva normale $C_7{}^4$ di S_4, e si provi che per essa passano tre quadriche linearmente indipendenti secantisi ulteriormente in una retta, trisecante di $C_7{}^4$. Da questa trisecante la $C_7{}^4$ viene proiettata in una quartica piana ($p = 3$), che tuttavia può ridursi ad una conica doppia; in quest'ultimo caso si avrà sulla $C_7{}^4$ una g_2^1 di cui è facile trovare che possiede $2 + 2p = 8$ punti doppi, onde $p = 3$.

In ogni caso le considerazioni che abbiamo sviluppato innanzi persuadono facilmente che la trattazione diretta del problema della dimensione di una serie completa sopra una curva, diventa rapidamente complicata col crescere dei valori del genere p. Ma a tale problema forniranno una risposta generale gli sviluppi dei seguenti paragrafi.

8. **Le serie jacobiane e la serie canonica.** — Dopo la digressione relativa alle curve di genere 0, 1,...., riprendiamo la teoria generale delle serie lineari appartenenti ad una curva di genere p qualsiasi. Qui vogliamo indicare un'operazione che — al pari della somma o della sottrazione — permette di costruire nuove serie lineari a partire da serie date. Otterremo così (per $p > 1$) una successione di serie covarianti di una g_n data, e riusciremo per sottrazione a definire una serie g_{2p-2} che, riuscendo indipendente dalla scelta della nominata g_n, ci fornirà un invariante caratteristico della curva, considerata di fronte alle trasformazioni birazionali.

Data una g_n^1 sopra f, esistono, in generale, gruppi di questa per cui due (o più) punti vengono a coincidere in un *punto doppio*: l'insieme dei punti doppi della g_n^1 costituisce il suo ***gruppo jacobiano***. Se la f è piana, e la g_n^1 è segata su di essa da un fascio di curve, il gruppo jacobiano è formato dai punti di contatto delle curve del fascio tangenti ad f. Così, sopra una f d'ordine n con δ nodi, per cui $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$, la g_n^1 segata dal fascio delle rette passanti per un punto generico, O, possiede $2n + 2p - 2 = \frac{n(n-1)}{2} - 2\delta$ punti doppi, formanti il suo gruppo jacobiano; un nodo, P, di f non ne fa parte, poichè per il gruppo segato dalla retta PO i due punti che si sovrappongono in P appartengono a rami diversi della curva, onde si ha soltanto una coincidenza apparente di essi, relativa alla geometria del piano e non alla geometria sopra la curva.

Se la g_n^1 data su f possiede un punto fisso O, questo appartiene al gruppo jacobiano, poichè si può imporre a un gruppo della serie di contenere O una seconda volta. Ma, quando si consideri una g_n^1 con punti fissi come limite di una serie senza punti fissi, giova determinare quante volte un punto fisso, O, debbasi contare entro il gruppo jacobiano. Questo computo è dato dall'equazione stessa che determina su f il gruppo jacobiano, e che scriveremo fra poco. Senza fare uso di tale equazione, si può arrivare al resultato riconducendoci al caso delle g_n^1 sopra la retta, trattato nel L. 2°, § 5 (Vol. 1°) pag. 178), e ciò in base all'osservazione seguente:

Le proprietà della geometria sopra la curva (relative a molteplicità di intersezione ecc.) *aventi carattere differenziale*, nell'intorno di un punto, *si riducono ad analoghe proprietà della geometria sopra una retta,* potendosi ottenere come se la curva proposta sia razionale.

Infatti basta sostituire alla curva data una parabola osculatrice al ramo che passa per il punto, di un ordine abbastanza elevato. (Nel caso di curve con rami non lineari si sostituirà una iperparabola osculatrice, che è ugualmente razionale).

In virtù dell'osservazione precedente, possiamo affermare che: *un punto fisso per una g_n^1 assorbe due punti del gruppo jacobiano,* e così conta in generale per due punti di esso.

In modo analogo si riconosce che: *un punto i-plo per un gruppo della g_n^1 conta per $i - 1$ punti del gruppo jacobiano.*

Ora dimostriamo che:

I gruppi jacobiani delle g_n^1 appartenenti a una medesima g_n^r $(r > 1)$ sono equivalenti.

Basta dimostrare il teorema per due g_n^1 aventi un gruppo a comune e perciò appartenenti a una medesima g_n^2, giacchè, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, date nella g_n^r due g_n^1 qualsiansi, ci si riduce al caso precedente, costruendo la g_n^1 determinata da un gruppo della prima e da un gruppo della seconda.

Ora, si consideri entro una g_n^2 il fascio delle g_n^1 aventi a comune uno stesso G_n: i gruppi jacobiani di queste, contenenti un certo numero m di punti, formeranno una *involuzione razionale,* cioè una serie lineare g_m^1. Che la serie dei G_m anzidetti sia razionale, risulta da ciò che codesti G_m corrispondono biunivocamente alle g_n^1 del nostro fascio, pertanto (§ 2) basta provare che alla serie di essi compete il carattere involutorio, cioè che un punto generico, P, di f determina un G_m. Ma ciò risulta evidente per il fatto che P, contato due volte, determina *un* gruppo della g_n^2 il quale appartiene ad *una* g_n^1 del nostro fascio.

In base al teorema precedente i *gruppi jacobiani* delle g_n^1 contenute in una g_n^r appartengono ad una medesima serie lineare *completa,* che si dirà la *serie jacobiana* della data: se una serie lineare (completa) è designata con $|a|$, la sua jacobiana si designerà con $|a_j|$.

Sussiste la seguente

Proprietà fondamentale delle serie jacobiane: la jacobiana della somma di due serie, si ottiene sommando la jacobiana dell'una al doppio dell'altra. In simboli:

$$|(a+b)_j| = |a_j + 2b|,$$

dove si suppone che la dimensione della serie $|a|$ sia $r \geq 1$.

Siano n, m, gli ordini di $|a|$ e $|b|$ rispettivamente: sommando ad una g_n^1 contenuta in $|a|$ un gruppo G_m della $|b|$, si ottiene una g_{n+m}^1 con m punti fissi contenuta nella $|a+b|$, e il gruppo jacobiano della g_{n+m}^1 consta del gruppo jacobiano della g_n^1 aumentato di $2G_m$; da ciò risulta il teorema.

Nell'ipotesi che le due serie $|a|$ e $|b|$ siano ambedue di dimensione non nulla, la proprietà precedente dà luogo alla relazione espressiva

$$|a_j + 2b| = |b_j + 2a|,$$

dalla quale si deduce formalmente

$$|a_j - 2a| = |b_j - 2b|.$$

Questa uguaglianza assume significato quando la serie $|a_j|$ contenga $|2a|$, nel qual caso avremo dunque:

Se la jacobiana $|a_j|$ di una serie $|a|$ contiene il doppio di questa, $|2a|$, altrettanto accade per la jacobiana di una qualunque altra serie b_j rispetto a $2b$, e la serie differenza $|a_j - 2a|$ riesce definita dalla curva f che la contiene, dipendendo solo da questa curva e non dalla scelta della serie $|a|$ che serve a costruirla: questa serie

$$c = |a_j - 2a| = |b_j - 2b| \dots.$$

riceve il nome di *serie canonica della curva f.*

In ordine all'esistenza della serie canonica sopra una curva di genere p, è facile vedere che « la serie jacobiana $|a_j|$ contiene sempre $|2a|$ per $p > 0$ ». A tal uopo è lecito riferirci alla jacobiana della serie g_n determinata sulla f dalle rette del piano. Allora il gruppo jacobiano della g_n^1 segata da un fascio di rette di centro O, non è altro che l'intersezione (fuori dei punti doppi = nodi) della polare di O [1]; per conseguenza alla serie jacobiana completa della nostra g_n apparterranno i gruppi sezioni delle curve φ_{n-1}, d'ordine $n-1$, passanti per i punti doppi di f, cioè aggiunte ad f. Pertanto riesce chiaro che questa serie jacobiana contiene $|2g_n|$ se esistono curve φ_{n-3}, d'ordine $n-3$, aggiunte ad f, le quali sommate a due rette formano appunto delle φ_{n-1}. Ora, per $p>0$, esistono almeno ∞^{p-1} aggiunte φ_{n-3}, e quindi si conclude che *una curva di genere $p>0$ possiede una serie canonica di dimensione $r \geq p-1$.* Più tardi dimostreremo che la dimensione della serie canonica vale precisamente $p-1$, la serie completa venendo segata dal sistema delle φ_{n-3}, e questo sistema non essendo mai sovrabbondante (per una curva irriducibile).

Per $p=1$, riferendosi alla cubica e alla serie a segata su questa dalle rette, si vede che $|a_j|=|2a|$, e quindi la serie canonica si riduce ad una g_0^0; se si prende come modello una curva di genere 1 d'ordine $n>3$, si ha *una* φ_{n-3} aggiunta che non sega la curva fuori dei punti doppi: si veda per es. la quartica piana con due punti doppi A e B dove si ha come retta aggiunta la AB.

La serie canonica manca in senso assoluto per $p=0$, nel quale caso si potrebbe dire che diventa negativa, venendo sostituita dalla *serie anticanonica* $2a-a_j=g_2^2$.

La definizione che abbiamo pôrta della serie canonica racchiude un *teorema d'invarianza per trasformazioni birazionali della curva f,* di cui vogliamo mettere in luce il contenuto. A tal uopo si osservi che: assumendo come serie a quella determinata sopra f dalle rette del suo piano (ovvero dai piani o dagli iperpiani dello S_r, se si tratta di una curva gobba), la serie $|a_j|$ si può ritenere come *covariante* di f, rispetto alle trasformazioni proiettive. Ora la serie $|a_j-2a|$, riuscendo indipendente da a, sarà invariante per trasformazioni birazionali di f, mutandosi nella serie analoga (b_j-2b)

[1] Di qui si può ricavare una dimostrazione proiettiva del teorema stabilito innanzi che « i gruppi jacobiani delle g_n^1 appartenenti ad una g_n^2 sono equivalenti »; basta riferirsi alla curva piana trasformata, su cui la g_n^2 (supposta semplice) viene segata dalle rette del piano, e notare che le polari di questa curva formano una rete.

per quella trasformazione di f in f' che sostituisce alla serie a segata dalle rette su f, la serie b segata dalle rette su f'.

Ma poichè si è visto sopra che la serie canonica di una curva piana f, d'ordine n (dotata soltanto di punti doppi) viene determinata dalle curve aggiunte φ_{n-3} d'ordine $n-3$, così otteniamo il

Teorema. *Se una curva piana f d'ordine n viene trasformata birazionalmente in un' altra curva f' d' ordine m, la serie determinata sulla prima dalle curve aggiunte d' ordine $n-3$, si trasforma nella analoga serie determinata sulla seconda dalle curve aggiunte d' ordine $m-3$.*

A questo punto non siamo ancora autorizzati ad affermare che un gruppo di punti comune ad f e ad una φ_{n-3} si trasformi proprio in un gruppo sezione di f' con una φ_{m-3}; ma questa affermazione risulterà dimostrata appena si sia riconosciuto che le φ_{n-3} segano sopra f la serie canonica *completa* (cfr. § 11).

L' invarianza della serie canonica, dimostrata dalla proprietà fondamentale delle serie jacobiane, porta anche l' invazianza dei caratteri ad essa relativi, cioè dell'ordine e della dimensione: si è condotti così a una nuova dimostrazione dell' *invarianza del genere*.

Prescindendo dalla dimensione (che — come abbiamo detto — troveremo essere $p-1$), vediamo che l'ordine della serie canonica è precisamente $2p-2$: si può calcolarlo valutando il numero dei punti doppi della g_n^1 segata da un fascio di rette sopra una f dotata di soli nodi, o — ciò che è lo stesso — numerando le intersezioni della f con una φ_{n-3} aggiunta, fuori dei punti doppi [1].

Una volta calcolato l' ordine (virtuale) della serie canonica $|a_j - 2a|$, la proprietà fondamentale della serie jacobiana ci permette di affermare (senza indugiarsi ad esaminare le questioni di singolarità ecc.) che *il numero dei punti doppi di una g_n^1 vale sempre $2n+2p-2$*, ricordando che un punto fisso della serie conta per 2 punti doppi, e un punto che sia i-plo per un gruppo della g_n^1 conta per $i-1$.

[1] Si riconoscerà più avanti (§ 33 e 34) che non esistono altri caratteri numerici invarianti indipendenti dal genere, poichè le curve di genere p formano un' unica famiglia continua, dipendente da un numero finito di parametri.

Nota. Giova rilevare alcuni aspetti proiettivi dei resultati conseguiti innanzi, mettendoli a confronto con ciò che sappiamo sul comportamento delle polari nei punti singolari di una curva f.

Pongasi che la f, d' ordine n, possegga non più soltanto dei nodi, ma dei punti multipli qualsiansi: si vuol determinare precisamente il gruppo jacobiano della g_n^1 segata su f dalle rette di un fascio.

Il caso che i punti multipli di f siano a tangenti distinte, o anche il caso dei punti multipli infinitamente vicini con rami lineari, non dà luogo ad alcuna difficoltà, in quanto le polari hanno precisamente la molteplicità $r-1$ in ciascun punto r-plo. Allora la serie jacobiana della $a = g_n^2$, segata dalle rette, viene determinata dalle curve d' ordine $n-1$ *aggiunte* ad f, dando il nome di « aggiunte » alle curve che passano $r-1$ volte per ogni punto r-plo di f; s' intende che le intersezioni di f con una generica φ_{n-1} aggiunta sono quelle che cadono *fuori* dei punti multipli, ogni punto r-plo assorbendo $r(r-1)$ intersezioni.

Ma pongasi invece che la f possegga delle cuspidi o — in generale — dei rami cuspidali d' ordine superiore, i quali danno luogo a contatti fissi delle polari.

In questo caso sappiamo [1] che le tangenti proprie condotte ad f per un punto esterno sono $2n + 2p - 2 - k$ con $k > 0$, a queste tangenti dovendosi aggiungere le rette che vanno alle cuspidi, le quali costituiscono tangenti a rami della curva. Ciò si deve interpretare nel senso che la serie lineare ∞^2 costituita dai gruppi jacobiani delle g_n^1 segate dai fasci di rette, contiene dei punti fissi che cadono nelle cuspidi.

Ci si può render conto della circostanza che dà origine a questo fatto, ponendosi dal punto di vista della geometria sopra una curva. Un nodo della curva f corrisponde ad una ***coppia neutra*** di punti, presentante una sola condizione ai gruppi della g_n^2, segata dalle rette, che debbano contenerla; e se il nodo si riduce ad una cuspide, si ottiene una coppia neutra costituita di due punti infinitamente vicini, e perciò un punto che è doppio per un gruppo di ogni g_n^1 contenuta nella g_n^2: così dunque il punto fa parte dei gruppi jacobiani

[1] L. 2°, § 23, vol. I, pag. 280; L. 3°, § 17; L. 4°, § 16, vol. II, pagg. 127, 421.

di tutte le g_n^1. In modo analogo l'origine di un ramo cuspidale d'ordine ν verrà a contare come $\nu - 1$ punti fissi infinitamente vicini per gli stessi gruppi jacobiani.

Le precedenti osservazioni sono d'accordo con ciò che si è detto intorno al comportamento delle polari nei punti singolari di una curva. Pertanto, quando si procede a costruire la serie jacobiana della g_n^2 segata dalle rette del piano sopra una f con singolarità qualsiansi, si debbono aggiungere alle intersezioni di f con le polari, fuori dei punti multipli, punti fissi che cadono nelle cuspidi, contando $\nu - 1$ volte ogni cuspide d'ordine ν; così si avranno ancora a considerare le curve d'ordine $n - 1$, aggiunte ad f, cioè soggette alla condizione di passare $r - 1$ volte per i punti r-pli (distinti o infinitamente vicini) di f, come se le singolarità di f fossero tutte formate di rami lineari. In tal guisa il teorema d'invarianza della serie segata dalle curve aggiunte d'ordine $n - 3$, si estende al caso in cui la f sia dotata di singolarità qualunque.

Notizia storica. L'invarianza per trasformazioni birazionali della serie (canonica) segata sopra una curva piana f, d'ordine n, dalle curve aggiunte φ_{n-3}, è contenuta implicitamente nella costruzione degli integrali di differenziali algebrici a cui danno luogo queste φ_{n-3}, e precisamente nel teorema che questi integrali resultano privi di singolarità sopra la superficie di Riemann, cioè sono *integrali di prima specie* (RIEMANN, 1857). Tuttavia il rilievo esplicito di codesta invarianza non sembra esser stato fatto prima di BRILL e NOETHER (1873) (1) o, almeno, non risalire oltre una Nota sulla teoria generale degli enti algebrici di NOETHER del 1869 (2).

Per BRILL e NOETHER l'anzidetta invarianza risulta stabilita indirettamente dal *teorema di* RIEMANN-ROCH (cfr. §§ 11 e 17) per cui la serie canonica contiene entro di sè tutte le g_n^r soddisfacenti alla diseguaglianza $r > n - p$. Sotto una forma poco diversa (unicità della g_{p-2}^{p-1} sopra la curva di genere p) la detta dimostrazione viene adottata da SEGRE e BERTINI nelle loro monografie relative alla geometria sopra una curva, inserite negli *Annali di Matematica* del 1894. La dimostrazione diretta che si basa sulla serie covariante che contiene i gruppi

(1) Math. Annalen Bd. 7.
(2) Math. Annalen Bd. 2.

jacobiani di una g_n^r appartiene ad ENRIQUES, che l'introdusse in un corso di lezioni tenuto all'Università di Bologna l'anno 1897-98 (cfr. il Programma pubblicato nel « Bollettino di Bibliografia e Storia delle scienze matematiche », aprile 1899, e la Nota sulle superficie negli Atti dell'Acc. di Torino 1901) e fu poi adottata da SEVERI nelle sue « Lezioni » di Padova del 1908. Sulla stessa dimostrazione è ritornato ENRIQUES in una Memoria dell'Acc. di Bologna del 1914, ove si trovano gli sviluppi analitici, e finalmente in una Nota dei Lincei del 1° giugno 1919 che indica le estensioni spiegate — insieme ai detti sviluppi — nel paragrafo seguente.

9. **Complementi: sviluppi analitici e generalizzazioni.** — In questo paragrafo, che lo studioso può lasciare da parte in una prima lettura, ci proponiamo anzitutto di convalidare e precisare dal punto di vista analitico le considerazioni sui gruppi jacobiani, porgendo una nuova verifica dell'invarianza del genere. In secondo luogo estenderemo i risultati ottenuti in due sensi:

1) considerando serie covarianti più generali della jacobiana, cui conducono i punti r-pli di una g_n^{r-1};

2) ricercando la trasformata della serie canonica per trasformazioni razionali non invertibili (corrispondenze $[1, n]$ fra due curve), e deducendone una nota *formula di* ZEUTHEN.

Cominciamo dunque a definire analiticamente i gruppi jacobiani.

Sopra la curva $f(xy) = 0$ si consideri la g_n^1 dei gruppi di livello della funzione razionale

$$t = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_0(xy)}.$$

Assumendo x come variabile indipendente, ed y come funzione implicita di essa, definita dalla $f(xy) = 0$, i punti doppi di questa g_n^1 soddisfano all'equazione

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

la quale, moltiplicando per $\varphi_0^2 \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (dove si tiene conto che la g_n^1 non ha — in generale — punti doppi all'infinito) si riduce alla forma

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\varphi_0-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\varphi_1\right)\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\varphi_0-\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\varphi_1\right)\frac{\partial f}{\partial x}=0.$$

Aggiungendo un termine divisibile per f, che si annulla sulla f stessa, l'equazione precedente si può scrivere

$$J(\varphi_0\varphi_1 f)=\begin{vmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & f\\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{vmatrix}=0;$$

si ha dunque che: *i punti doppi della* g_n^1 $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}=t$ *vengono segati sopra* f *dalla curva jacobiana della rete* $\lambda\varphi_0+\mu\varphi_1+\nu f=0$. Questo risultato apparirà evidente a chi ricordi la definizione di codesta curva jacobiana (L. 3°, § 5), come luogo dei punti doppi delle curve della rete; poichè una curva del fascio $\lambda\varphi_0+\mu\varphi_1=0$, che tocchi f in un punto (semplice per f) P, determina con f un fascio contenente una curva che ha un punto doppio in P; e reciprocamente.

Per contare i punti che formano il gruppo jacobiano della g_n^1, si debbono togliere le intersezioni della f con la J che cadono in generale nei punti multipli della f, nonchè quelle che cadono negli eventuali punti base del fascio $\lambda\varphi_0+\mu\varphi_1=0$, appartenenti ad f e non figuranti come fissi nella g_n^1; ed in fine togliere anche le soluzioni all'infinito della nostra equazione introdotte col procedimento che ha servito per scriverla.

Designamo con m l'ordine di f, e con i la molteplicità di un suo punto multiplo O, che prendiamo specialmente a considerare; è lecito supporre che φ_0 e φ_1 abbiano uno stesso ordine s e passino con una medesima molteplicità r per il punto O, e che sia $0<r\leq i$, giacchè — se fosse $r=0$ — si può aggiungere alle φ una parte fissa passante per O, e se $r>i$ si possono sostituire alle φ delle loro combinazioni lineari con f. Accenneremo in breve come possa condursi il calcolo che porta a trovare il numero dei punti doppi della nostra g_n^1, espresso da $2n+2p-2$.

Anzitutto la curva J è di ordine $2s+m-2$, ma — nei riguardi delle sue intersezioni con f — può essere sostituita dalla curva

$$J_{m/s} = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \frac{m}{s} f \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

che si riduce di ordine $2s + m - 3$, poichè — in forza del teorema di EULERO — si annulla identicamente il complesso dei termini di più alto grado, dato da un determinante del tipo

$$\begin{vmatrix} \varphi_{0,s} & \varphi_{1,s} & \frac{m}{s} f_m \\ \frac{\partial \varphi_{0,s}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_{1,s}}{\partial x} & \frac{\partial f_m}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{0,s}}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_{1,s}}{\partial y} & \frac{\partial f_m}{\partial y} \end{vmatrix}$$

dove $\varphi_{0,s}$, $\varphi_{1,s}$ e f_m designano forme omogenee di ordine s ed m, rispettivamente.

La sostituzione della curva $J_{m/s}$ alla J, ha per effetto di scartare le intersezioni all'infinito di f con J, che non forniscono in generale punti doppi della g_n^1.

Ora valutiamo le intersezioni di f e di J che vengono assorbite nel punto O, ponendo O nell'origine delle coordinate. Vediamo che J passa, in generale, per O con la molteplicità

$$2r + i - 2,$$

ma — nei riguardi delle intersezioni con f — la curva J può essere sostituita dalla

$$J_{i/r} = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \frac{i}{r} f \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

(che non differisce dalla precedente per $r = i$): qui appare che il complesso dei termini di grado più basso, $2r + i - 2$, si annulla identicamente, e così le intersezioni di f con J assorbite in O sono (in generale e almeno):

$$i(2r + i - 1),$$

risultando dunque che, per $r < i$, la J (passante $2r + i - 2$ volte per 0) tocca i rami di f.

Infine se il fascio $\lambda\varphi_0 + \mu\varphi_1 = 0$ possiede un punto base semplice in un punto non singolare di f, il punto risulta doppio per J, e così deve essere tolto due volte dall'insieme delle intersezioni di f con J, per ottenere il gruppo jacobiano della g_n^1 che non lo contenga come fisso.

Con queste avvertenze si trova che: il *gruppo jacobiano della* g_n^1 è sezione ulteriore di f con una curva d'ordine $2s + m - 3$, la quale passa $2r + i - 2$ volte per ogni punto i-plo di f, ivi toccandone i rami, e tocca pure la f nei punti semplici base per il fascio $\lambda\varphi_0 + \mu\varphi_1 = 0$, che non appartengano come fissi alla g_n^1; sicchè il *numero dei punti* suddetti *vale*

$$2n + 2p - 2.$$

Tuttavia il computo precedente dà luogo ad alcune osservazioni critiche. Quando si è trovato che un punto i-plo per f ed r-plo per le φ_0 e φ_1, assorbe $i(2r + i - 1)$ intersezioni di f con J, avremmo dovuto esaminare se — per avventura — la J, oltrechè tangente, non resultasse osculatrice ai rami di f. Ma semplici esempi permettono di escludere che ciò avvenga in generale: così se φ_0 e φ_1 sono due rette per O, la jacobiana J si riduce alla polare di O e passa $i - 1$ volte per O, toccando ma non osculando i rami di f. Accade invece che la J riesca osculatrice a un ramo di f, ove venga infinitamente vicino ad O, sopra un ramo di f, un punto base del fascio, ovvero un punto del gruppo jacobiano (una φ del fascio osculando il ramo di f). Si avvera il primo di questi due casi per tutti i rami di f, quando si parta da un fascio di φ, per cui $r > i$, e si riduca $r = i$ per combinazione lineare con f.

Analogamente si dica per un punto base del fascio delle φ, che cada in un punto semplice di f (il quale può sempre supporsi semplice per φ_0 e φ_1): ivi saranno assorbite più di 2 intersezioni di J con f, ove si abbiano punti base infinitamente vicini del fascio delle φ, ovvero una φ del fascio osculi f. Una analisi approfondita permette di riconoscere che queste sono le sole particolarità portanti eccezione al computo precedente; di guisa che, tenuto conto debitamente delle posizioni particolari che possono avere i punti del gruppo jacobiano, e delle loro molteplicità per il gruppo stesso, si trova che questo consta sempre di $2n + 2p - 2$ punti.

Il procedimento che conduce a definire la serie jacobiana $|a_j|$ covariante di una serie a, e quindi la serie invariante

$$c = |a_j - 2a| = |b_j - 2b|,$$

si lascia generalizzare nel seguente modo.

Si consideri entro la serie a, supposta di dimensione $r \geq 2$, una qualsiasi g_n^2, e si cerchino i punti di questa che posseggono un punto triplo: l'insieme dei punti tripli costituirà un gruppo G, covariante della g_n^2. Si può provare che, al variare della g_n^2 entro la a (per $r > 2$), si ottengono sempre G equivalenti fra loro. Basta fornire la prova per due g_n^2 aventi a comune una g_n^1 e quindi contenute in una g_n^3. (Si pensi che dati due piani α e β di un S_r si possono sempre costruire due piani ausiliari γ e δ in guisa che le coppie $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ e $\delta\beta$ siano costituite di piani incidenti secondo una retta). Ora, come per il caso del gruppo jacobiano, si vede che:

1) le g_n^2 contenute in una g_n^3 e contenenti una medesima g_n^1 formano un fascio, sicchè la serie dei relativi G è razionale;

2) la serie dei detti G è involutoria, perchè un punto della curva preso come triplo, appartenendo ad *un* gruppo della g_n^3, determina una sola g_n^2 del nostro fascio, e quindi definisce un unico G.

Avremo dunque che i gruppi di punti tripli G, appartenenti alle g_n^2 contenute in a, determineranno una serie covariante, che designeremo con $|a_3|$. La designazione analoga per la serie jacobiana — che conviene adottare in quest'ordine di idee più generale — porta $a_j = a_2$.

Alle nuove serie covarianti si estendono le considerazioni che ci hanno condotto alle relazioni fondamentali della serie jacobiana. A tale scopo si aggiunga ad una g_n^2, contenuta in $|a|$, un punto P; e si ricerchino i punti tripli della g^2_{n+1} col punto fisso P: si vede che occorre aggiungere ai punti tripli della g^2_n il punto P, il quale figura effettivamente come triplo per il gruppo della g^2_{n+1} corrispondente al gruppo della g^2_n che ha in P un punto doppio.

Occorre valutare quante volte P figuri nel gruppo covariante della g^2_{n+1}, e si trova che esso assorbe precisamente 3 punti tripli. La cosa appare chiara se la curva data è una curva d'ordine $n+1$ dello S_3, sulla quale la nostra g^2_n venga segata dai piani per il punto P, giacchè allora il piano osculatore in P è limite di 3 piani osculatori alla curva condotti da un punto esterno. E a questo caso appunto ci si può ridurre con una trasformazione della curva, se la $g^2_{n+1} = g^2_n + P$ è contenuta in una g^3_{n+1}. Ma l'ipotesi che qui occorre può sempre ritenersi vera, se non per la curva data, per una curva razionale osculatrice ad essa in P, che è sempre lecito sostituire alla curva stessa, trattandosi della determinazione di un carattere differenziale.

Ora, sommando alla $|a|$ un gruppo di punti appartenenti ad una serie b, troveremo la relazione fondamentale

$$|(a+b)_3| = |a_3 + 3b| = |3a + b_3|;$$

dalla quale si ricava che la serie

$$|a_3 - 3a|,$$

supposta esistente, non dipende dalla scelta della serie $|a|$, e riesce dunque una *serie invariante* sopra la curva. Ma non si tratta di una serie essenzialmente nuova, bensì di un multiplo, e precisamente del triplo, della serie canonica $|c| = |a_2 - 2a|$.

Per vederlo si consideri la g^2_{2n} composta con le coppie dei gruppi di una g^1_n contenuta in $|a|$: i punti tripli di questa serie composta si riducono ai punti del gruppo jacobiano della g^1_n, ciascuno dei quali costituisce effettivamente un punto quadruplo, equivalente a un certo numero, x, di punti tripli. Avremo pertanto

$$|(2a)_3| = |xa_2|.$$

Per valutare il numero x, trattandosi di un carattere differenziale, potremo sostituire alla curva una parabola osculatrice, e così saremo ricondotti al caso delle curve razionali, o delle rette. Ma sopra una retta il numero dei punti doppi di una g^2_m si determina subito mediante la corrispondenza in cui ad un punto P, contato 2 volte, corrispondono gli $m-2$ punti del gruppo da esso definito; questa corrispondenza è $[2m-4, m-2]$, ed ha quindi $3m-6$ punti di coincidenza, che sono i punti tripli della g^2_m. D'altronde una g^1_n possiede $2n-2$ punti doppi, e quindi per il doppio della g^1_n i punti tripli sono ridotti a $2n-2$ punti quadrupli; così — facendo $m=2n$ — si trova

$$x(2n-2)=3(2n)-6, \qquad x=3.$$

Ora, portando il valore $x=3$ nella relazione trovata innanzi si conclude

$$|(2a)_3|=|3a_2|,$$

e, poichè

$$|(2a)_3|=|a_3+3a|,$$

segue

$$|a_3+3a|=|3a_2|$$

e quindi

$$|a_3-3a|=|3(a_2-2a)|=|3c|.$$

Questa conclusione trova riscontro nel fatto che, sopra una curva piana f, d'ordine n, dotata soltanto di nodi (g^2_n segata dalle rette del piano), il gruppo dei flessi (che sono i punti tripli della serie) viene segato dalla curva hessiana, h, d'ordine $3n-6$, la quale passa doppiamente per i nodi di f toccando ivi i rami della f stessa. Infatti se dal sistema lineare delle curve d'ordine $3n-6$ aventi un tale comportamento nei punti doppi di f, si tolgono tre rette, si ha un sistema residuo di curve d'ordine $3(n-3)$, che passano ancora doppiamente per i nodi di f toccando ivi i rami della curva, e però — ai fini delle intersezioni con f — possono ritenersi come passanti triplamente per i punti doppi di f: la serie determinata da tali curve su f è evidentemente il triplo della serie canonica, determinata dalle curve aggiunte d'ordine $n-3$.

Le considerazioni che precedono possono essere generalizzate passo per passo: ci limitiamo ad enunciare il risultato di questa generalizzazione.

Sopra una curva, di un qualsiasi genere p, si abbia una serie $|a|$ di un certo ordine n e di dimensione $h \geq r-1$

$(r>1)$: per ogni g_n^{r-1} contenuta nella $|a|$ si avrà un certo numero di *punti r-pli* (cioè punti che sono r-pli per un gruppo della g_n^{r-1}) formanti un gruppo G, e — al variare della g_n^{r-1} entro $|a|$ — si otterranno G equivalenti, contenuti in una serie lineare che designeremo con $|a_r|$. Sommando alla $|a|$ un' altra serie analoga $|b|$ si trova la *relazione fondamentale*

$$|(a+b)_r| = |a_r + rb| = |b_r + ra|,$$

e — nell' ipotesi $p>0$ — *la serie*

$$|a_r - ra|$$

risulta invariante, coincidendo con un multiplo della serie canonica $|c|$; ***precisamente***:

$$|a_r - ra| = \left|\frac{r(r-1)}{2}c\right|.$$

Tenuto conto dell' ordine delle serie che compaiono nella precedente relazione, si ottiene la formula nota che dà il *numero dei punti r-pli di una* g_n^{r-1} sopra una curva di genere p

$$N_r = nr + \frac{r(r-1)}{2}(2p-2)$$

ovvero

$$N_r = r[n + (r-1)(p-1)].$$

Questa formula, che rientra in altre più generali del DE-JONQUIÈRES e del CAYLEY, trovasi stabilita in forma proiettiva (numero degli iperpiani stazionari iperosculatori ad una curva dello S_{r-1}) dal VERONESE nel 1881 (¹), e poi da CASTELNUOVO e da SEGRE nelle loro esposizioni fondamentali della geometria sopra una curva (²). La nostra dimostrazione aggiunge alla formula l' interpretazione del suo significato funzionale (³).

Nota. Nell' uso della formula precedente importa tener conto della *molteplicità* con cui un punto P può figurare nel gruppo G dei punti r-pli di una g_n^{r-1}. Le circostanze elementari da cui questa molteplicità trae origine sono:

(¹) Math. Ann., Bd. 19, pag. 201.

(²) CASTELNUOVO. « Ricerche di Geometria sulle curve algebriche », n. 7 (Atti dell'Acc. di Torino, 1889); SEGRE, « Introduzione alla Geometria sopra gli enti algebrici », n. 42 (Annali di Matematica, 1894).

(³) ENRIQUES. Rendic. dell'Acc. dei Lincei, 1919.

1) che P anzichè r-plo sia $(r+s)$-plo per un gruppo della g_n^{r-1};

2) che imponendo ai gruppi della g_n^{r-1} di contenere P con una certa molteplicità h, si trovino condizioni non indipendenti, avendosi dunque una serie residua g_{n-h} di dimensione superiore ad $r-h-1$; in particolare rientra qui il caso in cui P sia punto fisso per la g_n^{r-1}, ed anche il caso in cui P dia luogo ad una coppia di punti infinitamente vicini neutra per una g_n^{r-1} (cuspide della curva immagine C_n^{r-1}).

Si può dimostrare che un *punto* $(r+s)$-*plo* della g_n^{r-1}, ove non intervenga la complicazione 2), *assorbe* $s+1$ *punti* r-*pli*.

La cosa si mette in evidenza come segue. La condizione perchè un punto x sia r-plo per una g_n^{r-1}, si può scrivere imponendo ad x di essere un punto doppio per la g_{n-r+2}^1 residua del punto x contato $r-2$ volte, la quale — per ipotesi — non ha il punto x come fisso: appare quindi che il punto x assorbe tanti punti r-pli della g_n^{r-1} quanti sono i punti doppi della g_{n-r+2}^1 anzidetta che vengono a cadere in x, cioè precisamente $s+1$ punti r-pli se si ha in x un punto $(s+2)$-plo della g_{n-r+2}^1 (cfr. L. 2°, § 5, vol. I, pag. 178).

Si noti che il resultato precedente, applicato ai punti tripli di una g_n^2, porge in nuovo modo la molteplicità $(i-2)$ di un flesso di una curva piana in cui la tangente abbia un contatto i-punto (cfr. L. 2°, § 20, vol. I, pag. 266; e specialmente L. 3°, § 7, vol. II, pag. 51). Inoltre il ragionamento precedente permette di giustificare da un punto di vista superiore il modo di comportarsi della hessiana nei punti doppi o multipli di una curva piana f, ritrovando e completando alcuni risultati stabiliti — coi calcoli diretti — nel L. 3°, § 16 (cfr. anche L. 2°, § 20).

Se la f, *d'ordine* n e *genere* p, possiede soltanto singolarità con rami lineari, *il numero dei suoi flessi vale*

$$i=3(n+2p-2);$$

naturalmente qualcuno di questi flessi può sovrapporsi ad un punto singolare, quando si abbia un ramo con tangente tripunta. Il numero dei flessi diminuisce di 2 quando due rami lineari, uscenti da un nodo, si fondano in un ramo cuspidale del second'ordine; più in generale *il numero dei flessi dimi-*

nuisce di $2\nu - 2$, *ove* ν *rami lineari, uscenti da un punto singolare, si fondano in un ramo cuspidale ordinario d'ordine* ν. Infatti si ha allora un gruppo di ν punti neutro per la g_n^2 segata dalle rette, e il metodo precedente prova che un tal punto, P, assorbe $2\nu - 2$ (punti del gruppo jacobiano della g_{n-1}^1 residua, per la quale riunisce in sè $\nu - 1$ punti fissi, e quindi $2\nu - 2$) punti tripli della g_n^2.

Aggiungasi che lo stesso metodo permette anche di riconoscere che il *numero dei flessi della curva piana di ordine* n *e di genere* p *diminuisce di*

$$2\nu - 2 + \mu - 1$$

quando ν rami lineari si fondano in un *ramo cuspidale straordinario, di ordine* ν *e di classe* $\mu > 1$, il genere p restando invariato. In questo caso il punto P, oltre a contare per $\nu - 1$ punti fissi della $g_{n-1}^1 = g_n^2 - P$, figura anche nel gruppo jacobiano della $g_{n-\nu}^1$ residua, e precisamente $\mu - 1$ volte.

Ora è interessante vedere come il procedimento adoperato si estenda e conduca ad una formula generale.

Se il punto P fa parte di un gruppo di ν punti infinitamente vicini, neutro per una g_n^{r-1}, la $g_{n-1}^{r-2} = g_n^{r-1} - P$ avrà $\nu - 1$ punti fissi (riducendosi — fuori di questi — ad una $g_{n-\nu}^{r-2}$) e per tal motivo si assorbono in P $(r-1)(\nu-1)$ punti $(r-1)$-pli della g_{n-1}^{r-2}; ed altrettanti punti r-pli della g_n^{r-1}. Ma può accadere che il punto P, contato μ_1 volte, dia luogo ad un gruppo di $\mu_1 > 1$ punti infinitamente vicini, che sia neutro per l'anzidetta $g_{n-\nu}^{r-2}$ residua: allora P assorbe $(r-2)(\mu_1 - 1)$ punti $(r-1)$-pli di codesta $g_{n-\nu}^{r-2}$, e di tanto si accresce la molteplicità di P nel gruppo G dei punti r-pli della data g_n^{r-1}.

Successivamente può accadere che P, contato μ_2 volte, dia luogo ad un gruppo di μ_2 punti infinitamente vicini che sia neutro per la $g_{n-\nu-\mu_1}^{r-3}$, residua di $(\nu + \mu_1)P$, ecc.

Queste considerazioni guidano al resultato generale che enunciamo, senz'altro, in forma proiettiva.

Una *curva, d'ordine* n *e genere* p, *dello spazio* S_{r-1} possiede un gruppo G di

$$r(n + 2p - 2)$$

punti di flesso o *d'ondulazione*, in cui l'iperpiano osculatore ha un contatto r-punto: un *punto* singolare origine d'un *ramo d' ordine* ν *e di classi* (1) $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-2}$ *assorbe*

$$(r-1)(\nu-1)+(r-2)(\mu_1-1)+(r-3)(\mu_2-1)+\ldots+\mu_{r-2}-1$$

punti del G.

Il teorema d' invarianza della serie canonica $|c|=|g_{2p-2}|$ si lascia generalizzare quando si considerino, in luogo delle trasformazioni birazionali delle curve, trasformazioni semplicemente razionali non univocamente invertibili, cioè corrispondenze $[1, n]$, in cui ai punti di una curva C (di genere $\pi > 0$) rispondano i gruppi di una involuzione irrazionale γ_n^1, dotata d' un certo numero δ di coincidenze: *Se fra due curve C e K intercede una corrispondenza $[1, n]$, la serie trasformata della serie canonica di C, sommata al gruppo dei punti di coincidenza su K, appartiene alla serie canonica di K.*

Questa generalizzazione è immediata in rapporto al nostro modo di definire la serie canonica. Infatti ad una g_m^1 presa su C risponde sopra K una g_{mn}^1 che ha come punti doppi: gli nd punti corrispondenti ai d punti della g_m^1, e i δ punti di coincidenza della corrispondenza $[1, n]$. Pertanto, se si designa con $|a|$ la serie completa determinata dalla predetta g_m^1 su C, con $|a_j|$ la sua jacobiana, con $|a'|$ e $|(a_j)'|$ le serie complete omologhe appartenenti a K, e con $|k|$ la serie completa determinata su questa curva dal gruppo delle δ coincidenze, avremo

$$|(a_j)'+k|=|(a')_j|,$$

e quindi, essendo $|(a_j-a)'|=|(a_j)'-a'|$,

$$|(a')_j-a'|=|(a_j-a)'+k|.$$

Tuttavia il teorema di trasformazione delle serie canoniche nelle corrispondenze $[n, 1]$ è stato ottenuto prima che si pervenisse alla semplice definizione di queste serie che qui viene adoperata: vi è giunto (1891) per via trascendente Paul Painlevé, nella sua memoria sulle equazioni differenziali degli « Annales de l' Ecole Normale » (dove, invero, l'enunciato è inesatto essendo omessa la considerazione dei δ punti di coincidenza), e d' altra parte ne ha pôrto una dimostra-

(1) Cfr. L. 5°, § 32, vol. II, pag. 567, 575.

zione geometrica il CASTELNUOVO, in una sua Nota inserita nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, lo stesso anno 1891. Però già innanzi si conosceva la formula numerica di cui il detto teorema esprime il significato funzionale:

$$n(2\pi - 2) + \delta = 2p - 2.$$

Infatti, fino dal 1871, lo ZEUTHEN [1] dette la formula più generale che lega i caratteri di due curve, C e K, in corrispondenza $[m, n]$:

$$n(2\pi - 2) + \delta = m(2p - 2) + d,$$

dove si designano ancora con π e p i due generi, e con δ e d i numeri dei punti di coincidenza delle serie (non più involutorie) di gruppi di punti che rispondono — rispettivamente su K e C — ai punti dell' altra curva.

D' altronde la formula generale di ZEUTHEN si deduce immediatamente dal suo caso particolare $m = 1$, col metodo indicato dal SEGRE: si costruisca la curva ausiliaria L che è immagine della corrispondenza $[m, n]$ posta fra C e K, per modo che ad un punto di L risponda *una* coppia di punti omologhi su C e K; fra C ed L e fra K ed L intercederanno ora due corrispondenze

$$[1, n] \quad \text{e} \quad [1, m],$$

dotate rispettivamente di δ e d punti di coincidenza; così — designando con P il genere di L — si troverà

$$n(2\pi - 2) + \delta = 2P - 2,$$
$$m(2p - 2) + d = 2P - 2,$$

onde segue la formula di ZEUTHEN.

Dalle considerazioni precedenti si può anche dedurre il significato funzionale di questa formula che, appunto per le corrispondenze $[m, n]$, fu esplicitamente rilevato da SEVERI, in una Nota dell' Istituto Lombardo del 1903.

10. Numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni a una g^r_n e a una g^1_m. — Per la trattazione della geometria sopra una

(1) Math. Ann. 3.

curva che svolgiamo in questo capitolo, è essenziale la conoscenza di una formula che dà il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad un G_n di una g_n^r e ad un G_m di una g_m^1: dalla qual formula si deduce un criterio perchè una serie sia contenuta in un' altra (1).

La formula in questione viene fornita, nel modo più semplice, da una considerazione di serie covarianti analoga a quella del § 8 (e 9), che ne porge anche il significato funzionale; ma, rimandando per questo alla Nota che chiude il paragrafo, ci limiteremo qui allo scopo numerativo, che solo interessa per i successivi sviluppi della teoria.

Rileviamo anzitutto che *il numero delle coppie comuni ad una g_n^1 e ad una g_m^1 sopra una curva di genere p, vale*

$$N_1 = (n-1)(m-1) - p.$$

Questa formula può venire giustificata elementarmente, in base al principio di corrispondenza di CHASLES, come segue:

Si considerino i gruppi della g_n^1 come elementi di una forma di prima specie, e si facciano corrispondere quei gruppi che contengono due punti di uno stesso G_m della g_m^1: nasce così, fra gli elementi della forma suddetta, una corrispondenza $[n(m-1),\ n(m-1)]$, che ha $2n(m-1)$ coincidenze. Ora queste coincidenze sono date dai $d = 2m + 2p - 2$ punti doppi della g_m^1, e dalle N_1 coppie comuni alla g_n^1 e alla g_m^1, ciascuna contata due volte. Si trova pertanto

$$N_1 = n(m-1) - \frac{d}{2} = (n-1)(m-1) - p.$$

Questa dimostrazione, che traduce in maniera astratta il calcolo della classe di una curva dato da ZEUTHEN col principio di corrispondenza (cfr. L. 2°, § 19, vol. I, pag. 257), appartiene a SEGRE, 1894 (2).

Ora ricerchiamo il numero dei gruppi G_{r+1} formati da $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una g_m^1, ammettendo che questo numero N_r sia — sopra la curva data di genere p —

(1) L'applicazione a cui si allude nel testo è la dimostrazione del teorema di RIEMANN-ROCH (§ 11); un' altra applicazione, relativa ad un criterio numerativo perchè una serie non involutoria sia contenuta in una serie lineare dello stesso ordine, s' incontrerà nel § 42.

(2) Introduzione..., § 8, n. 35.

funzione dei soli caratteri r, n, m, e non dei parametri da cui posson dipendere le serie g_n^r e g_m^1, scrivendo dunque

$$N_r = F(r,\ n,\ m):$$

l' ipotesi qui introdotta risulterà giustificata ammettendosi soltanto che il numero dei G_{r+1} non varia al variare della g_n^r entro una serie lineare più ampia che la contenga (principio della conservazione del numero).

Sommiamo alla serie g_n^r un punto fisso generico, P, e cerchiamo il numero dei G_{r+1} comuni alla $g_{n+1}^r = g_n^r + P$ e alla g_m^1. È chiaro che questi gruppi sono: o G_{r+1} comuni alla g_m^1 e alla g_n^r, ovvero G_{r+1} contenenti il punto P; questi ultimi si ottengono considerando il G_m di g_m^1 che contiene P, ed unendo a P altri r punti qualunque del G_m, i quali appartengono sempre ad *un* gruppo della g_n^r: si ha così la relazione

$$F(r,\ n+1,\ m) = F(r,\ n,\ m) + \binom{m-1}{r},$$

e quindi

$$F(r,\ n+h,\ m) = F(r,\ n,\ m) + h\binom{m-1}{r}.$$

Ora è facile calcolare F per $h = (r-1)n$, riferendosi ad una serie $g_{rn}^r = rg_n^1$ composta con r gruppi di una g_n^1. Alla considerazione di questa particolare serie si giunge partendo dalla nostra g_n^r, qualora si sommi ad essa $r-1$ dei suoi gruppi: la serie g_{rn}^r così ottenuta, resa completa, è la serie r-pla della $|g_n|$, e contiene entro di sè una g_{rn}^r, composta coi gruppi della g_n^1 presi ad r ad r, alla quale possiamo riferirci per il calcolo di $F(r,\ rn,\ m)$. Per calcolare questo valore di $F(r,\ rn,\ m)$ relativo alla nominata $g_{rn}^r = rg_n^1$, basta considerare le coppie comuni alla g_n^1 e alla g_m^1, giacchè ognuna di queste coppie, presa insieme con altri $r-1$ punti del G_m che la contiene, dà luogo ad un G_{r+1} comune alla g_m^1 e alla g_{rn}^r, e così si ottengono tutti i G_{r+1} cercati. Si trova pertanto

$$F(r,\ rn,\ m) = N_1\binom{m-2}{r-1} = \left\{(n-1)(m-1)-p\right\}\binom{m-2}{r-1}.$$

Di qui, richiamando la formula precedente in cui si faccia $h = (r-1)n$ ed eseguendo le semplificazioni, si deduce che *il numero dei gruppi di* $r+1$ *punti comuni ad una* g_n^r *e ad una* g_m^1 *vale*:

$$N_r = F(r,\ n,\ m) = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p.$$

Questo resultato — ammessa l'espressione di N_r in funzione di r, n e m — si ottiene anche *a priori* dalla precedente espressione di

$$F(r,\ rn,\ m),$$

mutando n in $\frac{n}{r}$.

Aggiungiamo che il *numero* N_r *dato dalla formula precedente non può mai diventar negativo se la* g_n^r *non possiede infiniti* G_{r+1} *comuni con la* g_m^1: ciò appare dalla stessa via che abbiamo seguita per il calcolo della funzione $F(r,\ n+1,\ m)$ per $F(r,\ n,\ m)$; poichè, se non vi sono dei gruppi comuni alla g_n^r e alla g_m^1 si trova

$$F(r,\ n+1,\ m) = \binom{m-1}{r}$$

e quindi

$$F(r,\ n,\ m) = 0.$$

Osservazione. La formula data innanzi si estende al caso in cui si ricerchino i gruppi G_{r+1} comuni ad una g_n^r e ad una involuzione irrazionale γ_m^1, ovvero anche ad una serie $s_{m,\,i}$ di gruppi di m punti d'indice $i>1$ (cioè tale che ogni punto della curva appartenga ad i gruppi della serie) [1].

Anzitutto il metodo di SEGRE porge il numero delle coppie comuni alla detta serie e ad una g_m^1, giacchè — designando ancora con d il numero dei punti doppi della serie — si trova analogamente

$$N_1 = n\,i\,(m-1) - \frac{d}{2}.$$

Nel caso $(i=1)$ in cui si tratti di un'involuzione γ_m^1, il numero d si esprime con la formula di ZEUTHEN per mezzo del genere π della involuzione stessa, avendosi

$$2p-2 = m(2\pi-2)+d$$

[1] SEGRE, l. c. § 13, n. 50, rileva che una tale serie, per $i>1$, può sempre ritenersi come una involuzione sopra una curva multipla.

da cui

$$N_1 = (n-1)(m-1) - (p - m\pi).$$

È ora chiaro che anche la formula generale per N_r, si estende senz'altro al caso in cui si confronti una g_n^r ed una serie $s_{m,i}$ d'ordine m e d'indice $i \geq 1$, razionale o irrazionale, dotata di d punti doppi; *il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni alla g_n^r e alla serie $s_{m,i}$, vale*

$$N_r = \left\{ i\frac{n}{r}(m-1) - \frac{d}{2} \right\}\binom{m-2}{r-1} = i\,n\binom{m-1}{r} - \frac{d}{2}\binom{m-2}{r-1}:$$

nel caso $i=1$, in cui la s sia un'involuzione, introducendo il suo genere π

$$N_r = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p - m\pi).$$

Anche qui $N_r \geq 0$ se non vi sono infiniti G_{r+1} comuni alla g_n^r e alla $s_{m,i}$.

Notizia storica. La formula fondamentale che dà il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni a una g_n^r e ad un'involuzione (o serie) razionale o no, appartiene allo Schubert e trovasi esposta da Segre nella Nota « Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi » pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (ottobre 1887), e quindi nel § 13 della citata « Introduzione... » (Annali di Matematica 1894). Castelnuovo (per il caso di una involuzione razionale g_m^1) la ritrova per altra via nelle sue « Ricerche di Geometria sulle curve algebriche » (Atti dell'Accademia di Torino, 1889). Una dimostrazione più semplice (basata sul principio di corrispondenza sopra le curve) viene pôrta quindi da Severi nel § 69 delle sue « Lezioni di Geometria algebrica » (1908) come accenneremo più tardi (§ 42). La dimostrazione qui svolta è stata data da Enriques nella Nota « Questioni numerative e loro significato nella Geometria sopra una curva algebrica » (Accademia dei Lincei, 1° giugno 1919).

Castelnuovo ha esteso il resultato di cui sopra, ricercando il numero dei gruppi di $r+s$ punti comuni ad una g_n^r e a una g_m^s (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo del 1889): questa ricerca si basa sul principio di degenerazione delle curve, cui accenneremo più avanti (§ 35).

Nota. A complemento delle cose dette innanzi, vogliamo esaminare in breve il significato funzionale della formula numerativa sopra stabilita, riferendoci particolarmente al caso delle coppie di punti comuni ad una g^1_n e ad una g^1_m. È chiaro che il gruppo Γ di queste coppie è covariante simultaneo delle g^1_n e g^1_m suddette, ma importa dimostrare che « variando la g^1_n e la g^1_m entro le rispettive serie complete, il Γ varia entro una serie lineare (che può rendersi pure completa) la quale sarà covariante della $|g_n|$ e della $|g_m|$ ». A tale scopo giova dimostrare il seguente

Teorema [1]. *Sopra una curva algebrica, una serie razionale ∞^1 di gruppi di q punti, di indice $i>1$, è sempre contenuta in una serie lineare di dimensione $r>1$.*

Sopra la curva f si abbia una serie razionale ∞^1 di gruppi G_q di $q>1$ punti, di un certo indice $i>1$. E supponiamo dapprima che gli i gruppi della serie definiti da un punto generico della f, non abbiano comuni altri punti variabili con esso, cioè che la data serie sia *semplice.*

Gli elementi G_q della nostra serie razionale possono riferirsi biunivocamente ai punti di una curva C (razionale normale) d'ordine i appartenente a un S_i: allora ad un punto di f rispondono i punti di C, e quindi un iperpiano, S_{i-1}, di cui essi sono sezioni. Al variare del punto della f si ha così in S_i una serie ∞^1 di iperpiani, corrispondenti biunivocamente ai punti della f stessa; per un punto della C passan q iperpiani della serie, corrispondenti ai q punti del G_q omologo. Si può dire che la serie degli iperpiani considerata sia di classe q, cioè che per ogni punto di S_i, anche fuori di C, passino q iperpiani di essa? La risposta affermativa alla precedente questione vien data da una considerazione già adoperata in problemi analoghi dal SEGRE. Se la classe della serie di iperpiani fosse $q'>q$, un punto per cui passino meno che q' iperpiani della serie dovrebbe appartenere alla varietà inviluppo della serie stessa, e quindi a tale varietà dovrebbe appartenere anche la curva C; ma allora, per una nota proprietà degli inviluppi, ogni iperpiano della serie risulterebbe tangente alla C, e quindi non la segherebbe più in i punti distinti, contro il supposto.

Ora, operando in S_i una trasformazione reciproca, agli

[1] ENRIQUES. Rendic. del Circolo matematico di Palermo, 25 agosto 1895.

iperpiani della nostra serie corrisponderanno i punti di una curva f' d'ordine q, in corrispondenza biunivoca con la f, e ai punti di C gli iperpiani di una serie di classe i, seganti sulla f' i gruppi di punti trasformati dei G_q: appare pertanto che la serie razionale ∞^1 dei G_q è contenuta nella serie lineare segata sopra la f' dagli iperpiani di S_1, la qual serie lineare avrà una dimensione $r \leq i$, designando con r la dimensione dello spazio S_r — contenuto in S_i — cui appartiene la nostra f'.

Supponiamo ora, ciò che dapprima avevamo escluso, che sulla f la serie dei G_q non sia semplice, cioè che i G_q determinati da un punto generico abbiano comune, oltre quel punto, altri $\nu - 1$ ($\nu > 1$) punti variabili con esso; allora la serie risulta composta mediante i gruppi di una involuzione γ^1_ν, e — considerando gli elementi (gruppi) di questa come i punti di una curva — si può ancora applicare il ragionamento precedente: si deduce ugualmente che (sulla curva involuzione e perciò) sulla f la serie dei G_q è contenuta in una serie lineare g^r_q, che — in questo caso — è composta coi gruppi della γ^1_ν. Pertanto il teorema viene stabilito senza eccezione.

Ritorniamo ora alla considerazione del gruppo $\Gamma = (g^1_n \cdot g^1_m)$ costituito dalle coppie comuni ad una g^1_n e ad una g^1_m. Il teorema sopra stabilito permette di riconoscere che il Γ varia in una serie lineare quando la g^1_n (o la g^1_m) vari in una serie lineare dello stesso ordine che la contiene, poichè tutti i Γ analoghi risultano equivalenti: infatti se si fa variare la g^1_n in un fascio entro una g^2_n, si ottiene una serie razionale ∞^1 di gruppi Γ.

Ciò posto, essendo date due serie $|g_n|$ e $|g_m|$ resta definita una serie lineare covariante, che possiamo designare con

$$|(g_n \cdot g_m)|,$$

contenente tutti i gruppi $(g^1_n \cdot g^1_m)$. Cerchiamo come varia il gruppo $(g^1_n \cdot g^1_m)$ quando alla g^1_n si aggiunga un punto fisso P. Si vede che il $(g^1_n + P \cdot g^1_m)$ è formato dalle coppie comuni alla g^1_n e alla g^1_m, nonchè dalle coppie costituite dal punto P preso insieme con uno degli $m-1$ punti del gruppo G_m della g^1_m che contiene P:

$$(g^1_n + P \cdot g^1_m) = (g^1_n \cdot g^1_m) + G_m + (m-2)P;$$

dimodochè, passando dai gruppi alle serie complete da essi definite, si avrà:

$$|(g_n + P \cdot g_m)| = |(g_n \cdot g_m) + g_m + (m-2)P|.$$

Ora, se in luogo di un punto P si somma alla serie g_n un gruppo $G_{n'}$ di n' punti, ovvero una serie $g_{n'}$ che lo contiene, e similmente si somma alla g_m un gruppo $G_{m'}$ di m' punti, ovvero una serie $g_{m'}$ che lo contiene, si trova:

$$|(g_n + g_{n'} \cdot g_m + g_{m'})| = |(g_n \cdot g_m) + n'g_m + m'g_n + (m-2)g_{n'} + \\ + (n-2)g_{m'} + n'g_{m'} + m'g_{n'}|.$$

Scambiando g_n con $g_{n'}$ e g_m con $g_{m'}$, e uguagliando le due espressioni del secondo membro, col togliere i termini comuni, si ottiene la *relazione fondamentale*

$$|(g_n \cdot g_m) + (m'-2)g_{n'} + (n'-2)g_{m'}| = \\ = |(g_{n'} \cdot g_{m'}) + (m-2)g_n + (n-2)g_m|.$$

Di qui si ricava l'invarianza della serie

$$|\{(m-2)g_n + (n-2)g_m\} - (g_n \cdot g_m)| = |c|,$$

che si riconosce avere un senso per $p > 0$, ed essere la serie canonica $|c| = |g_{2p-2}|$; e *così viene rilevato il significato funzionale della formula che dà il numero delle coppie comuni a una g_n^1 e a una g_m^1*:

$$N_1 = \frac{1}{2}\{(n-2)m + (m-2)n - (2p-2)\} = (n-1)(m-1) - p.$$

Per verificare che la $|c|$ costruita innanzi è effettivamente la serie canonica, si riferiscano in modo proiettivo i gruppi di una g_n^1 e di una g_m^1 rispettivamente a due fasci di raggi A e B, in un dato piano; la curva f si trasformerà in una curva f_{n+m} d'ordine $n+m$ passante per A con la molteplicità m e per B con la molteplicità n, ed avente inoltre un certo numero N_1 di punti doppi, corrispondenti alle coppie comuni alla g_n^1 e alla g_m^1 (¹).

(¹) Si ha del resto

$$N_1 = \frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - p.$$

Ma sulla f_{n+m} si ottengono gruppi della serie

$$|(m-2)g_n+(n-2)g_m|$$

segando mediante curve φ d'ordine $n+m-3$ passanti per A con la molteplicità $m-1$ e per B con la molteplicità $n-1$ (tra queste curve si trovano quelle composte della retta AB, e di $m-2$ rette per A ed $n-2$ rette per B); imponendo alle φ di passare per i d punti doppi di f_{n+m}, si stacca dalla serie segata dalle φ il gruppo delle coppie comuni $(g_n^1 \cdot g_m^1)$, e così appare che la serie residua è precisamente la serie canonica.

In particolare, prendendo due serie g_n^1 di una medesima g_n^2, sopra una f di genere $p>0$, riesce dimostrata l'invarianza della serie costruita togliendo dal multiplo $(n-3)g_n^2$ il gruppo delle *coppie neutre* (presentanti una sola condizione ai G_n della g_n^2 che debbano contenerle), la quale — sopra una f piana d'ordine n — viene segata dalle curve aggiunte d'ordine $n-3$; onde si ottiene la *dimostrazione diretta dell'invarianza della serie canonica segata da queste curve aggiunte* (1). Il passaggio sopra indicato, dal caso di una g_n^1 e una g_m^1 qualunque al caso di due g_n^1 appartenenti ad una g_n^2, non offre difficoltà, quando si ricordi che le due g_n^1 hanno ora a comune un gruppo G_n che contato $n-1$ volte figura — insieme alle coppie neutre — nel gruppo delle coppie comuni alle due g_n^1: infatti si ha

$$|2(n-2)g_n-(g_n \cdot g_n)|=|c|,$$

e, togliendo $(n-1)$ volte il gruppo G_n tanto da $2(n-2)g_n$ come dalla serie $|(g_n \cdot g_n)|$, si dedurrà l'espressione della serie canonica come differenza di $|(n-3)g_n|$ e della serie definita dai gruppi delle coppie neutre delle g_n^2 contenute in $|g_n|$.

È appena necessario avvertire che se la g_n^2 possiede un gruppo neutro di $i>2$ punti, questo equivale a $\frac{i(i-1)}{2}$ coppie neutre, figurando $i-1$ volte nel gruppo di tali coppie, così come un gruppo di i punti comuni ad una g_n^1 e ad una g_m^1 equivale ad $\frac{i(i-1)}{2}$ coppie comuni.

(1) ENRIQUES. Lincei, 1919, l. c.

11. Dimensione delle serie lineari: teorema di Riemann-Roch. — Nella geometria sopra una curva, di genere p, ha fondamentale importanza il problema di valutare la dimensione di una serie g_n^r completa (problema già risoluto per $p=0$, nel § 7) o — sotto l'aspetto proiettivo — di determinare la curva normale da cui una data può dedursi come proiezione.

Come già vedemmo nel § 7, la semplice considerazione delle curve aggiunte ad una curva piana f, permette di riconoscere

1) che per ogni serie completa g_n^r si ha

$$r \geq n - p;$$

2) che — nell'ipotesi $p > 1$ — almeno per la serie canonica, e quindi per le g_n^r complete in essa contenute (che se ne deducono staccando dei punti) si ha

$$r > n - p.$$

A *priori* si può supporre che sopra una curva di genere p esistano g_n^r complete per cui $r = n - p$ ed altre per cui $r > n - p$: queste ultime verranno denominate *serie speciali*, e tale denominazione verrà giustificata più avanti, dove riconosceremo che le serie speciali sono tutte contenute nella serie canonica. A questo resultato perverremo applicando il criterio di contenenza di una serie in un'altra che viene fornito dalla formula numerativa del precedente paragrafo, deducendone in primo luogo che la serie canonica è veramente una g_{2p-2}^{p-1} di dimensione $p-1$ e non di dimensione maggiore, ed in secondo luogo assegnando il significato della differenza $i = r - (n - p)$ detta *indice di specialità*: ciò che costituisce il celebre *teorema di Riemann-Roch*. Di qui seguirà anche l'integrità delle serie segate sopra una curva piana dalle curve aggiunte, ecc.

Prendiamo le mosse dalla formula che dà il numero dei gruppi, G_{r+1}, di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r ed a una g_m^1 appartenenti ad una curva di genere p:

$$N_r = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p.$$

Abbiamo già osservato che questa espressione non può diventare negativa se la g_m^1 non ha infiniti G_{r+1} comuni con la g_n^r. Vediamo ora che effettivamente si trova $N_{r'} < 0$ ove sia

$$p > \frac{m-1}{r}(n-r);$$

si ha di qui un risultato positivo che possiamo enunciare come segue:

« Se sopra una curva di genere p sono date due serie lineari g_n^r e g_m^1, i cui caratteri soddisfano alla disuguaglianza

$$\frac{m-1}{r}(n-r) < p,$$

le due serie lineari hanno infiniti G_{r+1} a comune ».

Questa proposizione costituisce un primo *lemma fondamentale* da cui si deducono successivamente le seguenti proposizioni, che si conchiudono col teorema di Riemann-Roch.

Anzitutto dal nostro lemma fondamentale segue che:

Se sopra una curva di genere p sono date una serie speciale g_n^r ed una g_m^1 per cui

$$n - r < p, \quad m - 2 < r,$$

la g_m^1 è contenuta nella g_n^r, e precisamente ogni gruppo G_m della g_m^1 appartiene ad almeno $r - m + 2$ gruppi della g_n^r.

Sommiamo infatti alla g_m^1 $r - m + 1$ punti fissi, scelti arbitrariamente sopra la curva: avremo allora una g_{r+1}^1, e poichè sussiste la diseguaglianza

$$\frac{(r+1)-1}{r}(n-r) < p,$$

si deduce che la g_{r+1}^1 ha infiniti G_{r+1} comuni con la g_n^r, e però è contenuta nella g_n^r. Da ciò segue che ogni gruppo G_m della g_m^1 appartiene ad almeno un gruppo della g_n^r soddisfacente altresì alla condizione di contenere $r - m + 1$ punti arbitrari, cioè che il G_m appartiene ad almeno $r - m + 2$ gruppi indipendenti della g_n^r.

Più in generale si ha:

Se sopra una curva di genere p, sono date una serie speciale g_n^r ed un' altra serie g_m^s $(s \geq 1)$, per cui

$$n - r < p, \quad m - s - 1 < r,$$

ogni gruppo G_m *della* g^s_m *appartiene ad almeno* $r - m + s + 1$ *gruppi della* g^r_n *linearmente indipendenti.*

Infatti se (essendo $s > 1$) s' impongono ad arbitrio sulla curva $s - 1$ punti fissi per la g^s_m, $P_1\ P_2 \dots P_{s-1}$, si ottiene una residua g^1_{m-s+1} alla quale si applica la proposizione precedente. Dunque un G_{m-s+1} di codesta serie residua, preso insieme con $r - m + s$ punti arbitrari, costituisce un G_{r+1} per cui passa (almeno) un G_n di g^r_n. Ciò significa che presi, entro il G_{m-s+1}, $m - s$ punti, $Q_1\ Q_2 \dots Q_{m-s}$, lasciando fuori un punto P_s, e aggiunti altri $r - m + s$ punti arbitrari della curva, il (o i) G_n di g^r_n contenente gli r punti così determinati contiene di conseguenza il punto P_s. Ma, ponendo al posto di P_s uno dei punti P_i, per $i = 1, 2 \dots s - 1$, la g^1_{m-s+1} residua di $P_1 \dots P_{i-1}\ P_{i+1} \dots P_{s-1}\ P_s$ rispetto alla g^s_m contiene il gruppo $Q_1\ Q_2 \dots Q_{m-s}\ P_i$, e però si conclude che il G_n, determinato come innanzi, contiene anche il punto P_i, per $i = 1, 2 \dots s - 1$: insomma il detto G_n contiene un gruppo della g^s_m c. d. d.

Applichiamo il teorema stabilito prendendo come serie speciale la serie canonica completa che — nel § 8, pag. 58 — si è dimostrato essere una g^{p-1+h}_{2p-2} con $h \geq 0$, e méttendo al posto della g^s_m una serie g^r_n completa, per cui $n - r \leq p$.

Se $h > 0$ ovvero se $n - r < p$ si ha

$$p - 1 + h > n - r - 1,$$

e quindi la g^r_n è contenuta nella g^{p-1+h}_{2p-2}.

Da ciò risulta in primo luogo che non può essere $h > 0$, altrimenti la g^{p-1+h}_{2p-2} canonica dovrebbe contenere entro di sè *ogni* serie completa g^r_n (essendo sempre per una tale serie $r \geq n - p$). Così abbiamo dunque:

La serie canonica completa è una g^{p-1}_{2p-2} *di dimensione* $p - 1$ (e non di dimensione maggiore);

e di conseguenza: *sopra una curva piana d' ordine m le curve aggiunte d' ordine* $m - 3$ *segano l' intera serie canonica.*

In secondo luogo sussiste il

Teorema di Riemann-Roch. *Ogni* g^r_n *speciale completa* (per cui $r > n - p$) *è contenuta nella serie canonica. E l' indice di specialità*

$$i = r - (n - p) = (p - 1) - n + r + 1$$

porge il numero dei gruppi canonici linearmente indipendenti a cui appartiene un gruppo G_m della g_n^r, sicchè la serie residua della g_n^r rispetto alla serie canonica è una $g_{2p-2-n}^{r'}$ di dimensione

$$r' = r - (n - p) - 1.$$

La maggiore determinazione di questo enunciato in confronto al teorema generale che precede — diciamo l' esclusione dell' ipotesi $i > p - (n - r)$ — deriva dall' applicare lo stesso teorema alla serie residua $g_{2p-2-n}^{r'}$.

Scriviamo

$$r' = r - (n - p) - 1 + h \qquad (h \geq 0)$$
$$r = r' - (2p - 2 - n - p) - 1 + k \qquad (k \geq 0);$$

sommando viene

$$r' + r = r + r' + h + k,$$

quindi

$$h = k = 0.$$

Lo stesso teorema si può esprimere nella forma

I gruppi di una serie speciale completa g_n^r impongono $k = n - r$ condizioni ai gruppi della serie canonica che debbano contenerli.

Infatti la dimensione della serie residua di uno di essi rispetto alla g_{2p-2}^{p-1} canonica vale

$$r' = (p - 1) - k = r - (n - p) - 1$$

onde

$$k = n - r.$$

La prima parte del teorema di Riemann-Roch si può anche enunciare come segue:

Ogni g_n^r completa che non sia contenuta nella serie canonica, e in particolare una serie per cui $n > 2p - 2$ o $r > p - 1$, ha la dimensione

$$r = n - p.$$

E poichè abbiamo già osservato che per la serie canonica e per le serie (complete) in essa contenute si ha $r > n - p$, possiamo affermare che « la proprietà di una serie g_n^r di essere speciale ($r > n - p$) e non speciale ($r = n - p$) corrisponde all' essere la g_n^r medesima contenuta o meno nella serie canonica ».

Il teorema fondamentale che abbiamo dimostrato assegna, in sostanza, il numero delle costanti arbitrarie da cui dipende, linearmente e omogeneamente, la costruzione delle funzioni razionali sopra una curva f_m, cui si assegni un dato gruppo G_n di poli (alcuni dei quali possono ridursi, in particolare, a punti d'indeterminazione): queste costanti sono in generale $n-p+i+1$, designando i il numero delle φ_{m-3} aggiunte, linearmente indipendenti, che passano per il G_n ($i=0$ se il gruppo è non speciale). Sotto questa forma il teorema è stato dato da RIEMANN nel n. 5 della sua « Theorie der Abel'schen Functionen » (1857), limitandosi al caso generale per $n>p$ ($i=0$) e valendosi della rappresentazione delle funzioni razionali mediante integrali di differenziali algebrici di seconda specie. Il calcolo di Riemann, con l'introduzione delle φ_{m-3} aggiunte alla curva f_m che passano per il G_n, è stato poi completato dal ROCH [1] (1864). BRILL e NOETHER [2] (1873), rilevando l'importanza fondamentale di cotesto teorema (che essi appunto hanno designato col nome di Riemann-Roch) ne hanno porto la prima dimostrazione algebrica, che riferiremo nel seguente capitolo (§ 17).

La dimostrazione del testo riproduce sostanzialmente quella fornita da CASTELNUOVO nel 1889. Aggiungiamo ancora che il teorema per le serie speciali è stato posto da BRILL e NOETHER sotto un'altra forma equivalente, cui il Klein dà il nome di

Teorema di reciprocità: Se due serie complete g_n^r e $g_{n'}^{r'}$ hanno come somma la serie canonica, si ha

$$n-n'=2(r-r').$$

Infatti, l'indice di specialità della prima serie essendo $r'+1$,

$$r=n-p+r'+1,$$

e, poichè

$$n+n'=2p-2,$$

la relazione precedente equivale alla

$$n-n'=2(r-r').$$

(1) Journal für Math., Bd. 64.
(2) Math. Annalen, Bd. 7.

Rileviamo esplicitamente i *corollari* del teorema di Riemann-Roch che concernono la *serie canonica*

1) *La serie canonica è l' unica* g_{2p-2}^{p-1} *appartenente ad una curva di genere* p. Infatti ogni g_{2p-2}^{p-1} è speciale, cioè contenuta nella serie canonica, con la quale coincide avendone il medesimo ordine.

L' unicità della g_{2p-2}^{p-1} canonica o l' appartenenza a questa di ogni serie percui $r > n - p$, porge una dimostrazione dell' invarianza della serie (canonica) segata dalle φ_{m-3} aggiunte; dimostrazione che storicamente precede quella da noi data, la quale tuttavia ha il vantaggio di mettere in luce il significato funzionale della serie stessa (cfr. § 8).

2) *La serie canonica* g_{2p-2}^{p-1} *non ha punti fissi.*

Infatti se per la g_{2p-2}^{p-1} $(p > 1)$ vi fosse un punto fisso P, togliendolo si otterrebbe una serie g_{2p-3}^{p-1}, il cui indice di specialità (numero dei gruppi canonici contenenti un gruppo della serie) dovrebbe essere ancora $i = 1$, mentre il teorema di Riemann-Roch darebbe

$$i = p - [(2p - 3) - (p - 1)] = 2.$$

3) *Teorema di Clifford.* Per una serie speciale completa g_n^r si ha sempre $n \geq 2r$.

Infatti un gruppo della g_n^r presenta $n - r$ condizioni ai gruppi canonici che debbono contenerlo, ed evidentemente questo numero è almeno uguale al numero r dei punti di un gruppo della serie che possono assumersi ad arbitrio:

$$n - r \geq r, \quad n \geq 2r.$$

Nel seguente paragrafo si vedrà che l' uguaglianza $n = 2r$, per una serie speciale diversa dalla serie canonica $(r < p - 1)$, si avvera soltanto per le g_{2r}^r composte con le coppie di una g_2^1 (e quindi per le particolari curve contenenti una g_2^1, le quali diconsi iperellittiche).

4) *Le serie* g_n^r *che non contengono parzialmente serie speciali di dimensioni* $r - 1$, *non posseggono coppie neutre*, cioè coppie presentanti una sola condizione ai gruppi della g_n^r diguisacchè tutti i G_n contenenti un punto della coppia contengano di conseguenza il secondo. Infatti togliendo la coppia neutra si troverebbe una serie g_{n-2}^{r-1} per cui $r - 1 > (n - 2) - p$.

In particolare, ricordando che sono certo non speciali le serie di ordine $n > 2p-2$ o di dimensione $r > p-1$, si avrà: *le curve normali d'ordine $n > 2p$, o appartenenti a uno spazio di dimensione $r > p$, non hanno punti doppi o multipli.*

Dalla conoscenza della dimensione di una serie lineare completa, appartenente ad una curva di genere p, quale ci è porta dal teorema di Riemann-Roch, si deduce che:

le curve di un dato ordine, aggiunte ad una curva piana f d'ordine m, segano su questa una serie completa.

Anzitutto ciò risulta chiaro per il sistema delle φ_{m-3+h} con $h > 0$; infatti abbiamo visto (§ 7) che la serie segata da esse ha l'ordine

$$n = 2p - 2 + hm$$

e la dimensione

$$r \geq p - 2 + hm = n - p;$$

poichè questa serie non è contenuta nella serie canonica, sarà precisamente

$$r = p - 2 + hm,$$

e la detta serie risulterà completa.

Lo stesso resultato abbiamo visto poco anzi sussistere per $h = 0$, le φ_{m-3} segando su f la serie canonica completa g_{2p-2}^{p-1}.

Ora anche la serie segata su f dalle φ_{m-3-h} $(h > 0)$ riuscirà sempre completa, poichè questa si può ritenere come serie residua rispetto alla g_{2p-2}^{p-1} di h gruppi di m punti staccati su f da h rette (cfr. § 6, pag. 44): infatti se una φ_{m-3} viene costretta a passare per m punti di f in linea retta, essa si spezza in questa retta e in una φ_{m-4} residua.

Lo stesso teorema del § 6 sulla integrità della serie residua di un gruppo di punti rispetto ad una serie completa, che figura nella deduzione precedente, ci porge il *modo di segare mediante curve aggiunte ogni serie lineare g_n^r* che possa essere data sopra f: Precisamente

« la serie completa definita su f da un gruppo di n punti G, si può costruire mandando per G una curva aggiunta φ, d'ordine abbastanza elevato per assicurarne l'esistenza, a segare ulteriormente f — fuori dei punti multipli — in un gruppo G': le φ dello stesso ordine, passanti per G' segnano su f la serie completa ».

Variando la φ per G, e quindi il G', non muta la serie completa definita dal G, onde si può enunciare che:

Se due gruppi G_1 e G_2 sono insieme residui di un medesimo gruppo G_1' rispetto alla serie segata su f dalle curve aggiunte di un dato ordine, G_1 e G_2 sono anche corresidui di un altro qualsiasi gruppo G_2', residuo di uno di essi.

Questo teorema costituisce il celebre *Restsatz* di BRILL e NOETHER ed importa — come ha messo in luce CASTELNUOVO (1890) — due affermazioni ben distinte:

1) un teorema di natura invariantiva, riguardante l'integrità della serie residua di un gruppo di punti rispetto ad una serie completa (sottrazione delle serie);

2) un teorema proiettivo che afferma l'integrità delle serie segate dalle curve aggiunte.

Osservazione. Giova rilevare esplicitamente quanto risulta dall'analisi sopra svolta, cioè che: il ***sistema delle*** φ_{m-3+h} $(h \geq 0)$, ***aggiunte*** ad una curva piana f d'ordine m, ***non è sovrabbondante,*** i punti doppi di f (o i punti ***r-pli*** imposti come $(r-1)$-***pli***) dando luogo a condizioni indipendenti per le curve d'ordine $m-3+h$ che debbano passarvi. Questa affermazione non si estende alla φ_{m-3-h} $(h > 0)$: come esempio si consideri una curva f d'ordine 7, passante doppiamente per i 9 punti base di un fascio di cubiche, quale si costruisce combinando linearmente le curve spezzate in due cubiche del fascio e in una retta; le cubiche φ_3, aggiunte ad f, sono due anzichè una sola.

Termineremo mostrando come il teorema di Riemann-Roch, interpretato mercè la considerazione delle aggiunte, porga una risposta al problema di « riconoscere se una curva piana sia proiezione di una curva normale appartenente ad uno spazio superiore ».

Se la curva piana f, d'ordine m e di genere p, non possiede curve aggiunte φ_{m-4}, d'ordine $m-4$, la g^2_m segata dalle rette è non speciale ed appartiene ad una serie completa di dimensione $r = m - p$: dunque ***la curva f***, (che in tal caso dicesi) ***non speciale, sarà proiezione di una curva gobba dello stesso ordine soltanto se $m > p + 2$***, ed in questa ipotesi potrà derivarsi da una curva normale dello spazio S_{m-p}.

Pongasi invece che la f sia una curva speciale (ad es d'ordine $m < p + 2$), cioè che sia speciale la g^2_m segata su di essa dalle rette; allora esistono certo delle φ_{m-4} aggiunte ad f, le quali segano su f la serie completa residua di un gruppo qualunque della g_m^2. Designando con i (>0) il numero delle φ_{m-4} linearmente indipendenti, la dimensione della serie completa che contiene la g_m^2, sarà

$$r = m - p + i.$$

Dunque: *la curva piana f sarà proiezione di una curva normale dello stesso ordine, appartenente ad un S_r, con $r > 2$, quando sia*

$$i > p + 2 - m.$$

12. Curve iperellittiche. — La serie canonica g_{2p-2}^{p-1} appartenente ad una curva f di genere $p > 1$, quando non sia composta, conduce ad una immagine proiettivamente determinata della f, che prende il nome di *curva canonica* e che — come vedremo — ha fondamentale importanza nella nostra teoria. Occorre pertanto premettere l'esame del caso particolare in cui la serie canonica risulti composta.

Prenderemo le mosse dalla seguente osservazione, basata — come tutti gli sviluppi che seguono — sul teorema di Riemann-Roch:

Se per la serie canonica g_{2p-2}^{p-1} ($p > 1$) esiste una coppia neutra G_2, questa appartiene ad una g_2^1.

Infatti il G_2 imponendo *una* condizione ai gruppi canonici, appartiene a una g_2^r con $2 - r = 1$.

Dall'osservazione precedente segue che:

Condizione perchè la serie canonica g_{2p-2}^{p-1}, appartenente ad una curva f di genere $p > 1$, sia composta, è che la f contenga una g_2^1: allora tutti i gruppi canonici si compongono con $p-1$ coppie di questa serie.

Infatti, se la g_{2p-2}^{p-1} è composta, ciò significa che i gruppi di essa contenenti un punto P di f, contengono di conseguenza (almeno) un altro punto P', e così PP' costituiscono una coppia neutra per la detta serie, appartenendo quindi a una g_2^1.

Ora se la f contiene una g_2^1, invertendo la deduzione fatta innanzi, si trova che ogni coppia di questa presenta una sola condizione ai gruppi canonici che debbono contenerla, e perciò ogni gruppo canonico sarà composto con $p-1$ coppie di essa, le quali potranno assumersi ad arbitrio essendo $p-1$ la dimensione della serie canonica predetta.

Segue di qui che, se una curva f di genere $p>1$ contiene una g_2^1, essa non può contenere una seconda g_2^1, giacchè un gruppo canonico composto di $p-1$ coppie generiche della prima g_2^1 non riuscirebbe composto con le coppie della seconda. Dunque:

Una curva contenente due g_2^1 è di genere $p=1$, oppure $p=0$, ed in entrambi i casi contiene infinite g_2^1: per $p=1$ ogni coppia determina una g_2^1 onde si hanno ∞^1 g_2^1, e due g_2^1 diverse non hanno alcuna coppia a comune; invece per $p=0$ tutte le coppie stanno in una medesima g_2^2, contenente ∞^2 g_2^1, e così due g_2^1 qualsiansi hanno una coppia a comune.

Questi risultati si ottengono anche direttamente costruendo una curva piana immagine della f contenente due g_2^1, che risulta essere una quartica con (almeno) due punti doppi, come si è visto nella Nota del § 7.

Alla famiglia delle curve di genere $p>0$ contenenti una g_2^1 si collega lo studio di una classe elementare di integrali di funzioni algebriche, tra cui i più semplici sono del tipo $\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, che — per $p=1$ — si chiamano *integrali ellittici* e per $p>1$ *integrali iperellittici.*

Per questo motivo le curve di genere 1 si denominano *curve ellittiche*, e quelle contenenti una g_2^1, di genere $p>1$, *curve iperellittiche*; qualche volta quest' ultima denominazione viene usata nel senso più esteso per designare tutte le curve contenenti una g_2^1.

Il primo esempio di curve propriamente iperellittiche viene offerto dalle *curve di genere $p=2$,* la cui serie canonica è appunto una g_2^1.

L'esistenza effettiva di curve iperellittiche per qualsiasi valore del genere p, risulta dal considerare le *curve d' ordine $p+2$ con un punto p-plo,* al quale tipo si può ridurre ogni curva iperellittica di genere p mediante la g_{p+2}^2 completa non speciale determinata su di essa da un gruppo generico di $p+2$ punti: una tale g_{p+2}^2 contiene certo parzialmente la g_2^1 (essendovi un gruppo G_p+G_2 che ne contiene una coppia G_2); perciò la f_{p+2} normale su cui i gruppi della g_{p+2}^2 sono segati dalle rette del piano, dovrà avere un punto p-*plo*, O, corrispondente al G_p: la sua equazione (prendendo O nel punto all'infinito dell'asse y) risulta

$$f_{p+2}(xy) = A_p(x) \cdot y^2 + B_{p+1}(x) \cdot y + C_{p+2}(x) = 0 .$$

La f_{p+2} anzidetta non possiederà altri punti multipli, risultando già di genere p per la singolarità costituita dal punto *p-plo*. Questo tipo normale delle curve iperellittiche permette anche di verificare direttamente che i gruppi canonici di esse sono composti con $p-1$ coppie della g_2^1 giacchè le φ_{p-1} aggiunte alla f_{p+2} con un punto *p-plo* O, dovendo passare per O con la molteplicità $p-1$, si spezzano in $p-1$ rette per O.

Proiettando la curva f_{p+2} dal punto *p-plo* O (ossia riferendo proiettivamente le coppie della g_2^1 ai punti di una retta), si rappresenta la curva iperellittica di genere p sopra *una retta doppia con* $2p+2$ *punti di diramazione*, corrispondenti alle $2p+2$ tangenti alla f_{p+2} condotte da O: il gruppo dei punti di diramazione è dato da

$$D_{2p+2}(x) = B^2_{p+1} - 4A_p\, C_{p+2} = 0 ,$$

ed è un gruppo di $2p+2$ *punti arbitrari* della retta, giacchè — scelti ad arbitrio un polinomio $D_{2p+2}(x)$ ed un polinomio $B_{p+1}(x)$ — è sempre lecito decomporre il polinomio di grado $2p+2$, $D_{2p+1}(x) - B^2_{p+1}(x)$, nel prodotto di due fattori di grado p e $p+2$.

Tutte le curve iperellittiche rappresentate sopra una retta doppia cogli stessi punti di diramazione

$$D_{2p+2}(x) = 0 ,$$

sono birazionalmente identiche, perchè le coordinate dei loro punti si esprimono razionalmente per mezzo di

$$x, \ \sqrt{D_{2p+2}(x)} ,$$

e reciprocamente ogni punto di una curva iperellittica siffatta determina un valore di questo radicale.

Ora fra le curve iperellittiche rappresentate sulla retta doppia $(x, \sqrt{D_{2p+2}(x)})$ viene messa in evidenza quella di ordine $2p+2$:

$$f_{2p+2} = y^2 - D_{2p+2}(x) = 0 ,$$

che può essere assunta come tipo della famiglia, in luogo di una fra le curve d'ordine minimo f_{p+2}.

Che la $f_{2p+2}=0$ sia effettivamente una curva di genere p, risulta a priori da ciò che su di essa le rette $x=cost.$ segano una g_2^1 con $2\times 2+2p-2$ punti doppi, corrispondenti ai $2p+2$ punti di diramazione assegnati; nel caso che l'ordine di D_{2p+2} si abbassi di un'unità, cioè quando si assumano sulla retta doppia un numero dispari di punti di diramazione, si deve ritenere che uno dei punti di diramazione assegnati vada all'infinito, ristabilendosi così la parità del loro numero. Ciò è d'accordo con la considerazione, relativa al piano della variabile complessa, che un giro della x attorno ai $2p+1$ punti di diramazione propri, scambia fra loro i due rami della funzione $y(x)=\sqrt{D_{2p+1}(x)}$, producendo la sostituzione

$$(y_1 y_2)^{2p+1}=(y_1 y_2).$$

Occorre soltanto avvertire che il genere di f_{2p+2} si abbassa di un'unità ogniqualvolta due delle radici del discriminante $D_{2p+2}(x)$ vengono a coincidere, in corrispondenza a un punto che risulta doppio per la curva.

Nota. — L'esame diretto della singolarità che la f_{2p+2} possiede nel punto all'infinito dell'asse y, permette di confermare la deduzione fatta circa il genere della curva; giacchè si trova che tale singolarità è costituita da un punto $2p$-*plo* con p punti doppi infinitamente vicini.

Infatti l'equazione della curva, ridotta omogenea, è del tipo

$$y^2 z^{2p}=ax^{2p+2}+bx^{2p+1}z+\ldots.+e\,z^{2p+2},$$

e la sua singolarità nel punto O di coordinate $x=0$, $z=0$, si può analizzare ponendo $y=1$. Il metodo di Newton-Cramer (cfr. L. 4°, § 27; vol. II, pagg. 523, 527), dà ora, come approssimazione della curva nell'intorno di O (e nel caso generale $a\neq 0$) la coppia delle iperparabole osculatrici

$$z^{2p}-a\,x^{2p+2}=(z^p+\sqrt{a}\cdot x^{p+1})(z^p-\sqrt{a}\cdot x^{p+1})=0;$$

e poichè le indicate iperparabole presentano in O due rami cuspidali ordinari d'ordine p, appare che la f_{2p+2} possiede in O un punto $2p$-*plo* con p punti doppi infinitamente vicini, succedentisi sopra un ramo ordinario d'ordine p, che tocca la retta all'infinito, e non vi sono certo altri punti doppi infinitamente vicini ad O oltre ai p prossimi ad esso sopra nominati, giacchè il primo punto libero che si trova su ciascuno dei due rami non è comune ad essi, essendo diverse le rispettive costanti caratteristiche $+\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$.

Seguendo i nostri simboli (L. 4°, § 8) la singolarità di cui si discorre viene rappresentata da

$$(O^{2p}\, O_1^{\,2}\, [O_2^{\,2}\, O_3^{\,2} \,....\, O_p^{\,2}]) .$$

Nel caso particolare $a=0$, la curva

$$f = y^2 - b\, x^{2p+1} + ... + e = 0$$

appare ridotta all'ordine $2p+1$, essendosi staccata la retta all'infinito ($z=0$), e non vi è più luogo a distinguere per essa due rami.

In questo caso, infatti, cioè quando si assume sulla retta doppia un numero dispari di punti di diramazione proprî, la curva approssimante la f diviene l'iperparabola d'ordine $2p+1$

$$z^{2p-1} = bx^{2p+1}.$$

Questa presenta in O una singolarità costituita da $p-1$ punti doppi infinitamente vicini al punto $(2p-1)$-*plo* O, e prossimi ad esso, succedentisi sopra un ramo cuspidale ordinario d'ordine $2p-1$; poichè lo sviluppo in frazione continua di $\dfrac{2}{2p-1}$ ci dà la caratteristica del ramo

$$(O^{2p-1}\, O_1^{\,2}\, [O_2^{\,2}\, O_3^{\,2} \,....\, O^2_{p-1}\, O_p^{\,1}]).$$

Tale sarà, dunque, anche la caratteristica del ramo di f in O.

Aggiungasi che in questo caso la retta all'infinito compare fra le tangenti altrove condotte da O alla curva, essendo il ramo di classe 2; così si verifica che il punto all'infinito della retta doppia figura fra i punti di diramazione.

Indipendentemente dall'analisi precisa della singolarità della curva $f=y^2-D(x)=0$, nel punto $O=(x=0, y=\infty)$, si possono verificare le circostanze essenziali riconosciute di sopra, calcolando il discriminante della funzione algebrica di secondo grado $y(x)$ definita dalla $f=0$.

Se la $f=0$ è una generale curva d'ordine n con O $(n-2)$-*plo*, il discriminante Δ (risultante di $f=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=0$) è d'ordine $2(n-1)$; ma se la f acquista δ punti doppi, da esso si stacca un fattore inessenziale d'ordine δ^2 che è un quadrato perfetto:

$$\Delta = D \cdot \Delta_1^2.$$

Reciprocamente, se in Δ figura come fattore il quadrato di un polinomio d'ordine δ, la curva possiede oltre il punto O $(n-2)$-*plo* altri δ punti doppi, corrispondenti a codesta parte inessenziale del discriminante.

Ciò premesso, quando si va a calcolare il discriminante della $y(x)$ definita dalla

$$f(xy) = y^2 - D_{2p+2}(x) = 0,$$

cioè il resultante di $f=0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0,$
si trova

$$\Delta = D_{2p+2}(x);$$

ciò significa che nel gruppo dei $2(2p+1)$ punti $\Delta(x)=0$ deve figurare il punto all'infinito contato $2p$ volte, e quindi che la curva f possiede p punti doppi (infinitamente vicini ad O) che sono proiettati da O secondo la retta all'infinito (o secondo rette infinitamente vicine a questa). Quando poi il D, e quindi la f, si abbassi all'ordine $2p+1$, il punto all'infinito della retta doppia verrà a figurare nel gruppo dei $2(2p)$ punti rappresentati da $\Delta(x)=0$, $2p-1$ volte, e così corrisponderà a $p-1$ punti doppi della curva f e a un punto di diramazione.

Abbiamo già avvertito che « tutte le curve di genere $p=2$ sono iperellittiche ». Ma *per $p>2$ le curve iperellittiche si presentano come casi particolari di curve dello stesso genere, non iperellittiche.*

Per riconoscere la cosa nel modo più espressivo (come resulterà più tardi dal calcolo dei moduli: cfr. § 33) converrebbe considerare il sistema di tutte le curve piane d'ordine $p+2$ con $\frac{p(p-1)}{2}$ punti doppi (a cui si lasciano ridurre in generale le curve di genere p mediante una loro g^2_{p+2} non speciale) e determinare le condizioni perchè esse sieno iperellittiche. Ma per il nostro scopo basterà osservare che il sistema delle C_{p+2} (d'ordine $p+2$) con un punto *p-plo* O, dipendente da $3p+5$ parametri, è contenuto nel sistema (non lineare) di $3p+6$ dimensioni costituito dalle K_{p+2} che hanno in O un punto $(p-1)$-*plo* e posseggono altri $p-1$ punti doppi, e dimostrare che le K_{p+2} non sono iperellittiche per $p>2$. Infatti se una K_{p+2} contenente già una g^1_3 segata dalle rette per O, contiene altresì una g^1_2, riferendo proiettivamente la g^1_3 e la g^1_2 a due fasci di rette, si riuscirà a trasformare la curva in una quintica con un punto doppio e un punto triplo, per cui deve essere $p=2$ (o $p<2$).

Si può cercare di generalizzare il concetto della curva iperellittica, domandandosi se possa accadere che, sopra una curva f, non iperellittica (di genere $p>2$), i gruppi canonici contenenti $r\,(>1)$ punti generici contengono di conseguenza altri punti. La risposta a questa domanda è negativa per $r<p-1$, (mentre è ovvio che $p-1$ punti generici definiscono *un* gruppo canonico, il quale contiene di conseguenza altri $p-1$ punti). Infatti se una curva f, di genere $p>2$, non è iperellittica, essa si lascia trasformare in una curva canonica C d'ordine $2p-2$ in S_{p-1}, e — nell'ipotesi a cui si riferisce il nostro esame — dovrebbe accadere che tutti gli iperpiani per r punti di C seghino ulteriormente la curva in punti appartenenti allo S_{r-1} determinato da quegli r. Quindi, proiettando C da $r-2$ dei suoi punti, si avrebbe una curva K di S_{p+1-r}, per la quale ogni corda riuscirebbe una trisecante; ma ciò è assurdo per una qualsiasi curva gobba dello spazio ordinario o di uno spazio a più dimensioni (cioè per $p+1-r\geq 3$, $r\leq p-2$), come si è già avuto occasione di vedere nel L. 3°, § 43. Per chi non voglia riandare al vol. II in cui è contenuta quella dimostrazione, ne ricorderemo qui il fondamento. Se tutte le corde di una curva gobba K sono trisecanti, la retta che congiunge due punti qualunque A e B incontra K in un terzo punto P; e la retta che unisce P col punto A' infinitamente vicino ad A, incontra K in un punto B' infinitamente vicino a B, onde le tangenti a K in A e B risultano incidenti; ma se le tangenti di una curva a due a due si incontrano occorre che esse stiano in un medesimo piano contenente la curva.

Abbiamo dunque:

Se sopra una curva f di genere $p\,(>2)$ i gruppi canonici contenenti $r<p-1$ punti generici contengono di conseguenza altri h punti, la curva è iperellittica, ed $h=r$. Sopra una tale curva accade di fatto che i gruppi canonici contenenti $r=1, 2, \ldots\, p-1$ punti generici, contengono di conseguenza gli $h=r$ punti coniugati.

Il resultato precedente permette di precisare il teorema di Clifford (§ 11) nel senso che: *se sopra una curva di genere p esiste una g^r_{2r} speciale, diversa dalla serie canonica* ($r<p-1$) *la curva è iperellittica* e i gruppi della serie sono composti con r coppie della g^1_2. Infatti, per il teorema di Riemann-Roch, i gruppi della g^r_{2r} debbono presentare r condizioni ai gruppi canonici soggetti a contenerli, e perciò un gruppo canonico che contenga r punti generici della curva, conterrà di conseguenza anche gli altri r del gruppo della g^r_{2r} da quelli definito, onde si deduce che la curva è iperellittica.

Pertanto, sopra una curva di genere p non iperellittica, sarà per ogni g^r_n speciale completa, diversa della serie canonica, $n>2r$. E si può aggiungere che le sole serie complete g^r_{2r} appartenenti alla curva sono la g^{p-1}_{2p-2} canonica, e le ∞^p serie non speciali g^p_{2p} in cui si distribuiscono i gruppi di $2p$ punti della curva stessa.

13. **Curve canoniche.** — Procediamo a considerare in generale le curve canoniche $C_{2p-2}{}^{p-1}$ d' ordine $2p-2$ nello spazio S_{p-1}, sopra le quali gli iperpiani segano la serie canonica. Codeste curve sono semplici, e prive di punti doppi (non essendovi coppie neutre per la g^{p-1}_{2p-2}) quando si escludano, come di regola nel seguito, le curve iperellittiche.

Si può aggiungere che *una curva C di genere p e d'ordine $2p-2$, appartenente ad uno spazio S_{p-1}, è una curva canonica.* Infatti la serie g^{p-1}_{2p-2} segata sulla C dagli iperpiani è speciale, essendo $2p-2-(p-1)<p$, e poichè il suo ordine vale $2p-2$, non può essere che la serie canonica completa.

Nel caso iperellittico la $C_{2p-2}{}^{p-1}$ si riduce ad una curva doppia d'ordine $p-1$, che è una curva razionale normale dello S_{p-1}; e la detta curva doppia si può ancora riguardare come immagine della curva di genere p che le ha dato origine, in rapporto alla sua g^{p-1}_{2p-2} canonica, tenuto conto dei $2p+2$ punti di diramazione.

L' importanza fondamentale della considerazione delle curve canoniche, risulta da ciò che essa permette di dare una forma espressiva al teorema di invarianza della serie canonica:

Due curve birazionalmente trasformabili l'una nell'altra, definiscono curve canoniche proiettive.

Così la geometria delle trasformazioni birazionali delle curve viene ricondotta alla geometria proiettiva di particolari modelli di esse, quali si hanno (per le curve di genere $p > 2$, non iperellittiche) nelle curve canoniche C_{2p-2}^{p-1}.

Anche per le curve iperellittiche, compreso il caso $p = 2$, (ove non si vogliano considerare le curve doppie coi rispettivi punti di diramazione) si possono dare ugualmente delle curve *semplici* le cui proprietà proiettive rispecchino le loro proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. Basta infatti sostituire alla serie canonica, e alla C_{2p-2}^{p-1} che ne porge l' immagine proiettiva, una serie multipla della serie canonica (la quale è parimente invariante), e quindi la ***curva bicanonica*** e ***tricanonica*** ecc. che ne offre il modello. Per $p = 2$ il doppio della g_2^1 è ancora una g_4^2 composta, ma, poichè le terne di coppie della g_2^1 sono soltanto ∞^3, il triplo della g_2^1 dà una serie completa g_6^4 non più composta; così avremo per le curve di genere $p = 2$ una curva tricanonica semplice C_6^4. Invece per le curve iperellittiche di genere $p > 2$ già la curva bicanonica C_{4p-4}^{3p-4} riesce semplice, poichè i gruppi di $2p - 2$ coppie della g_2^1 danno una serie, non completa, di dimensione

$$2p - 2 < 3p - 4.$$

A questo punto si pongono assai naturalmente le questioni generali concernenti le trasformazioni proiettive e quindi gli invarianti (proiettivi) delle curve canoniche, cioè i moduli, o costanti caratteristiche, delle curve di genere p, di fronte alle trasformazioni birazionali: argomenti a cui è dedicato il capitolo III di questo libro. Al quale lo studioso può passare di qui direttamente, ove gli piaccia tralasciare gli sviluppi complementari di questo paragrafo e del seguente, nonchè l' intero capitolo II, che vale soltanto ad illuminare le diverse vie costruttive per le quali si è pervenuti a fondare la teoria, di cui abbiamo già porto i risultati fondamentali.

Giova tuttavia esaminare particolarmente le curve canoniche che si presentano per i primi valori del genere: $p = 3, 4, 5, 6$, assegnandone la costruzione effettiva. Da quest' esame saremo poi condotti a riconoscere un teorema generale sulla possibilità di definire la curva canonica come curva base di un sistema di quadriche.

$p = 3$). - *Ogni curva di genere 3, non iperellittica, ha come curva canonica una quartica piana* senza punti doppi, cosicchè lo studio proiettivo delle quartiche ha valore generale per la teoria delle curve di genere 3, rispetto alle trasformazioni birazionali.

Quando si voglia comprendere anche il caso iperellittico, bisogna considerare fra le quartiche anche le coniche doppie con 8 punti di diramazione (le quali costituiscono curve inviluppo di classe 12, degeneri nella conica contata due volte, e in 8 fasci) [1].

$p = 4$). - *Ogni curva di genere 4 non iperellittica, ha come curva canonica una sestica di S_3, intersezione completa di una quadrica con una superficie cubica.*

Consideriamo la C_6^3, che indichiamo brevemente con C_6, canonica (escludendo il caso iperellittico in cui essa si riduce a una cubica doppia); si può mostrare che vi è una quadrica Q contenente la curva, valutando la dimensione (massima) della serie non speciale segata su di essa dalle ∞^9 quadriche: questa serie g_{12}, se è completa, ha la dimensione $12 - p = 8$, e in ogni caso una dimensione ≤ 8; e perciò ogni gruppo di essa appartiene (almeno) ad ∞^1 quadriche, e fra queste una quadrica, Q, costretta a contenere un altro punto della C_6, contiene la C_6 (risulta a posteriori che la g_{12} di cui si discorre innanzi è completa, poichè la C_6 non può appartenere a più di una quadrica).

In modo analogo, poichè le ∞^{19} superficie cubiche dello spazio segano sulla sestica una g_{18} non speciale di dimensione $r \leq 14$, si riconosce che la C_6 appartiene ad (almeno) ∞^4 superficie cubiche, fra le quali vi saranno superficie non

[1] La quartica piana si può ottenere in generale come proiezione di una sestica gobba, intersezione di una superficie cubica con una quadrica tangente, dal punto doppio O: quando la quadrica diventi un cono di vertice O, la quartica si riduce ad una conica doppia.

riducibili in una quadrica e in un piano; così la C_6 risulterà intersezione completa di una quadrica e di una superficie cubica.

Reciprocamente ogni sestica, intersezione completa di una quadrica Q e di una superficie cubica (in posizione generica, cioè non tangente in alcun punto), è una curva (canonica) di genere 4: infatti facendone la proiezione stereografica da un punto generico di Q, essa viene proiettata in una sestica piana con due punti tripli.

$p=5$). - *Ogni curva di genere 5, non iperellittica, ha come curva canonica una $C_8{}^4$ di S_4 appartenente ad una rete di quadriche, la quale si può in generale definire come intersezione completa di tre quadriche di S_4. Fa eccezione il caso in cui la curva contenga una g_3^1, la $C_8{}^4$ resultando posta sopra una rigata cubica che appartiene a tutte le quadriche per essa* [1].

Anzitutto si consideri in S_4 la $C_8{}^4$ canonica, che indichiamo brevemente con C_8: poichè le ∞^{14} quadriche (a 3 dimensioni) Q segano su di essa una serie g_{16} che (ammesso sia completa)

[1] Per comodità del lettore riferiremo qui le facili conoscenze sulle quadriche iperspaziali che importa tenere presenti in questo paragrafo.

In uno S_n, ad n dimensioni, il sistema totale delle quadriche Q_{n-1}, ad $n-1$ dimensioni, dipende da $\dfrac{n(n+3)}{2}$ parametri essenziali, e così $\dfrac{n(n+3)}{2}$ punti generici determinano una Q_{n-1}.

Una Q_{n-1} (di S_n) con r punti doppi indipendenti possiede uno spazio doppio S_{r-1}, ed è un cono (di specie r) proiettante da codesto spazio una Q_{n-r-1}.

Ad una Q_{n-1}, che non sia un cono, appartengono spazi lineari S_i di dimensione massima $i=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ (massimo intero contenuto nella frazione). Per n pari codesti spazi formano un unico sistema continuo di dimensione $\dfrac{(i+1)(i+2)}{2}$, mentre per n dispari essi formano *due* sistemi di dimensione $\dfrac{i(i+1)}{2}$. Quando poi $n-1$ non è divisibile per 4, gli S_i (generici) di sistema diverso sono incidenti, e quelli di ugual sistema sono sghembi fra loro (come le rette sulla Q_2 di S_3). Invece se $n-1$ è divisibile per 4, gli S_i dello stesso sistema sono incidenti e quelli di sistema diverso sono sghembi: esempio di ciò è offerto dalla Q_4 di S_5 come appare tosto dalla circostanza che essa rappresenta l'ordinario spazio rigato. (Cfr. L. 1°, § 19, e, per maggiori particolari, il trattato di E. BERTINI « Introduzione alla Geometria Proiettiva degli Iperspazi », cap. VI) ha la dimensione 11, si deduce che vi sono tre quadriche linearmente indipendenti, e quindi una rete di quadriche passanti per la C_8. Si può accertarsi che la curva non appartiene ad un sistema più ampio di quadriche, come segue. Si consideri il gruppo G_8 sezione della C_8 con un iperpiano generico X; quattro punti del G_8 — tre qualunque di essi essendo punti generici della curva canonica — non si trovano su un piano (§ 12, pag. 96), quindi il G_8 non può appartenere a più che ∞^2 superficie del secondo ordine, poichè se ne troverebbe una spezzata nel piano contenente tre punti del G_8 e in un altro piano contenente i rimanenti; ma da ciò segue che la C_8 non si trova su ∞^3 quadriche Q, giacchè vi sarebbe una Q spezzata nell' iperpiano X e in un altro iperpiano contenente la C_8 (che invece non sta in un S_3).

Ora si è tratti a domandare se la curva canonica d'ordine 8 possa essere definita come intersezione completa di tre quadriche Q passanti per essa, ovvero se codeste Q abbiano a comune — oltre la curva stessa — una superficie in cui questa sia contenuta.

Il dubbio che qui si affaccia appare subito giustificato; invero: se la C_8 contiene una g_3^1, le terne di questa (pel teorema di Riemann-Roch) stanno su rette trisecanti, e allora accade effettivamente che le Q per C_8 contengano di conseguenza la superficie F, luogo delle nominate trisecanti.

Per dare origine a questo caso basta costruire la curva canonica corrispondente a una quintica piana dotata di un punto doppio.

Ora si dimostra reciprocamente che: se le quadriche Q di S_4, assoggettate a passare per una C_8 canonica, contengono di conseguenza una superficie F, questa F è una rigata cubica, le cui generatrici sono trisecanti della curva C_8.

Anzitutto la superficie F (non appartenente ad un iperpiano e perciò d'ordine superiore al secondo) sarà certo una cubica, giacchè per una quartica passano soltanto ∞^1, e non — come qui accade — ∞^2, quadriche. Qui è utile verificare direttamente, sebbene non necessario per l'ordine logico della deduzione, che una superficie cubica — gobba — di S_4 appartiene sempre ad ∞^2 quadriche, cioè ai coni che la proiettano dai suoi punti.

In secondo luogo è chiaro che ogni superficie cubica (gobba) di S_4 (definibile come intersezione ulteriore di due quadriche aventi un piano a comune) è rigata, giacchè un iperpiano tangente la sega secondo una cubica gobba con punto doppio O, che perciò deve spezzarsi contenendo una retta per O. Infine la *rigata* F essendo *razionale*, cioè essendo razionale la serie ∞^1 delle generatrici, che corrispondono biunivocamente ai punti di una cubica gobba sezione iperpiana, si ha che codeste generatrici della rigata F segano sopra la C_8^4 una serie lineare g_n^1; ma, per il teorema di Riemann-Roch, risulta $n = 3$, giacchè, per $n = 3 + s$, la serie sarebbe contenuta in una g_{3+s}^{s+1} semplice, onde la curva conterrebbe una g_4^2, e si lascierebbe trasformare in una quartica piana, di genere $p < 4$.

Ora mostriamo che esistono curve canoniche C_8 non contenenti una g_3^1, e perciò determinate come intersezione completa di tre quadriche di S_4. A tale scopo basta considerare la sestica piana C_6 $(= C_6^2)$ con 5 punti doppi (tipo a cui si riduce in generale una curva di genere $p = 5$ per proiezione della curva canonica da due dei suoi punti).

L'esistenza effettiva di una C_6 siffatta, dotata di 5 punti doppi $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ in posizione generica, risulta, per es., dal combinare linearmente due coppie di cubiche spezzate in una conica per $A_1 A_2 A_3 A_4$ e in una retta per A_5. E si vede che sulla C_6 non vi è alcuna g_3^1 giacchè — per il teorema di Riemann-Roch — una terna di questa, presa insieme ai 5 punti $A_1 .... A_5$, costituirebbe un gruppo G_8 comune ad ∞^1 cubiche; il che è assurdo, gli 8 punti non stando sopra una conica, che altrimenti farebbe parte di C_6 (l'assurdo si elimina solo quando si abbia una C_6 su cui tre punti doppi vengano riuniti in un punto triplo).

Conviene aggiungere che il caso di una curva di genere 4 con una g_3^1 si presenta come caso particolare di quello in cui non vi è g_3^1, poichè basta riunire 3 dei 5 punti doppi della sestica piana C_6 in un punto triplo.

Anche la costruzione della curva canonica C_8 pone in evidenza lo stesso fatto. Invero la curva intersezione completa di tre quadriche generiche di S_4, pur non conoscendo *a priori* la sua identità birazionale con la sestica C_6 di genere 5, si vede essere di genere 5 per ragioni di continuità, potendosi ridurre alla curva canonica cui dà origine la C_6 senza acquistare punti doppi. Ciò posto appare che la condizione per una C_8 di contenere una g_3^1, corrisponde alla condizione perchè una rete di quadriche di S_4 abbia come base una superficie (cubica) anzichè una curva (d'ordine 8).

$p=6$). - *Ogni curva di genere 6, non iperellittica, ha come curva canonica una $C_{10}{}^5$ di S_5, appartenente ad un sistema ∞^5 di quadriche, la quale si può in generale definire come curva base di questo sistema. Fanno eccezione i casi in cui la curva contenga una g_3^1 ovvero una g_5^2, la $C_{10}{}^5$ resultando posta sopra una superficie del quart' ordine (rispettivamente rigata o no) che appartiene a tutte le quadriche per essa.*

Anzitutto si consideri in S_5 la $C_{10}{}^5$ canonica, che per brevità indichiamo con C_{10}: come nel caso precedente ($p=5$) si trova che — avendosi in S_5 ∞^{20} quadriche (a 4 dimensioni) Q — la nostra curva appartiene precisamente ad ∞^5 quadriche Q.

Ora si pone la domanda se la nostra curva costituisca l'intera varietà comune a sei Q indipendenti che la contengono, o se queste — in forza del passaggio per la curva — abbiano di conseguenza a comune una superficie (o varietà), a cui la curva stessa appartenga.

Il dubbio si giustifica osservando due casi particolari:

1) Se la C_{10} contiene una g_3^1, (per il teorema di Riemann-Roch) le terne di queste si trovano su rette trisecanti, le quali generano una superficie rigata F, appartenente a tutte le Q passanti per C_{10};

2) Se la C_{10} contiene una g_5^2, i gruppi di questa stanno su ∞^2 piani, e in ciascuno di questi sopra una conica K; allora tutte le coniche K sono contenute nelle Q passanti per la C_{10}. Si può provare che le K formano una superficie, e non una varietà a 3 dimensioni, mostrando che ogni punto di una K — posta su un piano π pentasecante la curva canonica — appartiene ad ∞^1 coniche analoghe: ciò risulterà dimostrato quando si riconosca che gli ∞^2 piani pentasecanti la C_{10} segano π in punti della relativa K.

Ora l'asserto si prova per assurdo come segue. Anzitutto vediamo che i piani pentasecanti la C_{10} sono a due a due incidenti; infatti tre di essi debbono appartenere ad ∞^2 quadriche (ognuno presentendo una condizione alle quadriche per C_{10} che debbano contenerlo), e dati tre piani su una quadrica di S_5 due almeno di essi — trovandosi nello stesso sistema — sono incidenti; per conseguenza due qualunque piani del nostro sistema, che è continuo, saranno incidenti.

In secondo luogo, se un piano π', pentasecante la C_{10}, sega π in un punto P fuori della relativa conica K, le ∞^4 quadriche Q che contengono π, conterranno di conseguenza anche π' (con cui hanno a comune una conica ed un punto) e così analogamente conterranno tutti gli ∞^2 piani pentasecanti la C_{10}, Ma questa conclusione è manifestamente assurda, perchè ∞^2 piani di S_5 formano una varietà a quattro dimensioni, e di ordine > 1, eccetto il caso che essi si incontrino a due a due secondo rette giacendo quindi in un S_3, il che è qui impossibile perchè la C_{10} vi sarebbe contenuta.

Si è così provato che se la C_{10} canonica contiene una g_5^2, tutte le quadriche passanti per essa passano di conseguenza per una superficie su cui la curva è tracciata.

Aggiungiamo che si dà origine di fatto ai casi 1) e 2) costruendo la curva canonica di una sestica con un punto triplo e un punto doppio, e rispettivamente di una quintica senza punti doppi: questi due casi sono essenzialmente distinti, perchè la quintica piana non può contenere una g_3^1, le cui terne presenterebbero due sole condizioni alle coniche del piano.

Ora arriveremo a riconoscere che i casi citati sono i soli nei quali la C_{10} non riesce definita come intersezione delle ∞^5 quadriche Q passanti per essa, e nel medesimo tempo a precisare la natura della superficie a cui in quei casi siamo stati condotti. A tale uopo basta osservare che: una superficie irreducibile F, appartenente a un S_5 (e non a un S_4) la quale sia contenuta in ∞^5 quadriche Q, è una superficie d'ordine 4, le cui sezioni iperpiane risultano curve razionali normali. Questa osservazione si giustifica notando che il numero delle quadriche a quattro dimensioni di S_5 passanti per F, non può superare quello delle quadriche a tre dimensioni passanti per una sua sezione iperpiana, nè similmente quello delle superficie di second'ordine passanti per i punti d'intersezione di F con un S_3; altrimenti si troverebbe una quadrica spezzata, e quindi un iperpiano contenente F. Ciò posto è chiaro che l'ordine di F non può superare 4, giacchè per 5 punti (linearmente indipendenti) di un S_3 passano soltanto ∞^4 superficie quadriche, e non può essere minore di 4, la F non appartenendo a un S_4.

Si trae da ciò che quando le Q per una C_{10} contengono di conseguenza una varietà più ampia, questa è una superficie del quart'ordine; così sarà del quart' ordine la superficie comune alle Q, che si è trovata esistere nei casi 1) e 2).

Per procedere innanzi conviene classificare le superficie del quart' ordine di S_5 (a cúrve sezioni razionali normali). Perciò si considererà l' iperpiano tangente in un punto; la sua sezione — essendo dotata di punto doppio — si spezzerà contenendo una retta ovvero una conica per il punto. Nel primo caso la data superficie, F, sarà una rigata razionale. Nel secondo caso gli iperpiani per la nominata conica, K, staccheranno su F una rete di coniche (contenente anche la K) che si segano a due a due in un punto; invece se le dette coniche si segassero a coppie in due punti, i loro piani starebbero tutti in un S_3 che conterrebbe F; la superficie F (non rigata) che gode di questa proprietà è conosciuta col nome di *superficie di* VERONESE.

Ora (come per il caso $p=5$) il teorema di Riemann-Roch ci dice che:

se una C_{10} appartiene ad una rigata razionale F, le generatrici di questa sono trisecanti, segando sulla curva una g_3^1 (caso 1):

e se, invece, una C_{10} appartiene ad una superficie di Veronese, i piani contenenti le coniche di questa, segano sulla curva una g_5^2 (caso 2).

Con ciò il teorema enunciato in principio riceve piena dimostrazione; e l' esistenza di curve di genere 6, contenenti una g_3^1 o una g_5^2, vale anche a provare indirettamente l' esistenza dei due tipi di superficie del quart' ordine di S_5, incontrati nella nostra classificazione.

Conviene aggiungere che le curve canoniche C_{10}, contenenti una g_3^1 o una g_5^2, si possono riguardare come casi particolari di un medesimo tipo più generale, che (come proveremo) non contiene nè g_3^1 nè g_5^2.

A tale scopo giova considerare la curva piana del settimo ordine, C_7, dotata di 9 punti doppi; quando 6 di questi punti si riuniscono in un punto quadruplo O, appare sulla C_7 una g_3^1, segata dalle rette per O; e quando invece i 9 punti doppi si riuniscono in tre punti tripli, le coniche per questo segano sulla C_7 una g_5^2. Ma nel caso più generale la C_7 non contiene nè g_3^1 nè g_5^2. Per vederlo riconosciamo anzitutto che si può costruire una C_7 irriducibile di genere 6 assumendo come punti doppi di essa 9 punti generici del piano $A_1 A_2 .... A_9$; per i quali passerà *una* cubica C_3. Infatti vi è un sistema lineare di dimensione $35-27=8$ di C_7 passanti doppiamente per $A_1 .... A_9$, fra le quali le curve spezzate nella C_3 e in una quartica sono soltanto ∞^5; è chiaro che la C_7 generica coi punti doppi $A_1 A_2 \dots A_9$, oltre a essere irriducibile, sarà di genere 6, non potendo avere altri punti doppi per il teorema di Bertini (cfr. L. 2°, § 5, ovvero L. 3°, § 20).

Ciò posto procediamo ad esaminare se una C_7 generica, coi punti doppi $A_1 A_2 \dots A_9$, possa contenere una g_3^1 ovvero una g_5^2.

Se la C_7 contiene una g_3^1, (per il teorema di Riemann-Roch) una terna generica di questa, presa insieme ai punti $A_1 \dots A_9$, dà un gruppo G_{12} per cui passano ∞^3 quartiche; ora sopra una di queste (priva di punti doppi per il teorema di Bertini) le dette quartiche segano, fuori del G_{12}, una g_4^2, che dovrà essere la serie canonica staccata dalle rette; in virtù del teorema del resto (che racchiude il teorema di Gergonne del L. 2°, § 16) si deduce che il G_{12} appartiene ad una cubica, e così che i 9 punti $A_1 A_2 \dots A_9$ appartengono ad infinite cubiche (formanti fascio). Ma ciò è impossibile se i 9 punti $A_1 A_2 \dots A_9$ sono assunti in posizione generica.

Supponiamo ora che la nostra C_7 contenga una g_5^2; per un gruppo generico di queste si avranno ∞^2 quartiche aggiunte, e queste — passando anche per $A_1 A_2 \dots A_9$ — hanno in comune 14 punti semplici. Pertanto sopra una di tali quartiche le altre dovranno segare ulteriormente una g_2^1; il che è assurdo se la quartica di cui si discorre è priva di punti doppi. Ma ciò è lecito supporre, per il teorema di Bertini, finchè i punti $A_1 A_2 \dots A_9$ non si riuniscono dando luogo ad almeno un punto triplo della C_7.

I resultati precedenti si lasciano generalizzare col seguente Teorema [1]. *Una curva di genere $p > 4$, non iperellittica, ha come curva canonica una $C_{2p-2}{}^{p-1}$, appartenente ad un sistema lineare di dimensione* $\dfrac{(p-1)(p+2)}{2} - (3p-3)$ *di quadriche Q dello spazio S_{p-1}, e riesce in generale definita come curva base di questo sistema. Fa eccezione il caso in cui essa contenga una g_3^1, la $C_{2p-2}{}^{p-1}$ trovandosi sopra una rigata razionale d'ordine $p-2$ comune a tutte le nominate Q; e — per $p=6$ — anche il caso che la $C_{10}{}^5$ contenga una g_5^2, trovandosi allora sopra una superficie di* Veronese, *per cui pure passano le Q.*

[1] Cfr. F. Enriques « Atti dell'Accademia di Bologna », 4 maggio 1919.

In primo luogo, per $p > 6$, come per $p = 6$, si dimostra che una $C_{2p-2}{}^{p-1}$ contenente una g_3^1 sta sopra una rigata F, le cui generatrici contengono le terne della g_3^1, e quindi F appartiene a tutte le Q che passano per la curva.

In secondo luogo si prova pure (come pei primi valori di p) che la sola superficie di S_{p-1}, la quale presenti $3p-3$ condizioni alle quadriche Q di quello spàzio, è la superficie d'ordine $p-2$, le cui sezioni iperpiane sono curve razionali normali.

In terzo luogo si dimostra (*teorema di* DEL PEZZO) (¹) che le superficie d'ordine $n-1$ di S_n (a curve sezioni razionali normali), per $n > 5$, sono rigate (*razionali*). A tale scopo si osservi che un iperpiano tangente sega una tale superficie, F, secondo una curva (connessa) riducibile in due curve razionali normali, C_r e C_s $(r+s=n-1)$, passanti per il punto di contatto: e la C_r appartiene ad un sistema lineare ∞^r di curve normali dello stesso ordine segate dagli iperpiani per C_s, come la C_s ad un sistema ∞^s. Ora se $r > 2$, si troverà un iperpiano per C_s tangente in un punto di F fuori di C_s, che darà una C_r spezzata parimente in due curve razionali normali. Così seguitando si trova infine un sistema ∞^1 di rette (e allora la F è rigata ed un iperpiano tangente in un suo punto contiene già la generatrice per esso), ovvero un sistema ∞^2 di coniche, K, secantisi a due a due in un punto (variabile). Ma quest'ultima ipotesi non può presentarsi per una superficie appartenente ad uno spazio ad $n > 5$ dimensioni; giacchè tre coniche K determinano un S_5, in cui deve giacere ogni altra conica K incidente ad esse.

Ora se le Q passanti per una $C_{2p-2}{}^{p-1}$ contengono di conseguenza una varietà su cui viene tracciata la curva, codesta varietà dovrà essere una superficie d'ordine $p-2$ dello S_{p-1} e — per $p > 6$ — una rigata, le cui generatrici — per il teorema di Riemann-Roch — riusciranno trisecanti della $C_{2p-2}{}^{p-1}$.

L'esistenza di curve canoniche $C_{2p-2}{}^{p-1}$ $(p > 6)$ non contenenti una g_3^1, e di cui quelle con una g_3^1 sono casi particolari, si può provare (indipendentemente dal computo delle costanti caratteristiche o moduli da cui dipende una classe di curve di genere p), mediante il semplice esempio di curve

(¹) Rendic. dell'Accademia di Napoli, 1885. Per $n=5$ si hanno anche le superficie di VERONESE.

contenenti in generale una g_4^1 e suscettibili di particolarizzarsi in guisa che essa diventi una g_3^1: si ha infatti che per $p > 6$ una curva con una g_4^1 non può contenere anche una g_3^1, perchè l'esistenza di due tali serie permette di trasformare la curva in un'altra d'ordine 7, con un punto triplo e un punto quadruplo, che è di genere $p \leq 6$. Ora si ottengono curve di genere p qualsiasi, con una g_4^1, considerando le curve C_n d'ordine n con un punto $(n-4)$-*plo*, O, e con un conveniente numero δ di punti doppi; e nella famiglia di tali curve (per $\delta > n - 4$) si trovano curve con O $(n-3)$-*plo* per cui $n - 4$ punti doppi (fra i δ) debbono ritenersi sovrapposti ad O. L'esistenza effettiva delle C_n si riconosce qui combinando linearmente coppie di curve d'ordine m e $n - m$ passanti per O^{m-2} e O^{n-m+2}, aventi a comune altri δ punti semplici.

14. Il problema delle serie speciali: tipi normali di Brill e Nöther e di Riemann. — Ci proponiamo qui di dire qualche cosa intorno al problema generale della determinazione delle serie speciali appartenenti ad una curva di genere qualsiasi. L'importanza di questo problema risulterà particolarmente dalle applicazioni che se ne vedranno in questo stesso paragrafo: trasformazione di una curva di genere p in una curva piana d'ordine minimo (tipo normale di Brill e Nöther); trasformazione della curva in un'altra $f(XY) = 0$ avente il «grado minimo» non più complessivamente, ma separatamente rispetto alle due variabili X e Y (tipo di Riemann); quest'ultima trasformazione risponde alla ricerca della *irrazionalità* $Y(X)$ *di grado minimo*, per mezzo della quale si ottiene la rappresentazione parametrica della curva.

Sopra una curva di genere p si hanno sempre serie lineari speciali complete (di dimensione $h > 0$), g_{2p-2-h}^{p-1-h}, dedotte dalla serie canonica fissando h $(< p - 1)$ punti generici, e queste serie hanno l'indice di specialità $i = 1$. Similmente, se la curva contiene una serie g_n^r d'indice di specialità $i > 1$, esistono pure serie g_{n-h}^{r-h}, col medesimo indice di specialità, dedotte da questa togliendo h $(< r)$ punti generici. Inoltre se una serie g_n^r possiede h punti fissi, togliendoli si ottiene una g_{n-h}^r per cui l'indice di specialità cresce di h; e così cresce di h la dimensione della serie residua g_{2p-2-n}^{i-1} per l'aggiunta di codesti punti. Pertanto (considerando insieme ad una serie la sua residua) il problema della determinazione delle serie speciali appartenenti ad una curva, si riduce alla ricerca delle *serie primitive*, prive di punti fissi e non ampliabili per l'aggiunta di punti, una serie primitiva avendo sempre per residua una serie primitiva.

Ora la ricerca delle serie speciali, e in particolar modo delle serie primitive, appartenenti ad una curva di genere p, si riconduce a quella degli spazi plurisecanti la curva canonica $C_{2p-2}{}^{p-1}$. Impostando in tal guisa il problema, si lasciano da parte le curve iperellittiche, per le quali tuttavia si hanno subito le serie (speciali) primitive, che sono le g_{2h}^h composte coi gruppi di h ($\leq p-1$) coppie della g_2^1.

Riferendoci dunque ad una serie g_n^r d'indice di specialità $i = p-(n-r) > 1$ vediamo i suoi gruppi appartenere a spazi S_m, ad $m = n-r-1$ dimensioni, incontranti la curva data in n punti; la serie residua $g_{n'}^{r'}$ ($n' = 2p-n$, $r' = i-1$) avrà i suoi gruppi appartenenti a spazi $S_{m'}$, ad $m' = p-1-r$ dimensioni, secanti la curva in n' punti. Le due serie residue l'una dell'altra g_n^r e $g_{n'}^{r'}$ saranno primitive se gli spazi n-secanti ed n'-secanti, S_m ed $S_{m'}$ ($m < n-1$, $m' < n'-1$) non contengono entro di sè spazi S_{m-1} e $S_{m'-1}$ rispettivamente ($n-1$)-secanti, e ($n'-1$)-secanti.

Esaminiamo il problema delle serie speciali primitive riferendoci ai primi casi: $p = 3, 4, 5, 6, 7$. Accenneremo poi come si possano estendere alcuni dei resultati a cui saremo condotti da questo esame.

$p = 3, 4$) - L'esame relativo ai casi $p = 3, 4$, è presto esaurito.

Anzitutto per $p = 3$ (escluso il caso iperellittico) non esistono serie primitive, oltre la g_4^2 canonica; poichè le uniche serie speciali (di dimensione $r > 0$) contenute parzialmente in questa sono le ∞^1 g_3^1 ottenute fissando un punto.

Invece per $p = 4$ si hanno, sulla sestica canonica, in generale due g_3^1 residue una dall'altra, segate dai due sistemi di generatrici della quadrica Q contenente la sestica: che sono le sole serie primitive d'indice di specialità $i > 1$. Le due g_3^1 si riducono a una sola serie *autoresidua* se la Q diventa un cono.

$p = 5$) - Passiamo alle curve di genere 5, riferendoci dunque alla $C_8{}^4$ canonica che, come innanzi, indichiamo con C_8. Su questa si vogliono ricercare le coppie di serie primitive residue l'una dall'altra, g_n^r e $g_{n'}^{r'}$ $[n + n' = 2p - 2$ e $(n - n') = 2(r - r')]$, e perciò si è condotti a cercare gli spazi S_m (con $m < n - 1$) n-secanti la curva, per $n \leq 4$, e quindi $m \leq 2$.

Ora è facile vedere che per la C_8 non possono esistere rette quadrisecanti ($m = 4$), giacchè la quaterna dei punti di incontro di una quadrisecante apparterrebbe a una g_4^2 semplice, e quindi la curva si trasformerebbe in una quartica piana, deducendosi così $p \leq 3$.

Sappiamo d'altronde (§ 13) che la C_8 non possiede *in generale* delle trisecanti, e quindi neppure dei piani pentasecanti corrispondenti ai gruppi della serie residua, codesto caso verificandosi soltanto per le C_8 che appartengono a una rigata cubica.

Dunque, nel caso generale, avremo soltanto da cercare i piani quadrisecanti, corrispondenti a quaterne di una g_4^1.

Ora, per costruire tali piani quadrisecanti la C_8, si è condotti a prendere sulla curva un punto generico P, e a cercare i piani per P trisecanti altrove la curva: vi sono per P ∞^4 piani, e la condizione di incidenza fra piano e curva importa una equazione per le coordinate del piano; appare pertanto che i piani richiesti per P sono ∞^1. Così dunque *sulla C_8 canonica si hanno in generale* ∞^1 serie g_4^1, ognuna delle quali ha — naturalmente — per residua una g_4^1; e si hanno cinque g_4^1 definite dalla condizione di possedere una quaterna contenente due punti generici della curva, poichè precisamente vi sono 5 piani quadrisecanti per due punti della $C_8{}^4$, la curva essendo proiettata da quei due punti in una sestica con 5 punti doppi. Aggiungeremo che i nominati ∞^2 piani quadrisecanti, appartengono agli ∞^1 coni quadrici che passano per la $C_8{}^4$, come lo studioso potrà riconoscere per esercizio.

Esercizio. Esistono g_4^1 primitive sopra una $C_8{}^4$ contenente una g_3^1? Cercando la risposta a questa domanda lo studioso ne dedurrà la condizione perchè una sestica piana di genere 5 contenga una g_3^1 (condizione a cui pervenimmo in altro modo nel § precedente).

$p = 6$) - La ricerca delle serie primitive sopra la curva canonica $C_{10}{}^5$ (che indichiamo con C_{10}), si riduce a quella dei seguenti spazi plurisecanti:

1) Rette trisecanti: esse corrispondono al caso particolare della C_{10} contenente una g_3^1, e contenuta in una rigata

razionale del quart' ordine; la serie residua della g_3^1 — supposta esistente — è una g_7^3 i cui gruppi di 7 punti stanno in spazi S_3. Non si possono avere sulla C_{10} delle rette quadrisecanti, perchè la curva non contiene una g_4^2. (Ragionamento svolto per $p=5$, che si estende per qualsiasi valore di $p>5$).

2) Piani quadrisecanti, a cui corrispondono serie primitive g_4^1 e serie residue g_6^2 i cui gruppi appartengono a spazi S_3. *Esiste — in generale — un numero finito di g_4^1 primitive* sopra la C_{10}, e quindi un numero finito di serie ∞^1 di piani quadrisecanti: infatti per un punto P di C_{10} vi sono — in S_5 — ∞^6 piani, e fra questi un numero finito di piani trisecanti altrove la curva canonica, poichè l' incidenza di curva e piano in S_5 porta due condizioni.

3) Piani pentasecanti, a cui corrisponde una g_5^2. Sappiamo (paragrafo precedente) che l' esistenza di una tale serie (che resulta autoresidua) porta una particolarità della C_{10}, la quale deve trovarsi su una superficie di Veronese.

4) Spazi S_3 pentasecanti, a cui corrispondono serie g_5^1. Si trova che per un punto P della C_{10} passano in generale ∞^2 S_3 pentasecanti, giacchè gli S_3 per P sono ∞^6 e la condizione d' incidenza fra un S_3 e una curva — in S_5 — equivale ad *una* equazione.

Ai nominati S_3 pentasecanti rispondono ∞^2 serie g_5^1 appartenenti alla C_{10}, le cui residue sono pure g_5^1. Codeste ∞^2 serie sono in generale primitive, accadendo che i relativi ∞^3 S_3 pentasecanti si appoggino alla curva in 5 punti, di cui quattro non stanno in un piano, e in 5 punti soltanto. Infatti gli spazi S_3, pentasecanti la C_{10}, che contengono un piano quadrisecante sono soltanto ∞^2 (cioè ∞^1 per ognuno degli ∞^1 piani quadrisecanti); e, d' altra parte, gli S_3 sestisecanti la nostra curva sono soltanto ∞^2, contenendo i gruppi delle g_6^2 residue delle g_4^1.

In conclusione: *La curva di genere $p=6$ possiede in generale le seguenti serie primitive: la serie canonica g_{10}^5, un numero finito di g_4^1, a cui si accompagnano le g_6^2 residue, e ∞^2 g_5^1.*

I casi particolari in cui la detta curva contenga una g_2^1, o una g_3^1, o una g_4^2 sono stati caratterizzati.

Esercizi. Il numero delle g_4^1 appartenenti ad una curva generale di genere 6, vale $x=5$. (Si consideri la proiezione piana della C_{10} da un suo piano quadrisecante).

I piani quadrisecanti la C_{10} appartengono ad ∞^3 quadriche Q passanti per la curva, e vengono così caratterizzati.

Per tre punti della C_{10} passano in generale 9 S_3 pentasecanti. Gli S_3 pentasecanti la C_{10} appartengono a coni quadrici di seconda specie (cioè a coni con retta doppia) passanti per la curva. Qual' è la condizione perchè la C_{10} contenga una serie g_5^1 autoresidua?

$p = 7$) - La ricerca delle serie primitive sopra la curva canonica $C_{12}{}^6$ (che indichiamo con C_{12}) si riduce a quella dei seguenti spazi plurisecanti:

1) Rette trisecanti: la loro esistenza corrisponde al caso particolare delle curve C_{12} con una g_3^1, poste sopra una rigata razionale del quint' ordine (paragrafo precedente); la serie residua di una g_3^1, supposta esistente, è una g_9^4 i cui gruppi appartengono ad S_4 9-secanti.

L' ipotesi di rette quadrisecanti si esclude, come nei casi precedenti.

2) Piani quadrisecanti, ai quali corrispondono serie primitive g_4^1 e serie residue g_8^3 i cui gruppi appartengono ad S_4 8-secanti. Se vi è un piano quadrisecante la C_{12}, vi sarà dunque un piano quadrisecante per un punto generico P della nostra curva. Ma i piani per P, entro lo S_6, sono ∞^8 e le condizioni perchè uno di essi incontri in tre punti la C_{12}, fuori di P, sono $3 \cdot 3 = 9$. Pertanto si argomenta che l' esistenza di piani quadrisecanti debba tradursi in *una* condizione particolare per la C_{12}, cioè che sulla curva di genere $p = 7$ *non esistono in generale* g_4^1. Questa conclusione si lascierebbe confermare coll' esame delle curve piane C_7, dotate di 8 punti doppi.

3) Spazi S_3 pentasecanti, ai quali corrispondono serie g_5^1, e serie residue g_7^2 i cui gruppi stanno in S_4 7-secanti. Si possono costruire gli S_3 pentasecanti la C_{12} partendo da un punto P della curva: per P passano ∞^9 S_3, e fra questi ve ne sono ∞^1 quadrisecanti altrove la nostra curva, giacchè per ciò si richiedono soltanto $2 \cdot 4 = 8$ condizioni. Pertanto si trovano *in generale sulla curva di genere* 7, ∞^1 *serie* g_5^1.

4) Spazi S_3 sestisecanti, cui corrispondono serie g_6^2. Se vi è uno spazio siffatto deve trovarsene uno almeno passante per due punti generici P_1 e P_2 della C_{12}. Ma gli S_3 per due punti, entro lo S_6, sono ∞^6 e le condizioni perchè essi incontrino ulteriormente la curva in 4 punti sono in numero

di $2 \cdot 4 = 8$. Da ciò si argomenta che l'esistenza di S_3 sestisecanti debba tradursi in due condizioni particolarizzanti la C_{12}, e quindi che sulla curva di genere $p = 7$ *non esistono in generale* g_6^2. L'esame delle curve piane C_7 con 8 punti doppi permetterebbe di confermare tale conclusione.

5) Spazi S_4 sestisecanti, cui corrispondono serie g_6^1. Per un punto P della C_{12} passano ∞^8 S_4, entro lo S_6; imponendo ad uno di questi di incontrare altrove la nostra curva in 5 punti si hanno 5 condizioni, sicchè gli S_4 pentasecanti per P saranno ∞^3. Pertanto sulla curva di genere 7 *esistono in generale* ∞^3 g_6^1. E si può aggiungere che soltanto ∞^2 fra queste serie non sono primitive, giacchè ognuna delle ∞^1 g_7^2 contiene appunto ∞^1 g_6^1 non primitive.

Riassumendo:

Sopra la curva di genere $p = 7$ si hanno in generale le seguenti serie primitive: la serie canonica g_{12}^6, ∞^1 g_5^1 colle loro residue g_7^2, ed ∞^3 g_6^1.

Esercizi. Se una C_{12} contiene una g_6^2 questa possiede tre coppie neutre e quindi contiene tre g_4^1, la cui somma è la serie canonica g_{12}^6.

Reciprocamente se una C_{12} contiene due g_4^1, contiene anche una terza g_4^1 residua della somma di quelle, e contiene altresì due g_6^2, residue una dell'altra. (Si trasformi la curva in una curva piana su cui le due g_4^1 vengano segate da due fasci di rette, e si provi così che le dette g_4^1 hanno due coppie comuni...).

Determinare le più generali C_{12} contenenti una g_6^2 autoresidua.

Se una C_{12} contiene una g_3^1, la g_6^2 residua del suo doppio è in generale una serie semplice che non contiene più alcuna g_4^1 primitiva. Perchè?

Esistono C_{12} contenenti una g_3^1 il cui doppio costituisca una g_6^2 autoresidua? (Si studi la C_7 piana con un punto quadruplo e due punti doppi).

Se una C_{12} contiene una g_3^1, il suo triplo minimo, g_9^3, dà luogo *sempre* ad una serie completa?

L'esame dei casi trattati innanzi vale sufficientemente a chiarire l'uso generale che si può fare del metodo per la ricerca delle serie speciali appartenenti ad una curva di genere qualsiasi. Questo metodo, così come da noi è esposto, non differisce sostanzialmente dal metodo di BRILL e NÖTHER, di cui è la traduzione nel linguaggio della geometria proiettiva degli iperspazi, che offre qui il vantaggio di una più facile rappresentazione intuitiva delle cose.

Ora ci limiteremo ad indicare l'applicazione più interessante del metodo, che concerne il *problema delle serie di ordine minimo.*

Vogliasi dapprima ricercare quali serie g^1_n, d'ordine minimo, appartengono ad una curva di genere p. È anzitutto chiaro che, già per $p \geq 2$, codeste serie sono certo speciali, e che — in ogni caso — sono complete. Sopra la curva canonica $C_{2p-2}{}^{p-1}$ i gruppi di una tale g^1_n apparterranno a spazi S_{n-2} n-secanti la curva: i quali non conterranno spazi S_{n-3} $(n-1)$-secanti (altrimenti la curva possiederebbe una g^1_{n-1}) e non saranno — in generale — $(n+1)$-secanti, ciò che richiede (per $p > 3$) condizioni ulteriori. Così dunque le g^1_n di ordine minimo appartenenti ad una curva di genere p (> 3) saranno — in generale almeno — serie primitive.

Per determinare sulla $C_{2p-2}{}^{p-1}$ una tale g^1_n, si prenderà un punto generico P della curva (che determinerà un gruppo dell'ipotetica g^1_n) e si valuterà:

il numero

$$N = (n-2)(p+1-n)$$

dei parametri da cui dipendono — entro lo S_{p-1} — gli S_{n-2} per P;

e il numero

$$N' = (n-1)(p-n)$$

della condizioni imposte ad un S_{n-2} per P, che debba incontrare la curva in altri $n-1$ punti, fuori di P;

quindi si darà ad n il più piccolo valore per cui riesce

$$\nu = N - N' \geq 0.$$

Si troverà pertanto che la curva $C_{2p-2}{}^{p-1}$ possiede *in generale* $\infty^{N-N'}$ serie d'ordine minimo g^1_n:

queste serie saranno in numero finito quando

$$\nu = N - N' = 0;$$

i valori più piccoli di n, per cui riesce $\nu < 0$ non corrispondono a serie g^1_n esistenti sopra la curva di genere p più generale, giacchè la loro esistenza si traduce in $N' - N$ *condizioni particolari* per la curva suddetta (condizioni che legheranno gl' invarianti della C_{2p-2}^{p-1} canonica).

Sorvolando sopra dubbî critici cui accenniamo più avanti, il calcolo sopra indicato porta alla seguente conclusione:

Una curva di genere $p \geq 4$ possiede in generale serie g_n^1 dell' ordine minimo

$$n = p - \pi + 1, \quad \pi = \left[\frac{p}{2}\right];$$

queste serie sono in numero finito ($\nu = 0$) *o infinito, dipendendo da $\nu = 1$ parametri, secondochè p è pari o dispari,* cioè $p = 2\pi$ o $p = 2\pi + 1$.

In modo affatto analogo si tratta il problema delle serie d' ordine minimo g_n^2, e si trova che:

Una curva di genere $p \geq 6$ possiede in generale serie g_n^2 dell' ordine minimo

$$n = p - \pi + 2, \quad \pi = \left[\frac{p}{3}\right];$$

queste serie sono in numero finito ($\nu = 0$) *o infinito, dipendendo da $\nu = 1$, 2 parametri, secondochè $p \equiv 0$, 1, 2* (mod. 3).

Ed anche:

Una curva di genere $p \geq 2r + 2$ possiede in generale serie g_n^r dell' ordine minimo

$$n = p - \pi + r, \quad \pi = \left[\frac{p}{r+1}\right];$$

queste serie dipendono da $\nu < r$ parametri, essendo ν definito dalla congruenza:

$$p \equiv \nu \pmod{r+1}.$$

Si noti che resulterà $\nu = 0$, quando p sia divisibile per $r + 1$, e quindi:

$$\pi = \frac{p}{r+1},$$

$$\frac{p}{r+1} = p - n + r, \quad p = (p - n + r)(r + 1);$$

$$(p - n + r)r = n - r.$$

Si ha dunque *in generale un numero finito di g_n^r speciali quando sia*

$$(p - n + r)r = n - r.$$

Abbiamo riferito questi risultati generali per comodità del lettore, e non ci soffermeremo a sviluppare i relativi calcoli, che d'altronde non presentano difficoltà. Ma non possiamo tralasciare di mettere in luce qualche dubbio critico, che — ove non potesse, come diremo, rimuoversi — varrebbe ad infirmare le argomentazioni precedenti. A ciò è dedicata la seguente

Nota. Consideriamo dapprima la curva canonica dello spazio S_4. Per ricercare le rette trisecanti di questa curva, si potrebbe fare il seguente computo: esistono in S_4 ∞^6 rette, le condizioni di incidenza fra retta e curva sono due, quindi si trova, in generale, un numero finito di trisecanti. Questa conclusione contrasta con ciò che si è visto innanzi, ed è effettivamente errata. Infatti le 6 condizioni imposte ad una retta trisecante sono — in generale — incompatibili, come si verifica osservando che — per il teorema di Riemann-Roch — una trisecante ne porta di conseguenza infinite altre.

Ora riprendiamo la soluzione data innanzi del problema delle serie speciali, riferendoci — per semplicità di discorso — alla curva canonica C_{10} dello S_5, e alle g_4^1 che ad essa appartengono. Qui si tratta di ricercare i piani quadrisecanti la curva, e poichè il sistema dei piani di S_5 è ∞^9, e le condizioni di incidenza fra piano e curva sono 2, si trova un sistema di piani quadrisecanti, il cui ordine di infinità vale $9-8=1$ (questo sistema potrà — come di fatto — ridursi a un numero finito di sistemi di ugual dimensione). In questo caso il teorema di Riemann-Roch non lascia prevedere alcuna incompatibilità delle condizioni a cui deve soddisfare un piano quadrisecante, giacchè esso dice solo che se vi è un piano quadrisecante la C_{10} ve ne è uno almeno per ogni punto P della curva: e, calcolando il numero dei piani quadrisecanti che passano per P, si sono trovati — come nel computo precedente — ∞^1 piani quadrisecanti. Tuttavia si potrebbe dubitare che, analogamente a ciò che si è visto per le trisecanti della C_8 di S_4, le condizioni imposte a un piano quadrisecante non riuscissero in generale compatibili: ciò accadrebbe qualora la esistenza di una g_4^1 sopra la curva C_{10} traesse con sè necessariamente l'esistenza di una serie infinita di g_4^1.

Per rimuovere questo dubbio la via più diretta consiste nel valutare il numero x delle serie g_4^1 appartenenti a una C_{10}, riconoscendo che questo numero ha un valore (finito) diverso da zero: effettivamente si trova qui $x = 5$ (cfr. gli esercizi per il caso $p = 6$).

In modo analogo, in tutti i casi dove, precedentemente, abbiamo trovato — mediante un computo di condizioni — l'esistenza di un numero finito, ovvero di una data infinità, di serie appartenenti in generale ad una curva di genere p, bisognerebbe accertarsi della compatibilità delle condizioni indicate; e perciò basterà naturalmente valutare il numero x che designa le soluzioni del problema, ricondotto (ove occorra) mediante condizioni supplementari, a un problema determinato (numero x delle serie in questione, cioè dei gruppi di esse contenenti un punto dato, ovvero numero dei gruppi contenenti due punti, ecc.).

La risposta precisa alla questione numerativa sopra indicata varrebbe anche ad eliminare un altro dubbio critico che può affacciarsi in ordine al nostro metodo: che le condizioni noverate per l'esistenza di date serie, g_n^1 o g_n^2 ecc., sopra una curva C_{2p-2}^{p-1} non riescano mai indipendenti, e così che si trovino più serie, o anche serie d'ordine minore, di quelle che il calcolo indicato faccia presumere.

Il vero significato di questo dubbio si palesa facilmente esser questo: si può dubitare che *non esistano* curve C_{2p-2}^{p-1} aventi un grado di generalità sufficientemente grande da contenere le serie minime indipendenti che risulterebbero dal nostro computo, un qualche legame fra le condizioni così imposte esprimendo una condizione d'esistenza delle curve predette.

Si tratti p. es. della ricerca delle g_5^2 sopra una curva di genere $p = 6$; cioè dei piani pentasecanti per una C_{10}^5 canonica. I piani per due punti della curva sono ∞^4 e le condizioni imposte ad essi, d'incontrare la curva in altri 3 punti, sono $2 \cdot 3 = 6$; così appare che l'esistenza di piani pentasecanti porta $6 - 4 = 2$ condizioni. Ma chi ci assicura che queste non sieno anche condizioni per l'esistenza della C_{10}?

Sarebbe effettivamente così se le curve di genere 6 fossero tutte riducibili alle quintiche piane; e si riesce — come vedemmo — ad escludere il dubbio, soltanto riconoscendo la esistenza di altre curve piane del sesto ordine, C_6, non trasformabili in quintiche. La quale esistenza si riconosce qui facilmente perchè i 4 punti doppi di una sestica C_6 si possono assumere ad arbitrio.

L'esempio che precede vale a chiarire la via per cui si possono eliminare i dubbi critici sollevati in questa Nota. Occorre valutare il numero dei parametri essenziali (o moduli) da cui dipende una curva di genere p considerata rispetto alle trasformazioni birazionali, ossia il numero degli invarianti proiettivi della curva canonica $C_{2p-2}{}^{p-1}$; occorre d'altra parte valutare il numero dei moduli per le curve di genere p contenenti una g_n^1 o una g_n^2 ecc.: il confronto permette di decidere se l'ordine d'infinità delle serie g_n^1 o g_n^2 ecc. corrisponda effettivamente al resultato dei nostri computi precedenti, giustificandone così i presupposti.

E, negli accennati computi di moduli, si deve insomma stabilire un *teorema d'esistenza* per le curve di genere p, che — come vedremo a suo luogo (nel Cap. III) — è veramente significativo, e non evidente *a priori*, tostochè si tratta di curve piane irriducibili dotate di punti doppi non assumibili ad arbitrio, come accade quando il loro numero è un po' grande rispetto all'ordine.

Questi avvertimenti valgono ad indicare la via per colmare la lacuna segnalata nell'applicazione del metodo di Brill e Nöther al problema delle serie speciali o delle serie minime, e ciò in rapporto cogli sviluppi del Cap. III, dove avremo occasione di aggiungere alcune notizie storiche su tale argomento. Pertanto procederemo avanti, nel seguito, ritenendo rimossa la critica di cui qui si è sufficientemente discorso.

L'interpretazione proiettiva del resultato concernente le g_n^2 d'ordine minimo che appartengono ad una curva di genere p, dà luogo al seguente

Teorema: *Una curva di genere $p \geq 6$ si può trasformare, in generale, in una curva piana dell'ordine minimo*

$$n = p - \pi + 2, \qquad \pi = \left[\frac{p}{3}\right],$$

tipo normale delle curve di genere p, indicato da Brill e Nöther.

Che in casi particolari la curva di genere p possa ridursi ad un ordine più basso, abbiamo già visto in alcuni esempi che precedono, e può dirsi ovvio per chi consideri che la curva generale d'ordine n è di genere $p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; ma è importante osservare che in casi particolari il minimo sopra indicato può anche mancare, per la circostanza che la g_n^2 d'ordine minimo risulti composta. Così per le curve iperellittiche di genere p non si può mai trovare una trasformata (semplice) d'ordine $n < p+2$, sicchè ogni g_n^2 speciale risulta composta con la g_2^1 appartenente alla curva.

Anche l'interpretazione proiettiva del resultato concernente le g_n^1 d'ordine minimo, che appartengono ad una curva di genere p, conduce ad un tipo normale che è stato assegnato da Riemann. Infatti, avendosi un numero finito (>1) di g_n^1 d'ordine minimo, si può trasformare la curva data in un'altra, d'ordine $2n$, sulla quale due g_n^1 vengano segate da due fasci di rette A e B, e — ponendo A e B nei punti all'infinito degli assi coordinati — si ottiene così una curva normale $f(XY)=0$, che è dell'ordine minimo separatamente rispetto alle due variabili. Si trova, d'accordo con Riemann [1], che quest'ordine minimo vale, in generale e per $p \geq 4$,

$$n=p-\pi+1, \qquad \text{con } \pi=\left[\frac{p}{2}\right].$$

Il resultato sussiste anche per $p=3$.

Ma, indipendentemente dall'interesse storico che si può attribuire a questa deduzione, sembra a noi che l'importanza della ricerca della g_n^1 d'ordine minimo sopra una curva di genere p, stia nella risposta che essa reca al problema algebrico di « *determinare la irrazionalità $X(t)$ di grado minimo, mediante la quale si può risolvere parametricamente un' equazione algebrica $f(xy)=0$*:

$$x=f_1(X,t), \qquad y=f_2(X,t)$$

(f_1 e f_2 simboli di funzioni razionali) ».

Secondo il resultato precedente il grado minimo di codesta irrazionalità, per una f di genere p, vale in generale $n=p-\pi+1$.

Ma a questa conclusione si può obiettare non esser detto

[1] Theorie der Abel'schen Functionen § 13.

a priori che la risoluzione parametrica di una curva $f(xy)=0$, mediante una irrazionalità $X(t)$ di grado n, debba corrispondere a una g_n^1, come appare dalle seguenti considerazioni:

Si consideri la più generale rappresentazione parametrica algebrica di una curva

$$f(xy)=0,$$

mediante funzioni *irrazionali* di *grado* n di un parametro t:

$$1) \qquad x=f_1(X,t), \qquad y=f_2(X,t),$$

dove X è legata a t da una equazione di grado n in X

$$\varphi(Xt)=0.$$

Avviene *generalmente* che le formule 1) insieme alla $f(xy)=0$ riescano invertibili, permettendo di esprimere inversamente X, t come funzioni razionali di x, y, cioè diano una rappresentazione parametrica semplice della curva f; ma può anche accadere l'opposto nelle seguenti circostanze:

1) Ad un valore di t possono rispondere meno di n punti (xy) della curva f, così che x, y e t non determinino un solo valore ma $i\,(>1)$ valori di X. In questo caso la g_n^1 rappresentata da $t=\text{cost.}$ sopra la curva $\varphi(Xt)=0$, risulta composta mediante una involuzione γ_i^1 che avrà come immagine una certa curva $\overline{\varphi}(\overline{X}t)=0$; e perciò si può sostituire ad X, nella rappresentazione parametrica della f, la irrazionalità $\overline{X}$ (funzione razionale di X e t) di grado $\frac{n}{i}$.

2) Può accadere che i gruppi G_n, di n punti di f corrispondenti ai valori di t, non determinino reciprocamente t; in questo caso, per il teorema di Lüroth (ritrovato in questo stesso libro al § 7) si può sostituire a t un nuovo parametro τ, funzione razionale del primo, i cui valori corrispondano biunivocamente ai gruppi G_n anzidetti.

3) Ritenendosi scartati i casi precedenti, di guisa che al variare di t si ottenga su f una serie razionale di gruppi G_n, biunivocamente determinati dai valori di t, resta sempre che questa serie:

anzichè essere una involuzione (lineare) g_n^1, come accade quando ogni punto P di f appartenga ad *un* G_n, può essere una serie d'indice $m > 1$, un punto P di f appartenendo ad m gruppi G_n.

Ordunque si può dubitare *a priori* che la rappresentazione parametrica di una curva f mediante l'irrazionalità di grado minimo, corrisponda non già ad una g_n^1, ma ad una serie razionale d'indice $m > 1$ di gruppi di n punti sopra la curva f. Questo dubbio viene rimosso dal teorema stabilito nella Nota del § 10: « sopra una curva algebrica, una serie razionale ∞^1 di gruppi di n punti d'indice $m > 1$, è sempre contenuta in una serie lineare g_n^r con $r > 1$ ». Poichè entro una g_n^r con $r > 1$, sono sempre contenute serie lineari g_q^1 con $q \leq n - r + 1$, si deduce: *la rappresentazione parametrica*

$$x = f_1(X, t), \quad y = f_2(X, t)$$

di una curva $f(xy) = 0$, mediante l' irrazionalità di **grado minimo** n, *corrisponde a una involuzione g_n^1 sopra la f, sicchè può sempre supporsi che i punti (xy) di f determinino reciprocamente i valori di t* e X (¹). Così, in particolare: se le coordinate dei punti di una curva si esprimono razionalmente mediante un parametro t e un radicale quadratico, portando sopra una funzione razionale di esso, la curva è iperellittica (o ellittica o razionale), e si riduce razionale quando la rappresentazione parametrica non sia semplice, avendosi così una serie razionale di coppie di punti contenuta in una g_2^2. E poichè una curva che ammette una rappresentazione parametrica non semplice mediante un radicale quadratico, può riguardarsi come immagine di una involuzione sopra una curva iperellittica, il resultato precedente si potrà anche esprimere dicendo che: *sopra una curva iperellittica di genere $p \geq 1$, ogni involuzione irrazionale è trasformata in se stessa dalla (o da ciascuna) g_2^1 appartenente alla curva* (²).

(¹) Enriques. « Circolo Matematico di Palermo », t. IX, 25 agosto 1895.

(²) Cfr. Painlevé. « Annales de l'École Normale », 1891. — Segre. « Introduzione... » Nota al n. 67.

Capitolo II

La geometria sopra le curve del piano e le trasformazioni cremoniane: evoluzione storica delle idee.

In questo capitolo offriamo anzitutto la teoria delle serie lineari sopra una curva piana, dedotta dalla considerazione delle curve aggiunte, secondo Brill e Nöther: questa trattazione occupa i primi tre paragrafi e può essere sostituita agli sviluppi paralleli contenuti nei §§ 9, 10 e 11 del precedente capitolo.

Dopo avere così messo in rilievo come la geometria sopra una curva si lasci studiare con riferimento al modello piano, metodo che costituisce in fatto la prima via seguita in questo studio, noi vogliamo risalire alla genesi della dottrina, mettendo sopra tutto in luce l'evoluzione storica delle idee. Il disegno ideale di questa evoluzione viene spiegato nel § 19 (quinto di questo capitolo), ove mettiamo a riscontro i diversi ordini di concetti e di problemi — attinenti alla teoria delle funzioni, alle trasformazioni birazionali, ecc. — che vengono fusi nel nuovo organismo scientifico.

Ora le idee che dominano questo organismo, e che gli conferiscono la sua propria veste geometrica, si collegano in particolare allo studio delle trasformazioni birazionali o cremoniane del piano, sebbene vi sia poi luogo a distinguere fra proprietà invariantive per trasformazioni birazionali della curva, e proprietà invariantive per tasformazioni birazionali dell'intero piano. Pertanto la definizione precisa dei concetti, non meno che il bisogno di comprenderne storicamente lo sviluppo, ci porta ad esporre i fondamenti della *teoria delle trasformazioni cremoniane,* che occupa appunto la seconda parte di questo capitolo (§§ 20-23).

15. Costruzione delle serie complete sopra una curva piana priva di punti multipli. — Dal punto di vista della Geometria

Proiettiva si presentano come generali le curve piane prive di punti multipli, e (sebbene questa generalità sia relativa soltanto alle trasformazioni proiettive e non alle trasformazioni birazionali come vedremo più avanti) sembra naturale cominciare da queste lo studio della Geometria sopra una curva: il quale ordine risponde anche ad una ragione didattica.

Noi mostreremo che: sopra una curva piana f, di un certo ordine n, priva di punti multipli, il sistema completo di tutte le curve di ordine m sega una g_{mn} completa; l'estensione al caso di curve con punti multipli riuscirà poi molto facile, seguendo passo a passo la medesima via che qui si percorre.

Si arriva a stabilire il resultato che abbiamo in vista, sulla base di un teorema che si presenta come estensione del così detto principio di LAMÉ, già incontrato nel L. 2°, § 14, il quale esprime la condizione perchè una curva ψ appartenga al fascio determinato da due curve f e φ del medesimo ordine. Abbiamo pure accennato ad una estensione del resultato che appartiene a GERGONNE, dove una delle tre curve è d'ordine minore delle altre due (L. 2°, § 16). Ora dimostreremo un resultato più generale, che comprende i nominati, stabilendo il seguente

Teorema sulla espressione di una curva come combinazione lineare di due altre.

Si abbiano nel piano due curve f_n e φ_m, degli ordini n e m, anche riducibili, ma senza parti comuni, le quali *si intersechino in mn punti semplici; se una curva ψ_l d'ordine l ($l \geq n$, $l \geq m$) passa per questi mn punti, essa è una combinazione lineare del tipo*

$$\psi_l = A_{l-n} f_n + B_{l-m} \varphi_m ,$$

dove $A_{l-n} = 0$ e $B_{l-m} = 0$ designano curve degli ordini rispettivi $l - n$ e $l - m$.

Per semplicità di discorso possiamo ritenere che gli mn punti intersezioni di f_n e φ_m siano distinti; ma in realtà il ragionamento procede ugualmente se alcuni di essi divengono infinitamente vicini.

Cominciamo a dimostrare il teorema per $l \geq mn$; faremo poi vedere come suppostolo vero per l si dimostri per $l - 1$, e così risulterà dimostrato in generale.

E veniamo alla nostra dimostrazione.

Cominciamo col notare che le curve del tipo

$$\psi_l = A_{l-n} f_n + B_{l-m} \varphi_m = 0 \tag{1}$$

sono curve che passano effettivamente per gli mn punti comuni alla f_n e alla φ_m, formando un sistema lineare S che avrà una certa dimensione r.

Per dimostrare che, viceversa, tutte le curve d'ordine l, passanti per questi mn punti, si possono scrivere nella forma 1), faremo vedere che il sistema lineare Σ costituito da queste curve ha precisamente la dimensione del sistema S e, poichè S è contenuto in Σ, risulterà che i due sistemi coincidono.

Anzitutto valutiamo la dimensione del sistema Σ, supponendo $l \geq mn$, nel qual caso soccorre la osservazione fondamentale che gli mn punti impongono alle ψ_l che debbono contenerli condizioni linearmente indipendenti; infatti si può costruire una curva d'ordine l, composta di rette, che contenga $mn-1$ punti del nostro gruppo e non il rimanente.

Ciò posto il sistema Σ delle curve d'ordine l avrà la dimensione

$$\frac{l(l+3)}{2} - mn.$$

Valutiamo ora la dimensione r del sistema S costituito dalle curve

$$A_{l-n} f_n + B_{l-m} \varphi_m = 0.$$

A tale oggetto cominciamo col notare che le curve del tipo

$$A_{l-n}\, f_n = 0$$

formano un sistema lineare, S_1, di dimensione

$$r_1 = \frac{(l-n)(l-n+3)}{2}, \tag{2}$$

essendo questa la dimensione del sistema di tutte le curve $A_{l-n} = 0$, d'ordine $l-n$.

Analogamente le curve del tipo

$$B_{l-m}\, \varphi_m = 0$$

formano un sistema lineare, S_2, di dimensione

$$3)\qquad r_2 = \frac{(l-m)(l-m+3)}{2}.$$

Se i sistemi S_1 e S_2 non avessero nessuna curva comune, la dimensione del sistema S sarebbe

$$r = r_1 + r_2 + 1,$$

ma se hanno a comune un sistema S' di dimensione r', la dimensione r di S sarà

$$4)\qquad r = r_1 + r_2 - r';$$

onde, per avere r, basterà valutare r'. A questo scopo osserveremo che le curve di S' possono scriversi contemporaneamente nelle due forme

$$A_{l-n}\, f_n = 0 \quad \text{e} \quad B_{l-m}\, \varphi_m = 0;$$

così ciascuna di esse dovrà contenere la $f_n = 0$ e la $\varphi_m = 0$, essendo dunque la somma di f_n, φ_m e di un'ulteriore parte d'ordine $l - m - n$. E, poichè una curva composta in tal guisa appartiene certo ad S', la dimensione r' di S' sarà la dimensione del sistema totale delle curve d'ordine $l - n - m$:

$$r' = \frac{(l-n-m)(l-n-m+3)}{2}.$$

Ciò posto, dalle formule 2) 3) 4), fatti i calcoli, si ricava

$$r = \frac{l(l+3)}{2} - mn.$$

Pertanto la dimensione del sistema S:

$$A_{l-n}\, f_n + B_{l-m}\, \varphi_m = 0,$$

coincide con la dimensione del sistema Σ, costituito dalle curve d'ordine l passanti per gli mn punti comuni alla $f_n = 0$ e alla $\varphi_m = 0$, e quindi i due sistemi S e Σ coincidono. c. d. d.

Dopo avere dimostrato il nostro teorema per $l \geq mn$, estendiamolo al caso di l qualunque, facendo vedere che, supposto che esso sia vero per un certo valore di l, risulta vero anche per $l-1$.

Si consideri dunque una curva ψ_{l-1} d'ordine $l-1$ passanti per gli mn punti comuni a f_n e φ_m; aggiungendo una retta generica r, avremo una curva d'ordine l per cui

5) $$r\varphi_{l-1} = A_{l-n} f_n + B_{l-m}\,\varphi_m.$$

Ora, se la retta r fa parte della curva B_{l-m}:

$$B_{l-m} = r\,B_{l-m-1},$$

essa si stacca dalla curva

$$A_{l-n} f_n = r\psi_{l-1} - B_{l-m}\,\varphi_m,$$

e quindi — non essendo componente di f_n — dalla

$$A_{l-n} = r\,A_{l-n-1};$$

diguisachè risulta

$$\varphi_{l-1} = A_{l-n-1} f_n + B_{l-m-1}\,\varphi_m.$$

Ma se la curva B_{l-m}, passante per gli n punti comuni ad r ed f_n, non contiene la r come parte, dovrà essere il suo ordine

$$l - m \geq n,$$

e così si potrà applicare ad essa il teorema già dimostrato, scrivendo

$$B_{l-m} = A_{l-m-n} f_n + B_{l-m-1}\,r.$$

In sostanza il ragionamento che precede si riduce a questo, che quando

$$r\,\psi_{l-1} \equiv B_{l-m}\,\varphi_m \qquad (\text{mod. } f_n),$$

è come se r faccia parte della curva $B_{l-m}\,\varphi_m$ e quindi di B_{l-m}; giacchè in ogni caso

$$B_{l-m} \equiv r\,B_{l-m-1} \qquad (\text{mod. } f_n).$$

Ora sostituendo nella 5) a B_{l-n} la sua espressione si trova:

$$r\,\psi_{l-1} = (A_{l-n} + \varphi_m\,A_{l-m-n}) f_n + r\,B_{l-m-1}\,\varphi_m,$$

e si conclude, come innanzi, che dovrà essere

$$A_{l-n} + \varphi_m A_{l-m-n} = r A_{l-n-1},$$

e quindi

$$\psi_{l-1} = A_{l-n-1} f_n + B_{l-m-1} \varphi_m. \qquad \text{c. d. d.}$$

Osservazione. Abbiamo già avvertito che il teorema si estende al caso di curve f e φ aventi fra loro dei contatti, dove si parli di punti (semplici) infinitamente vicini, e per verità la dimostrazione procede nello stesso modo. Ora il teorema si estende anche al caso che un punto semplice di f sia *i-plo* per φ, considerando che fra le intersezioni di f e φ si hanno qui i punti semplici successivi di f. Ma la proprietà non sussiste più per il caso in cui le f e φ abbiano a comune un punto doppio P: non ogni curva ψ, passante doppiamente per P e contenente le ulteriori $mn - 4$ intersezioni di f e φ si può esprimere come combinazione lineare $Af + B\varphi$; infatti le curve $Af + B\varphi = 0$ che hanno P come doppio, posseggono ivi una coppia di tangenti che appartiene alla involuzione determinata dalle due coppie di tangenti di f e φ, ciò che non accade necessariamente per la nostra ψ.

Ritorniamo al teorema sulla espressione di una curva come combinazione lineare di altre due, per tradurlo in un' altra forma equivalente che ne mette meglio in luce il significato geometrico, esprimendo una proprietà di spezzamento del gruppo sezione di f con una curva φ; qui ci limiteremo al caso, che importa considerare nel seguito, in cui la f sia irriducibile:

Teorema. Sia f_n una curva, d' ordine n, priva di punti multipli, e si consideri il *gruppo degli* $(m + d)n$ *punti segati sopra di essa da una curva* ψ_{m+d}, *d' ordine* $m + d$: *se* mn *fra questi punti appartengono ad una curva* φ_m *d' ordine* m, *i rimanenti* dn *si trovano sopra una curva d' ordine* d.

Basterà dimostrare il teorema nell' ipotesi che la φ_m sia irriducibile, chè — altrimenti — sarebbe sufficiente applicare successivamente la nozione acquisita per questo caso alle componenti di φ_m.

Ora se la ψ_{m+d} contiene la φ_m come parte, e quindi si spezza nella φ_m stessa e in una residua curva d' ordine d, il teorema è già dimostrato. Se così non è, avremo certo $m + d \geq n$, giacchè la φ_{m+d} possiede mn punti comuni con φ_m. Ciò posto applichiamo il teorema sulla espressione di ψ_{m+d} come combinazione lineare di f_n e φ_m: a questo teorema si può dare la forma

$$\psi_{m+d} \equiv B_d\, \varphi_m. \qquad (\text{mod. } f)$$

Risulta così che, per quanto concerne la sua intersezione con f_n, la curva ψ_{m+d} si lascia sostituire con una curva spezzata nella φ_m e in una residua curva d'ordine d, che per simmetria può qui designarsi con $\varphi_d\,(=B_d)$; onde resta stabilita la proprietà sopra enunciata.

Siamo ora in grado di dimostrare che: *sopra la curva piana irriducibile, f_n, priva di punti multipli, il sistema di tutte le curve φ_m, d'ordine m, sega una g_{mn} completa.*

Si consideri un G_{mn} sezione di f_n con una φ_m, e si immagini costruita la serie completa a cui esso appartiene: questa serie $|g_{mn}|$ verrà segata su f_n da un sistema lineare di curve ψ_{m+d}, d'ordine $m+d$, passanti per un medesimo gruppo G_{dn} di f_n, e fuori dei punti di questo gruppo. Ma poichè il G_{mn} appartiene a una φ_m e il $G_{(m+d)n} = G_{mn} + G_{dn}$ è sezione di f_n con una particolare ψ_{m+d} (cioè con quella contenente il G_{mn} da cui siamo partiti), si deduce che il G_{dn} appartiene a una φ_d, d'ordine d; e da ciò poi segue similmente che anche tutti gli altri gruppi di mn punti sezioni delle ψ_{m+d}, appartengono a curve φ_m di ordine m. c. d. d.

Dal risultato ottenuto — poichè togliendo da una serie completa dei punti fissi si ottiene ancora una serie completa — segue il *modo di costruire la serie completa definita da un gruppo* G, sopra una curva piana irriducibile, f, priva di punti multipli: si mandi per G una curva φ_m (che esisterà certo per m abbastanza elevato) a segare f in un residuo gruppo G'; il sistema di tutte le curve φ_m passanti per G' sega ulteriormente su f la serie completa cui appartiene G. E, ricordando in tutto il suo contenuto la proprietà relativa alla sottrazione delle serie, avremo, per le f senza punti multipli, l'*espressione proiettiva del teorema del resto*: se due gruppi di q punti, sopra f, sono resti o corresiduali di un medesimo gruppo di q' punti, nel senso che formino con questo l'intersezione completa di f con due curve φ dello stesso ordine, essi sono pure tali rispetto ad ogni altro resto dell'uno dei due.

16. Serie complete sopra una curva piana con punti multipli: curve aggiunte. — La proprietà, stabilita nel precedente paragrafo, della integrità della g_{mn} segata sopra una f_n da tutte le curve φ_m del piano, non sussiste più — in generale — quando la f_n abbia dei punti doppi o multipli.

Che effettivamente in questo caso la serie segata dalle φ_m possa riuscire non completa, appare già dall'esempio che si ottiene proiettando una curva gobba da un punto esterno sul piano, perocchè sulla proiezione la g_n^r segata dalle rette non è completa. Ma giova rendersi conto delle circostanze che vietano di applicare alle curve dotate di punti doppi le considerazioni precedenti. Per semplicità di discorso assumeremo una cubica f_3 dotata di un punto doppio O, e spiegheremo come avvenga che la serie segata su questa dalle rette (o analogamente la serie segata dalle coniche) non sia completa.

Ordunque si mandi per il gruppo G_3, sezione di una retta generica φ_1 con f_3, una curva ψ_{1+d}, p. es. una ψ_3, passante per O: il gruppo G' delle intersezioni di ψ_3 fuori di G_3 apparterrà ad una conica φ_2, che ha due intersezioni riunite in O ed altre quattro intersezioni A, B, C, D. Fin qui si è applicato senza variazione il teorema del paragrafo precedente, trattandosi di una f_3 e di una φ_1 aventi a comune dei punti semplici; ma si consideri ora un'altra curva del terz'ordine, ψ_3', passante per O, A, B, C, D: la terna di punti che questa sega su f_3 non sarà in linea retta, se la ψ_3' non tocca in O la ψ_3. In tal guisa si vede che la g_3^2 segata su f_3 dalle rette appartiene alla g_3^3 staccata dalle cubiche per O, A, B, C, D (che avremmo ottenuto ugualmente mediante le coniche per O e per un altro punto); e si riconosce anche perchè la presenza di un punto doppio della f_3 non permetta di dedurre l'integrità della nominata g_3^2 seguendo il procedimento del paragrafo precedente.

Tuttavia quel procedimento si estende ad una f_n, dotata comunque di punti doppi o multipli, ove si sostituiscano le curve generali d'ordine m con curve passanti $i-1$ volte per ogni punto i-*plo* di f_n, curve che abbiamo denominato *aggiunte* ad f_n. Ma, per stabilire tale estensione, occorre riprendere, per il caso di curve dotate di punti multipli, le considerazioni svolte innanzi, generalizzando le ipotesi che per semplicità avevamo adottate. Prenderemo le mosse dal teorema detto dell'$Af + B\varphi$, cui NÖTHER (1872) è riuscito a dare la forma più generale e comprensiva (1).

Teorema sull' espressione di una curva come combinazione lineare di altre due.

Siano date due curve d'ordine n e m, f_n e φ_m, le quali abbiano in comune dei punti di molteplicità qualsiansi (ma non una componente se riducibili): *una curva ψ_l, d'ordine l, ($l \geq n$, $l \geq m$), la quale passi con la molteplicità $i + h - 1$ per ogni punto P comune alle due date, che sia i-plo per f_n ed h-plo per φ_m* (2), *è una combinazione lineare del tipo*

$$\psi_l = A_{l-n} f_n + B_{l-m} \varphi_m ,$$

dove A_{l-n} e B_{l-m} sono due curve, d'ordine $l - n$ e $l - m$, che passano per P con le molteplicità rispettive $h - 1$ e $i - 1$.

Per semplicità di discorso il teorema enunciato si può riferire al caso in cui i punti comuni a f_n e φ_m non diano luogo a contatti fra i rami di queste curve; ma il teorema vale ugualmente in tutti i casi, purchè insieme ai punti propri comuni alle due curve date, si considerino anche i punti infinitamente vicini, semplici o multipli per esse: infatti la nostra dimostrazione si fonderà sul computo delle intersezioni assorbite in un punto semplice o multiplo comune a due curve, e sul numero delle condizioni imposte ad una curva da un punto semplice o multiplo; e precisamente in codeste valutazioni i punti infinitamente vicini contano come fossero punti propri.

Veniamo ora alla dimostrazione, che procede — come per il caso particolare del teorema contemplato nel precedente paragrafo — secondo lo schema che qui rapidamente indichiamo. Anzitutto si dimostra il teorema per l abbastanza elevato, tanto elevato che i punti P, comuni alle f_n e φ_m assegnate, impongano condizioni indipendenti alle curve d'ordine l che debbano contenerli con le molteplicità $i + h - 1$.

In tale ipotesi:

(1) Già nel 1869 NÖTHER aveva dato il teorema nel caso dei punti d'intersezione semplici considerato nel precedente paragrafo.

(2) È appena necessario avvertire che — per semplicità di scrittura — scriviamo P, i, h, in luogo di P_k, i_k, h_k, con un indice k variabile da punto a punto.

1) si valuterà la dimensione del sistema S delle curve

$$A_{l-n} f_n + B_{l-n} \varphi_m = 0,$$

che vale

$$r = r_1 + r_2 - r'$$

con

$$r_1 = \frac{(l-n)(l-n+3)}{2} - \Sigma \frac{h(h-1)}{2},$$

$$r_2 = \frac{(l-m)(l-m+3)}{2} - \Sigma \frac{i(i-1)}{2}$$

$$r' = \frac{(l-m-n)(l-m-n+3)}{2};$$

2) si valuterà parimente la dimensione del sistema Σ delle ψ_l passanti per i punti P con le molteplicità $i+h-1$, che sarà

$$\delta = \frac{l(l+3)}{2} - \Sigma \frac{(i+h)(i+h-1)}{2};$$

e

3) si riconoscerà $\delta = r$, da cui segue il teorema per i valori considerati di l, tenuto conto che il sistema S è contenuto in Σ.

Dopo ciò si estenderà il teorema da l a $l-1$. A tale scopo, data una ψ_{l-1} soddisfacente alle condizioni dell'enunciato, si aggiungerà ad essa una retta generica r, scrivendo

$$r\psi_{l-1} = A_{l-n} f_n + B_{l-m} \varphi_m :$$

se la curva B_{l-m} non contiene la retta r come parte, sarà $l-m \geq n$, e codesta B_{l-m} si esprimerà come combinazione lineare di f_n e di r, applicando il teorema del precedente paragrafo; onde, come ivi è fatto, si dedurrà

$$\psi_{l-1} = A_{l-n-1} f_n + B_{l-m-1} \varphi_m.$$

E delle A_{l-n-1} e B_{l-m-1} si verificherà che — al pari delle A_{l-n} e B_{l-m} — passano per i punti P con le molteplicità $h-1$ e $i-1$.

Ora, per applicare il teorema stabilito alla questione della integrità delle serie segate da curve aggiunte sopra una f irreducibile, converrà introdurre le *curve biaggiunte* ad f, che si definiscono come quelle soggette a passare con la molteplicità $2(i-1)$ per ogni punto *i-plo* di f_n. Invero il nostro teorema conduce ad una proprietà di spezzamento del gruppo segato sopra f da una curva biaggiunta, la quale viene espressa dal

Teorema. Sia f_n una curva irriducibile d'ordine n, dotata comunque di punti *i-pli* ($i > 1$), e si consideri il *gruppo* Γ *degli*

$$(m+d)n - 2\Sigma i(i-1)$$

punti segati sopra di essa da una curva biaggiunta ψ_{m+d}***, di ordine*** $m+d$***, fuori dei punti multipli: se*** $mn - \Sigma i(i-1)$ ***fra questi punti appartengono ad una curva aggiunta*** φ_m***, d'ordine*** m***, i rimanenti*** $dn - \Sigma i(i-1)$ ***si trovano sopra una curva aggiunta d' ordine*** d.

Come nel teorema analogo del paragrafo precedente si può supporre la φ_m irriducibile. Ora se la ψ_{m+d} contiene la φ_m come parte, e quindi si spezza nella φ_m stessa e in una residua curva d'ordine d, il teorema è già dimostrato. Se così non è avremo certo $m+d \geq n$, e potremo quindi esprimere ψ_{m+d} come combinazione lineare di f_n e φ_m, ovvero scrivere la congruenza equivalente

$$\psi_{m+d} \equiv B_d \, \varphi_m \qquad (\text{mod. } f).$$

Risulta così che, per quanto concerne la sua intersezione con f_n, la curva biaggiunta ψ_{m+d} si lascia sostituire con una curva spezzata nella φ_m e in una residua curva d'ordine d, che sarà pure aggiunta ad f_n, e che per simmetria può qui designarsi con $\varphi_d \,(= B_d)$. c. d. d.

Osservazione. — Per ragioni di continuità, il teorema precedente continua a sussistere quando una parte dei punti del gruppo Γ vengano ad appartenere ad una curva φ_m che passi per un punto P, *i-plo* per f_n, con una molteplicità superiore ad $i-1$, per es. con la molteplicità i. In tal caso la φ_m si deve riguardare come una curva avente in P la molteplicità $i-1$ e soggetta alla condizione ulteriore di contenere gli i punti infinitamente vicini a P sui rami di f_n (i quali figurano fra le intersezioni di f_n e φ_m *fuori* di P); e — poichè codesti i punti appartengono a Γ — la ψ_{m+d}, oltre ad avere in P la molteplicità $2i-2$, toccherà anche i rami di f_n. Ancora i punti di Γ fuori di φ_m apparterranno ad una aggiunta φ_d.

Finalmente siamo in grado di dimostrare il teorema che.

Sopra la curva (irriducibile) f_n, *dotata comunque di punti multipli, il sistema di tutte le curve aggiunte di un medesimo ordine m sega (fuori dei punti multipli) una serie completa.*

Si consideri un gruppo G (di $mn - \Sigma i(i-1)$ punti) sezione di f_n con una aggiunta φ_m, e si immagini costruita la serie completa a cui esso appartiene. Questa serie si potrà ritenere segata su f_n da un sistema lineare di curve biaggiunte ψ_{m+d}, d'ordine $m+d$, passanti per un medesimo gruppo G (di $nd - \Sigma i(i-1)$ punti) di f_n; difatti se il sistema segante la nominata serie è costituito di curve che passino per un punto *i-plo* di f_n con molteplicità minore di $2i-2$, basterà aggiungervi delle parti fisse passanti per quel punto, e il caso che la molteplicità risultasse maggiore di $2i-2$ non infirma le nostre considerazioni.

Ciò posto, poichè il gruppo G appartiene ad una aggiunta φ_m e il $\Gamma = G + G'$ a una particolare biaggiunta ψ_{m+d}, si deduce che il G' appartiene ad un'aggiunta φ_d; e da ciò segue poi che anche tutti gli altri gruppi di punti, sezioni delle ψ_{m+d} per G', appartengono a curve aggiunte φ_m: le quali segano dunque la serie completa determinata dal gruppo G.

Notisi che, in base all'Osservazione precedente, non fa eccezione il caso in cui la φ_d venga ad avere in un punto *i-plo* di f_n una molteplicità superiore ad $i-1$.

Dal resultato ottenuto (come per le curve senza punti multipli) segue il *modo di costruire la serie completa definita da un gruppo G* sopra una curva piana irriducibile, f, dotata comunque di punti multipli: si mandi per G una curva aggiunta φ_m a segare f in un residuo gruppo G'; il sistema di tutte le aggiunte φ_m, passanti per G', sega ulteriormente su f la serie completa cui appartiene G. Onde si ha poi nella sua forma più generale il

Teorema del resto di Brill e Nöther. Se due gruppi di q punti sopra f, sono resti o corresiduali di un medesimo gruppo di q' punti, nel senso che formino con questo l'intersezione di f (fuori dei punti multipli) con due curve aggiunte dello stesso ordine, essi sono pure tali rispetto ad ogni altro resto dell'uno dei due.

Nota I. Il teorema che « le curve aggiunte di uno stesso ordine segano sopra la f una serie completa » assume un significato in qualche modo caratteristico per le curve aggiunte, grazie alle considerazioni che seguono.

Si considerino le curve Θ_m, di un certo ordine m, passanti per ogni punto *i-plo* di f con una molteplicità s data in funzione di i; si può dimostrare che « se, per un punto multiplo di f, si ha $s < i - 1$, la serie segata dalle Θ_m, per m assai elevato, non può essere completa ».

Questa proposizione si stabilisce nel modo che rapidamente accenniamo.

Anzitutto si calcoli l'ordine e la dimensione della serie completa segata sopra la f dalle curve aggiunte, φ_m, di un ordine m abbastanza elevato per modo che i punti base imposti alle φ_m dieno luogo a condizioni indipendenti: questo calcolo, che abbiamo svolto nel § 7, porta che la detta serie è di dimensione

$$r = n - p.$$

In conseguenza di ciò si riconosce che per una qualsiasi $|g_n^r|$ completa appartenente ad f, si ha sempre $n - r \leq p$; giacchè la detta $|g_n^r|$ si deduce da quella segata dalle φ_m sottraendo un certo numero n' di punti fissi, ciò che fa diminuire l'ordine di questa serie di n' e la sua dimensione di n' *al più*.

Si ottiene così la seguente *definizione invariantiva del genere della curva f*: la *differenza* $n - r = \delta\,|g_n^r|$ relativa ad una serie $|g_n^r|$ completa, appartenente ad f, raggiunge un *massimo*, che è il valore del genere p.

È poi chiaro che se una serie (completa) $|a|$ contiene un'altra serie $|b|$ si avrà sempre:

$$\delta\,|b| \leq \delta\,|a|.$$

Ciò posto si supponga che curve (aventi in un punto P, *i-plo* per f, la molteplicità $s < i - 1$) seghino su f una serie $|a|$ completa, per un valore di m comunque grande; poichè una serie siffatta è capace di contenere entro di sè una qualsiasi serie completa assegnata, la *differenza* $\delta\,|a|$ relativa ad essa dovrà raggiungere il massimo valore p.

E, per lo stesso motivo, quando m è assai alto, dovrà ancora dar luogo allo stesso valore massimo della differenza, la serie $|b|$ che si ottiene su f imponendo alle Θ_m suddette di passare per P colla molteplicità $s + 1$; ma l'ordine della nominata serie $|b|$ diminuisce di i rispetto a quello di $|a|$ (giacchè l'imposizione del punto $(s+1)$-*plo* P alle Θ_m, equivale all'imposizione di passare per gli i punti infinitamente vicini a P sui rami di f), ed invece la dimensione di $|b|$ si ottiene da quella di $|a|$ togliendo $s+1<i$: dal che deriva la conseguenza assurda

$$\delta\,|b|<\delta\,|a|.$$

Si conclude pertanto che « *i sistemi delle curve d'un ordine abbastanza elevato passanti per i punti multipli di f, con molteplicità dipendenti da quelle di f, non staccano su f serie complete, quando la molteplicità s, imposta in un punto i-plo, sia $s<i-1$* ».

Invece se si considerano le curve Θ_m passanti per i punti *i-pli* di f con date molteplicità $s=s(i)$ maggiori od uguali a $i-1$, è facile riconoscere che esse, per m abbastanza elevato, staccano su f serie complete.

Anzitutto questa proprietà compete certo alle Θ_m per $s=i$, attesochè si tratta allora di curve aggiunte costrette a contenere gli i punti infinitamente vicini ad un punto *i-plo* P sui rami di f. E lo stesso si può dire per le Θ_m' che, avendo in P una molteplicità i, tocchino ivi un certo numero, $s-i$, di volte i rami di f. Ma fra queste, per m abbastanza elevato, si troveranno delle combinazioni lineari, $\Theta_m=\Theta_m'+Af$, aventi in P la molteplicità s.

Nota II. Nell'applicazione dei teoremi precedenti, accade talvolta di considerare una curva variabile f, di genere p, la quale per valori particolari dei parametri da cui dipende acquisti qualche nuovo punto doppio (o multiplo), riducendosi così ad una $\bar{f}$ di genere effettivo minore di p. Ora, per ragioni di continuità, giova ritenere la $\bar{f}$ come una curva di *genere virtuale* p, e rilevare che i teoremi precedenti sono tuttavia applicabili in un senso esteso che viene suggerito appunto dal principio di continuità. Per semplicità, pongasi che la $\bar{f}$ sia una curva piana irreducibile d'ordine n, dotata di un punto doppio O che — non apparendo come limite dei punti doppi variabili di f — sia da assumere come virtualmente inesistente. Allora le serie lineari g_m^s di f danno al limite sopra $\bar{f}$ delle serie lineari g_m^s aventi una *coppia neutra* (presentante una sola condizione ai gruppi della serie) costituita dai due punti sovrapposti in O; e questa g^s_m dovrà ritenersi *virtualmente completa* sopra f, se non è contenuta in una serie più ampia dello stesso ordine con la medesima coppia neutra.

Ciò posto si considerino le curve φ che si comportano come aggiunte rispetto ai vari punti multipli di f, tranne che per riguardo ad O (che non impone loro alcuna condizione): queste *curve* si diranno *virtualmente aggiunte* ad f. Ed è chiaro che il teorema dell'$Af + B\varphi$ conduce senz'altro a dimostrare che esse segano sopra f serie virtualmente complete, dimodochè si estende alla f di genere virtuale p il teorema di Riemann-Roch, ecc.

Queste considerazioni s'incontrano già nel « Programmschrift » di F. LINDEMANN (Lipsia, 1879), e nella memoria di NOETHER inserita nel volume 15 dei Math. Annalen (1879); considerando curve con molteplicità qualsiansi, si giunge qui a due diverse forme del teorema di Riemann-Roch. Si confronti anche SEVERI « Vorlesungen über algebraische Geometrie » (Teubner, Lipsia, 1921) Anhang F, n. 12; vedansi poi le considerazioni più ampie sul principio di degenerazione del nostro § 36.

17. **Teorema di RIEMANN-ROCH.** — Abbiamo dimostrato (§ 7) che per una g^r_n completa appartenente ad una curva di genere p, sussiste la relazione fondamentale:

$$r \geq n - p;$$

la quale non può convertirsi in ogni caso in una eguaglianza, giacchè si ha

$$r > n - p$$

per la serie canonica g_{2p-2}, e quindi per le serie in essa contenute. Ora il teorema di Riemann-Roch precisa quella relazione dimostrando che:

1) le serie g^r_n contenute nella serie canonica sono le sole per cui risulti $r > n - p$, sicchè per ogni altra serie la dimensione è data precisamente da $r = n - p$;

2) se una serie completa g^r_n è contenuta nella serie canonica, un suo gruppo appartenendo ad i gruppi canonici linearmente indipendenti, la dimensione r vale

$$r = n - p + i.$$

Dagli enunciati precedenti appare come essenziale la distinzione fra serie contenute e serie non contenute nella g_{2p-2} canonica, onde la convenienza della seguente

Definizione. Dicesi *speciale* una serie g_n^r appartenente ad una curva piana f d'ordine m e di genere p, la quale sia *contenuta nella serie (canonica) segata dalle curve aggiunte d'ordine* $m-3$ (¹).

Sono certo non speciali le serie per cui $n > 2p-2$.

Per chi ammetta il teorema fondamentale del § 8, la proprietà di una serie di essere speciale o non speciale, ha *a priori* un significato invariante rispetto a qualsiasi trasformazione birazionale della curva; ma prescindendo da ciò questa invarianza (cioè l'invarianza della serie segata dalla φ_{m-3}) risulta qui dimostrata a posteriori in seguito al teorema di Riemann-Roch.

Ora, per giungere alla dimostrazione dei teoremi che abbiamo in vista, conviene esaminare anzitutto la questione se una serie speciale completa g_n^r venga ampliata o meno quando vi si sommi un punto P. Riferiamoci dapprima all'esempio della g_3^1 segata dalle rette per un punto O sopra una quartica piana f_4 di genere $p=3$. È chiaro che se alla g_3^1 si somma il punto O, si dà luogo alla g_4^2 segata dalle ∞^2 rette del piano, la cui dimensione supera quella della g_3^1. Ma se invece si somma alla g_3^1 un punto P diverso da O, tenendo presente il modo di costruzione delle serie complete (§ 15) è facile vedere che si ottiene soltanto una g_4^1 completa col punto fisso P: infatti la nostra $|g_4| = |g_3^1 + P|$ si può segare su f_4 mediante le coniche passanti per O e per una terna di punti posti sopra una retta r per P, le quali si spezzano nella retta r e in una retta per O.

Queste considerazioni si estendono al caso generale e portano al

Teorema di riduzione (²). *Se ad una serie speciale com-*

(¹) Nella trattazione del precedente capitolo si assume come definizione delle serie speciali (complete) la disuguaglianza $r > n-p$, e si dimostra poi che tali serie sono contenute nella serie canonica determinata dalle φ_{m-3}.

(²) Questo teorema appare implicitamente nelle memorie di BRILL e NOETHER dei *Math. Annal.*, 7 (1873) (cfr., p. es., pag. 279); quindi esso viene rilevato esplicitamente da J. BACHARACH (1879) (cfr. *Math. Ann.*, 26), e poi da DEDEKIND-WEBER (1880); NOETHER, *Math. Annal.*, 37 (1894), gli ha dato appunto il nome di « Reductionssatz für algebraische Functionen ».

pleta g_n^r si somma un punto P, il quale non appartenga a tutti i gruppi canonici contenenti un gruppo della g_n^r stessa, la serie somma $(g_n + P)$ contiene P come punto fisso, sicchè l'aggiunta di P non vale ad ampliare la dimensione della serie data. Così dunque una serie speciale completa non si amplia sommando ad essa un punto generico della curva.

Riferiamoci ad una curva piana f_m, d'ordine m; per ipotesi, la g_n^r essendo speciale, ogni gruppo G di essa appartiene a qualche curva aggiunta φ_{m-3}, e, fra codeste φ_{m-3} ve ne è una, almeno, $\overline{\varphi}_{m-3}$, che non contiene P. Ora la serie completa $(g_n + P)$ si potrà segare mediante curve aggiunte di ordine $m-2$, come segue. Si consideri il gruppo Γ segato ulteriormente su f_m dalla $\overline{\varphi}_{m-3}$ fuori di G, e si consideri ancora il gruppo Γ' formato dagli $m-1$ punti sezioni ulteriori di f_m con una retta r condotta per P; la $\overline{\varphi}_{m-3} + r$ costituisce una curva *d'ordine* $m-2$ aggiunta alla f_m, e quindi le φ_{m-2} passanti per $\Gamma + \Gamma'$ segano ulteriormente sulla f_m la serie completa $|g_n + P|$ determinata da $G + P$. Ciò posto si osservi che le φ_{m-2} passanti per Γ', avendo $m-1$ punti sopra r, si spezzano nella retta r (e in una curva φ_{m-3}) sicchè passano tutte per P. c. d. d.

Ora siamo in grado di stabilire il

Teorema di RIEMANN-ROCH. *La dimensione di una serie completa g_n^r, appartenente ad una curva di genere p, vale*

$$r = n - p + i,$$

dove $i\ (\geq 0)$ designa il numero dei gruppi canonici linearmente indipendenti che contengono un gruppo della serie data.

Il numero i prende il nome di *indice di specialità* della serie: si ha $i = 0$ per le serie non speciali.

1) Cominciamo a dimostrare che se

$$r > n - p$$

la serie è speciale, diguisachè per le serie non speciali $r = n - p$. A tale scopo si osservi anzitutto che la proprietà sussiste certo per i più piccoli valori di n, giacchè ogni gruppo composto di $n \leq p - 1$ punti appartiene almeno a un gruppo della serie canonica segata dalle curve aggiunte φ_{m-3}, la cui dimensione sappiamo essere $\geq p - 1$. Pertanto si potrà procedere con dimostrazione induttiva, supponendo che la proprietà sia già stabilita per le serie d'ordine $n-1$, e dimostrandola per quelle d'ordine n.

Allora si tolga dalla nostra g_n^r per cui $r > n-p$ un punto generico P; si otterrà una serie residua g_{n-1}^{r-1}, la quale, essendo $r-1 > (n-1)-p$, dovrà essere speciale. Ma questa g_{n-1}^{r-1} si amplia quando ad essa venga sommato il punto P, onde (per il teorema di riduzione) P dovrà appartenere a tutti i gruppi canonici che contengono un gruppo di codesta g_{n-1}^{r-1}, e così la serie somma $g_n^r = [g_{n-1}^{r-1} + P]$ risulterà ancora contenuta nella serie canonica.

2) Ora si può provare che se un gruppo della g_n^r completa appartiene ad $i > 0$ gruppi canonici linearmente indipendenti, si ha

$$r = n - p + i.$$

Il significato dell'ipotesi fatta è che la g_n^r è contenuta nella g_{2p-2} canonica, ed ha una serie residua g_{2p-2-n}^{i-1}. Ciò posto è facile provare che: sommando alla g_n^r data i punti generici della curva, si ottiene una serie non speciale, g_{n+i}^r, che contiene quei punti come fissi, onde $r = (n+i) - p$.

Infatti è chiaro anzitutto che la serie somma ottenuta è non speciale, giacchè i punti generici non appartengono alla g_{2p-2-n}^{i-1}; mentre, per la stessa ragione, si vede che sono speciali le serie ottenute sommando alla data g_n^r un gruppo Γ di $i-1$ punti generici della curva, appartenendo Γ ad un gruppo della g_{2p-2-n}^{i-1}. Ora, per il teorema di riduzione, si può anche affermare che sommando alla g_n^r successivamente $1, 2 \ldots i-1, i$, punti generici di f_m si ottengono serie che contengono codesti punti come fissi. E così si troverà come serie somma una g_{n+i}^r completa non speciale, onde

$$r = n - p + i. \qquad \text{c. d. d.}$$

La prova del teorema, pel caso delle serie speciali, si può presentare anche sotto un'altra forma, senza passare attraverso al caso delle serie non speciali. Provare che, per la g_n^r speciale, $r = n - p + i$, significa provare che ogni gruppo G_n della g_n^r è contenuto in una serie g_{2p-2}^{i-1} di gruppi canonici aventi i punti del G_n come fissi, cioè provare che « *ogni gruppo della g_n^r speciale completa presenta $n - r$ $(= p - i)$ condizioni indipendenti agli ∞^{p-1} gruppi canonici che debbono* *contenerla* ». Ora, se imponiamo ad un gruppo canonico di contenere successivamente 1, 2, ..., r punti generici $P_1 P_2 \dots P_r$ della curva, questi danno come residuo rispetto alla g_n^r delle serie speciali complete g_{n-1}^{r-1}, g_{n-2}^{r-2} ... ed infine una $g_{n-r}^0 = G_{n-r}$: e poichè l'aggiunta successiva di codesti r punti, a serie speciali, vale ad ampliare queste fino a ritrovare la nostra g_n^r, per il teorema di riduzione si vede che tutti gli $\infty^{p-1-(n-r)}$ gruppi canonici contenenti il gruppo G_{n-r} contengono di conseguenza i punti P_1 P_2 .... P_r, e quindi l'intero gruppo della g_n^r cui appartiene il G_{n-r}.

Non staremo qui a ripetere come il teorema Riemann-Roch possa porsi sotto la forma equivalente del *teorema di reciprocità*, nè rienuncieremo i corollari dati nel § 11 (da pag. 86 a pag. 90): basterà rilevare che il teorema di Riemann-Roch porta come conseguenza: *la serie canonica, sezione sulla f_m delle φ_{m-3} aggiunte, ha precisamente la dimensione $r = p-1$ e non $r > p-1$*; così, essendo l'unica g_{2p-2}^{p-1} appartenente alla curva, resulta dimostrata la sua *invarianza* per trasformazioni birazionali.

Come già viene rilevato alla fine del § 11, segue poi che il sistema delle φ_{m-3+h} $(h \geq 0)$, aggiunte ad una f d'ordine m, non è mai sovrabbondante.

18. **Nota su un nuovo sviluppo della teoria secondo Severi.** — La teoria di Brill e Noether esposta nei precedenti paragrafi, può ricevere uno sviluppo più rapido, indipendentemente del teorema fondamentale dell'$Af + B\varphi$, come si vede in una Nota di Severi del 1920 (1): questo sviluppo non presuppone neppur la possibilità di sciogliere le singolarità delle curve, che risulta qui dimostrata nella maniera più rapida.

Anzitutto si definiscono le serie lineari sopra una curva e le relative operazioni elementari di somma e sottrazione (§§ 4, 5, 6).

Lo sviluppo ulteriore prende le mosse dalla definizione che Weierstrass ha dato del *genere* (Rang) di una curva:

Il *genere* p di una curva f è definito dalla proprietà che, assumendo ad arbitrio su f $n \geq p+1$ punti, esiste una g_n^1 a cui

(1) « Una rapida ricostruzione della geometria sopra una curva algebrica ». Atti dell'Istituto Veneto, 24 giugno 1920.

essi appartengono (si possono prendere ad arbitrio i $p+1$ poli di una funzione razionale sopra f), mentre $n < p+1$ punti non appartengono in generale ad una g_n^1.

Per giustificare la definizione si noterà anzitutto che, per n abbastanza grande, un gruppo di n punti, G_n, preso su f, appartiene certo ad una g_n^r con $r \geq 1$. Infatti, se la f è una curva piana d' ordine m, basta prendere $n = m^2 + h$ ($h \geq 0$); si verifica allora che una curva d' ordine l abbastanza elevato, che passi per il G_n e non contenga la f come parte, sega f in

$$lm - m^2 - h$$

punti; per questi passa un sistema lineare di curve d' ordine l, la cui dimensione vale

$$d \geq \frac{l(l+3)}{2} - lm + m^2 + h;$$

d' altra parte il sistema delle curve d' ordine l che contengono f come parte ha la dimensione

$$s = \frac{(l-m)(l-m+3)}{2}:$$

da ciò si deduce

$$r = d - s - 1 = \frac{m(m+3)}{2} + h - 1 > 0.$$

Di conseguenza potremo dire:

il numero $p+1$ è il minimo valore di n per cui un G_n generico preso su f appartiene ad una g_n^1.

Si avverta che l' esistenza di una (effettiva) funzione razionale possedente su f un dato gruppo di poli G_n, si traduce in una condizione algebrica per i parametri da cui dipende il G_n; di conseguenza, non soltanto un G_{p+1} generico, ma *ogni* G_{p+1} apparterrà sempre ad una serie lineare infinita.

Ora passiamo a stabilire i seguenti teoremi relativi alle serie appartenenti ad una curva f di genere p.

Teorema 1). *Un gruppo generico di $p+r$ punti ($r \geq 1$) appartiene ad una serie lineare g_{p+r}^r di dimensione r.*

Si dimostra induttivamente da r ad $r+1$. Anzitutto un G_{p+1} generico appartiene per definizione ad una g_{p+1}^1, e non può appartenere ad una g_{p+1}^2, altrimenti — fissando un punto del G_{p+1} — si avrebbe un G_p generico appartenente ad una g_p^1. Ora, preso un G_{p+2} generico di cui due punti vengano designati con A_1 e A_2, si avranno due serie g_{p+1}^1 che lo contengono, dotate dei punti fissi A_1 e A_2, le quali combinate daranno luogo ad una g_{p+2}^2; d'altra parte la dimensione della serie a cui appartiene il nostro G_{p+2} generico non potrà essere > 2, perchè altrimenti risulterebbe > 1 la dimensione della serie determinata da $p+1$ punti contenuti nel G_{p+2}.

Analogamente si procede da $r=2$ a $r=3$ ecc.

Il teorema precedente si può anche enunciare in questa forma: *ogni g_n^r generica completa* ($n>p$) *ha la dimensione $r=n-p$. Serie particolari avranno in ogni caso la dimensione $r \geq n-p$*: le g_n^r per cui sia $r>n-p$ si diranno *serie speciali*.

Osservazione. Da una serie g_n^r speciale fissando $h<r$ punti si ottiene come residua una serie speciale; quindi: una serie che contenga parzialmente entro di sè una serie non speciale è certo non speciale.

Teorema 2) *Ogni g_n^r completa per cui $n>2p-2$ è non speciale.*

Per l'osservazione precedente basterà dimostrare assurda l'esistenza di una g_{2p-1}^p. Ora, si supponga data una tal serie. Un G_p generico dà luogo rispetto ad essa ad un gruppo residuo G'_{p-1}: ma questo G'_{p-1} ha, rispetto alla g_{2p-1}^p, una serie residua ∞^1, che contiene il detto G_p; il che è assurdo essendo il G_p generico.

Teorema 3). *Ogni g_n^r completa per cui $r>p-1$ è non speciale* (e ha l'ordine $n \geq 2p$).

Fissando, eventualmente, $r-p-1$ punti, ci si riduce a dimostrare che è non speciale ogni serie completa g_n^p. Ora, se una tal serie è speciale, si deve avere $n \leq 2p-1$, e già per $n=2p-1$ (*a fortiori* per $n<2p-1$) si arriva all'assurdo incontrato nella dimostrazione del precedente teorema.

Teorema 4). *Ogni curva di genere p si può sempre trasformare birazionalmente in una curva normale d'ordine $n>2p$, dello spazio S_{n-p}, priva di punti multipli*; e quindi — per proiezione — in una curva piana dotata soltanto di nodi.

All'uopo basta costruire sulla curva una serie completa g_n^r con $n>2p$, per cui $r=n-p$. La curva normale che ne offre il modello non può avere un punto doppio (o multiplo), perchè gl' iperpiani per questo punto segherebbero su di essa una serie speciale di dimensione $r-1>p-1$.

Teorema 5). *Sopra una curva piana dotata soltanto di nodi, le curve aggiunte d'ordine abbastanza elevato segano una serie completa.*

Sia f una curva piana d'ordine m, dotata soltanto di nodi, e consideriamo la serie non speciale segata su questa f dalle curve aggiunte φ, d'un ordine l abbastanza elevato, passanti per codesti nodi; gioverà in particolare di supporre $l>m-1$. Se la serie segata dalle φ non è completa, sarà contenuta in una serie completa g_n^r che verrà segata da un sistema di curve ψ_h di un certo ordine $h>l$, e — aggiungendo eventualmente delle parti fisse che contengano i punti doppi — si può sempre supporre che le ψ siano curve aggiunte ad f: le quali passeranno oltrechè per i nodi di f per un certo numero di punti semplici della f stessa, costituenti un gruppo H.

Ora si noti che un gruppo G_m costituito da m punti di f in linea retta impone m condizioni distinte alle curve φ_l e quindi *a fortiori* ai gruppi della serie completa g_n^r segata dalle ψ_h, e a queste stesse ψ_h. Si deduce che il G_m imporrà ancora m condizioni indipendenti alle curve ψ_{h+1}, di ordine $h+1$, aggiunte ad f e passanti per H. In conseguenza di ciò queste ψ_{h+1} segnano sopra f una serie d'ordine $n+m$ e di dimensione $r+m$ che risulterà completa come la g_n^r $(n-r=p)$.

In modo analogo si prova che anche il sistema delle curve aggiunte ψ_{h+k} passanti per H segnano sempre su f una serie completa. Ma, per $h+k$ abbastanza grande, i punti di H offrono certo condizioni indipendenti alle curve aggiunte che debbano contenerli: si deduce che il sistema delle curve aggiunte ad f, di un ordine abbastanza elevato, segna su f una serie completa.

Aggiungasi che — per sottrazione — risulta anche: le curve aggiunte di un dato ordine segano sempre su f una serie completa. (Donde il Teorema del resto).

Teorema 6). Il genere di una curva piana, d'ordine m e dotata di d nodi, viene dato dalla formula di CLEBSCH

$$p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-d.$$

Per dimostrarlo basta calcolare la dimensione r e l'ordine n della serie segata su f dalle curve aggiunte di un ordine abbastanza elevato; avendosi

$$p = n - r = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d.$$

19. La geometria sopra una curva nel suo sviluppo storico: dalla geometria proiettiva alla geometria delle trasformazioni birazionali. — La geometria sopra una curva sorge dal riavvicinamento di due ordini di concetti e problemi, attinenti

1) l'uno alle proprietà geometriche dei gruppi d'intersezione di due curve piane,

2) e l'altro alla teoria delle funzioni di variabile complessa, in rapporto con gli integrali di funzioni algebriche.

1) Il primo ordine di questioni, di natura algebrico-proiettiva, trae origine dall'osservazione di MAC-LAURIN (1720) che $\frac{n(n+3)}{2}$ punti scelti fra le n^2 intersezioni di due curve d'ordine n non determinano più una curva di quell'ordine, e dal paradosso di EULERO-CRAMER (1748): su questo terreno sorge la teoria dei sistemi lineari di equazioni con più incognite (cfr. L. 2°, § 15). Notammo già che mediante il principio di LAMÉ (1818) il significato del detto paradosso è apparso nella sua vera luce: le curve d'ordine n che passano per $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punti generici del piano passano di conseguenza per altri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti. Per vedere subito la relazione fra questo teorema e la geometria sopra una curva, basta tradurlo come segue: « segando una curva generale d'ordine n, che è di genere $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, con la totalità delle curve d'ordine n del suo piano, si ottiene una serie lineare $g^r_{n^2}$ di dimensione $r = n^2 - p$, ogni gruppo di questa venendo determinato da $n^2 - p$ punti generici ».

Il teorema sopra indicato riceve diverse estensioni successive da GERGONNE (1827), JACOBI (1836), e poi da PLÜCKER, CAYLEY, ecc., come abbiamo esposto nel § 16 del Libro 2°. Il teorema di JACOBI porta già che le curve d'ordine m che passano per $mn - p$ punti generici di una curva generale di ordine n $\left(\text{con } p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$ passano di conseguenza per altri p punti di questa. (Vi era nella mente di Jacobi un legame fra queste ricerche e quelle da lui stesso proseguite negli anni 1832, '34 sul problema d' inversione degli integrali abeliani?)

Senza fermarci di più sull' argomento, avvertiremo soltanto che lo sviluppo di tali questioni procede nell' opera dei geometri parallelamente allo studio delle polari e delle formazioni invarianti e covarianti, che — come abbiamo veduto nel libro 3° — conduce ad una sistemazione della teoria proiettiva delle curve, quale viene riassunta nel trattatello del CREMONA del 1861.

2) La teoria delle funzioni e specialmente delle trascendenti algebriche (abeliane) [1], quale fu svolta da RIEMANN nei suoi classici lavori del 1851 e del 1857, trae la sua origine da un problema di calcolo integrale. È noto che l' integrale di una funzione razionale fratta $\int_0^x F(x)dx$, conduce a funzioni razionali e logaritmiche. Da questo caso si passa naturalmente alla ricerca dello $\int_0^x F(xy)dx$, dove F designa una funzione razionale ed y è un radicale portante sopra un polinomio $\varphi(x)$. Se questo polinomio è di 2° grado, l' integrazione si effettua senza difficoltà mediante un' opportuna sostituzione: qui si profitta della circostanza che la curva $y^2 = \varphi(x)$, sopra la quale è definita la funzione integranda F, è una curva razionale, per modo che le coordinate x e y dei punti di essa si esprimono come funzioni razionali di un parametro t; da ciò segue che l' integrale dato si riduce all' integrale di una funzione razionale di t.

Ora si comprende come questo metodo di sostituzione non sia più applicabile al caso in cui il radicale y, che figura nel nostro integrando, porti sopra un polinomio di grado superiore al 2°, per esempio sopra un polinomio di 3° o di 4° grado. Ed è noto come lo studio di questi integrali (ellittici), iniziato da LEGENDRE e proseguito, colla loro inversione, nella teoria

[1] Cfr. Cap. V.

delle funzioni ellittiche, per opera di ABEL e di JACOBI, abbia condotto a riconoscere che l'integrazione non è possibile in generale mediante le solite funzioni elementari (algebriche, esponenziali o circolari, logaritmiche). Questa conclusione appare nella più chiara luce quando si considerino i detti integrali come definiti nel campo della variabile complessa: già l'intégrale ellittico di prima specie di Legendre,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

si manifesta finito e continuo ovunque, in tutto il piano complesso, e, per ciò solo, irreducibile alle funzioni elementari sopra nominate, che posseggono tutte dei punti singolari.

Dagli integrali ellittici si giunge, per estensione, agli *integrali* detti *abeliani*, cioè agli integrali del tipo $\int_0^x F(xy)dx$ dove F designa una funzione razionale delle x e y legate da un' equazione algebrica

$$f(xy) = 0 .$$

ABEL, da cui questi integrali prendono nome, ha scoperto (sotto forma differenziale) la proprietà fondamentale che le somme dei loro valori calcolate nei punti di un gruppo che dipenda razionalmente da più parametri, risultano funzioni razionali e logaritmiche di questi. Nel nostro linguaggio geometrico si esprime così una condizione necessaria a cui debbono soddisfare i gruppi di punti che appartengono a una serie lineare.

Questo teorema appare nella sua vera luce in rapporto al *problema d' inversione* di JACOBI, come vogliamo spiegare adottando — in conformità coll' indole del nostro libro — il linguaggio geometrico di CLEBSCH. Riferendosi al caso del genere $p = 1$ dove si ha un integrale (di prima specie) u, privo di singolarità, il teorema d'Abel porta che la somma dei valori di u nei punti dei gruppi di una g_n^r sia costante, e l' inversione dell' integrale u, che offre una rappresentazione parametrica univoca dei punti della curva, mostra che la condizione di Abel è, non solo necessaria, bensì anche sufficiente per la equivalenza di due gruppi. Ma per l' integrale abeliano di genere $p > 1$, l'inversione nel senso detto innanzi non è più possibile, come già si vede nel caso particolare caratteristico $p = 2$. Accortosi di ciò, JACOBI (1832-'34) ha posto — per questo caso — il problema di rappresentare univocamente le coordinate delle coppie di punti della curva per mezzo delle somme di integrali ad esse relative.

La soluzione di tale problema vien data da GÖPEL e ROSENHAIN (1844-47), e poi, pel caso degli integrali iperellittici di genere p qualunque, da WEIERSTRASS (1848-56): infine RIEMANN e WEIERSTRASS contemporaneamente risolvono il problema d'inversione più generale. Il quale appare nel suo pieno significato in seguito alla scoperta di RIEMANN che si hanno sempre, per $p > 1$, p *integrali* linearmente indipendenti *di prima specie*, privi di singolarità: giacchè per questi si ottiene la rappresentazione parametrica dei gruppi di p punti della curva, con funzioni $2p$ volte periodiche.

Ora, con RIEMANN, mercè l'introduzione di nuove e feconde idee, si costituisce in tutta la sua generalità la teoria delle funzioni abeliane, e ciò in rapporto alla veduta qualitativa delle funzioni di variabile complessa, che il Nostro ha posto a fondamento dell'Analisi.

Questa veduta si affaccia nella dissertazione inaugurale del 1851 (1), che forma la base dell'edificio costruito dallo stesso autore con la « *Theorie der Abel'schen Functionen* » del 1857 (2).

In termini generalissimi, il concetto direttivo della teoria riemanniana si può spiegare come segue:

Le funzioni di una variabile complessa, considerate nell'intero piano di questa, resultano definite dalle loro singolarità: così una funzione f (monodroma) che sia affatto priva di singolarità, si riduce ad una costante, e una f dotata di soli poli ad una funzione razionale; così ancora gli integrali delle funzioni razionali si possono caratterizzare mediante le loro singolarità polari e logaritmiche (quest'ultime dando luogo ad una infinita polidromia). Ora Riemann prende a considerare, in luogo del piano, le superficie chiuse bilatere R, più volte connesse, quali possono costruirsi con fogli sovrapposti opportunamente collegati attraverso tagli, e si propone di caratte-

(1) « Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer Veranderlichen complexen Grösse » (*Werke*, pagg. 3-47).
(2) *Werke*, VI, pagg. 81-135).

rizzare analogamente le funzioni di variabile complessa definite sopra una R.

È chiaro che la R offre una rappresentazione reale univoca per i punti di una curva algebrica e quindi per le funzioni algebriche che sono razionali sopra di questa; ma Riemann, anzichè partire da queste funzioni algebriche, assume *a priori* la superficie R, e cerca anzitutto di definire le funzioni analitiche ovunque finite e continue sopra R, ovvero dotate soltanto di singolarità polari: cotali funzioni di *prima* e *seconda specie*, introdotte sulla base di un *teorema di esistenza*, sono di fatto integrali di funzioni algebriche, cioè integrali abeliani; Riemann lo mostra riconoscendo che le loro derivate dipendono algebricamente l'una dall'altra.

Attraverso questa costruzione, Riemann ha scoperto nuovi risultati importanti: a prescindere dai contributi ch' egli ha recato al problema d' inversione (e allo studio delle funzioni inverse Θ), segnaliamo qui i seguenti:

Anzitutto l'esistenza di integrali abeliani di prima specie I (ovunque finiti), che per derivazione conducono alle curve φ_{n-3} d' ordine $n-3$ aggiunte ad una curva f d' ordine n; infatti si ha precisamente

$$I = \int_0^x \frac{\varphi_{n-3}(xy)}{f_y'}\, dx.$$

In secondo luogo la determinazione del numero delle costanti da cui dipende, in generale, una funzione algebrica con dati poli; teorema completato da Roch con l'analisi del caso di eccezione (1864) [1].

In questi risultati appare tutta l' importanza di quel numero p che Riemann designava come *Klassenzahl* e che noi chiamiamo, con Clebsch, *genere* della curva f [2]; il qual numero — nell' ordine di idee di Riemann — viene definito dalla connessione della superficie R: lo stesso carattere compariva già implicitamente nella memoria fondamentale di Abel del 1826 [3], scaturendo dalla ricerca sul numero degli integrali indipendenti, che il nostro autore aveva approfondito.

(1) Cfr. per le indicazioni bibliografiche il § 11.

(2) Cfr. L. 3°, § 17 (vol. II, pg. 134).

(3) Presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi il 30 ottobre 1826. Oeuvres, pagg. 145-211.

Ma un altro concetto nuovo s' incontra in Riemann, e cioè il concetto della *trasformazione razionale,* di cui egli si vale per ordinare le funzioni algebriche in *classi,* caratterizzate — oltre che dal genere — da certe costanti caratteristiche (*moduli,* cfr. § 33).

Emerge da quanto precede che:

1) la teoria proiettiva dei gruppi d' intersezione delle curve piane aveva condotto a teoremi che preludono e, in qualche modo, contengono in sè i teoremi generali che oggi costituiscono la geometria sopra una curva;

2) che, dal punto di vista della teoria delle funzioni, questi teoremi vengono conseguiti in tutta la loro generalità da Riemann (completato da Roch nel 1864).

Ma, a prescindere dalle obbiezioni che una critica rigorosa ha mosso ai fondamenti della teoria di Riemann (cioè all' applicazione del *principio di* Dirichlet), il punto di vista astratto della dottrina riemanniana lascia nell' ombra l' interesse algebrico dei problemi, e — per seguire la rappresentazione reale dell' immaginario con le superficie più volte connesse — neglige quell' interpretazione geometrica offerta dalle curve piane, che pure ha diritto di sopravvivere all'estensione delle funzioni dal campo reale al campo complesso.

Pertanto si comprende che, dopo Riemann, si torni ad assumere come fondamento della dottrina delle funzioni algebriche, e dei loro integrali, l'equazione $f(xy)=0$, che definisce il campo di razionalità, e la curva piana che essa rappresenta.

Questa tendenza si esprime, non soltanto nell' applicazione geometrica che Roch fa degli integrali abeliani al problema delle tangenti doppie della quartica piana (1864), ma sopratutto nel legame sistematico che — affatto indipendentemente — Clebsch ha posto fra i teoremi sui gruppi d' intersezioni e il teorema d'Abel, e fra i problemi delle curve pluritangenti e il problema d' inversione delle funzioni abeliane (1863-64) (1). Lo sviluppo più maturo di queste idee viene offerto dalla « Theorie der Abel'schen Functionen » di Clebsch e Gordan (1866) (2).

(1) Questi lavori sono tutti contenuti nel *Journal für Math.* Cfr. Bd. 63-66.

(2) Ed. Teubner, Lipsia.

In questo indirizzo vediamo prender rilievo il concetto della trasformazione razionale che — traverso tutta una evoluzione delle idee — viene ad apparire ai geometri sempre più ricco di contenuto. Qui si può ritenere come decisivo l'influsso esercitato dalle ricerche sulle trasformazioni birazionali del piano, che CREMONA iniziò nel 1863 (cfr. § 20); giacchè — allargandosi in tal guisa la nozione delle trasformazioni proiettive — pareva offrirsi al ricercatore una varietà di istrumenti quasi infinita, per dedurre nuove proprietà di enti trasformati da quelle di enti più noti. Il modo di pensare dei geometri del tempo può ben tradursi ripetendo il giudizio pronunziato fino dal 1835 nell'« Aperçu Historique » dello CHASLES « Peut donc qui voudra devenir géomètre à volonté: le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice ».

Ma bene ha avvertito il SEGRE [1] che da questo modo di concepire l'ufficio delle trasformazioni geometriche vien fuori soltanto quella produzione artificiale che un suo maestro caratterizzava spiritosamente come « Tic-tac geometria »! Senonchè anche gl'indirizzi scientifici che degenerano in una produzione futile, contro cui diverrà necessario reagire per una migliore valutazione degli scopi proposti alla ricerca, esprimono pure, a loro modo, l'influsso di nuove idee che hanno colpito le menti, e proseguono — al di là dei primi esempi significativi — la spiegazione di quelle idee che una critica più matura dovrà comprendere in una maniera più elevata.

Dalla considerazione delle trasformazioni birazionali, come istrumento di estensione dei teoremi proiettivi, si doveva presto passare alla distinzione di quelle proprietà che, oltre a rimanere invariate per trasformazioni lineari, sono invariate per riguardo a trasformazioni birazionali qualsiansi. In tal modo i geometri venivano a comprendere come proprio oggetto di studio appunto quelle proprietà delle curve che — secondo la dottrina riemanniana — compariscono come inerenti alla dottrina delle funzioni.

Nel periodo di cui stiamo discorrendo, gli studi sulle trasformazioni birazionali (cremoniane) del piano s'intrecciano con quelli sulla rappresentazione piana delle superficie, e con quelli che si riferiscono più precisamente alla trasforma-

(1) « Su alcuni indirizzi.... » Rivista di Matematica 1894.

zione delle curve: Clebsch nel 1863 dimostra che le curve di genere 0, 1 ammettono rispettivamente una rappresentazione parametrica razionale o ellittica, riferendo quest' ultime a cubiche, e nota come il birapporto, che dà l' invariante proiettivo della cubica scoperto da Salmon, risponda al *modulo* τ, invariante per trasformazioni birazionali, che appare nella teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche (1). Poi scopre il significato geometrico del genere come « numero dei punti doppi che mancano ad una curva per raggiungere il massimo ». Cayley (1865-68) (2) studia in generale la trasformazione di una curva piana in un' altra, e propone per primo il problema di ricondurre le curve di una classe (birazionalmente identiche) ad una *curva normale* d' ordine minimo, mentre Riemann riduceva le $f(xy) = 0$ all' ordine minimo rispetto ad una sola variabile. E nello studio delle trasformazioni fra curve, e dei moduli, procede Brill (1867-69-70), ecc.

Ora lo sviluppo di queste considerazioni, ed applicazioni geometriche, conduce ad una revisione dei fondamenti della teoria di Clebsch e Gordan; in particolare si affaccia la domanda se i teoremi sui gruppi d' intersezione delle curve piane, che — come abbiamo accennato — vengono stabiliti con maggiore generalità ed esattezza mercè l' uso delle funzioni trascendenti, non possano ricevere una dimostrazione algebrico-geometrica ugualmente generale e rigorosa. A questa domanda risponde il teorema fondamentale di Noether, che porge le condizioni necessarie e sufficienti perchè un polinomio $F(xy)$ possa esprimersi come combinazione lineare di due altri f e $\varphi : F = Af + B\varphi$ (cfr. § 15): dal quale teorema segue il Restsatz di Brill e Noether esposto nella memoria fondamentale del 1873. E vale la pena di notare che questo Restsatz appunto permette l' inversione rigorosa del teorema d'Abel, senza passare attraverso l' espressione dei periodi degli integrali normali di terza specie per gli integrali di prima specie, che ne costituisce il fondamento nella teoria di Riemann (cfr. cap. V).

(1) Come rapporto dei periodi: $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$. Cfr. Cap. V.

(2) Collected Mathem. Papers VI.

L' accennata memoria di

BRILL e NOETHER: « Ueber die algebraischer Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie » ([1])

contiene la prima esposizione algebrico-geometrica della teoria delle serie lineari sopra una curva. Movendo, come si è detto, dal teorema fondamentale e dal Restsatz — che insegna a costruire le serie lineari appartenenti ad una curva f mediante curve aggiunte — la trattazione procede colla dimostrazione algebrica del teorema di Riemann-Roch, che ha come fondamento il caso particolare contemplato dal teorema di riduzione. E ne risulta anche la prova algebrica dell' invarianza della serie canonica g^{p-1}_{2p-2}, segata sulla f' di ordine m, dalle curve aggiunte d' ordine $m-3$. Infatti — senza più ricorrere alla nozione che i gruppi della serie sono di livello per gli integrandi di prima specie — basta qui rilevare che la detta serie è l' unica g^{p-1}_{2p-2} appartenente alla curva. Aggiungeremo che la teoria di Brill e Noether trovasi lucidamente esposta, con qualche miglioramento e semplificazione, nella memoria di

BERTINI: « La Geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico » (1894) ([2]).

La stessa teoria è stata ripresa e svolta da noi nei precedenti paragrafi con alcune modificazioni, che già abbiamo avuto luogo di segnalare all' attenzione del lettore.

Le proposizioni relative alle serie lineari sopra una curva $f(xy)=0$, sono invarianti, non solo per trasformazioni che mutino la f in un' altra curva piana, sì anche per quelle che cambino f in una curva gobba, dello spazio o di un iperspazio; anzi le proprietà proiettive delle curve gobbe di uno spazio ad un qualunque numero di dimensioni, offrono — come vedemmo — una traduzione adeguata di tutta la teoria. C' è dunque qui un aspetto nuovo secondo cui la dottrina medesima può essere svolta.

Fino dal 1866 s' incontra in CREMONA il concetto di ricorrere a considerazioni spaziali per dimostrare l' uguaglianza del genere di due curve, supposte in corrispondenza

([1]) Math. Annalen. VII, pagg. 269-310.

([2]) Annali di Matematica, serie II, tomo XXII. Una precedente esposizione viene pôrta dalle « Lezioni » di CLEBSCH-LINDEMANN.

biunivoca (¹): Cremona considera a tal uopo la rigata le cui generatrici uniscono i punti omologhi di due curve, riferite fra loro. D' altra parte lo studio delle curve iperspaziali si inizia con CLIFFORD (²) (1878) e con VERONESE (³) (1881), nella cui memoria — fondamentale per lo sviluppo della geometria a più dimensioni — ricorre in ispecial modo la considerazione delle corrispondenze biunivoche che sorgono per proiezione.

Frattanto il problema della classificazione delle curve gobbe (nello spazio ordinario), posto a concorso dall'Accademia di Berlino, dava luogo alle due memorie premiate, di HALPHEN e di NOETHER (1893); e segnatamente la trattazione di quest' ultimo autore si presenta come una geometria sopra le curve, in rapporto alle g_n^3 che vi sono contenute.

Da queste premesse trae origine l' indirizzo di SEGRE e CASTELNUOVO, in cui la teoria delle serie lineari sopra una curva viene studiata sistematicamente in relazione alle curve iperspaziali che ne offrono il modello proiettivo, e dove è caratteristico il ricorso a formule di geometria numerativa, che surroga il teorema fondamentale di Noether. Le prime ricerche di SEGRE appartengono agli anni 1886-87-88, mentre la dimostrazione completa del teorema di Riemann-Roch e del Restsatz si trova nella Nota del CASTELNUOVO « Ricerche di Geometria sulle curve algebriche » (1889) (⁴). Questi resultati sono stati poi rielaborati dal Segre in un corso di lezioni tenute all' Università di Torino nel 1890-91, e nella citata Memoria:

SEGRE « Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito » (1894).

Mentre Bertini e Segre offrivano al pubblico italiano le due citate sistemazioni della Geometria sopra una curva, secondo l' indirizzo di Noether e secondo l' indirizzo geometrico iperspaziale, si veniva iniziando in Italia lo studio della geometria sopra le superficie algebriche, a cui precorrono le memorie di Noether nei volumi 6 e 8 dei Mathematische

(¹) Cfr. Libro 3°, § 17, vol. II, pag. 134.

(²) « On the Classification of Loci », Phil. Trans. 1878 (Papers pag. 331).

(³) « Behandlung der proiectivischen Verhältnisse... »; Math. Annalen Bd. XIX, 1881.

(⁴) Atti dell'Acc. di Torino, t. XXIV.

Annalen. Attraverso a queste ricerche si compie a grado a grado una evoluzione delle idee, analoga a quella per cui si passa dal metodo delle proiezioni di Poncelet (che riduce le figure a casi particolari metrici) alla geometria proiettiva pura dello Staudt; e così il metodo iperspaziale cede il posto ad una trattazione, nella quale si opera su enti definiti invariantivamente.

Questa veduta, che già si affaccia nelle prime ricerche di Enriques relative alle superficie (1894), trova un' espressione definita in un corso di lezioni sulle curve da lui tenuto nel 1897-98, e nella successiva Nota inserita negli Atti dell'Accademia di Torino del 1901. La teoria delle operazioni elementari sopra le serie lineari riceve qui uno sviluppo affatto invariantivo, e vi si aggiunge la dimostrazione diretta — nello stesso ordine di idee — del teorema d' invarianza della serie canonica (cfr. la Notizia storica in fine al § 8). Invece il teorema di Riemann-Roch viene stabilito per la via di Noether, traverso il teorema fondamentale e il Restsatz. Questo disegno è stato conservato da

Severi « Lezioni di Geometria Algebrica », Padova, 1908,

tradotte con importanti aggiunte nelle « Vorlesungen über algebraische Geometrie » (Teubner, Lipsia, 1921): nel quale trattato trovansi esposti in modo originale alcuni capitoli della dottrina delle curve (come p. es. quelle delle corrispondenze) e viene svolta e messa in più stretta connessione con la teoria geometrica, anche la teoria degli integrali abeliani (1).

Frattanto la trattazione più rigorosamente invariantiva della geometria sopra la curva maturava attraverso due corsi di lezioni di Enriques del 1913-14 e del 1918-19 (2): nell' ultimo veniva ripreso il metodo numerativo, così come appare dall' esposizione del nostro primo capitolo.

Abbiamo rilevato l' importanza fondamentale del concetto della trasformazione birazionale nello sviluppo storico della

(1) In queste lezioni non è tenuto conto della trattazione più rapida dell'Autore, che forma oggetto della Nota dell' Istituto Veneto del 1920, da noi esposta nel § 18.

(2) Cfr. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei 1° giugno 1919.

geometria sopra la curva. Tuttavia questo concetto sembra quasi scomparire dalla teoria delle serie lineari definitivamente compiuta, nella quale non accade più, o accade solo incidentalmente, di dover ricorrere a qualche effettiva trasformazione.

Volendo ora esaminare più da vicino i problemi che toccano le trasformazioni birazionali delle curve (i quali formeranno oggetto del cap. III), crediamo opportuno di premettere qui una breve trattazione delle trasformazioni birazionali del piano, introdotte nella scienza da Luigi Cremona: quantunque una trasformazione birazionale fra due curve non si estenda in generale (come trasformazione biunivoca) ai piani che le contengono, cioè non sia sempre subordinata da una trasformazione cremoniana, pure questo caso particolare è proprio a chiarire le idee dello studioso, e a porgergli argomento di utili esemplificazioni.

20. Trasformazioni cremoniane del piano. — Proponiamoci di determinare, con Cremona, le trasformazioni birazionali del piano.

Una trasformazione razionale si esprime — in generale — ponendo le coordinate omogenee y_1, y_2, y_3, proporzionali a tre forme d'ordine n nelle x_1, x_2, x_3:

$$1)\qquad \begin{cases} y_1 \equiv \varphi_1(x_1 x_2 x_3) \\ y_2 \equiv \varphi_2(x_1 x_2 x_3) \\ y_3 \equiv \varphi_3(x_1 x_2 x_3). \end{cases}$$

Le formule 1) rappresentano una trasformazione d'ordine n in cui ad ogni punto $X \equiv (x_1 x_2 x_3)$ corrisponde un punto $Y \equiv (y_1 y_2 y_3)$, ma dove reciprocamente ad un punto Y corrispondono in generale $d = n^2$ punti X. Alle rette $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$ corrispondono infatti le curve della rete $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 = 0$, che risulta riferita proiettivamente al piano rigato, di modo che ad un punto Y, centro di un fascio di rette, corrisponde il gruppo dei punti base per un fascio di curve φ della rete.

Il *grado* d della trasformazione inversa della 1) si abbassa quando la rete delle curve φ possiede dei punti base, avendosi a tener conto soltanto delle intersezioni variabili delle φ come corrispondenti alle intersezioni (variabili) delle rette del piano (y). Precisamente, se si hanno $h+1$ punti base $O, O_1, O_2, \ldots O_h$ di molteplicità $r=r_0, r_1, r_2, \ldots r_h$, avremo

$$d = n^2 - \Sigma r_i^2.$$

Di qui appare la condizione perchè la trasformazione 1) sia univocamente invertibile: occorre che si abbia

$$n^2 - \Sigma r_i^2 = 1,$$

la qual relazione esprime che il *grado della rete* delle curve φ (cioè il numero delle loro mutue intersezioni variabili) vale $d=1$, o anche — come si suol dire — che la rete è *omaloidica*.

D' altra parte, esprimendo che le curve φ, le quali corrispondono punto per punto alle rette del piano (y), sono di genere $p=0$, scriveremo

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2} = 0,$$

ovvero

$$n(n-3) - \Sigma\, r_i(r_i-1) = -2 \text{ (}^1\text{)}.$$

Per scrivere questa relazione si è supposto che i punti multipli delle φ cadano soltanto nei punti base della rete, il che è conforme ad un noto teorema di BERTINI (cfr. L. 2°, § 5, vol. 5, pag. 181); ma qui non è necessario fare appello a codesto teorema generale, perchè si vede subito che la φ generica appartenente ad una rete di grado 1 non può avere un punto doppio variabile P, altrimenti una seconda curva per P avrebbe con essa almeno due intersezioni fuori dei punti base.

Abbiamo ottenuto che per una qualsiasi rete omaloidica sono soddisfatte le relazioni

$$n^2 - \Sigma r_i^2 = 1$$

e

$$n(n-3) - \Sigma r_i(r_i-1) = -2,$$

cioè

$$2) \qquad \begin{cases} \Sigma r_i^2 = n^2 - 1 \\ \Sigma r_i = 3n - 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} r_i \geq 1 \\ i = 0, 1 \ldots h \end{pmatrix}.$$

[1] Questa seconda relazione si scrive direttamente esprimendo che la curva razionale d' ordine n dovrebbe avere $2p-2 \equiv -2$ intersezioni con una curva aggiunta d' ordine $n-3$.

Le relazioni 2) *caratterizzano le reti omaloidiche*: dati ad arbitrio dei numeri interi e positivi r_i soddisfacenti alle 2), esistono almeno ∞^2 curve d'ordine n che passano per punti dati comunque nel piano con le molteplicità r_i; *quando queste curve sono irriducibili esse formano una rete omaloidica, che* — riferita proiettivamente al piano rigato — *dà luogo ad una trasformazione birazionale o cremoniana.*

Per giustificare l'enunciato, si valuti la dimensione del sistema lineare delle curve φ d'ordine n, passanti per punti dati con le molteplicità r_i: nell'ipotesi che i punti base impongano alle φ condizioni indipendenti, questa dimensione vale

$$\frac{n(n+3)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i+1)}{2},$$

e, per le formule 2), questa espressione risulta uguale a 2, dimodochè in ogni caso le φ formano una rete o un sistema lineare più ampio.

Ora il sistema delle φ non può essere di dimensione ≥ 3, se le curve di esso sono irriducibili, giacchè un sistema ∞^3 di curve irriducibili è almeno di grado 2, per due punti del piano passando due curve distinte del sistema.

La *condizione di irriducibilità è essenziale* affinchè le φ stesse formino una rete omaloidica: se le curve soggette a passare per i punti O_i con le molteplicità r_i risultano riducibili, può accadere che esse formino un sistema lineare di dimensione > 2, ed anche che — pur essendo soltanto ∞^2 — le parti variabili delle φ s'intersechino in più di un punto. Un esempio di quest'ultimo caso viene offerto dal sistema delle quintiche soggette a passare tre volte per due punti O e O_1 e semplicemente per sei punti $O_2 O_3 \ldots O_7$, presi in posizione generica: il sistema delle φ si riduce — staccandosi la retta fissa OO_1 — alla rete delle quartiche che passano doppiamente per O, O_1 e semplicemente per $O_2 \ldots O_7$, le quali si segano a due a due in due punti; ciò accade perchè la retta OO_1 ha un' *equivalenza* (1) negativa rispetto al numero delle intersezioni delle φ che la contengono come parte. (Anche il genere delle parti variabili delle φ risulta in questo

(1) Intorno all'equivalenza di una curva nel computo delle intersezioni, cfr. L. 3°, § 45, vol. II, pag. 307 e seg.

caso uguale ad 1, avendosi una curva spezzata che si compone di due parti sconnesse il cui *genere virtuale* [1] è

$$0 + 1 - 1 = 0.$$

Mediante la discussione delle formule 2) si riesce ora a risolvere il problema di ***costruire tutte le trasformazioni cremoniane del piano d'ordine n.***

Così per $n = 2$ risulta $r_i < 2$, $h + 1 = 3$, $r = r_1 = r_2 = 1$, e quindi si ritrovano le trasformazioni quadratiche definite da una rete trasformante di coniche con 3 punti base (cfr. L. 4°, § 13, vol. II, pag. 401).

Per $n = 3$, la prima equazione dà

$$\Sigma\, r_i^2 = 8, \quad r_i \leq 2,$$

e la seconda

$$\Sigma\, r_i = 6,$$

dimodochè — supponendo designate le r_i per ordine decrescente — si deduce $h + 1 = 5$, e

$$r = 2, \quad r_1 = r_2, \dots\ r_4 = 1:$$

così « la rete trasformante riesce costituita dalle cubiche con un punto base doppio e quattro punti base semplici », i quali possono assumersi ad arbitrio nel piano, evitando le posizioni particolari che producono lo spezzamento.

Per $n = 4$, le due equazioni danno

$$\Sigma\, r_i^2 = 15$$
$$\Sigma\, r_i = 9$$

donde

$$3 \geq r \geq 2.$$

Ora nel caso $r = 3$ si trova

$$\sum_1^h r_i^2 = \sum_1^h r_i = 6,$$

[1] Infatti per una curva spezzata in due parti di genere p_1 e p_2 con i intersezioni semplici, il genere virtuale, definito in base a considerazioni di continuità, vale

$$p = p_1 + p_2 + i - 1;$$

come spiegheremo nel § 35 (cfr. l' Osservazione finale) e, da un punto di vista topologico, nel § 37.

donde $h = 6$,

$$r_1 = r_2 \dots r_6 = 1.$$

Invece nel caso $r = 2$

$$\sum_1^h r_i^2 = 11, \quad \sum_1^h r_i = 7$$

quindi

$$r_1 = r_2 = 2, \quad r_3 = r_4 = r_5 = 1, \quad h = 5.$$

In conclusione « esistono *due tipi di trasformazioni cremoniane del quarto ordine*, relativi alle seguenti reti omaloidiche di quartiche:

a) rete delle quartiche con un punto triplo e 6 punti base semplici;

b) rete delle quartiche con 3 punti base doppi e 3 punti base semplici ».

Invero siffatte reti risultano formate di curve irriducibili quando si evitino posizioni particolari dei punti base.

Lo studioso potrà esercitarsi sulla classificazione delle trasformazioni del quint' ordine che danno luogo a tre tipi, le rispettive reti omaloidiche essendo costituite da:

a) quintiche con un punto quadruplo e 8 punti base semplici;

b) quintiche con un punto triplo, 3 punti doppi e 3 punti base semplici;

c) quintiche con 6 punti base doppi.

Qui, come sopra è avvertito, la condizione di irriducibilità aggiunge qualcosa alla discussione aritmetica delle equazioni 2), dovendosi escludere il caso di 2 punti tripli.

Ora rileviamo che fra le soluzioni delle equazioni 2) c' è sempre — per qualunque valore di n — la seguente:

$$r = n - 1, \quad r_1 = r_2 - r_{2n-2} = 1,$$

la quale corrisponde alle *trasformazioni* di Jonquières già incontrate nel L. 4°, § 34 (vol. II, pag. 582).

Ciò posto esaminiamo come operi una trasformazione cremoniana 1) sopra le curve algebriche che possano darsi sui piani corrispondenti (x) e (y). Si consideri una curva ψ, di ordine m, che passi con le molteplicità s_i per i punti base r_i-*pli* delle curve trasformanti φ: l' ordine m' della trasformata di ψ — che è il numero delle sue intersezioni con una retta del piano (y) — verrà fornito dal numero delle intersezioni variabili della ψ stessa con le φ della rete omaloidica, quindi si avrà

$$m' = mn - \Sigma r_i s_i.$$

Se la ψ non passa affatto per i punti base delle φ, si ha $m' = mn$, ma questo ordine si abbassa ogni qual volta ψ venga a passare per uno dei punti base nominati, staccandosi dalla trasformata una *curva fondamentale* che corrisponde al *punto fondamentale* predetto. Invero è facile verificare che ad un punto fondamentale D_i, che sia r_i-*plo* per le φ, e cui — per semplicità — supponiamo non essere infinitamente vicini altri punti fondamentali, risponde una curva d'ordine r_i, le intersezioni di questa con una retta del suo piano nascendo dagli r_i punti semplici della φ omologa che cadono infinitamente vicini a D_i.

Da ciò che precede si rileva in particolare che *la trasformazione inversa di una trasformazione cremoniana d'ordine n è pure d'ordine n*; infatti alle rette generiche del piano (x) corrisponderanno — per le formule 1) — curve φ' del piano (y), d'ordine n, le quali pure dovranno formare una rete omaloidica, sicchè le 1) saranno invertite dalle

3) $$x_i \equiv \varphi_i' \,(y_1 y_2 y_3)$$

dove le φ_i' sono — come le φ — tre forme d'ordine n.

Ora la rete delle φ' avrà — nel piano (y) — dei punti base le cui molteplicità s_i soddisferanno ugualmente alle equazioni 2); e questi punti fondamentali risponderanno a *curve fondamentali d'ordine s_i* nel piano (x). L'esistenza di tali curve, che non hanno intersezioni variabili con le φ, si mette anche in evidenza rilevando che:

le curve fondamentali del piano (x) formano la jacobiana della rete delle $\varphi(x_1 x_2 x_3) = 0$.

Infatti si consideri un punto generico A sopra una curva fondamentale ω; le φ passanti per A si spezzano nella ω e nelle curve residue di un fascio; una delle quali resta determinata dal passare ancora per A. Dunque A è doppio per una curva della rete, ossia — per definizione — appartiene alla jacobiana [1].

[1] Cfr. L. 3°, § 5, vol. II, pag. 31.

Ora la seconda delle equazioni 2) ci dice che le curve fondamentali esauriscono tutta la jacobiana d'ordine $3n-3$, essendo appunto $\Sigma s_i = 3n-3$. Questa conclusione è d'accordo col fatto che un punto A della jacobiana è doppio per una φ, la quale — dovendo avere con un'altra φ, passante per A, $2 > 1$ intersezioni in A — è costretta a spezzarsi contenendo una parte fissa per tutte le curve del fascio.

Cremona e Clebsch, indagando più da vicino la relazione fra gli *ordini dei punti e delle curve fondamentali* (r_i ed s_i) sono pervenuti a dimostrare che essi sono *a coppie uguali*, sicchè disponendoli — come abbiamo detto — in modo decrescente ($r_i \geq r_{i+1}$, $s_i \geq s_{i+1}$) si ha

$$r_i = s_i.$$

Noi non ci indugeremo sulla dimostrazione di questo teorema, rimandando alle « Lezioni » di Clebsch-Lindemann (trad. francese, t. II, pag. 202); del resto (secondo una osservazione comunicata da Frahm a Lindemann) il teorema risulta subito dalla possibilità (che verrà stabilita in appresso) di generare tutte le trasformazioni cremoniane mediante trasformazioni quadratiche.

Nota. Il caso in cui alcuni dei punti fondamentali di una trasformazione cremoniana cadano infinitamente vicini, dà luogo a particolarità che conviene osservare, limitandoci ai più semplici esempi.

Anzitutto se si hanno due punti fondamentali infinitamente vicini O e O_1 dello stesso ordine r, al punto O viene a rispondere un determinato punto O'; infatti all'intorno del prim'ordine di O, che non ha intersezioni variabili con le φ, corrisponde una curva d'ordine zero, cioè l'intorno di un punto O'. Approfondiamo l'esame supponendo per semplicità $r=1$: si hanno due punti base semplici infinitamente vicini per le φ. Ora, se si impone ad una φ di toccare una retta generica per O, nasce in O un punto doppio, sicchè cresce di 2 il numero delle intersezioni di due φ nell'intorno di O; ciò porta di conseguenza che queste φ si spezzino, staccandosi una parte fissa, che sarà una curva fondamentale per O: le componenti variabili hanno quindi una sola tangente per O, cui risponde una retta per O', e così si ha proiettività fra gli intorni del prim'ordine di O e di O'.

Contro il ragionamento precedente si potrebbe sollevare il dubbio che la parte fissa delle φ col punto doppio O non passi per O; ma questo dubbio si elimina come segue. Poichè le parti variabili delle φ passanti doppiamente per O, avrebbero ancora in O un punto doppio, si avrebbero ancora $4 = 2 + 2$ intersezioni di due di queste φ assorbite in O, e quindi due φ della rete omaloidica, abbastanza vicine alle nominate, dovrebbero ancora segarsi (oltrechè in O e O_1) in *due* punti appartenenti all' intorno di O, il che è assurdo trattandosi di una rete omaloidica. Qui si è adoperato il principio di continuità in una forma che può essere chiarita da una semplice considerazione algebrica: quando si cercano le intersezioni di due curve $\varphi_1(xy) = 0$ e $\varphi_2(xy) = 0$ appartenenti ad un intorno dell' origine O, si è indotti a distinguere nel resultante un fattore

$$\overline{R} = \Pi(y_i - y_k{}')$$

relativo ai rami $y(x)$ e $y'(x)$ delle φ_1 e φ_2 nell' intorno di O; quando le φ_1 e φ_2 variano in dipendenza di un parametro, tendendo a due curve limiti che passino per O, senza parti comuni per O, il fattore precedente diverrà infinitesimo di un certo ordine, uguale al numero delle intersezioni che le curve limiti hanno in O.

Riprendiamo la trasformazione cremoniana coi punti fondamentali semplici O e O_1, per osservare che al punto O_1 risponde ora una retta fondamentale, i cui punti sono omologhi ai punti infinitamente vicini ad O_1, essendovi un fascio di curve φ osculatrici ad una data parabola per OO_1. Del resto le cose dette si mettono anche in evidenza adoperando una trasformazione ausiliaria che muti O in una retta. E, ad esemplificazione di esse, possiamo riferirci al caso della trasformazione quadratica, avente un terzo punto fondamentale A, distinto da O, la rete omaloidica essendo dunque costituita da coniche passanti per A, O e tangenti ad OO_1: nell' altro piano si ha ancora una rete di coniche passanti per due punti A' e O' e tangenti in O', cioè contenenti uno stesso punto infinitamente vicino O_1'; al punto O corrisponde per la trasformazione O', e ad O_1 la retta fondamentale $A'O'$, la quale rimpiazza qui due rette fondamentali distinte.

Passiamo ad esaminare il caso in cui la trasformazione possegga due punti fondamentali infinitamente vicini, O e O_1, d'ordine diverso: ciò produce un abbassamento dell'ordine della curva fondamentale trasformata di O, che tuttavia va completata con la curva fondamentale omologa ad O_1, la quale figura qui due volte (entrando come componente doppia della jacobiana). Sia per es. il punto O d'ordine 2 e O_1 semplice, e assumasi la trasformazione definita da una rete di cubiche per O^2O_1, che passino inoltre semplicemente per altri 3 punti base semplici ABC. Qui appare che all'intorno del prim'ordine di O risponde una retta, poichè quell'intorno ha una sola intersezione variabile con le φ della rete (vi è *una* φ di cui un ramo tocca una retta generica per O); similmente all'intorno di O_1 risponde pure una retta; e così nell'altro piano accade che la conica fondamentale per la rete omaloidica delle cubiche trasformanti si spezza in due rette, le quali prese insieme presentano una sola condizione alle curve della rete che debbano contenerle. Inoltre, considerando la rete come limite di una rete omaloidica generale di cubiche, si vede che una parte della conica spezzata viene appunto a coincidere con una retta fondamentale, che quindi figura come doppia entro la rete stessa, riuscendo fondamentale pel fascio residuo della suddetta conica spezzata.

Noi non spingeremo più avanti l'esame delle questioni attinenti ai punti fondamentali infinitamente vicini delle trasformazioni cremoniane, argomento che non sembra essere stato esaurientemente trattato. Ma vogliamo rilevare che questo esame condurrebbe ad una analisi delle curve fondamentali di una rete omaloidica, quale può estendersi anche alle curve fondamentali di un sistema lineare qualunque; si avrebbero a considerare curve ω che contate h volte sono fondamentali per un sistema (il sistema dato o un suo multiplo), presentando una sola condizione alle curve di esso che debbano contenerle, e che poi sottratte da questo contengono ancora parti che — contate h_1 volte — sono fondamentali pel sistema residuo e così via; onde questa analisi ci riporterebbe a questioni che s'incontrano nello studio delle singolarità delle superficie [1].

Studiamo, nel piano, le trasformazioni cremoniane che si ottengono come prodotto di due o più trasformazioni quadra-

[1] Cfr. F. Enriques « Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi ». Accademia dei Lincei, luglio 1912.

tiche, e — per chiarezza — consideriamo più piani (distinti o sovrapposti), π, π_1, π_2... Sia T_1 una trasformazione quadratica fra π e π_1, la quale può definirsi facendo corrispondere, in π_1, alle rette di π le coniche C di una rete omaloidica, e sia T_2 una trasformazione quadratica fra π_1 e π_2. Moltiplicando T_1 per T_2 si ottiene, fra π e π_2, una trasformazione $T_2 T_1$, dove alle rette di π corrispondono le curve della rete omaloidica, trasformata della rete delle C mediante T_2, la quale — in generale — risulta una rete di quartiche con tre punti base doppi e tre punti base semplici: la $T_2 T_1$ riesce così del quart'ordine. Tuttavia quest'ordine si abbassa se qualcuno dei punti fondamentali per T_1, nel piano π_1, è pure fondamentale per T_2; in particolare quando si abbia in questo piano *un* punto fondamentale comune, la trasformazione prodotto riesce del terz'ordine; se ve ne sono 2 o 3 la $T_2 T_1$ diviene rispettivamente una trasformazione quadratica o una omografia.

Può apparire a prima vista che le trasformazioni così ottenute, come prodotti di trasformazioni quadratiche, siano particolari, in quanto che fra le trasformazioni del quart'ordine generate per moltiplicazione di due trasformazioni quadratiche, si trovano solo quelle in cui la rete omaloidica è formata di quartiche con tre punti doppi, e non quelle di Jonquières, dove si ha una rete di quartiche con un punto triplo (e sei punti base semplici). Ma è facile vedere che quest'ultime si possono far nascere per moltiplicazione di una trasformazione cubica fra π e π_1 e di una quadratica fra π_1 e π_2, dove il punto doppio della rete di cubiche in π_1, fondamentale per la prima trasformazione, si assuma come fondamentale anche per la seconda. Ne risulta la possibilità di costruire una trasformazione del quarto ordine di Jonquières, come prodotto di tre trasformazioni quadratiche (poste fra π e un piano ausiliario π', fra π' e π_1 e fra π_1 e π_2).

Queste osservazioni suggeriscono la ricerca se ogni trasformazione cremoniana del piano possa decomporsi in un prodotto di trasformazioni quadratiche. Per ottenere questa decomposizione, nel caso di una data trasformazione T, basta abbassare l'ordine della rete omaloidica trasformante, mediante successive trasformazioni quadratiche ad essa applicate, fino a ridurla ad una rete di coniche. Sia per es. una trasformazione T in cui alle rette del piano corrispondano le quintiche, φ, che passano per un punto triplo O, per tre punti doppi O_1, O_2, O_3, e per altri tre punti base semplici. Adoperiamo una trasformazione quadratica T_1 in cui si assumano come punti fondamentali O, O_1, O_2: la T_1 trasforma la rete delle φ in una rete di cubiche φ' passanti per un punto doppio (trasformato di) O_3, e per quattro punti base semplici, tre dei quali rispondono ai punti base semplici delle φ, e il quarto alla retta fondamentale $O_1 O_2$ (che ha con le φ una intersezione variabile). Ora introduciamo una seconda trasformazione quadratica T_2, assumendo come fondamentale il nuovo punto O_3 e due punti base semplici delle φ'; la T_2 ridurrà la rete delle φ' ad una rete omaloidica di coniche φ'', la quale — riferita alla rete delle rette — definisce una trasformazione quadratica T_3. Ebbene la nostra trasformazione T si genera eseguendo in senso inverso le trasformazioni quadratiche riduttrici sopra considerate:

$$T = (T_3 T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1}.$$

Il successo della riduzione di T, nell'esempio che precede, dipende evidentemente da ciò che esistono tre punti base della rete delle φ, le cui molteplicità danno una somma superiore al loro ordine. Così siamo indotti a stabilire in generale il seguente

Lemma. *Per una rete omaloidica di curve d'ordine n, tre punti di molteplicità più elevata, r, r_1, r_2, danno sempre una somma*

$$r + r_1 + r_2 > n.$$

La dimostrazione del lemma discende facilmente dalle equazioni fondamentali 2) che caratterizzano una rete omaloidica:

$$2)\qquad \begin{cases} \Sigma\, r_i^2 = n^2 - 1 = (n+1)(n-1) \\ \Sigma\, r_i = 3(n-1). \end{cases}$$

Anzitutto è chiaro che i numeri r_i danno luogo ad una media

$$\rho = \frac{\Sigma\, r_i^2}{\Sigma\, r_i} = \frac{n+1}{3},$$

e quindi, se non è

$$r = r_1 = r_2 \dots = \frac{n+1}{3},$$

almeno il numero r, massimo degli r_i, dovrà superare $\frac{n+1}{3}$; in ogni caso:

$$r = \rho + \delta, \quad \text{con} \quad \delta \geq 0.$$

Ora si verifica che la media dei restanti numeri r_i $(i > 0)$ è

$$\rho' \geq \rho - \frac{\delta}{2},$$

la somma di codesti r_i restando non inferiore a $2r$.

Infatti se si designa con Σ' una sommatoria in cui l'indice i va da 1 ad h (cioè con esclusione del valore 0), avremo

$$\Sigma' r_i^2 = \rho \Sigma r_i - r\rho - r\delta = \rho \Sigma' r_i - r\delta,$$

donde

$$\rho' = \frac{\Sigma' r_i^2}{\Sigma' r_i} = \rho - \frac{r\delta}{\Sigma' r_i};$$

ma poichè

$$r \leq n - 1, \quad \Sigma' r_i \geq 2(n-1),$$

segue appunto

$$\rho' \geq \rho - \frac{\delta}{2}.$$

Per conseguenza il massimo degli r_i per $i > 0$, varrà

$$r_1 = \rho' + \delta' \qquad (\delta' \geq 0).$$

Di qui si deduce che la media dei rimanenti r_i $(i > 1)$ vale

$$\rho'' = \frac{\Sigma'' r_i^2}{\Sigma'' r_i} = \rho' - \frac{r_1 \delta'}{\Sigma'' r_i},$$

le sommatorie essendo estese ai valori di $i > 1$. Ma poichè

$$r_1 \leq n - 1, \quad \Sigma'' r_i \geq n - 1,$$

sarà

$$\rho'' \geq \rho' - \delta',$$

e perciò il massimo degli r_i, dopo tolti r e r_1, varrà

$$r_2 \geq \rho' - \delta'.$$

Pertanto risulterà

$$r + r_1 + r_2 \geq \rho + \delta + \left(\rho - \frac{\delta}{2} + \delta'\right) + \left(\rho - \frac{\delta}{2} - \delta'\right),$$

cioè

$$r + r_1 + r_2 \geq 3\rho = n + 1.$$

Il lemma precedente permette di abbassare l'ordine di una rete omaloidica mediante una trasformazione quadratica che abbia come punti fondamentali i tre punti base OO_1O_2, di molteplicità r, r_1, r_2: occorre soltanto che codesti tre punti siano base per una rete di coniche irriducibili; ma ciò accade certo se i punti OO_1O_2 sono punti propri, imperocchè — la somma dei loro ordini superando l'ordine n — essi non possono certo trovarsi in linea retta. Invece la trasformazione quadratica riduttrice può degenerare, nel caso che i punti O_1 e O_2 vengano infinitamente vicini ad O, e *prossimi* ad esso, in direzioni distinte o infinitamente vicine fra loro (cioè su un ramo cuspidale). Ma questa circostanza è da escludere per una rete omaloidica determinata da punti base in posizione generica, ed anche per quelle che da essa provengono mediante l'impiego di successive trasformazioni quadratiche riduttrici; giacchè invero essa importa che fra i punti base della rete data sussistano certe relazioni algebriche.

Frattanto possiamo concludere che

Una trasformazione cremoniana d'ordine n, con punti fondamentali in posizione generica, può decomporsi nel prodotto di $m \leq n - 1$ trasformazioni quadratiche: il massimo è effettivamente raggiunto in corrispondenza alle trasformazioni di Jonquières.

Che diremo ora delle trasformazioni particolari per cui, riducendo successivamente l'ordine della rete omaloidica, si incontrino punti base infinitamente vicini? Sarà possibile rimpiazzare le trasformazioni quadratiche degeneri che qui si presentano, con altre trasformazioni quadratiche non degeneri?

Come esempio prendiamo a considerare una rete omaloidica di cubiche col punto doppio O, a cui siano infinitamente vicini i punti O_1 e O_2. Se fuori di questi la rete ha un altro punto base semplice (O_3 ovvero O_4), le coniche per questo punto e per OO_1 offrono la riduzione richiesta. Inoltre la riduzione è ancora possibile se O_2 succede ad OO_1 sopra un ramo lineare, o se O_1 e O_2 sono vicini ad O in direzioni distinte, giacchè allora — posto per es. che O_3 sia vicino ad O_1 — i punti $OO_1\,O_3$ apparterranno ad un ramo lineare di curvatura non nulla, e le coniche per essi permetteranno ancora di ridurre l'ordine delle nostre cubiche. Ma se invece i punti $O_1O_2O_3O_4$ si succedono sopra un ramo cuspidale del second' ordine, di origine O, non vi sono coniche irriducibili che passino semplicemente per O e per altri due punti base della nostra rete, sicchè non è possibile ridurre con una trasformazione quadratica l'ordine di questa. Tuttavia si faccia una prima trasformazione quadratica con due punti base OO_1: le date cubiche φ diverranno cubiche φ' con un punto doppio e due punti base semplici infinitamente vicini ad esso in direzioni distinte, e così l'ordine di questa seconda rete si potrà ridurre con una nuova trasformazione quadratica. In conclusione « la trasformazione cubica di Jonquières in cui tutti i punti fondamentali sono infinitamente vicini, succedendosi sopra un unico ramo cuspidale del second' ordine, non può più decomporsi nel prodotto di *due*, ma può sempre ritenersi come prodotto di *tre* trasformazioni quadratiche ».

Ad un resultato analogo si perviene per qualsiasi rete omaloidica, in cui i punti base di molteplicità più elevata si trovino infinitamente vicini, per modo che il suo ordine n non possa essere ridotto mediante una trasformazione quadratica. Anzitutto è facile ottenere la riduzione nel caso che nell' intorno del prim' ordine del punto O, di massima molteplicità r, si abbiano soltanto punti base $O_1O_2\ldots.$ in direzioni distinte. Infatti allora — come Noether ha osservato — si prova l'esistenza di un altro punto P di molteplicità sufficientemente *grande*

$$k > \frac{n-r}{2},$$

che potrà essere un punto proprio, ovvero un punto dell' intorno del second' ordine di O, susseguente, sopra un ramo lineare, ad un punto O_i di non minore molteplicità; quindi i punti O, O_i e P appartengono a coniche irriducibili che permettono di abbassare l'ordine n della nostra rete.

Ma può anche darsi che i punti base di questa rete, nell' intorno di O, si succedano sopra rami cuspidali d' ordine $\nu > 1$. Questo caso si riduce al precedente operando una trasformazione quadratica definita mediante coniche per OO_1, e così di seguito, sebbene queste trasformazioni abbiano per effetto di alzare l'ordine n della rete. Ora la rete semplificata d'ordine $N > n$, si potrà ridurre a reti di ordine più basso, e — tenendo conto dell'abbassamento — si proverà che, dopo un certo numero di trasformazioni quadratiche (non degeneri), essa diviene effettivamente d'ordine $< n$.

Il ragionamento sopra indicato verrà da noi svolto nella forma più breve, senza soffermarsi ad una distinzione non necessaria di casi, come segue. Premettiamo il

Lemma. *Se O è un punto base di (massima) molteplicità r per una rete omaloidica di curve φ d'ordine n, e i punti base della rete $O_1 O_2 \dots O_t$, prossimi* (1) *ad O, posseggono molteplicità $r_1 r_2 \dots r_t$ tali che*

$$r + r_1 + \dots + r_t > n,$$

allora esiste un altro punto base P (proprio o almeno non prossimo ad O) la cui molteplicità k soddisfa alla relazione

$$2k > n - r.$$

Infatti per una rete omaloidica dotata di punti base di molteplicità r_i (≥ 1) è

$$\Sigma r_i^2 = n^2 - 1, \quad \Sigma r_i = 3(n-1),$$

quindi per il punto di massima molteplicità, all'infuori $OO_1 \dots O_t$, sarà

$$k \geq \frac{n^2 - 1 - r^2 - r_1^2 \dots - r_t^2}{3n - 3 - r - r_1 \dots - r_t}$$

e siccome

$$r + r_1 \dots + r_t > n,$$

$$r_1 + r_2 \dots + r_t \leq r,$$

$$r_1 \leq n - r, \quad r_2 \leq n - r, \dots \quad r_t \leq n - r,$$

(1) Ricordiamo che diconsi prossimi ad O quei punti infinitamente vicini che — mediante una trasformazione quadratica col punto fondamentale O — si trasformano in punti (propri o infinitamente vicini) sopra la retta fondamentale omologa di O.

si avrà

$$k \geq \frac{n^2 - 1 - r^2 - (n-r)r}{2n-3} > \frac{n(n-r)}{2n} = \frac{n-r}{2},$$

cioè

$$2k > n - r.$$

(Si può notare che il punto P non è satellite di alcun punto O_i ($i \geq 2$) prossimo ad O, giacchè si avrebbe $r_i \geq k$, $r_{i-1} \geq 2k$, ed $r + r_i > n$).

Applicheremo questo lemma al caso eccezionale di una rete omaloidica di curve φ nella quale i punti base O_1 e O_2, cui spetta dopo O la massima molteplicità $(r + r_1 + r_2 > n)$, diventino prossimi ad O, in direzioni distinte o succedenti sopra un ramo cuspidale, incominciando tuttavia a semplificare la rete come segue.

Si eseguisca una trasformazione quadratica T_1 prendendo come punti base O, O_1, e un punto generico del piano, A_1. Indicando con O', O_1', A_1' i punti omologhi delle rette A_1O_1, A_1O, OO_1, le φ verranno trasformate in curve φ' d'ordine

$$N_1 = 2n - r - r_1 = n + (n - r) - r_1,$$

passanti per O' con la molteplicità

$$R_1 = n - r_1$$

e passanti ancora $n - r$ volte per O_1', con $n - r$ rami lineari non osculantisi; inoltre le φ' passeranno per i punti (trasformati di) $O_2 O_3 \ldots$ con le molteplicità primitive delle φ. Qui conviene notare esplicitamente che il punto multiplo O_1' — creato dalla trasformazione — riesce in direzione affatto generica rispetto agli altri punti multipli dell'intorno di O' che provengono da quelli dell'intorno di O.

Si eseguisca ora una seconda trasformazione quadratica T_2, prendendo per punti base O', O_2, e un punto generico A_2; usando nomenclatura analoga a quella del caso precedente avremo curve trasformate d'ordine

$$N_2 = 2N_1 - R_1 - r_2 = n + 2(n - r) - (r_1 + r_2),$$

passanti

$$R_2 = N_1 - r_2 = n + (n - r) - (r_1 + r_2)$$

volte per un punto O'', e ancora $N_1 - R_1 = n - r$ volte per un punto O_1'', infinitamente vicino ad O'', nonchè per i punti (trasformati di) $O_1'O_3O_4 \dots$ con le molteplicità primitive.

Se $O_1O_2 \dots O_q \dots$ sono i punti prossimi ad O, di molteplicità $> \frac{n-r}{2}$, si eseguiscano ulteriormente le trasformazioni $T_3 \dots T_q$; la T_i essendo determinata dai punti base infinitamente vicini $O^{(i-1)}O_i$ e da un punto A_i generico. Arriveremo a curve φ_q d' ordine

$$N_q = n + q(n-r) - (r_1 + r_2 \dots + r_q),$$

passanti

$$R_q = n + (q-1)(n-r) - (r_1 + r_2 \dots + r_q)$$

volte per $O^{(q)}$; e al punto $O^{(q)}$ riusciranno infinitamente vicini, in direzioni generiche, q punti di molteplicità $N_i - R_i = n - r$, creati dalla trasformazione, con parabole osculatrici distinte, ed eventualmente altri punti multipli, i quali tutti però avranno un ordine minore di

$$\frac{1}{2}(n-r).$$

Applicando ora il nostro lemma, troveremo che le φ_q posseggono un punto P_1 di molteplicità

$$s_1 \geq \frac{1}{2}(N_q - R_q) = \frac{1}{2}(n-r),$$

che dovrà essere un punto proprio. (Questo punto rappresenta in generale il primo punto libero che le φ possedevano dopo una serie di punti satelliti — tutti prossimi ad O — che le successive trasformazioni hanno sciolto).

Per conseguenza si potrà ora ridurre l'ordine delle φ_q mediante una trasformazione quadratica T_{q+1}, ove si prenda come punto fondamentale insieme ad O_q, e a uno dei q punti $(n-r)$-*pli* infinitamente vicini ad O_q, sia per es. O_1', anche il punto P_1; arriveremo a curve d' ordine

$$N_{q+1} = 2N_q - R_q - (n-r) - s_1 =$$
$$= n + q(n-r) - (r_1 + r_2 \dots + r_q) - s_1,$$

con un punto $O^{(q+1)}$ multiplo secondo

$$R_{q+1} = n + (q-1)(n-r) - (r_1 + r_2 \dots + r_q) - s_1,$$

nel cui intorno si avranno $q-1$ punti $(n-r)$-*pli*; e tali curve dovranno ancora — per il nostro lemma — possedere un punto P_2 di molteplicità $s_2 > \frac{n-r}{2}$, distinto da $O^{(q+1)}$, e non allineato con alcuno dei punti $(n-r)$-*pli*; diguisachè si avrà una trasformazione T_{q+2} riducente l' ordine delle nostre curve a

$$N_{q+2} = n + q(n-r) - (r_1 + r_2 + \dots + r_q) - s_1 - s_2.$$

Successivamente si avranno altre $q-2$ trasformazioni dello stesso tipo, che ci condurranno a curve d' ordine

$$N_{2q} = n + q(n-r) - (r_1 + r_2 \dots + r_q) - (s_1 + s_2 \dots + s_q).$$

Ma, poichè

$$2r_i > n-r, \quad 2s_i > n-r,$$

sarà

$$q(n-r) < r_1 + r_2 \dots + r_q + s_1 + s_2 \dots + s_q,$$

e quindi

$$N_{2q} < n.$$

Riassumendo, siamo riusciti ad abbassare l' ordine n della rete omaloidica di curve φ, mediante $2q$ trasformazioni quadratiche successive, e così viene risolto il caso di eccezione in cui l' abbassamento non può essere ottenuto mediante una sola trasformazione quadratica; concludiamo enunciando il

Teorema. *Ogni trasformazione cremoniana del piano si può generare come prodotto di trasformazioni quadratiche.*

Notizia storica. Accennammo già nel L. 3°, § 17 (vol. I, pag. 108) come i primi esempi di trasformazioni quadratiche si presentarono a Poncelet (1822) e quindi a Plücker (1830) e a Steiner (1832); e che la stessa trasformazione quadratica fu poi studiata sistematicamente dal Magnus (1832). Nella memoria « Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de Géométrie » [1] la quale contiene questo studio,

[1] Journal fur Math., Bd. 8.

l'A. credette di poter concludere che le trasformazioni birazionali del piano (x, y) agiscano pure birazionalmente sulle due variabili separate, x ed y, e quindi che esse siano soltanto trasformazioni omografiche o quadratiche. Ma l'anno appresso lo stesso MAGNUS (1) segnalava l'esempio della trasformazione del quart' ordine (che si ottiene come prodotto di due trasformazioni quadratiche) in cui alle rette rispondono le quartiche con tre punti base doppi e tre semplici. Soltanto nel 1859 il DE-JONQUIÈRES accompagnava con una lettera all'Accademia di Francia una sua memoria sulle curve gobbe, rimasta inedita fino al 1864, in cui accennava alle trasformazioni (isologiche) che fan corrispondere alle rette curve d' ordine n con punto $(n-1)$-*plo*, le quali più tardi da lui appunto presero nome.

Questi esempi di trasformazioni d' ordine superiore (2) ebbero a sfuggire allo SCHIAPARELLI e al CREMONA che nel 1861-62 ripresero lo studio delle trasformazioni piane, accogliendo l' errata veduta del Magnus del 1832, di cui lo Schiaparelli porse un nuovo sviluppo negli Atti dell'Accademia di Torino. L' anno appresso (1863) il Cremona pubblicò nelle Memorie dell'Accademia di Bologna la prima delle sue classiche Note « Sulle trasformazioni geometriche delle curve piane », nella quale comincia anzitutto a correggere l' anzidetto errore, rilevando che il prodotto di due trasformazioni quadratiche conduce in generale a trasformazioni d' ordine superiore, e pone poi il problema generale di costruire le trasformazioni birazionali d' ordine n fra due piani, scrivendo le due equazioni fondamentali che caratterizzano le molteplicità dei punti base di una rete omaloidica: come esempio s' incontrano qui le trasformazioni isologiche (di De-Jonquières) che — come generalizzazioni delle proiezioni sghembe di Steiner — vengono dedotte dalla congruenza delle rette che si appoggiano ad una curva gobba d' ordine n e ad una sua direttrice $(n-1)$-*pla*. Soltanto nella seconda Nota del 1865, il Cremona fa menzione delle ricerche del De-Jon-

(1) Confronta la prefazione alla « Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analitische Geometrie » (Berlino, 1833).

(2) Come rileva il BERTINI nel suo studio « Della vita e delle opere di L. Cremona », riprodotto in « Opere matematiche di Luigi Cremona », t. III, pg. XII.

quières, la cui memoria appariva allora pubblicata nei Nouvelles Annales de Mathématique. Questa seconda Nota del Cremona contiene lo studio della jacobiana di una rete omaloidica, e il teorema sull' uguaglianza degli ordini dei punti fondamentali di due trasformazioni inverse una dell' altra: l' ultimo teorema, trovato per via induttiva non del tutto completa, fu poi dimostrato da CLEBSCH (Math. Annalen, Bd. IV) e da altri.

La teoria delle trasformazioni birazionali del piano attrasse tosto l' attenzione dei geometri che vollero conferire ad esse il nome di cremoniane; esposizioni d' insieme di questa teoria si trovano in memorie di CAYLEY, ROSANES e DEWULF, utilizzate nelle Lezioni di CLEBSCH-LINDEMANN.

Frattanto CLIFFORD, NOETHER e ROSANES (1869-71) scoprivano contemporaneamente la generabilità delle trasformazioni cremoniane mediante trasformazioni quadratiche; la scoperta a cui Clifford è giunto per via d' esempi viene comunicata da Cayley (1); Noether (2) e Rosanes (3), dimostrano il teorema stabilendo che gli ordini dei tre punti fondamentali più elevati per una trasformazione d' ordine n, soddisfano alla diseguaglianza $r + r_1 + r_2 > n$. Tuttavia in queste dimostrazioni non è considerato specialmente il caso dei punti fondamentali infinitamente vicini, che poco dopo (1872) doveva attrarre l' attenzione di Noether (Math. Annalen, Bd. 5). Qui Noether osserva che una rete omaloidica dotata di un punto base *r-plo* O, con punti base prossimi in direzioni distinte, si può ridurre mediante una trasformazione quadratica (la cui possibilità risulta dall' esistenza di un altro punto P di molteplicità abbastanza elevata, che non appartiene all' intorno del prim' ordine di O). Questa trasformazione riduttrice è ancora non degenere se il punto P diventa infinitamente vicino ad O, succedendo — sopra un ramo lineare — ad un punto O_1 prossimo ad O. Ma il caso in cui alcuni punti base prossimi ad O in direzioni distinte si avvicinino indefinitamente, dà luogo ad una eccezione rilevata dal SEGRE in una Nota dell' Accademia di Torino del 24 marzo 1901, giacchè tre punti succedentisi sopra un ramo cuspidale non possono

(1) Proceedings of. London Math. Soc. III, 1869-71.
(2) Math. Annalen, Bd. 3 (1870-71).
(3) Journal für Math., tomo 73 (1870-71).

essere assunti come base per una rete omaloidica di coniche. In seguito alla critica di Segre (che colpisce anche un certo numero di applicazioni dello stesso metodo alla riduzione dei sistemi lineari di curve piane), CASTELNUOVO il 12 maggio 1901 offriva una nuova dimostrazione del teorema fondamentale di cui si discorre, basata sul concetto delle curve aggiunte successive, di cui diremo nel seguente paragrafo: egli fa vedere che l'ordine di una rete omaloidica, comunque dotata di punti base infinitamente vicini, si può ridurre mediante una conveniente trasformazione di Jonquières, la quale a sua volta si lascia sempre decomporre (come anche il Segre stesso aveva notato) in un prodotto di trasformazioni quadratiche. (Quindi G. FERRETTI [1] faceva vedere come questa riduzione si estenda ai sistemi lineari di curve di genere 0, 1, 2, riempiendo così la lacuna che rimaneva nei precedenti lavori di BERTINI, GUCCIA, MARTINETTI, YOUNG, DE-FRANCHIS).

Sull'argomento sono ritornati D. NENCINI in una memoria litografata a Palermo del 1916, e WALDES FRANCIOSI in una Nota del 1917, pubblicata nel Giornale di Matematiche del Battaglini, che ricorrono — come Castelnuovo — a trasformazioni riduttrici di Jonquières, riattaccandone l'esistenza ai caratteri numerici che definiscono le reti omaloidiche. Il successo di queste analisi si può spiegare dal punto di vista della teoria delle singolarità dicendo che nel caso in cui i punti base di una rete omaloidica di un ordine abbastanza elevato si trovino tutti infinitamente vicini ad un punto r-*plo* O, essi si succedono sempre sopra rami cuspidali ordinari, e che sopra un ramo d'ordine q che occorre considerare, se ne trovano precisamente $2q$: la circostanza che il ramo sia ordinario assicura la non degerazione della trasformazione di Jonquières riduttrice, la quale viene dimostrata in altro modo da Castelnuovo.

L'analisi svolta nel testo appartiene a CHISINI [2]; essa riprende e completa l'osservazione di Noether relativa al caso di punti infinitamente vicini ad O in direzioni distinte, e di questo lemma si vale per stabilire l'esistenza dei punti multipli che occorre considerare; la riduzione è ottenuta direttamente con una serie di trasformazioni quadratiche, che tuttavia

(1) Circolo Matematico di Palermo, t. 15 (1902).

(2) Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena, serie V, vol. VI (1921-22).

darebbe come prodotto la trasformazione di Jonquières considerata da Castelnuovo.

Osservazione. Il teorema sulla generabilità di una trasformazione cremoniana del piano come prodotto di trasformazioni quadratiche, ammette un complemento degno di nota:

Ogni *trasformazione cremoniana* del piano si può decomporre in un *prodotto di trasformazioni quadratiche con punti fondamentali distinti.*

Per dimostrarlo basta osservare che:

1) In primo luogo una rete omaloidica di coniche con due punti base infinitamente vicini A, A_1 e con un terzo punto base proprio B, può ridursi ad un'altra con tre punti base distinti, mercè una trasformazione quadratica generale di cui due punti fondamentali sieno in A e B: così la trasformazione singolare viene decomposta nel prodotto di due trasformazioni quadratiche ordinarie con punti fondamentali, A, B, C e A, B, C', dove C e C' sono allineati con B;

2) In secondo luogo una rete omaloidica di coniche con tre punti base infinitamente vicini A, A_1 e A_2 (succedentisi sopra un ramo lineare) si riduce ad un'altra con due soli punti infinitamente vicini ed un terzo proprio, mercè una trasformazione quadratica avente due punti fondamentali in A e A_1 e un terzo punto fondamentale proprio, ecc.

21. **Invarianti delle curve rispetto alle trasformazioni cremoniane del piano.** — Le trasformazioni cremoniane del piano permettono in generale di ridurre una curva f, di un certo ordine, a una curva d'ordine minore, ovvero dotata di particolari proprietà proiettive, porgendo così un modello più semplice per lo studio della f proposta. Quest'uso delle anzidette trasformazioni corrisponde a quello che Poncelet ha fatto delle proiezioni, riducendo lo studio delle proprietà proiettive delle figure a casi particolari metrici. Ma nello sviluppo della geometria proiettiva, il metodo di Poncelet ha subìto una evoluzione, riuscendosi in fine al concetto che le figure proiettive, cioè trasformabili omograficamente una nell'altra, sono da ritenere come *uguali* in quella geometria proiettiva che ha appunto per oggetto le proprietà invarianti rispetto al gruppo delle omografie: questo sviluppo si è realizzato nella trattazione sintetica dello Staudt, e parallelamente

nella teoria delle forme invariantive, di cui abbiamo discorso nel nostro Libro I.

Una evoluzione di idee analoga si è verificata nel modo di considerare le trasformazioni birazionali delle curve algebriche, conformemente al « Programma di Erlangen » di KLEIN. Così i geometri hanno appreso a ricercare sistematicamente le proprietà delle curve piane che sono invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni cremoniane (gruppo Cremona), ritenendo — da questo punto di vista — come *uguali* due curve che si corrispondono in una siffatta trasformazione (e poi, astraendo dal piano, due curve trasformabili birazionalmente una nell'altra, come diremo in appresso).

Il teorema fondamentale che assegna le trasformazioni generatrici del gruppo Cremona, permette di riconoscere le proprietà invarianti rispetto ad esso, limitandoci a considerare trasformazioni quadratiche; ed anzi — per l'osservazione fatta — potremo supporre queste a punti fondamentali distinti. Ciò posto dimostriamo il

Teorema. *Le curve d'ordine $n-3$, aggiunte ad una curva piana f d'ordine n, sono covarianti di questa rispetto alle trasformazioni cremoniane,* cioè:

una trasformazione T che muti la f, d'ordine n, in una curva φ d'ordine m, muta una curva f' d'ordine $n-3$, aggiunta a f, in una φ' d'ordine $m-3$, aggiunta a φ, intendendosi tuttavia di contare eventualmente come facenti parte di φ' le curve fondamentali che provengono da punti fondamentali per T, fuori di f (le quali figureranno come parti fisse nel sistema delle φ').

La dimostrazione consiste in una verifica, che, per quanto sopra è detto, si può limitare alle trasformazioni quadratiche T. Ordunque si assumano tre punti A, B, C, come fondamentali per T, e si distinguano i diversi casi che questi punti possono presentare, secondochè essi appartengano o meno alla curva f.

1) Pongasi dapprima che A, B, C, appartengano effettivamente ad f con le moltiplicità a, b, c. Allora l'ordine della trasformata φ sarà

$$m = 2n - a - b - c,$$

e l'ordine della trasformata di una f' sarà

$$2(n-3) - (a-1) - (b-1) - (c-1) = m - 3.$$

Questa curva trasformata φ' passerà naturalmente con la moltiplicità $i-1$ per ogni punto i-plo della φ proveniente da un punto i-plo della f diverso da A, B, C, (i punti infinitamente vicini non danno luogo ad eccezione); inoltre il nuovo punto multiplo della φ, che proviene dalla retta fondamentale AB, avrà per φ la molteplicità

$$c' = n - a - b,$$

e per la trasformata di f' la molteplicità

$$n - 3 - (a - 1) - (b - 1) = c' - 1.$$

2) Pongasi invece che il punto A, fondamentale per la T, non appartenga ad f, essendo dunque $a = 0$. Allora la curva φ trasformata di f, ha l'ordine

$$m = 2n - b - c,$$

e passa per il punto corrispondente alla retta AB con la molteplicità

$$c' = n - b.$$

Ora l'ordine della trasformata di f' sarà

$$2(n - 3) - (b - 1) - (c - 1) = m - 3 - 1,$$

e la molteplicità che questa curva possiede nel punto omologo della retta AB sarà

$$n - 3 - (b - 1) = c' - 1 - 1;$$

pertanto, se si somma la retta fondamentale che corrisponde in T al punto A, si avrà una curva φ' d'ordine $m - 3$ che si comporta come una aggiunta a φ anche nel nuovo punto multiplo corrispondente alla retta AB (e così anche in quello che corrisponde alla AC), mentre la verifica del caso 1) vale ancora per il punto multiplo corrispondente alla retta BC.

I casi 3) e 4), in cui due punti fondamentali di T, ovvero tutti e tre, cadano fuori di f, si trattano in modo affatto analogo.

Infine conviene osservare che se si eseguiscono successivamente due o più trasformazioni quadratiche T, T', ..., la retta corrispondente ad un punto A, fondamentale per T e non appartenente a f, sarà mutata — in generale — in una curva fondamentale per la trasformazione prodotto, omologa ad A, la quale entrerà a far parte delle aggiunte della curva trasformata di f; soltanto nel caso che quella retta fosse fondamentale per T' (ovvero che la trasformata di essa divenisse fondamentale per qualcuna delle successive trasformazioni) non vi sarà più luogo a considerare una parte fondamentale di codeste aggiunte in corrispondenza al punto A, poichè la nostra trasformazione prodotto muterà A in un nuovo punto.

Illustriamo il teorema stabilito con alcuni esempi:

1) Sia f una quartica piana di genere 2 con un punto doppio A; eseguiamo una trasformazione quadratica che abbia in A un punto fondamentale ed altri due punti fondamentali B e C, fuori di f. La f si trasformerà in una sestica φ, con punto quadruplo A' e due punti doppi B' e C', e le rette per A, aggiunte ad f, si trasformeranno in rette per A', le quali, prese insieme con le rette $A'B'$ e $A'C'$, costituiranno cubiche aggiunte alla φ.

2) La medesima f del quart' ordine con punto doppio A, venga trasformata mediante una trasformazione cubica (di Jonquières), prendendo come punto fondamentale un punto O fuori di f, e quattro punti fondamentali semplici $O_1 \ldots O_4$ sopra f. La trasformata φ sarà una curva d'ottavo ordine, passante doppiamente per il punto A', omologo ad A, e poi tre volte per ciascuno dei punti $O_1'\, O_2'\, O_3'\, O_4'$ che corrispondono alle rette OO_1, OO_2, OO_3, OO_4, e quattro volte per il punto O' corrispondente alla conica $OO_1\, O_2\, O_3\, O_4$. Qui le rette per A sono mutate in cubiche passanti doppiamente per O' e semplicemente per A', O_1', O_2', O_3', O_4'; aggiungendo a queste cubiche la conica fondamentale $A'\, O_1'\, O_2'\, O_3'\, O_4'$, che nasce dal punto O, si hanno dunque le quintiche aggiunte alla curva φ d'ordine 8.

3) Sia f una cubica piana priva di punti doppi, cioè di genere $p = 1$. Si deve ritenere che la f possegga *una* curva aggiunta d'ordine zero (essendovi $\dfrac{(0+1)(0+2)}{2} = 1$ curve d'ordine 0 linearmente indipendenti). Si eseguisca una trasformazione quadratica affatto generale coi tre punti fondamentali ABC fuori di f: la f si muta in una sestica con tre punti tripli $A'B'C'$, la quale possiede una cubica aggiunta costituita

dalla curva d'ordine zero, trasformata della curva d'ordine zero, e dalle tre rette fondamentali $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

Se i punti B e C, fondamentali per la trasformazione, si prendono sopra f, la trasformata φ diviene una quartica con due punti doppi, che possiede come retta aggiunta quella che unisce questi due punti.

La convenzione per cui si considera come esistente una curva d'ordine zero, aggiunta alla cubica f, si giustifica considerando appunto che f può ritenersi come trasformata cremoniana di una curva d'ordine $n > 3$, la quale possiede una aggiunta d'ordine $n-3$, che — essendo tutta composta di curve fondamentali per la trasformazione — si riduce, per effetto di questa, all'ordine zero, cioè ad un gruppo di punti. D'altronde codesta convenzione è d'accordo con l'esistenza sopra la curva di genere 1 di una g_0^0 canonica.

Osservazione. Se la f è una curva d'ordine n e di genere zero, non esistono curve f', aggiunte d'ordine $n-3$, e quindi non vi è luogo ad applicare il teorema. La non esistenza di codeste f' si rispecchia anche nel fatto che per $n=1, 2$, il numero $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ delle f' (d'ordine $n-3$) linearmente indipendenti, risulta nullo. Tuttavia proviamo ad applicare formalmente il nostro teorema ad una conica f, eseguendo su questa una trasformazione quadratica affatto generale con tre punti fondamentali A, B, C. La trasformata di f diventa una quartica φ con tre punti doppi A', B', C'; i punti A, B, C, (fuori di f) danno luogo a tre rette fondamentali $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$; la curva d'ordine -1 aggiunta ad f, si può dire che verrà trasformata in una curva d'ordine -2 passante con la molteplicità -1 per i punti A' B' C'; emerge dunque che sommando al triangolo A' B' C' questa curva d'ordine -2, si ottiene una retta virtuale passante semplicemente per A', B', C', cioè aggiunta a φ; ma questa retta non esiste, d'accordo col fatto che la nostra quartica φ è di genere zero, come la conica f.

Aggiungeremo ora una *seconda dimostrazione del teorema d'invarianza delle aggiunte*, che — oltre ad avere importanza per riguardo alla teoria generale delle superficie — darà luogo, più avanti, ad una estensione.

Si consideri dapprima una curva f, di un certo ordine n, variabile entro un sistema lineare $|f|$ di dimensione $r \geq 2$, e pongasi che i punti base di questo, e quindi in particolare i punti multipli di f, siano distinti. Una rete contenuta in $|f|$ possiederà allora una curva jacobiana f_j, d'ordine $3n-3$, passante $3i-1$ volte per ogni punto base i-plo di $|f|$ (L. 3°, § 5); tutte le curve analoghe apparterranno quindi ad un sistema lineare $|f_j|$ completo (cioè determinato dal gruppo base) composto delle curve dello stesso ordine che passano con le stesse molteplicità per i punti base di $|f|$. Ciò posto, se si eseguisce una trasformazione cremoniana del piano che muti il sistema $|f|$ in un sistema lineare $|\varphi|$ d'ordine m, la jacobiana di una rete contenuta in f, essendo definita come luogo dei punti doppi delle curve di questa, si muterà nella jacobiana della rete trasformata, e quindi il sistema completo $|f_j|$, jacobiano di $|f|$, si muterà nel sistema completo $|\varphi_j|$, jacobiano di $|\varphi|$. Di conseguenza anche il sistema che si ottiene sottraendo da $|f_j|$ due curve f, cioè

$$|f_j - 2f|,$$

si muterà nel sistema analogo

$$|\varphi_j - 2\varphi|.$$

Ma il primo sistema è costituito dalle curve f' d'ordine $n-3$ passanti $3i-1-2i=i-1$ volte per ogni punto base i-plo di $|f|$, e quindi aggiunte alla f generica di $|f|$, ed analogamente si dica per il secondo sistema. Dunque le f' d'ordine $n-3$, aggiunte ad $|f|$, si mutano in φ' d'ordine $m-3$, aggiunte a $|\varphi|$. Tuttavia quando si fa la trasformazione di una rete di curve f in una rete di φ, si sommano alla trasformata della jacobiana della prima rete le curve *fondamentali* della seconda *rete* (cioè le curve non aventi intersezioni variabili con le curve di questa); le quali nascono da punti fondamentali per la trasformazione che non siano base per la rete di f. Di conseguenza codeste nuove curve (fondamentali per $|\varphi|$, create dalla trasformazione) vengono a figurare come parte fissa nelle aggiunte φ'.

Il nostro teorema risulta così dimostrato per le curve f, di dato ordine e genere, suscettibili di appartenere come curve generiche ad un sistema lineare di dimensione $r \geq 2$ (con punti base distinti). Ora si estende la dimostrazione ad una f qualunque, considerando — al posto di questa — un sistema lineare di curve $f+F$, ottenute sommando alla curva fissa f, d'ordine n, delle curve F, d'ordine N, affatto generali.

Basta osservare che le curve, d'ordine $n+N-3$, aggiunte alle $f+F$, che contengono una F come parte, saranno costituite da questa F e dalle f' d'ordine $n-3$ aggiunte ad f. Invero la trasformazione porta le f in φ (d'ordine m), le F in Φ, e le aggiunte ad $f+F$ in aggiunte a $\varphi+\Phi$; quindi essa porta le curve composte di una F e di una f', aggiunta ad f, in curve composte di una Φ e di una φ' (d'ordine $m-3$) aggiunta a φ (salvo sempre le nuove curve fondamentali come sopra).

Nel ragionamento precedente si suppone tuttavia che il sistema lineare $|f+F|$ abbia punti base distinti. Ma il caso dei punti base infinitamente vicini si può trattare come caso limite del precedente (concludendo dunque per continuità) attesochè — per una scelta conveniente della F — si può ritenere che i punti base del sistema lineare $|f+F|$ impongano alle curve di questo condizioni indipendenti, secondo le loro molteplicità.

Il teorema che stabilisce l'invarianza delle curve f', di ordine $n-3$, aggiunte ad una curva piana f d'ordine n, rispetto alle trasformazioni cremoniane, dice più e meno in confronto al teorema che enuncia l'invarianza della serie canonica segata dalle f' su f.

Quando la f si muti in una φ mercè una trasformazione (cremoniana cioè) birazionale dell'*intero piano*, non soltanto i gruppi sezioni (ff') vengono mutati nei gruppi analoghi $(\varphi\varphi')$ (segati sulla φ, d'ordine m, da φ' aggiunte d'ordine $m-3$), bensì anche le curve f' vengono mutate nelle φ', salvo l'eventuale addizione di curve fondamentali.

Ma il teorema d'invarianza della serie canonica di f afferma anche che i gruppi (ff') si mutano nei $(\varphi\varphi')$ per una trasformazione birazionale di f in φ, che non sia estendibile — come biunivoca — all'intero piano. Esistono difatti trasformazioni birazionali fra due curve piane f e φ, che non vengono subordinate da trasformazioni cremoniane del piano: come esempio si assuma una cubica φ_3, e la sestica f_6 con 9 punti doppi, che si costruisce come una trasformata di quella per mezzo di una g_6^2 generica; si può verificare direttamente che nessuna trasformazione cremoniana del piano è capace di abbassare l'ordine della f_6, e quindi di ridurla alla φ_3; d'altronde la f_6

possiede una cubica aggiunta, (che un conto di costanti mostra essere affatto generale) e quindi di genere 1, la quale non può ridursi ad un punto, cioè sparire, come avverrebbe se la f_6 si trasformasse cremonianamente nella φ_3.

Per chiarire in generale il rapporto che intercede fra la trasformazione birazionale di due curve e il piano ambiente, si scrivano le formule di una trasformazione razionale

$$1)\qquad \begin{cases} y_1 = \psi_1(x_1\, x_2\, x_3) \\ y_2 = \psi_2(x_1\, x_2\, x_3) \\ y_3 = \psi_3(x_1\, x_2\, x_3). \end{cases}$$

Queste formule stabiliranno fra il piano (y) e il piano (x) una corrispondenza $[1, \nu]$, designando ν il grado della rete

$$\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \lambda_3\psi_3 = 0,$$

cioè il numero delle intersezioni variabili di due curve di essa. Sarà dunque in generale $\nu > 1$, e, applicando la trasformazione ad una curva $f(y_1\, y_2\, y_3) = 0$ del piano (y), si troverà in generale una curva

$$f(\psi_1\, \psi_2\, \psi_3) = \Phi(x_1\, x_2\, x_3),$$

in corrispondenza $[1, \nu]$ con la f: questa curva Φ sarà *autoconiugata* nell'involuzione I_ν, i cui gruppi rispondono ai punti del piano (y), per modo che se Φ contiene un punto P, contiene di conseguenza l'intero gruppo di I_ν determinato da P.

Ora, se si assume ad arbitrio nel piano (x) una curva

$$\varphi(x_1\, x_2\, x_3) = 0,$$

che non sia autoconiugata per l'involuzione I_ν, ed anzi tale che tutti i $\nu - 1$ punti coniugati ad un punto P di φ, siano fuori di φ, le formule 1) condurranno da φ ad una curva $f(y_1\, y_2\, y_3) = 0$, che si troverà con φ in corrispondenza biunivoca; in tal caso la trasformata totale di f si spezza nella φ e in una parte residua $\bar{\varphi}$, luogo dei gruppi di $\nu - 1$ punti coniugati ai punti di φ:

$$f(\psi_1\, \psi_2\, \psi_3) = \Phi(x_1\, x_2\, x_3) = \varphi(x_1\, x_2\, x_3) \cdot \bar{\varphi}(x_1\, x_2\, x_3);$$

pertanto *le formule* 1) *s' invertono razionalmente* per i punti di f, *tenuto conto* dell' equazione $\varphi(x_1\, x_2\, x_3) = 0$.

A questo punto vogliamo accennare rapidamente, e mettendoci nelle circostanze più semplici, come il ***teorema di invarianza della serie canonica*** possa ricevere qui una ***verifica algebrica diretta.***

Supponiamo che la f sia curva generica di una rete $|f|$, ipotesi dalla quale possiamo poi liberarci come si è visto innanzi in una dimostrazione analoga. Eseguendo la trasformazione 1), che è $[1, \nu]$ anzichè $[1, 1]$, la jacobiana f_j della rete non si muta più nella jacobiana della rete trasformata $|\Phi|$, ma si otterrà quest'ultima jacobiana Φ_j, sommando alla trasformata di f_j (incluse le curve fondamentali che nascono da punti non base per f) la jacobiana ψ_j della rete trasformante

$$\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 = 0.$$

L'asserzione si verifica subito considerando la jacobiana di una rete come luogo dei punti di contatto delle curve di essa.

Dalla indicata trasformazione della jacobiana f_j, con la medesima sottrazione adoperata innanzi per $\nu = 1$, si deduce che le curve f' (d'ordine $n - 3$) aggiunte ad f, si mutano in curve che — sommate alla ψ_j (cioè alla curva di coincidenza della I_ν) — costituiscono curve Φ' (d'ordine $M - 3$) aggiunte alla trasformata Φ (d'ordine M): se la Φ è irriducibile, ciò è d'accordo col teorema di Zeuthen per cui i corrispondenti dei gruppi canonici in una trasformazione $[1, \nu]$, sommati al gruppo delle coincidenze, danno gruppi canonici della trasformata.

Ora pongasi invece che la Φ sia spezzata:

$$\Phi = \varphi + \bar{\varphi},$$

avendosi corrispondenza biunivoca fra φ e f. Allora a un gruppo (ff') verrà a corrispondere sopra φ un gruppo che, sommato alle intersezioni della ψ_j (coincidenze della I_ν), sarà equivalente ai gruppi segati dalle Φ' e quindi ai gruppi segati dalla curva composta della $\bar{\varphi}$ e di una φ' (curva d'ordine $m - 3$ aggiunta alla φ d'ordine m); ma le intersezioni della $\bar{\varphi}$ con φ sono costituite dai nominati punti di coincidenza della I_ν nonchè da coppie (o da gruppi di punti) coniugati rispetto alla I_ν, che corrispondono a punti doppi (o multipli) di f: tali coppie figurano dunque nel trasformato del gruppo delle intersezioni (ff'), ma vanno tolti da questo se si vuole il trasformato del gruppo canonico, in cui non si contano le intersezioni di f e f' assorbite nei punti doppi. In tal guisa si verificherà che i gruppi canonici (ff') si mutano in gruppi equivalenti ai gruppi canonici $(\varphi\varphi')$, e cioè in gruppi canonici.

Dalle riflessioni precedenti emerge il rapporto fra la geometria sopra una curva $f(xy)=0$, (che è l'insieme delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali della curva) e la teoria della f, considerata rispetto alle trasformazioni cremoniane dell'intero piano che la contiene. Pertanto si troveranno in generale degli *invarianti di f rispetto a trasformazioni cremoniane*, che non sono affatto invarianti per trasformazioni birazionali della sola f.

In particolare fissiamo l'attenzione sopra le curve f di genere zero: sappiamo che una tale f si può trasformare birazionalmente in una retta, ma questa trasformazione non sarà in generale cremoniana. Quali sono le curve (di genere zero) cremonianamente equivalenti ad una retta? o — ciò che è lo stesso — suscettibili di figurare come curve fondamentali per una trasformazione cremoniana che le riduca all'intorno di un punto?

Per rispondere alla precedente domanda conviene introdurre la considerazione delle *successive curve aggiunte* ad una f di ordine n. Accanto alle curve f', d'ordine $n-3$, aggiunte ad f (d'indice 1), assoggettate alla condizione di passare $i-1$ volte per ogni punto i-*plo* di f, si considereranno le *seconde aggiunte* o aggiunte d'*indice* 2, cioè le curve f'' d'ordine $n-6$, aggiunte ad f', le quali — indipendentemente dalla esistenza delle dette f' — vengono definite dalla condizione di passare $i-2$ volte per ogni punto i-*plo* di f $(i \geq 2)$. Similmente si definiranno le terze aggiunte, f''', d'ordine $n-9$, e così via. Ora sussiste il

Teorema. *Le successive curve aggiunte ad una curva f, sono covarianti di questa rispetto a trasformazioni cremoniane*, a prescindere da curve fondamentali, semplici o multiple, che la trasformazione può sommarvi come parti fisse, sì come già abbiam visto per le prime aggiunte.

La dimostrazione del teorema si può dare come per il caso delle prime aggiunte: 1) o verificando l'invarianza rispetto a trasformazioni quadratiche; 2) o ricorrendo alla considerazione delle jacobiane delle reti, ciò che permette dedurre l'invarianza del sistema completo di curve piane $|f+f''|=(2f')$, e poi di $|f+f'''|=|f'+f''|$..., anche se nel primo caso manchino le f', nel secondo le f'', ecc.

Limitiamoci a dare un cenno del primo metodo in cui si fa uso delle trasformazioni quadratiche. A tale scopo basta osservare che la verifica dell'invarianza delle f', da cui si dedurrebbe analogamente l'invarianza delle f'' ecc.; importa soltanto un computo numerico, che permette di ritenere stabilito il resultato per le f'' anche quando manchino le f' ecc. Piuttosto vale la pena di esaminare sopra un esempio come delle curve fondamentali possano aggiungersi alle trasformate delle f''.

Se la curva f passa per un punto fondamentale A della trasformazione quadratica colla molteplicità $\alpha \geq 2$, allora è chiaro che la retta trasformata di A non si somma affatto alle trasformate di f' e di f'' per costituire le aggiunte φ' e φ'' della curva φ corrispondente ad f; ma se $\alpha=1$, la nominata retta fondamentale non entra a far parte delle φ' bensì delle φ''; e se invece la f non passa per A $(\alpha=0)$, quella retta figurerà semplicemente nelle φ' e doppiamente nelle φ''; ecc.

Dal teorema precedente segue che « *rispetto alle trasformazioni cremoniane sono numeri invarianti, per una curva piana f, oltre al suo genere, anche i generi, effettivi o virtuali, delle sue successive aggiunte* », depurate delle parti fondamentali fisse: genere virtuale delle f', che può anche non esistere, è da ritenere il numero delle f'' linearmente indipendenti, e così via.

Per una retta mancano le successive aggiunte, e quindi i generi virtuali di cui si discorre sono tutti nulli; la stessa proprietà dovrà dunque sussistere per ogni curva piana f riducibile cremonianamente ad una retta. Così per esempio non sarà mai riducibile ad una retta una sestica con dieci punti doppi, perchè — pur essendo nullo il suo genere — è uguale ad 1 il genere virtuale delle sue curve aggiunte, essendovi una seconda aggiunta d'ordine zero. Similmente non potrà ridursi ad una retta, e nemmeno alla sestica precedente, una curva di settimo ordine dotata di 15 punti doppi, la quale possiede come seconde aggiunte tutte le rette del piano. Invece le curve di genere 0 d'ordine $n=2, 3, 4, 5$ non posseggono curve aggiunte successive, ed è facile verificare che possono trasformarsi cremonianamente in una retta, perchè si può già abbassarne l'ordine con una trasformazione quadratica.

Questi esempi hanno valore generale: sussiste infatti il

Teorema. *Le curve piane trasformabili cremonianamente in rette, sono caratterizzate dalla mancanza delle successive curve aggiunte.*

Abbiamo già osservato che la mancanza delle curve aggiunte ad una f, d'ordine n, è condizione necessaria per l'anzidetta riducibilità. Ora, supponendo che manchino le successive aggiunte f', f''..., dimostreremo che l'ordine della f, supposto sia esso $n > 1$, si può abbassare in generale con una trasformazione quadratica, e — in ogni caso — con una serie di siffatte trasformazioni. A tal uopo occorre stabilire il *primo lemma* su cui (cfr. § 20, pag. 166) abbiamo fondata la riduzione delle reti omaloidiche, cioè che i punti di più alta molteplicità r, r_1, r_2 di f soddisfano alla disuguaglianza

$$r + r_1 + r_2 > n.$$

Questo lemma permette la riduzione dell' ordine di f, tranne nel caso eccezionale in cui si presentino punti multipli O_1 O_2 .... infinitamente vicini al punto di massima molteplicità O, e prossimi ad esso; per effettuare la deduzione anche in questo caso occorre stabilire il *secondo lemma* di cui ci siamo valsi per la riduzione delle reti omaloidiche: se r designa la molteplicità di O, esiste qualche punto di f non prossimo ad O la cui molteplicità k soddisfa alla disuguaglianza

$$2k + r > n.$$

Il primo lemma si stabilisce come segue. Consideriamo un punto O che abbia per f la massima molteplicità r; quando si passa dalla f alle curve aggiunte successive f', f'' ...., la differenza $n - r$ diminuisce ad ogni passaggio di 2, giacchè n diminuisce di 3 ed r di 1; di conseguenza si arriverà ad aggiunte $f^{(i)}$ di un certo ordine s, soggette a passare per O con la molteplicità $r^{(i)} = s$ o $s - 1$, alle quali $f^{(i)}$ gli altri punti multipli di f impongono condizioni che ne rendono impossibile l'esistenza. L'affermazione precedente vale anche nel caso in cui la $f^{(i)}$ sia una cubica, perchè qualora il punto O dovesse essere semplice per le $f^{(i)}$, esisterebbe una curva, d'ordine zero, aggiunta d'indice $i + 1$.

Ora la $f^{(i)}$ d'ordine s, con un punto $(s-1)$-*plo* o s-*plo* O, dovrà essere assoggettata a passare per altri punti semplici (o multipli) $O_1\, O_2 \ldots$ — in numero di 2 almeno — che ne rendano impossibile l'esistenza: ed è chiaro che la somma delle tre molteplicità $r^{(i)}$, $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$ di $O\, O_1\, O_2$ per la $f^{(i)}$ ne supera l'ordine s. Ma da ciò si deduce che le tre molteplicità r, r_1, r_2 che la f ha in O, O_1, O_2, soddisfano alla disuguaglianza

$$r + r_1 + r_2 > n;$$

infatti

$$\begin{aligned} n &= s + 3i \\ r &= r^{(i)} + i \\ r_1 &= r_1^{(i)} + i \\ r_2 &= r_2^{(i)} + i. \end{aligned}$$

Con uguale semplicità si dimostra il secondo lemma. Anzitutto il ragionamento precedente mostra che le molteplicità $r_1\, r_2 \ldots$ di $O_1\, O_2 \ldots$ per la f, soddisfano alla disuguaglianza

$$2r_1 + r > n, \qquad 2r_2 + r > n \ldots$$

Ora, non è possibile che i punti O_h che impongono condizioni alle $f^{(i)}$ e le cui molteplicità soddisfano quindi a una tale disuguaglianza, siano tutti prossimi ad O: infatti se così fosse la disuguaglianza di prossimità per la f darebbe

$$\Sigma' r_h \leq r,$$

e quindi *a fortiori*, passando dalla f alla $f^{(i)}$ e dalle molteplicità r_h alle $r_h^{(i)} = r_h - i$,

$$\Sigma' r_h^{(i)} < r^{(i)};$$

ma è sempre possibile imporre ad una curva $f^{(i)}$ d'ordine s, che debba passare per O con la molteplicità $r^{(i)} = s$ o $s-1$, dei punti di molteplicità $r_h^{(i)}$ la cui somma non superi $r^{(i)}$; e si ottiene così almeno una $f^{(i)}$ effettivamente esistente, quale si può comporre con rette (semplici o multiple) uscenti da O. Dunque se deve mancare la $f^{(i)}$, si dovrà avere

$$\Sigma' r_h > r,$$

e quindi esiste un punto, non prossimo ad O, avente per f una certa molteplicità k per cui

$$2k + r > n.$$

I due lemmi stabiliti permettono in ogni caso di abbassare mediante trasformazioni quadratiche l' ordine n di f, supposto $n > 1$ così come abbiamo veduto innanzi nello studio delle reti omaloidiche. E pertanto ogni f, priva delle successive aggiunte $f' f''$.... si potrà ridurre cremonianamente ad una retta. c. d. d.

Si osservi che una retta può sempre assumersi come fondamentale per una trasformazione quadratica e così ridursi ad un punto. Ciò mostra che una curva f, priva di successive aggiunte, può sempre ritenersi come fondamentale per una trasformazione cremoniana, riducendosi così all' intorno di un punto. Il resultato si estende al caso in cui la f sia comunque spezzata: la mancanza delle successive aggiunte permette di ridurre f ad un gruppo di punti.

Dopo aver dato la condizione perchè una curva di genere zero sia cremonianamente trasformabile in una retta, vediamo ora come si caratterizzano le curve piane di genere 1 trasformabili cremonianamente in cubiche. Sussiste il

Teorema. *Le curve piane di genere* 1 *riducibili con una trasformazione cremoniana ad una cubica, sono caratterizzate dalla mancanza delle successive aggiunte d' indice* 2, 3 ....

Se la f di genere 1, e quindi possedente *una* aggiunta f', non possiede curve aggiunte f'', f'''.... si può ridurla ad una cubica mediante una trasformazione cremoniana che muti la f' (priva di aggiunte d' indice 1, 2 ...) in un gruppo di punti, cioè in una curva d' ordine zero. Ma per essere sicuri che con ciò la f diventi effettivamente una curva φ del terzo ordine, bisognerebbe assicurarsi che la trasformazione eseguita adopra soltanto punti fondamentali appartenenti ad f, giacchè altrimenti si produrrebbero delle curve fondamentali facenti parte di φ. Ci dispenseremo da questo esame, mostrando come il nostro teorema segua dallo stesso ragionamento che ci ha fornito la dimostrazione del teorema precedente. Si tratta di stabilire due lemmi numerici relativi alle molteplicità di f, dai quali si trae qui che l' ordine n di f, supposto $n > 3$, può essere abbassato con trasformazioni quadratiche. Ora quei lemmi venivano dedotti dalla non esistenza di una $f^{(i)}$ d' ordine $s = n - 3i$ aggiunta ad f d' indice i passante per un punto O, di massima molteplicità r, con la molteplicità $r^{(i)} = s$ o $s - 1$. Se si ha $i \geq 2$, non vi è più nulla da aggiungere. Resta solo da esaminare il caso $i=1$, in cui la f', d'ordine $s=n-3$, passi per O con la molteplicità $n-3$ o $n-2$, e quindi il caso di una f d'ordine $n>3$ dotata di un punto O di molteplicità $r=n-2$ o $n-3$. In questo caso è ovvio che se la f ha il genere 1 deve possedere un certo numero di punti doppi, almeno $n-2>\frac{n-2}{2}$, punti che non possono essere tutti prossimi ad O; dal che si desume in ogni caso la possibilità di abbassare l'ordine di f con trasformazioni quadratiche.

Ad esemplificazione del teorema stabilito osserviamo come si riduca cremonianamente una quartica piana dotata di due punti doppi, ovvero anche una quintica con 5 punti doppi, o una sestica con un punto triplo e 6 punti doppi (dove mancano le aggiunte d'ordine zero soggette a passare per il punto triplo), ma non, come più sopra fu notato, una sestica con 9 punti doppi, ecc.

Notizia storica. I sistemi delle curve d'ordine $n-3$, $n-6$, ... che costituiscono le successive aggiunte ad una curva piana d'ordine n, s'incontrano in una Nota di BRILL e NÖTHER delle *Göttinger Nachrichten* del 1873, ove sono adoperati per una dimostrazione del teorema di Riemann-Roch; ma soltanto nel 1885 viene fatto uso della invarianza di questi successivi sistemi aggiunti rispetto a trasformazioni cremoniane del piano, e ciò precisamente da S. KANTOR in una Nota dei *Comptes Rendus*, in relazione al problema delle trasformazioni cremoniane cicliche di cui diremo nel seguente paragrafo: Cantor designa il principio qui adoperato come *principio della diminuzione delle funzioni* φ. Nuove applicazioni dell'invarianza di codesti sistemi aggiunti (nonchè il rilievo esplicito del significato diverso che questa invarianza ha rispetto alla invarianza della serie canonica per trasformazioni birazionali della sola curva) trovansi nelle « Ricerche generali sopra i sistemi lineari » di CASTELNUOVO [1] (1891), e poi in altri studi di altri autori. Il teorema che una curva priva di successive aggiunte può ridursi cremonianamente ad una retta,

[1] Memorie dell'Acc. di Torino, serie II, t. 42. Cfr. Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 1898.

ovvero a un punto o a un gruppo di punti, appartiene a Castelnuovo-Enriques [1] (1900).

22. Nota sulla riduzione dei sistemi lineari di curve piane di genere 0 e 1. — I teoremi che abbiamo stabilito sulla riduzione delle curve piane f di genere 0 e 1, prive di successive aggiunte, permettono di determinare i tipi dei sistemi lineari (∞^1 almeno) di curve razionali ed ellittiche.

Premettiamo alcune osservazioni generali sui sistemi lineari di curve piane.

Dicesi *completo* un sistema lineare $|f|$ di curve, di un medesimo ordine n, che sia determinato dal gruppo dei punti base O_i presi con le rispettive molteplicità r_i; è facile verificare che la proprietà di un sistema lineare di essere completo è invariante per trasformazioni cremoniane. Un sistema lineare completo di curve d'ordine n dicesi *regolare* o *sovrabbondante* secondo che la sua dimensione è uguale o maggiore a $\frac{n(n+3)}{2} - \Sigma \frac{r_i(r_i+1)}{2}$: la sovrabbondanza corrisponde dunque all'esistenza di legami fra i punti base.

Dato un sistema lineare $|f|$, ∞^s, di curve irriducibili, secantisi a due a due in m punti variabili, dicesi (con Segre) *serie caratteristica* del sistema la serie g_m^{s-1} segata sopra una f generica dalle altre curve del sistema. Nel seguito parlando di un sistema lineare di curve *sottintenderemo* sempre che queste siano *irriducibili.*

La serie caratteristica di un sistema lineare completo è completa.

Infatti le curve F d'ordine n aggiunte ad una f, cioè passanti per ogni punto r-*plo* O, con la molteplicità $r-1$, segano su f una serie completa; ora le curve f si deducono dalle F imponendo loro di contenere certi punti infinitamente vicini ai punti r-*pli* (per un punto r-*plo* ordinario, O, basta imporre alle F di toccare gli r rami per O); si deduce che il sistema totale delle f sega sopra la f considerata una serie caratteristica completa.

La serie caratteristica di un sistema lineare completo è non speciale o speciale secondo che il sistema è regolare o sovrabbondante.

[1] Cfr. il § 6 della Memoria « Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi ». (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XIV).

Infatti, le condizioni imposte dai punti base di f alle aggiunte F d'ordine n sono sempre indipendenti; quindi la serie caratteristica di f risulterà non speciale qualora le condizioni ulteriori imposte alle F per appartenere al sistema $|f|$ — condizioni di passaggio per punti infinitamente vicini ai punti base — riescono indipendenti.

Il precedente teorema mostra che la regolarità o meno di un sistema lineare completo è una proprietà invariante per trasformazioni cremoniane. Dello stesso teorema notiamo i seguenti corollari:

I) *Un sistema lineare (di dimensione $s \geq 1$) di curve razionali è sempre regolare.*

II) *Un sistema lineare di dimensione $s > 1$ di curve ellittiche è sempre regolare.* Invece un fascio di curve ellittiche è sovrabbondante, e precisamente ha la sovrabbondanza 1, avendo come serie caratteristica la g_0^0 canonica.

Dopociò vediamo come possano determinarsi tutti i tipi di sistemi lineari di curve razionali.

Sia $|f|$ un sistema lineare di curve razionali, secantisi a due a due in $m \geq 0$ punti variabili. Poichè le f sono di genere zero, mancano le prime aggiunte f', le quali dovrebbero intersecare le f in -2 punti. Mancano anche le seconde aggiunte f'', poichè esse dovrebbero segare le f in $-4-m$ punti per soddisfare alla relazione virtuale

$$|f+f''| = |2f'|.$$

Analogamente si verifica che mancano tutte le successive aggiunte che dovrebbero sempre segare le f in un numero negativo di punti (qui precisamente gioca l'ipotesi che la f appartenga ad un sistema lineare di *dimensione* $s \geq 1$ onde $m \geq 0$).

Ora ogni trasformazione quadratica T che abbassi l'ordine della f generica, varrà pure ad abbassare l'ordine di tutte le f, cioè l'ordine del sistema, a condizione che i punti fondamentali di T cadano in punti base di $|f|$. Ma ciò avviene certo (per il teorema di Bertini; cfr. L. 2°, § 5, vol. I, pag. 181) se quei punti fondamentali cadono in punti multipli di f. Pertanto l'analisi del precedente paragrafo mostra che con successive trasformazioni quadratiche si riuscirà sempre ad abbassare l'ordine di $|f|$ fino a che questo non si riduca ad un sistema di curve di ordine n con un punto base $(n-1)$-*plo* ovvero, alla rete delle rette o al sistema ∞^5 delle coniche senza punti base.

Quanto ai sistemi lineari $|f|$ costituiti di curve con un punto base $(n-1)$-*plo*, O, con $n > 1$, è chiaro che il loro ordine può essere abbassato mediante una trasformazione quadratica quando si abbiano due punti base semplici distinti da O, o anche uno proprio e l'altro infinitamente vicino ad O, o infine entrambi successivi ad O sopra un ramo lineare. Enuncieremo dunque il seguente

Teorema. *I sistemi lineari completi di curve razionali possono ridursi con trasformazioni cremoniane ai seguenti tipi di ordine minimo:*

1) Sistema delle rette senza punti base o con un punto base.

2) Sistema delle coniche senza punti base.

3) Sistema delle curve d'ordine n con un punto base $(n-1)$-*plo*:

a) senza altri punti base;

b) ovvero con un altro punto base proprio;

c) ovvero con $i \leq n-1$ punti base infinitamente vicini ad O in direzioni distinte.

Nell'enunciare la proprietà del tipo 3) *c*) si è tenuto conto della possibilità di sciogliere eventualmente — senza alzare l'ordine di $|f|$ — i rami cuspidali che la f generica potesse presentare per O.

Passiamo a determinare analogamente i tipi dei sistemi lineari $|f|$ di curve ellittiche, supponendo dapprima che la loro dimensione sia $s > 1$. In questo caso due f s'intersecano in m punti variabili dove $m > 1$, mentre l'unica prima aggiunta f' sega le f in zero punti: si deduce, come innanzi, che mancano le successive aggiunte f'', f'''...., che dovrebbero segare le f in un numero negativo di punti.

Ora l'ordine della f generica, che possiede una f' prima aggiunta, e non successive aggiunte, può essere abbassato con trasformazioni quadratiche, fino a ridurre la f ad una cubica (§ precedente, pag. 190). Questa riduzione varrà anche per il sistema $|f|$ purchè non si utilizzino, in essa, come fondamentali per una trasformazione, dei punti semplici di f che non siano base per $|f|$. Tenuto presente il citato teorema di Ber-

TINI, per cui i punti multipli della f generica debbono cadere nei punti base, è facile vedere che l'unico caso d'eccezione che qui si presenta è quello in cui la f possegga soltanto due punti doppi, essendo dunque una quartica. Così concluderemo enunciando il

Teorema. *I sistemi lineari completi di curve ellittiche di dimensione $s > 1$, si possono ridurre con una trasformazione cremoniana del piano ad un sistema di cubiche con* $0, 1, 2 \dots 7$ *punti base, ovvero al sistema ∞^8 delle quartiche con due punti base doppi.*

Restano da trovare i tipi dei fasci di curve ellittiche ($s = 1$). Qui il ragionamento precedente non conduce più alla mancanza delle successive aggiunte al fascio $|f|$: si può avere, oltre alla prima aggiunta f', *una* seconda aggiunta f'', *una* terza aggiunta f'''...., tutte aventi zero intersezioni variabili con le f del fascio; si avrà dunque un'ultima aggiunta $f^{(i)}$ priva essa stessa di successive aggiunte. Ora questa $f^{(i)}$ potrà ridursi con trasformazioni quadratiche ad un punto o a un gruppo di punti divenendo così d'ordine zero; e un esame più attento mostra che queste trasformazioni si otterranno sempre prendendo tre punti fondamentali fra i punti base di $|f|$ (fascio) in guisa da non introdurre nuove curve fondamentali nel sistema aggiunto della trasformata di $f^{(i-1)}$. Di conseguenza il fascio f si ridurrà ad un fascio di curve d'ordine $3i$ con 9 punti base *i-pli*: effettivamente un tale fascio possiede *una* cubica $f^{(i-1)}$ aggiunta di indice $i-1$, e — come risulterà dalla costruzione seguente — anche una sola aggiunta $f^{(i-2)} \dots f''\ f'$, costituite dalla medesima cubica, contata rispettivamente $2, 3, \dots i-1$ volte.

Pertanto enunceremo il

Teorema. *Ogni fascio di curve ellittiche si riduce, con trasformazioni cremoniane del piano, a un fascio di curve di ordine* $3i$ con 9 punti base *i-pli. La costruzione effettiva di un tal fascio si può dare con* HALPHEN, partendo da una cubica sopra cui i 9 punti base debbono costituire un gruppo particolare, *come segue.*

Si noti anzitutto che, presi nel piano 9 punti in posizione generica, esiste *una* curva d'ordine $3i$ che passa per essi con le molteplicità i, la quale si riduce alla cubica determinata dai 9 punti contata i volte; se invece si abbia una curva irriducibile f, d'ordine $3i$, con 9 punti *i-pli*, $O_1 O_2 \dots O_9$, questa apparterrà al fascio determinato da f e dalla cubica $f^{(i-1)}$, passante per $O_1 O_2 \dots O_9$, contata i volte. Ciò è d'accordo con l'osservazione fatta innanzi che i fasci di curve ellittiche hanno la sovrabbondanza 1: i punti base $O_1 O_2 \dots O_9$ del nostro fascio $|f|$, non potranno assumersi ad arbitrio nel piano, o sopra la cubica $f^{(i-1)}$, anzi dopo aver scelti sopra $f^{(i-1)}$ otto punti $O_1 O_2 \dots O_8$, la ricerca del punto O_9 (appartenente alla stessa cubica) costituirà un problema determinato.

Per risolvere codesto problema si considerino le curve di ordine $3i$ passanti i volte per $O_1 O_2 \dots O_8$: esse segheranno sopra la cubica $f^{(i-1)}$ una serie g_i^{i-1}, la quale possiederà i^2 punti i-*pli* (cfr. § 9, pag. 59): uno di questi punti (che non sia $\frac{i}{h}$-*plo* per la serie segata sulla cubica dalle curve d'ordine $3\frac{i}{h}$ passanti $\frac{i}{h}$ volte per $O_1 O_2 \dots O_8$, la qual serie moltiplicata per h dà la g_i^{i-1}) costituirà precisamente uno dei punti O_9 che risolvono il nostro problema. Difatti quando imponiamo ad una curva f d'ordine $3i$, già passante con le molteplicità i per $O_1 O_2 \dots O_8$, di avere come i-*plo* codesto punto O_9, si è condotti anzitutto a scrivere i equazioni lineari esprimenti il contatto i-punto della f con la cubica in O_9, e fra queste equazioni una è conseguenza delle rimanenti, come in genere accade per le i equazioni che esprimono che una f contenga gli i punti di un gruppo della g_i^{i-1}. Emerge di qui che le f, assoggettate alle condizioni su esposte in ordine ai punti $O_1 O_2 \dots O_9$, sono ∞^1 almeno; è poi chiaro che esse non possono essere di più, non avendo intersezioni variabili ed essendo irriducibili: l'irriducibilità delle f segue dall'aver escluso che O_9 possa costituire insieme ad $O_1 O_2 \dots O_8$ il gruppo dei punti base j-*pli* $\left(\text{di molteplicità } j=\frac{i}{h}\right)$ per un fascio di curve d'ordine $3j$, divisore di $3i$.

Come esempio assumasi $i=2$. Il fascio delle sestiche $|f|$ si costruisce allora come segue. Sopra una cubica (affatto generale), f', si prendono ad arbitrio 8 punti $O_1 O_2 \dots O_8$; quindi si considerano le ∞^3 sestiche passanti doppiamente per $O_1 O_2 \dots O_8$, le quali segano su f' una g_2^1; la g_2^1 possiede 4 punti doppi, fra cui il nono punto base, O', del fascio di cubiche per $O_1 O_2 \dots O_8$: scartato O' si hanno 3 possibili punti O_9 che, presi insieme ad $O_1 \dots O_8$, costituiscono i punti base doppi di un fascio di sestiche, f, irreducibili.

Questa costruzione, in forma lievemente diversa (per cui il problema appare come un caso di bisezione dell'argomento delle funzioni ellittiche), trovasi nella memoria di HALPHEN « Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles » (Bullettin de la Société math. de France, T. X, pag. 162).

Osservazione. La conoscenza dei tipi, cremonianamente distinti, dei sistemi lineari (∞^1 almeno) di curve di genere 0, 1, ha un significato importante anche per la classificazione (dal punto di vista delle trasformazioni cremoniane) dei sistemi lineari di genere qualunque. Si consideri infatti la serie dei sistemi lineari costituiti dalle successive aggiunte ad un sistema $|f|$, di genere > 1. In questa serie $|f'|$, $|f''|$..., possiamo arrestarci al primo sistema $|f^{(i)}|$ che, depurato eventualmente di parti fisse, sia costituito di curve irreducibili di genere 0 o 1, ovvero di curve composte colle curve razionali o ellittiche di un fascio (in qualunque altro caso si può procedere oltre, considerando il sistema aggiunto ad $|f^{(i)}|$ o al sistema delle componenti variabili irriducibili delle $f^{(i)}$). Così un primo criterio di classificazione pei sistemi $|f|$ viene porto dal tipo cui appartiene il sistema lineare (∞^1 almeno) delle ultime aggiunte (o parti di aggiunte) razionali o ellittiche.

Vale la pena di osservare che: *I fasci di curve ellittiche d'ordine* $3i$ *con* 9 *punti base i-pli, dove* $i > 1$, *non nascono mai, per aggiunzione, da sistemi lineari di genere* $p > 1$. Pongasi p. es. $i = 2$, cioè si tratti di un fascio di sestiche φ con 9 punti doppi. Facciamo vedere che non esiste alcun sistema lineare $|f|$, con parti variabili irreducibili di genere $p > 2$, le cui aggiunte si compongano — all'infuori di parti fisse — delle sestiche φ. Infatti — nell'ipotesi d'esistenza di $|f|$ e immaginando che $|f|$ sia spogliato dalle sue eventuali parti fisse — si otterranno ∞^{p-1} curve aggiunte composte ancora colle φ, e precisamente ciascuna con $p-1$ curve φ (almeno). Ora, poichè la serie canonica delle f è composta, le f saranno iperellittiche (§ 12, pag. 90) e quindi saranno segate dalle φ in 2 punti variabili.

Ma ciò si riconosce impossibile già per $p = 2$ e *a fortiori* per $p > 2$. Infatti una curva d'ordine 9 che passi con molteplicità ≤ 3 per i 9 punti doppi delle sestiche φ:

o avrà tutti quei punti come 3-*pli* e sarà di genere 1, senza intersezioni variabili colle φ;

ovvero (passando almeno per uno di quei punti colla molteplicità 2) avrà almeno 3 intersezioni variabili colle φ.

(Soltanto il fascio di cubiche proviene come aggiunto da un sistema di genere due, costituito da sestiche passanti doppiamente per 8 dei suoi punti base).

Notizia storica. La riduzione all'ordine minimo dei fasci e delle reti (complete, cioè omaloidiche) di curve razionali, risale a NÖTHER [1] (1872); l'estensione ai sistemi lineari di curve razionali di dimensione > 2 fu guadagnata da PICARD [2] mediante lo studio delle superficie a sezioni razionali (1878) e — mercè la generalizzazione del metodo di Nöther — da GUCCIA [3] (1886).

Le ricerche sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve ellittiche incominciano con BERTINI [4] (1877), e sono proseguite da GUCCIA e MARTINETTI (1887) in memorie contenute nei Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo e in quelli dell'Istituto Lombardo [5]. Martinetti si occupa anche della riduzione dei sistemi lineari di curve di genere 2, problema che fu poi risoluto completamente dalle ricerche di DE-FRANCHIS [6].

Tutte queste trattazioni, a prescindere da quella di Picard, che ricorre a considerazioni d'indole diversa, urtano nell'obbiezione critica sollevata dal SEGRE, di cui si è discorso nel precedente paragrafo. Ma l'esame del caso di eccezione istituito — col metodo di CASTELNUOVO — da FERRETTI [7] (1902) ha escluso il dubbio circa l'esistenza di nuovi tipi. Per noi ogni difficoltà è rimossa mercè l'analisi più accu-

(1) Math. Annalen Bd. 5. Per le reti sono anche da ricordare CLIFFORD e ROSANES già menzionati nel § precedente.

(2) Bullettin de la Société Philomatique (1878); Journal für Mathematik. Bd. 100.

(3) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. I.

(4) « Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie del piano ». Annali di Matematica, serie II, t. 8.

(5) A questi studi si collegano pure quelli di YOUNG negli Annali di Mat., 1888-89.

(6) Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1898-99.

(7) Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XVI.

rata delle trasformazioni istituita da CHISINI, in rapporto al secondo lemma (di Nöther), adoperato nella decomposizione delle trasformazioni cremoniane in fattori quadratici.

BERTINI, nello studio sopra indicato del 1877, è stato condotto alla riduzione dei fasci di curve di genere uno, dal problema di *classificare le trasformazioni cremoniane involutorie del piano,* cioè le involuzioni del second' ordine.

La grande importanza di questo lavoro per l' evoluzione delle idee geometriche, consiste nell' idea — nuova per quell' epoca — di proporre la classificazione dal punto di vista proprio della geometria invariantiva definita dal gruppo Cremona, riguardando come identiche le involuzioni cremonianamente trasformabili l' una nell' altra. Il BERTINI trova precisamente *tre tipi di involuzioni piane del second' ordine*:

I) Quelle involuzioni che possiamo chiamare *omologie armoniche generalizzate,* in cui si ha un fascio di rette unite e un luogo di punti doppi costituito da una curva d' ordine n che passa $n-2$ o $n-1$ volte per il centro del detto fascio: data questa curva di coincidenze resta definita sopra ogni retta del fascio una involuzione (di cui — nel secondo dei casi sopra nominati — uno dei punti doppi cade nel centro).

II) L' involuzione costituita dalla coppie di punti che formano le intersezioni variabili di una rete di cubiche con 7 punti base.

III) L' involuzione costituita dalle coppie neutre per il sistema lineare ∞^3 delle sestiche di genere 2 con 8 punti doppi: effettivamente le curve f di questo sistema che passano per un punto A, passano di conseguenza per un altro punto A' (coniugato di A nell' involuzione predetta), giacchè le f segano una g_2^1 sopra la cubica aggiunta che passa per A, e quindi le f per A contengono il suo coniugato A' in questa g_2^1.

Con qualche riserva, Bertini dimostra che ogni involuzione piana di second' ordine può ridursi cremonianamente ad uno dei tipi I), II), III). Si può sciogliere la riserva adoperando l' invarianza dei successivi sistemi aggiunti ad un sistema lineare (KANTOR, CASTELNUOVO ([1])): difatti si può sempre costruire un sistema lineare, somma di un sistema qualsiasi

([1]) Cfr. CASTELNUOVO « Sulla razionalità delle involuzioni piane » (1893). Math. Annalen Bd. 44.

e del suo trasformato, che sia invariante per una trasformazione involutoria; procedendo per aggiunzione successiva si arriva ad un sistema invariante di curve razionali od ellittiche, ed allora un'analisi appropriata permette di riconoscere i tipi di Bertini.

Una estensione delle ricerche di Bertini si ha nel problema che concerne la determinazione delle *trasformazioni cremoniane cicliche d'ordine* $n > 2$, e quella dei *gruppi finiti di trasformazioni cremoniane.* Lo stesso metodo dei successivi aggiunti permette di risolvere questi problemi assegnando i *tipi cremonianamente irreducibili* (1).

Infine il detto metodo permette anche di determinare i gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano.

Occorre a tal fine osservare che la serie dei trasformati di un sistema (p. es. della rete delle rette) per le trasformazioni d'un gruppo continuo è una serie continua, la quale appartiene ad un sistema lineare completo invariante pel gruppo: risulteranno quindi invarianti anche i successivi sistemi aggiunti, e — per la continuità — anche i sistemi lineari di curve definiti rispetto a questi da condizioni di molteplicità nei punti base che dien luogo ad un numero finito di soluzioni. L'analisi, svolta da ENRIQUES (1893), conduce al seguente risultato (2):

I gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano si possono ridurre cremonianamente ad uno dei tre gruppi tipici seguenti o ad un loro sottogruppo:

I) *gruppo* ∞^8 *delle omografie*;

II) *gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni per raggi vettori reciproci,* ovvero (liberandosi da particolarità metriche), gruppo

(1) Cfr. S. KANTOR « Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques ». Memoria premiata dall'Accademia di Napoli in un concorso del 1883, rifatta in gran parte dall'autore e pubblicata negli Atti dell'Accademia di Napoli, serie II, vol. IV (1888-1892). A. WIMAN « Zur Theorie der endlicher Gruppen von birationalen Transformationen in Ebene », Math. Annalen, Bd. 48 (1896).

(2) Rendic. Acc. Lincei, maggio e giugno 1893. Il teorema è stato messo in rapporto colla classificazione dei gruppi puntuali del piano di LIE, da G. FANO, Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, 1896.

I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio sono stati determinati successivamente da ENRIQUES e FANO (Annali di Matematiche, 1897). Cfr. anche FANO: Atti e Memorie dell'Accademia di Torino, 1898; e Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 1898.

delle trasformazioni quadratiche che lasciano invariante il sistema ∞^3 delle coniche per due punti;

III) *gruppo* ∞^{n+5} *delle trasformazioni di* JONQUIÈRES *d' ordine n che lasciano invariato il sistema lineare delle curve d' ordine n, con un punto* $(n-1)$*-plo ed* $n-1$ *tangenti fisse.*

23. Il significato delle trasformazioni per la geometria sopra la curva. — Le ricerche di cui abbiamo dato qualche notizia nei precedenti paragrafi, e specialmente nell' ultimo, si collegano allo sviluppo di teorie indipendenti dalla geometria sopra le curve; le quali appaiono anzi come estensione e promozione di questa. Così la nostra esposizione tocca qui ad un punto che — in un trattato rivolto alla geometria delle curve (e non del piano o delle superficie ecc.) — non deve essere oltrepassato. Ma ciò che abbiamo detto è utile, e in un certo senso necessario, per comprendere l' evoluzione storica delle idee.

Qui è opportuno richiamare l' attenzione del lettore sopra una difficoltà specifica inerente ad ogni esposizione storica, che voglia render conto della genesi delle dottrine. *L' ordine dei progressi dello spirito umano non è sempre lineare*: l' albero della scienza cresce per l' annodarsi di concetti che danno luogo talvolta ad uno sviluppo intrecciato, per modo che riesce difficile distinguere fino a che punto un certo concetto proceda da un altro o dove cominci invece il secondo ad influire sul primo.

Per stare al nostro argomento, è chiaro come il concetto della trasformazione birazionale (o cremoniana) del piano suggerisca l' idea di ricercare sistematicamente le proprietà delle curve, invarianti per trasformazioni birazionali, e però dia impulso alla geometria sopra le curve, dove i problemi posti precedentemente nel campo della teoria delle funzioni, ricevono appunto una veste geometrica, che dà rilievo al loro aspetto algebrico. Ciò che la geometria cremoniana del piano offre allo sviluppo della dottrina è tanto più importante quanto meno appariscente: si tratta sopratutto di comprendere il significato del nuovo punto di vista, che — nella sua astrattezza — deve essere chiarito traverso applicazioni ed esemplificazioni concrete. La stessa trattazione delle serie lineari sulla curva, offerta da BRILL e NÖTHER, non viene accolta e fatta propria dai geometri se non attraverso problemi sui sistemi lineari di curve appartenenti al piano (e poi ad altre superficie algebriche ecc.), in rapporto alle trasformazioni cremoniane. Ma l'accoglimento della nominata dottrina porta, in un successivo periodo di sviluppo, a porre prima nell'ordine logico e prammatico la geometria che concerne le proprietà delle curve, invarianti per trasformazioni birazionali di queste, e poi le ulteriori applicazioni o estensioni, in cui la curva figura come immersa in un piano, in una superficie ecc., di cui a sua volta si studiano le proprietà invariantive.

Come termine dello sviluppo delle idee, esce fuori una geometria sopra la curva, in cui non si vede quasi più nemmeno il concetto della trasformazione. Tale è infatti, a prescindere da qualche parte (che spesso ha solo valore di chiarimento) la dottrina che abbiamo esposto nel precedente capitolo. Le trasformazioni caratterizzano bensì l'ordine delle proprietà di cui si tratta, ma non vengono adoperate, di regola, per sostituire un modello proiettivo ad un altro equivalente.

Tuttavia questa dottrina non è ancora completa. Le curve debbono di nuovo essere messe a riscontro delle trasformazioni, non per ridurle a casi proiettivi particolari, ma per « determinare quali caratteri numerici e quali costanti caratteristiche (o moduli) bastino ad affermare la birazionale identità di due curve, e in particolare se e quando una curva ammetta trasformazioni birazionali in se stessa ». Appunto questo problema formerà oggetto del seguente capitolo: nel successivo s'introdurrà la considerazione più generale delle corrispondenze multiple che possono legare fra loro le curve.

CAPITOLO III.

Curve e trasformazioni.

24. Trasformazione delle curve di genere zero. — *Fra due curve qualsiansi di genere zero intercedono ∞^3 trasformazioni birazionali*: esiste una trasformazione determinata in cui a tre punti ABC dell'una corrispondono tre punti $A'B'C'$ scelti ad arbitrio sull'altra. Infatti le curve di genere zero sono razionali (§ 7, pag. 48) cioè riferibili biunivocamente alla retta, e sopra la retta esistono precisamente ∞^3 corrispondenze biunivoche algebriche che sono le proiettività (L. 2°, § 32, vol. I, pag. 353), una proiettività venendo determinata da tre coppie di punti omologhi.

In particolare *una curva di genere zero ammette ∞^3 trasformazioni birazionali* in se stessa; si determina una trasformazione fissando tre copie di punti corrispondenti.

Ma le trasformazioni di una curva di genere zero in se stessa (sebbene possano ritenersi astrattamente come proiettività *sopra* la curva, ponendosi da un punto di vista *interno*) non saranno in generale trasformazioni proiettive dello spazio ambiente, giacchè, se si tratta di una curva di ordine n in uno spazio S_r con $r < n$ dimensioni, la g_n^r segata sulla curva dagli iperpiani non sarà in generale invariante per codeste trasformazioni. Così p. es. per $r = n - 1$, la g_n^{n-1} determina un gruppo covariante di n punti, G_n, costituito dai suoi punti n-pli, che viceversa assunto ad arbitrio vale a determinare la g_n^{n-1}: ora per $n > 4$ questo gruppo non ammette in generale trasformazioni proiettive, sicchè la curva razionale d'ordine n, che corrisponde alla detta g_n^{n-1}, non verrà trasformata in sè da alcuna omografia dello S_{n-1}.

La stessa considerazione che precede mostra invece che per $r = n$ le trasformazioni della curva in se stesse sono sempre proiettive, essendo invariante la g_n^n segata dagli iperpiani. Pertanto *una curva razionale normale* (d'ordine n in S_n) *ammette* ∞^3 *trasformazioni proiettive* formanti un gruppo Γ; ciò avemmo già occasione di osservare nel § 41 del L. 4° (Vol. II, pag. 672).

Ora il problema di « determinare tutte le curve razionali con trasformazioni proiettive (agenti in modo effettivo sui punti di esse) » si può risolvere riferendoci alle curve normali da cui quelle si deducono, ricercando come debba proiettarsi una $C_n{}^n$ da un punto esterno o da uno spazio S_h non incidente alla curva $(0 \leqq h \leqq n-3)$ affinchè la proiezione possegga ancora delle trasformazioni omografiche.

Questa ricerca porta alla determinazione degli S_h, non incidenti alla $C_n{}^n$, che sono invarianti per un gruppo di trasformazioni omografiche della $C_n{}^n$ stessa, sottogruppo di Γ.

Per il nostro scopo conviene premettere le seguenti osservazioni:

Anzitutto se si fissa un punto esterno, le omografie che trasformano in sè la $C_n{}^n$ ed il punto, lascieranno invariato il gruppo degli iperpiani osculatori alla curva passanti per il punto, e quindi il gruppo G dei relativi punti di osculazione, che consterà di $m \geq 2$ punti distinti. La cosa appare nel modo più chiaro se ci si riferisce al caso duale, in cui si fissi un iperpiano; dove conviene notare che la curva d'ordine n di S_n è anche di classe n, avendosi n iperpiani osculatori per un punto. Più in generale si avverta che le omografie di Γ trasformano in sè, oltre la curva $C_n{}^n$, la superficie delle sue tangenti, la varietà a tre dimensioni generata dai suoi piani osculatori ecc.; di conseguenza se si considerano le omografie di Γ che lasciano fermo un punto, o un gruppo di un numero finito di punti, sopra la varietà degli S_r osculatori alla $C_n{}^n$ $(1 \leq r \leq n-1)$ e fuori della curva, resta fissato sopra la curva un gruppo di $m \geq 2$ punti.

Le osservazioni precedenti permettono pure di affermare che « le omografie che lasciano ferma la $C_n{}^n$ ed un S_h non incidente ad essa, lasciano invariato un gruppo G_m di $m \geq 2$ punti distinti sulla $C_n{}^n$ stessa ». Infatti se, alle omografie di Γ, s'impone di lasciar fermo lo S_h, si ferma di conseguenza il gruppo dei punti sezioni di S_h con la varietà degli S_{n-h-1} osculatori alla curva. E converrà distinguere due casi:

I) Per $m > 2$ il gruppo delle trasformazioni proiettive della figura (composta della $C_n{}^n$ e dello S_h) sarà necessariamente un gruppo finito, essendovi un numero finito di proiettività sopra la curva (o sopra una retta) che lascia invariato un gruppo di $m > 2$ punti: e s'intende che soltanto per posizioni particolari dello S_h avverrà di trovare un gruppo effettivo contenente una trasformazione diversa dall'identità. Alla ricerca che qui prenderebbe origine, accenniamo nella Nota che costituisce il § 25.

II) Invece per $m = 2$ esiste un gruppo continuo ∞^1 di proiettività sulla curva che lascia fermi i due punti del G_2, ed anche una serie ∞^1 di involuzioni che permutano i due punti della coppia e che, unite alle precedenti, formano il più ampio gruppo di proiettività rispetto a cui il G_2 è invariante. Non è detto *a priori* che tutte le omografie di Γ, corrispondenti alle dette proiettività, lascino fermo lo S_h che ci ha fornito la costruzione del G_2; ma sarà facile riconoscere quali sono gli spazi lineari invarianti per le omografie di Γ che lasciano fermi due punti della $C_n{}^n$ o che li scambiano fra loro; è poi ovvio che gli S_h invarianti per queste ∞^1 involuzioni sono anche invarianti per le ∞^1 omografie aventi A, B come punti uniti, che si ottengono moltiplicando fra loro quelle involuzioni ([1]).

Cerchiamo dapprima per $h = 0, 1, 2, \ldots$ gli spazi S_h, non incidenti alla $C_n{}^n$, che sono invarianti per il sottogruppo continuo ∞^1 di Γ, costituito dalle omografie che posseggono sulla $C_n{}^n$ due punti uniti A e B, sottogruppo che possiamo designare con G. Perciò osserviamo che queste omografie posseggono come uniti gli $n+1$ vertici, gli $\binom{n+1}{2}$ spigoli, ecc., della piramide definita dagli spazi osculatori in A e B. I vertici della piramide, oltre ad A e B, sono i punti $P_1\, P_2 \ldots P_{n-1}$ intersezioni degli spazi osculatori S_r ed S_{n-r} per $r = 1, 2, \ldots n-1$;

([1]) Passando dalle trasformazioni omografiche della $C_n{}^n$ alle proiettività subordinate sopra la curva e quindi sopra la retta, si tratta di riconoscere che una qualsiasi proiettività π con due punti uniti A e B si può ottenere (in ∞^1 modi diversi) come prodotto di due involuzioni, scambianti A e B. A tale scopo si assuma ad arbitrio un'involuzione ω che scambi A e B; il prodotto $\omega_1 = \omega\pi$, è ancora un'involuzione che scambia A e B, e la nostra π si ottiene allora come prodotto delle due involuzioni ω e ω_1

$$\pi = \omega^{-1}\omega_1 = \omega\,\omega_1 .$$

e questi $n-1$ vertici appartengono allo S_{n-2} polare della corda AB, che non contiene nessuno dei due punti. Gli S_h cercati sono quelli definiti da $h+1$ vertici della piramide $P_1 P_2 \ldots. P_{n-1}$: il loro numero è dunque $\binom{n-1}{h+1}$.

Ma non tutti gli S_h anzidetti, che sono invarianti per G, saranno invarianti per le ∞^1 omografie involutorie di Γ che scambiano i due punti A e B; giacchè queste omografie scambiano fra loro i punti P_i e P_{n-i}. Si avranno dunque i seguenti casi:

a) Se n è dispari e quindi $n-1=2\nu$, si hanno $\binom{\nu}{q}$ spazi S_{2q-1} invarianti, ciascuno dei quali viene definito da q coppie di punti $(P_i\, P_{n-i})$; e non vi sono spazi invarianti S_h con h pari.

b) Se n è pari, e quindi $n-1=2\nu+1$, è invariante il punto $P_{\nu+1}$, intersezione dei due spazi $S_{\nu+1}$ osculatori in A e B, e quindi si hanno due tipi di S_h invarianti per le involuzioni predette, cioè $\binom{\nu}{q}$ spazi S_{2q-1} definiti da coppie di punti distinti $(P_i\, P_{n-i})$; e (per $h>0$) ugualmente $\binom{\nu}{q}$ spazi S_{2q}, proiezioni dei nominati S_{2q-1} dal punto $P_{\nu+1}$.

Le osservazioni precedenti permettono di determinare le curve $C_n{}^r$ $(r<n)$, di genere zero, possedenti un gruppo continuo (∞^1) G di trasformazioni proiettive, e in particolare quelle che ammettono una seconda serie (continua ∞^1) di trasformazioni proiettive involutorie.

A tale scopo giova scrivere le equazioni parametriche della curva razionale normale $C_n{}^n$, scegliendo come piramide fondamentale delle coordinate quella che viene determinata da due punti A e B della curva stessa e dai rispettivi spazi osculatori dei varî ordini: prendendo convenientemente il punto unità, tali equazioni assumono la forma

$$1)\qquad \begin{cases} x_0 \equiv 1 \\ x_1 \equiv t \\ x_2 \equiv t^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n \equiv t^n, \end{cases}$$

dove i punti $A = (1\,0\,....\,0)$ e $B = (0\,0\,....\,1)$ corrispondono ai valori del parametro $t = 0$ e $t = \infty$. Questa rappresentazione parametrica si è già incontrata nel L. 2°, § 6 (vol. I, pag. 192), e nel L. 4°, § 41 (vol. II, pag. 673); ma chi non voglia riandare ad uno dei luoghi citati potrà giustificarla da sè in base alle osservazioni che le equazioni predette rappresentano certo una curva d'ordine n di S_n, e che tutte le $C_n{}^n$ sono proiettive fra loro.

Ora proiettiamo la $C_n{}^n$ da un S_h appartenente alla piramide fondamentale, e non contenente uno dei vertici A e B, sopra un S_r $(r = n - h - 1)$ che, per semplicità di discorso, possiamo supporre essere lo S_r opposto ad S_h nella piramide data, cioè lo S_r *polare* di S_h rispetto alla $C_n{}^n$. La proiezione della $C_n{}^n$ sarà una $C_n{}^r$ rappresentata dalle equazioni che si ottengono dalle 1) cancellandone $h+1$, escluse la prima e l'ultima. In tale guisa avremo la rappresentazione parametrica della $C_n{}^r$, che si potrà scrivere sotto la forma:

$$2)\qquad \begin{cases} y_0 \equiv 1 \\ y_1 \equiv t^{\nu} \\ y_2 \equiv t^{\nu+\nu_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_r \equiv t^n \qquad\qquad (n = \nu + \nu_1 + \dots\, \nu_{r-1}). \end{cases}$$

Concludiamo pertanto che:

Le curve $C_n{}^r$ di genere zero che ammettono infinite trasformazioni proiettive sono rappresentabili con equazioni parametriche del tipo 2).

Questo resultato è contenuto nella determinazione delle curve (anche non algebriche) con ∞^1 trasformazioni proiettive, fatta da KLEIN e LIE (1), che indicheremo nel § 26.

Effettivamente le curve 2) ammettono le trasformazioni proiettive

$$y'_{i+1} = \alpha^{\nu+\nu_1+\dots+\nu_i}\, y_{i+1},$$

che corrispondono al cambiamento di t in αt, e lasciano fermi i due punti A e B, formando un gruppo G continuo ed ∞^1.

Vi saranno di più *anche* ∞^1 *trasformazioni involutorie*,

(1) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris (1870) e Math. Annalen, Bd. 4. — Cfr. anche ENRIQUES: Memorie dell'Ist. Veneto, 1892-93.

scambianti A e B, e corrispondenti al mutamento di t in $\frac{\alpha}{t}$, *nel caso che si abbia*

$$\nu_i = \nu_{r-i-1} \qquad (\nu_0 = \nu).$$

Si avverta che se i numeri $\nu, \nu_1 .... \nu_{r-1}$ ammettono un *massimo comun divisore* $s > 1$, la curva 2) si riduce ad una *curva d'ordine* $\frac{n}{s}$ *contata* s *volte*: infatti si può allora sostituire t^s con un nuovo parametro τ.

Il problema della determinazione delle curve con infinite trasformazioni proiettive viene pienamente risoluto dalle equazioni 2); ma giova riconoscere le singolarità che spettano alle dette curve $C_n{}^r$ nei punti A e B, poichè esse valgono a caratterizzare la famiglia delle $C_n{}^r$ stesse, porgendo così — dal punto di vista geometrico — una nuova risposta al nostro problema. Codeste singolarità si desumono senz'altro dalle equazioni 2), ovvero anche dalla definizione sintetica dello S_h da cui abbiamo proiettata la $C_n{}^n$ nella $C_n{}^r$.

Si riconosce dunque che:

a) La curva $C_n{}^r$ possiede in A la molteplicità ν, formando ivi un solo ramo; che inoltre la tangente in A possiede col detto ramo un contatto d'ordine ν_1 (gli iperpiani per essa hanno $\nu + \nu_1$ intersezioni in A); che il piano osculatore in A ha una osculazione d'ordine ν_2.... e così di seguito; infine l'iperpiano osculatore in A possiede in A un'osculazione di ordine ν_{r-1}, e quindi ha con la curva $n = \nu + \nu_1 + ... + \nu_{r-1}$ intersezioni riunite in A. Secondo la nostra nomenclatura (L. 4°, § 32, Vol. II, pag. 567), i caratteri ν_1, ν_2.... costituiscono le *successive classi del ramo d'ordine* ν della $C_n{}^r$; qui ci converrà designare la singolarità cui appartengono i caratteri nominati col simbolo:

$$[\nu, \nu_1, ... \nu_{r-1}] \qquad (n = \nu + \nu_1 + ... + \nu_{r-1}).$$

b) La curva $C_n{}^r$ possiede similmente in B un punto multiplo d'ordine ν_{r-1} con le successive classi $\nu_{r-2}, ... \nu_1, \nu$, cioè una singolarità corrispondente al simbolo

$$[\nu_{r-1}, \nu_{r-2}, ..., \nu].$$

Inoltre si può dire che questa singolarità è definita come reciproca della singolarità A, ai sensi della legge di dualità: infatti si vede che la sviluppabile (degli iperpiani osculatori) circoscritta alla $C_n{}^r$ è invariante per lo stesso gruppo ∞^1 di omografie, e perciò possiede due singolarità reciproche delle A e B, che sono le A e B stesse scambiate fra loro (la dualità muta ogni punto unito di una generica omografia trasformante nell'iperpiano unito che costituisce la faccia opposta della piramide fondamentale).

Ora è facile riconoscere che una curva $C_n{}^r$ possedente due singolarità reciproche $[\nu, \nu_1, ... \nu_{r-1}]$ e $[\nu_{r-1}, \nu_{r-2}, ... \nu]$ con $r = \nu + \nu_1 + ... + \nu_{r-1}$, è proiezione da un S_h $(h = n - r - 1)$, di una $C_n{}^n$ invariante per le ∞^1 omografie che trasformano in se stessa la $C_n{}^n$ e ne lasciano fermi due punti: basta perciò ricordare come tali spazi S_h siano stati definiti in relazione agli spazi osculatori nei due punti, di cui i numeri ν indicano facilmente l'ordine di contatto. Pertanto si deduce il

Teorema. *Le curve razionali $C_n{}^r$* (con $r < n$) *che ammettono infinite trasformazioni proiettive, sono caratterizzate dal possesso di due singolarità reciproche:*

$$[\nu, \nu_1, ... \nu_{r-1}] \quad \text{e} \quad [\nu_{r-1}, \nu_{r-2}, ... \nu]$$
$$(\nu + \nu_1 + ... + \nu_{r-1} = n).$$

Queste curve ammettono un gruppo continuo ∞^1, G, di trasformazioni proiettive che lasciano fermi i due punti, e — nel caso che le due singolarità abbiano uguali caratteri — anche ∞^1 trasformazioni involutorie che permutano i due punti singolari: in tal caso si ha un *gruppo misto* ∞^1 di omografie trasformante in sè la $C_n{}^r$, il prodotto di due delle involuzioni suddette costituendo un'omografia del gruppo continuo G.

I numeri $\nu, \nu_1, ... \nu_{r-1}$ (la cui somma uguaglia n), possono ricevere valori interi e positivi arbitrari, ma non debbono avere un divisore comune, se si escludono le curve multiple.

Esempi.

Per $n = 3$ abbiamo le cubiche piane dotate di una cuspide e di un flesso; e poichè ogni cubica con cuspide possiede sempre un flesso, concluderemo che « ogni cubica piana dotata di cuspide ammette ∞^1 trasformazioni proiettive » (L. 3°, §§ 24-25, vol. II, pgg. 194 e 202).

Per $n=4$ si hanno ancora nel piano quartiche con ∞^1 trasformazioni proiettive, caratterizzate dal possesso di una cuspide del terz'ordine e di un punto di ondulazione (tangente a contatto quadripunto). Non vi sono altre quartiche irriducibili con infinite trasformazioni proiettive, poichè queste si riducono a coniche doppie. Qui vale la pena di osservare che « ogni curva piana della nostra famiglia con singolarità autoreciproca, risulta d'ordine $n=2m$ e si riduce ad una conica *m-pla* »; così non esistono nel piano curve irriducibili d'ordine $n>2$ con infinite trasformazioni involutorie.

Passiamo a ricercare le quartiche gobbe (di S_3) con ∞^1 trasformazioni proiettive: esse sono di due famiglie:

1) quartiche gobbe dotate di due tangenti di flesso: $\nu=1,\ \nu_1=2,\ \nu_2=1$;

2) quartiche gobbe dotate di una cuspide ordinaria e di un piano stazionario, con contatto quadripunto:

$$\nu=2,\quad \nu_1=1,\quad \nu_2=1.$$

Le quartiche della prima famiglia posseggono, oltre le trasformazioni del gruppo continuo, anche ∞^1 trasformazioni involutorie: si sono presentate a CAYLEY (1), e sono poi state studiate da CREMONA (2), BERTINI (3), WEYR (4), DEL RE (5), ecc.

Le quartiche con cuspide (che posseggono di conseguenza un piano stazionario e appartengono alla seconda famiglia), sono state notate da KLEIN e LIE nella citata nota dei *Comptes rendus* (1870) (6).

Nota. Per chi ricordi la teoria delle singolarità delle curve, sviluppata nel L. 4° (cfr. in ispecie i §§ 7, 32), conviene aggiungere che la singolarità qui designata con $[\nu\ \nu_1 \ldots\ \nu_{r-1}]$ è perfettamente caratterizzata dall'ordine ν del ramo e dalle sue successive classi, i numeri ν non ammettendo alcun divisore comune: infatti, in tale ipotesi, il procedimento per la ricerca del m. c. d. $(\nu\ \nu_1 \ldots\ \nu_{r-1})$, secondo l'algoritmo da noi indicato,

(1) Quarterly Journal, vol. 7.
(2) Ist. Lombardo, 1868.
(3) Ist. Lombardo, 1872.
(4) Ist. Lombardo, 1871.
(5) Accad. Torino, 1887.
(6) Cfr. CREMONA, ibidem, t. 54.

fornisce *tutti* i punti multipli infinitamente vicini all'origine del ramo. In particolare ciò vale per le curve piane:

$$x = t^m \qquad y = t^n \qquad\qquad (n > m),$$

ovvero

$$x^n = y^m,$$

con m e n primi fra loro, dove la determinazione dei punti multipli infinitamente vicini ai due punti singolari (origine e punto all'infinito dell'asse y) dipende dagli sviluppi in frazione continua di $\frac{n}{m}$ e di $\frac{m}{n}$.

Abbiamo trovato che le curve razionali di un S_r dotate di infinite trasformazioni proiettive, ammettono un gruppo continuo di trasformazioni siffatte. Perciò alle dette curve debbono far riscontro i gruppi continui di proiettività sopra la retta e, quando siano determinati tali gruppi, si potranno costruire le curve corrispondenti ricercandone le g_n^r invarianti.

Indichiamo brevemente la costruzione dei gruppi continui di proiettività sopra la retta nella seguente

Nota. Definiamo come *gruppo continuo di proiettività* (o di trasformazioni) una serie Γ che soddisfi alle proprietà seguenti:

a) Il prodotto $\pi\tau$ di due proiettività π e τ di Γ appartiene a Γ;

b) insieme alla proiettività π appartiene a Γ anche la sua inversa π^{-1};

c) le proiettività di Γ dipendono in modo continuo e analitico da un numero finito di parametri (reali o complessi).

Ciò posto:

Ogni gruppo continuo di proiettività binarie, che non coincida col gruppo totale ∞^3, è:

1) *il gruppo ∞^1 delle proiettività che lasciano fermi due punti (distinti o infinitamente vicini);*

2) *il gruppo ∞^2 delle proiettività che lasciano fermo un punto.*

Questo teorema di Sophus Lie [1], si può dimostrare brevemente, in modo sintetico, come segue.

[1] Cfr. p. es. Lie-Scheffers: « Vorlesungen über continuierliche Gruppen ». Lipsia, 1893, Kap. 5.

1) Entro un gruppo ∞^1 esiste insieme ad una proiettività π, la sua inversa π^{-1}, e quindi anche la proiettività identica $\pi\pi^{-1}=1$; perciò, vicino a questa, si troverà una proiettività infinitesima ω, che, per ripetizione, genera l'intiero gruppo: i due punti uniti di ω sono dunque uniti per tutte le proiettività del gruppo ∞^1.

Il ragionamento precedente si chiarisce, traducendolo in forma analitica. Una proiettività binaria può rappresentarsi sotto una delle due forme canoniche

$$x' = a \cdot x \qquad \text{(tipo iperbolico)}$$
$$x' = x + k \qquad \text{(tipo parabolico)}.$$

Quindi, una proiettività infinitesima ω sarà del tipo:

$$x' = (1 + d\lambda)x$$

ovvero

$$x' = x + d\lambda\,;$$

sicchè — integrando rispetto a λ — si otterranno i due tipi di gruppi ∞^1

$$x' = \lambda x$$
$$x' = x + \lambda\,.$$

Si noti anche che un gruppo ∞^1 può ritenersi come formato dalle *potenze* (¹) di una sua trasformazione; potenze che, nel campo reale, sono ad esponente intero fratto o irrazionale, e che occorre poi estendere al campo complesso.

2) Se Γ è un gruppo ∞^2 di proiettività sopra la retta, fissando, in questa, un punto generico P, si determina un sottogruppo ∞^1 di Γ, che può designarsi con Γ_p. Ora Γ_p sarà un gruppo continuo, ovvero (constando di più serie continue una delle quali contenente l'identità) conterrà un gruppo continuo ugualmente di dimensione 1, che, oltre a P, dovrà lasciare fermo un secondo punto P'. Si possono fare tre ipotesi:

a) Che P' sia un punto fisso, cioè un punto unito per tutte le proiettività di Γ;

b) che P' sia distinto da P e vari con esso, nel qual caso P e P' saranno coniugati in una involuzione invariante per Γ;

(¹) Cfr. F. Enriques: « G. Proiettiva », Appendice.

c) che P' coincida con P, qualunque sia P, le proiettività di Γ essendo tutte paraboliche.

Ma l'ipotesi *b)* resta esclusa dall'osservare che le proiettività di Γ lascierebbero fermi i due punti doppi dell'involuzione invariante, e quindi sarebbero ∞^1 anzichè ∞^2. D'altra parte si esclude l'ipotesi *c)*, osservando che la moltiplicazione di due proiettività paraboliche sopra la retta dà luogo, in generale, ad una proiettività non parabolica, dimodochè gli ∞^1 gruppi parabolici della retta, sono contenuti soltanto nel gruppo totale ∞^3 e non in un gruppo ∞^2.

Resta dunque possibile solo l'ipotesi *a)*, e per conseguenza ogni gruppo ∞^2 Γ è costituito dalle proiettività che lasciano fermo un punto P'. c. d. d.

Osserveremo che la dimostrazione data richiama la analiticità che abbiamo posto nella definizione dei gruppi, ed essenzialmente là dove si assume che la corrispondenza biunivoca $(P\,P')$ sia proiettiva (involutoria). Ma è facile convincersi che codesta ipotesi non costituisce in realtà una condizione restrittiva per le nostre ricerche, giacchè il gruppo ∞^1 di proiettività essendo per sua natura analitico (anzi lineare), i gruppi che vengono generati dalla moltiplicazione di gruppi ∞^1 dovranno *a priori* resultare analitici.

Dopo avere così determinato i gruppi continui di proiettività sopra la retta, accenneremo pure rapidamente al problema di costruirne le g_n^r invarianti.

Anzitutto è chiaro che il gruppo totale ∞^3 non lascia invariata nessuna g_n^r per $r < n$, giacchè lascierebbe invariato anche il gruppo dei suoi punti $(r+1)$-*pli*.

In secondo luogo si può provare che una g_n^r per $r < n$ non può essere neppure invariante per un gruppo ∞^2 che lasci fermo un punto P, fuori del caso che la g_n^r stessa consti di una g_r^r cui si aggiunga il punto fisso P contato $n - r$ volte. L'asserto si prova considerando ancora il gruppo dei punti $(r+1)$-*pli* della g_n^r, che sono in numero di $(r+1)(n-r)$ (cfr. § 9, pag. 69). Infatti si verifica che se il punto P deve assorbire più di $n - r$ punti $(r+1)$-*pli* della g_n^r esso deve essere fisso per la g_n^r medesima, perocchè un punto n-*plo* non fisso assorbe soltanto $n - r$ punti $(r+1)$-*pli* (cfr. § 9, Nota); pertanto se una g_n^r con $n > r$, è invariante per tutte le proiettività che lasciano fermo il punto P, si deduce che P

deve figurare come punto fisso della g_n^r, e — riferendosi poi alla serie residua — si vede che P dovrà staccarsi esattamente $n-r$ volte.

Da ciò risulta spiegato il motivo per cui non esistono curve razionali dotate di gruppi ∞^2 di trasformazioni proiettive (all'infuori delle curve normali che ne posseggono ∞^3). È poi facile vedere che l'analisi delle g_n^r invarianti per un gruppo ∞^1 di proiettività binarie, che lasci fermi due punti distinti, riporta ai tipi di curve razionali che abbiamo innanzi determinati come proiezioni della curva normale.

25. Nota sulle curve razionali con un numero finito di trasformazioni proiettive e sulla teoria generale delle quartiche gobbe di seconda specie. — Nel precedente paragrafo si è trattato delle curve di genere zero con infinite trasformazioni proiettive; ma i metodi che ci hanno pôrto la soluzione del problema, possono essere applicati anche alla determinazione delle curve di genere zero con un numero finito di trasformazioni proiettive. Appunto di questa determinazione vogliamo occuparci in questa Nota, che potrà essere lasciata da parte da chi prosegue lo studio delle dottrine connesse colla geometria generale sopra le curve di genere p. Ma, per amore di semplicità, ci riferiremo a casi particolari elementarissimi, trattando delle curve di terzo e di quarto ordine; l'importanza dello studio che si riferisce a queste ultime risiede sopratutto nella circostanza di recare un contributo alla teoria generale delle quartiche gobbe di seconda specie, sia perchè a queste stesse curve appartengono gruppi di trasformazioni proiettive, sia perchè ogni quartica siffatta può venire proiettata da un particolar centro in una quartica piana notevolissima, che ammette un gruppo ottaedrico di trasformazioni proiettive.

Il problema generale posto in questa Nota si riduce alla ricerca delle g_n^r sopra una retta, che sono invarianti per un gruppo finito Γ di trasformazioni proiettive. La conoscenza dei tipi dei gruppi Γ, che sono stati ricondotti ai tipi dei poliedri regolari (L. 2°, §§ 10 e 11), è il punto di partenza della ricerca. E, per quanto concerne la ricerca generale delle g_n^r invarianti, avvertiremo soltanto il partito che si può trarre dalla relazione di *armonia*, fra gruppi di n punti, mercè cui ad ogni gruppo di n punti viene *associata* una g_n^{n-1} covariante che a sua volta determina il gruppo, e quindi ad ogni g_n^r viene *associata* una g_n^{n-r-1}.

Date due forme binarie

$$f = a_x^n \quad \varphi = b_x^n,$$

resta definito un invariante simultaneo bilineare, che è l' *armonizzante*:

$$(ab)^n$$

(cfr. L. 1°, § 7, ed anche il L. 3°, § 9, ove si discorre delle forme ternarie).

La relazione

$$(ab)^n = 0$$

esprime che i due gruppi di n punti $f = 0$ e $\varphi = 0$ sono *armonici*, e — essendo dato il gruppo f — definisce la *serie lineare armonica* (o *associata*) g_n^{n-1}, i cui gruppi sono combinazioni lineari dei punti di f contati n volte; mentre questa serie, a sua volta, determina f come l' insieme dei suoi punti n-*pli*. La relazione di armonia fra un gruppo di n punti e una g_n^{n-1} traduce la relazione di *polarità* relativa alla $C_n{}^n$, dove ad un iperpiano X corrisponde il punto A comune agli iperpiani osculatori nelle intersezioni di X con $C_n{}^n$ (A essendo qui concepito come centro d' una stella d' iperpiani).

Per n dispari, posto $f = \varphi$, l' armonizzante si annulla identicamente (cfr. L. 1°, § 7) e così la polarità rispetto alla $C_n{}^n$ è una *polarità nulla*, in cui ogni punto appartiene all' iperpiano polare; il che non accade per n pari.

Si aggiunga l' osservazione esplicita (di cui avremo luogo di valerci nel seguito) che la g_n^{n-1} associata ad un gruppo di n punti costituito da un punto n-*plo*, è quella che possiede questo punto come fisso. Di conseguenza la g_n^{n-2} con due punti fissi viene associata alla g_n^1 ciclica, determinata da due punti uniti contati n volte.

Ora per avere, sulla retta, le g_n^{n-1} invarianti rispetto ad un gruppo finito di proiettività, Γ, converrà costruire le g_n^{n-1} armoniche rispetto ad una n-*pla* di punti $(A_1 A_2 \ldots A_n)$ invariante rispetto al Γ medesimo. Dato il significato della relazione di armonia i punti $(A_1 A_2 \ldots A_n)$ saranno i punti n-*pli* della g_n^{n-1}.

In generale la ricerca delle g_n^r invarianti rispetto a Γ, procederà insieme con quella delle g_n^{n-r-1}; così in ispeci quella delle g_n^{n-2} si ricondurrà alla ricerca delle g_n^1 associate.

In ogni caso poi, opportuni avvedimenti (in rapporto alla nota composizione dei gruppi Γ) permette di ricondurre il problema alla considerazione di gruppi di punti invarianti rispetto al Γ stesso.

Noi ci limiteremo ad illustrare la cosa riferendoci ai casi $n=3, 4$.

Anzitutto, per $n=3$, si tratta di determinare le g_3^2 della retta, invarianti per un gruppo finito Γ di proiettività, alle quali rispondono cubiche razionali del piano, dotate parimente di un numero finito di trasformazioni proiettive.

Ma poichè ogni g_3^2 è associata, per armonia, ad una terna di punti ABC della retta, si vede che in realtà ogni g_3^2 è trasformata in sè dal gruppo Γ_6 (del tipo della doppia piramide triangolare) costituito dalle proiettività che lasciano invariata la terna anzidetta; e non è possibile ampliare il gruppo Γ_6 senza che due punti della terna vengano a coincidere, nel qual caso il gruppo stesso diventa continuo ∞^1.

Di conseguenza: *ogni cubica piana dotata di punto doppio* (cioè razionale) *ammette in generale un gruppo* Γ_6 *di trasformazioni proiettive.* Si è visto invero (nel L. 3°, § 24, vol. II, pag. 193) che la detta cubica ammette sei trasformazioni proiettive, che scambiano fra loro i tre flessi della curva, appartenenti ad una retta. E qui vi è luogo ad osservare che questi tre flessi non sono altro che i tre punti omologhi ai punti della retta denominati con A, B, C: la proprietà che tali flessi sieno allineati risponde alla proprietà dei gruppi della retta, formati da un numero dispari di punti, di essere armonici a se stessi. Infine, se due flessi A e B vengono a coincidere, ciò porta che si sovrappongano al punto doppio, che diventa allora una cuspide, e la curva acquista quindi ∞^1 trasformazioni proiettive.

Ora, passando al caso della g_n^r con $n=4$, osserveremo anzitutto che: la più generale g_4^3, sopra la retta, si può ritenere definita come serie associata (secondo la relazione di armonia) a una quaterna di punti, che sono i punti quadrupli della g_4^3.

Interpretiamo quest' osservazione riferendoci alla curva gobba del quart'ordine (dello spazio ordinario) che si ottiene come immagine della g_4^3, sulla quale avremo dunque da considerare i quattro piani stazionari (a contatto quadripunto) e i relativi punti di contatto, che si designano similmente col nome di « punti stazionari ». Avremo pertanto

La quartica gobba di seconda specie (¹) *resta proiettivamente definita dalla quaterna dei quattro punti stazionari, e possiede come invariante assoluto l'invariante (o il birapporto) di essi sopra la curva* (che è quello dei punti omologhi sopra una retta rappresentativa).

Si designi con K la nostra quartica gobba di seconda specie, e con $ABCD$ la quaterna dei punti stazionari. Le trasformazioni proiettive di codesta quaterna sopra la curva (cioè sulla retta) daranno trasformazioni omografiche della K in se stessa, e reciprocamente. Pertanto avremo il teorema:

La quartica gobba di seconda specie ammette in generale un gruppo trirettangolo, Γ_4, di trasformazioni proiettive, costituite da tre involuzioni permutabili e dall'identità; si ha un gruppo più vasto, e precisamente un *gruppo Γ_8 del tipo della doppia piramide quadrata*, ovvero un *gruppo tetraedrico Γ_{12}*, quando la *quartica* sia *armonica* od *equianarmonica*, cioè quando sia tale la quaterna $ABCD$.

Ma è importante notare che, *la quartica armonica è quella dotata di punto doppio*, appartenente ad un cono quadrico, che viene così caratterizzata (ARMENANTE, 1874). Per dimostrarlo, si consideri sopra una retta la g_4^3 dotata di una coppia neutra MN, la quale si lascia definire mediante la g_4^2 contenente MN come punti fissi e mediante un suo punto quadruplo A: la quaterna armonica a codesta g_4^3 è la quaterna appartenente alla g_4^1 associata della g_4^2, che contiene A, e questa g_4^1 è la involuzione ciclica del quart' ordine, definita dalle quaterne M^4, N^4, e perciò la quaterna $ABCD$ che si trova entro l'involuzione suddetta, ha il birapporto armonico.

Avvertiremo ancora che il caso particolare in cui il birapporto $(ABCD)$ di una quartica K si annulli, coincidendo due dei punti suddetti, e quindi due piani stazionari, corrisponde all'ipotesi che la K possieda una *tangente di flesso* (tripunta), come bene appare considerando la K quale proiezione della quartica razionale normale di S_4. E per semplicità *escluderemo*

(¹) Cfr. L. 3°, § 18, vol. II, pagg. 145, 149.

nel seguito questo caso particolare. *A fortiori* restano escluse le particolarizzazioni ulteriori del detto caso, cioè i tipi in cui coincidano *tre* dei punti A, B, C, D, ovvero *due coppie* di essi: il primo tipo è la quartica con cuspide, e il secondo la quartica con due flessi, curve che — già vedemmo nel precedente paragrafo — ammettono infinite trasformazioni proiettive.

Ora cerchiamo di approfondire lo studio delle involuzioni del gruppo Γ_4, che appartengono in generale alla quartica K. È chiaro anzitutto che la trasformazione omografica corrispondente a una di queste, per es. all'involuzione $(AB)(CD)$, non può essere un'omologia. Quest' ipotesi porterebbe che la K sia sopra un cono quadrico le cui generatrici la seghino in due punti fuori del vertice; ma invece una K che venga a stare sopra un cono (dovendo segare in tre punti le generatrici) acquista come punto doppio il vertice del cono, ed ha solo una intersezione con le generatrici, fuori di questo.

Dunque le omografie involutorie π_1, π_2, π_3, che subordinano sulla K le involuzioni del Γ_4, sono omografie biassiali (cfr. per es. F. Enriques, « Lezioni di Geometria Proiettiva » — Bologna, Zanichelli, 1920 — § 96); ed a cagione della loro permutabilità gli assi di ciascuna π sono incidenti a quelli delle altre due, e perciò essi costituiscono le tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro, che designeremo col nome di *tetraedro principale* della K.

Procedendo innanzi nella considerazione di questo tetraedro, si riconosce che tre spigoli di esso, uscenti da un vertice, sono corde della quartica. Infatti, si considerino i punti doppi dell' involuzione $(AB)(CD)$ subordinata da π_1 sulla K; questi punti verranno designati con M_1 e N_1, e si dimostrerà che essi non possono appartenere a due assi diversi della π_1, e però che la loro congiungente $M_1 N_1$ è precisamente un asse della nostra omografia. Per raggiungere lo scopo si osservi che se M_1 ed N_1 appartengono ad assi diversi di π_1, questi assi, sghembi fra loro, sono le tangenti m_1, n_1, in M_1, N_1, giacchè un piano passante per uno di essi è unito per π, e sega quindi la K in un numero pari di punti variabili. Ciò posto il piano che proietta da m_1 il punto unito N_1, deve toccare la K in N_1, ma ciò implica l' incidenza dei due assi m_1 e n_1, il che è assurdo.

Ora, poichè le tre coppie M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, costituite dai punti doppi delle involuzioni del Γ_4, sono scambievolmente armoniche e quindi senza punti comuni, si deduce che le tre corde M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, a due a due incidenti, non possono giacere in un piano, e quindi che esse passano per un vertice O del tetraedro principale.

Le tre corde di K passanti per O, M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, godono della proprietà che: ciascuna corda è l' intersezione dei piani osculatori nei suoi punti di appoggio. Infatti il piano osculatore in M_1, essendo unito per l' omografia π_1, deve incontrare ulteriormente K in un punto unito, e questo deve essere N_1, poichè non può coincidere con M_1 che, altrimenti, sarebbe un punto stazionario.

Aggiungasi che l' anzidetta proprietà caratterizza le nostre corde. Infatti i punti M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 si ottengono sopra K come punti uniti della corrispondenza [9, 1], quadrato della corrispondenza [3, 1] che intercede fra un punto P e il suo tangenziale (intersezione del piano osculatore in P) tolti i 4 punti stazionari.

Appunto la considerazione precedente ha condotto Bertini (1872) a riconoscere l' esistenza di tre corde della quartica di seconda specie, *intersezioni dei piani osculatori nei punti di appoggio*, cui ha dato il nome di *corde principali*: inoltre lo stesso geometra ha riconosciuto analiticamente che le tre corde anzidette passano per un punto, che designeremo col nome di *centro di Bertini*.

Riprendiamo la considerazione del gruppo trirettangolo Γ_4, rispetto a cui la quartica K è invariante, per avvertire che esso definisce su K una g_4^1, ogni quaterna della quale è costituita dai trasformati di un suo punto; tale g_4^1 è evidentemente quella delle quaterne che hanno con $ABCD$ a comune il medesimo covariante sestico T formato dalle tre coppie M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (L. 2°, § 9, vol. I, pag. 215). Secondo alcuni autori la detta g_4^1 prende il nome di *involuzione sizigetica*.

È chiaro che l' involuzione sizigetica g_4^1 non è tutta segata da piani, perchè la quaterna $ABCD$, associata alla g_4^3, delle sezioni piane di K, non appartiene a questa g_4^3, essendo 4 un numero pari (cfr. pag. 215); perciò le nominate g_4^1 e g_4^3 (contenute nella g_4^4 completa) avranno una quaterna a comune. In altre parole vi sarà *una* quaterna dell' involuzione sizigetica g_4^1, segata su K da un piano, che naturalmente dovrà essere unito per le omografie $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ del Γ_4, ed anzi dovrà costituire la faccia del tetraedro principale opposta al centro di Bertini.

Infatti gli altri piani uniti per il Γ_4, facce del tetraedro, segano K, non già in una quaterna della g_4^1 sizigetica, bensì in due coppie M, N del suo covariante T.

Riassumendo, si vede come il tetraedro principale della quartica K riesca definito a partire dai quattro punti stazionari $ABCD$, per mezzo delle tre corde principali, congiungenti le coppie del covariante T e concorrenti nel centro di Bertini, e per mezzo della quaterna piana della g_4^1 sizigetica che porge la faccia opposta al detto vertice.

Aggiungiamo che il centro Bertini acquista una speciale importanza per riguardo alla proiezione piana della quartica gobba fatta da esso, giacchè si ottiene così una curva piana di tipo proiettivamente determinato che impareremo a caratterizzare nell'analisi delle quartiche piane dotate di trasformazioni proiettive, di cui passiamo ad occuparci. Dopo questa analisi ritorneremo, dunque, alla teoria generale delle quartiche gobbe di seconda specie per esaminare la prospettiva di tali curve in relazione al centro di Bertini e dedurne anche alcune proprietà di *forma* delle curve stesse, considerate dal punto di vista della *realità*.

Frattanto termineremo il discorso sopra la curva gobba K, indicando un'altra interpretazione del suo invariante assoluto, contenuta in un bel

Teorema di STUDY [1]. *Le tangenti alla quartica gobba di seconda specie tagliano i quattro piani stazionarii in quattro punti formanti un birapporto costante, che eguaglia precisamente quello dei quattro punti stazionarii sopra la curva.*

Per dimostrare il teorema si cerchi anzitutto quante sono le tangenti di K che segano le facce $\alpha\beta\gamma\delta$ d'un tetraedro T (prese in un certo ordine) secondo un dato birapporto c, appartenendo così al *complesso* (di secondo grado) detto *tetraedrale* [2], definito da tale condizione. Si trova che il numero delle tangenti anzidette è 12, essendovi 6 tangenti di K che si appoggiano ad una retta (nei 6 punti in cui questa sega la superficie sviluppabile circoscritta a K) e quindi $6 \cdot 2 = 12$ tangenti di K che si appoggiano a uno spigolo di T ($\alpha\beta$ o $\gamma\delta$) per cui riesce $c = 1$.

(1) Atti di Lipsia, 1886.

(2) Del complesso tetraedrale (studiato da REYE) avremo occasione di discorrere più avanti: § 29.

Ora si consideri il particolare tetraedro $T = \alpha\beta\gamma\delta$, formato dai quattro piani stazionarii di K. Uno spigolo p di questo T, intersezione dei due piani α e β, ha due contatti tripunti colla superficie sviluppabile circoscritta a K: infatti α contiene tre tangenti successive di K che vanno a incontrare p in tre punti infinitamente vicini, e così similmente β. Si deduce che le sole tangenti di K per cui il birapporto $c = 1$ — cioè incidenti allo spigolo $\alpha\beta$ o $\gamma\delta$ di T — sono quelle tangenti nei punti stazionarii di K, che giacciono in una faccia di T: per le quali c diventa indeterminato. E queste particolari tangenti assorbono tutte le 12 soluzioni del problema di trovare le tangenti a K per cui c assume un valore generico assegnato.

Dunque una tangente generica di K sega i piani del nostro tetraedro T secondo un certo birapporto a cui rispondono più che 12 soluzioni del detto problema; e di conseguenza tutte le tangenti di K segano le facce di T secondo lo stesso birapporto.

Resta a vedere che questo è eguale al birapporto dei quattro punti stazionarii A, B, C, D in cui la K è osculata da α, β, γ, δ (birapporto calcolato sopra K).

A tal uopo si consideri il birapporto y dei quattro punti sezioni dei piani stazionarii colle tangenti a K, come funzione del nominato birapporto $x = (ABCD)$, invariante di K: sarà y funzione algebrica e univoca — e però razionale — di questo x, che vale a determinare proiettivamente la quartica (indicando altresì un certo ordine dei suoi punti stazionarii). Ma si può aggiungere che resulta $y = 0, \infty, 1$ allora e allora soltanto che — coincidendo (due punti stazionarii di K e quindi) due facce di T — si ha rispettivamente $x = 0, \infty, 1$.

Ciò posto, affinchè y si annulli solo per $x = 0$, e non per altri valori — finiti o infiniti — di x, si dovrà avere

$$y = a \cdot x^n;$$

e perchè si abbia $y = 1$ solamente per $x = 1$, dovrà pure essere

$$a = 1, \quad n = 1,$$

cioè

$$y = x. \qquad \text{c. d. d.}$$

Proponiamoci ora di determinare le g_4^2 invarianti per un gruppo finito Γ proiettività sulla retta, con lo scopo di ottenere le quartiche piane di genere zero che ammettono un numero finito di trasformazioni proiettive. Dato lo scopo nostro, riterremo *escluse* da questo studio le g_4^2 che sono dotate di punti fissi o composte con le coppie di una g_2^1, ed anche quelle che ammettono infinite trasformazioni proiettive di cui tratteremo in appresso.

Le g_4^2 invarianti per Γ sono associate, secondo la relazione di armonia, a g_4^1 parimenti invarianti; sicchè converrà appunto ricercare queste ultime.

Poichè in ogni gruppo Γ è sempre contenuto un sottogruppo ciclico, prenderemo le mosse dalla determinazione delle g_4^1 invarianti per un gruppo ciclico Γ_n, d'ordine n, generato da una proiettività π_n. E faremo l'osservazione fondamentale che la π_n opera pure ciclicamente sugli elementi (quaterne) della g_4^1 e così lascia ferme due (o tutte le) quaterne di questa (L. 2°, § 8, vol. I, pag. 198), per modo che le g_4^1 invarianti per Γ_n vengono determinate da due quaterne parimente invarianti. Ciò posto distingueremo i seguenti casi:

1) La g_4^1 sia invariante per una proiettività involutoria π_2 (Γ_n ciclico per $n=2$).

Allora vi sono due specie di quaterne invarianti che — indicando con M e N i punti doppi e con AA', BB', ecc. coppie di punti coniugati — si possono designare con:

$$AA'\ BB', \quad MN\ AA'.$$

Pertanto avremo tre specie di g_4^1 invarianti, determinate da coppie di quaterne dei tipi seguenti:

$$\begin{array}{lll} a) & AA'\ BB', & CC'\ DD'; \\ b) & AA'\ BB', & MN\ CC'; \\ c) & MN\ AA', & MN\ BB'. \end{array}$$

Quest' ultima g_4^1 viene anche determinata dalle quaterne M^3N e MN^3 e perciò ammette le ∞^1 trasformazioni proiettive che lascian fermi M e N; altrettanto accade per la g_4^2 associata (che del resto si potrebbe riconoscere esser composta di tutte le coppie dell' involuzione π_2 prese a due a due).

Quanto alla g_4^1 del tipo a), notiamo che essa risulta composta con le coppie dell' involuzione π_2, e perciò può ritenersi *in generale* del tipo:

$$a') \qquad M^2AA', \quad N^2BB',$$

salvochè essa contenga la quaterna M^2N^2, nel qual caso si ridurrà al tipo:

$$a'') \qquad M^2N^2, \quad A^2A'^2.$$

Ora la g_4^1 del tipo generale a'') appare trasformata in se stessa da altre due involuzioni permutabili

$$(MN)(AB), \quad (MN)(AB')$$

che insieme alla data costituiscono un gruppo trirettangolo Γ_4. Quanto alla g_4^1 del tipo a') si vede che essa è la g_4^1 costituita dalle quaterne che hanno un medesimo covariante sestico T (L. 2°, § 9, vol. I, pag. 205), questo covariante componendosi delle due coppie armoniche MN e AA', e della coppia che le separa armonicamente entrambe. Allora la g_4^1 ammette un gruppo di trasformazioni proiettive Γ_{24} del tipo ottaedrico, costituito dalle trasformazioni che lasciano invariante la nominata sestina di punti: $T=0$. (Cfr. L. 2°, § 10, vol. I, pag. 211).

2) La g_4^1 sia invariante per una proiettività π_3 ciclica del terz' ordine (Γ_n ciclico per $n=3$).

Indicando con MN i punti uniti, e con $AA'A''$, $BB'B''$ ecc. i cicli di π_3, avremo due tipi di quaterne invarianti designati da:

$$MAA'A'', \quad M^2N^2,$$

e quindi tre tipi di g_4^1 invarianti definite dalle coppie di quaterne:

$$a) \qquad MAA'A'', \quad MBB'B'';$$

$$b) \qquad MAA'A'', \quad M^2N^2;$$

$$c) \qquad MAA'A'', \quad NBBB''.$$

Quest' ultima g_4^1 contiene la quaterna M^4 la cui g_4^3 associata possiede M come punto fisso, perciò anche la g_4^2 associata alla nostra g_4^1 possiede M come punto fisso e però deve essere esclusa.

Quanto alla g_4^1 del tipo a) giova avvertire che l' involuzione $(MN)(AB)$ scambia l' uno nell' altro i due cicli $AA'A''$ e $BB'B''$ (trasformando la π_3 nella π_3^{-1}); per conseguenza la nostra g_4^1 è invariante per un gruppo Γ_6 generato dalla π_3 e dalla involuzione predetta, il quale appartiene al tipo della doppia piramide triangolare.

3) La g_4^1 sia invariante per una proiettività π_n ciclica del quart' ordine (Γ ciclico per $n=4$).

Indicando con M e N i punti uniti, e con $AA'A''A'''$, $BB'B''B'''$, ecc. i cicli di π_4, avremo tre tipi di quaterne designati da

$$AA'A''A''', \quad M^3N, \quad M^2N^2$$

e quindi si presentano 5 tipi di g_4^1 determinabili come segue

$a)$ $AA'A''A'''$, $BB'B''B'''$;

$b)$ $AA'A''A'''$, M^3N;

$c)$ $AA'A''A'''$, M^2N^2;

$d)$ M^3N, N^3M;

$e)$ M^3N, M^2N^2.

I casi $a)$, $d)$, $e)$ si scartano perchè la g_4^1 ammette ∞^1 trasformazioni proiettive: per il caso $a)$ ciò appare tostochè si osservi trattarsi della g_4^1 ciclica determinata dalle quaterne M^4, N^4 (del resto la g_4^2 associata possiede i punti fissi MN).

Per il caso $c)$ è da notare che la g_4^1 ammette, oltre la trasformazione ciclica del quart' ordine π_4, tutto un gruppo ottaedrico Γ_{24} che la contiene. Per dimostrarlo osserviamo anzitutto che le tre involuzioni $(AA')(A''A''')$, $(AA'')(A'A''')$, $(AA''')(A'A'')$ lasciano invariata la coppia MN (solo per la seconda sono anche uniti i due punti); infatti basta osservare che l' involuzione $(AA')(A''A''')$ trasforma il ciclo $(AA'A''A''')$ nel ciclo $(A'AA'''A'')=(AA'''A''A')$, e però la π_4 nella π_4^{-1}, che possiede la medesima coppia di punti uniti. Ciò posto la g_4^1 determinata dalle quaterne M^2N^2 e $AA'A''A'''$ sarà quella costituita dalle quaterne invarianti per il gruppo trirettangolo Γ_4 generato dalle involuzioni predette; le quali quaterne posseggono lo stesso covariante sestico T, costituito dalle coppie dei punti doppi MN, $M'N'$, $M''N''$ delle involuzioni medesime (Cfr. L. 2°, § 9, vol. I, pagg. 205-206). Segue quindi che la g_4^1 è invariante per il Γ_{24} ottaedrico che trasforma in se stessa la sestina MN, $M'N'$, $M''N''$, scambiando fra loro le tre coppie che la compongono, separantisi a due a due armonicamente. (Cfr. L. 2°, § 10, vol. I, pag. 211).

4) La g_4^1 sia invariante per una proiettività ciclica π_n con $n \geq 5$. Allora non ci sono altre quaterne invarianti che

quelle composte coi punti uniti MN, e le g_4^1 definite da quaterne siffatte ammettono ∞^1 trasformazioni proiettive.

Esaurito così l'esame dei casi ciclici, passiamo a ricercare le g_4^1 invarianti per gli altri gruppi di proiettività della retta, che ricordiamo essere:

il gruppo trirettangolo Γ_4,

il gruppo della doppia piramide regolare Γ_{2n}, che — per $n=2$ — dà il gruppo trirettangolo Γ_4, e i tre gruppi dei poliedri regolari, tetraedrico Γ_{12}, ottaedrico Γ_{24} e icosaedrico Γ_{60}.

5) La g_4^1 sia invariante per un gruppo trirettangolo Γ_4. Allora essa è anche invariante per una involuzione di punti doppi MN. Ricordiamo che vi sono rispetto a questa due tipi di g_4^1 invarianti (che non ammettono infinite trasformazioni proiettive); queste vengono determinate dalle seguenti quaterne:

a) $M^2AA', \quad N^2BB'$;

b) $AA'BB', \quad MNCC'$;

Ora abbiamo già avvertito che nel caso *a*) la g_4^1 è sempre invariante per un Γ_4 trirettangolo.

Quanto alla g_4^1 del tipo *b*) è chiaro che non vi può essere un' involuzione permutabile con la $I=(MM)(NN)$, che scambi fra loro le due quaterne invarianti di quella. Dunque se la nostra g_4^1 possiede un gruppo Γ_4, le due quaterne definitrici dovranno essere ambedue invarianti rispetto al Γ_4 medesimo; ma in tal caso esisteranno due involuzioni I' e I'', permutabili con la I, che lascian ferma la coppia CC', e — supposto p. es. che I'' scambi CC' — sarà

$$I'=(CC)(C'C'):$$

si deduce che le coppie AA', BB' separano armonicamente la CC'. Viceversa se questa condizione è soddisfatta le due quaterne definitrici della g_4^1 sono invarianti per le operazioni del Γ_4 e così è anche invariante la g_4^1 stessa. Aggiungasi che questa g_4^1 risulta composta con le coppie della involuzione I'' (rispetto a cui si scambiano le coppie AB e $A'B'$, e i punti MN, CC'), sicchè — rispetto alla involuzione I'' — la nostra g_4^1 appare del tipo *a*).

6) La g_4^1 sia invariante per un gruppo Γ_6, del tipo della

doppia piramide regolare. Allora essa è anche invariante per una proiettività ciclica del terz' ordine π_3, con due punti uniti MN. Questa g_4^1 — escludendo il caso 2) c) per il motivo sopra esposto — sarà definita da due quaterne trasformate in se stesse dalla π_3

a) $MAA'A''$, $NBB'B''$

ovvero

b) M^2N^2, $NAA'A''$.

Ora se la g_4^1 deve essere trasformata in se stessa da una involuzione come quella che insieme a π_3 genera il Γ_6, scambiante fra loro i punti uniti M e N, bisogna che questi appaiano simmetricamente nelle quaterne definitrici sopra indicate; per questo motivo resta escluso il caso *b*). L' ipotesi *a*) conduce effettivamente ad una g_4^1 invariante rispetto al Γ_6, come si è già veduto [cfr. caso 4) *a*)].

7) La g_4^1 sia invariante per un gruppo Γ_8 del tipo della doppia piramide quadrata; e quindi anche per una trasformazione ciclica π_4. Richiamando l' analisi del caso 3) e osservando che il tipo *b*) è definito da due quaterne iniziali $AA'A''A'''$ e M^3N, la seconda delle quali contiene i punti MN non simmetricamente, si conclude — come al caso 6) — che un' involuzione trasformante π_4 in π_4^{-1}, non lascia ferma la data g_4^1, che perciò non può ammettere un gruppo Γ_8.

Rimane la g_4^1 del tipo 3) c) che già si è vista possedere un gruppo ottaedrico Γ_{24} (contenente il Γ_8 della doppia piramide quadrata).

8) Non esistono g_4^1 invarianti per un gruppo Γ_{2n} appartenente al tipo della doppia piramide regolare per $n > 4$, giacchè in Γ_{2n} vi è una π_n ciclica d' ordine n [cfr. caso 4)].

9) La g_4^1 sia invariante per un gruppo tetraedrico Γ_{12}. Allora essa è anche invariante per un gruppo ciclico Γ_3. Ma abbiamo trovato due g_4^1 siffatte: quella del tipo 2) *a*) e quella del tipo 2) *b*); quest' ultima possiede un punto fisso M e perciò non può essere trasformata in se stessa dalle tre involuzioni permutabili che entrano in un Γ_{12}, le quali dovrebbero avere M come punto doppio.

Quanto alla g_4^1 del tipo 2) *a*) abbiamo visto che essa ammette un gruppo di trasformazioni Γ_6 del tipo della doppia piramide triangolare; se il gruppo che lascia invariata la g_4^1 deve contenere il Γ_{12} esso dovrà diventare un gruppo più ampio del Γ_{12}, poichè il Γ_{12} non contiene il Γ_6 (risulta dal seguito che esso diventa un Γ_{24} ottaedrico).

10) La g_4^1 sia invariante per un gruppo Γ_{24} ottaedrico. Allora essa è anche invariante per un gruppo Γ_8 del tipo della doppia piramide quadrata, e perciò si riduce al 3) *c*), che già vedemmo contenere sempre un Γ_{24}.

11) Una g_4^1 (che non ammetta ∞^1 trasformazioni proiettive) non può essere invariante per un gruppo icosaedrico Γ_{60}, giacchè questo contiene trasformazioni cicliche del quint' ordine.

Riassumiamo i risultati ottenuti enumerando i ***sei tipi*** di g_4^1 invarianti per un gruppo di trasformazioni proiettive, a cui rispondono — come immagini delle g_4^2 associate — ***quartiche piane con un numero finito di trasformazioni proiettive***:

α) g_4^1 invariante per una (e in generale per una sola) ***involuzione***; si ottiene combinando linearmente una quaterna costituita da due coppie di punti coniugati e una quaterna costituita da altri due punti coniugati e dai punti doppi:

$$AA'BB', \quad MNCC'.$$

Risulta da questa definizione che la g_4^1 (e quindi la quartica corrispondente) possiede ***due invarianti assoluti.***

β) g_4^1 invariante per una ***proiettività ciclica del terz' ordine*** (e non per un gruppo più ampio del Γ_3 da essa generato). Designando con M e N i punti uniti di questa e con $AA'A''$ un ciclo, si può definire mediante le quaterne

$$MAA'A'', \quad M^2N^2.$$

Non vi sono invarianti assoluti.

γ) g_4^1 invariante per una ***proiettività ciclica del quart' ordine*** (e non per un gruppo più ampio del relativo Γ_4); si definisce analogamente mediante le quaterne

$$M^3N, \quad AA'A''A'''.$$

Non vi sono invarianti assoluti.

È ovvio che questo caso si presenta come caso particolare del tipo α).

δ) g_4^1 invariante per un ***gruppo trirettangolo*** (e non per un gruppo più ampio). Si può definire prendendo ad arbitrio una quaterna ed unendo un' altra quaterna formata da due coppie del covariante T della prima.

Esiste *un invariante assoluto*, che è dato, per es., dall' invariante della quaterna da cui siamo partiti per la sua costruzione.

ε) g_4^1 invariante per un *gruppo* Γ_6 *del tipo della doppia piramide triangolare* (e non, in generale, per un gruppo più ampio). Si ottiene partendo da un' involuzione ciclica del terz' ordine, mediante due quaterne formate dai punti uniti presi insieme a due cicli:

$$MAA'A'', \quad NBB'B''.$$

Possiede un invariante assoluto.

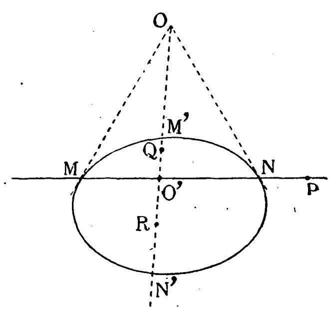
ζ) g_4^1 invariante per un *gruppo ottaedrico* Γ_{24}. È la g_4^1, che alcuni autori chiamano sizigetica, costituita dalle quaterne che posseggono lo stesso covariante sestico T.

Non possiede invarianti assoluti.

Conviene aggiungere che il tipo ζ) si presenta come caso particolare di γ) e di ε), in corrispondenza ai sottogruppi Γ_4 ciclico e Γ_6 contenuti nel Γ_{24}, ed anche del tipo δ), sebbene a prima vista parrebbe che i due casi incontrati nella discussione delle g_4^1 invarianti per un Γ_4 trirettangolo (una delle quali riesce sempre invariante per un Γ_{24}) si escludano l' un l' altro. In realtà come è possibile che la g_4^1 definita da una quaterna di punti Q_4 e da *due* coppie di punti MN, $M'N'$ del suo covariante T, separanti armonicamente due coppie di Q_4, si riduca ad una g_4^1 (sizigetica) definita da una quaterna e da *una* coppia di punti del covariante T contata due volte? Si riconosce che ciò può accadere, quando la Q_4 si riduca ad una coppia di punti doppi (Q_2^2) passando al limite in un modo determinato, diguisachè le due coppie MN e $M'N'$ vengano a coincidere; allora la g_4^1 limite riesce determinata da Q_2^2 e da (M^2N^2), e perciò appare come la g_4^1 sizigetica delle quaterne il cui covariante T è costituito da Q_2, (MN), e dalla coppia che separa armonicamente queste due.

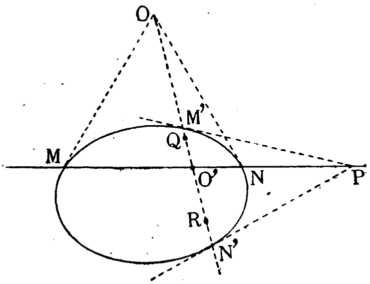
Ora la definizione data delle g_4^1 invarianti per un gruppo finito di proiettività, permette di scriverne le equazioni e quindi anche di ottenere le quartiche corrispondenti. Ma ci dispenseremo da questi sviluppi, che non offrono alcuna difficoltà tecnica, e che possono dare motivo di esercitazione allo studioso. Preferiamo mettere in luce il carattere geometrico delle quartiche dotate di tre punti doppi, con trasformazioni proiettive in se stesse, in rapporto alla figura elementare costituita da una conica e da tre punti del piano fuori di essa; in tal guisa si otterranno tutti i tipi precedenti salvo i tipi β) e γ) che corrispondono a quartiche dotate di un punto triplo, di cui scriveremo direttamente le equazioni. Ordunque si consideri una quartica dotata di tre punti doppi P, Q, R, con un gruppo Γ di trasformazioni proiettive. Il Γ lascia invariato il triangolo PQR, e quindi la rete delle coniche passanti per i suoi vertici. Perciò, con una trasformazione quadratica ω che muti P, Q, R nei lati opposti QR, RP, PQ, la quartica verrà mutata in una conica; e siccome una proiettività π di Γ lascia invariata la rete di coniche per P, Q, R, la sua trasformata $\omega\pi\omega^{-1}$ lascia invariata la rete delle rette e quindi è un' omografia. Così dunque avremo una conica invariante per un gruppo di omografie, trasformato di Γ, che ammette pure il triangolo invariante PQR: per semplicità torneremo a designare con Γ l' anzidetto gruppo trasformato.

Da quanto precede appare che le quartiche con tre punti doppi, dotate di trasformazioni proiettive, corrisponderanno alle coniche K invarianti per un gruppo di trasformazioni proiettive che lasciano fermo un triangolo PQR, i cui vertici non appartengono alla conica. E, l' analisi dei casi possibili, conduce subito ai seguenti tipi:

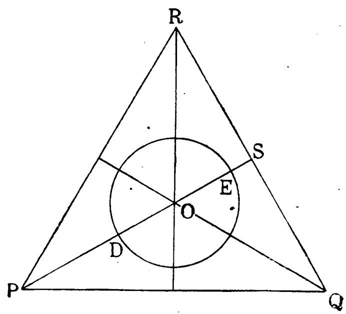


α) Triangolo PQR trasformato in sè da un' omologia armonica che lascia invariante K. Si costruisce prendendo in modo generico due punti Q e R coniugati rispetto a K, e ponendo P sull' asse di una delle due omologie armoniche che trasformano in se stessa la K, scambiando i punti Q e R. Appaiono di qui i due invarianti assoluti del tipo α) che si possono esprimere come i birapporti $(M'N'QR)$, $(MNPO')$.

δ) Triangolo PQR, trasformato in sè da un gruppo trirettangolo Γ_4. Si ottiene come caso particolare del precedente ponendo P nel polo della retta QR. Così appaiono le tre trasformazioni involutorie del Γ_4, una delle quali ha per centro P e per asse QR, mentre le altre due hanno per centri O, O' e per assi rispettivamente $O'P$, OP, scambiando fra loro i punti QR. Naturalmente si ha qui un solo invariante assoluto, cioè il birapporto $(M'N'QR)$.



ε) Triangolo PQR trasformato in sè da un gruppo Γ_6 del tipo della doppia piramide triangolare. Per costruire questo tipo conviene riferirsi al caso metrico di un cerchio K di cui si considerino le rotazioni di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$ intorno al centro O. Allora dovremo prendere come triangolo PQR un triangolo equilatero di centro O. Appaiono qui le operazioni del Γ_6, che sono: le rotazioni di $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ intorno ad O, e le simmetrie intorno agli assi OP, OQ, OR. C'è un invariante assoluto corrispondente al birapporto $(DEPS)$.



ζ) Triangolo PQR invariante per un gruppo Γ_{24} che trasforma in sè la conica K. Ciò porta che PQR sia un triangolo coniugato rispetto a K. Si vede tosto come questo tipo risulti caso particolare di δ), diguisachè non restano più invarianti assoluti. È meno chiaro come lo stesso tipo nasca particolarizzando il caso ε), ma ciò dipende dalla circostanza che si ottiene qui un triangolo immaginario: effettivamente si consideri (sulla retta PO) il polo P' della retta QR; al variare di P si ha fra PP' una proiettività i cui punti uniti corrispondono alla particolarizzazione richiesta.

Ora la costruzione delle quartiche con trasformazioni proiettive, a partire da una conica in relazione a un triangolo PQR, conduce tosto alle *equazioni delle quartiche con tre punti doppi che ammettono un numero finito di trasformazioni proiettive.*

Così, ponendo P nell'origine delle coordinate, Q e R nei punti all'infinito degli assi coordinati, la conica

$$x^2 + y^2 + axy + b(x + y) - 1 = 0,$$

che ha come asse la retta $y = x$ — ove si muti x e y in $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$ — fornisce il tipo generale della quartica

$$\alpha) \qquad x^2 + y^2 + axy + b(x^2y + xy^2) - x^2y^2 = 0.$$

Se poi P diventa il centro della conica anzidetta, si ha $b = 0$, e si ottiene il tipo generale della quartica trirettangola

$$\delta) \qquad x^2 + y^2 + axy - x^2y^2 = 0.$$

E se ulteriormente si impone alla conica di possedere PQR come triangolo coniugato, la conica si riduce a un cerchio ($a = 0$), e si ottiene la quartica ottaedrica:

$$\zeta) \qquad x^2 + y^2 - x^2y^2 = 0.$$

La quartica generale relativa al gruppo Γ_6 del tipo della doppia piramide triangolare, si ottiene pure facilmente prendendo come triangolo fondamentale delle coordinate il triangolo PQR dei punti doppi: basta scrivere che (per la conica trasformata o addirittura) per la quartica l'equazione contiene simmetricamente le coordinate x, y, z. Così — ripassando alle coordinate cartesiane ($z = 1$) — si trova:

$$\varepsilon) \qquad x^2 + y^2 + 2a(xy + x^2y + xy^2) + x^2y^2 = 0,$$

che, per $a = 0$, si riduce al tipo ottaedrico, e si riduce precisamente alla forma ζ) mediante la proiettività immaginaria

$$x' = ix, \quad y' = iy.$$

Notevole che questa quartica ε), per $a = 1$, diventa la *quartica tricuspidale*, duale della cubica con nodo.

Le equazioni canoniche precedenti escludono i casi particolari in cui due punti doppi della quartica diventino infinitamente vicini, ovvero tutti e tre i punti doppi si fondano in un punto triplo. (L'esame geometrico mostra che nei casi α) e δ) possono Q e R diventare infinitamente vicini, e che nel caso α è anche possibile la particolarizzazione ulteriore in cui P si avvicini a QR in una direzione diversa da QR dando luogo così a un punto triplo. Si vede parimente che nel caso ε) i tre punti PQR possono venire a coincidere in un punto triplo).

Ora le *quartiche con punto triplo dotate di un numero finito di trasformazioni proiettive* non si presentano soltanto come particolarizzazioni dei tipi α) e ε), ma anche come tipi generali in rapporto ai casi β) e γ), che non si sono presentati nella costruzione delle nostre quartiche come trasformate delle coniche in relazione a un triangolo PQR. Basterà indicare qui le equazioni di queste nuove quartiche, dotate rispettivamente di una trasformazione ciclica del terzo ordine o del quart'ordine, e non possedenti alcun invariante assoluto:

β) $$y^3 - x^3 + y^4 = 0 \qquad (x' = e^{\frac{2\pi i}{3}} x,\ y' = y),$$

γ) $$x^2 y - x^4 - y^4 = 0 \qquad (x' = ix,\ y' = -y).$$

La quartica del tipo β) è caratterizzata come invariante rispetto ad un'omologia ciclica del terz'ordine, sicchè appare chiaro che l'equazione precedente, risponde proprio al tipo β) anzichè all' ε) (esistenza di un Γ_6) non potendo esservi una trasformazione involutoria della curva che trasformi l'omologia predetta nella sua inversa. Si noti anche che il centro dell'anzidetta omologia, punto all'infinito dell'asse x, è un punto di ondulazione per la quartica, in cui essa ha un contatto quadripunto con la tangente; ciò è d'accordo con la circostanza che la g_4^1 invariante per un Γ_3 del tipo β) — determinato da due quaterne $MAA'A''$, M^2N^2 — possiede il punto M come fisso, ciò che porta un gruppo M^4 nella g_4^1 associata.

Quanto alla quartica γ), la sua effettiva appartenenza al tipo del Γ_4 ciclico — cioè l'impossibilità che essa ammetta un gruppo più ampio non ciclico di trasformazioni, ricadendo nel tipo ζ) — appare tosto dall'osservazione che sulla quartica vi sono i punti uniti M e N, infinitamente vicini all'origine secondo gli assi coordinati, i quali non possono essere scambiati fra loro, appartenendo l'uno a un ramo lineare e l'altro a un ramo cuspidale.

Fra le quartiche piane di genere zero con un numero finito di trasformazioni proiettive, merita speciale attenzione la quartica ottaedrica (tipo ζ), che apparirà più avanti come *lemniscata proiettiva*, e ciò non solo per l' eleganza delle sue proprietà, dovuta all' ampiezza del gruppo trasformante, ma anche per il legame che essa presenta con la generale quartica gobba di seconda specie. Per scoprire questo legame giova osservare che: *la quartica ottaedrica è caratterizzata dalla proprietà che le sue 6 tangenti stazionarie sono le 6 tangenti principali nei tre nodi*, ogni ramo presentando qui un flesso.

La proprietà si può verificare analiticamente in rapporto all' equazione ζ); ma la sua dimostrazione geometrica è immediata, quando si ricordi la costruzione della quartica come trasformata quadratica di una conica relativa a un triangolo PQR: infatti la condizione perchè PQR sia, per la conica, un triangolo coniugato, è che le tangenti condotte da ciascun vertice abbiano il loro punto di contatto sul lato opposto.

Similmente si riconosce che:

La quartica ottaedrica è caratterizzata dalla proprietà di possedere tre punti doppi e di avere in ciascuno di questi due tangenti principali d' inflessione pei rispettivi rami, che separano armonicamente le rette proiettanti gli altri due punti doppi.

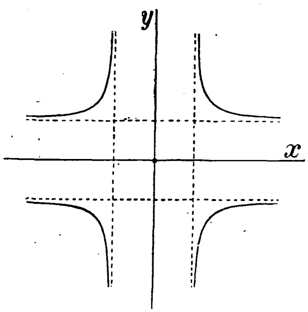
Ora quando si proietta una quartica gobba di seconda specie, dal relativo centro di Bertini, si ottiene una curva piana del quart' ordine dotata di tre punti doppi in ciascuno dei quali le tangenti principali sono tangenti di flesso dei rispettivi rami; questa proiezione è dunque una quartica ottaedrica, e così otteniamo il resultato che: *ogni quartica gobba di seconda specie, qualunque sia il suo invariante assoluto, dà per proiezione dal centro di Bertini la quartica ottaedrica.*

Non deve sorprendere il fatto che per un valore arbitrario del nominato invariante, la proiezione anzidetta conduca sempre ad uno stesso tipo di curva piana K' proiettivamente determinato, giacchè questa curva K' appare come proiezione di ∞^3 quartiche gobbe, K, appartenenti a un medesimo cono $O(K')$ che si distribuiscono in ∞^1 sistemi di ∞^2 curve col medesimo invariante assoluto.

Osservazione. Dal punto di vista della *realità*, la prospettiva di una quartica gobba di seconda specie veduta dal centro di Bertini dà origine a *due tipi* che si riducono uno all' altro soltanto con una proiettività immaginaria. Infatti può accadere che:

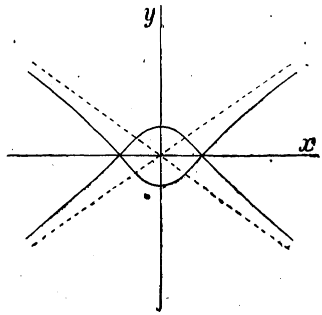
1) I punti stazionari A, B, C, D della K siano tutti e quattro reali; allora sono reali anche le tre corde principali, due di esse essendo corde proprie ed una ideale (con i punti di appoggio immaginari). La prospettiva di K dal centro di Bertini viene in questo caso una quartica piana con due nodi reali ed un punto isolato. Per averne il tipo possiamo riferirci al caso particolare metrico in cui la curva K' nasca con la trasformazione quadratica $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$ dal cerchio $x^2 + y^2 - 1 = 0$: allora l'equazione di K' viene

$$x^2 + y^2 - x^2 y^2 = 0,$$



i nodi di essa cadendo nei punti all' infinito degli assi e il punto isolato nell' origine. La forma di K' è rappresentata dall' annessa figura.

Similmente se i quattro punti $ABCD$ sono immaginari, ed A coniugato di B, C coniugato di D, le corde principali risultano tutte e tre reali, essendo reali le tre involuzioni $(AB)(CD)$, $(AC)(BD)$, $(AD)(BC)$; e precisamente due di queste corde riescono corde proprie e l' altra ideale. Per dimostrare la cosa si consideri nel piano della variabile complessa i quattro punti $a + ib$, $a - ib$, $c + id$, $c - id$, $(b > 0, d > 0)$, rappresentativi dei quattro punti $ABCD$, e che chiameremo ancora con $ABCD$. Questi appartengono ad un cerchio che resta invariato per le tre involuzioni suddette, le quali, lasciando fermo anche l' asse reale, mutano in sè la coppia di punti M_1 N_1, intersezioni del cerchio col detto asse reale. La prima delle tre involuzioni, cioè la $(AB)(CD$, è discorde sul cerchio lasciando fermi i due archi AB e CD su cui giacciono i punti M_1 e N_1 che riescono così punti uniti; l' involuzione $(AC)(BD)$ è ugualmente discorde, lasciando fermi i due archi AC, BD, su cui dunque si trovano due punti uniti che riescono immaginari; la terza involuzione $(AD)(BC)$ è concorde, e poichè — come ogni proiettività — conserva il senso di rotazione intorno a un punto, lascierà fermo l'interno del cerchio, portando un punto reale H ad esso interno in un altro H' pure interno: allora sull'asse reale si ha un'involuzione in cui due coppie HH' e M_1N_1 non si separano, quindi iperbolica.



Si può anche sostituire al tipo sopra considerato una trasformata proiettiva dotata parimenti di particolarità metriche, in cui i due nodi appaiano a distanza finita per es. nei punti $+1$ e -1 dell'asse x, e il punto isolato sia all'infinito nella direzione dell'asse y, e dove inoltre gli assi coordinati siano assi di simmetria. A tal uopo (passando alle coordinate omogenee x, y, z) basta effettuare la trasformazione che consiste nel cambiare x, y, z in

$$x-z, \quad x+z, \quad y;$$

in tal guisa, tornando a far $z=1$, si troverà l'equazione cartesiana

$$2y^2(x^2+1)=(x^2-1)^2,$$

che rappresenta la curva della figura.

È anche interessante un altro caso metrico in cui si ha un nodo nell'origine e un nodo nel punto all'infinito dell'asse x, mentre il punto isolato si trova nel punto all'infinito dell'asse y. Questo tipo si deduce dal primo scambiando le coordinate omogenee y e z, dimodochè — tornando alle coordinate cartesiane — si trova l'equazione

$$x^2-y^2-x^2y^2=0,$$

la quale si deduce anche dalla $x^2+y^2-x^2y^2=0$, cambiando x^2 in $-x^2$, cioè x in ix.

Aggiungiamo che l'equazione

$$x^2+y^2+x^2y^2=0,$$

ottenuta cambiando in $x^2+y^2-x^2y^2=0$, contemporaneamente x e y in ix e iy, rappresenta una curva che non ha punti reali fuori del punto isolato $x=y=0$, la quale non può presentarsi come proiezione di una quartica gobba di seconda specie K, rappresentata mediante equazioni reali. Infatti la K appartiene ad *una* quadrica Q, rappresentata da un' equazione reale: e reali debbono essere pure le generatrici di Q trisecanti la K, che altrimenti sarebbero coniugate a generatrici — dell' altro sistema — unisecanti. Si deduce che la K sega le generatrici di ciascun sistema almeno in un punto reale.

2) Fra i punti stazionari A, B, C, D della K ve ne siano due immaginari coniugati. Allora una delle coppie di punti che separano armonicamente due coppie della quaterna di quelli, p. es. M_1N_1, sarà costituita di punti reali, e le altre due, M_2N_2 e M_3N_3, di punti immaginari non coniugati (il coniugato di M_2 sarà p. es. M_3) in altre parole avremo per il centro di Bertini, O, una corda reale propria, e due corde immaginarie della quartica K. Allora la proiezione di K da O darà una curva piana del 4° ordine, K', dotata di un nodo e di due punti doppi immaginarî. Collocando questi nei punti ciclici, e il nodo nell'origine delle coordinate, ridurremo K' ad un tipo metrico che si ottiene dall' iperbole equilatera $(x+y)(x-y)=1$ mediante inversione rispetto ad un cerchio concentrico all' iperbole stessa.

Così dunque $\left(\text{cambiando } x, y \text{ rispettivamente in } \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ si trova la curva K' rappresentata da

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

che è l' equazione di una *lemniscata di* BERNOUILLI.

La classificazione delle quartiche reali può anche esser fatta con riferimento alla quadrica delle rette trisecanti. Si trovano da questo punto di vista i seguenti quattro tipi:

1) i quattro punti stazionari siano reali: allora vi sono quattro trisecanti tangenti;

2) i quattro punti siano due reali e due immaginari: allora si trovano due trisecanti tangenti;

3) i quattro punti siano immaginari: non vi sono trisecanti tangenti, e allora le trisecanti tagliano tutte in tre punti reali; oppure

4) le trisecanti tagliano tutte in un sol punto reale.

Per maggiori particolari intorno ad una tale classificazione il lettore può vedere il lavoro di ADLER nei Sitzungsberichte dell'Accademia di Vienna (2 nov. e 14 dic. 1882).

Notizia storica. Aggiungeremo brevi cenni sullo sviluppo dei lavori che hanno condotto a costituire la teoria generale delle quartiche gobbe di seconda specie ([1]), e qualche indicazione sulle curve dotate di trasformazioni proiettive, per chi ami proseguire in quest' ordine di idee.

Dicemmo già (vol. II, pag. 144) che l'esistenza di una seconda specie di quartiche gobbe, oltre l'intersezione completa di due quadriche, fu scoperta da SALMON nel 1849 I primi studi su questa curva (intersezione parziale di una quadrica e di una superficie cubica passante per due generatrici di quella) s'incontrano poi in STEINER (1857) e in CREMONA (1860), il quale, fra l'altro, mise in luce l'esistenza dei quattro piani stazionari. Ma una conoscenza approfondita della quartica gobba di seconda specie viene porta soltanto dal lavoro di E. BERTINI, pubblicato nelle memorie dell' Istituto Lombardo nel 1872. Questi ha costruito la teoria delle dette curve partendo dalle corde principali, di cui ha messo in luce l' esistenza (riconosciuta in pari tempo — sotto forma duale — dal LAGUERRE), e giovandosi di una rappresentazione parametrica stabilita l'anno innanzi dal WEYR. Nella memoria del Bertini si trova considerata l'involuzione sizigetica g_4^1, indipendentemente dalla considerazione del gruppo trirettangolo che ce ne ha porto la definizione, ed è fatta menzione dei due casi armonico ed equianarmonico della quartica, determinando in ispecie la quartica equianarmonica come intersezione di una rigata cubica con una sua quadrica polare, fuori della retta doppia ([2]). Ma soltanto l'ARMENANTE (1873-74) ha riconosciuto la proprietà della quartica armonica di possedere un nodo.

Lo studio dell'Armenante segna il principio di uno sviluppo analitico della dottrina delle quartiche gobbe di seconda

([1]) Vedasi per più ampie e precise informazioni bibliografiche l'articolo di L. BERZOLARI nel « Pascal 's Repertorium », cap. XXXVII.

([2]) Molte eleganti proprietà spettano a questa curva, che qui non staremo a ricordare. Accenneremo soltanto che ad una quartica equianarmonica è pervenuto S. LIE (Math. Annalen, 1879) come spigolo di regresso di una superficie sviluppabile ad area minima, caratterizzata dalla proprietà di passare tre volte per il cerchio immaginario all'infinito delle sfere.

specie, mediante la teoria delle forme; sviluppo proseguito dal MEYER (1883) e dal BERZOLARI nella sua memoria degli « Annali di Matematica » del 1892, che riassume anche quanto è stato fatto sull'argomento in tale indirizzo (1).

Delle omografie che trasformano in sè una quartica gobba di seconda specie si sono occupati diversi autori: SEGRE, poi DEL RE, BRAMBILLA e CIANI (2). A noi è sembrato che da questo punto di vista la teoria generale si possa ricostruire sistematicamente — come qui è indicato — nel modo più semplice e luminoso, giacchè le tante proprietà di configurazione scoperte da varî autori, appaiono evidenti in ordine al gruppo delle trasformazioni omografiche della nostra curva.

Quanto alle quartiche piane con trasformazioni proiettive, le più importanti ricerche che vi si riferiscono sono generalmente concepite, non tanto dal punto di vista della geometria sopra le curve, distinguendo le quartiche secondo il genere $p\,(=0, 1, 2, 3)$, come faremo noi nel nostro § 31, quanto dal punto di vista dei *gruppi finiti di omografie piane,* la cui determinazione appartiene a JORDAN e VALENTINER (3).

(1) Posteriore è lo « Studio geometrico... » del MARLETTA (ibidem 1903).

(2) Le memorie precedenti sono citate nella Nota di questi: Rendic. Istituto Lombardo, 1904.

(3) Il risultato di questa determinazione è che *a prescindere da gruppi triviali* che lascian ferma una retta o permutano fra loro una terna di punti, esistono tre tipi di gruppi proiettivi distinti, che coi loro sottogruppi esauriscono tutti i gruppi finiti d'omografie piane. *I tre gruppi tipici sono*:

1) *il gruppo di* HESSE *di 216 omografie,* che ha come invariante un fascio sizigetico di cubiche (cfr. L. 3°, § 31, vol. II, pag. 236);

2) *il gruppo di* KLEIN *di 168 omografie,* che lascia invariata la quartica

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0;$$

3) *il gruppo di* VALENTINER *di 360 omografie,* che lascia invariata la sestica

$$10x^3y^3 + 9z(x^5 + y^5) - 45x^2y^2z^2 - 135xyz^4 + 27z^6 = 0.$$

Il primo tipo contiene sottogruppi non triviali di 36 e 72 omografie (che lasciano invariata una cubica armonica ovvero la permutano anche colla sua hessiana). Il terzo tipo contiene pure sottogruppi non triviali *icosaedrici*, che lasciano invariata una conica. Cfr. A. WIMAN: Math. Annalen, Bd. 47, 48.

26. **Curve con infinite trasformazioni proiettive.** — La determinazione delle curve di genere zero con infinite trasformazioni proiettive, che abbiamo istituito nel § 24, acquista un valore generale nella teoria delle curve algebriche, grazie al seguente

Teorema: *Le curve algebriche dotate di infinite trasformazioni proiettive sono di genere zero.*

Infatti si dimostra che una curva $C_n{}^r$ (d'ordine n in uno spazio ad $r < n$ dimensioni) di genere $p > 0$, non può ammettere che un numero finito di trasformazioni proiettive. (S' intende che parliamo sempre di trasformazioni proiettive dello spazio minimo a cui la curva appartiene, cioè agenti in modo effettivo sui punti di essa). L' asserto risulta dalla condizione, a cui le dette trasformazioni soddisfano, di lasciare invariato l' insieme I dei punti di contatto della curva con gli iperpiani iperosculatori.

Per dar forma precisa al ragionamento sopra accennato, pongasi dapprima — per semplicità di discorso — che la $C_n{}^r$ sia priva di punti multipli. Sappiamo (§ 9) che i punti di contatto degli iperpiani iperosculatori, cioè i punti $(r+1)$-*pli* della g_n^r segata sulla curva dagli iperpiani, sono in numero di

$$N = n(r+1) + \frac{r(r+1)}{2}(2p-2) \geq n(r+1) \, ;$$

questo numero non può diventare infinito: infatti, ove in ogni punto della $C_n{}^r$ l' S_{r-1} osculatore avesse un contatto r-punto riuscendo *stazionario*, cioè osculatore anche nel punto infinitamente vicino, al variare di P non varierebbe l' iperpiano osculatore, onde la $C_n{}^r$ verrebbe a giacere tutta in questo, e non in un S_r come si suppone. Ora se questi punti sono distinti, o almeno si riducono a un certo numero $M > r+1$ di punti indipendenti, non vi è alcuna omografia non identica per cui essi siano uniti: segue da ciò che il numero delle omografie che lasciano invariata la curva $C_n{}^r$ e quindi il detto insieme I, non può certo superare $M!$ (limite che non importa qui abbassare!), essendovi isomorfismo oloedrico fra il gruppo G di quelle omografie ed il gruppo delle sostituzioni subordinato entro I. Ma quando il numero M dei punti distinti di I diventi abbastanza piccolo, l' isomorfismo fra il G e il gruppo delle sostituzioni subordinate sopra I, potrà diventare meriedrico. A noi non giova qui analizzare più profondamente codesta riduzione [1], giacchè è facile provare che — in ogni caso — le omografie dello S_r che lascian fermi i punti di I sono in numero finito: anzi appaiono già in numero finito le omografie dello S_r che lascian ferma la curva $C_n{}^r$ ed un suo punto P.

Infatti si consideri il fascio F degli iperpiani passanti per lo S_{r-2} osculatore alla curva in P: questo fascio segherà sulla curva (di genere p) una g^1_m con $m > 1$, e però si avranno in esso $2m + 2p - 2$ iperpiani tangenti. Ora, comunque i punti doppi della g^1_m ed i relativi iperpiani tangenti di Γ, possano in parte coincidere fra loro, si avranno *almeno* 3 iperpiani distinti, poichè un punto *i-plo* della g^1_m $(i \leq m)$ conta precisamente per $i - 1$ punti doppi. Se dunque si avessero infinite trasformazioni proiettive della $C_n{}^r$ lascianti fermo P (in conseguenza dell' isomorfismo fra il gruppo delle anzidette omografie e quello delle sostituzioni subordinate sull' insieme degli iperpiani tangenti considerato) si troverebbero anche infinite omografie che — possedendo almeno tre iperpiani uniti entro il fascio F — lascierebbero fermi tutti gli iperpiani di questo.

Per provare infine che questa conclusione è assurda, considereremo l' isomorfismo fra il gruppo delle omografie che lasciano invariata la $C_n{}^r$ e gli iperpiani di F, e il gruppo delle sostituzioni che esse producono sul sistema degli m punti $A_1\ A_2 \ldots A_m$, sezioni della curva con un iperpiano generico di F: vedremo così che, se le dette omografie sono in numero infinito, debbono essere anche infinite quelle che lasciano fermi $A_1\ A_2 \ldots A_m$. Ma un' omografia che soddisfi a queste condizioni non può essere che identica, giacchè essa deve lasciar fermi i rami della $C_n{}^r$ passanti per $A_1 A_2 \ldots A_m$, e quindi i singoli punti di essi, staccati dagli iperpiani di F.

Abbiamo dimostrato che le omografie trasformanti in sè una $C_n{}^r$ di genere $p > 0$, sono in numero finito; tuttavia la dimostrazione precedente è subordinata all' ipotesi che la $C_n{}^r$ non possegga punti singolari. Possiamo dispensarci dall' esa-

[1] La coincidenza di due (o più) punti di I può essere portata o dal fatto che si ha un punto $(r+2)$-*plo* della g^r_n, ovvero dalla circostanza che lo S_{r-2} osculatore nel punto sia già iperosculatore avendo con la curva un contatto r-punto; ecc.

minare particolarmente il caso escluso, operando — ove esso si avveri — sulla curva una conveniente trasformazione. Infatti si considerino nello S_r le varietà ad $r-1$ dimensioni di un ordine abbastanza elevato, soggette a passare per i punti multipli (distinti o infinitamente vicini) della $C_n{}^r$, comportandosi ugualmente rispetto alle singolarità della curva che sono trasformate l'una nell'altra dalle omografie del G: mediante questo sistema di varietà la $C_n{}^r$ si lascia trasformare in una curva K, di un certo iperspazio, priva di punti multipli, la quale riuscirà invariante per un gruppo di trasformazioni proiettive, che il G induce in cotesto iperspazio.

Curve di KLEIN-LIE. Il teorema che « una curva algebrica con infinite trasformazioni proiettive è razionale » risulta anche — in una nuova luce — in rapporto alla teoria generale dei gruppi continui di omografie, e in particolare delle curve — algebriche o trascendenti — che vengono definite come traiettorie dei gruppi semplicemente infiniti.

E noi cogliamo volentieri l'occasione di accennare così a codeste *curve* che portano il nome *di Klein-Lie.*

Proponiamoci di determinare in generale le curve di uno spazio S_r, a quante si vogliano dimensioni, che sono definite come luogo dei trasformati di un punto P mediante le omografie di un gruppo continuo ∞^1: la loro classificazione coincide con quella di codesti gruppi.

Abbiamo già detto per il caso $r=1$, e ripetiamo qui in generale, che un gruppo (analitico) ∞^1 di omografie dello S_r si può ritenere generato dalla ripetizione (integrazione) di una omografia infinitesima, ovvero dalle potenze di una sua omografia generica: nel campo reale si hanno a considerare, oltre alle potenze ad esponente intero, anche quelle ad esponente fratto ed irrazionale; passando poi al campo complesso, le potenze immaginarie delle omografie si introducono per la naturale estensione a questo campo delle funzioni analitiche, già definite per valori reali dell'esponente. Aggiungeremo che: ogni gruppo ∞^1 di omografie dello S_r, ammette precisamente ∞^{r-1} curve invarianti, proiettivamente identiche, che sono le curve W di KLEIN-LIE, traiettorie dei punti dello spazio: per un punto generico ne passa *una.* Vi è in generale una omografia determinata che trasforma in sè stessa una W portandone un punto A in un punto A'.

Osserveremo in fine che un gruppo ∞^1 è costituito di omografie permutabili, ed è contenuto in un gruppo più ampio (che nel caso più semplice è definito dal possesso dei medesimi $r+1$ punti uniti) le cui omografie, anzichè lasciare invariate individualmente le nostre W, le scambiano fra loro.

Procederemo alla nostra analisi considerando dapprima il caso di un gruppo ∞^1, Γ, la cui omografia generica possegga, nello S_r, $r+1$ punti uniti distinti, e così ammetta le equazioni canoniche:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = \rho_1 x_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r = \rho_r x_r. \end{cases}$$

In questo caso le omografie del gruppo Γ sono date da

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = \rho_1{}^n x_1 \\ y_2 = \rho_2{}^n x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_r = \rho_r{}^n x_r, \end{cases}$$

dove n è suscettibile di variare con continuità nel campo reale o complesso; e, ponendo

$$\rho_1{}^n = t, \quad \rho_2{}^n = t^{\alpha_2} \ldots \rho_r{}^n = t^{\alpha_r},$$

cioè:

$$\alpha_i = \log \rho_i \qquad \text{(base } \rho_1\text{)},$$

le equazioni di Γ si scrivono:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = t x_1 \\ y_2 = t^{\alpha_2} x_2 \\ \cdots\cdots \\ y_r = t^{\alpha_r} x_r. \end{cases}$$

Le curve di Klein-Lie, traiettorie del gruppo, sono tutte fra loro proiettive, e come tipo di esse si può assumere quella, descritta dal punto unità, che ha per equazione

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = t \\ y_2 = t^{\alpha_2} \\ \cdots\cdots \\ y_r = t^{\alpha_r}. \end{cases}$$

Tale curva è in generale trascendente, ma diventa algebrica quando i numeri α_i siano razionali: così se si ha $\alpha_i = \frac{m_i}{m_1}$, dove i numeri m sono interi, troveremo la curva di Klein-Lie algebrica e razionale

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = t^{m_1} \\ y_2 = t^{m_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_r = t^{m_r}, \end{cases}$$

dove vi è ora designato con t un nuovo parametro che è uguale alla radice m_1-*esima* del precedente. Le equazioni di questa curva rispondono precisamente al tipo delle curve razionali con infinite trasformazioni proiettive, che abbiamo determinate nel § 24: si ricade esattamente nelle equazioni ivi scritte ponendo

$$m_1 = \nu \quad m_2 = \nu + \nu_1 \ldots \quad m_r = \nu + \nu_1 + \ldots + \nu_{r-1} = n.$$

Passiamo alla considerazione delle curve di Klein-Lie che vengono definite come traiettorie di un gruppo ∞^1 di omografie con spazi di punti uniti, comunque distinti o infinitamente vicini. E ricordiamo anzitutto (L. 4°, § 41) che una omografia iperspaziale, la quale possegga spazi di punti uniti di dimensione maggiore di zero, lascia invarianti gli spazi di una congruenza lineare, in ciascuno dei quali si ha soltanto un numero finito di punti uniti; così dunque le traiettorie di un gruppo ∞^1 di omografie dotate di spazi di punti uniti di dimensione maggiore di zero, appariscono anche come traiettorie di gruppi dotati soltanto di punti uniti, entro spazi di dimensioni inferiori.

Ciò premesso, procediamo a determinare le traiettorie di un gruppo ∞^1 di omografie dello S_r che sia dotato di $r+1$ punti uniti, alcuni dei quali infinitamente vicini. La nostra analisi procederà in modo semplicissimo, prendendo le mosse dalla conoscenza che già abbiamo delle traiettorie relative ai gruppi in cui tutti i punti riescono infinitamente vicini; le quali sono curve razionali normali (L. 4°, § 41). Per semplicità di discorso considereremo i casi che si presentano per

$r=2, 3$; giacchè l'estensione ai casi in cui $r>3$ si fa del tutto analogamente.

Per $r=2$, all'infuori del caso generale di tre punti uniti distinti (che si è trattato di sopra), e del caso in cui si hanno tre punti infinitamente vicini (che già sappiano dare per traiettorie delle coniche), non rimane da considerare che il caso di due punti infinitamente vicini. Allora le equazioni dell'omografia generica del gruppo si posson ridurre alla forma canonica:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = \rho x_1 \\ y_2 = x_2 + x_0 ; \end{cases}$$

la potenza n-esima di questa omografia è rappresentata da:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = \rho^n x_1 \\ y_2 = x_2 + n x_0 , \end{cases}$$

e quindi la traiettoria del punto unità rispetto al gruppo è data dalle equazioni parametriche:

$$1) \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = t \\ y_2 = 1 + \lg_\rho t = \lg_\rho (\rho t) ; \end{cases} \qquad (t = \rho^n)$$

ora, passando ai logaritmi naturali:

$$\lg_\rho (\rho t) = k \lg_e (\rho t) , \qquad (k = \lg_\rho e),$$

le formule precedenti divengono:

$$y_0 = 1 , \quad \rho y_1 = \rho t , \quad k y_2 = \lg (\rho t) \qquad (\text{base } e)$$

ossia, cambiando ρt in t, ρy_1 in y_1, $k y_2$ in y_2,

$$1') \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = t \\ y_2 = \lg t . \end{cases}$$

Passando alle coordinate cartesiane, e osservando che le coniche traiettorie di un gruppo ∞^1 di omografie con tre punti infinitamente vicini, rientrano nel caso delle traiettorie di un gruppo generale con tre punti uniti distinti, si conclude che *le curve di Klein-Lie del piano si riducono ai due tipi proiettivamente distinti*

$$y = x^\alpha, \quad y = \lg x.$$

Per $r = 3$ abbiamo da caratterizzare i casi di gruppi di omografie dello spazio dotati di punti uniti infinitamente vicini. Designando con A, B, C, D i quattro punti uniti possiamo supporre:

a) $A = B$: in questo caso le equazioni del gruppo si possono scrivere sotto la forma

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = \rho_1{}^n x_1 \\ y_2 = \rho_2{}^n x_2 \\ y_3 = x_3 + nx_0, \end{cases}$$

e quindi la traiettoria descritta dal punto unità verrà rappresentata parametricamente da

$$2) \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = t \\ y_2 = t^\alpha \\ y_3 = 1 + \lg_{\rho_1} t, \end{cases} \qquad (\alpha = \lg_{\rho_1} \rho_2)$$

le quali equazioni, con un cambiamento del parametro e delle coordinate come nel caso del piano, si riducono a:

$$2') \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = t \\ y_2 = t^\alpha \\ y_3 = \lg t \end{cases} \qquad \text{(base } e\text{).}$$

b) $A = B$, $C = D$: le equazioni del gruppo si possono scrivere

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = x_1 + nx_0 \\ y_2 = \rho^n x_2 \\ y_3 = \rho^n (x_3 + nx_2), \end{cases}$$

e quindi la traiettoria descritta dal punto unità ha per equazioni parametriche

$$3)\qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1 + \lg_\rho t \\ y_2 = t \\ y_3 = t(1 + \lg_\rho t), \end{cases}$$

ovvero, operando come per ridurre le 2) alle 2′):

$$3')\qquad \begin{cases} y_0 = t \\ y_1 = \lg t \\ y_2 = t \\ y_3 = t \lg t. \end{cases} \qquad \text{(base } e\text{)}$$

Giova notare che queste formule si possono dedurre direttamente dalle 1′) interpretate come equazioni dei coni che proiettano la nostra curva gobba dai due punti uniti A e C. Abbiamo infatti, entro queste stelle, le equazioni dei coni generati dal gruppo ∞^1 di omografie sotto la forma seguente:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_2 = t \\ y_1 = \lg t \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = \tau \\ y_2 = 1 \\ y_3 = \lg \tau, \end{cases}$$

sicchè, ponendo $\tau = \frac{1}{t}$ e cambiando segno a y_3, riesce

$$3'')\qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = \lg t \\ y_2 = t \\ y_3 = t \lg t. \end{cases}$$

Si osserverà che, se in luogo di partire dalle 1′), si parte dalle 1), si ottengono direttamente le formule 3), senza bisogno di cambiare il segno di y_3, tenuto conto delle diverse basi ρ e $\frac{1}{\rho}$ rispetto a cui sono presi i logaritmi nella rappresentazione dei due coni.

c) $A = B = C$. Le formule per questo caso si possono ottenere, senza passare per le equazioni del gruppo, considerando la nostra curva traiettoria come intersezione dei due coni invarianti che la proiettano da A e D. La deduzione procede come nel caso precedente, quando si ricordi che la traiettoria di un gruppo piano ∞^1 dotato di un solo punto unito (triplo) ammette la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = \tau \\ y_2 = \tau^2 \end{cases}$$

(Cfr. vol. II, pag. 673).

Si otterranno dunque le formule

$$4) \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = \lg t \\ y_2 = \lg^2 t \\ y_3 = t. \end{cases} \qquad (\tau = \lg t)$$

L'analisi istituita per i casi $r = 2, 3$, si lascia estendere per valori superiori di r, e così possiamo riassumere le equazioni che porgono la *rappresentazione parametrica di una curva di Klein-Lie, invariante per un gruppo continuo di omografie in uno spazio qualsiasi, nella forma generale seguente:*

$$5) \qquad \begin{cases} y_{00} = 1, & y_{01} = t, & y_{02} = t^{\alpha_2} & \ldots \\ y_{10} = \lg t, & y_{11} = t \lg t, & y_{12} = t^{\alpha_2} \lg t & \ldots \\ y_{20} = \lg^2 t, & y_{21} = t \lg^2 t, & y_{22} = t^{\alpha_2} \lg^2 t & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & : \end{cases}$$

in questo quadro abbiamo introdotto per chiarezza coordinate con due indici, ed è appena necessario avvertire che ogni colonna ha una lunghezza arbitraria, in ciascuna di esse figurando un numero di elementi maggiore o uguale ad uno.

I numeri $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$, che figurano come costanti arbitrarie nell'equazioni-tipo 5) pongono gli *invarianti assoluti delle curve di Klein-Lie* così rappresentate, e del corrispondente gruppo di omografie. Si noti d'altronde che un'omografia generica di questo gruppo possiede come invarianti assoluti $t, t^{\alpha_2}, t^{\alpha_3} \ldots$; ma, facendo le sue potenze, questi numeri cambiano, restando fissi soltanto i rapporti dei loro logaritmi, che porgono appunto i numeri α_2, α_3..., invarianti assoluti del gruppo.

Ora appare che si ottengono curve di Klein-Lie algebriche soltanto nel caso in cui il nostro quadro si riduca alla prima linea — con la condizione aggiuntiva che gli invarianti α_2, α_3... siano numeri razionali — ovvero che esso si riduca alla prima colonna; ma questo secondo caso rientra nel primo (come appare cambiando $\lg t$ in t) perchè la curva razionale normale, generata da un gruppo ∞^1 di omografie con un solo punto unito, appare anche (in ∞^2 modi) come traiettoria di un gruppo ∞^1 di omografie a punti uniti distinti. E pertanto: *le curve di Klein-Lie algebriche risultano razionali.*

Aggiungasi che quando si abbia una curva, K, appartenente ad un S_r, che possegga un gruppo G ∞^h, con $h > 1$, di trasformazioni proiettive, questa curva si presenta contemporaneamente come traiettoria dei diversi gruppi ∞^1 che vengono generati dalle ∞^{h-1} trasformazioni infinitesime (infinitamente vicine all'identità), che si trovano in G: allora è facile riconoscere che la K è una curva razionale normale dello S_r. Si arriva a questo risultato per induzione completa, supponendolo dimostrato per lo spazio ad $r-1$ dimensioni. Si osservi infatti che la curva rappresentata dalle nostre formule 5) — tolto il caso che essa sia razionale normale — possiede due punti singolari A e B corrispondenti a $t = 0, \infty$, che debbono risultare uniti per tutte le omografie del gruppo G: si deduce che proiettando la K da quei due punti, si ottengono, entro le due stelle, coni possedenti ancora ∞^h trasformazioni proiettive, e quindi d'ordine $r-1$: ma questi coni avendo a comune la generatrice AB, ne consegue che la K è una curva razionale normale di S_r. Con ciò siamo ridotti a stabilire il teorema che abbiamo in vista per $r = 2$; ma qui esso risulta subito dall'osservare che il più ampio gruppo di omografie piane per cui rimane invariata una curva di Klein-Lie, che non sia una conica, possiede certo tre punti uniti, due dei quali possono essere infinitamente vicini, mentre il gruppo ∞^2 delle omografie permutabili che possiede quei punti uniti non ammette altre curve invarianti che non siano rette.

Riassumendo enuncieremo il teorema:

Una curva, appartenente ad uno spazio S_r, che ammetta un gruppo continuo di dimensione $h > 1$ di trasformazioni *proiettive, è una curva razionale normale (d' ordine r) di quello spazio* (¹).

Notizia storica. Le curve W, invarianti per le omografie di un gruppo ∞^1 (presentatesi dapprima sotto un altro punto di vista a CLEBSCH e GORDAN) sono state determinate come tali da KLEIN e LIE (1870) a partire dalle equazioni canoniche delle omografie per il piano e per lo spazio. In particolare i detti autori osservano che la curva razionale normale (conica o cubica) si presenta come traiettoria di un gruppo ∞^1 con un unico punto unito multiplo (ed anche come la sola curva dotata di più che ∞^1 trasformazioni proiettive). Nella nostra trattazione, l' anzidetta proprietà della curva razionale normale venne stabilita geometricamente, come presupposto per giungere ad una rappresentazione canonica delle omografie: la conoscenza di questo caso permette qui di arrivare nel modo più semplice e più generale alle equazioni parametriche delle curve di Klein-Lie.

Come sopra si è osservato, un gruppo ∞^1 di omografie si può sempre ritenere definito da una trasformazione infinitesima; allora le curve di Klein-Lie si presentano come integrali di un sistema di equazioni differenziali; così per es. dai tre tipi di equazioni differenziali:

$$\alpha \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad dy = \frac{dx}{x}, \quad dx = \frac{dy}{x}$$

nascono, per integrazione, le curve di Klein-Lie appartenenti al piano e, sotto questo aspetto, vengono trattate nelle lezioni di LIE-SCHEFFERS (²).

Applicazioni alle curve algebriche. - Dall' analisi che precede risulta in particolare che « le curve algebriche possedenti un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in se stesse sono razionali »; ora bisogna fare un passo di più, dimostrando che « le curve algebriche con infinite trasformazioni proiettive ne ammettono sempre un gruppo con-

(¹) KLEIN e LIE: C. R., t. 70, pag. 1222 (1870), e Math. Annalen Bd. 4; LIE: « Theorie der Transformations-Gruppen ». Bd. 3 (Lipsia, 1993), Kap. 9.

(²) Cfr. LIE-SCHEFFERS... « Vorlesungen .. ». Kap. 3, § 4, (pagg. 68 e seg.).

tinuo ». A ciò si arriva in base alle due osservazioni generali che seguono:

1) *Le omografie che lasciano invariata una curva algebrica formano sempre un gruppo algebrico, G,* i parametri di esse corrispondendo ai punti di una varietà algebrica, Γ, irriducibile o riducibile.

A chiarimento di questa affermazione osserviamo che le omografie di un S_r dipendono da $r(r+2)$ parametri, diguisachè possono ritenersi come punti di uno spazio $S_{r(r+2)}$: ora se si impone ad una omografia di S_r di lasciare invariata una curva algebrica C, si otterranno fra i detti parametri certe condizioni algebriche, definendo così una varietà algebrica dello $S_{r(r+2)}$; le equazioni effettive di questa varietà si otterranno scrivendo che un sistema lineare di varietà algebriche ad $(r-1)$ dimensioni dello S_r, capace di definire la C come curva base, viene trasformato in se stesso.

2) *Un gruppo algebrico, G, contenente infinite omografie, è un gruppo continuo, ovvero — nel caso che risponda ad una varietà Γ riducibile — è un gruppo misto che consta di un numero finito di sistemi continui di ugual dimensione, uno dei quali — contenente l' identità — forma da solo un gruppo continuo.*

Si consideri nel gruppo G una omografia τ: moltiplicando una omografia generica, π, di G per τ (per es. a destra) si ottiene sempre un' omografia $\pi' = \pi\tau$ dello stesso G: si vede pertanto che le omografie τ del G — considerate come moltiplicatrici — producono sui punti della varietà Γ dello $S_{r(r+2)}$ un gruppo di trasformazioni (*gruppo parametrico del G*), che si può verificare facilmente essere trasformazioni proiettive dello spazio ambiente. Ora importa notare che il G (interpretato come gruppo parametrico) opera transitivamente sui punti di Γ, giacchè se π e π' sono due qualunque omografie di G, esiste in G una determinata omografia τ $(=\pi^{-1}\pi')$ per cui

$$\pi\tau = \pi'.$$

Segue da ciò che, se la varietà Γ consta di più parti irriducibili $\Gamma_1\ \Gamma_2 \ldots \Gamma_s$, queste dovranno avere tutte la medesima dimensione, giacchè sono trasformate l' una nell' altra da convenienti omografie di G.

In secondo luogo appare che una delle suddette varietà irriducibili, per es. Γ_1, deve contenere il punto I, immagine della omografia identica dello S_r, e si vede che ai punti di codesta varietà Γ_1, rispondono le trasformazioni proiettive di un gruppo (continuo), G_1, contenuto entro il G, giacchè una generica fra codeste trasformazioni (presa come moltiplicatrice), porta I in un punto generico di Γ_1 (non comune a Γ_2 ...) e quindi lascia ferma la varietà Γ_1. Si verifica che per questo motivo le operazioni del G_1 formano effettivamente un gruppo: in primo luogo se π_1 e π_2 sono due trasformazioni del G_1, aventi per immagini due punti di Γ_1, prendendo π_2 come moltiplicatrice si porta π_1 in un punto $(\pi_1\pi_2)$ di Γ_1, sicchè il prodotto $\pi_1\pi_2$ appartiene al G_1; in secondo luogo insieme ad ogni π, il G_1 dovrà contenere l'operazione inversa π^{-1}, poichè esiste una trasformazione del G_1 che porta un punto (π) di Γ_1 in un altro punto generico, e quindi anche nel punto I: questa trasformazione porta I nel punto immagine di π^{-1}.

Dalle osservazioni 1) e 2) resulta che *una curva algebrica con infinite trasformazioni proiettive,* ammettendone sempre un gruppo continuo, *è razionale,* venendo così confermato il teorema cui già arrivammo in principio di questo paragrafo.

27. **Trasformazioni delle curve ellittiche.** — Cerchiamo di determinare le condizioni perchè due curve ellittiche K e K', si possano trasformare birazionalmente l'una nell'altra. A tale scopo ricordiamo che ad una curva ellittica, K, appartiene una serie ∞^1 di g_2^1, una g_2^1 della serie venendo determinata da una coppia di punti distinti o coincidenti di K. Una di queste g_2^1 possiede quattro punti doppi: A, B, C, D, i quali — considerati come coppie della g_2^1 (ovvero come punti della retta immagine di essa) — danno luogo ad un certo birapporto $(ABCD)$. Si riconosce che questo birapporto è il medesimo per ogni altra g_2^1 appartenente a K. Infatti si consideri un'altra g_2^1 dotata dei punti doppi A', B', C', D'; allora esiste su K una trasformazione involutoria $I = (AA')$ che porta A in A' e quindi la prima g_2^1 nella seconda, inducendo fra le due g_2^1 (ossia fra le rette i cui punti ne rappresentano le coppie) una proiettività, per cui la quaterna $ABCD$ si muta nella quaterna $A'B'C'D'$, sicchè $(ABCD) = (A'B'C'D')$: la nominata trasformazione I viene posta dalla g_2^1 definita dalla coppia (AA'), dove si associno i punti di K appartenenti ad una medesima coppia di questa involuzione.

In base all'osservazione fatta, il birapporto $(ABCD)$, definito dai quattro punti doppi di una g_2^1 (entro di questa) appare costituire un *carattere della curva* K, indipendente dalla particolare scelta della g_2^1 presa sopra K; questo carattere, o meglio l' invariante assoluto della quaterna che esprime il birapporto *razionalizzato,* prende il nome di *modulo* o anche di invariante (assoluto) della K. Quando della curva K si assuma come modello proiettivo una cubica piana (cfr. § 7), il modulo risponde al birapporto delle tangenti condotte alla cubica da un suo punto; e si ritrova così, da un punto di vista superiore, il teorema di SALMON già stabilito nel L. 2°, § 22, secondo cui quel birapporto ha un valore costante.

Vedemmo anche, in occasione del citato teorema di Salmon, che il detto birapporto costituisce l' unico invariante assoluto della cubica, nel senso che ogni invariante ne dipende come funzione, e per modo che l' uguaglianza dei relativi birapporti esprime la condizione di proiettività di due cubiche; ed appunto allora imparammo a razionalizzare il birapporto sostituendo a questo invariante irrazionale l' invariante assoluto, funzione razionale dei coefficienti della cubica. Ora il detto teorema appare qui in una nuova luce:

L' uguaglianza dei moduli di due curve ellittiche, K e K', esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè esse siano trasformabili birazionalmente l' una nell' altra.

Anzitutto l' uguaglianza dei moduli è condizione necessaria per l'esistenza di una corrispondenza birazionale fra le curve K e K', giacchè ad una g_2^1 data su K, coi punti doppi A, B, C, D, dovrà rispondere su K' una g_2^1 coi punti doppi A', B', C', D', e si avrà fra le due g_2^1 (o fra le rette immagini) una proiettività, per cui $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

In secondo luogo la dimostrazione della sufficienza della condizione anzidetta, che qui si presenta più diretta, ci riconduce al teorema dell' identità proiettiva di due cubiche collo stesso invariante, cui potremmo anche richiamarci.

Teniamo presente che, data su K una g_2^1, le coordinate dei punti della curva si esprimono come funzioni algebriche a due valori di un parametro x, avendosi così una rappresentazione della curva K sopra una retta doppia con quattro punti di diramazione a, b, c, d, che rispondono ai punti doppi della g_2^1, già designati con A, B, C, D: perciò le funzioni algebriche anzidette si esprimeranno come funzioni razionali di x e di $y = \sqrt{f(x)}$:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Ora potremo supporre similmente che le coordinate dei punti di K' vengano espresse come funzioni razionali di x' e di $y' = \sqrt{\varphi(x')}$:

$$\varphi(x') = (x'-a')(x'-b')(x'-c')(x'-d').$$

Il polinomio φ (come f) è definito a meno di una sostituzione lineare sulla variabile; e — poichè i birapporti $(ABCD)$ e $(A'B'C'D')$ sono uguali — si potrà anche assumere $\varphi = f$, cioè, per una scelta conveniente dell' ordine delle radici:

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \quad d' = d.$$

Con ciò le due curve K e K' resultano riferite alle quartiche

$$y^2 = f(x), \quad y'^2 = f(x'),$$

che sono fra loro identiche, riducendosi l' una all' altra per la sostituzione:

$$x = x', \quad y = y'.$$

Lo stesso ragionamento porta all' identità proiettiva di due cubiche collo stesso invariante (anzichè di due quartiche di genere uno come quelle scritte di sopra), ove si ponga $d = d' = \infty$, con che si ha:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c).$$

Osservazione. L' identità birazionale di due curve ellittiche K e K' di ugual modulo, si lascia anche stabilire in modo più sintetico, come segue. Si riferiscano proiettivamente le due g_2^1 considerate sulle due curve: nasce allora, fra K e K', una corrispondenza [2, 2], ad ogni punto P di K corrispondendo i due punti P' e P_1' della coppia della seconda g_2^1 omologa alla coppia della prima che è determinata da P, ed a P' rispondendo i punti P e P_1 coniugati rispetto alla g_2^1 di K. Ebbene si vuol provare che la detta corrispondenza [2, 2] si spezza in *due* corrispondenze biunivoche. A tale scopo si osservi che quella corrispondenza si ottiene come prodotto di una corrispondenza [2, 1] e di un' altra [1, 2], dove si consideri una retta r, intermediaria fra K e K', i cui punti rappresentino le coppie delle due g_2^1 nominate: e l' importante è che (essendo uguali i birapporti invarianti delle due g_2^1) si può ritenere che i *punti di diramazione* delle due corrispondenze [1, 2] poste fra r e K, K', sieno *gli stessi* 4 punti A, B, C, D. Ciò posto, si sostituisca alla retta r il piano della variabile complessa: il punto P variabile su K dà — in quel piano — una funzione algebrica coi punti di diramazione A, B, C, D, e così anche i due punti P' e P_1' di K', definiti in funzione di P. Ma di qui appare che P' (e così P_1') dipende univocamente da P, giacchè non si può scambiare con P_1' per un giro della variabile complessa che riporti P in se stesso: effettivamente i giri scambianti P' con P_1' sono soltanto quelli che (avvolgendo un punto di diramazione) scambiano anche P nel suo coniugato P_1 su K.

(Questa considerazione non è, infine, che un caso particolare del teorema circa la determinazione di una funzione algebrica mediante il suo gruppo di monodromia: cfr. § 3).

Nel teorema precedente è implicito il resultato che « due cubiche piane, senza punti doppi, birazionalmente identiche sono anche proiettive », perciocchè esse hanno ugual invariante. Ma si può vedere, più in generale, che:

L' uguaglianza dei moduli esprime sempre la condizione di proiettività (oltrechè d' identità birazionale) *per due curve ellittiche normali dello stesso spazio,* cioè per due curve (di genere uno) d' ordine n dello S_{n-1}.

Per dimostrarlo, basta osservare che due g_n^{n-1} appartenenti ad una medesima curva ellittica K, possono sempre portarsi l' una nell' altra mediante una conveniente trasformazione involutoria, I, posta da una g_2^1 della K: e precisamente si ha da prendere come g_2^1 trasformante, quella che è definita da una coppia contenente un punto *n-plo*, A, della prima g_n^{n-1} ed un punto *n-plo*, A', della seconda, giacchè la trasformazione involutoria così definita dovrà allora portare la g_n^{n-1} completa definita dal punto A contato n volte nella g_n^{n-1} definita dal punto A' contato pure n volte.

Segue da quanto precede che: se due curve ellittiche, K e K', sono birazionalmente trasformabili l' una nell' altra, è anche possibile di trasformarle in guisa che una g_n^{n-1} data sull'una — e in particolare appunto quella segata dagli iperpiani dello S_{n-1} cui K appartiene — sia portata in una g_n^{n-1} comunque assegnata sulla K', e — in ispecie — in quella che su K' segano gli iperpiani del suo spazio. c. d. d.

Ora, per approfondire la determinazione di tutte le trasformazioni birazionali e — in particolare — delle trasformazioni proiettive, intercedenti fra due curve ellittiche, si è condotti a studiare sistematicamente le trasformazioni di una curva ellittica in se medesima.

Sopra una curva ellittica, K, abbiamo già considerato la serie ∞^1 delle involuzioni g_2^1 che ad essa appartengono; e abbiam detto che queste g_2^1 si possono riguardare come trasformazioni (birazionali) involutorie della curva in se stessa, e che vi è *una* trasformazione $I=(AA')$ della serie che fa corrispondere ad un punto A un altro punto A' arbitrariamente assegnato.

Ora si può costruire un'altra serie di trasformazioni della curva, moltiplicando fra loro, a coppie, le involuzioni I; vedremo precisamente che si ottengono in tal guisa ∞^1, e non ∞^2, trasformazioni, essendovi *una* trasformazione π della serie che fa corrispondere ad un punto A un altro punto A' arbitrariamente dato sulla K. Dimostriamo anzitutto che esiste almeno una trasformazione π portante A in A': a tale scopo poniamo $\pi=I_2I_1$, dando arbitrariamente l'involuzione $I_1=(AA_1)$; allora resta determinata in modo unico l'involuzione $I_2=(A_1A')$, per la condizione posta che π porti A in A'.

In secondo luogo domandiamoci quante possono essere le trasformazioni della K in cui ad A corrisponda A': si può affermare *a priori* che esse sono, in ogni caso, in numero finito. Infatti una trasformazione siffatta deve portare la g_2^1 definita dal punto doppio A, cioè la $I=(AA)$, nella $g_2^1=(A'A')$ definita dal punto doppio A', inducendo fra le due g_2^1 (o fra le rette che ne rappresentano le coppie) una trasformazione proiettiva, in cui alla quaterna dei punti doppi $(ABCD)$ della prima g_2^1 corrisponda la quaterna $(A'B'C'D')$ dei punti doppi della seconda, ed in ispecie al punto A il punto A'. Ma le trasformazioni proiettive di due rette che mutano una quaterna $(ABCD)$ in una quaterna $(A'B'C'D')$ — dato che ve ne siano, essendo uguali, come qui accade, i due birapporti — sono in ogni caso in numero finito, e precisamente ve ne è in generale una sola che porta A in A', salvo i casi armonico ed equianarmonico in cui ve ne sono rispettivamente due e tre.

Ciò posto si deduce che la trasformazione $\pi = I_2 I_1$ portante A in A' (condizione che vale a determinare univocamente I_2 in funzione di I_1) non può variare per continuità al variare di I_1, e quindi rimane sempre la stessa: in altre parole vi è una sola trasformazione π, prodotto di due involuzioni I, che porta un punto A di K in un altro punto A'. Questa conclusione sussiste tanto per la curva ellittica K di *modulo generale*, quanto per la K *armonica* o *equianarmonica*, corrispondente ai due valori segnalati del birapporto invariante; solo *per le curve ellittiche di modulo generale si trova che non esistono altre trasformazioni in se stesse fuori delle due serie formate dalle involuzioni I e dalle π, prodotti di codeste involuzioni prese a due a due, invece le curve singolari, armoniche ed equianarmoniche, posseggono altre serie di trasformazioni* che caratterizzeremo più avanti.

Qui riprendiamo a studiare le due serie ∞^1 delle *trasformazioni ordinarie* (appartenenti ad una curva di modulo qualunque, generale o singolare) che abbiamo designato con I e π: per un motivo che apparirà tra poco, designeremo le trasformazioni π (prodotto di due I) come *trasformazioni di prima specie,* e le involuzioni I come *trasformazioni di seconda specie.* Con questa nomenclatura possiamo dire che « fissati due punti corrispondenti A e A' della curva ellittica K, restano sempre determinate due trasformazioni ordinarie di questa: una di prima specie e l'altra di seconda specie ». In particolare se si dà su K un punto unito $A = A'$, si determina su K la trasformazione di seconda specie definita dalla $g_2^1\ (AA)$ e la trasformazione di prima specie identica (quadrato di una qualunque I); quindi: *le trasformazioni di prima specie, non identiche, sono prive di punti uniti.*

Da quanto precede risulta che moltiplicando le involuzioni I, a tre a tre ovvero a quattro a quattro ecc., anzichè a due a due, si ricade sempre in trasformazioni ordinarie o di prima o di seconda specie. Più precisamente:

Il prodotto di tre involuzioni $I_3 I_2 I_1$, cioè il prodotto di due trasformazioni ordinarie, una di prima e l'altra di seconda specie, è una trasformazione di seconda specie.

Infatti, tenuto conto della proprietà associativa del prodotto, si può scrivere

$$I_3 I_2 I_1 = \pi I_1 , \quad \text{con} \quad \pi = I_3 I_2 ;$$

ora si potrà porre

$$\pi = I' I_1 ,$$

ed essendo $I_1^2 = 1$, risulterà

$$\pi I_1 = I'.$$

Segue di qui che:

Il prodotto di più trasformazioni di seconda specie dà una trasformazione di prima o di seconda specie, secondochè il numero dei fattori è pari o dispari. E pertanto: *le trasformazioni di prima specie formano un gruppo continuo,* mentre non vale la stessa proprietà per le trasformazioni di seconda specie che, *insieme* alle prime, formano un *gruppo misto.* (E appunto per riguardo al comportamento che esse hanno entro il gruppo misto, che le π sono state designate come trasformazioni di prima specie, e le I di seconda).

Domandiamoci ora se le trasformazioni ordinarie di una curva ellittica sieno fra loro permutabili. Anzitutto si verifica che una involuzione (di seconda specie) I non è permutabile con una generica π nè con un'altra generica involuzione I': infatti se la I è trasformata in se stessa da π o da I', bisogna che un punto doppio della I venga portato dall'operazione trasformante in un altro punto doppio, ciò che non accade in generale.

D'altronde si verifica che una π è sempre trasformata da una I nella sua inversa π^{-1}, giacchè si ha

$$(\pi I)^2 = 1 ,$$
$$I \pi I^{-1} = \pi^{-1} \qquad (I^{-1} = I);$$

da ciò, per l'osservazione precedente, resulta inoltre che una generica trasformazione π non è involutoria. Ma delle particolari π involutorie ci occuperemo più avanti.

Dal fatto che una trasformazione di prima specie π_1 è trasformata da una involuzione I nella sua inversa, si deduce che essa è invariante per il prodotto di due I, cioè:

Due trasformazioni di prima specie π_1 e π_2 sono sempre permutabili.

Osservazione. Questa proprietà appartiene alla serie continua ∞^1 delle trasformazioni di prima specie, in quanto essa forma un gruppo (analitico); imperocchè un gruppo ∞^1 può ritenersi come generato dalle potenze — ad esponente reale o complesso — di una sua trasformazione generica, ovvero mediante la ripetizione (integrazione) della trasformazione infinitesima che in esso si trova (Teorema fondamentale di Lie).

Come sopra abbiamo accennato, le curve ellittiche singolari (armoniche ed equianarmoniche) posseggono altre trasformazioni birazionali in se stesse, che vengono ad ampliare il gruppo misto delle trasformazioni ordinarie di prima e di seconda specie. Per studiare queste trasformazioni singolari, moveremo dall' osservazione che « sopra una curva armonica o equianarmonica K esistono certe trasformazioni singolari aventi un punto unito A, che può essere scelto ad arbitrio ». Infatti, essendo data una trasformazione singolare ω che porta A in A', otterremo due trasformazioni singolari che lasciano fermo A, moltiplicando la ω per le due trasformazioni ordinarie che portano A' in A.

Ciò posto, si consideri dapprima una curva K, armonica. La g_2^1 che ha un punto doppio in A, possiede quattro punti doppi A, B, C, D, che, considerati come elementi della g_2^1 suddetta, danno il birapporto $(ABCD) = -1$. Allora, come vedemmo, la K può essere rappresentata sulla retta doppia $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, dove il birapporto $(abcd) = -1$ e quindi, eseguendo una sostituzione lineare sopra la x, si otterrà, come immagine della K, la curva

$$y^2 = x^3 - x$$
$$(a = 0, \quad b = \infty, \quad c = 1, \quad d = -1).$$

Qui appare che l' involuzione

$$x' = -x,$$

(per cui restan fermi i punti A e B e vengono permutati C e D) dà luogo su K a due trasformazioni cicliche del quart'ordine

$$\omega = \begin{cases} x' = -x \\ y' = iy \end{cases} \qquad \tau = \omega^3 = \begin{cases} x' = -x \\ y' = -iy. \end{cases}$$

Incontrammo già questo resultato nella teoria della cubica (L. 3°, § 31).

È chiaro che le ω e τ, insieme all' identità ($\pi = 1$) e alla involuzione I col punto doppio A, porgono le sole trasformazioni della K che lascian fermo A; queste trasformazioni formano un gruppo ciclico avendosi

$$\omega^2 = I, \quad \omega^3 = \tau, \quad \omega^4 = 1.$$

Ora, al variare di A, le nostre trasformazioni singolari, ω e τ, danno origine a due serie continue ∞^1 di trasformazioni analoghe, ugualmente cicliche del quart' ordine, che si ottengono trasformando quelle che lascian ferme A mediante le trasformazioni di prima specie π: si hanno così proprio due serie di trasformazioni ω e τ, essenzialmente distinte. Infatti, la serie della τ non essendo contenuta in una serie di dimensione più ampia, si dedurrà moltiplicando una particolare ω per una I variabile (essendovi appunto una $\tau = \omega^3 = \omega I$), e se accadesse di trovare una $\tau = \omega$, la serie delle trasformazioni I dovrebbe contenere l' identità, mentre sappiamo che ciò non accade.

Ciò posto possiamo dire che le quattro serie di trasformazioni π, I, ω, τ, formano su K un gruppo misto. Domandare a quale serie appartenga il prodotto di due trasformazioni del gruppo, equivale a domandare come operino sulle serie delle π, I, ω, τ, — concepite come elementi — le trasformazioni stesse assunte come moltiplicatrici per es. a destra, che per questo riguardo designeremo con $\bar{\pi}$, $\bar{I}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\tau}$. In altre parole si tratta di sapere come il gruppo parametrico delle trasformazioni di K scambi fra loro le diverse serie di questo. La risposta a tale questione si ottiene subito osservando che due trasformazioni qualsiansi della K, variando per continuità entro le rispettive serie, possono sempre ridursi ad avere un medesimo punto unito A. Così il gruppo ciclico delle trasformazioni che lascian fermo A rispecchierà appunto il modo di operare del nostro gruppo parametrico sopra le serie di trasformazioni di K.

Riassumeremo i risultati ottenuti enunciando il

Teorema. *Ad una curva ellittica armonica, appartiene un gruppo misto di trasformazioni birazionali, composto di quattro serie continue ∞^1, cioè delle due serie di trasformazioni ordi-*

narie di prima e di seconda specie, π e I, e di due serie di trasformazioni singolari cicliche del quart' ordine, ω e τ: le trasformazioni della curva che lasciano fermo un punto formano un gruppo ciclico. Questo gruppo ciclico rispecchia il modo di operare del gruppo parametrico formato dalle $\bar{\pi}$, $\bar{I}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\tau}$, sulle serie delle π, I, ω, τ.

A rappresentare l' ultima parte dell' enunciato vale il seguente quadro:

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{\omega} = (\pi\omega I\tau) & \text{cioè: } \pi\omega = \omega_1,\ \omega_1\omega = I,\ I\omega = \tau,\ \tau\omega = \pi; \\ \bar{I} = \bar{\omega}^2 = (\pi I)(\omega\tau) & \text{cioè: } \pi I = I_1,\ I_1 I = \pi,\ \omega I = \tau,\ \tau I = \omega; \\ \bar{\tau} = \bar{\omega}^3 = (\pi\tau I\omega) & \text{cioè: } \pi\tau = \tau_1,\ \tau_1\tau = I,\ I\tau = \omega,\ \omega\tau = \pi; \\ \bar{\pi} = \bar{\omega}^4 = 1 & \text{cioè: } \pi_1\pi = \pi_2,\ I\pi = I_1, \omega\pi = \omega_1,\ \tau\pi = \tau_1. \end{array}\right.$$

Aggiungeremo l' osservazione esplicita che: i cicli di una trasformazione singolare ω formano su K una involuzione lineare g_4^1 dotata di due punti quadrupli (A e B) e due punti doppi C e D. *L' esistenza di una g_4^1 ciclica su K caratterizza il caso armonico*, portando così di conseguenza l' esistenza di una serie infinita di g_4^1 analoghe: infatti considerando la g_2^1 generata dal quadrato della trasformazione ciclica, si riconosce che i suoi punti doppi $ABCD$ danno luogo, entro la g_2^1, a un gruppo armonico.

Passiamo al caso di una K equianarmonica. Presa come innanzi una g_2^1 coi punti doppi A, B, C, D, si avrà come immagine di K una retta doppia corrispondente alla cubica

$$y^2 = x^3 + 1,$$

(già studiata nel L. 3°, § 31), sicchè appaiono due trasformazioni cicliche del terz' ordine col punto unito $A = (00)$: la trasformazione ω,

$$\omega = \begin{cases} x' = \varepsilon x \\ y' = y, \end{cases}$$

e il suo quadrato τ,

$$\tau = \omega^2 = \begin{cases} x' = \varepsilon^2 x \\ y' = y \end{cases} \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right):$$

Infine, moltiplicando le due trasformazioni precedenti per l'involuzione

$$I \doteq \begin{cases} x' = x \\ y' = -y, \end{cases}$$

si ottengono le due trasformazioni cicliche del sest' ordine,

$$\sigma = \omega I = \begin{cases} x' = \varepsilon x \\ y' = -y, \end{cases} \qquad \rho = \tau I = \begin{cases} x' = \varepsilon^2 x \\ y' = -y: \end{cases}$$

le trasformazioni sopra indicate insieme all' identità ($\pi = 1$) sono le sole che lasciano fermo A e formano il gruppo ciclico generato dalla σ. Ora, al variare di A, le quattro trasformazioni singolari ω, τ, σ, ρ, danno origine a quattro serie continue ∞^1 di trasformazioni, ugualmente cicliche, ed è facile riconoscere che si tratta effettivamente di quattro serie distinte. Ciò risulta dal fatto che le serie suddette non sono contenute in serie più ampie; infatti si otterranno tutte le τ moltiplicando una particolare ω per un' ω variabile, la quale non può mai ridursi all' identità; e similmente si otterranno tutte le σ moltiplicando una particolare ω per una I variabile, che non è mai identica, ecc.

Ciò posto possiamo dire che le sei serie di trasformazioni π, I, ω, τ, σ, ρ formano su K un gruppo misto. E, come nel caso armonico, si vede che il relativo gruppo parametrico, formato dalle operazioni (trasformazioni moltiplicatrici) $\bar{\pi}$, $\bar{I}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\tau}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\rho}$, opera sulle serie anzidette come il gruppo ciclico delle trasformazioni che lascian fermo un punto A di K. Avremo pertanto il

Teorema. *Ad una curva ellittica equianarmonica appartiene un gruppo misto di trasformazioni birazionali composto di sei serie continue* ∞^1, *cioè delle*:

2 *serie di trasformazioni ordinarie di prima e di seconda specie,* π *e* I;

2 *serie di trasformazioni singolari cicliche del terz' ordine,* ω *e* τ (1);

2 *serie di trasformazioni singolari cicliche del sest' ordine,* σ *e* ρ.

(1) Non si confondano ω e τ cicliche del terz' ordine con quelle, designate con lo stesso nome nel caso armonico, che erano cicliche del quart' ordine.

Il gruppo parametrico opera ciclicamente sulle serie delle trasformazioni π, I, ω, τ, σ, ρ, *come appare nel seguente quadro:*

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = (\pi\sigma\tau I\omega\rho) \\ \bar{\tau} = \bar{\sigma}^2 = (\pi\tau\omega)(\sigma I\rho) \\ \bar{I} = \bar{\sigma}^3 = (\pi I)(\sigma\omega)(\tau\rho) \\ \bar{\omega} = \bar{\sigma}^4 = (\pi\omega\tau)(\sigma\rho I) \\ \bar{\rho} = \bar{\sigma}^5 = (\pi\rho\omega I\tau\sigma) \\ \bar{\pi} = \bar{\sigma}^6 = 1 \end{cases}$$

Rileveremo anche qui che: i cicli di una trasformazione singolare σ, formano su K una involuzione lineare g_6^1, che si compone con la g_3^1 ciclica generata dal suo quadrato τ: la g_3^1 possiede tre punti tripli (equivalenti a 6 punti doppi) e la g_6^1 possiede un punto 6-*plo* (A), tre punti doppi (B, C, D) e altri due punti tripli (che sono i rimanenti punti tripli della g_3^1 avente in A un punto triplo).

L'esistenza di una g_3^1 *ciclica su* K *caratterizza il caso equianarmonico,* deducendosi da essa l'esistenza di una serie infinita di g_3^1 analoghe, e quella di una serie di g_6^1 cicliche. Possiamo dispensarci dal dimostrarlo, poichè ciò risulta per esclusione dall'analisi fatta; ma si vede anche subito che la g_3^1 ciclica presa insieme alla g_2^1 permutabile che ha comune con essa un punto unito, conduce a rappresentare la K sulla cubica equianarmonica $y^2 = x^3 + 1$.

Ora, ritornando a considerare le trasformazioni birazionali fra due curve ellittiche distinte, potremo enunciare il

Teorema. *Se* K *e* K' *sono due curve ellittiche di ugual modulo, esistono in generale due trasformazioni birazionali che mutano* K *in* K' *portando un punto* A *di* K *in un punto* A' *di* K'*; il numero di codeste trasformazioni diventa rispettivamente quattro e sei nei casi armonico ed equianarmonico.*

Pongasi che le K e K' siano due curve normali, dello stesso ordine n in un S_{n-1}; allora resultano proiettive quelle trasformazioni di K e di K' che portano uno degli n^2 punti di contatto degli iperpiani iperosculatori di K, in uno degli n^2 punti analoghi di K'. Quindi:

Due curve ellittiche normali dello stesso ordine n*, ammettono in generale* $2n^2$ *trasformazioni proiettive; ne ammettono* $4n^2$ *nel caso armonico e* $6n^2$ *nel caso equianarmonico.*

Se le due curve diventano sovrapposte, si ottiene sopra una K un gruppo proiettivo, che studieremo in generale nel seguente paragrafo. Per $n=3$ si ricade nello studio del gruppo proiettivo della cubica piana, svolto nel L. 3°, § 31.

28. Nota sui gruppi finiti di trasformazioni di una curva ellittica. — Ci proponiamo di determinare le trasformazioni di prima specie di una curva ellittica che sono involutorie ovvero cicliche d'ordine $n > 2$. Questa analisi ci condurrà a studiare i gruppi completi di trasformazioni di prima specie che lasciano ferme le g_n^{n-1}, permutandone gli n^2 punti *n-pli*. Un gruppo siffatto potrà essere ampliato per l'aggiunta di n^2 trasformazioni di seconda specie e, ulteriormente, per l'aggiunta di $2n^2$ ovvero di $4n^2$ trasformazioni singolari, nei casi armonico ed equianarmonico. La conoscenza dei gruppi formati in tal guisa, contiene virtualmente quella di tutti i gruppi finiti di trasformazioni di una curva ellittica in se medesima.

I gruppi di trasformazioni che lasciano ferme le g_n^{n-1} di una curva ellittica, si traducono nei gruppi proiettivi delle curve ellittiche normali d'ordine n. Per $n=3$ si ricade così in uno studio già svolto (L. 3°, § 31); ma il caso $n=4$ si presenta come nuovo in questo trattato, e noi coglieremo quindi volentieri l'occasione di esporre così i principi della teoria proiettiva delle quartiche gobbe di prima specie (§§ 29 e 30).

Procediamo a determinare le particolari trasformazioni di prima specie che sono involutorie. A tale scopo si consideri una g_2^1 dotata dei punti doppi A, B, C, D: una π che trasformi la g_2^1 in se stessa, non essendo identica, dovrà portare A in B, o in C, o in D, e reciprocamente. Così si trovano tre trasformazioni π_1, π_2, π_3, che — riuscendo permutabili con l'involuzione I definita dalla g_2^1 — debbono equivalere alla propria inversa (in cui sono trasformate dalla I), cioè essere involutorie. E non vi è altra π involutoria, dovendo essa riuscire permutabile con ogni I; pertanto le π_1, π_2, π_3 che associano due punti doppi della I, non dipendono dalla particolare scelta della I.

D'altronde la permutabilità di una π involutoria con tutte le g_2^1, risulta anche dall'osservare che ogni g_2^1 contenente una coppia di punti AA' coniugati in π è trasformata in sè da π; infatti, non potendo la π, priva di punti uniti, coincidere con una involuzione di seconda specie, si otterranno

— a partire dalle diverse coppie di π — tutte le ∞^1 g_2^1 della curva K: anzi più precisamente una medesima $I = g_2^1$ viene definita da *due* coppie che la π ha in comune colla I, queste due coppie essendo formate dai quattro punti doppi per la involuzione $I' = \pi I$.

Rileviamo esplicitamente che in quanto precede è contenuto il seguente resultato:

Esistono sopra una curva ellittica K tre trasformazioni involutorie di prima specie, π_1, π_2, π_3, ciascuna delle quali associa — separandole in due coppie — i quattro punti doppi di una qualsiasi g_2^1 appartenente a K; sicchè: *le quaterne dei punti doppi delle* g_2^1 *sopra* K, *formano un' involuzione* γ_4^1 *generata da un gruppo diedrico di trasformazioni di prima specie, che contiene le tre trasformazioni involutorie e l' identità. Codesta* γ_4^1 è un' *involuzione ellittica* le cui quaterne si possono porre in corrispondenza biunivoca coi punti della K; infatti, prendendo come modello proiettivo della K una cubica, le quaterne della g_4^1 rispondono alle tangenti altrove condotte dai punti della cubica (questo ragionamento si traduce subito in forma invariantiva associando alle g_2^1 su K i punti residui rispetto ad una g_3^2). La mancanza di punti doppi per la γ_4^1 è d' accordo con l' essere il suo genere uguale ad 1, secondo la formula di Zeuthen (cfr. § 10, pag. 73).

Il teorema sull' esistenza di tre corrispondenze involutorie su K, in cui si corrispondono i punti doppi delle sue g_2^1, fu già stabilito riferendosi alla cubica, nella teoria delle sue curve covarianti, dove vedemmo che ogni cubica può riguardarsi come hessiana di altre tre. (Cfr. L. 3°, § 29 e in ispecie la pag. 227 del Vol. II).

Aggiungeremo infine che — essendo data, su K, una g_2^1 coi punti doppi A, B, C, D — restano definite, insieme a questa $I = g_2^1$, altre tre involuzioni di seconda specie permutabili con essa:

$$I_1 = (AB)(CD), \quad I_2 = (AC)(BD), \quad I_3 = (AD)(BC);$$

sicchè il gruppo diedrico (trirettangolo) delle trasformazioni di prima specie di K è (in ogni caso) contenuto in un *gruppo bi-diedrico di 8 trasformazioni ordinarie che lasciano invariata la* g_2^1, formato da

$$\begin{array}{cccc} 1, & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 \\ I, & I_1, & I_2, & I_3. \end{array}$$

L' analisi delle trasformazioni di prima specie involutorie appartenenti ad una curva ellittica K, si lascia estendere passando alla determinazione delle *trasformazioni* π cicliche d' ordine $n > 2$, la cui effettiva esistenza resulterà come conclusione delle proposizioni seguenti:

1) Anzitutto si riconosce che « ogni π ciclica d' ordine n trasforma in se stesse tutte le g_n^{n-1} appartenenti alla K ». Infatti si ottiene una g_n^{n-1} invariante costruendo la serie lineare completa definita da un ciclo $AA'A'' \ldots A^{(n-1)}$ di π; ed è facile vedere che, al variare del ciclo considerato, varia anche la g_n^{n-1}, essendovi (soltanto) n gruppi di una g_n^{n-1} formati da cicli della π. Ciò resulta dal considerare la curva di ordine n dello S_{n-1} che si ottiene come immagine proiettiva della K in relazione alla detta g_n^{n-1}, attesochè codesta $K_n{}^{n-1}$ possiederà una trasformazione proiettiva subordinante π, con n iperpiani uniti (non vi può essere un fascio d' iperpiani uniti perchè ne seguirebbe l' esistenza di punti uniti per la π). Ma si può anche dire — *a priori* — che la π, lasciando ferma una particolare g_n^{n-1}, deve lasciarle ferme tutte. Infatti la serie delle g_n^{n-1} appartenenti a K costituisce un ente ellittico birazionalmente identico alla K (essendovi corrispondenza biunivoca fra le g_n^{n-1} e i punti residui rispetto ad una g_{n+1}^n, ovvero fra le g_n^{n-1} e i punti residui rispetto ad esse di $n-1$ punti fissi), e su codesto ente la π induce una trasformazione di prima specie, che non può possedere un elemento unito senza essere identica.

È ovvio che la proposizione stabilita vale anche per le π cicliche secondo un divisore di n, che possono dirsi (impropriamente) d' ordine n.

2) Una trasformazione di prima specie π che lasci invariata una g_n^{n-1} è ciclica (propriamente o impropriamente) di ordine n.

Anzitutto osserviamo:

Una trasformazione di prima specie che applicata n volte a partire da un punto A di una curva K riconduce ad A, è ciclica d' ordine n. Infatti π^n, possedendo il punto A come unito, si riduce all' identità.

Ora si consideri la curva normale $K_n{}^{n-1}$ dello S_n, immagine proiettiva della K, su cui la g_n^{n-1} viene segata dagli iperpiani: allora la π indurrà nello S_n un' omografia trasformante in sè la $K_n{}^{n-1}$, e — poichè questa omografia possiede degli iperpiani uniti, ma non dei punti uniti sulla curva — si conclude che la π è ciclica (di un certo ordine $m \leq n$) lasciando invariato il gruppo delle intersezioni della K_n^{n-1} con un iperpiano unito.

Se il gruppo anzidetto si compone di n punti distinti, appare subito che l'ordine di ciclicità, m, di π è un divisore di n. La stessa conclusione vale anche nell'ipotesi che l'iperpiano anzidetto tocchi la curva, perchè se esiste un punto di contatto, che figuri i volte fra le intersezioni dell'iperpiano, ne esistono altri $m-1$, figuranti lo stesso numero i di volte.

3) Si costruisce sopra la curva K una trasformazione di prima specie ciclica d'ordine n, associando ad un punto A un altro punto n-*plo*, A', della g_n^{n-1} definita dal punto A contato n volte: scegliendo convenientemente A' fra gli n^2-1 punti n-*pli* della g_n^{n-1} diversi da A, si ottiene una trasformazione il cui ordine di ciclicità è propriamente n.

È anzitutto chiaro che, comunque sia scelto A' entro il gruppo anzidetto, la trasformazione di prima specie $\pi = (AA')$, che porta A' in A, lascia ferma la g_n^{n-1}, e però risulta ciclica d'ordine n o d'ordine m divisore di n: questo secondo caso ha luogo quando A' sia scelto entro il gruppo degli m^2 punti m-*pli* della g_m^{m-1} determinata dal punto m-*plo* A.

Ora se n è un numero primo: $n = p$, tutte le p^2-1 trasformazioni π ottenute nel modo anzidetto, riescono propriamente cicliche d'ordine p: si definiscono in tal guisa su K $\dfrac{p^2-1}{p-1} = p+1$ involuzioni cicliche γ_p.

Se poi n è potenza di un numero primo: $n = p^\alpha\ (\alpha > 1)$ le trasformazioni (AA') che riescono cicliche secondo un divisore di n, saranno certo — propriamente o impropriamente — cicliche d'ordine $p^{\alpha-1}$, corrispondendo dunque a punti A' che sono multipli secondo $p^{\alpha-1}$ per la serie lineare completa determinata dal punto A contato $p^{\alpha-1}$ volte. Si otterranno pertanto

$$[(p^\alpha)^2-1]-[(p^{\alpha-1})^2-1] = p^{2\alpha-2}(p^2-1)$$

trasformazioni cicliche proprie d'ordine p^α.

Quando n contenga diversi fattori primi

$$n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \dots,$$

si costruirà una trasformazione ciclica proprio d'ordine n, moltiplicando una trasformazione ciclica d'ordine $p_1^{\alpha_1}$, per una d'ordine $p_2^{\alpha_2}$, etc. Si dimostra infatti che: « il prodotto $\pi_1\pi_2$ di due operazioni cicliche permutabili di periodi m_1 e m_2 primi fra loro, è sempre ciclica d'ordine $n = m_1 m_2$, cioè che le π_1 e π_2 sono *indipendenti*, non avendo comune altra potenza che l'identità ». Invero se $\pi_1{}^r = \pi_2{}^s = \pi_3$, la π_3 deve essere un'operazione ciclica il cui periodo divide contemporaneamente m_1 e m_2.

Con ciò abbiamo riconosciuto che:

Sopra una curva ellittica K esistono sempre trasformazioni cicliche proprie d'ordine n; insieme a quelle il cui ordine è un divisore di n, codeste trasformazioni formano un gruppo, G, d'ordine n^2, che scambia fra loro gli n^2 punti *n-pli* di una qualunque g_n^{n-1}.

Le operazioni del gruppo G anzidetto (essendo trasformazioni di prima specie) sono a due a due permutabili, cioè il G è *abeliano*, e del resto isomorfo a un gruppo di sostituzioni sopra n^2 elementi (punti).

Osservazione. L'esistenza di trasformazioni cicliche proprie d'ordine n sopra una curva ellittica K, si può anche stabilire riducendosi (come è sempre possibile per continuità) al caso in cui la K sia una curva reale, giacchè si dimostra precisamente che: *sopra una curva ellittica reale esiste un gruppo ciclico d'ordine n di trasformazioni di prima specie reali, che ne lasciano invariato ciascun ramo.*

La dimostrazione si svolge nel seguente modo: si consideri un ramo reale della K, e su questo due punti PP' che definiscono una trasformazione di prima specie reale $\pi = (PP')$; allora resta anche definita la trasformazione $\pi^n = (PP')^n$, che porterà il punto P in un certo punto P_n. Ebbene, se si fa variare per continuità il punto P' a partire a P, muovendosi sempre in un medesimo senso, il punto P_n si muoverà pure (nello stesso senso) a partire da P stesso, e si arriverà ad una posizione di P, per cui P_n viene a coincidere con P, resultando dunque $\pi^n = 1$; si troveranno poi altre $n-2$ posizioni successive di P, per cui si verifica la stessa circostanza, corrispondenti alle successive potenze $\pi^2, \pi^3, \ldots \pi^{n-1}$ della nominata π.

Il ragionamento precedente si lascia svolgere in forma completamente rigorosa sulla base del postulato di continuità.

Non ci indugeremo su questo sviluppo, osservando che si tratta in sostanza di ripetere le considerazioni mercè cui si riesce a dimostrare in quest' ordine di idee la divisibilità del cerchio in n parti uguali [1]: qui si ha a che fare col gruppo ∞^1 delle rotazioni attorno ad un punto, che è oloedricamente isomorfo al gruppo delle trasformazioni di prima specie reali della curva K, e si tratta di riconoscere l' esistenza di rotazioni cicliche d' ordine n.

Abbiamo veduto così che per una curva ellittica reale K (la quale può contenere, come la cubica, uno o due rami) si trova sempre una trasformazione di prima specie reale, π, ciclica d' ordine n, che lascia invariato ciascun ramo della curva; ora si può aggiungere che per n dispari una trasformazione ciclica d' ordine n deve necessariamente lasciare invariato ciascun ramo di K, e quindi il gruppo G_{n^2} non comprende altre trasformazioni reali che π e le sue potenze. Invece per n pari: $n = 2m$ — e nel caso che la K si componga di due rami — una considerazione di continuità analoga alla precedente, vale a provare che esiste anche una trasformazione π' ciclica d' ordine n che permuta fra loro i due rami: ma questa non è indipendente da π, giacchè il suo quadrato è una trasformazione ciclica d' ordine m che lascia fermi i rami di K e quindi una potenza pari di π. Di conseguenza il gruppo G_{n^2} conterrà al massimo $2n$ trasformazioni di prima specie reali, e precisamente ne conterrà solo n per n dispari o quando la K consta di un solo ramo, ed invece $2n$ per n pari quando la K consta di due rami. In quest' ultimo caso le $2n$ trasformazioni reali anzidette formano un sottogruppo G_{2n} del G_{n^2}, il quale si può generare per moltiplicazione del G_n ciclico reale che lascia invariati i due rami, con una delle due γ_2^1 che scambiano questi rami l' uno nell' altro. (La costruzione effettiva di queste γ_2^1 si ottiene notando che la g_2^1 segata sopra una cubica piana dalle rette uscenti da un punto del ramo impari, possiede due punti doppi sopra un ramo e due sopra l' altro).

Ritorniamo allo studio generale del gruppo abeliano $G = G_{n^2}$ costituito dalle trasformazioni di prima specie, reali

[1] Cfr. per es. l'Articolo di G. Vitali « Sulle applicazioni del postulato di continuità... » nelle « Questioni riguardanti le Matematiche elementari » raccolte e coordinate da F. Enriques.

e non reali, di una curva ellittica K, che trasformano in se stesse tutte le g_n^{n-1}. Vogliamo riconoscere che esistono in questo gruppo G due operazioni propriamente cicliche di ordine n, π_1 e π_2, indipendenti fra loro, che generano per moltiplicazione l'intiero gruppo. Procederemo alla dimostrazione cominciando dall'ipotesi che n sia un numero primo, considerando poi quella che n sia la potenza di un numero primo, per passare infine al caso generale.

a) Anzitutto se n è primo: $n=p$, fra le p^2-1 trasformazioni cicliche d'ordine p, ve ne sono certo due indipendenti, π_1 e π_2, poichè basta prendere π_2 fuori del gruppo ciclico generato da π_1.

b) Suppongasi ora n potenza di un numero primo: $n=p^\alpha$. Per mostrare l'esistenza di due trasformazioni π_1 e π_2 d'ordine n, fra loro indipendenti, faremo vedere anzitutto che ove π_2 non sia indipendente da π_1 essa è del tipo

$$\pi_2=\pi\pi_1{}^h,$$

dove π è una delle $\left(\frac{n}{p}\right)^2$ trasformazioni d'ordine $\frac{n}{p}$.

Infatti, se π_2 non è indipendente da π_1, fra le sue successive potenze ve ne sarà una prima, $\pi_2{}^s$, uguale a una potenza di π_1:

$$\pi_2{}^s=\pi_1{}^r=\pi_3.$$

Il numero s è un divisore di n, $s=\frac{n}{q}$, ed essendo q il periodo di $\pi_1{}^r=\pi_2{}^s$ sarà rq multiplo di n:

$$rq=nh,\quad r=\frac{n}{q}h=sh,$$

dove h riesce primo con q.

Ora si ha

$$(\pi_2\pi_1{}^{-h})^s=\pi_2{}^s\pi_1{}^{-hs}=\pi_2{}^s\pi_1{}^{-r}=1;$$

cioè

$$\pi_2\pi_1{}^{-h}=\pi,$$

ha il periodo, proprio od improprio, $\frac{n}{p}$, di cui s, divisore di n, è uguale o divisore. Risulta così $\pi_2=\pi\pi_1{}^h$.

Ora le operazioni del tipo $\pi\pi_1{}^h$ sono in numero di $\left(\frac{n}{p}\right)^2 p$:

infatti le operazioni π sono $\left(\frac{n}{p}\right)^2$, e ad h basta dare i valori 1, 2... p, giacchè

$$\pi\pi_1^{p+h} = \pi\pi_1^{p} \cdot \pi_1^{h} = \pi'\pi_1^{h},$$

dove π' riesce ancora di periodo $\frac{n}{p}$.

Poichè il nostro G ha ordine $n^2 > \left(\frac{n}{p}\right)^2 p$, si conclude che esiste in esso qualche π_2, ciclica d'ordine n, indipendente da π_1.

c) Dal caso precedente si passa al caso generale in cui sia

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots,$$

ricordando che le trasformazioni cicliche d'ordine n della K si ottengono moltiplicando quelle d'ordine $p_1^{\alpha_1}$, per quelle d'ordine $p_2^{\alpha_2}$.... Ci basterà osservare che:

Se m_1 e m_2 sono numeri primi fra loro, e se π_1 e π_1', π_2 e π_2' sono due coppie di operazioni indipendenti del gruppo abeliano G, rispettivamente di periodo m_1 e m_2, anche i prodotti $\pi_1\pi_2$ e $\pi_1'\pi_2'$ costituiscono due operazioni indipendenti (di periodo $n = m_1 m_2$).

L'asserto si dimostra per assurdo come segue.

Se

$$(\pi_1\pi_2)^s = (\pi_1'\pi_2')^r = \pi_3,$$

indichiamo con q il periodo di π_3 ($q \neq 1$) e, poichè q è divisore di $n = m_1 m_2$, scindiamo q in due fattori q_1 e q_2 rispettivamente summultipli dei numeri primi fra loro m_1 e m_2.

$$q = q_1 q_2.$$

Ciò posto, se $(\pi_1\pi_2)^s$ è la prima potenza di $\pi_1\pi_2$ uguale a una potenza di $\pi_1'\pi_2'$, avremo, analogamente al caso *b*),

$$s = \frac{m_1 m_2}{q_1 q_2}, \quad r = \frac{m_1 m_2}{q_1 q_2} h$$

dove h risulta primo con $q = q_1 q_2$.

Uno almeno dei due numeri q_1 e q_2 sarà diverso da uno, sia esso q_1. Si ha allora

$$(\pi_1\pi_2)^{sq_1} = \pi_1^{\frac{m_2}{q_2}m_1} \pi_2^{\frac{m_2}{q_2}m_1} = \pi_2^{\frac{m_2}{q_2}m_1},$$

e, d' altra parte,

$$(\pi_1\pi_2)^{sq_1} = (\pi_1'\pi_2')^{rq_1} = \pi_2'^{\frac{m_2}{q_2}m_1h};$$

segue da queste relazioni

$$\pi_2^{\frac{m_2}{q_2}m_1} = \pi_2'^{\frac{m_2}{q_2}m_1h};$$

il che, per l' indipendenza di π_2 e π_2', è assurdo ove non sia $q_2 = 1$. Ma allora la relazione

$$(\pi_1\pi_2)^s = (\pi_1'\pi_2')^r$$

porterebbe

$$\pi_1^{\frac{m_1}{q_1}m_2} = \pi_1'^{\frac{m_1}{q_1}m_2h}$$

anche questa assurda, essendo $q_1 \neq 1$ e π_1 e π_1' indipendenti.

Così la nostra analisi si conchiude, restando dimostrato che appartengono in ogni caso al gruppo G (d' ordine n^2) due operazioni generatrici π_1 e π_2 d' ordine n.

Quindi i punti n-pli di una g_n^{n-1} su cui il G opera in modo semplicemente transitivo, si potranno distribuire in un quadro:

$$\text{I)} \qquad \left\{\begin{array}{llll} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}, \end{array}\right.$$

così che la π_1 operi la sostituzione $(1, 2,\dots n)$ sui primi indici delle A_{ik}, e la π_2 operi la medesima sostituzione sui secondi indici: allora la trasformazione π che porta A_{11} in A_{ik} sarà data da

$$(A_{11}\ A_{ik}) = \pi_1^i\pi_2^k.$$

Riassumeremo i resultati ottenuti nel seguente

Teorema. *Le trasformazioni, di prima specie, cicliche di ordine n, di una curva ellittica K, appartengono ad un gruppo abeliano G_{n^2} d' ordine n^2, che scambia fra loro gli n^2 punti n-pli A_{ik} $(i, k = 1, 2,\dots n)$ di una qualsiasi g_n^{n-1}*: codesti punti *n-pli* risultano coniugati in una involuzione ellittica $\gamma^1_{n^2}$ che — come la serie delle g_n^{n-1} — è birazionalmente identica alla K.

Il gruppo G_{n^2} si può generare per moltiplicazione, mediante due operazioni cicliche d' ordine n indipendenti fra loro,

$$\pi_1 = (A_{1r}\ A_{2r} \dots A_{nr}) \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$
$$\pi_2 = (A_{s1}\ A_{s2} \dots A_{sn}) \qquad (s = 1, 2, \dots n).$$

Aggiungasi che:

il gruppo G_{n^2} è sempre contenuto in un gruppo G_{2n^2} di $2n^2$ trasformazioni ordinarie della K, che — oltre alle operazioni del G_{n^2} — contiene le n^2 trasformazioni di seconda specie associanti A_{11} agli A_{ik}.

Naturalmente il detto G_{2n^2}, definito dalla condizione di lasciare invariata una g_n^{n-1}, si amplia ulteriormente nei casi armonico ed equianarmonico, per l' aggiunta delle trasformazioni straordinarie che portano A_{11} in uno dei punti A_{ik}: *nel caso armonico* si ottiene così un *gruppo G_{4n^2}*, che contiene — oltre le trasformazioni ordinarie — $2n^2$ *trasformazioni straordinarie cicliche del quart' ordine*; invece *nel caso equianarmonico* si ottiene un *gruppo G_{6n^2}*, a cui appartengono — oltre le trasformazioni ordinarie del G_{2n^2} — $4n^2$ *trasformazioni straordinarie, cioè $2n^2$ trasformazioni cicliche del sest' ordine e $2n^2$ del terzo* (quadrati delle precedenti).

Osservazione. — Si assuma una curva ellittica normale, d' ordine n nello spazio ad $n-1$ dimensioni, la quale verrà designata con $K_n{}^{n-1}$ o brevemente con K_n. La considerazione del gruppo G, formato dalle trasformazioni della K_n che lasciano invariata la g_n^{n-1} delle sezioni iperpiane, ci porge il *gruppo delle trasformazioni proiettive della curva*, che — per un modulo generico — sarà precisamente un G_{2n^2}. Ora è importante osservare che:

Il gruppo delle trasformazioni proiettive di una curva ellittica normale, non possiede invarianti assoluti, riuscendo così indipendente dal modulo di essa.

Dimostreremo anzitutto la proprietà enunciata per il gruppo G_{n^2} delle trasformazioni di prima specie. A tal uopo si tenga presente che questo gruppo è abeliano, e si può generare per moltiplicazione di due omografie cicliche indipendenti d' ordine n, π_1, π_2. Si noti ancora che una di queste omografie, per es. π_1, non possiede certo una retta di punti uniti, giacchè in tal caso ammetterebbe anche un fascio di iperpiani uniti, e quindi l'involuzione definita dal gruppo ciclico $(1, \pi_1, \pi_1^2 \ldots \pi_1^{n-1})$ sarebbe una g_n^1 dotata di coincidenze, che darebbero punti uniti di π_1, mentre invece essa è una γ_n^1 ellittica priva di coincidenze.

Pertanto l'omografia π_1 dello S_{n-1} possiederà n punti uniti distinti $P_1 P_2 \ldots P_n$ [1]; questi definiscono alla loro volta un numero finito di omografie cicliche d'ordine n (non possedenti altri punti uniti), rappresentabili con le equazioni

$$y_i = \varepsilon_i x_i$$

dove $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ designano radici n-esime diverse dell'unità (potenze di una medesima radice primitiva).

Ora possiamo riconoscere che la costruzione di un'omografia π_2 dello S_{n-1}, che sia ciclica d'ordine n con n punti uniti distinti e permutabile con π_1, implica la scelta di un certo numero di punti arbitrari che — presi insieme con $P_1 P_2 \ldots P_n$ — costituiscono una figura priva di invarianti assoluti; e ciò anche indipendentemente dalle restrizioni ulteriori a cui la π_2 dovrebbe assoggettarsi affinchè generi, con π_1, il nostro G_{n^2} abeliano. Infatti la π_2 dovrà lasciare invariato il gruppo degli n punti $P_1 P_2 \ldots P_n$, i quali verranno dunque distribuiti in tanti cicli che — per una denominazione opportuna dei punti — saranno $(P_1 P_2 \ldots P_r)$, $(P_{r+1}\, P_{r+2} \ldots P_{r+s}) \ldots$ Pertanto la π_2 lascierà fermo lo $S_{r-1} = (P_1\, P_2 \ldots P_r)$ e possiederà in esso r punti uniti nessuno dei quali appartiene a una faccia della piramide fondamentale $P_1\, P_2 \ldots P_r$: l'omografia subordinata da π_2 entro codesto spazio verrà quindi definita (a meno di una irrazionalità che implica un numero finito di scelte) quando si assuma ad arbitrio nello S_{r-1} un punto unito X in posizione generica. Similmente la costruzione dell'omografia subordinata da π_2 entro lo S_{s-1} unito individuato da $P_{r+1}\, P_{r+2} \ldots P_{r+s}$, dipenderà dalla scelta arbitraria di un punto unito, Y, in posizione generica entro questo spazio, etc.

In definitiva la costruzione di una π_2, ciclica d'ordine n e permutabile con π_1, viene a dipendere (a meno di un nu-

[1] Ricordiamo che un'omografia ciclica di S_{n-1} non può avere due punti uniti infinitamente vicini, perchè sulla retta che li congiunge verrebbe subordinata una proiettività parabolica che non può essere ciclica (vol. I, pag. 198).

mero finito di scelte) dai punti P_1, P_2, ... P_n, X, Y.... che nel loro insieme costituiscono una figura priva di invarianti assoluti. Ora, poichè il gruppo G_{n^2} riesce definito dalle sue operazioni generatrici π_1 e π_2, e queste sono determinate — a meno di un numero finito di scelte — dalla configurazione dei punti P_1, P_2,.... P_n, X, Y...., che è priva di invarianti assoluti, anche il G_{n^2} stesso riesce privo di invarianti assoluti. Il ragionamento precedente non prova ancora che tutti i G_{n^2} siano proiettivi fra loro, giacchè si potrebbe dubitare che ne esistessero più specie distinguibili in rapporto ad una irrazionalità aritmetica; ma questo dubbio si esclude perchè i G_{n^2} dipendono univocamente dalle curve ellittiche K_n, che formano una serie continua.

Ora il teorema dimostrato per i gruppi G_{n^2} costituiti dalle trasformazioni proiettive di prima specie di una K_n, si estende ai gruppi proiettivi completi G_{2n^2}, ricordando che il G_{n^2}, generato da π_1 e π_2, si amplia in un G_{2n^2} per l'aggiunta di una involuzione I che deve trasformare le omografie π_1 e π_2 nelle loro inverse.

Pongasi dapprima che le π_1 e π_2 non abbiano punti uniti comuni e che π_2 permuti fra loro i punti uniti di π_1 secondo la sostituzione

$$(P_1 P_2 \dots P_r)\ (P_{r+1} P_{r+2} \dots P_{r+s}) \dots \quad (r > 1,\ s > 1, \dots);$$

in questo caso si vede subito che le omografie I_r, I_s, ..., subordinate da I entro gli spazi

$$S_{r-1} = (P_1 P_2 \dots P_r), \quad S_{s-1} = (P_{r+1} P_{r+2} \dots P_{r+s}), \dots,$$

riescono definite a meno di un numero finito di scelte, poichè nel primo spazio i due gruppi di punti P e X uniti per π_1 e π_2 forniscono $2r$ coppie di punti omologhi dell'omografia I_r, e così di seguito; si deduce che anche l'omografia involutoria I, dello S_n, resta definita a meno di un numero finito di scelte, giacchè la sua costruzione dipende da quella dei due spazi complementari di punti uniti, di cui si conoscono le sezioni con S_{r-1}, S_{s-1}....

Il ragionamento precedente esige una lieve modificazione nell'ipotesi (di cui qui non giova indagare la possibilità) che le omografie π_1 e π_2 abbiano dei punti uniti comuni, diciamo per es. P_n, P_{n-1}, ... P_{n-t}. In questa ipotesi la costruzione di una omografia involutoria I_{t+1} che sia permutabile con le omografie subordinate da π_1 e π_2 nello $S_t = (P_n P_{n-1} \dots P_{n-t})$, viene a dipendere da alcuni elementi arbitrari, potendosi assumere ad arbitrio l'intersezione, Z_{ik}, di uno degli spazi uniti con una qualsiasi retta $P_i P_k$, in relazione all'ipotesi che i due punti P_i e P_k vengano scambiati fra loro da I_{t+1}, e quindi che la proiettività subordinata sulla retta $P_i P_k$ sia una involuzione i cui punti doppi separano armonicamente P_i e P_k. Tuttavia è chiaro che la figura dei punti $P_n P_{n-1} \dots P_{n-t}$ e degli Z_{ik}, entro lo S_t, riesce sempre priva di invarianti assoluti. Pertanto, come nel caso precedente, si conclude che la costruzione delle omografie π_1, π_2, I, che definiscono un G_{2n^2}, dipende da una figura di punti priva di invarianti assoluti entro lo S_{n-1}, e così che anche il G_{2n^2} è privo di invarianti assoluti. c. d. d.

Discende dalla proprietà stabilita che, mentre le K_n di S_{n-1} dipendono da $n(n+2)+1$ parametri (cioè da tanti parametri quanti sono quelli delle omografie più il modulo), i corrispondenti gruppi proiettivi G_{2n^2} dipendono da $n(n+2)$ parametri (essendovi soltanto un numero finito di omografie che trasforma un G_{2n^2} in se medesimo): perciò ad ogni G_{2n^2} dovranno corrispondere ∞^1 K_n, tutte invarianti per il medesimo gruppo proiettivo, le quali descriveranno una superficie invariante F. Si può aggiungere che le K_n formano sopra F un *fascio,* per un punto generico di F passando *una* K_n della serie. Infatti preso un punto generico A di F, i suoi trasformati per le omografie del G_{2n^2} formano un sistema di $2n^2$ punti, che debbono resultare comuni alle K_n passanti per A; ciò significa che per A passa una sola K_n giacchè due K_n non possono avere $2n^2$ punti a comune. Anzi se lo spazio S_{n-1} ha più di due dimensioni (cioè per $n > 3$), non è neppur possibile che due K_n abbiano n^2 punti a comune, e tanti ne dovrebbero avere in ogni caso se esse hanno un punto comune, essendo le trasformazioni di prima specie del G_{n^2} prive di punti uniti: così, per $n > 3$, il fascio delle K_n su F risulta privo di punti base.

Riassumeremo i resultati ottenuti, enunciando il

Teorema [1]. *Una curva ellittica normale d'ordine n nello*

[1] Cfr. Enriques: Rendiconti dell'Acc. di Bologna, 2 maggio 1920.

spazio ad $n-1$ *dimensioni, possiede in generale un gruppo proiettivo* G_{2n^2}, *che lascia invariate* ∞^1 *curve ellittiche analoghe di modulo variabile: tali curve appartengono ad una superficie invariante e su questa formano un fascio* (privo di punti base per $n>3$), che prenderà il nome di *fascio sizigetico,* riducendosi per $n=3$ al fascio di cubiche studiato da HESSE (cfr. L. 3°, §§ 27, 28 e 31).

Vediamo di esemplificare le cose dette per le curve ellittiche d'ordine $n=3$; illumineremo così, sotto una nuova luce, la teoria delle cubiche svolta nel L. 3°.

Anzitutto abbiamo che la cubica piana possiede in generale un gruppo G_{18} di trasformazioni proiettive, formato da 9 omologie armoniche (g_2^1 sulla K_3), da 8 omografie cicliche del terz'ordine e dall'identità, quest'ultime corrispondenti alle trasformazioni di prima specie che permutano fra loro i 9 flessi. Un'omologia armonica, I, lascia fermo un flesso A_1 distribuendo gli altri 8 in tante coppie di una g_2^1, che è dotata di quattro punti doppi distinti: tre di questi punti saranno le intersezioni di K_3 con l'asse di I, e il quarto sarà il centro dell'omologia.

Ora si riconosce che il centro è precisamente il flesso A_1, giacchè tre punti di contatto delle tangenti altrove condotte dal centro sono le intersezioni con l'asse, mentre il punto di contatto della quarta tangente coincide col centro medesimo.

Resta confermato in tal guisa che le 9 omologie armoniche del G_{18} hanno per centri i 9 flessi della cubica K_3, ciò che trae — come sappiamo — la proprietà fondamentale della configurazione dei flessi.

Anche dal punto di vista della *realità* si ritrova facilmente il noto teorema che « *la cubica reale possiede tre flessi reali appartenenti al ramo impari* ». Infatti fra i nove flessi della cubica ve ne sarà uno almeno reale, F_1, e poichè questo non può trovarsi su un ramo pari, dovrà stare sul ramo impari; ma esiste una omografia ciclica del terz'ordine π, che trasforma in se stessa la cubica e il suo ramo impari, e rispetto alla π, F_1 descriverà un ciclo F_1, F_2, F_3, costituito da 3 flessi reali: non ve ne potranno essere altri perchè risulterebbe definita un'altra omografia ciclica del terz'ordine lasciante ferma la cubica, fuori del gruppo ciclico generato da π [1].

Ritorniamo alla considerazione algebrica della cubica, prescindendo dalle questioni di realità. Secondo il teorema generale stabilito innanzi, il gruppo proiettivo G_{18} di una cubica piana K_3, dovrà lasciare invariate ∞^1 cubiche analoghe formanti un fascio: si riconosce che tutte queste cubiche posseggono i medesimi flessi, costituenti i 9 punti base giacchè, altrimenti, le omologie armoniche del G_{18} varierebbero col variare della cubica K_3. Così dunque si trova nuovamente dimostrata, da un punto di vista superiore, la proprietà fondamentale del fascio sizigetico di cubiche, che nel L. 3°, § 28 fu dedotta mercè la considerazione analitica della curva hessiana.

Tutta la teoria dei gruppi proiettivi appartenenti alle cubiche e ai loro fasci sizigetici (ibidem § 31) rimane così ricostruita nelle sue linee essenziali: confronti più particolari potranno formare oggetto di utili esercitazioni. Noi procediamo ora ad applicare i nostri risultati generali al caso delle quartiche gobbe di prima specie ($n = 4$), che verranno studiate diffusamente nei due paragrafi che seguono, traendo così occasione a svolgere la teoria proiettiva di codesti enti geometrici elementari.

29. Applicazioni alla teoria proiettiva delle quartiche gobbe di prima specie. — La quartica di prima specie priva

[1] Ricordiamo che l'esistenza di tre flessi reali sul ramo impari della cubica risulta anche:

1) dalla riduzione della cubica alle forme normali: parabole campaniformi di Newton (cfr. Vol. II, L. 3°, § 26);

2) dall'analisi di Möbius in relazione alle proprietà topologiche del piano proiettivo (cfr. Vol. II, L. 3°, § 34);

3) dalla corrispondenza [2, 1] che intercede sopra il ramo impari fra un punto e il suo tangenziale: la corrispondenza (come si deduce dall'esame dell'intorno di un flesso) è discorde e possiede tre punti uniti. Questa analisi svolta nel L. 3°, § 34, Vol. II, pag. 249, è stata approfondita da Chisini, in una Nota dell'Istituto Lombardo del giugno 1920 (cfr. Juel, *Kiob. Skrift.*, 1899), dove il teorema viene anche esteso per $n > 3$.

Per n dispari le considerazioni usate nel testo permettono subito di dimostrare che *sopra il ramo impari di una curva ellittica reale normale, K_n, esistono sempre n punti stazionari reali* (in cui la curva ha un contatto n-punto col suo piano osculatore).

di punti doppi dello spazio ordinario, K_4, cioè la quartica gobba di genere uno, si lascia definire come intersezione di due superficie del second' ordine irreducibili che non si toccano: $f=0$, $\varphi=0$. (Cfr. L. 3°, § 18, vol. II, pag. 145).

Nel fascio $f-\lambda\varphi=0$ si trovano quattro coni distinti, i cui vertici A, B, C, D formano un *tetraedro* covariante, che designeremo come *fondamentale* o *coniugato* per la K_4. Il modulo della curva ellittica K_4 viene dato dal birapporto dei quattro piani tangenti ad essa che si possono condurre per una corda qualunque: codesto birapporto riuscendo costante al variare della corda. Ora si tratta di esprimere il detto modulo in relazione al fascio di quadriche $f-\lambda\varphi=0$ che ha come curva base la K_4. Si trova precisamente che:

Il modulo della quartica ellittica, definita come curva base di un fascio di quadriche, è dato dal birapporto dei quattro coni che appartengono al fascio.

Per dimostrare questo teorema ricorderemo dapprima che il modulo della K_4 è uguale al modulo della serie delle g_2^1 che ad essa appartengono (cfr. pag. 265). Ora una quadrica per K_4 definisce in generale due g_2^1 segate dai suoi due sistemi di generatrici, e le due g_2^1 coincidono soltanto quando coincidono questi sistemi, cioè per le quadriche del fascio che sono coni: segue da ciò che l'ente ellittico K_4 (ovvero la serie delle sue g_2^1) viene rappresentato doppiamente sul nostro fascio di quadriche, avendosi come elementi di diramazione i quattro coni, di guisa che il loro birapporto darà il modulo della K_4. (È necessario che il lettore si familiarizzi con questa maniera astratta di ragionare, ravvisando negli elementi del nostro fascio i punti di una retta, ai quali rispondono le coppie di una g_2^1 entro l'ente semplicemente infinito i cui elementi sono le g_2^1 di K_4).

Si può interpretare in forma più concreta il ragionamento precedente. Perciò giova osservare che « i piani tangenti ad un cono per K_4 sono bitangenti alla curva ». Ordunque si prenda su K_4 un punto P e si associ a ciascuna quadrica del fascio il rispettivo piano tangente in P che conterrà la tangente p: allora ad ogni quadrica corrisponde un piano per la p, e ai coni del fascio corrispondono i quattro piani per p tangenti (altrove) alla K_4.

Conviene spiegare in breve perchè il ragionamento qui svolto non sia che una interpretazione concreta del precedente. A tal uopo basta osservare che il piano, per la p, tangente ad una quadrica del fascio $f - \lambda\varphi = 0$, sega la quadrica secondo due generatrici, e la K_4 secondo due punti P_1 e P_2 che sono residui di P rispetto alle due g_2^1 segate dai due sistemi di generatrici cui le nominate appartengono: così P_1 e P_2 rappresentano le due g_2^1 definite su K_4 da codesti sistemi di generatrici, e — variando la quadrica del fascio e quindi il piano per p — la coppia $P_1 P_2$ descrive una g_2^1 che appare rappresentativa della g_2^1 che abbiamo costruita innanzi sull'ente ∞^1 formato dalle g_2^1 di K.

Alla quartica ellittica K_4 viene associato un complesso covariante di rette, che pone sotto un nuovo aspetto il significato del suo modulo. Perciò giova definire anzitutto quel particolare complesso di secondo grado che da Reye ha ricevuto il nome di *complesso tetraedrale.*

Si consideri un tetraedro (non degenere) $ABCD$, le cui faccie verranno designate ordinatamente con $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, e che assumeremo come fondamentale per le coordinate. Una retta p, che non si appoggi ad alcuno spigolo del tetraedro, sega le quattro faccie rispettivamente in quattro punti $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$, che formeranno un certo birapporto $(P_1 P_2 P_3 P_4) = k$. Si riconosce che questo birapporto è uguale a quello dei quattro piani $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$ che proiettano da p i quattro vertici del tetraedro $ABCD$. Ciò risulta a priori in base all'osservazione che esiste una polarità rispetto ad una quadrica in cui ad $ABCD$ corrispondono le faccie opposte del tetraedro $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, e alla retta p, considerata come luogo di punti, corrisponde la retta medesima, considerata come asse di un fascio di piani; infatti esiste un sistema lineare ∞^3 di quadriche $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = 0$, che posseggono $ABCD$ come tetraedro coniugato, e fra queste vi è una quadrica che — contenendo tre punti di p — contiene p.

Si può verificare analiticamente l'uguaglianza dei birapporti:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4),$$

esprimendo $k = (P_1 P_2 P_3 P_4)$ per mezzo delle coordinate plückeriane di retta p_{ik}, quando si ricordi che le coordinate della retta p congiungente due punti (x) e (y) e intersezione di due piani (u) e (v) sono

$$p_{ik} \equiv x_i y_k - x_k y_i,$$

ovvero, dualmente,

$$q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i,$$

e si ha la relazione

$$p_{ik} \equiv q_{lm} \qquad (i, k, l, m \text{ diversi fra loro})$$

(cfr. L. 1°, § 19, vol. 1°, pag. 120).

Infatti i punti della retta p si esprimono come combinazioni lineari $x_i - \lambda y_i$, sicchè — intersecando coi piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ — si trovano i valori del parametro λ corrispondenti ai punti $P_1 P_2 P_3 P_4$:

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \lambda_2 = \frac{x_2}{y_2}, \quad \lambda_3 = \frac{x_3}{y_3}, \quad \lambda_4 = \frac{x_4}{y_4};$$

quindi

$$k = (P_1 P_2 P_3 P_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\dfrac{x_3}{y_3} - \dfrac{x_1}{y_1}}{\dfrac{x_3}{y_3} - \dfrac{x_2}{y_2}} : \frac{\dfrac{x_4}{y_4} - \dfrac{x_1}{y_1}}{\dfrac{x_4}{y_4} - \dfrac{x_2}{y_2}} =$$

$$= \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_3 y_2 - x_2 y_3} : \frac{x_4 y_1 - x_1 y_4}{x_4 y_2 - x_2 y_4} = \frac{p_{13} \cdot p_{24}}{p_{23} \cdot p_{14}}.$$

Il calcolo duale porge:

$$(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4) = \frac{q_{13} \cdot q_{24}}{q_{23} \cdot q_{14}},$$

che risulta ancora uguale a k, essendo

$$q_{13} \equiv p_{24}, \quad q_{24} \equiv p_{13}, \quad q_{23} \equiv p_{14}, \quad q_{14} \equiv p_{23}.$$

Le ∞^2 rette che segano le quattro faccie $\alpha\beta\gamma\delta$ del ***tetraedro fondamentale*** *secondo un birapporto costante k (che è anche il birapporto dei quattro piani proiettanti i vertici ABCD) formano un complesso* [1] *che prende il nome di* ***tetraedrale:*** è

(1) Si chiama complesso di rette un sistema algebrico ∞^3 di rette che (interpretando — al modo di KLEIN — le rette di S_3 come « punti » di una quadrica Q_4^2 di S_5) viene rappresentato da una varietà a tre dimensioni V_3^n sulla quadrica Q_4^2 di equazione $\Sigma p_{ik} p_{lm} = 0$. Si dimostra che tali V_3^n sono sempre intersezioni complete della quadrica fondamentale con una varietà V_4^m $(n = 2m)$, cioè che ogni complesso è rappresentato da una sola equazione: il grado m di questa equazione dicesi *grado del complesso*. Il grado di un complesso è la classe dell'inviluppo delle rette di esso che appartengono ad un piano, od anche l'ordine del cono dei suoi raggi per un punto.

chiaro che il complesso tetraedrale si può definire come l'*insieme delle rette trasformate di una di esse mediante le* ∞^3 *omografie permutabili che posseggono come punti uniti i vertici del tetraedro.* Il complesso così definito è un *particolare complesso di secondo grado* la cui equazione è data da

$$p_{13} \cdot p_{24} - k p_{23} \cdot p_{14} = 0.$$

Si può verificare, anche indipendentemente dall'equazione del complesso, che le rette di esso appartenenti ad un piano inviluppano una conica (tangente alle quattro faccie del tetraedro): infatti queste rette sono assoggettate a segare secondo un birapporto costante i quattro lati di un quadrilatero, condizione duale di quella che consiste nel proiettare quattro punti secondo un birapporto costante, che è la proprietà definitrice della conica secondo CHASLES e STEINER. Ora per dualità nello spazio si ha che le rette del complesso tetraedrale passanti per un punto formano un cono quadrico, contenente i vertici del tetraedro $ABCD$.

Ciò posto ritorniamo alle quartiche. Avemmo già (pag. 278) occasione di riconoscere che, data una quartica di prima specie K_4, i quattro piani proiettanti da una sua tangente i vertici del tetraedro coniugato $ABCD$, formano un birapporto costante uguale al modulo di K_4; ne deduciamo ora che « le tangenti di K_4 segano le quattro faccie del tetraedro coniugato secondo un birapporto costante uguale al modulo della quartica » e le due proprietà si possono riassumere dicendo che:

Le tangenti ad una quartica gobba di prima specie appartengono ad un complesso tetraedrale covariante, che ha come tetraedro fondamentale il tetraedro coniugato alla curva ([1]).

([1]) Il complesso tetraedrale ammette alcune semplici generazioni proiettive, indicate da REYE, HIRST, etc. che permettono di svolgerne sinteticamente la teoria (cfr. TH. REYE « Die Geometrie der Lage », 3 Abt. Lipsia, 1910, pag. 1 e 205). Così il detto complesso si lascia definire come il complesso delle congiungenti le coppie di punti omologhi di un'omografia. Trattandosi di una quartica K_4 intersezione di due quadriche f e φ, l'omografia che dà luogo al complesso tetraedrale covariante è il prodotto delle polarità relative ad f e φ. Notisi che lo stesso complesso risulta da un *fascio di omografie* contenente l'identità. Per le proprietà dei fasci di omografie negli spazi a più dimensioni cfr. F. ENRIQUES « Rendiconti dell'Acc. dei Lincei » 2° sem., 1890. Per le reti e i sistemi lineari più ampi cfr. i lavori di R. BONOLA nei « Rendiconti dell'Istituto Lombardo » e negli « Atti della Società delle Scienze di Modena », 1898, nonchè G. MARLETTA « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », 27 luglio 1919.

Sorge la questione di determinare le quartiche ellittiche di ugual modulo che posseggono un dato complesso tetraedrale T come covariante. A tale scopo si noti che le quadriche possedenti un dato tetraedro coniugato $ABCD$ formano un sistema lineare ∞^3 e quindi sono ∞^4 i loro fasci, cioè le quartiche aventi il detto tetraedro come fondamentale; fra le quali quartiche se ne avranno ∞^3 con un modulo assegnato e in ispecie con un modulo uguale al birapporto k delle quaterne segate dalle faccie del tetraedro sulle rette di T.

Precisamente ***esiste una quartica di modulo k, possedente il tetraedro fondamentale $ABCD$, definita dalle condizioni di passare per un punto generico P e di toccare una retta p, appartenente al complesso tetraedrale T***: codesta quartica è la curva base del fascio delle quadriche, aventi il dato tetraedro coniugato, che toccano la p in P.

Segue di qui che sopra una quadrica possedente il tetraedro $ABCD$, si trova una serie ∞^1 d'indice due di quartiche ellittiche di modulo k, avendosi per ogni punto della quadrica due tangenti entro il complesso T: codeste quartiche appariscono così le linee integrali di una equazione differenziale quadratica del prim' ordine, che viene definita (sulla quadrica) dal complesso T.

Dopo queste premesse attinenti alla teoria generale della quartica gobba di prima specie, passiamo a studiare il gruppo G_{32} delle trasformazioni proiettive che mutano in sè una quartica K_4 non singolare, e il sistema dei suoi 16 ***punti stazionari***, cioè dei punti di contatto dei suoi piani iperosculatori (punti 4-pli della g_4^3 segata dai piani).

Sappiamo che quel gruppo G_{32} è generato da 16 trasformazioni involutorie di seconda specie (g_2^1) della curva, le quali verranno subordinate da altrettante omografie involutorie dello spazio; i prodotti, a due a due, di codeste omografie involutorie, daranno 16 omografie (compresa l'identità) subordinanti sulla K_4 trasformazioni di prima specie, a due a due permutabili, e formanti a loro volta un gruppo G_{16}.

Ora il nostro gruppo G_{32}, lasciando invariato il tetraedro fondamentale $ABCD$, sarà in isomorfismo meriedrico col gruppo proiettivo del birapporto, che scambia fra loro le quadriche del fascio definito dalla curva base K_4, permutando fra loro — secondo le sostituzioni del gruppo diedrico: 1, $(AB)(CD)$, $(AC)(BD)$, $(AD)(BC)$ — i quattro coni di vertici A, B, C, D (lo stesso isomorfismo è posto in luce dalla considerazione del complesso tetraedrale covariante). E nel detto isomorfismo alla sostituzione identica sopra A, B, C, D, corrisponderà un gruppo G_8 di 8 omografie coi punti uniti A, B, C, D, e coi piani uniti $\alpha = BCD$, etc.

È facile riconoscere che questo G_8 è formato da 8 omografie permutabili cioè: dalle 4 omologie armoniche aventi per centri e piani i vertici e le faccie opposte del tetraedro, nonchè dalle 3 omografie biassiali armoniche aventi per assi gli spigoli opposti del tetraedro, che — insieme all'identità — si ottengono moltiplicando a due a due le omologie nominate innanzi.

Infatti il tetraedro $ABCD$ essendo il tetraedro coniugato comune alle quadriche f e φ secantisi lungo la K_4, le suddette omologie armoniche lascian ferme f e φ e quindi la quartica.

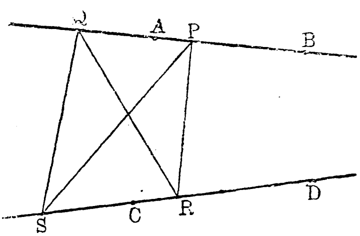
Le omografie del G_8 considerate ci porgono:

1) le quattro trasformazioni di seconda specie della K_4 che lasciano fermo (uno e quindi) una quaterna di punti stazionari (quadrupli per la g_4^3 segata dai piani), che vengono subordinate dalle quattro omologie di centri A, B, C, D;

2) e le tre trasformazioni di prima specie involutorie (le tre γ_2^1 ellittiche) di K_4, subordinate dalle tre omografie biassiali aventi come assi gli spigoli opposti del tetraedro. Secondo la teoria generale, le trasformazioni involutorie di prima specie si ottengono su K_4 facendo corrispondere due punti doppi di una stessa g_2^1; ed appunto l'omologia di centro A fa corrispondere fra loro due (e anche gli altri due) punti stazionari entro il piano β, che sono doppi per la g_2^1 subordinata dall'omologia di centro B, sicchè il prodotto delle due omologie scambia questi due punti. D'altronde è anche chiaro dal punto di vista della geometria proiettiva, che le due omologie armoniche $A\alpha$ e $B\beta$ sono permutabili, e quindi il loro prodotto è un'involuzione, che ha come assi di punti uniti le rette AB ed $\alpha\beta$.

Ora il gruppo G_{32} della quartica possiederà, fuori del G_8 che produce su $ABCD$ la sostituzione identica, altre 12 trasformazioni (involutorie) di seconda specie, di cui 4 produrranno su $ABCD$ la sostituzione $(AB)(CD)$, 4 la $(AC)(BD)$ e 4 la $(AD)(BC)$: queste omografie involutorie non potranno essere omologie, bensì saranno omografie biassiali armoniche con gli assi rispettivamente incidenti alle coppie di rette unite sghembe AB, CD, o AC, BD, o AD, BC; e — poichè una trasformazione di seconda specie (g_2^1) possiede quattro punti uniti — gli assi di ciascuna delle nominate omografie biassiali saranno corde della quartica. Ma vi sono precisamente 8 corde della quartica incidenti alle due rette AB e CD (¹), e queste si distribuiscono in quattro coppie di rette coniugate armoniche rispetto ad AC e BD, come mostra l'omografia biassiale armonica di assi AC e BD che trasforma in sè la K_4 (che già incontrammo nell'analisi del G_8): così codeste quattro coppie di corde daranno tutte e quattro le omografie biassiali armoniche producenti la sostituzione $(AB)(CD)$. E analogamente si dica per le corde incidenti alle altre coppie di spigoli opposti del tetraedro.

(Aggiungiamo che le due corde, r e s, assi di una omografia biassiale armonica trasformante in sè K_4, sono direttrici di una rigata quadrica contenente la quartica, le cui generatrici segano le coppie della g_2^1 subordinata dalla nostra omografia: l'asserto segue dal notare che in generale le corde di una quartica ellittica incidenti ad una retta formano una rigata di grado 8, e che questa si riduce al grado 2, quando la retta si appoggi in due punti alla quartica).



Ora conviene riconoscere più precisamente che le 8 corde di K_4 incidenti alle rette AB e CD formano due quadrilateri sghembi. Infatti se P è un punto di AB per cui passa una corda incidente a CD, in un punto R, la omografia biassiale armonica di assi AB e CD, lascia ferma anche la seconda corda della quartica uscente da P, la quale — di conseguenza — deve appoggiarsi a CD, e il punto di appoggio, S, deve essere coniugato armonico di R rispetto a C e D, come risulta dall'omologia trasformante K_4 di centro C e di piano $\gamma = DAB$: emerge di qui che le altre due corde di K_4, uscenti da R e S, si appoggiano alla retta AB in un medesimo punto Q, che è il coniugato armonico di P rispetto ad A e B.

(¹) Per una K_n d'ordine n con d punti doppi apparenti il numero delle corde incidenti a due rette vale $\frac{n(n-1)}{2} + d$, come si vede rendendo incidenti le due rette. Cfr. L. 3°, § 43, vol. II, pag. 298. Qui è $n = 4$ e $d = 2$.

Anche le altre quattro corde di K_4 incidenti ad AB e CD formano analogamente un quadrilatero sghembo $P'R'Q'S'$, ed è importante notare che le due coppie di vertici PQ e $P'Q'$, appartenenti al medesimo spigolo AB (e similmente quelle su CD) si separano armonicamente. L'asserto risulta dalla esistenza di una trasformazione in sè della figura, data dall'omografia biassiale armonica di assi PR e QS.

Nel seguito ci occorrerà spesso di considerare sestine di punti formate da tre coppie (delle quali solo due possono essere di punti reali e quindi disegnabili) che si separano armonicamente fra loro, come quella costituita da AB, PQ, $P'Q'$; designeremo brevemente una tale sestina col nome di ***sestina regolare***; qui ricordiamo che una sestina regolare si può definire come l'insieme dei punti doppi di una g_4^1 diedrica (generata da un gruppo diedrico Γ_4), ovvero come il covariante sestico T di ciascuna quaterna della g_4^1. (Cfr. L. 2°, § 9, vol. I, pag. 205).

Abbiamo costruito tutte le trasformazioni omografiche di seconda specie del G_{32} relativo alla quartica K_4 (4 omologie e 12 omografie biassiali, I, parimente armoniche), ora otterremo per moltiplicazione di queste I, a due a due, le trasformazioni di prima specie.

In primo luogo se si moltiplica una delle quattro omografie biassiali I, con gli assi incidenti agli spigoli AB e CD per un'altra fra le tre I che hanno gli assi incidenti ai medesimi spigoli, si ottiene una delle tre omografie biassiali armoniche del G_8, aventi come assi gli spigoli opposti del tetraedro: precisamente, se si moltiplica la I di assi PR e QS per la I di assi PS e QR, nasce l'omografia biassiale armonica con gli assi AB e CD (su ciascuna di queste rette avendosi l'identità), ed invece se si moltiplica la I di assi PR e QS (o PS e QR) per le altre due I di assi $P'R'$ e $Q'S'$ (oppure $P'S'$ e $Q'R'$) si ottengono le altre due omografie biassiali armoniche, appartenenti al G_8 che lascia fermi $ABCD$, di assi AC e BD, ovvero AD e BC. Segue di qui che le omografie biassiali I con gli assi incidenti ad una medesima coppia di spigoli del tetraedro sono a due a due permutabili (la condizione di permutabilità di due involuzioni consistendo nell'essere involutorio il loro prodotto), e quindi gli 8 assi si distribuiscono su quattro rigate quadriche χ, ψ, χ', ψ' contenenti le direttrici AB e CD, e una delle due coppie di generatrici AC, BD, e AD, BC; così saranno su una medesima rigata quadrica

$$\begin{array}{rlllllll} & \chi & \text{le rette} & PR, & QS, & P'R', & Q'S', & AC, \; BD, \\ \text{su una} & \psi & \text{le rette} & PR, & QS, & P'S', & Q'R', & AD, \; BC, \\ \text{su una} & \chi' & \text{le rette} & PS, & QR, & P'S', & Q'R', & AC, \; BD, \\ \text{e su una} & \psi' & \text{le rette} & PS, & QR, & P'R', & Q'S', & AD, \; BC. \end{array}$$

L' asserto si giustifica ricordando che la condizione di permutabilità di due omografie biassiali armoniche è che gli assi dell' una sieno incidenti a quelli dell' altra, o che le due coppie di assi si separino armonicamente appartenendo ad una medesima rigata quadrica. (Notisi che le superficie di second' ordine a cui appartengono le predette rigate, a due a due s' intersecano, oltrechè nelle direttrici AB e CD, anche in una delle sei coppie di generatrici: $PR \cdot QS$, $PS \cdot QR$, $P'R' \cdot Q'S'$, $P'S' \cdot Q'R'$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$).

Ora, da ciò che abbiam detto intorno ai prodotti di due I con gli assi incidenti ai medesimi spigoli del tetraedro, segue anche che le I permutabili con una data di assi PR e QS sono soltanto le tre i cui assi sono incidenti ai medesimi spigoli: infatti le I subordinano sulla quartica K_4 delle g_2^1, ed esistono soltanto tre g_2^1 permutabili con una data; le quali moltiplicate per questa danno le tre trasformazioni di prima specie involutorie, subordinate dalle omografie biassiali del G_8 che hanno per assi gli spigoli opposti del tetraedro.

Ciò posto, se si moltiplica una I_1 con gli assi incidenti agli spigoli AB, CD per una I_2 con gli assi incidenti ad AC, BD, si dovrà ottenere una trasformazione di prima specie $\pi = I_2 I_1$ ciclica del quart' ordine. Pertanto la retta PR non potrà essere incidente agli assi di I_2, giacchè ne seguirebbe che anche QS sarebbe incidente a questi assi e le I_1 e I_2 sarebbero permutabili; quindi la I_2 dovrà portare il punto P in uno dei due punti R', S', appartenenti allo spigolo opposto CD. Tenuto conto che $(I_2 I_1)^2 = (I_1 I_2)^2$ è una trasformazione di prima specie che lascia fermi $ABCD$, e quindi — per ragioni di simmetria — è l' omografia biassiale di assi AD e BC, si vede che il punto P descrive nella $\pi = I_1 I_2$ uno dei due cicli $PR'QS'$, $PS'QR'$: ciascuno dei due cicli — p. es. $PR'QS'$ — viene subordinato da due omografie π, rispondenti a due I_2 con gli assi sghembi (incidenti alla medesima retta PR') che differiscono fra loro per l'omografia biassiale armonica di assi AB, CD.

Risulta da quanto precede che i prodotti di due omografie biassiali I_1 e I_2, con gli assi incidenti a due date coppie di spigoli AB, CD e AC, BD, danno sempre omografie cicliche del quart' ordine π non indipendenti, poichè $(I_2 I_1)^2$ è sempre l'omografia biassiale armonica di assi AD e BC. Ordunque se si considera accanto alla $\pi = (I_2 I_1)$, una seconda omografia $\pi' = (I_3 I_1)$ ottenuta moltiplicando una I_1 per una omografia biassiale con gli assi incidenti ad AD e BC, questa π', ugualmente ciclica del quart' ordine, sarà indipendente rispetto alla π (i loro quadrati saranno disuguali).

Così le π e π' genereranno per moltiplicazione l'intero G_{16} abeliano costituito dalle trasformazioni proiettive di prima specie della quartica K_4. Questo G_{16} si amplia nel G_{32} quando vi si aggiunga una trasformazione di seconda specie, per es. l'omologia armonica di centro A e piano α. È anche facile confermare direttamente ciò che segue a priori dalla conoscenza delle proprietà del gruppo misto della K_4: che il prodotto di un' omografia ciclica del 4° ordine, π, del G_{16} per l'omologia $(A\alpha)$ è un' omografia biassiale armonica, I. Infatti si verificherà, per es., come il punto P — che per una π descrive il ciclo $PR'QS'$ — sia portato dal prodotto di π per codesta omologia in R', ed R' nuovamente in P, per modo che si otterrà un' omografia involutoria $(PR')(QS')$ cogli assi incidenti ad AD, BC.

In conclusione abbiamo determinato le omografie che lasciano invariata la quartica K_4, non singolare, subordinando su di essa il gruppo G_{32}, la cui struttura riesce qui proiettivamente illustrata, e possiamo riassumere la nostra analisi dicendo che *il G_{32} contiene:*

1) ***16 trasformazioni involutorie di seconda specie, cioè le 4 omologie armoniche aventi per centri e piani i vertici e le faccie opposte del tetraedro fondamentale,***
e le 12 omografie biassiali armoniche del tipo I_1, I_2, I_3, i cui assi formano coppie di quadrilateri sghembi, coi vertici appartenenti alle tre coppie di spigoli opposti;

2) ***e 16 trasformazioni di prima specie, a due a due permutabili, formanti un sottogruppo invariante G_{16}, cioè***
l'identità e le tre omografie biassiali armoniche aventi per assi gli spigoli opposti del tetraedro (che costituiscono un gruppo diedrico),

e 12 omografie cicliche del quart' ordine, che si distribuiscono in tre quaterne, generate dai prodotti $I_2 I_1$, $I_3 I_2$, $I_1 I_3$.

Il gruppo proiettivo G_{32} della quartica K_4, lascia invariato il sistema dei 16 punti stazionari di essa, i quali formano una configurazione che vogliamo brevemente studiare. Anzitutto si vede che:

I sedici punti stazionari della quartica sono le intersezioni della curva con le quattro faccie del tetraedro fondamentale.

Ciò segue dall'osservazione che i piani tangenti al cono $A(K_4)$ sono bitangenti alla quartica; quando i due punti di contatto, coniugati nell'omologia armonica $(A\alpha)$ di centro A e piano $\alpha = BCD$, vengono a coincidere in un punto del piano α, si ottiene un piano a contatto quadripunto.

Si considerino i quattro punti stazionari $A_1 A_2 A_3 A_4$, intersezioni della K_4 col piano α: poichè le omologie $(B\beta)$, $(C\gamma)$, $(D\delta)$ trasformano in sè la quaterna $A_1 A_2 A_3 A_4$, si deduce che il *triangolo BCD è diagonale per il quadrangolo* $A_1 A_2 A_3 A_4$. Si aggiunga che *il cono quadrico $A(K_4)$ sega su α una conica, su cui i quattro punti $A_1 A_2 A_3 A_4$ formano un birapporto uguale al modulo k della quartica.*

Infatti, le generatrici del cono per A essendo corde di K_4, i piani che da una di esse proiettano $A_1 A_2 A_3 A_4$, riescono tangenti in questi punti, (la AA_1 toccando in A_1 la K_4, ecc.) e però formano il birapporto k.

Ora si estende alla configurazione dei 16 punti stazionari della quartica la proprietà fondamentale relativa ai 9 flessi della cubica piana, tuttavia con una lieve modifica:

Il piano determinato da tre punti stazionari ne contiene un quarto, ovvero riesce tangente in uno di quelli.

Per dimostrare questa proprietà si consideri un piano secante la quartica K_4 in quattro punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, e si costruiscano le residue intersezioni di K_4 coi piani osculatori in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, cioè i *punti satelliti* di questi, Q_1', Q_2', Q_3', Q_4': allora i punti Q_1', Q_2', Q_3', Q_4', stanno in un piano, giacchè la quaterna di essi appartiene alla serie completa $|4g_4 - 3g_4|$, residua della quaterna $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ contata tre volte, rispetto al quadruplo della g_4^3 segata dai piani. Segue di qui che quando Q_1, Q_2 e Q_3 coincidono coi loro punti satelliti, riuscendo punti stazionari, lo stesso accadrà per Q_4; il quale tuttavia potrà riuscire distinto da Q_1, Q_2, Q_3, ovvero coincidente con uno di essi (caso che non ha l'analogo per la cubica piana).

Si può precisare la proprietà della configurazione dei punti stazionari di K_4, notando che:

1) Le faccie del tetraedro forniscono già 4 piani contenenti ciascuno quattro punti stazionari;

2) In secondo luogo per ogni vertice A del tetraedro vi sono 12 piani contenenti quattro punti stazionari distribuiti in due coppie allineate con A, e appartenenti a due faccie diverse $\beta\,\gamma$, o $\gamma\,\delta$, o $\gamma\,\beta$, passanti per A: in tutto 48 piani siffatti;

3) Si hanno poi per ogni vertice A, 24 piani che contengono due punti stazionari allineati con A e un punto stazionario appartenente alla faccia opposta α, i quali riescono tangenti alla quartica in questo punto: in totale i piani analoghi sono 96;

4) Finalmente un piano che contenga un punto stazionario preso su α, uno su β, uno su γ, dovrà contenere un quarto punto stazionario appartenente al piano δ: si avranno in tal guisa 64 piani non passanti per alcun vertice del tetraedro $ABCD$, e contenenti ciascuno quattro punti stazionari.

Si verifica naturalmente che i piani enumerati innanzi, contando per quattro quelli che contengono quattro punti stazionari distinti (e quindi quattro terne) rispondono al numero delle terne che si possono formare coi 16 punti stazionari:

$$\binom{16}{3} = 560 = 4\cdot 4 + 4\cdot 48 + 96 + 4\cdot 64\,.$$

Lasciamo allo studioso di approfondire l'esame della configurazione dei 16 punti stazionari della quartica, in relazione al gruppo proiettivo G_{32}, e ci limitiamo qui a indicare *le coordinate di codesti 16 punti stazionari.*

Scriviamo le equazioni delle due quadriche fondamentali che determinano la quadrica K_4:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$
$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2 = 0;$$

intersecando con le faccie del tetraedro avremo i 16 punti

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 = 0, & x_2 : x_3 : x_4 = \pm\sqrt{c-d} : \pm\sqrt{d-b} : +\sqrt{b-c} \\ x_2 = 0, & x_3 : x_4 : x_1 = \pm\sqrt{d-a} : \pm\sqrt{a-c} : +\sqrt{c-d} \\ x_3 = 0, & x_4 : x_1 : x_2 = \pm\sqrt{a-b} : \pm\sqrt{b-d} : +\sqrt{d-a} \\ x_4 = 0, & x_1 : x_2 : x_3 = \pm\sqrt{b-c} : \pm\sqrt{c-a} : +\sqrt{a-b}\,. \end{array}\right.$$

Si noti che per valutare, mediante queste formule, il numero dei punti stazionari reali di una quartica reale, converrebbe anzitutto modificarle leggermente, assumendo la curva come intersezione di due superficie reali; ma, in ogni modo, si troverebbe così soltanto il numero (8) dei punti stazionari di una quartica possedente un tetraedro coniugato reale. Per trattare la questione in tutta la sua generalità, giova piuttosto svolgere per via geometrica le seguenti

OSSERVAZIONI SULLA REALITÀ. Queste brevi note sulle forme delle quartiche gobbe di prima specie reali, si riferiscono al punto di vista proiettivo, con esclusione di ogni considerazione metrica ([1]). Anzitutto una quartica ellittica K_4, potrà constare:

1) di un solo ramo pari,

2) o di due rami pari,

3) o infine di due rami impari

(non si possono avere più di due rami perchè si troverebbero più di due rami per la cubica proiezione da un punto della K_4).

Ora i detti casi rispondono alle tre ipotesi relative alla realità dei coni quadrici contenenti la K_4, e precisamente:

la K_4 composta di *un solo ramo pari* appartiene a *due coni reali*; la K_4 composta di *due rami pari* appartiene a *quattro coni*, e quella composta di *due rami impari* non si trova sopra *nessun cono quadrico reale* ([2]).

Per dimostrare il teorema richiamiamo l'osservazione già fatta che le intersezioni delle K_4 con le generatrici di un cono per essa sono punti di contatto di piani bitangenti a K_4, costituendo le coppie di una g_2^1 il cui doppio è la g_4^3 delle sezioni piane. Pertanto vi saranno per K_4 tanti coni reali, quanti sono i piani tangenti altrove alla curva, condotti per una sua

([1]) Giova avvertire che mentre una cubica piana è reale — contenendo una linea continua di punti reali — quando è rappresentata da un'equazione reale, non accade lo stesso per le curve d'ordine pari; e così anche una quartica gobba, definita da due equazioni di secondo grado reali, può riuscire immaginaria, come si vede p. es. per l'intersezione di due sfere di cui una sia esterna all'altra.

([2]) Teorema dimostrato da HARNACK (*Math. Annalen*, Bd. 12) mediante l'uso delle funzioni ellittiche: la dimostrazione del testo è sostanzialmente quella fornita da CHISINI, nella citata Nota dell'*Istituto Lombardo* (1920).

tangente t, il cui punto di contatto designeremo con T. Ora il numero di questi piani tangenti si ottiene proiettando K_4 da T in una cubica piana K_3, e numerando le tangenti altrove a K_3 che passano per il punto T', traccia di t sul piano. Così il nostro teorema verrà stabilito ove si dimostri che:

a) per un punto T' di un ramo impari della cubica passano due rette reali che toccano altrove questo ramo, e altre due rette reali che toccano il ramo pari;

b) per un punto del ramo pari di K_3 non passano rette reali che tocchino altrove la curva.

Per dimostrare l'asserto si consideri la g_2^1 segata su K_3 dalle rette per un suo punto O, i cui punti doppi corrispondano alle tangenti altrove condotte per O: se O si trova sopra un ramo pari, la g_2^1 trasforma uno nell'altro i due rami della curva e quindi non ha punti doppi reali (prop. *b*); se O si trova sul ramo impari ciascuno dei due rami verrà trasformato in se stesso, e conterrà due punti doppi della g_2^1 o nessuno, secondochè la g_2^1 dà luogo ad una corrispondenza concorde o discorde; ma in ogni caso — al variare di O sul detto ramo — il numero dei punti doppi della g_2^1 su questo non potrà mai cambiare, attesochè i due punti doppi non possono venire a coincidere. Ciò posto basta notare che il tangenziale di un punto di K_3, preso tanto sul ramo impari come sul ramo pari, sta sempre sul ramo impari: di qui segue che le involuzioni sui due rami, definite in rapporto a un punto del ramo impari, sono discordi e quindi posseggono due punti doppi su ciascun ramo (prop. *a*).

Rileviamo che la proposizione *a)* ora stabilita implica in generale che « sopra un ramo reale di curva ellittica una g_2^1 — trasformante in sè il ramo — possiede due punti doppi »; giacchè la curva può essere sempre proiettata in una cubica.

Ciò posto passiamo a ricercare i punti stazionari reali appartenenti ad una quartica reale K_4.

Anzitutto se la K_4 contiene rami impari è chiaro che non si possono avere su questi punti stazionari. Invece si prova che *un ramo pari* di K_4 contiene sempre *4 punti stazionari reali* nel modo seguente: sappiamo che esistono sul ramo due g_2^1 che raddoppiate danno la g_4^3 delle sezioni piane di K_4, e di cui i punti coniugati sono punti di contatto di piani bitangenti; ora ognuna di queste g_2^1 possiede due punti doppi reali, che sono punti stazionari.

Il teorema dimostrato si accorda con la proprietà — che risulta dai nostri teoremi generali (cfr. pag. 267) — secondo cui un ramo di K viene trasformato in sè da un gruppo ciclico di proiettività del quart'ordine [1].

Il gruppo proiettivo G_{32} si amplia per le quartiche armoniche ed equianarmoniche: nel primo caso si ha un gruppo proiettivo G_{64} e nel secondo un gruppo G_{96}.

Il *gruppo proiettivo* G_{64} *della quartica armonica*, si ottiene semplicemente moltiplicando il nostro G_{32} per una omografia ciclica del quart'ordine ω che scambi fra loro due dei vertici del tetraedro A e B lasciando fermi C e D, come appare dall'isomorfismo meriedrico col gruppo binario che lascia ferma una quaterna armonica (la quaterna dei quattro coni di vertici A, B, C, D, entro il fascio di quadriche per K_4).

Ora sulla retta AB, abbiamo trovato due coppie di punti PQ e $P'Q'$ separanti armonicamente AB e separantisi armonicamente fra loro, che erano vertici dei quadrilateri sghembi formati dagli assi delle involuzioni I_1; si può supporre che codeste coppie siano trasformate ciascuna in se stessa, ovvero una nell'altra. Nella prima ipotesi il quadrilatero sghembo $PRQS$ sarebbe invariante per l'omografia ω, la quale

(1) Il teorema stabilito per le quartiche si estende a tutte le curve normali K_n d'ordine pari $n=2m$: *sopra un ramo pari di una* K_n *esistono sempre* n *punti stazionari reali.* Questi si ottengono come punti doppi delle m g_2^1, trasformanti in sè il ramo che — moltiplicate per m — danno la serie g_n^{n-1} delle sezioni iperpiane di K_n. L'effettiva realità delle dette g_2^1 si dimostra proiettando il ramo di K_n da un S_{m-1} osculatore, giacchè se m è dispari si avrà un ramo impari di curva ellittica d'ordine impari con m punti stazionari (cfr. la nota del § 28, pag. 277), e se m è pari basterà supporre il teorema dimostrato per $m<n$.

La proprietà che riassume i risultati ottenuti sui punti stazionari reali di una curva ellittica normale, cioè che « un ramo che abbia la stessa parità dell'ordine n della curva ellittica contiene precisamente n punti stazionari » si trova stabilita, per un intero n qualsiasi, da Chisini (cfr. la nota a pag. 277), in quanto — procedendo per via ricorrente — egli studia in generale la corrispondenza $[n-1, 1]$ che si ha, sopra ogni ramo, fra un punto P e l'intersezione P' dell'iperpiano osculatore in P, provando che essa è discorde e possiede n coincidenze. (La proprietà di essere discorde resulta dall'analisi nell'intorno di un punto stazionario di coincidenza, mentre l'esistenza di coincidenze viene dedotta dal lemma che una corrispondenza $[n-1, 1]$ concorde possiede $n-2$ coincidenze).

perciò trasformerebbe in se stessa la quadrica che contiene i lati del detto quadrilatero e la quartica K_4 (appoggiata in due punti a ciascun lato): ma tale conclusione è assurda perchè nel fascio delle quadriche per K_4 la ω subordina una involuzione che lascia fermi soltanto i due coni di vertici C e D. Si ha dunque che la ω scambia fra loro le due coppie PQ e $P'Q'$, associando i punti PP' e QQ' ovvero PQ' e $P'Q$: effettivamente le coppie AB, PP' e QQ' (formanti una sestina regolare e però rappresentabili con $0, \infty$; $1, -1$; $i, -i$) appartengono ad una stessa involuzione, i cui punti doppi verranno designati con H, L; similmente anche AB, PQ', $P'Q$ appartengono ad un'involuzione di cui designeremo i punti doppi con M, N.

Passiamo a vedere come opera la ω sui punti della retta unita CD, dove si hanno i punti uniti C e D. Si possono fare tre ipotesi:

o che tutti i punti della retta CD siano uniti,

o che la ω operi involutoriamente, scambiando fra loro R ed S;

o, infine, che la ω operi sulla retta come una proiettività ciclica del quart'ordine.

Le prime due ipotesi vengono scartate dall'osservare che il quadrilatero sghembo $RPSQ$ resulterebbe invariante, ciò che porta all'assurdo già segnalato. Si conclude pertanto che la proiettività subordinata su CD è ciclica del quart'ordine, dando luogo a uno dei due cicli (inversi l'uno dell'altro) $RR'SS'$, $RS'SR'$.

Dopo ciò consideriamo per es. l'omografia ciclica del quart'ordine ω che possiede i punti uniti $CDHL$: se essa non fosse assiale, cioè — riferita a codesto tetraedro fondamentale — avesse equazioni del tipo

$$y_1 = x, \quad y_2 = ix_2, \quad y_3 = -x_3, \quad y_4 = -ix_4,$$

dovrebbe subordinare ugualmente una involuzione ovvero una proiettività ciclica del quart'ordine sopra *due* spigoli opposti del tetraedro $CDHL$, mentre invece essa subordina una involuzione su $HL = AB$, e una proiettività ciclica del quart'ordine su CD. Resta dunque provato che l'omografia ciclica ω è assiale, avendo per asse p. es. la retta CH.

A priori si potrebbero avere quattro omografie assiali ω di assi CH, CL, DH, DL, con le loro inverse; ma si può riconoscere che gli assi di due tali ω debbono essere incidenti per es. in C, in base alla proprietà che il prodotto di due ω deve dare un'involuzione I. Infatti se esistessero p. es. due ω con gli assi CH e DL, il prodotto di esse darebbe su ciascuna di queste rette una proiettività ciclica del quart'ordine (invece, moltiplicando due ω con gli assi CH e CL si ottiene una omologia armonica di centro C e piano ABD).

Pertanto troveremo (come si deve trovare in base all'isomorfismo meriedrico [1, 8] fra il gruppo G_{64} della K_4 armonica e il gruppo binario di 8 operazioni subordinate nel fascio delle quadriche per K_4) 8 omografie assiali cicliche del quarto ordine, ω, con gli assi per C e D, p. es. con gli assi CH, CL, DM, DN.

Analogamente si avranno altre 8 omografie assiali cicliche del quart'ordine ω, con 4 assi uscenti da A e B, e incidenti a CD. Ma oltre queste 16 omografie cicliche del quart'ordine, se ne troveranno altre 16 permutanti ciclicamente i quattro vertici del tetraedro, le quali si ottengono moltiplicando le precedenti per le omografie π, cicliche del quart'ordine, producenti le sostituzioni $(AD)(BC)$ o $(AC)(BD)$: per es. moltiplicando una ω che produce la trasposizione (AB), per una π che produce la sostituzione $(AD)(BC)$, nasce una ω che produce la sostituzione $(ACBD)$. Precisamente ci saranno 8 ω producenti la sostituzione $(ACBD)$, ed altre 8 producenti l'inversa $(ADBC)$. Si trovano in tal guisa tutte le $16+16=32$ omografie cicliche del quart'ordine ω, che entrano nel gruppo G_{64} della quartica armonica.

Riassumeremo i resultati ottenuti enunciando il teorema: *la quartica armonica di modulo* $(ABCD)=-1$ *possiede un gruppo di trasformazioni proiettive* G_{64}, *che — oltre le trasformazioni ordinarie del* G_{32} — *comprende 32 omografie cicliche del quart'ordine e precisamente: 16 omografie assiali, che inducono lo scambio* (AB) *o* (CD) *sulla quaterna* $ABCD$, *i cui 8 assi danno quattro coppie rispettivamente per* C, D, A, B (p. es. le coppie CH, CL, DM, DN ecc.); *e 16 omografie non assiali, che scambiano ciclicamente i vertici del tetraedro, secondo il ciclo* $(ACBD)$ *o* $(ADBC)$.

Passiamo a considerare il caso di una *quartica* K_4 *equianarmonica.*

Il gruppo proiettivo G_{32} delle trasformazioni ordinarie, si amplia ora in un G_{96}, che contiene 64 omografie cicliche del terz'ordine, 16 delle quali, a coppie inverse una dell'altra, lasciano fermo un vertice A del tetraedro, permutando gli altri tre B, C, D. Ora un'omografia ciclica del terz'ordine, che trasformi in sè la K_4 e lasci fermo A, lascierà fermo anche uno dei quattro punti stazionari appartenenti al piano $\alpha = BCD$, dicasi per es. X, e quindi anche la retta x, polare di X rispetto al triangolo BCD, sulla quale si troveranno due punti uniti U e V. L'asse di punti uniti della nostra omografia, non può giacere nel piano α (perchè in questo verrebbe subordinata un'omologia) e quindi dovrà essere AX ovvero una delle due rette AU, AV: ma la prima ipotesi si esclude, per ragione di simmetria, giacchè se esiste nel nostro gruppo una omografia di asse AU, ne deve esistere anche una di asse AV, e tenuto conto che le nostre omografie danno, non 4 nè 12 ma 8 assi per A.

In conclusione: *la quartica equianarmonica possiede un gruppo di trasformazioni proiettive G_{96}, che, oltre alle trasformazioni ordinarie del G_{32}, contiene 64 omografie cicliche del terz' ordine, i cui assi danno 8 rette per ciascun vertice, A, del tetraedro, giacenti a coppie in quattro piani polari delle rette proiettanti i punti stazionari che giacciono nella faccia α del tetraedro, rispetto al triedro di vertice A.*

Osservazione. Giova rilevare che dal punto di vista della *realità* esiste un solo tipo di *quartica equianarmonica* che consta di *un ramo pari*, giacchè la proiezione di questa curva da un suo punto dà una cubica equianarmonica $y^2 = x(x^3 - 1)$ che è composta di un ramo impari. Invece esistono *tre tipi di quartiche armoniche reali*, rispettivamente composte di *un ramo pari*, di *due rami pari* e di *due rami impari*: la prima corrisponde ad una cubica proiezione $y^2 = x(x^2 + 1)$ costituita di un solo ramo, e le altre due a cubiche $y^2 = x(x^2 - 1)$ costituite di due rami, cubiche entrambe armoniche (cfr. L. 3°, § 26, vol. II, pag. 210).

L'esistenza effettiva delle quartiche anzidette, si riconosce assumendo sopra una delle cubiche corrispondenti la g_4^3 somma della g_3^2 segata dalle rette e di un punto, che — per la cubica bipartita — può essere scelto o sul ramo impari o sul ramo pari.

Nota. L'analisi che sopra indicammo del gruppo di trasformazioni omografiche G_{32}, relativo ad una quartica gobba ellittica generale, permette di costruire effettivamente questo gruppo, a partire da un sistema di punti privo di invarianti assoluti: onde si conferma in tal guisa il teorema stabilito che il G_{32} stesso riesce privo di invarianti assoluti, ed appartiene quindi ad ∞^1 quartiche. La costruzione che passiamo a svolgere viene a dipendere da una irrazionalità quadratica, sicchè per ogni G_{32} si ha un G_{32} *associato*, relativo alla medesima configurazione invariante, di cui le considerazioni del seguente paragrafo metteranno in luce l'importanza.

Richiamiamo — completandole — le designazioni usate innanzi. Il gruppo G_{32} resta definito dalle 12 omografie biassiali con gli assi incidenti alle tre coppie di spigoli opposti del tetraedro, le quali si distribuiscono in tre quaterne: nel seguente quadro sono segnate le coppie dei punti di appoggio degli assi per le involuzioni I_1, I_2, I_3 appartenenti alle tre quaterne:

$$
\begin{array}{llllll}
I_1 & \left\{\begin{array}{l} PQ \\ RS \end{array}\right. & \begin{array}{l} P'Q' \\ R'S' \end{array} & \begin{array}{l} \text{su} \\ \text{su} \end{array} & \begin{array}{l} AB \\ CD \end{array} \\[2ex]
I_2 & \left\{\begin{array}{l} P_1Q_1 \\ R_1S_1 \end{array}\right. & \begin{array}{l} P_1'Q_1' \\ R_1'S_1' \end{array} & \begin{array}{l} \text{su} \\ \text{su} \end{array} & \begin{array}{l} AC \\ BD \end{array} \\[2ex]
I_3 & \left\{\begin{array}{l} P_2Q_2 \\ R_2S_2 \end{array}\right. & \begin{array}{l} P_2'Q_2' \\ R_2'S_2' \end{array} & \begin{array}{l} \text{su} \\ \text{su} \end{array} & \begin{array}{l} AD \\ BC. \end{array}
\end{array}
$$

Ora abbiamo veduto che le tre coppie AB, PQ, $P'Q'$ sono mutuamente armoniche, e similmente dicasi per le coppie analoghe appartenenti agli altri spigoli del tetraedro. Possiamo aggiungere che la configurazione, C_{28}, dei 28 punti (i quattro vertici del tetraedro e gli altri quattro punti che si trovano sopra ogni spigolo) definisce *due gruppi associati* G_{32}, la scelta dei quali dipende dal congiungere in un medesimo quadrilatero sghembo relativo alle I_1 le due coppie PQ, RS ovvero le PQ, $R'S'$. A priori si potrebbe dubitare che dopo questa prima scelta se ne potesse fare una seconda in rapporto alle coppie che si trovano sugli spigoli opposti AC, BD, ecc., ma si può provare che la prima scelta determina le altre, giacchè « non possono esistere due gruppi G_{32} rispondenti alla medesima configurazione C_{28}, per uno dei quali siano congiunte le coppie PQ, RS e P_1Q_1, R_1S_1, e nell'altro le coppie PQ, RS e P_1Q_1, $R'_1\, S'_1$ ». Infatti abbiamo veduto che tutte le involuzioni I_1 operano sulle coppie P_1Q_1, $P_1'Q'_1$ della retta AC, scambiandole con le coppie $R'_1S'_1$ e R_1S_1 della BD, che restano definite dal non essere congiunte rispetto ad una I_2.

Ciò posto vogliamo riconoscere che la configurazione C_{28} e il relativo G_{32} si costruiscono univocamente appena che si dia il tetraedro $ABCD$ e le quaterne di punti

$$PQ,\ P'Q'; \quad RS,\ R'S'; \quad P_1Q_1,\ P'_1Q'_1,$$

rispettivamente su tre spigoli AB, CD, AC, fissando inoltre che vengano congiunti, come coppie di vertici opposti dei quadrilateri sghembi relativi alle I_1, le coppie PQ, RS e $P'Q'$, $R'S'$. Con ciò, si mette in evidenza che la C_{28} (e quindi anche il G_{32}) non possiede invarianti assoluti, giacchè le quaterne $PQP'Q'$, $RSR'S'$, $P_1Q_1P_1'Q_1'$ su AB, CD, AC, sono costituite da tre cicli ($PP'QQ'$ ecc.) delle proiettività del quart'ordine aventi come punti uniti AB, CD, AC, e però la scelta di esse si riduce a quella del tetraedro e di un punto sopra ciascuno dei tre spigoli AB, CD, AC, ovvero del tetraedro e di un punto (punto-unità) fuori di esso.

Ordunque, essendo date le tre quaterne anzidette su AB, CD, AC, ed essendo congiunte le coppie PQ, RS, risultano intanto definite le 4 involuzioni I_1 del costruendo G_{32}. Mediante una I_1, presa fra queste, si trasformi la quaterna $P_1Q_1P_1'Q_1'$, data su AC, in guisa da ottenere su BD la quaterna omologa che designeremo con $R_1'S_1'R_1S_1$: allora per le I_2 dovranno essere congiunte le coppie P_1Q_1, R_1S_1 e $P_1'Q_1'$, $R_1'S_1'$, come resulta dalla proprietà che le I_1 permutano fra loro coppie disgiunte appartenenti ad AC e BD. Si ottengono in tal guisa tutte e quattro le involuzioni I_2 del nostro gruppo G_{32}.

Rimangono da costruire le quaterne della C_{28}, $P_2Q_2P_2'Q_2'$ e $R_2S_2R_2'S_2'$ appartenenti agli spigoli AD e BC.

A tale scopo si osserverà che queste due quaterne debbono essere trasformate l'una nell'altra tanto dalla I_1 come dalla I_2, e quindi debbono essere invarianti per le omografie prodotto I_2I_1; anzi per una di tali omografie sono uniti i due punti P_2Q_2 e scambiati fra loro $P_2'Q_2'$ e viceversa. Infatti, posto che I_1 porti ordinatamente $R_2S_2R_2'S_2'$ in $P_2'Q_2'P_2Q_2$, delle quattro I_2, due porteranno $R_2S_2R_2'S_2'$ in $P_2'Q_2'Q_2P_2$ e due in $Q_2'P_2'P_2Q_2$, non potendo I_2I_1 lasciar fermi i quattro punti $P_2Q_2P_2'Q_2'$, chè tutti i punti della BC riuscirebbero uniti; di conseguenza fra le quattro trasformazioni $\pi = I_2I_1$, in cui si prende la I_1 come fissa variando I_2, due avranno su AD i punti uniti P_2Q_2, scambiando fra loro $P_2'Q_2'$, e altre due i punti uniti $P_2'Q_2'$, scambiando P_2, Q_2. Così resta stabilito che anche le quaterne della C_{28} appartenenti ad AD e BC, restano determinate dalla scelta iniziale delle quaterne prese su AB, CD, AC.

30. Complementi: fasci sizigetici di quartiche gobbe di prima specie. — Secondo il teorema generale del § 28 (confermato anche dalla Nota posta alla fine del precedente paragrafo), il gruppo proiettivo G_{32} di una quartica gobba ellittica generale, riuscendo privo di invarianti assoluti, deve appartenere ad infinite quartiche descriventi un fascio (sizigetico). Ora, data una quartica K_4 e il relativo G_{32}, si può costruire direttamente il fascio delle quartiche invarianti. In questo fascio si trovano poi quartiche armoniche ed equianarmoniche, per cui il G_{32} si amplia in un G_{64} e in un G_{96}, i quali risultano contenuti in un gruppo G_{768}, che scambia fra loro le quartiche del fascio sizigetico. In fine il fascio anzidetto genera una superficie del quart'ordine, F, che contiene anche un secondo fascio sizigetico di quartiche, associato al primo: la superficie F è invariante non solo per il G_{768}, ma anche per un gruppo completo G_{1536} che comprende — in aggiunta alle precedenti — omografie che scambiano fra loro i due fasci.

Si consideri, nel relativo spazio S, il gruppo G_{32} di una quartica gobba K_4, e cerchiamo di rappresentarci il modo come esso opera sulle quadriche del sistema lineare ∞^3:

$$u_1x_1^2 + u_2x_2^2 + u_3x_3^2 + u_4x_4^2 = 0,$$

che possiedono il tetraedro coniugato $ABCD$. A tale scopo si interpretino le dette quadriche come piani di uno spazio astratto Σ, prendendo dunque le u come coordinate dei detti piani: fra Σ e S intercederà la corrispondenza $[1 \cdot 8]$ definita dalle equazioni (¹)

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2^2, \quad y_3 = x_3^2, \quad y_4 = x_4^2,$$

che, in coordinate cartesiane, si riducono alla forma

$$X = x^2, \quad Y = y^2, \quad Z = z^2.$$

(¹) Questa trasformazione viene usata da Timerding nella memoria « Ueber die quadratische transformation » (*Annali di Mat.*, 1898). L'A. ne deduce le proprietà della quartica K_4 che si collegano al gruppo delle sue trasformazioni proiettive. (Cfr. la quarta parte della memoria, pag. 125 e seguenti).

E alle omografie del G_{32} di S, lascianti ferma la K_4 e permutanti le quadriche per essa, corrisponderanno in Σ le omografie di un gruppo proiettivo Γ in isomorfismo meriedrico col G_{32}. Precisamente all'identità in Γ, corrisponde nel G_{32} il sottogruppo G_8 formato dalle involuzioni (omologie e omografie biassiali armoniche) che lascian fermi i vertici del tetraedro $ABCD$, cioè i quattro coni per K_4, e quindi tutto il relativo fascio di quadriche, sicchè il gruppo Γ è un Γ_4 d'ordine $\frac{32}{8} = 4$. Anzi si vede di più che il Γ_4 è un gruppo diedrico (formato di tre involuzioni permutabili e dell'identità) che possiede una retta unita p, immagine del fascio delle quadriche per K_4, subordinando appunto nel fascio di piani di asse p (cioè nel fascio di quadriche per K_4 in S) il gruppo diedrico delle proiettività che lascian ferma una quaterna di piani (immagini dei quattro coni di vertici $ABCD$).

Ora il nostro Γ_4, in Σ, lascerà invariato un tetraedro $A'B'C'D'$ i cui vertici rispondono alle quattro reti di coni $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, dello spazio S: il Γ_4 opera sulla quaterna $A'B'C'D'$, producendo su di essa le tre sostituzioni $(A'B')(C'D')$, $(A'C')(B'D')$, $(A'D')(B'C')$ e l'identità. Si deduce di qui che *le omografie involutorie del* Γ_4, possedendo ciascuna due rette unite non incidenti e non costituite di punti uniti (per es. le $A'B'$, $C'D'$), *sono biassiali*: dimostriamo che le tre coppie di assi appartengono ad una rigata quadrica Φ, formando su di essa tre coppie mutuamente armoniche, cioè una *sestina regolare* ([1]).

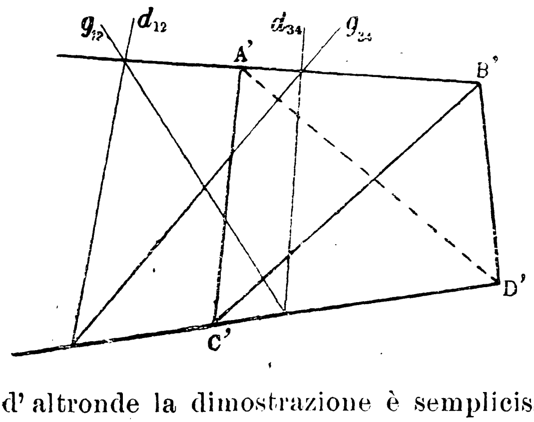
La nostra dimostrazione si svolge come segue. Anzitutto si osservi che gli assi delle nostre due omografie permutabili I_1 e I_2 non possono essere mutuamente incidenti, attesochè queste omografie devono lasciar ferma la stessa retta p, e

([1]) La sestina regolare in una forma di prima specie, quale una rigata quadrica, o sopra una retta, si è presentata anzitutto come covariante sestico T di una quaterna di punti, o meglio di ∞^1 quaterne generate dal gruppo diedrico relativo ad una qualunque di esse (L. 2°, § 9, vol. I, pag. 205); il che abbiamo avuto occasione di ricordare nel § precedente. Si è visto inoltre (L. 2°, §§ 10, 11) che codesta sestina, rappresentata sopra la sfera della variabile complessa, dà i vertici di un ottaedro regolare, cosicchè appare invariante per un gruppo proiettivo ottaedrico G_{24}. Di qui risulta anche che la sestina regolare si ottiene aggiungendo a un gruppo armonico — ciclo di una proiettività ciclica del quart'ordine — i punti uniti di questa, etc.

subordinare sopra di essa due proiettività involutorie diverse, giacchè in quel caso la p dovrebbe incontrare gli assi di I_1 e I_2 nei medesimi punti. Indichiamo ora con $d_{12} d_{34}$, $d_{13} d_{24}$, le coppie di assi di I_1 e I_2; per la permutabilità di queste omografie risulta che I_1 scambia fra loro gli assi d_{13} e d_{24} della I_2 e pertanto d_{24} è anche essa una direttrice della rigata Φ costituita dalle rette appoggiantisi a d_{12}, d_{34}, d_{13}, ed anzi costituisce con queste una quaterna armonica. Infine il prodotto $I_3 = I_1 I_2$, lasciando ferma la Φ, avrà come assi altre due rette d_{14}, d_{23}, che saranno pur direttrici della medesima rigata quadrica e separeranno armonicamente le coppie $d_{12} d_{34}$ e $d_{13} d_{24}$.

Giova rilevare che la relazione della quadrica Φ col tetraedro $A'B'C'D'$, consiste in ciò che « la Φ ammette il tetraedro $A'B'C'D'$ come coniugato ». Si verifica infatti che due vertici qualunque di esso, per es. A' e B' riescono coniugati armonici rispetto ad una coppia di direttrici $d_{12} d_{34}$, e quindi rispetto a Φ: $d_{12} d_{34}$ sono precisamente incidenti agli spigoli opposti $A'B'$ e $C'D'$, costituendo gli assi di quell'omografia biassiale di Γ_4 che produce la sostituzione $(A'B')(C'D')$.

Notisi che la proprietà della quadrica Φ di possedere tre coppie di direttrici (e così anche di generatrici) rispettivamente incidenti alle tre coppie di spigoli opposti del tetraedro $A'B'C'D$, e fra loro mutuamente armoniche, consegue a sua volta dall'essere il tetraedro $A'B'C'D'$ coniugato rispetto a Φ.



La cosa non avrebbe bisogno di dimostrazione per chi rifletta che la figura costituita da una rigata quadrica e da un tetraedro coniugato non possiede invarianti assoluti, ma d'altronde la dimostrazione è semplicissima. Basta osservare che i piani tangenti alla Φ condotti per $A'B'$, segano sulla superficie due direttrici $d_{12} d_{34}$ (e anche due generatrici $g_{12} g_{34}$) incidenti agli spigoli opposti $A'B'$, $C'D'$: è poi chiaro che l'omografia biassiale armonica con gli assi d_{12} e d_{34} scambia fra loro gli spigoli opposti $A'C'$, $B'D'$ e $A'D'$, $B'C'$, e quindi lascia ferme le due coppie di direttrici ad essi incidenti $d_{13}d_{24}$ e $d_{14}d_{23}$, sicchè risulta anche che le tre coppie di direttrici d_{ik}, d_{lm}, formano su Φ una sestina regolare.

Ora, riprendendo a considerare il nostro Γ_4 diedrico operante entro lo spazio Σ, vediamo che esso lascia ferma non solo la retta p, ma una schiera ∞^1 di rette analoghe, generatrici della quadrica Φ. Si deduce che il G_{32}, dato in S, lascerà invariante non solo la quartica K_4, ma una serie ∞^1 di quartiche analoghe, che formeranno un fascio sopra la superficie F trasformata di Φ: è questo fascio che — per analogia coll'omonimo fascio di cubiche piane — abbiam detto di voler designare col nome di « fascio sizigetico di quartiche ». Notiamo intanto che il nostro G_{32} non lascia invariate altre quartiche oltre quelle del fascio nominato, giacchè una quartica invariante per il G_{32} possiede come tetraedro coniugato $ABCD$, e quindi risponde a una retta di Σ, ed una retta di Σ — che sia unita per il Γ_4 — deve appoggiarsi agli assi d_{12}, d_{34} etc., e quindi appartenere a Φ, come generatrice.

Aggiungiamo che le ∞^1 quartiche invarianti per il G_{32} hanno modulo variabile, questo modulo essendo dato dal birapporto secondo cui le generatrici di Φ proiettano i vertici del tetraedro $A'B'C'D'$ (i coni del sistema ∞^3 di quadriche rispondono a piani per A' o B' o C' o D'), ovvero ne segano le faccie (abbiam visto, pag. 279, che tali birapporti sono uguali): infatti nella schiera di queste generatrici si trovano due rette incidenti agli spigoli $A'B'$, $C'D'$ del tetraedro per cui il detto birapporto (in relazione all'ordine $A'B'C'D'$) assume il valore 1; mentre vi sono pure due rette incidenti ad $A'C'$, $B'D'$ per cui lo stesso birapporto assume il valore 0, e due incidenti ad $A'D'$, $B'C'$ per cui esso diventa ∞.

È facile determinare il numero delle quartiche invarianti per il G_{32}, appartenenti al fascio sizigetico, che posseggono un dato modulo, giacchè si tratta di cercare quante sono le generatrici di Φ che segano le faccie del tetraedro $A'B'C'D'$ secondo un dato birapporto. Sappiamo infatti che le ∞^3 rette dello spazio Σ, secanti le faccie del tetraedro $A'B'C'D'$ (prese in un dato ordine) secondo un birapporto k, formano un complesso di secondo grado, detto tetraedrale: ora un tale complesso avrà sempre 4 rette comuni con una schiera rigata di second' ordine (la quale — come insieme delle rette incidenti a tre rette date — è intersezione di tre complessi lineari); dunque vi saranno quattro generatrici di Φ secanti le faccie del tetraedro $A'B'C'D'$ secondo il birapporto k. Analogamente si avranno pure quattro generatrici di Φ per cui il detto birapporto (in relazione al medesimo ordine delle faccie) assume i valori associati a k:

$$k, \quad 1-k, \quad \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{1-k}, \quad \frac{k-1}{k}, \quad \frac{k}{k-1},$$

e quindi si avranno in generale, *nel fascio sizigetico* costruito entro S, *24 quartiche unite per il G_{32} per cui l' invariante assoluto* (cioè il modulo in forma razionale, cfr. L. 1°, § 4, vol. I, pag. 26) *assume un dato valore*; ma esisteranno invece, entro il detto fascio, *12 quartiche armoniche, ed 8 quartiche equianarmoniche.* Oltre a ciò si trovano *6 quartiche spezzate ciascuna in quattro rette (formanti un quadrilatero sghembo)*, che rispondono alle rette g_{12}, g_{31}, ecc., incidenti agli spigoli opposti del tetraedro: infatti la g_{12} appare come intersezione di due piani contenenti $A'B'$ e $C'D'$ ai quali rispondono in S due coppie di piani per AB e CD (coni aventi per vertice contemporaneamente A e B il primo, e C e D il secondo). Giova anche osservare che « la quaterna di generatrici di Φ secanti le quattro faccie del tetraedro (prese in un certo ordine) secondo un medesimo birapporto, formano l' involuzione delle quaterne aventi lo stesso covariante sestico T, costituito dalle tre coppie di generatrici $g_{ik}g_{lm}$ »; infatti [1] la nostra g_4^1 riesce definita dalle tre coppie armoniche $g_{ik}g_{lm}$, ciascuna contata due volte.

Abbiamo veduto che una qualsiasi quartica di prima specie K_4 dello spazio S, appartiene ad un fascio sizigetico di quartiche analoghe (giacenti tutte sopra una superficie F) che restano invariate per il medesimo gruppo proiettivo G_{32}. Ma entro questo fascio si trovano quartiche armoniche, per cui il G_{32} si amplia in un G_{64}, e quartiche equianarmoniche, per cui lo stesso G_{32} si amplia in un G_{96}: pertanto il nostro G_{32} sarà contenuto in un gruppo proiettivo più ampio, che dovrà permutare fra loro le quartiche del fascio. Si troverà preci-

[1] Cfr. L. 2°, § 9, Vol. I, pg. 201.

samente l'ordine di cotesto gruppo più ampio, usando ancora della trasformazione che ci riconduce allo spazio Σ. Abbiamo in Σ 6 trasformazioni involutorie della schiera rigata Φ, ognuna delle quali lascia ferme due generatrici secanti le faccie del tetraedro $A'B'C'D'$ secondo una quaterna armonica: ricordando le proprietà delle sestine regolari che già abbiamo avuto occasione di invocare in questo studio, si vede facilmente che le dette sei involuzioni sono quelle che scambiano fra loro due generatrici come $g_{12}\, g_{34}$, associando g_{13} con g_{14} e g_{24} con g_{23} ovvero g_{13} con g_{23} e g_{24} con g_{14}. Similmente abbiamo in Σ 8 trasformazioni cicliche del terz' ordine, due delle quali — l' una inversa dell' altra — lascian ferme due fra le otto generatrici secanti le faccie del tetraedro $A'B'C'D'$ secondo quaterne equianarmoniche: queste trasformazioni cicliche del terzo ordine corrispondono ai quattro modi diversi secondo cui la sestina regolare delle g_{ik} si lascia dividere in cicli del terzo ordine. Ora, moltiplicando le 6 involuzioni e le 8 trasformazioni cicliche del terz' ordine sunnominate, si ottiene sopra la schiera rigata Φ il gruppo ottaedrico formato dalle 24 proiettività che lasciano invariata la sestina regolare delle g_{ik}. Ma questo gruppo viene subordinato da un gruppo più ampio di omografie dello spazio Σ, che si trova con esso in isomorfismo meriedrico [1, 4], avendosi il gruppo diedrico Γ_4 che produce l' identità sulla schiera delle generatrici di Φ: così dunque si ottiene in Σ un gruppo $\Gamma_{4\cdot 24} = \Gamma_{96}$ di omografie, permutanti fra loro le generatrici di Φ, che lasciano invariata la sestina delle g_{ik} e anche il tetraedro $A'B'C'D'$. È facile provare che ritornando dallo spazio Σ allo spazio S con la nostra trasformazione [1, 8]; le dette 96 omografie (per cui è unito il tetraedro $A'B'C'D'$) si trasformano in $8\cdot 96 = 768$ omografie di S, che permutano fra loro le ∞^1 quartiche invarianti per il dato G_{32}: infatti per la sostituzione

$$y_1 \equiv x_1^2, \quad y_2 \equiv x_2^2, \quad y_3 \equiv x_3^2, \cdot \quad y_4 \equiv x_4^2,$$

ogni omografia del tipo

$$y_i' \equiv a_k y_k$$

si muta nelle $2^3 = 8$ omografie

$$x_i' \equiv \pm \sqrt{a_k}\, x_k .$$

In conclusione il *gruppo proiettivo* G_{32} *di una quartica* K_4 *è contenuto in un* G_{768} *di omografie che permutano fra loro le* ∞^1 *quartiche unite per il medesimo* G_{32}: questo G_{768} è generato per moltiplicazione dai gruppi G_{64} e G_{96} relativi alle quartiche armoniche ed equianarmoniche del fascio, e permuta fra loro i vertici del tetraedro $ABCD$ secondo le 24 sostituzioni del gruppo totale.

Vi è luogo ad ampliare ulteriormente il Γ_{96} di Σ (e quindi il G_{768} di S) moltiplicando per le omologie $[(A'\alpha')$ ecc.$]$ aventi come centro e piano unito un vertice e la faccia opposta del tetraedro $A'B'C'D'$, le quali scambiano fra loro le generatrici e le direttrici della quadrica Φ, e le due sestine regolari delle g_{ik} e delle d_{ik}. Si ottiene in tal guisa un $\Gamma_{2 \cdot 96} = \Gamma_{192}$ che è il più ampio gruppo di omografie per cui resta invariata la quadrica Φ e il suo tetraedro coniugato $A'B'C'D'$. A questo Γ_{192} corrisponde in S un gruppo proiettivo G_{1536}, di cui passiamo a spiegare il significato.

A tale scopo riprendiamo a considerare la corrispondenza che intercede fra la quadrica Φ dello spazio Σ e la superficie F di S (che vedremo fra un momento essere del quart'ordine): come alle generatrici di Φ rispondono su F le quartiche K_4 di un fascio, così anche le direttrici daranno luogo ad un *fascio sizigetico associato* di quartiche K_4': il G_{1536} risulterà quindi il più ampio gruppo di omografie che lascia invariata la F, permutando fra loro i due fasci associati delle quartiche K_4 e K_4', ovvero lasciandoli separatamente invariati.

Nello spazio Σ avevamo un Γ_4 diedrico contenente tre omografie biassiali colle coppie di assi $d_{ik}\, d_{lm}$, per cui riuscivano unite tutte le generatrici di Φ; orbene vi è luogo a considerare un gruppo associato Γ_4' contenente le tre omologie armoniche di assi $g_{ik}\, g_{lm}$, per cui sono unite tutte le direttrici di Φ. E come il Γ_4 è stato da noi ampliato in un Γ_{96} che ha lo stesso tetraedro unito $A'B'C'D'$, e permuta le generatrici di Φ lasciando invariata la sestina regolare delle g_{ik}, così analogamente il Γ_4' si amplierà in un Γ_{96}' col detto tetraedro unito, che permuta fra loro le d_{ik}: ma è importante notare che « il Γ_{96}' coincide col Γ_{96} », imperocchè i due gruppi sono ugualmente definiti entro il Γ_{192} che li contiene dalla condizione di lasciare invariate le due schiere di rette della quadrica Φ. Aggiungasi che il Γ_{96} non è il minimo gruppo che contenga in sè il Γ_4 e il Γ_4': infatti il Γ_4 e il Γ_4', operando l'uno sulle generatrici e l'altro sulle direttrici di Φ, sono fra loro permutabili, e quindi riescono contenuti in un Γ_{16} sottogruppo del Γ_{96}.

Passiamo dallo spazio Σ allo spazio S mediante la nostra trasformazione [1, 8]: allora al Γ_4 e al Γ_4' corrisponderanno i due *gruppi associati* G_{32} e G_{32}' che abbiamo visto essere definiti dalla medesima configurazione C_{28}, costituita dai vertici del tetraedro $ABCD$ e da quaterne di punti appartenenti agli spigoli e formanti coi vertici sestine regolari. Per vederlo basterà riconoscere che « le quaterne della configurazione anzidetta sono le intersezioni degli spigoli con la superficie del quart'ordine F, trasformata della quadrica Φ ». A tale scopo occorre ricordare che le quaterne della configurazione C_{28}, caratteristica per il G_{32}, sopra due spigoli opposti AB e CD del tetraedro fondamentale, sono precisamente quelle quaterne che designammo innanzi con $PQPQ''$, $RSR'S'$ (PQ coniugati armonici rispetto ad AB etc.), e che i punti P, Q, R, S, e così anche P', Q', R', S', sono i vertici di due quadrilateri sghembi formati dagli assi di quattro omologie biassiali armoniche appartenenti al G_{32}, le quali vengono permutate fra loro mediante le trasformazioni del G_8; ora a queste quattro coppie di assi $PR \cdot QS$ etc. risponderanno in Σ gli assi di un'unica omografia biassiale del Γ_4, cioè precisamente le rette d_{12} d_{34} direttrici della Φ incidenti a $A'B'$ e $C'D'$; ciò è d'accordo con la proprietà già verificata innanzi (per le g_{ik} invece che per le d_{ik}) che a ciascuna delle due rette d_{12} d_{34} rispondono in S quartiche degeneri nei quattro lati di un quadrilatero sghembo. Pertanto appare che la quaterna di punti $PQP'Q'$, sullo spigolo AB, risponde nella nostra trasformazione alla coppia segata su $A'B'$ della quadrica Φ (si avverta come la trasformazione, in generale [1, 8], divenga [1, 4] fra i punti delle faccie dei tetraedri $A'B'C'D'$ e $ABCD$, e [1, 2] per i punti degli spigoli, mentre associa biunivocamente i vertici); si conclude che le quaterne $PQP'Q'$ etc. della configurazione C_{28} sono segate sugli spigoli del tetraedro $ABCD$ dalla superficie F trasformata di Φ, che — non passando per A, B, C, D — sarà dunque una superficie del quart'ordine.

In conseguenza di ciò i due gruppi G_{32} e G_{32}' corrispondenti al Γ_4 e al Γ'_4 risultano veramente associati nel senso dichiarato innanzi: cioè le omografie biassiali di questi gruppi incidenti ad AB e CD sono per l'uno le rette $PR \cdot QS$, $PS \cdot QR$, $P'R' \cdot Q'S'$, $P'S' \cdot Q'R'$ e per l'altro $PR' \cdot QS'$, $PS' \cdot QR'$, $P'R \cdot Q'S$, $P'S \cdot Q'R$.

Raccogliamo le cose dette enunciando il

Teorema. *Una quartica gobba di prima specie affatto generale appartiene ad un fascio sizigetico di quartiche analoghe che posseggono lo stesso tetraedro coniugato ABCD e lo stesso gruppo G_{32} di trasformazioni proiettive: questo fascio descrive una superficie del quart'ordine F che contiene un secondo fascio associato di quartiche analoghe, aventi pure il tetraedro coniugato ABCD e invarianti per un altro gruppo proiettivo G_{32}',*

I due gruppi associati G_{32} e G_{32}', essendo fra loro *permutabili* ed avendo comune il sottogruppo G_8 coi punti uniti *ABCD, sono contenuti in un medesimo gruppo proiettivo G_{128}, che a sua volta si amplia in un G_{768} formato dalle omografie che lasciano separatamente invariati i due fasci sizigetici, permutandone fra loro le curve. Finalmente il detto G_{768} si amplia in un gruppo proiettivo G_{1536} che lascia invariata la superficie del quart' ordine F, e che contiene, oltre le precedenti, le trasformazioni proiettive scambianti fra loro i due fasci associati.*

Alle cose dette innanzi si può dare facile espressione analitica nel modo che segue.

Anzitutto l'equazione della quadrica Φ rispetto al tetraedro coniugato $A'B'C'D'$, per una conveniente scelta del punto unità si riduce alla forma

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0;$$

quindi l'equazione della superficie F risulta

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=0.$$

Ciò posto le equazioni delle omografie del gruppo G_{1536}' lascianti invariata la F, si compongono, per moltiplicazione, mediante le 64 sostituzioni

$$x_1'=x_1, \quad x_2'=i^{r_2}x_2, \quad x_3'=i^{r_3}x_3, \quad x_4'=i^{r_4}x_4,$$
$$(i=\sqrt{-1}, \quad r_2, r_3, r_4=1, 2, 3, 4),$$

e le 24 sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_{s_1} & x_{s_2} & x_{s_3} & x_{s_4} \end{pmatrix}, \qquad (s_i=1, 2, 3, 4)$$

che formano due sottogruppi permutabili del G_{1536}.

Ora si possono ottenere i due fasci sizigetici di quartiche appartenenti alla superficie F. A tale scopo osserviamo che queste quartiche vengono proiettate da un vertice $A=(0001)$ del tetraedro coniugato secondo coni quadrici, ciascuno dei quali segherà F secondo due quartiche, contenute in fasci associati, che si scambiano una nell'altra mediante l'omografia ciclica del quart'ordine

$$x_4'=ix_4,$$

di centro A e piano α.

I coni quadrici di vertice A, la cui sezione si spezza in due quartiche associate, si lasciano rappresentare con l'equazione

$$Q=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2=0,$$

dove

$$a^2+b^2+c^2=0.$$

Infatti si consideri accanto a Q il cono

$$Q'=ax_1^2+bx_2^2-cx_3^2=0;$$

(trasformato del primo nell'omologia ciclica $x_3'=ix_3$ di centro B e piano β): avremo identicamente

$$c^2F+QQ'+Q_1Q_1'=0,$$

dove

$$Q_1=bx_1^2-ax_2^2+cx_4^2,$$
$$Q_1'=bx_1^2-ax_2^2-cx_4^2,$$

essendo

$$c^2=-(a^2+b^2),$$
$$QQ'=(ax_1^2+bx_2^2)^2-c^2x_3^4,$$
$$Q_1Q_1'=(bx_1^2-ax_2^2)^2-c^2x_4^4,$$
$$F=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4.$$

Risulta di qui che l'intersezione di F con la coppia di quadriche QQ' si spezza in quattro quartiche intersezioni della detta coppia QQ' con la Q_1Q_1', e perciò l'intersezione di F col cono Q si spezza nelle due quartiche comuni a Q e ai coni Q_1 e Q_1'.

La quartica sezione dei coni Q e Q_1 dipende dai parametri omogenei $a\,b\,c$ legati dalla relazione $a^2+b^2+c^2=0$, e quindi in definitiva dal rapporto $\frac{a}{b}$, variando il quale si otterrà precisamente una quartica (come QQ_1 o QQ_1') entro ciascuno dei due fasci sizigetici su F. Ora si consideri, in uno di questi fasci, una quartica generica, rispondente appunto ad una terna di valori a, b, c: ci proponiamo di determinare il *modulo della quartica.*

A tale scopo scriviamo l'equazione del fascio di quadriche passanti per la data quartica:

$$Q+\lambda Q_1=(a+\lambda b)x_1^2+(b-\lambda a)x_2^2+cx_3^2+\lambda cx_4^2=0;$$

a questo fascio appartengono i quattro coni

$$\begin{aligned} Q &= Q_A = ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2=0 && (\lambda=0)\\ Q_1 &\equiv Q_B = bx_1^2-ax_2^2+cx_4^2=0 && (\lambda=\infty)\\ & Q_C = \left(a+\frac{b^2}{a}\right)x_1^2+cx_3^2+\frac{cb}{a}x_4^2=0 && \left(\lambda=\frac{b}{a}\right)\\ & Q_D = \left(b+\frac{a^2}{b}\right)x_2^2+cx_3^2-\frac{ca}{b}x_4^2=0 && \left(\lambda=-\frac{a}{b}\right); \end{aligned}$$

quindi il birapporto $(Q_C Q_D Q_A Q_B)$, cioè il modulo della nostra quartica, viene dato da

$$k=\left(\frac{b}{a},\ -\frac{a}{b},\ 0,\ \infty\right)=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Di qui si conferma in ispecie che esistono — entro il fascio sizigetico — quattro quartiche per cui il birapporto dei quattro coni del fascio, presi in un certo ordine, assume un dato valore k; infatti tali quartiche corrispondono alle radici del sistema di equazioni omogenee

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=0\\ ka^2+b^2=0, \end{cases}$$

cioè ai valori

$$\frac{b}{a}=\pm\sqrt{-k},\quad \frac{c}{a}=\pm\sqrt{k-1}\ \text{(1)}.$$

Finalmente daremo qui le *equazioni delle omografie del gruppo G_{32} che lascia invariata la nostra quartica intersezione*

(1) L'equazione di quarto grado da cui dipende la determinazione delle nostre quartiche viene risoluta mediante due radicali quadratici indipendenti, in rapporto alla circostanza che — al variare di k — le quaterne di quartiche formano, entro il fascio sizigetico, un'involuzione diedrica g_4^1.

dei coni Q_A e Q_B, e insieme tutte le altre del medesimo fascio sizigetico.

Anzitutto abbiamo le equazioni del G_8 che lascia fermi i vertici A, B, C, D del tetraedro fondamentale

$$1)\qquad x_1' \equiv x_1, \quad x_2' \equiv \pm x_2, \quad x_3' \equiv \pm x_3, \quad x_4' \equiv \pm x_4.$$

In secondo luogo vediamo che i due coni Q_A e Q_B sono scambiati fra loro mediante la sostituzione

$$2)\qquad x_1' = ix_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = ix_3,$$

che rappresenta un' omografia biassiale involutoria. In terzo luogo, tenendo conto che $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, possiamo scrivere l' equazione del cono Q_C nella forma

$$- cx_1^2 + ax_3^2 + bx_4^2 = 0:$$

troviamo in tal modo che i coni Q_A e Q_C si scambiano fra loro mediante la sostituzione

$$3)\qquad x_1' \equiv x_3, \quad x_3' \equiv ix_1, \quad x_2' \equiv x_4, \quad x_4' \equiv ix_2,$$

indipendente da a, b, c come le 1) e 2).

Le omografie 2) e 3), moltiplicate per le omografie 1) del gruppo G_8, danno tutte le omografie del gruppo G_{32}: la verifica della proprietà fondamentale del fascio sizigetico consiste in ciò che le equazioni del G_{32} risultano indipendenti dal parametro $k = -\frac{b^2}{a^2}$, modulo della quartica.

Lasciamo al lettore di scrivere le equazioni dei gruppi proiettivi G_{64} e G_{96}, corrispondenti alle quartiche armoniche ed equianarmoniche del fascio sizigetico.

31. **Trasformazioni delle curve di genere $p > 1$ e — in particolare — delle quartiche piane.** — Per studiare le condizioni di trasformabilità birazionale di due curve di genere $p > 1$, conviene stabilire anzitutto il

Teorema. *Una curva di genere $p > 1$ non può ammettere che un numero finito di trasformazioni birazionali in se stessa.*

Infatti si costruisca la curva canonica C_{2p-2}^{p-1} immagine della data: le trasformazioni birazionali di questa danno trasformazioni proiettive della C_{2p-2}^{p-1}, e non si possono avere infinite trasformazioni, perchè risulterebbe $p=0$ (cfr. § 26). Questo ragionamento dà luogo ad una apparente eccezione per $p=2$, e più in generale nel caso delle curve iperellittiche (contenenti una g_2^1), dove la C_{2p-2}^{p-1} si riduce ad una curva razionale K dello spazio S_{p-1} contata due volte, i punti della quale rispondono alle coppie della g_2^1 (cfr. § 13): ma si avverta che in questo caso le trasformazioni birazionali della curva data diventano trasformazioni proiettive della curva doppia K, soggette alla condizione di lasciare invariato il gruppo dei $2p+2$ punti di diramazione (nascenti dai punti doppi della g_2^1), sicchè essendo $2p+2>2$, vi è su K un numero finito di proiettività soddisfacenti a tale condizione. Del resto, chi non ami considerare curve canoniche doppie, può ripetere il ragionamento del caso generale riferendosi alla curva bicanonica o tricanonica (cfr. § 13).

Rileveremo ora che dal teorema precedente consegue: *una trasformazione di una curva di genere $p>1$ è necessariamente ciclica.*

Dopo ciò aggiungiamo l'osservazione che, *per $p=2$ una* curva C possiede *in generale una sola trasformazione* birazionale (involutoria) corrispondente alla sua g_2^1: l'esistenza di trasformazioni ulteriori corrisponde al caso che il gruppo dei sei punti di diramazione sulla retta doppia canonica possegga trasformazioni proiettive in se stesso. La determinazione delle sestine di punti della retta, dotate di trasformazioni proiettive, si lascia compiere senza difficoltà in base alla teoria dei gruppi finiti di proiettività binarie svolta nel L. 2°, § 10, vol. I, pag. 206; si ottengono così tutte le curve di genere due con più trasformazioni in se stesse [1].

Ora, passando alle curve di genere $p>2$, si vede che già *le curve di genere 3 non ammettono in generale trasformazioni birazionali in se stesse*, perchè si dimostra che la quartica piana più generale (che è la curva canonica di codesto genere) non viene trasformata in sè da omografie (cicliche) non identiche.

La dimostrazione si svolge per assurdo come segue. Pongasi dapprima che la curva piana generale del quart' ordine ammetta una trasformazione proiettiva involutoria; allora, essendovi

[1] Cfr. Bolza: « On binary sextics with linear trasformations into themselves » (*American Journal of Math*, t. X, 1888).

∞^{14} quartiche e ∞^4 omologie armoniche (dipendenti dalla scelta del centro A e dell'asse a), si troveranno ∞^{10} quartiche invarianti per una stessa omologia armonica di centro A e di asse a: ma da ciò segue l'esistenza di quartiche distinte appartenenti al predetto sistema ∞^{10}, e soggette alla condizione di passare per 9 punti generici del piano, sicchè codeste curve — passando anche per i coniugati dei punti dati — verranno ad avere 18 punti a comune, ciò che è assurdo.

Il ragionamento precedente vale *a fortiori* per ridurre all'assurdo l'ipotesi che la quartica piana possegga trasformazioni omologiche d'ordine maggiore di due. Ma la deduzione si estende anche all'ipotesi in cui la stessa quartica ammettesse una trasformazione ciclica non omologica, che dovrebbe essere d'ordine $n > 2$. Infatti la costruzione di una omografia siffatta dipende da 6 parametri, cioè dalle coordinate dei tre punti uniti; si avrebbero dunque ∞^8 quartiche invarianti per una medesima omografia ciclica, d'ordine n, con dati punti uniti; e per conseguenza due quartiche di questo sistema, passanti per 7 punti generici del piano, dovrebbero avere in comune $7n > 16$ punti, ciò che è assurdo.

Si noterà che la dimostrazione precedente si estende al caso delle curve piane C_n d'ordine $n > 4$, riconoscendosi in tal guisa che: *una curva piana generale d'ordine $n > 3$, non possiede trasformazioni proiettive*. Si ottengono così curve particolari di genere $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ contenenti *una* g_n^2, che riescono prive di trasformazioni birazionali in se stesse. Perciò occorre dimostrare che una curva piana C_n, priva di punti doppi, contiene come unica g_n^2 quella segata dalle rette (sicchè ogni trasformazione birazionale di C_n risulta proiettiva); e ciò si ottiene come segue. Data su C_n una g_n^2, ogni gruppo G_n di questa serie offre $n-2$, anzichè n, condizioni indipendenti alle curve d'ordine $n-3$ che debbono contenerlo (teorema di Riemann-Roch); sicchè una curva φ_{n-3} di ordine $n-3$ passante per $n-2$ punti $A_1 A_2 \dots A_{n-2}$ del G_n, passerà di conseguenza per i rimanenti $A_{n-1} A_n$; ora si consideri una φ_{n-3} composta della retta $A_i A_{i+1}$ $(i+1 < n-1)$ e di altre $n-4$ rette generiche passanti per i rimanenti punti A_h $(h < n-1)$; perchè questa φ_{n-3} contenga $A_{n-1} A_n$, occorre che A_i e A_{i+1} siano allineati con la retta $A_{n-1} A_n$, sicchè appare che tutti i punti del nostro G_n sono in linea retta. c. d. d.

Vogliamo ora esaminare quando accada che una quartica piana irriducibile $f(xyz)=0$, di genere $p=3$, ammetta delle trasformazioni birazionali, le quali dovranno essere proiettive, essendo la quartica stessa curva canonica; precisamente determineremo tutti i gruppi di tali trasformazioni e le corrispondenti quartiche cui essi appartengono.

A tale oggetto cominciamo con l'osservare che se G_n è un gruppo, d'ordine n, di proiettività, esso contiene sottogruppi ciclici di ordine uguale a qualunque divisore primo di n, onde siamo condotti a svolgere la nostra analisi determinando prima i gruppi d'ordine primo, ed esaminando poi come essi possano ampliarsi.

Determiniamo dunque anzitutto quali possano essere i *gruppi G_n d'ordine n primo*. Qui occorre l'osservazione fondamentale che un gruppo G_n di proiettività determina sopra la curva f una γ_n^1 i cui gruppi, invariati per il G_n, sono composti con un punto P e con $n-1$ trasformati di esso mediante le operazioni di G_n. Indicando con π il genere della γ_n^1 e con δ il numero dei suoi punti doppi, avremo — per la nota formula di Zeuthen (§ 9, pag. 72) —

$$n(2\pi-2)+\delta=2p-2=4 .$$

Poichè n è primo, e la γ_n^1 è generata da una proiettività, i δ punti doppi si riuniranno in h punti n-pli, ciascuno dei quali conta per $n-1$ punti doppi: onde la relazione precedente potremo scriverla

$$n(2\pi-2)+h(n-1)=4,$$

ed allora, essendo $n\geq 2$, appare anzitutto

$$\pi\leq 2.$$

Si hanno così 3 casi: $\pi=0$, $\pi=1$, $\pi=2$.

Sia $\pi=0$.

La relazione precedente dà

$$n=\frac{4+h}{h-2},$$

onde

$$h\geq 3 \quad \text{e} \quad n\leq 7;$$

e risulta

$$h=3, \qquad n=7,$$

oppure

$$h=5, \quad n=3,$$

giacchè $n=2$ darebbe un' omologia armonica avente $h=8$ punti uniti sulla quartica, e $n=5$ darebbe un valore fratto per h.

Sia $\pi=1$.

La nostra relazione dà

$$h(n-1)=4,$$

cioè

$$h=2, \quad n=3, \quad \text{oppure} \quad h=4, \quad n=2.$$

Infatti non si può avere $h=1$, $n=5$, giacchè per una proiettività del quint' ordine — che qui non può essere omologica — si deve avere almeno un punto di coincidenza su ciascuna delle tre rette unite, che segano la quartica in gruppi di punti invarianti.

Sia $\pi=2$.

La nostra relazione dà

$$2n+h(n-1)=4$$
$$n=2, \quad h=0.$$

Ma *questo caso* non è *realizzabile* per una quartica irreducibile, bensì soltanto *per una conica doppia*, poichè si tratta qui d'una omologia armonica, il cui asse deve segare la curva in punti uniti.

Si conclude che *gli unici gruppi ciclici d' ordine primo che lasciano ferma una quartica, di genere 3, hanno l' ordine n uguale a 2, 3, 7, e subordinano su di essa un' involuzione lineare o ellittica: ogni altro gruppo avrà l' ordine n della forma*

$$n=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 7^{\gamma},$$

contenendo — per il teorema di Sylow (¹) — *sottogruppi d' ordine* 2^{α}, 3^{β}, 7^{γ}.

Quindi per determinare tutti i possibili gruppi G_n, determineremo prima quelli per cui $n=2^{\alpha}$, $n=3^{\alpha}$, $n=7^{\alpha}$, ed esamineremo poi come i gruppi d' ordine $n=2^{\alpha}$ si amplino — per l'aggiunta di proiettività del terz' ordine — in gruppi di

(¹) Cfr. per es. BIANCHI: « Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni », cap. II, § 25.

ordine $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$; infine determineremo i gruppi che contengono sottogruppi d'ordine 7^α.

Cominciamo col determinare i *gruppi* G_n *d'ordine* $n = 2^\alpha$ che lasciano invariata una quartica f di genere $p = 3$. A tale oggetto distingueremo i seguenti casi:

I. Il G_n contenga due omologie ω_{41} e ω_{42} di periodo quattro.

II. Il G_n contenga una sola omologia ω_{41} di periodo quattro.

III. Il G_n non contenga alcuna omologia di periodo quattro.

Questo III caso darà luogo ad alcuni sottocasi:

III, *a*) Il G_n contenga una sola omologia armonica ω_{21}.

III, *b*) Il G_n contenga più di una omologia armonica, e sia 2 il massimo periodo della omografia τ prodotto di due tali omologie.

III, *c*) Il G_n contenga più di una omologia armonica e sia > 2 il massimo periodo della omografia τ prodotto di due tali omologie (dimostreremo che tale periodo è 4).

Procediamo all'analisi dei singoli casi.

I. Il G_n contenga due omologie ω_{42} e ω_{42} di periodo quattro [1] essenzialmente distinte, cioè tali che l'una non sia il cubo dell'altra.

Dimostriamo che le due omologie ω_{41} e ω_{42} sono fra loro permutabili. Infatti si vede subito che il centro O_1 della ω_{41} non appartiene alla quartica f, e che le intersezioni di questa con l'asse a_1 dell'omologia sono quattro punti di ondulazione le cui tangenti passano per O_1; sicchè gli assi delle due omologie non possono coincidere. Ora se il centro della ω_{42} non appartiene ad a_1, applicando la ω_{42}, la a_1 viene trasformata in altre tre rette, su ciascuna delle quali si trovano almeno tre punti di ondulazione (si può sospettare che le trasformate di a_1 incontrino a_1 in un punto di ondulazione): ma una quartica ha 24 flessi, e non può quindi avere 13 ondulazioni che conterebbero come 26 flessi. Dunque il centro di una omologia appartiene all'asse dell'altra, sicchè le due omologie riescono permutabili.

[1] Usualmente indicheremo con ω le omologie, con π le proiettività non omologiche; faremo poi seguire al nome dell'operazione un primo indice a indicarne il periodo, e un secondo per distinguere operazioni simili.

Pertanto — mediante una conveniente scelta degli assi — le due omologie riescono date da:

$\omega_{41})$ $$x' = x, \quad y' = iy, \quad z' = z, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$\omega_{42})$ $$x' = ix, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

e la quartica f assume la forma

$$a_{00} z^4 + a_{40} x^4 + a_{04} y^4 = 0,$$

o — per una conveniente scelta del punto-unità —

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0.$$

La quartica che così si ottiene ha 12 ondulazioni (che assorbono i 24 flessi), le quali sono poste, a quaterne, sopra gli assi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; ogni omografia che lasci ferma f deve lasciare parimente invariato il triangolo fondamentale delle coordinate. La nostra quartica non ha invarianti: il gruppo più ampio che la lascia ferma è il G_{96} che si ottiene per moltiplicazione delle due omologie ω_{41} e ω_{42} (che generano un G_{16} abeliano) e delle altre due omologie

$\omega_{21})$ $$x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z,$$

$\omega_{22})$ $$x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y,$$

che generano il G_6 diedrico relativo alle 6 possibili sostituzioni sui tre elementi x, y, z. Il più ampio gruppo d'ordine 2^α contenuto nel G_{96} è un G_{32}: si hanno tre G_{32} siffatti, ciascuno si ottiene ampliando il suddetto G_{16} abeliano mediante uno dei tre scambi (xy), (yz), (zx).

II. Il G_n contenga una sola omologia ω_{41} di periodo quattro (oltre — s'intende — al suo cubo).

Potremo considerare la ω_{41} data da

$\omega_{41})$ $$x' = x, \quad y' = iy, \quad z' = z, \qquad (i = \sqrt{-1});$$

allora la quartica f assume la forma

$$y^4 = f_4(xz).$$

Ogni altra omografia del G_n dovrà lasciare invariata la ω_{41}, e quindi anche la quaterna

$$f_4(xz) = 0.$$

Ora — in generale — la $f_4(xz)=0$ resta invariata per un gruppo trirettangolo Γ_4 composto di tre involuzioni permutabili e dell'identità. Collocando i punti uniti di due di queste involuzioni (che formano una quaterna armonica), rispettivamente nei punti $x=0$, $z=1$; $x=1$, $z=0$; $x=1$, $z=1$; $x=1$, $z=-1$, le dette involuzioni restano definite da

$$x'=-x,\quad z'=z;$$
$$x'=z,\quad z'=x,$$

e la f_4 diviene

$$f_4(xz)=a(x^4+z^4)+bx^2z^2=0.$$

Così la nostra quartica appare — in generale — invariante per un gruppo G_{16} abeliano generato dalle 3 omologie

$$x'=x,\quad y'=iy,\quad z'=z,\qquad (i=\sqrt{-1})$$
$$x'=-x',\quad y'=y,\quad z'=z,$$
$$x'=z,\quad y'=y,\quad z'=x;$$

e si riduce al tipo

$$y^4=a(x^4+z^4)+bx^2z^2.$$

Se — come caso particolare — la

$$f_4(xz)=0$$

definisce sopra la retta (xz) una quaterna armonica od equianarmonica, il gruppo si amplia.

Invero se la quaterna è armonica, potremo scrivere

$$f_4=-x^4-z^4,$$

e quindi ritroveremo la quartica

$$x^4+y^4+z^4=0$$

del caso I.

Se invece la quaterna è equianarmonica, potremo scrivere

$$f_4=z(x^3-z^3).$$

In questo caso la quaterna $f_4=0$ riesce invariante per un gruppo Γ_{12} di 12 proiettività, che si ottiene ampliando il gruppo trirettangolo Γ_4 mercè l'aggiunta della proiettività ciclica del terz' ordine

$$x' = \varepsilon x, \quad z' = z \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}).$$

A tale proiettività risponde nel piano l'omologia ω_{31} di periodo tre:

$$\omega_{31}) \qquad x' = \varepsilon x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

che lascia invariata la quartica; sicchè questa ammette un gruppo G_{48} di 48 proiettività, entro il quale tuttavia si ha come gruppo più ampio d'ordine $n = 2^\alpha$ il G_{16} considerato innanzi, il quale gruppo è unico. Converrà osservare che entro questo G_{48} si ha una proiettività ciclica d'ordine 12 ottenuta quale prodotto delle due omologie ω_{41} e ω_{31}, d'ordine 4 e 3, che sono fra loro permutabili: tale proiettività risulta

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = iy, \quad z' = z.$$

III, *a*) Il G_n (privo di omologie cicliche del quart' ordine) contenga una sola omologia armonica ω_{21}, che potremo supporre definita da

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z.$$

Esaminiamo i successivi casi secondo i vari valori di n.

α) $n = 2$. Il G_n si compone della sola omologia ω_{21}, e l'equazione della f appare del tipo

$$f(xyz) = \varphi(xy^2z).$$

β) $n = 4$. Il G_n è generato da una proiettività ciclica del quart' ordine π_{41}, che non deve essere omologica: scriveremo la π_{41} nella forma

$$\pi_{41}) \qquad x' = -x, \quad y' = iy, \quad z' = z,$$

sicchè l'equazione della quartica risulta

$$f = a_{00}z^4 + a_{20}x^2z^2 + a_{12}xy^2z + a_{40}x^4 + a_{04}y^4 = 0,$$

dove $a_{04} \neq 0$, essendo la quartica priva di punti doppi.

Ora dimostriamo che i casi α) e β) esauriscono tutta la ipotesi III, *a*).

A tale oggetto osserviamo anzitutto che la quartica f

sopra scritta non può ammettere una seconda omografia del quart' ordine π_{42}, senza ammettere anche un' omologia del quart' ordine, il che è escluso per ipotesi. Infatti la π_{42}, dovendo avere come quadrato la ω_{21}, unica omologia armonica del nostro G_n, avrà due punti uniti sulla retta $y=0$, che possiamo supporre essere i punti (101) e $(10-1)$, sicchè potrà rappresentarsi con

$$x'=z, \quad y'=iy, \quad z'=x,$$

e dovrà essere — nella f —

$$a_{12}=0.$$

Ma allora la f risulta invariante per l' omologia

$$x'=x, \quad y'=iy, \quad z'=z,$$

onde alla f appartiene il G_{16} abeliano relativo al caso II, di cui π_{41} e π_{42} generano un sottogruppo G_8.

In secondo luogo la f non può ammettere una proiettività ciclica π di periodo 8 (e neppure quindi — *a fortiori* — di periodo 16 etc.) il cui quadrato sia la π_{41} (unica proiettività del quart' ordine di G_n).

Infatti la π (o una sua potenza primitiva) dovrebbe avere la forma

$$x'=\varepsilon_8^{2r}x, \quad y'=\varepsilon_8 y, \quad z'=z,$$

dove $\varepsilon_8=e^{\frac{2\pi i}{8}}$, e $2r$ indica un numero pari. Ora la π cambia segno al termine $a_{04}y^4$ della f, e dovrebbe quindi cambiare segno ai termini in z^4 e in x^4 che invece restano invariati; e d' altra parte i relativi coefficienti non possono esser nulli, ove la f non abbia punti doppi.

III, *b*). Il G_n contenga più di una omologia armonica e sia 2 il massimo periodo dei prodotti di due di esse: ciò significa che tutte le omologie del G_n sono fra loro permutabili.

Siano dunque ω_{21} e ω_{22} due omologie del gruppo. Potremo supporre — per la loro permutabilità —

$$\omega_{21}) \qquad x'=x, \quad y'=-y, \quad z'=z,$$
$$\omega_{22}) \qquad x'=-x, \quad y'=y, \quad z'=z.$$

Il loro prodotto dà una terza omologia

$$\omega_{23}) \qquad x'=x, \quad y'=y, \quad z'=-z.$$

L'equazione della quartica f appare così contenere solo i quadrati delle variabili x, y e z, ed essere quindi del tipo

$$\varphi(x^2y^2z^2)=0,$$

dove φ è una forma di secondo grado nelle variabili x^2, y^2, z^2.

Si ha dunque un G_4 trirettangolo costituito dalle dette tre omologie e dall'identità. Questo G_4 non può essere contenuto in un più ampio gruppo G_n.

È ovvio infatti che non possono esistere altre omologie contemporaneamente permutabili con le ω_{21}, ω_{22}, ω_{23}, giacchè se due omologie sono permutabili l'asse dell'una contiene il centro dell'altra: sicchè appare che il triangolo delle coordinate è invariante per il G_n. Inoltre, se il G_n contenesse una proiettività del quart'ordine π, questa dovrebbe lasciar ferma almeno una delle dette omologie, per es. la ω_{21}, ed anzi aver come quadrato tale omologia. Ora se π lascia ferme ω_{22} e ω_{23} si trova subito che la f resta invariata per una omologia del quart'ordine. Dovrà dunque π scambiare ω_{22} e ω_{23}, e avrà quindi sull'asse $y=0$ due punti uniti che possiamo supporre i punti (101) e $(10-1)$. Si deduce che la f, per essere invariante rispetto alla π, deve avere la forma

$$f=a_{00}(x-z)^4+a_{20}(x+z)^2(x-z)^2+a_{12}(x+z)y^2(x-z)+ \\ +a_{40}(x+z)^4+a_{04}y^4=0,$$

simile a quella incontrata nell'ipotesi β) del caso III, a); ma dovendo f contenere ora solo i termini con le variabili al quadrato, deve essere

$$a_{00}=a_{40},$$

onde in tale ipotesi la f ammetterebbe la omologia armonica

$$x'=z, \quad y'=iy, \quad z'=-x,$$

non permutabile con ω_{22}.

In conclusione il G_n si riduce al G_4 trirettangolo suddetto.

III, c). Il G_n contenga più di una omologia armonica, e fra queste ve ne sieno due, ω_{21} e ω_{22}, il cui prodotto dia una proiettività π di periodo $r\geq 4$.

Osserviamo anzitutto che questo periodo r (il quale dovrà dividere $n=2^\alpha$ e perciò essere una potenza di 2) non può riuscire $r>4$, il che è stato riconosciuto a proposito della ipotesi β) del caso III, a). Il periodo di π sarà dunque $r=4$.

Le due omologie, ω_{21} e ω_{22} definiscono così un gruppo G_8 diedrico, entro cui si ha come sottogruppo invariante un G_4 trirettangolo.

Precisamente osserviamo che la ω_{21} trasforma la ω_{22} nella

$$\omega_{23} = \omega_{21}\omega_{22}\omega_{21},$$

permutabile con la ω_{22}, giacchè il prodotto

$$\omega_{23} \cdot \omega_{22} = \pi^2$$

è involutorio.

Possiamo così indicare le nostre omologie con

$$\begin{array}{llll} \omega_{22}) & x' = x, & y' = -y, & z' = z, \\ \omega_{23}) & x' = -x, & y' = y, & z' = z, \\ \omega_{21}) & x' = y, & y' = x, & z' = z; \end{array}$$

la π risulta data da

$$\pi) \qquad x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = z,$$

e l'equazione della f appare

$$f = az^4 + b(x^2 + y^2)z^2 + cx^2y^2 + d(x^4 + y^4) = 0.$$

In fine il G_4 trirettangolo, contenuto nel G_8, è generato semplicemente dalle due omologie ω_{22} e ω_{23}.

Occorre ora dimostrare che il G_8 non è ampliabile in un G_n d'ordine $n = 2^\alpha$ con $\alpha > 3$.

A tale scopo supponiamo anzitutto che il G_n contenga un'omologia armonica ω, diversa da quelle del G_4 trirettan golo, e quindi non permutabile con una almeno di esse, per es. non permutabile con la ω_{23}. Allora il prodotto $\pi_1 = \omega\omega_{23}$ è una proiettività del quart'ordine, il cui quadrato $\omega = \pi_1^2$ è un'omologia armonica col centro sull'asse della ω_{23} (analogamente a quanto accade per la π considerata innanzi). La ω allora deve lasciare invariata la quaterna delle intersezioni dell'asse $x = 0$ con la quartica, quaterna composta di 4 punti distinti poichè la tangente in ciascuno di essi passa per il punto (100): la ω induce su tale asse una involuzione i cui punti uniti costituiscono una delle tre coppie del covariante sestico della quaterna suddetta, e pertanto scambia tra loro o lascia singolarmente fermi i punti ($y = 0$, $z = 1$) e ($y = 1$, $z = 0$) che costituiscono un'altra coppia dello stesso covariante sestico. Poichè la ω lascia fermo il punto 100, per cui passano — come si è detto — le tangenti alla quartica nei punti dell'asse $x=0$, la ω stessa scambierà gli assi $y=0$ e $z=0$ o li lascierà fermi. Nel primo caso moltiplicata con la ω_{21} (che scambia gli assi $x=0$ e $y=0$) produce sugli assi un ciclo del terz'ordine, onde non può essere contenuta nel G_n $(n=2^\alpha)$: risulta che ω deve lasciar fermo il triangolo delle coordinate, e quindi la π_1 dovrà lasciar fermo uno almeno di questi lati, e il vertice opposto.

Ora la π_1 non può coincidere con la π, ove la omologia ω sia fuori del gruppo G_8, nè può avere come punto unito il vertice (001) unito per la π, altrimenti si troverebbe — come a proposito del caso III, *a*) — una omologia del quart'ordine che lascia ferma la nostra curva f. La π_1 scambierà allora il vertice (001) per es. col vertice (100), e quindi porterà l'omologia ω_{21} in una omologia che scambia gli assi y e z, la quale, con la ω_{21}, produce sugli assi un ciclo del terz' ordine, il che è assurdo.

Segue che non può esistere nessun'altra omologia ω, fuori di quelle del nostro G_8, onde tutte le eventuali omografie del G_n lascieranno fermo il G_8, e quindi il G_4 trirettangolo in esso contenuto, e quindi anche il triangolo fondamentale per le coordinate. Ma, come si è visto sopra, una tale omografia (che non potendo essere una omologia armonica avrebbe il periodo 4) non può esistere, se il G_n non contiene un'omologia del quart'ordine. Sicchè resta dimostrato che il G_8 diedrico non può ulteriormente ampliarsi in un G_n d'ordine $n=2^\alpha$, con $\alpha>3$, sempre — inteso — restando nell'ipotesi III.

Si conclude che i soli gruppi d'ordine $n=2^\alpha$ che lasciano invariata una quartica di genere 3 sono:

I. Un G_{32} relativo alla quartica

$$x^4+y^4+z^4=0,$$

contenuto in un G_{96}, che è il massimo gruppo contenente il G_{32}.

II. Un G_{16} abeliano (e quindi i suoi sottogruppi) relativo alla quartica

$$y^4=f_4(x\,z),$$

che si amplia in un G_{48} quando la quaterna $f_4(xz)=0$ è equianarmonica, e nel G_{96} — relativo al caso precedente — quando la detta quaterna è armonica.

III, a, α). Il G_2 relativo alla quartica

$$\varphi(x\, y^2 z) = 0 .$$

III, a, β). Il G_4 ciclico relativo alla quartica

$$a_{00} z^4 + a_{20} x^2 z^2 + a_{12} x y^2 z + a_{40} x^4 + a_{04} y^4 = 0 .$$

III, b). Il G_4 trirettangolo relativo alla quartica

$$\varphi(x^2 y^2 z^2) = 0 .$$

III, c). Il G_8 diedrico relativo alla quartica

$$a z^4 + b(x^2 + y^2) z^2 + c(x^4 + y^4) = 0 .$$

Passiamo ad esaminare i gruppi G_n, *il cui ordine n è una potenza* di 3: $n = 3^\alpha$, che lasciano invariata una quartica f.

Si osservi anzitutto che un punto generico P della f è portato dalle operazioni del G_n in altri $n-1$ punti $P_2 \dots P_n$; il gruppo di n punti così ottenuto $P = P_1, P_2 \dots P_n$, al variare di P descrive sopra la f una involuzione algebrica γ_n^1, di cui, come innanzi, indicheremo con π il genere.

Con ragionamento uguale a quello usato per la ricerca dei gruppi proiettivi sopra la retta (cfr. L. 2°, § 10, Vol. I, pag. 207) si vede che se un gruppo della γ_n^1 generata dal G_n possiede un punto ν-plo, esso è composto di $\frac{n}{\nu}$ punti ciascuno multiplo secondo ν. Pertanto se r sono i gruppi dotati di punti multipli, e questi hanno rispettivamente le moltiplicità

$$\nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_r$$

si avrà, nella relazione di Zeuthen:

$$n(2\pi - 2) + \delta = 4,$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\nu_i}(\nu_i - 1),$$

sicchè potremo scrivere la detta relazione nella forma

$$\sum \frac{n}{\nu_i}(\nu_i - 1) = 4 - 2n\pi + 2n$$

dove π designa il genere dell' involuzione γ_n^1 determinata dal G_n sopra f.

Distinguiamo ora i casi possibili: $\pi = 1$, $\pi = 0$.

Sia $\pi = 1$, e si ponga: $n = 3^\alpha$, $\nu_i = 3^{\alpha_i}$. Dividendo per $n = 3^\alpha$ si avrà

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{3^{\alpha_i}}\right) = \frac{4}{3^\alpha},$$

da cui, essendo ciascun termine della sommatoria maggiore od uguale a $\frac{2}{3}$, segue

$$r = 2, \quad 3^\alpha = n = 3.$$

In questo caso si ha dunque una proiettività del terz' ordine, non omologica, e la quartica invariante f passa per due dei suoi punti uniti. Definendo la nostra proiettività con

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^2 y, \quad z' = z, \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

la f risulta data da

$$f = a_{00} z^4 + a_{11} xyz^2 + a_{30} x^3 z + a_{03} y^3 z + a_{22} x^2 y^2 = 0.$$

Sia invece $\pi = 0$. Avremo la relazione

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{3^{\alpha_i}}\right) = \frac{4}{3^\alpha} + 2.$$

Posto $\alpha - \alpha_i = \beta_i$, moltiplicando per 3^α potremo scrivere:

$$\sum (3^\alpha - 3^{\beta_i}) = 4 + 2 \cdot 3^\alpha.$$

Segue che almeno due β_i sono nulli, altrimenti i due membri della precedente eguaglianza non sarebbero congrui rispetto al modulo 3: sia $\beta_1 = \beta_2 = 0$, il che porta $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Si ha ora

$$\sum_{i=3}^{r}\left(1 - \frac{1}{3^{\alpha_i}}\right) = \frac{6}{3^\alpha}.$$

Per $r > 3$ segue $\alpha = 1$, giacchè ciascun termine della somma è $\geq \frac{2}{3}$, e $\frac{4}{3} > \frac{6}{9}$; e allora si ha

$$r = 5, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1:$$

per $r=3$, si ha

$$1-\frac{1}{3^{\alpha_3}}=\frac{6}{3^\alpha}$$

cioè

$$3^\alpha-3^{\beta_3}=6,$$

da cui

$$\alpha=2, \quad \beta_3=1.$$

Si conclude che l'ipotesi $\pi=0$, conduce a due casi

a) $\quad r=5, \quad \alpha=1, \quad n=3, \quad \nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_5=3.$

b) $\quad r=3, \quad \alpha=2, \quad n=9, \quad \nu_1=\nu_2=9, \quad \nu_3=3.$

a) Il primo caso, poichè $n=3$ è un numero primo, corrisponde ad un G_3 ciclico, ed avendosi $r=5>3$ punti tripli, la proiettività generante il G_3 riesce omologica.

Essa si potrà rappresentare con

$$x'=x, \quad y'=\varepsilon y, \quad z'=z \qquad (\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}});$$

la f passerà per il centro dell'omologia, e avrà allora la forma

$$y^3z=f_4(xz).$$

b) Nel secondo caso — essendo $\nu_1=\nu_2=n=9$, $\nu_3=3$ — il gruppo G_n sarà un G_9 ciclico.

Infatti tutte le proiettività del G_9 devono avere come uniti i due punti 9-pli; diciamo A e B; essendo poi $\nu_3=3$, si ha un gruppo costituito di 3 punti tripli, $C_1C_2C_3$, che devono riuscire uniti per una delle dette proiettività. Questa risulta così un'omologia ω_{31}, con l'asse passante per $C_1C_2C_3$ e (per es.) per B, riuscendo A centro dell'omologia (non può l'asse di ω_{31} essere la retta AB, le cui intersezioni con f, fuori di A e B, darebbero una coppia invariante pel G_9). Le altre proiettività (all'infuori di $\omega_{31}{}^2$) devono scambiare fra loro $C_1C_2C_3$ lasciando fermi A, B e un terzo punto appartenente alla retta $C_1C_2C_3$, cioè il punto C che insieme a B dà la coppia dei punti uniti della proiettività del terz'ordine $(C_1C_2C_3)$. Assumendo A come punto 010, B come punto 001 e C come punto 100, l'equazione della quartica appare

$$y^3z=x(x^3-z^3).$$

Si deduce che una proiettività del nostro G_9, che lascia fermi ABC e scambia ciclicamente $C_1\ C_2\ C_3$, avrà la forma

$$x' = \varepsilon^r x, \quad y' = \rho y, \quad z' = z$$

con

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \qquad r = 1, 2, \qquad \rho = \sqrt[3]{\varepsilon^r},$$

apparendo così una potenza della proiettività del nono ordine

$$x' = \varepsilon_9{}^3 x, \quad y' = \varepsilon_9 y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon_9 = e^{\frac{2\pi i}{9}}).$$

Così resta dimostrato che il G_9 è ciclico; e la relativa quartica è

$$y^3 z = x(x^3 - z).$$

Si conclude che

I soli gruppi d'ordine $n = 3^\alpha$ che lasciano invariata una quartica di genere 3 sono:

1° Il G_3 ciclico generato da una proiettività — non omologica — rappresentata da

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^2 y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}),$$

la quartica potendo esser ridotta alla forma

$$a_{00} z^4 + a_{11} xyz^2 + a_{30} x^3 z + a_{03} y^3 z + a_{22} x^2 y^2 = 0.$$

2° Il G_3 ciclico generato da un'omologia ciclica del terzo ordine rappresentata da

$$x' = x, \quad y' = \varepsilon y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}),$$

la quartica potendo esser ridotta alla forma

$$y^3 z = f_4(xz).$$

3° Il G_9 ciclico generato da un'omografia ciclica del nono ordine, rappresentata da

$$x' = \varepsilon_9{}^3 x, \quad y' = \varepsilon_9 y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon_9 = e^{\frac{2\pi i}{9}}),$$

la quartica potendo esser ridotta alla forma

$$yz^3 - x(x^3 - z^3) = 0.$$

Passiamo ai *gruppi* G_n *d'ordine* $n=7^\alpha$.

Indicando — al solito — con π il genere della involuzione γ_n^1 determinata dal G_n sopra la quartica invariante, e con $\nu_1\,\nu_2\ldots.\,\nu_r$ le molteplicità dei relativi punti multipli, scriviamo la relazione di Zeuthen:

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{n}{\nu_i}(\nu_i-1)=4-2n\pi+2n.$$

In questa relazione può essere, *a priori*, $\pi=1$ o $\pi=0$. Ma, dall'analisi di pagg. 312-13, risulta che la γ_n^1 è composta con una γ_7^1 di genere 0, e però $\pi=0$; e ciò si conferma aritmeticamente. Sia infatti $\pi=1$, e si ponga $n=7^\alpha$, $\nu_i=7^{\alpha_i}$. Dividendo per $n=7^\alpha$ si ha

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{7^{\alpha_i}}\right)=\frac{4}{7^\alpha},$$

relazione impossibile, essendo ciascun termine della sommatoria maggiore od uguale a $\frac{6}{7}$. Avremo dunque

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{7^{\alpha_i}}\right)=\frac{4}{7^\alpha}+2.$$

Poichè ciascun termine del primo membro è <1, si ha $r\geq 3$, e poichè inoltre esso è anche $\geq\frac{6}{7}$, mentre il secondo membro risulta $\leq\frac{18}{7}$, segue:

$$r=3,\quad \alpha=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1.$$

Si trova così come *unico gruppo* G_n d'ordine $n=7^\alpha$ un G_7 *ciclico* generato da una proiettività del settimo ordine

$$\pi_7)\qquad x'=\varepsilon_7 x,\quad y'=\varepsilon_7{}^r y,\quad z'=z\qquad (\varepsilon_7=e^{\frac{2\pi i}{7}}).$$

La quartica $f(xyz)=0$ dovrà passare per i punti uniti della π_7, mancando così nella sua equazione i termini in x^4, y^4, z^4; gli assi non dovranno avere intersezioni con la quartica fuori dei detti punti, che appaiono così dei flessi per la quartica. Posto che nel punto (001) si abbia come tangente di flesso l'asse $x=0$, l'*equazione della* f risulta

$$axz^3+byx^3+czy^3=0,$$

la quale — per un' opportuna scelta del punto unità — *può scriversi nella forma*

$$xz^3+yx^3+zy^3=0.$$

Appare allora che nell' equazione della proiettivà π_7 è $r=5$, cioè

$$\pi_7)\qquad x'=\varepsilon_7 x,\quad y'=\varepsilon_7{}^5 y,\quad z'=z.$$

Determiniamo ora i *gruppi d' ordine* $n=2^\alpha 3^\beta$.

Anzitutto occorre osservare che non può aversi $\beta>1$, Infatti l' unico gruppo d' ordine 3^β con $\beta>1$ è il G_9 ciclico, generato dalla proiettività

$$\pi_9)\qquad x'=\varepsilon_3 x,\quad y'=\varepsilon_9 y,\quad z'=z,$$

che lascia invariata la quartica

$$y^3z-x(x^3-z^3)=0,$$

ed è facile vedere che questo gruppo non può ampliarsi.

A tale oggetto si osservi che nessuna proiettività può portare l'uno nell'altro i due punti uniti per la π_9 che giacciono sopra la f, giacchè in uno di essi ($x=0$, $y=0$) la f ha un flesso ordinario, e nell'altro ($x=0$, $z=0$) ha un punto di ondulazione. Ora scriviamo la solita equazione numerica

$$\sum\left(1-\frac{1}{\nu_i}\right)=\frac{4}{n}-2\pi+2;$$

nel nostro caso i due detti punti dovendo appartenere a gruppi diversi della γ_n^1 generata dal G_n, d'ordine $n=9\cdot 2^\alpha$ $(\alpha\geq 1)$, esisteranno, in corrispondenza di questi, due valori

$$\nu_1\geq 9,\quad \nu_2\geq 9,$$

sicchè dovrebbe essere

$$\sum_{i=3}^{r}\left(1-\frac{1}{\nu_i}\right)\leq\frac{4}{18}+\frac{2}{9}-2\pi,$$

il che è assurdo, essendo $\nu_i\geq 2$.

Pertanto dobbiamo ora esaminare solo i gruppi $n=2^\alpha\cdot 3$; e quindi vedere come si ampli ciascuno dei gruppi d' ordine

$n = 2^\alpha$ sopra determinati, mercè l'aggiunta di una proiettività — omologica o no — del terz'ordine.

I. Abbiamo già notato che il G_{32} relativo alla quartica

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

è contenuto in un G_{96} — massimo gruppo contenente il G_{32} — che si ottiene dal G_{32} mediante l'aggiunta della proiettività ciclica del terz'ordine

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x.$$

II. Similmente abbiamo visto che il G_{16} relativo alla quartica

$$y^4 = f_4(xz)$$

si amplia mercè l'aggiunta dell'omologia del terz'ordine

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

quando (la quaterna $f_4 = 0$ essendo equianarmonica) la quartica ha la forma

$$y^4 = z(x^3 - z^3),$$

avendosi così un G_{48} non ulteriormente ampliabile.

Si riconosce facilmente che il G_{48} è generato dalle tre omologie

$$\begin{aligned} &x' = x, && y' = iy, && z' = z, \\ &x' = \varepsilon x, && y' = y, && z' = z, \\ &x' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2z), && y' = y, && z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - z). \end{aligned}$$

III, (a, α). Il G_2 generato da un'omologia armonica ω venga ampliato in un G_6 mediante l'aggiunta di una proiettività π del terz'ordine.

Distinguiamo due casi.

1° La π e la ω siano permutabili; allora il G_6 è ciclico, e generato quindi da una τ che possiamo scrivere

$$\tau) \qquad x' = \varepsilon_6{}^r x, \quad y' = \varepsilon_6{}^s y, \quad z' = z, \qquad \left(\varepsilon_6 = e^{\frac{2\pi i}{6}}\right).$$

Volendo che il suo cubo dia l'omologia ω

$$\omega) \qquad x' = x, \quad y = -y, \quad z' = z,$$

dovrà essere r pari, cioè $r = 2r'$. Ora si trova che anche il quadrato della τ risulta una omologia. Ciò appare subito ove sia $s = 3$; in ogni caso però, l'esponente s deve riuscire primo con $2r'$; ove non sia $s = 3$, potremo supporre (sostituendo eventualmente alla τ una sua potenza primitiva) $s = 1$, e la τ acquisterà la forma

$$\tau) \qquad x' = \varepsilon_6^{2r'} x, \quad y' = \varepsilon_6 y, \quad z' = z.$$

Nell'equazione di f la y figurerà al quadrato, e sarà

$$f = a_{00} z^4 + a_{10} x z^3 + a_{20} x^2 z^2 + a_{02} y^2 z^2 + \\ + a_{30} x^3 z + a_{12} x y^2 z + a_{40} x^4 + a_{22} x^2 y^2 + a_{04} y^4 = 0.$$

Perchè la f risulti invariante per la τ se $a_{00} \neq 0$, dovrà essere $a_{04} = 0$, e quindi la quartica acquistare un punto doppio (contro l'ipotesi del genere 3); ove invece sia $a_{00} = 0$, dovrà — per la ragione di prima — riuscire $a_{04} \neq 0$, $a_{10} \neq 0$; sarà allora (il termine $a_{04} y^4$ venendo, dalla τ, moltiplicato per ε_6^4) $r' = 2$. Quindi la τ si può scrivere (moltiplicando contemporaneamente x', y', z' per ε_6^2)

$$x' = x, \quad y' = \varepsilon_6^3, \quad z' = \varepsilon_6^2 z,$$

onde τ^2 riesce omologica.

Pertanto la τ, o la sua inversa, può ora essere definita da

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = -y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}),$$

o anche considerarsi come il prodotto delle due omologie

$$\omega = \tau^3 = \omega_{21}) \qquad x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z,$$

$$\pi = \tau^4 = \omega_{31}) \qquad x' = \varepsilon x, \quad y' = y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}});$$

e la quartica assume la forma

$$x^3 z = \varphi(y^2 z).$$

2° La π non sia permutabile con la $\omega_{21} = \omega$; trasformerà quindi la ω_{21} in due altre omologie ω_{22} e ω_{23}, e il prodotto di due di esse dovrà dare la π o il suo quadrato. Risulta da ciò che il G_6 generato in questo caso è il G_6 diedrico, il quale può supporsi definito dalle omologie

$$\omega_{21})\qquad x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z,$$
$$\omega_{22})\qquad x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y.$$

L' equazione f dovrà risultare allora simmetrica nelle tre variabili:

$$f = a(x^4 + y^4 + z^4) + b(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) +$$
$$+ c(x^3z + z^3x + y^3z + z^3y + x^3y + y^3x) = 0.$$

III, a, β). Il G_4 ciclico generato da una proiettività non omologica, π_4, del quart' ordine non può essere ampliato in un G_{12} mediante l' aggiunta di una π_3, ciclica del terz' ordine.

Per dimostrarlo, si osserverà anzitutto che π_3 deve essere permutabile con la omologia $\omega = \pi_4^2$. Infatti, nell' ipotesi contraria, il gruppo generato da π_3 non sarebbe invariante per π_4, e quindi si avrebbero nel G_{12} più di 12 operazioni (π_3, π_3^2 e le loro 4 trasformate per π_4 e il suo cubo; π_4, π_4^2, π_4^3, e le loro trasformate per π_3 e π_3^2).

Dovrà quindi π_3 lasciare invariata la ω, e in particolare il suo asse e il suo centro che possiamo supporre essere rispettivamente l' asse $y = 0$ e il punto 010. Ora è chiaro che la retta $y = 0$, non può essere asse anche di un' omologia del terz' ordine, sicchè le intersezioni di essa con la quartica formeranno un gruppo equianarmonico, e l' equazione di questa — che contiene y al quadrato — potremo scriverla

$$f = x^3z - z^4 + y^2(ax^2 + bxz + cz^2) + dy^4 = 0.$$

Ma l' asse $z = 0$ e il punto 100 sono uniti per la π_3, sicchè — non potendo questo punto riuscire un flesso (a meno che non sia un punto di ondulazione questo e quindi le altre tre intersezioni di f con l' asse $y = 0$, il che porta che la π_4 sia omologica) — dovrà essere di punti uniti tutta la retta $z = 0$, e la π_3 riuscire l' omologia

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \varepsilon z \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}).$$

Ma in tal caso, affinchè la f riesca invariante per la π_3, dovrà essere $d = 0$: conclusione assurda non avendo la f un punto doppio.

III, *b*). Il G_4 trirettangolo relativo alla quartica

$$\varphi(x^2y^2z^2)=0,$$

mediante l'aggiunta di una proiettività π_3 del terz'ordine, si amplia in un G_{12} relativo alla quartica

$$a(x^4+\rho y^4+\rho^2 z^4)+b(x^2y^2+\rho y^2z^2+\rho^2z^2x^2)=0,$$

dove ρ è una radice cubica dell' unità (eventualmente anche $\rho=1$, nel qual caso il G_{12} si amplia in un G_{24}, che si otterrà dal G_8 diedrico relativo al caso III, *c*).

Infatti, come nel caso precedente si riconosce che la π_3 non può riuscire permutabile con una delle tre omologie armoniche ω_{21}, ω_{22}, ω_{23} del G_4 trirettangolo, e che — d'altra parte — deve lasciar invariato questo G_4 mutando una delle dette ω, in un'altra omologia ω' appartenente ancora al G_4. Invero si troverebbero altrimenti entro il G_{12} più di 12 operazioni, cioè: le 4 del G_4, le loro trasformate per π_3 che danno almeno altre 2 operazioni nuove, e similmente le trasformate per π_3^2 (altre 2); π_3 e π_3^2, nonchè le loro trasformate per almeno due fra le ω (altre 4 operazioni) poichè due ω non possono portare π_3 in π_3^2, chè allora la terza — prodotto di esse — sarebbe permutabile con π_3. Si conclude che la π_3 scambia fra loro le tre omologie considerate, riuscendo così la

$$\pi_3) \qquad x'=y, \quad y'=z \quad z'=x.$$

Segue da ciò per la f l'equazione scritta.

III, *c*). Il G_8 diedrico generato dalle due omologie

$$x'=x, \quad y'=-y, \quad z'=z,$$
$$x'=y, \quad y'=x, \quad z'=z,$$

venga ampliato in un G_{24} mercè l'aggiunta di una π_3 ciclica del terz'ordine.

Come nei due casi precedenti si riconosce che la π_3 non può riuscire permutabile con una omologia armonica del G_8, e quindi neppure col G_4 ciclico in esso contenuto. D'altra parte la π_3 deve portare 2 omografie del G_8 in altre del G_8 stesso; altrimenti nel G_{24} si troverebbero più di 24 operazioni: quelle del G_8, le trasformate di 6 di esse (fuori dell'identità) con π_3 e π_3^2, π_3, π_3^2, e le loro trasformate con le proiettività del quart' ordine del G_8. Ma nel G_8 si hanno come sottogruppi (di almeno due operazioni e dell' identità) solamente il G_4 ciclico e due G_4 diedrici; non potendo il primo essere invariante per π_3, nè i secondi scambiati fra loro, segue che essi sono separatamente invarianti. Si conclude che π_3 lascia invariato un G_4 trirettangolo contenuto nel G_8, scambiandovi ciclicamente le omologie. Pertanto il G_{24} appare il gruppo ottaedrico generato dalle tre omografie

$$\begin{aligned}
&\omega_{22}) && x'=x, \quad y'=-y, \quad z'=z,\\
&\omega_{21}) && x'=y, \quad y'=x, \quad z'=z,\\
&\pi_3) && x'=y, \quad y'=z, \quad z'=x,
\end{aligned}$$

e la corrispondente quartica invariante è la

$$a(x^4+y^4+z^4)+b(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)=0,$$

la quale quartica rientra nel tipo incontrato innanzi, ove si faccia $\rho=1$.

Si conclude che i soli gruppi d' ordine $n=2^\alpha 3^\beta$ (con $\alpha>0$, >0) *che lasciano invariata una quartica di genere* 3 *sono:*

a) Il G_{96} generato dalle tre omologie

$$\begin{aligned}
&x'=x, \quad y'=iy, \quad z'=z, \qquad (i=\sqrt{-1}),\\
&x'=y, \quad y'=x, \quad z'=z,\\
&x'=x, \quad y'=z, \quad z'=y,
\end{aligned}$$

relativo alla quartica

$$x^4+y^4+z^4=0.$$

b) Il G_{48} generato dalle tre omologie

$$\begin{aligned}
&x'=x, && y'=iy, \quad z'=z,\\
&x'=\varepsilon x, && y'=y, \quad z'=z, \qquad (\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}})\\
&x'=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2z), && y'=y; \quad z'=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-z),
\end{aligned}$$

relativo alla quartica

$$y^4=z(x^3-z^3).$$

c) Il G_6 ciclico generato dalla proiettività non omologica

$$x'=\varepsilon x, \quad y'=-y, \quad z'=z,$$

relativo alla quartica

$$x^3z=\varphi(y^2z).$$

d) Il G_6 diedrico generato dalle due omologie

$$x'=y,\quad y'=x,\quad z'=z,$$
$$x'=x,\quad y'=z,\quad z'=y,$$

relativo alla quartica

$$a(x^4+y^4+z^4)+b(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+$$
$$+c(x^3z+z^3x+y^3z+z^3y+x^3y+y^3x)=0.$$

e) Il G_{12} generato dalle due omografie

$$x'=-x,\quad y'=y,\quad z'=z,$$
$$x'=\quad y,\quad y'=z,\quad z'=x,$$

relativo alla quartica

$$a(x^4+\rho y^4+\rho^2z^4)+b(x^2y^2+\rho y^2z^2+\rho^2z^2x^2).\qquad(\rho^3=1)$$

f) Il G_{24} ottaedrico generato dalle tre omologie

$$x'=x,\quad y'=-y,\quad z'=z,$$
$$x'=y,\quad y'=x,\quad z'=z,$$
$$x'=x,\quad y'=z,\quad z'=y,$$

relativo alla quartica

$$a(x^4+by^4+z^4)+b(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)=0.$$

Infine ci restano da determinare i *gruppi d'ordine* $n=2^\alpha\cdot3^\beta\cdot7^\gamma$ con $\gamma>0$.

Ora l'unico gruppo d'ordine 7^γ è il gruppo ciclico d'ordine 7 relativo alla quartica

1) $$xz^3+yx^3+zy^3=0.$$

Poichè questa quartica non ha invarianti, ***basterà determinare il più ampio gruppo di proiettività che la mutano in se stessa.***

È possibile riconoscere come questa quartica riesca anche invariante per un G_{24}, (ottenuto ampliando il G_8 diedrico mediante una proiettività del terz'ordine).

A tale oggetto, seguendo la via indicata da KLEIN [1] poniamo

$$x_1 = \frac{x+y+z}{\varepsilon-\varepsilon^2},$$

$$x_2 = \frac{x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z}{\varepsilon-\varepsilon^2}, \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

$$x^3 = \frac{x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z}{\varepsilon-\varepsilon^2}.$$

Con ciò l'equazione della nostra quartica diventa

2) $$f = \frac{1}{3}(x_1^4 + 3x_1^2x_2x_3 - 3x_2^2x_3^2) + \\ + \frac{1}{3}x_1\{(1+3\varepsilon^2)x_2^3 + (1+3\varepsilon)x_3^3)\} = 0.$$

Ponendo — in secondo luogo —

$$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt[3]{7}}, \qquad x_2 = y_2\sqrt[3]{3\varepsilon+1}, \qquad x_3 = y_3\sqrt[3]{3\varepsilon^2+1},$$

si trasforma l'equazione 2) nella

3) $$\frac{1}{21\sqrt[3]{7}}\{y_1^4 + 21y_1^2y_2y_3 - 147y_2^2y_3^2 + 49y_1(y_2^3 + y_3^3)\} = 0.$$

Si ponga infine

4) $$\begin{aligned} z_1 &= \quad (21 - 9\sqrt{-7})\,y_1 \\ z_2 &= (-\ 7 + 3\sqrt{-7})y_1 + 56y_2 + 56y_3 \\ z_3 &= (-\ 7 + 3\sqrt{-7})\,y_1 + \varepsilon 56y_2 + \varepsilon^2 56y_3 \\ z_4 &= (-\ 7 + 3\sqrt{-7})\,y_1 + \varepsilon^2 56y_2 + \varepsilon 56y_3; \end{aligned}$$

e si osservi che

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

L'equazione di f si verifica allora potersi esprimere con

5) $$(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)^2 - (14 + 6\sqrt{-7})z_1z_2z_3z_4 = 0.$$

[1] *Math. Annalen*, Bd. 14 (1879), pag. 441 e seg.

Le quattro rette

$$z_1=0, \quad z_2=0, \quad z_3=0, \quad z_4=0$$

danno quattro tangenti doppie della quartica, i cui otto punti di contatto appartengono ad una conica. (Cfr. L. 2°, § 27, vol. I, pag. 313).

L'equazione 5) mostra che la quartica resta ***invariata per le 24 proiettività che si ottengono comunque permutando le 4 rette*** $z_1=0$, $z_2=0$, $z_3=0$, $z_4=0$.

In particolare il G_{24} che così si ottiene risulta per moltiplicazione delle due omologie

$$(z_1\, z_2) \cdot (z_3\, z_4) \quad \text{e} \quad (z_1\, z_3)$$

il cui prodotto dà la proiettività del quart' ordine

$$(z_1\, z_4\, z_3\, z_2),$$

generando in tal modo un G_8 diedrico, e della proiettività del terz' ordine

$$(z_1\, z_2\, z_3)$$

Il G_{24} ottaedrico così ottenuto non è ampliabile in un gruppo più esteso d'ordine $n=2^\alpha 3^\beta$; infatti la quartica relativa ai gruppi G_{32} e G_{16} dei casi I e II possiede (almeno) 4 ondulazioni in linea retta, due delle quali, almeno — per la π_7 — verrebbero portate in altre 12 analoghe, mentre la quartica può avere solo 12 ondulazioni (equivalenti a 24 flessi). Segue che il G_{168} ***ottenuto per moltiplicazione del G_{24} e della π_7 ciclica del settimo ordine, è il più ampio gruppo che competa alla nostra quartica.***

Concludiamo enunciando i risultati di tutta l'analisi precedente:

1° L'ordine di un gruppo G_n di proiettività che trasformino in sè una quartica piana $f(xyz)=0$ di genere 3 vale

$$n=2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma \qquad (\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0).$$

2° I gruppi d'ordine $n=2^\alpha$ e le quartiche corrispondenti sono:

a) Il G_{32} generato dalle due omologie

$$x'=x, \quad y'=iy, \quad z'=z, \qquad (i=\sqrt{-1})$$
$$x'=y, \quad y'=x, \quad z=z,$$

relativo alla quartica

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0.$$

b) Il G_{16} abeliano (e sottogruppi) generato dalle tre omologie

$$x' = x, \quad y' = iy, \quad z' = z,$$
$$x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$
$$x' = z, \quad y' = y, \quad z' = x,$$

(le cui ultime due generano un Γ_4 trirettangolo sopra la retta $y = 0$) relativo alla quartica

$$y^4 = a(x^4 + z^4) + bx^2y^2.$$

c) Il G_2 generato dalla omologia

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z,$$

relativo alla quartica

$$\varphi(xy^2z) = 0.$$

d) Il G_4 ciclico generato dalla proiettività — non omologica —

$$x' = -x, \quad y' = iy, \quad z' = z, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

relativo alla quartica

$$a_{00}z^4 + a_{20}x^2z^2 + a_{21}xy^2z + a_{40}x^4 + a_{04}y^4 = 0.$$

e) Il G_4 trirettangolo generato dalle due omologie

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z,$$
$$x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

relativo alla quartica

$$\varphi(x^2y^2z^2) = 0.$$

f) Il G_8 diedrico generato dalle due omologie

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z,$$
$$x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z,$$

relativo alla quartica

$$az^4 + b(x^2 + y^2)z^2 + c(x^4 + y^4) = 0.$$

3° I gruppi d'ordine $n = 3^\alpha$ e le quartiche corrispondenti sono:

a) Il G_3 ciclico generato dalla proiettività — non omologica —

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^2 y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

relativo alla quartica

$$a_{00}z^4 + a_{11}xyz^2 + a_{30}x^3z + a_{03}y^3z + a_{22}x^2y^2 = 0.$$

b) Il G_3 ciclico generato dall'omologia del terz'ordine

$$x' = x, \quad y' = \varepsilon y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

relativo alla quartica

$$y^3z = f_4(xz).$$

c) Il G_9 ciclico generato dalla proiettività — non omologica — del nono ordine

$$x' = \varepsilon_9{}^3 x, \quad y' = \varepsilon_9 y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon_9 = e^{\frac{2\pi i}{9}})$$

relativo alla quartica

$$yz^3 - x(x^3 - z^3) = 0.$$

4° L'unico gruppo d'ordine $n = 7^\alpha$ è il gruppo ciclico generato dalla proiettività — non omologica — d'ordine sette

$$x' = \varepsilon_7 x, \quad y' = \varepsilon_7{}^5 y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon_7 = e^{\frac{2\pi i}{7}})$$

relativo alla quartica

$$xz^3 + yx^3 + zy^3 = 0.$$

5° I gruppi d'ordine $n = 2^\alpha 3^\beta$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e le quartiche corrispondenti sono:

a) Il G_{96} generato dalle tre omologie

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= iy, & z' &= z, \\ x' &= y, & y' &= x, & z' &= z, \\ x' &= x, & y' &= z, & z' &= y, \end{aligned}$$

relativo alla quartica

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0.$$

b) Il G_{48} generato dalle tre omologie

$$x' = x, \qquad y' = iy, \quad z' = z, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$x' = \varepsilon x, \qquad y' = y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2z), \quad y' = y, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - z),$$

relativo alla quartica

$$y^4 = z(x^3 - z^3).$$

c) Il G_6 ciclico generato dalla proiettività — non omologica —

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = -y, \quad z' = z,$$

relativo alla quartica

$$x^3 z = \varphi(y^2 z).$$

d) Il G_6 driedrico generato dalle due omologie

$$x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z,$$
$$x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y,$$

relativo alla quartica

$$a(x^4 + y^4 + z^4) + b(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) +$$
$$+ c(x^3z + z^3x + y^3z + z^3y + x^3y + y^3x) = 0.$$

e) Il G_{12} generato dalle due omografie

$$x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$
$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x,$$

relativo alla quartica

$$a(x^4 + \rho y^4 + \rho^2 z^4) + b(x^2y^2 + \rho y^2z^2 + \rho^2 z^2x^2). \qquad (\rho^3 = 1)$$

f) Il G_{24} ottaedrico generato dalle tre omologie

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z,$$
$$x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z,$$
$$x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y,$$

relativo alla quartica

$$a(x^4 + y^4 + z^4) + b(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 0.$$

6° Si ha un' unica quartica invariante per un gruppo di ordine $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$ con $\gamma > 0$. Essa è la quartica

$$xz^3 + yx^3 + zy^3 = 0,$$

che viene mutata in sè da un G_{168}. Questo G_{168} è generato dalla proiettività del settimo ordine

$$x' = \varepsilon_7 x, \quad y' = \varepsilon_7{}^5 y, \quad z' = z, \qquad (\varepsilon_7 = e^{\frac{2\pi i}{7}})$$

e dal G_{24} ottaedrico delle 24 proiettività che mutano in sè il quadrilatero costituito dalle quattro rette che abbiamo indicato con z_1, z_2, z_3, z_4.

Termineremo con una breve informazione *storica*. Per il primo Klein (1879), nella citata memoria dei *Math. Annalen* (¹) ha presentato e illustrato il caso del G_{168} relativo alla quartica $xz^3 + yx^3 + zy^3 = 0$; in un secondo tempo S. Kantor (²) e, con maggior precisione A. Wiman (³), risolvevano quasi contemporaneamente il problema delle quartiche auto-proiettive di genere 3. Più tardi E. Ciani determinava, indipendentemente dal valore del genere, il numero e la configurazione delle omologie armoniche, e — in fine — nel 1909 (⁴) tutti i gruppi di proiettività relativi ad una quartica, sempre indipendentemente dal genere.

La nostra analisi, alquanto particolareggiata e minuta, utilizza, come si è detto, l' idea fondamentale che ci ha servito per la determinazione dei gruppi finiti di proiettività sopra la retta, e considera solo il caso del genere $p = 3$, che qui ci interessa, dato il punto di vista della geometria delle trasformazioni birazionali.

(¹) « Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen ».

(²) « Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene » (*Acta Matematica*, Bd. XIX (1895)).

(³) « Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen » (*Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handligar*, Bd. XXI, 1895) e « Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene » (*Math. Annalen*, Bd. XLVIII (1897)).

(⁴) « Le quartiche piane proiettive a se stesse », *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. XXIII.

32. Nota sulle irrazionalità aritmetiche nelle trasformazioni delle curve: contributi alla teoria dei numeri. — Quando si considerano le trasformazioni birazionali di una curva $f(xy)=0$, e si afferma che questa f può essere ridotta, mediante siffatte trasformazioni, ad un'altra curva, per es. ad un tipo particolarmente semplice, non è detto che la trasformazione adoperata debba dipendere razionalmente dai coefficienti di f: in generale, anzi, la trasformazione suddetta potrà esigere che ai coefficienti di f, che possono essere numeri razionali o irrazionali, si aggiungano altre *irrazionalità aritmetiche*, fuori del campo di razionalità da essi definito; chè, se poi si facciano variare codesti coefficienti dipendentemente da uno o più parametri, le nuove irrazionalità diverranno in generale *irrazionalità algebriche* rispetto a questi parametri.

La precedente osservazione conduce a porre alcuni problemi che concernono la classificazione delle curve algebriche, considerate rispetto al gruppo delle trasformazioni (razionali o birazionali) a coefficienti razionali. Il significato di tali problemi è relativo anzitutto ad una teoria aritmetica delle curve, ma, quando queste vengono fatte variare — generando superficie o varietà a più dimensioni — assumono un nuovo significato algebrico, per riguardo alla teoria delle funzioni algebriche di più variabili. A noi interessa soprattutto di mettere in vista questo legame, per cui la geometria algebrica viene a recare qualche lume a difficili questioni della teoria dei numeri.

Prenderemo le mosse dalle *curve di genere* $p=0$.

Sappiamo che l'annullamento del genere di una curva f esprime la condizione perchè la f possa riferirsi biunivocamente ad una retta; si tratta ora di vedere quali irrazionalità aritmetiche importi codesto riferimento.

Si consideri una curva piana d'ordine n, $f(xy)=0$, dotata di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi; per trasformarla in una retta occorre considerare le curve φ_{n-2} d'ordine $n-2$ aggiunte ad essa, soggette a passare per $n-3$ punti semplici $P_1\ P_2 \dots P_{n-3}$: infatti tali curve segano su f una g_1^1. Ora le condizioni imposte ad una φ_{n-2} che debba essere aggiunta ad f, cioè le condizioni di passaggio per i punti doppi di f, si esprimono razionalmente per i coefficienti di f, giacchè si tratta di scrivere che la φ si annulla nel gruppo dei punti comuni a tre polari di f (1). Invece, nel caso $n > 3$, le condizioni di passaggio della φ per i punti $P_1 P_2 \dots P_{n-3}$, esige la conoscenza delle coordinate di questi punti, che si otterranno in generale con operazioni irrazionali (per es. risolvendo l'equazione di grado n che porge l'intersezione di f con una retta). Ebbene, si considerino le ∞^{n-2} curve φ_{n-2} soggette soltanto alla condizione di passaggio per i punti doppi di f: entro codesto sistema (imponendo ai parametri condizioni lineari arbitrarie) si potrà determinare ***razionalmente*** una rete staccante su f una g^2_{n-2}, mercè cui ***la f si lascia trasformare in una curva d'ordine n — 2***.

Abbiamo veduto così che una curva piana razionale di ordine n, si può ridurre ad una curva d'ordine $n - 2$, mediante una trasformazione birazionale a coefficienti razionali: ripetendo la trasformazione verrà dimostrato il

Teorema di Nöther (2). ***Ogni curva razionale si può ridurre con una trasformazione birazionale a coefficienti razionali a una retta o a una conica***; le curve d'ordine pari si riducono a coniche, mentre le curve d'ordine dispari si riducono (a cubiche con punto doppio e per proiezione da questo) a rette.

La conclusione ottenuta vale anche per curve razionali gobbe, che possono essere sostituite da proiezioni piane, e per curve piane f dotate di punti di molteplicità maggiore di due,

(1) Siano

$$D_1 = (\alpha_1\beta_1), \quad D_2 = (\alpha_2\beta_2), \quad \dots \quad D_s = (\alpha_s\beta_s) \qquad \left(s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$$

i punti doppi di f, comuni a tre polari $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$. L'equazione di una curva φ, soggetta a passare per $D_1 D_2 \dots D_s$, dipende linearmente dalle irrazionalità α_i e β_i, nonchè da un certo numero di parametri arbitrari; ma le α_i e le β_i compariscono in questa equazione simmetricamente, e le funzioni simmetriche di queste quantità si esprimono razionalmente per i coefficienti delle due equazioni

$$R(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_s) = 0, \quad R'(y) = (y - \beta_1) \dots (y - \beta_s) = 0:$$

si tratta di dimostrare che i coefficienti di R (e similmente di R') sono funzioni razionali di quelli di f_1, f_2, f_3, e quindi di f. A tale scopo basta osservare che R è il massimo comun divisore delle due equazioni risultanti, che si ottengono eliminando y fra le $f_1(xy) = 0$, $f_2(xy) = 0$, e fra le $f_1(xy) = 0$, $f_3(xy) = 0$.

(2) « Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen ». *Math. Annalen*, Bd. 3 (1871). L'interpretazione aritmetica del teorema si trova in Hilbert e Hurwitz, *Acta mathematica*, 14 (1890-1).

giacchè anche in questo caso si riesce a esprimere razionalmente le condizioni perchè una curva φ sia aggiunta ad f. Quest'ultima asserzione, per essere giustificata in modo diretto, esigerebbe un'analisi più minuta; ce ne dispenseremo limitandoci ad osservare che, data una curva con punti multipli d'ordine $r > 2$, si possono sempre eliminare codesti punti mediante una trasformazione a coefficienti razionali, il cui sistema trasformante è costituito da curve di un certo ordine passante per quei punti (comuni alle polari $(r-1)$-esime); lo stesso procedimento — convenientemente ripetuto — vale ad abbassare e sciogliere le singolarità comunque complicate, di cui la f potrebbe essere dotata.

Ora è chiaro che una conica C si può riferire a una retta per proiezione da un suo punto, la cui determinazione si ottiene con una estrazione di radice quadrata portante sui coefficienti di C; si deduce che

La risoluzione parametrica razionale di un' equazione $f(xy) = 0$, di genere $p = 0$ e d'ordine pari, si ottiene aggiungendo soltanto un' irrazionalità quadratica al campo di razionalità definito dai coefficienti di f.

Vogliamo dimostrare che codesta *irrazionalità è in generale necessaria*. A tale scopo basta considerare il problema aritmetico di « determinare i punti razionali appartenenti ad una conica a coefficienti razionali » cioè (LAGRANGE, 1767) le soluzioni intere di un'equazione omogenea di secondo grado

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

a coefficienti interi (dove può supporsi che il prodotto abc non sia divisibile per un quadrato). È ovvio che se sopra ogni conica si potesse determinare un punto in funzione razionale dei coefficienti, si troverebbe sempre un sistema di soluzioni intere (non tutte nulle) dell'equazione (1). Ma basta prendere $a = b = c = 1$ per vedere l'impossibilità di una tale risoluzione: il cerchio di raggio i non contiene nessun punto reale e quindi — *a fortiori* — nessun punto razionale! [1].

[1] In modo generale le condizioni di risolubilità della (1) sono che:
a) i coefficienti a, b, c non abbiano lo stesso segno;
b) $-ab$, $-bc$, $-ac$ sieno rispettivamente residui quadratici di c, a, b, (LEGENDRE, 1785. Cfr. « Théorie des nombres » (3ª ed.), Parigi, 1830, pg. 33 e 230).

Anche dalla considerazione del fascio di cerchi concentrici

$$C = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

si trae che non è possibile determinare razionalmente un punto sopra ciascun cerchio, poichè si troverebbe una curva reale unisecante i cerchi C del fascio, mentre ogni curva algebrica sega codesti C in un numero pari di punti reali. Si hanno invero curve unisecanti i C, ma dipendenti dalla radice quadrata immaginaria $i = \pm\sqrt{-1}$, che vale a distinguere i due punti ciclici comuni agli stessi C [1].

L'impossibilità aritmetica di determinare razionalmente *un* punto sopra una conica C affatto generale, si deduce anche dall'impossibilità algebrica di trovare una superficie unisecante le *coniche* di certe *congruenze* (o sistemi ∞^2) ***del prim' ordine*** (cioè tali che per ogni punto passi *una* conica del sistema) appartenenti allo spazio ordinario, che — per tale motivo — risultano ***non trasformabili birazionalmente in stelle di rette*** [2]. Siffatte congruenze possono costruirsi come proiezioni (da un punto di Q) di analoghi sistemi di coniche tracciate sopra una varietà quadrica Q di S_4, in base alle considerazioni che seguono.

Ricordiamo che una quadrica Q dello spazio S_4, che non sia un cono, non contiene piani (se vi è un piano α le superficie sezioni di due iperpiani per α si spezzano, contenendo oltre α due piani β e γ, i quali han comune con α un punto doppio). Ciò posto si costruisca nello S_4 un sistema del prim'ordine di piani π, non aventi punti a comune su Q: a tal uopo basta considerare i piani proiettanti da un punto P (esterno a Q) le corde di una cubica gobba (non appartenente a Q)

(1) In generale per ogni fascio di curve piane razionali si riesce sempre a determinare (irrazionalmente) una curva unisecante, ciò che permette di trasformare il fascio in un fascio di rette (NOETHER); ma la trasformazione riduttrice non è sempre reale.

(2) I tipi delle congruenze di prim'ordine di coniche dello spazio, irriducibili a stelle di raggi, sono stati determinati da MONTESANO (*Rendic. Accad. di Napoli*, 1895). Il problema generale di classificare le congruenze del prim'ordine di curve razionali d'ordine pari non è stato approfondito. Per le congruenze di curve razionali d'ordine dispari, l'esistenza di superficie unisecanti e quindi la loro riduzione a stelle di raggi, resulta dal teorema di NOETHER, dato nel testo. Cfr. ENRIQUES, *Math. Annalen*, Bd. 49, n. 15.

posta in un S_3, che non passi per P. Ora i piani π del nostro sistema segano su Q una congruenza del prim' ordine di coniche, C, che non ha punti base su Q. Se esistesse una superficie F unisecante le C, questa dovrebbe segare in *un* punto i piani π, sicchè — non passando per P — resulterebbe del prim' ordine, cioè un piano: invece abbiam visto che su Q non vi sono piani.

Prima di lasciare le curve di genere zero, rileveremo esplicitamente ciò che — nel caso $p=0$ — i nostri teoremi permettono di affermare intorno alla risoluzione con numeri interi dell'equazione omogenea $f(xyz)=0$, e dell'equazione quadratica

$$ax^2+by^2+cz^2=0, \tag{1}$$

a cui quella si lascia sempre ricondurre. Qualora sia data una soluzione di questa equazione, cioè un punto razionale della conica $ax^2+by^2+cz^2=0$, si ottiene — per proiezione dal punto — una rappresentazione parametrica, dove le x, y, z, vengono espresse come forme quadratiche di due variabili u, v, a loro volta funzioni razionali omogenee di x, y, z:

$$x\equiv\varphi_1(uv),\quad y\equiv\varphi_2(uv),\quad z\equiv\varphi_3(uv).$$

Quindi *tutte le soluzioni intere dell' equazione* (1) *si ottengono in corrispondenza ai valori interi di u e v.*

La possibilità di dedurre in tal guisa tutte le soluzioni dell' equazione d'analisi indeterminata (1) da una soluzione particolare, è stata avvertita da Gauss, Dedekind e Cantor (1), che hanno scritto, in diversi modi, le formule relative. Queste formule si riconducono, sostanzialmente, a quelle che ci vengono pôrte dall' indicata costruzione geometrica, che è stata adoperata per tale scopo dal Klein.

Passiamo a discorrere delle *curve di genere* $p=1$. Se $f(xy)=0$ è una curva siffatta, si avverte subito che non si riesce ad abbassarne l' ordine con una trasformazione (costruita razionalmente nel campo dei coefficienti di f) che venga posta mediante una rete generica di curve φ aggiunte ad f: per-

(1). Cfr. l'articolo di Vahlen nell' « Encyclopädie der math. Wissenschaften », I, 16. — (Esposizione francese di Cahen, t. I, vol. 3, fasc. 2, § 40, pagg. 178-181).

ciocchè le φ d'ordine $n-2$ segano su f gruppi di n punti, e le φ d'ordine più alto sempre gruppi formati da un numero di punti multiplo di n; cosicchè — procedendo per somma e sottrazione delle serie definite in tal guisa — non si esce mai dai multipli della serie g_n determinata su f dalle rette del piano. Si riesce bensì ad abbassare l'ordine di f, ove si conosca su di essa — razionalmente — un punto P: allora basta considerare le curve φ aventi con f un certo contatto; anzi si riesce in tal caso a ridurre f ad una cubica, ovvero ad una quartica rappresentata sulla retta doppia $y^2 = f_4(x)$. Più in generale, se sopra f è dato razionalmente un gruppo di m punti appartenente ad una serie g_m, si costruiscono razionalmente tutte le serie del tipo $rg_n + sg_m$ dove uno dei due numeri r o s può essere negativo; e fra codeste serie — quando non sia $m \equiv 0$ (mod. n) — si ottengono serie di ordine minore di n, che permettono di abbassare l'ordine di f.

Ma, in generale, la determinazione di un tal gruppo di m punti ($m \not\equiv 0$, mod. n) sopra una curva ellittica f d'ordine n, non si ottiene razionalmente, cioè con operazioni razionali sui coefficienti di f, di modo che si ha il

Teorema (¹). *Non è possibile, in generale, abbassare razionalmente l'ordine di una curva ellittica.*

La dimostrazione dell'enunciato segue dall'esistenza, che proveremo per qualunque valore di n, di fasci di curve ellittiche d'ordine $3n$ con 9 punti n-*pli* (fasci di HALPHEN). È chiaro anzitutto che una curva C di un tal fascio, ove uno dei punti base, sia razionale, può ridursi razionalmente ad una curva K d'ordine n; ora se è possibile determinare razionalmente su K un gruppo G di $m > n$ punti, si troverà una curva (luogo del G trasformato sulla corrispondente C), che segherà le C del fascio in m punti variabili: ma questa conclusione è assurda, perchè una curva d'ordine s passante con le molteplicità $i_1, i_2 \dots i_9$ per i punti base n-*pli* della C, le sega in un numero di punti multiplo di n:

$$3ns - n(i_1 + i_2 \dots + i_9)\,.$$

Resta da stabilire l'esistenza dei fasci di HALPHEN (²). Per chiarezza cominceremo dal caso $n = 2$, in cui si tratta

(¹) Cfr. ENRIQUES: *Math. Annalen*, Bd. 51 (1897), § 13 e *Rend. Accad. Lincei*, 7 gennaio 1912, § 2.

(²) Cfr. HALPHEN: *Bullettin de la Société mat. de France*, t. X, pg. 162.

di sestiche dotate di 3 punti doppi (cfr. la Nota che costituisce il § 22, pag. 196).

Osserviamo anzitutto che 9 punti doppi in posizione assegnata portano in generale $3 \cdot 9 = \frac{6(6+3)}{2}$ condizioni lineari capaci di determinare una sestica; ma questa si riduce alla cubica che passa per i 9 punti, contata due volte. Pertanto, se esiste una sestica irriducibile, C_6, con 9 punti doppi, questa apparterrà ad un fascio di sestiche analoghe, determinato dalla C_6 insieme con la cubica C_3, che passa per i suoi punti doppi, contata due volte.

Ciò posto, si assumano sopra una C_3, affatto generale, 8 punti $A_1 A_2 .... A_8$ che, presi come doppi, definiscono un sistema lineare ∞^3 di sestiche, seganti sopra la C_3 una g_2^1: questa possiede quattro punti doppi, uno dei quali cade nel nono punto base del fascio delle cubiche passanti per $A_1 .... A_8$. Preso uno dei tre punti doppi restanti, che vogliamo designare con A_9, accade che le sestiche del nostro sistema ∞^3, cui si imponga di passare per A_9 e toccare ivi una retta generica, resultano avere anche A_9 come punto doppio: il motivo sta in ciò, che il passaggio delle dette sestiche per A_9 porta di conseguenza il passaggio per il punto infinitamente vicino sulla C_3 (coniugato ad A_9 nella nostra g_2^1).

In tal guisa — a partire dalla scelta dei punti $A_1 A_2 .... A_8$, fatta sopra C_3 — si costruiscono tre fasci di sestiche dotati di 9 punti doppi.

La costruzione indicata si estende al caso delle curve C_{3n} d'ordine $3n$, come brevemente accenniamo. Anche qui, prendendo ad arbitrio 9 punti *n-pli*, si determina *una* C_{3n} riducibile ad una C_3 contata n volte, sicchè una C_{3n} irriducibile con 9 punti *n-pli* dovrà appartenere ad un fascio di curve analoghe. Ciò posto, si prendano sopra una C_3 i punti $A_1 A_2 ... A_8$; le C_{3n} passanti n volte per codesti punti debbono segare su C_3 una g_n^{n-1} completa, che possiede n^2 punti *n-pli*: uno qualunque di questi — che non sia punto *m-plo* (con m divisore di n) per la g_m^{m-1} segata dalle C_{3m} passanti m volte per $A_1 A_2 .... A_8$ — costituisce con $A_1 A_2 .... A_8$ un gruppo di nove punti *n-pli*, base per un fascio di C_{3n} irriducibili.

A quest' ordine di questioni si legano i problemi concernenti la teoria aritmetica delle equazioni $f(xy) = 0$ di genere $p = 1$, e in particolare delle cubiche.

Il problema di trovare quando una curva f di genere 1, a coefficienti razionali, possegga *punti razionali* è in generale irresoluto, anche nel caso cubico. Ma se è dato razionalmente su f un punto P, se ne deduce la trasformazione della f in una cubica (razionalmente determinata) con un flesso razionale, giacchè a ciò conduce la g_3^2 definita su f dal punto P contato tre volte. In particolare, se una cubica contiene un punto razionale, si può sempre trasformarla in un'altra cubica con un flesso razionale, ed anche in una parabola newtoniana $y^2 = f_3(x)$, che ha un flesso nel punto all'infinito dell'asse y.

Quanto alle cubiche possedenti un flesso razionale, un esempio famoso vale a stabilire che esse non contengono di conseguenza altri punti razionali fuori dei flessi; infatti la *equazione di* FERMAT $x^3 + y^3 = z^3$ non ammette altre soluzioni intere che

$$(1, 0, 1), \quad (0, 1, 1), \quad (1, -1, 0),$$

queste soluzioni corrispondendo ai tre flessi reali della cubica equianarmonica rappresentata da $x^3 + y^3 = 1$.

Si può anche fornire esempio di una cubica contenente un flesso e non altri punti razionali: tale è la cubica di

$$x^3 + y^3 = 5z^3$$

secondo un teorema di PEPIN (*Journal de Math.*, 1870).

Ora pongasi che una cubica f possegga un punto razionale P, che non sia un flesso: risulterà anche razionale il tangenziale di P, cioè il punto P' intersezione di f con la tangente in P. Di conseguenza sarà anche razionale il tangenziale P'' di P', e così di seguito. Su questa circostanza è fondato il *metodo di* FERMAT per cui da una soluzione razionale dell'equazione cubica (o da una soluzione intera dell'equazione cubica omogenea) si deducono in generale altre soluzioni [1]. Ma sorge la questione se la serie dei punti $P, P', P'' \dots P^{(n)} \dots$ sia infinita, ovvero finita. Per rispondere si è condotti a considerare, sopra la cubica f, la corrispondenza $[4^n, 1]$ che si ottiene fra i punti P e $P^{(n)}$: quando P coincide con P_n si otterrà una successione di tangenziali finita, non solo a partire

[1] Cfr. EULERO: « Élemens d'Algèbre », trad. Bernouilli, 1774, vol. 2, pag. 135 e seg. — LEGENDRE: « Théorie des nombres », 2ª ediz., 1808, pag. 402.

da uno dei punti del ciclo $P\,P' \ldots. P^{(n)}$, ma anche a partire da un punto $P^{(-1)}$ (fuori del ciclo) che abbia per tangenziale P, ovvero da un punto $P^{(-2)}$ che abbia per tangenziale $P^{(-1)}$ etc.

Più avanti impareremo a valutare il numero delle coincidenze della suddetta corrispondenza (a cui si lega il problema dei *poligoni di* PONCELET); qui basta rilevare che il numero di queste coincidenze è necessariamente finito; infatti se qualunque punto P di f coincidesse con l'omologo $P^{(n)}$, variando con continuità P fino a portarlo in un altro, P_1, dei 4^n punti che danno origine al medesimo $P^{(n)}$, si dedurrebbe che anche P_1 deve coincidere con $P^{(n)}$, il che è assurdo.

Da queste osservazioni si è indotti a ritenere che l'esistenza di un punto razionale P, posto in posizione generica sopra la cubica f, porti l'esistenza di un'infinità di punti razionali appartenenti alla cubica stessa. Ma non possiamo astenerci dal rilevare che una tale induzione è affatto imprecisa, perchè la posizione generica che bisogna dare a P è fuori della infinità numerabile dei punti costituita dai gruppi di coincidenza delle corrispondenze sopra indicate, e numerabile è d'altra parte anche l'aggregato di tutti i punti razionali del piano. Forse un esempio effettivo di cubica con infiniti punti razionali si potrà ottenere adoperando la trasformazione razionale di prima specie che viene definita dal corrispondersi di due punti razionali P e P', dati sopra la curva; giacchè sembra possibile di mostrare che, per una f a coefficienti razionali, la determinazione delle trasformazioni di prima specie cicliche porta in generale a delle irrazionalità; così la trasformazione razionale predetta — salvo qualche restrizione — dovrebbe risultare sempre periodica. Ma non ci indugeremo su questi dubbi critici, che ci porterebbero troppo fuori del campo algebrico segnato a questo libro.

Ammettasi che una cubica f possegga infiniti punti razionali: quali caratteristiche spetteranno all'aggregato di tutti i punti razionali di f?

Dimostriamo che questo aggregato, G, è denso su ciascun ramo della cubica che ne contiene un punto. Anzitutto, se la f contiene infiniti punti razionali, vi sarà certo (almeno) un punto L di f (razionale o no) limite di punti razionali. Allora si consideri su f un qualunque punto razionale A, ed un punto razionale mobile B che si avvicina ad L; la retta AB sega f in un punto razionale mobile C, che tende ad un punto limite M, intersezione di f con la retta AL. Adesso proiettando la cubica su se stessa da un suo punto razionale vicino ad M, si ottengono infiniti punti razionali vicini ad A, proiezioni dei punti razionali vicini ad L: così appare che, sopra la f, ogni punto razionale A è limite di punti razionali.

Ciò posto, secondo i teoremi generali della teoria degli insiemi, l'insieme derivato di G (costituito da tutti i punti limiti di G) sarà perfetto sopra un ramo reale di f, riempiendo tutto il ramo, ovvero uno o più segmenti di esso.

In questa seconda ipotesi si troverebbe su f un punto L, limite di punti razionali a destra e non a sinistra; faremo vedere che ciò è impossibile, cioè che ogni punto limite di punti razionali è punto di condensazione del G tanto a destra che a sinistra. A tale scopo basta osservare che esiste certo su f un punto M, limite a destra e a sinistra, di punti del G, e si può anche supporre che M non sia il tangenziale di L nè abbia per tangenziale L; allora è facile riconoscere che anche il punto N, intersezione di f con la retta LM è limite a destra e a sinistra di punti del G, imperocchè un intorno di M si proietta in un intorno di N da un punto razionale sufficientemente vicino ad L. Analogamente, poichè L è proiezione di M da N, si deduce che anche L è limite a destra e a sinistra di punti del G.

In conclusione resulta dunque che se un ramo reale di f possiede infiniti punti razionali, questi formano un aggregato ovunque denso sul detto ramo. È chiaro poi che se la f è bipartita, ogni punto razionale del ramo pari dà — come tangenziale — un punto razionale del ramo impari, sicchè in ogni caso se la f possiede infiniti punti razionali, ve ne sono anche infiniti sul ramo impari, formando un aggregato ovunque denso su questo. Si noti poi che quando il ramo impari di una f contenga infiniti punti razionali, non è detto che si trovino anche punti razionali nel ramo pari, ma se ne trova uno A, proiettando da A il ramo impari sul ramo pari, si deduce che anche quest'ultimo conterrà un aggregato ovunque denso di punti razionali.

Riassumiamo i risultati ottenuti enunciando il

Teorema di POINCARÉ [1]. *L'aggregato dei punti razionali*

[1] *Journal de Math.* (5) 7 (1901). La dimostrazione di Poincaré si fonda sulla rappresentazione parametrica della curva con le funzioni ellittiche; la dimostrazione geometrica del testo appartiene a B. LEVI, e si trova nella prima delle sue quattro note: « Saggio sopra una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie ». *Atti dell'Accad. di Torino*, 1906-1908 ».

appartenenti ad una cubica a coefficienti interi, supposto infinito, è ovunque denso sul ramo impari, ed anche sul ramo pari se questo ne contenga un punto.

Il ragionamento precedente assume una forma più semplice quando si supponga che la cubica f possegga una trasformazione di prima specie π non periodica, definita dalla corrispondenza di due punti razionali P e P'. In questo caso si ottiene già un insieme di punti razionali denso sopra f (o sul suo ramo impari) mercè la ripetizione della π. La dimostrazione si lascia riportare al noto teorema che « una rotazione del cerchio intorno al centro, di un angolo incommensurabile con l'angolo retto, convenientemente ripetuta, conduce da un punto P ad una serie di punti costituenti un aggregato ovunque denso sulla circonferenza ». Infatti non abbiamo che da fare appello all'isomorfismo che intercede fra il gruppo delle trasformazioni reali di prima specie, considerate sopra un ramo della cubica, e il gruppo delle rotazioni di un cerchio intorno al centro, tenendo conto che le trasformazioni dell'uno e dell'altro gruppo sono ugualmente prive di punti uniti, sicchè una successione di punti omologhi $P\,P'\,P''\,....\,P^{(m)}\,....$ non può tendere ad un limite determinato.

Ora ci piace infine rilevare come degno di attenzione il fatto che di una curva non suscettibile di rappresentazione parametrica razionale, quale è la cubica, si possa tuttavia ottenere un *tracciamento per punti vicini quanto si vuole*, mediante la ripetizione successiva di una medesima *costruzione lineare*, traducente l'equazione razionale che ne fa conoscere un aggregato ovunque denso di punti razionali.

Passiamo alle *curve di genere* $p=2$, e poi alle *curve iperellittiche* di genere $p>2$.

Per $p=2$, le curve φ d'ordine $n-3$, aggiunte ad una f d'ordine n, segano su f la serie canonica g_2^1 che così viene determinata razionalmente (in funzione dei coefficienti di f); la g_4^2 doppia della g_2^1 riesce composta con le coppie di questa, e però non conduce a trasformare f in una quartica irriducibile; invece la serie completa tripla della g_2^1 è una g_6^4 semplice, che dà origine ad una sestica irriducibile di S_4: per proiezione da punti esterni si ottengono, sempre razionalmente, delle sestiche piane trasformate di f. Ma è anche possibile costruire una sestica siffatta, C_6, la quale possegga un punto quadruplo O

e due punti doppi A, B, infinitamente vicini ad O, in direzioni diverse o anche infinitamente vicine, come accade per la sestica $y^2 = f_6(x)$ (cfr. § 12, pag. 94).

A tale scopo basta assumere entro la g_6^4 una g_6^2 semplice definita da tre sestine scelte come segue:

1) una sestina generica della g_6^4,

2) una sestina formata da tre coppie A_1A_2, B_1B_2 e PP' della g_2^1,

3) e una terza sestina formata dalle stesse due coppie A_1A_2, B_1B_2 e da una terza coppia QQ' della g_2^1.

La trasformazione così ottenuta conduce ad una sestica C_6 dotata di un punto quadruplo O (corrispondente alla quaterna $A_1A_2B_1B_2$ di f, e centro di un fascio di rette secanti le coppie della g_2^1) e di due punti doppi, A e B, che dimostreremo cadere infinitamente vicini ad O, corrispondendo alle coppie A_1A_2 e B_1B_2.

Anzitutto si verifica che per O passano quattro rami lineari della C_6, corrispondenti agli intorni dei quattro punti A_1, A_2, B_1, B_2 (supposti distinti) sopra f; in secondo luogo appare che i due rami corrispondenti ad A_1 e A_2 si toccano in O, giacchè altrimenti la tangente al ramo che corrisponde all'intorno di A_1 segherebbe ulteriormente la C_6 in un punto diverso da A_2, che dovrebbe essere coniugato di A_1 nella g_2^1.

D' altronde si può dimostrare anche direttamente che per una sestica C_6 di genere 2, dotata di un punto quadruplo O e di due punti doppi A e B, la condizione che la serie completa determinata dalle rette del piano sia la g_6^4 tripla della g_2^1 canonica, porta di conseguenza che i punti A e B cadano infinitamente vicini ad O. Si osservi infatti che la detta g_6^4 staccata dalle rette, può venir segata sulla C_6 mediante le curve di ordine $6 - 2 = 4$ aggiunte alla C_6 che passano per due punti coniugati della g_2^1, cioè (staccandosi la retta per O che contiene questi due punti) mediante le cubiche C_3 passanti doppiamente per il punto quadruplo O, e semplicemente per i due punti doppi A e B. Ora se questo sistema lineare ∞^4 di C_3 deve contenere le terne di rette per O (secanti su C_6 le terne di coppie della g_2^1) bisogna che A e B siano infinitamente vicini ad O, le C_3 avendo in O due tangenti fisse.

La circostanza che la sestica da noi costruita con un punto quadruplo O e due punti doppi A e B, abbia questi due punti infinitamente vicini ad O, non permette di usufruire della trasformazione quadratica coi punti fondamentali O, A, B per abbassare a 4 l'ordine della curva. Sarà possibile adoperare un altro modo di trasformazione, razionalmente definita, per abbassare l'ordine della curva? Le considerazioni che seguono permettono di dare una risposta negativa a questa domanda.

A tale scopo si osservi che se è possibile costruire razionalmente su f, o su C_6, a partire dalla g_2^1 o dal suo triplo g_6^4, una g_4^2 semplice, si riesce anche a determinare in modo razionale una coppia di punti non coniugati nella g_2^1. Per conseguenza, dato un qualunque fascio di sestiche di genere 2, si riuscirebbe sempre a costruire razionalmente una curva bisecante le sestiche del fascio in coppie di punti non appartenenti alla g_2^1. Ma noi mostreremo qui l'esistenza di un fascio, rispetto a cui non esistono siffatte bisecanti razionalmente definite. Si vedrà anche che, rispetto a questo fascio, non esistono neppure delle curve razionalmente definite secanti le sestiche in un numero dispari di punti, dal che segue che non è possibile ridurre razionalmente la C_6 ad una quintica.

Il fascio di C_6 cui sopra accenniamo si costruisce prendendo come gruppo base: il punto quadruplo O, i due punti doppi A e B ad esso infinitamente vicini, e 6 coppie della g_2^1 (punti allineati con O) arbitrariamente assegnate, $P_1P_1', P_2P_2', \ldots P_6P_6'$. È facile verificare che i detti punti, presi sopra una sestica C_6, appartengono effettivamente ad ∞^1 sestiche analoghe: infatti il sistema completo delle curve piane del sest'ordine sega sopra la nostra C_6 una serie g_{36} multipla della g_2^1, e quando si imponga il punto quadruplo O e i punti doppi A e B (equivalenti a coppie della g_2^1) si ottiene un sistema ∞^{11} di sestiche secanti su C_6 la serie completa g_{12}^{10} sestupla della g_2^1. Ora è chiaro che tutte le curve d'ordine n del piano aventi in O, A, B, molteplicità qualsiansi, e passanti con le stesse molteplicità per i punti base semplici P_iP_i' del nostro fascio, segheranno sulle C_6 di questo, gruppi, d'ordine pari, equivalenti a un certo numero di coppie della g_2^1, sempre per lo stesso motivo che O, A e B equivalgono a coppie della g_2^1.

Lo scopo che ci proponevamo si può dire raggiunto, attesochè una curva razionalmente definita rispetto al fascio delle C_6 dovrà comportarsi in modo simmetrico rispetto alle coppie P_i e P_i', che sono coppie arbitrarie della g_2^1 date sopra f; e la cosa si può rendere sensibile ove si assumano coppie $P_i\ P_i'$

costituite da punti immaginari coniugati; e possiamo concludere:

Una curva di genere due si può trasformare **razionalmente** *in una sestica con un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini,* in particolare nel tipo $y^2 = f_6(x)$, *ma non — in generale — in una curva d'ordine inferiore a* 6. La riduzione ad una *quartica* con punto doppio si ottiene invece mediante una *irrazionalità quadratica*, separando i due punti di una coppia razionale della g_2^1: allora, conoscendosi su f un punto P, basta usufruire della g_4^2 definita da P contato 4 volte (o da $P^2 + g_2^1$). Tuttavia una $f(xy) = 0$ di genere due si ridurrà razionalmente ad una quintica (con un punto triplo e un punto doppio) o ad una quartica (con punto doppio), nel caso che la g_n^2 segata su f dalle rette del piano appartenga ad una g_n^{n-2} completa non multipla della g_2^1 canonica, poichè si definisce allora razionalmente su f una g_4^2 o una g_5^3, staccando dalla g_n^{n-2} un numero conveniente di volte la g_2^1.

Osserveremo infine che i resultati ottenuti per $p = 2$ si estendono alle curve iperellittiche con $p > 2$, su cui i punti doppi della g_2^1 definiscono pure razionalmente una g_{2p+2}^{p+2} (multipla della g_2^1): *Ogni curva iperellittica di genere* p (> 1) *si può trasformare* **razionalmente** *in una curva d'ordine* $2p + 2$; *ma la riduzione a curve d'ordine inferiore non si effettua — in generale — razionalmente, bensì coll'aggiunta di irrazionalità quadratiche.*

Si noti che quando p è dispari non è possibile, in generale, trasformare razionalmente la nostra curva f in una di ordine $2p + 2$ con un punto $2p$-*plo*, o, in particolare, nel tipo $y^2 = f_{2p+2}(x)$, giacchè ciò implica di riferire la g_2^1 ad un fascio di raggi O (o ad una retta). Infatti la curva canonica di una f iperellittica è una curva razionale normale C_{p-1} doppia, e il problema di riferire la g_2^1 ad una retta conduce dunque a rappresentare la C_{p-1} sopra la retta, ciò che sappiamo non potersi fare *razionalmente* quando $p - 1$ è pari.

Ad ogni modo, quando la g_2^1 di f sia riferita ad una retta, si riesce a trasformare la f in una C_{2p+2}, dotata di un punto O multiplo secondo $2p$ e di p punti doppi infinitamente vicini; ma questa C_{2p+2} non si può abbassare razionalmente ad un ordine inferiore. (Tutto ciò si può sviluppare in modo perfettamente analogo al caso $p = 2$).

Finalmente vogliamo dire qualcosa sulle curve di genere $p > 2$ non iperellittiche.

Ogni curva di genere $p > 2$, non iperellittica, si lascia trasformare **razionalmente** *in una curva d'ordine* $2p - 2$, proiezione della curva canonica.

Si può dimostrare che la riduzione ad un ordine inferiore, non è ottenibile in generale *razionalmente*. Ma questa dimostrazione richiede conoscenze superiori a quelle che si domandano al lettore di questo libro ([1]).

Naturalmente si riesce invece a ridurre l'ordine della curva di genere p, quando si conosca sulla curva di genere p una serie g_n il cui ordine non sia multiplo di $2p - 2$, e così per una curva $f(xy) = 0$ il cui ordine n non sia multiplo di $2p - 2$, giacchè allora si costruiscono razionalmente le serie $rg_n + sg_{2p-2}$, fra le quali se ne trova qualcuna d'ordine inferiore a $2p - 2$. Per esempio, se si ha una curva f il cui ordine n sia primo con $2p - 2$, si possono trovare due interi r ed s, positivi o negativi, tali che

$$rn + s(2p - 2) = 1;$$

allora sarà anche

$$r(p+2) \cdot n + s(p+2) \cdot (2p-2) = p+2,$$

e quindi si determinerà razionalmente su f la serie

$$r(p+2)g_n + s(p+2)g_{2p-2} = g_{p+2},$$

che — resa completa — è (almeno) di dimensione 2. In tal

([1]) Si tratta di stabilire la proposizione seguente: non è possibile costruire razionalmente, sopra la curva generale di genere $p > 2$, un gruppo di n punti, dove n non sia multiplo di $2p - 2$.

Per $p = 3$, la proposizione enunciata si lascia dedurre dalla proprietà della superficie generale del quart'ordine, F, di non contenere altre curve che quelle d'ordine $n = 4m$, intersezioni complete con superficie d'ordine $m = 1, 2, 3, \ldots$ (Noether). Infatti, se sopra ogni quartica piana si potesse costruire razionalmente un gruppo di n punti, ove n non sia multiplo di 4, preso un fascio di sezioni piane C della superficie F, si riuscirebbe a definire razionalmente una curva K secante in n punti variabili la C, la quale dovrebbe comportarsi simmetricamente rispetto ai 4 punti base del fascio suddetto; ma una tale K non sarebbe d'ordine $4m$. Per $p = 4, 5, \ldots$ si potrà fornire una dimostrazione analoga ricorrendo alle superficie d'ordine $2p - 2$ dello S_p, a curve sezioni di genere p, determinate da Enriques e Severi.

caso si deduce la possibilità di trasformare razionalmente la f in una curva d'ordine $p+2$.

Dalle cose dette appare che, nell'ordine d'idee di cui si tratta, una profonda differenza separa le curve di genere $p=1$ da quelle corrispondenti ad un altro valore qualsiasi del genere, dappoichè per $p \neq 1$ si riesce sempre a ridurre *razionalmente* una curva f ad un ordine determinato ($2p+2$ o $2p-2$), laddove per $p=1$ si trovano infinite famiglie di curve irriducibili per trasformazioni a coefficienti razionali, d'ordine $n=3, 4, \ldots$ (1).

Termineremo rilevando che:

se due curve di genere $p>2$, f e f', hanno moduli uguali, la trasformazione birazionale che fa passare dall'una all'altra, contiene in generale razionalmente i coefficienti di f e f'. Infatti, se i moduli sono generali in guisa che la f (e similmente la f') non possegga trasformazioni in sè, la trasformazione che fa passare da f a f' riesce definita in modo univoco; essa si costruisce razionalmente mediante operazioni di eliminazione, ove si assumano al posto di f e di f' due curve canoniche dello S_{p-1}, che debbono risultare omografiche.

33. **I moduli delle curve di genere p e il teorema d'esistenza.** — Abbiamo riconosciuto che le condizioni di trasformabilità birazionale di due curve di genere $p=1$, si riducono all'uguaglianza di *una* certa costante caratteristica; cioè del loro modulo, in guisa che (al variare del modulo) le curve di genere uno vengono distribuite in una semplice infinità di *classi*, ogni classe essendo costituita da curve birazionalmente identiche. Di più abbiamo veduto che il modulo di una curva ellittica si riflette nell'invariante assoluto della cubica immagine, la classificazione rispetto a trasformazioni birazionali riconducendosi così ad una classificazione proiettiva.

Ora, passando alle curve di genere $p>1$, avremo in generale che le condizioni di trasformabilità birazionale per curve di uguale genere, si tradurrà sempre nell'uguaglianza di certe costanti caratteristiche, o *moduli*, che *definiscono una classe di curve birazionalmente identiche.* E questi moduli si rifletteranno negli invarianti assoluti, rispetto a trasforma-

(1) Enriques: *Math. Annalen*, 51, l. c.

zioni proiettive, delle corrispondenti curve canoniche C_{2p-2}^{p-1}. Il *numero dei moduli* per un dato genere p, è il numero dei parametri essenziali da cui dipende una curva di questo genere, considerata nella geometria delle trasformazioni birazionali; perciò questo numero riesce indipendente dal particolar modo con cui piaccia di introdurre le costanti caratteristiche, assunte come moduli (¹).

È facile valutare il numero dei moduli da cui dipendono le curve dei primi generi $p = 2, 3, 4, \ldots$.

Per $p = 2$, si ha una g_2^1 canonica con 6 punti di diramazione, e quindi si ha come immagine canonica della curva una retta doppia $[x, \sqrt{f_6(x)}]$ con 6 punti di diramazione: siamo ridotti a contare gli invarianti assoluti che caratterizzano, sulla retta, sestine di punti proiettivamente distinte $f_6(x) = 0$; e pertanto si trovano $3 = 3p - 3$ moduli, che possono assumersi, p. es., sotto la forma di birapporti (cioè dei birapporti che — per un dato ordine della sestina — i primi tre punti formano rispettivamente con gli altri tre).

Per $p = 3$, riferendosi sempre alle curve canoniche, abbiamo ∞^{14} quartiche piane, e nel piano di queste ∞^8 omografie (poichè in generale una quartica non ammette infinite trasformazioni proiettive); si deduce che le quartiche dipendono da 6 invarianti assoluti, e quindi le curve di genere $p = 3$ dipendono da $6 = 3p - 3$ moduli.

Anche per $p = 4$ è agevole contare direttamente gli invarianti assoluti delle corrispondenti curve canoniche, che sono sestiche intersezioni complete di superficie del secondo e del terzo ordine: infatti le superficie del second'ordine Q dello spazio sono ∞^9, e la dimensione del sistema delle sestiche, segate sopra una Q dalle ∞^{19} superficie cubiche, vale $19 - 4 = 15$, sicchè si trovano ∞^{24} sestiche: togliendo ora da 24 il numero delle costanti da cui dipende un'omografia dello spazio, cioè 15, resulta che il numero dei moduli per $p = 4$ è $9 = 3p - 3$.

Similmente si può dimostrare per esercizio che le curve di genere $p = 5$ (la cui immagine canonica è l'intersezione completa di tre varietà quadriche dello spazio S_4) dipendono da $12 = 3p - 3$ moduli.

Ma questo metodo di calcolo difficilmente si estende ai più alti valori del genere p, venendo a mancare un modo

(¹) Cfr. il teorema sull'invarianza delle dimensioni in L. 1°, § 23.

diretto di costruzione proiettiva delle corrispondenti curve canoniche. Perciò ricorreremo ad un altro metodo assolutamente generale.

Ogni curva C di genere p si può sempre trasformare birazionalmente in una curva piana di un conveniente ordine n, facendo in guisa che una sua g^2_n venga segata dalle rette del piano. Se, per un dato n, l'anzidetta trasformazione fosse possibile in un sol modo (o in un numero finito di modi) la dimensione N del sistema completo delle curve piane d'ordine n e di genere p ci porgerebbe il numero dei moduli: ma quella trasformazione può certo effettuarsi in infiniti modi; anzitutto perchè ogni g^2_n (non essendovi infinite trasformazioni della curva che la lascino invariata) dà origine ad ∞^8 curve trasformate proiettivamente identiche, ed, in secondo luogo, perchè alle C apparterranno in generale ∞^ν serie g^2_n, con $\nu > 0$, e — se la curva C non possiede infinite trasformazioni in se stessa — due g^2_n distinte conducono in generale a curve trasformate proiettivamente distinte. Così, nell'ipotesi $p > 1$ che esclude l'esistenza di infinite trasformazioni in se stesse, le curve di genere p verranno a dipendere da

$$M = N - \nu - 8$$

moduli.

Ora è facile valutare N e ν, dove si assuma un $n > 2p - 2$, per modo che ogni g^2_n presa su C appartenga ad una serie completa non speciale di dimensione $r = n - p$. Infatti la varietà costituita dai gruppi di n punti di una curva ha dimensione n, e quindi la serie delle g^{n-p}_n complete (senza gruppi comuni) contenute in essa ha dimensione $n - (n - p) = p$; ma le g^2_n contenute in una g^{n-p}_n (piani di un S_{n-p}) dipendono da $3(n - p) - 6$ parametri; quindi si trova

$$\nu = p + 3(n - p) - 6,$$

e di conseguenza

$$M = N - 3n + 2p - 2.$$

Resta da calcolare N. A tale scopo ricordiamo che le curve piane d'ordine n e genere p posseggono $d = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ punti doppi. D'altronde il sistema generale delle curve di ordine n contiene $\dfrac{n(n+3)}{2}$ parametri, sicchè — ammettendo che i d punti doppi portino d condizioni indipendenti — si troverà

$$N = 3n - 1 + p,$$

e quindi

$$M = 3p - 3.$$

Tuttavia la deduzione precedente esige che vengano stabiliti rigorosamente due punti:

1) che esistono effettivamente curve piane d'ordine n con d punti doppi, non degeneri;

2) che l'imposizione di d punti doppi ad una curva piana d'ordine n porti d condizioni indipendenti, sicchè la dimensione N del sistema delle curve irriducibili d'ordine n con d punti doppi risulti proprio $N = 3n - 1 + p$ e non $N > 3n - 1 + p$.

In ordine al dubbio 1) basta osservare che esistono curve iperellittiche di genere p, rappresentate da

$$y^2 = f_{2p+2}(x):$$

se sopra una curva siffatta si assume ad arbitrio una g_n^2 (che è sempre possibile per $n - 2 \geq p$) si trovano curve trasformate d'ordine n con d punti doppi; le quali sono naturalmente irreducibili.

Procediamo a rimuovere il dubbio 2): a tale scopo pongasi che una curva irreducibile, C_n, d'ordine n con $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ punti doppi, appartenga ad un sistema continuo di dimensione N di curve analoghe; in tale ipotesi si troveranno nel sistema ∞^{N-1} curve infinitamente vicine a C_n, e basterà provare che la dimensione $(N-1)$ del sistema di queste curve non può superare $3n + p - 2$. Infatti una curva C'_n del sistema, infinitamente vicina alla data C_n, la sega — fuori dei punti doppi — in $s = n^2 - 2d = 3n + 2p - 2$ punti formanti un gruppo G_s che viene staccato sopra la stessa C_n da una curva aggiunta d'ordine n: questa affermazione segue dal ricordare che facendo fascio della C_n e della C'_n si ottengono curve d'ordine n passanti semplicemente per i punti doppi della C_n ed ivi tangenti fra loro (cfr. L. 2°, § 5, Nota, vol. I, pag. 182). Ora la dimensione della serie lineare completa staccata su C_n dalle sue curve aggiunte d'ordine n, vale $3n + p - 2$; tale sarà dunque il valore massimo che può assumere $N - 1$, posto che l'anzidetto G_s determina un fascio di curve d'ordine n a cui appartiene una sola C'_n infinitamente vicina alla C_n.

In definitiva si conclude che $N \leq 3n - 1 + p$ e quindi $N = 3n - 1 + p$. Pertanto vengono eliminati i dubbi critici sollevati in ordine alla dimostrazione precedente, e rimane stabilito il

Teorema. *Le curve di genere $p > 1$ dipendono da $3p - 3$ moduli.*

Volendo abbracciare anche i casi $p = 0, 1$, bisogna tener conto dell'esistenza di un gruppo ∞^ρ di trasformazioni della curva in se stessa, in accordo con l'osservazione fatta che si hanno, in tali ipotesi, ∞^ρ serie g_n^2 rispondenti a curve trasformate proiettivamente identiche: si ottiene quindi che il numero dei moduli resta in ogni caso

$$M = 3p - 3 + \rho,$$

dove, come sappiamo, $\rho = 3$ per $p = 0$, e $\rho = 1$ per $p = 1$. E si ritrova che non esistono moduli per $p = 0$, mentre esiste *un* modulo per $p = 1$.

Mettiamo in luce che il computo dei moduli per le curve di genere p (al pari di una costruzione effettiva che si desse delle curve canoniche) importa un *teorema di esistenza,* cui giova dare forma determinata nel modo che segue.

L'esistenza di una curva algebrica C di genere p, corrisponde a quella di una funzione algebrica $y(x)$ avente un certo numero n di rami e $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione nel piano della variabile complessa x; e la scelta di una funzione $y(x)$ tra quelle che sono suscettibili di definire la curva C, o una sua trasformata birazionale, corrisponde alla scelta di una g_n^1 (che verrà quindi definita da $x =$ cost.) sopra la curva C. Il piano della variabile complessa x in ogni punto del quale vengono deposti gli n valori $y_1\, y_2 \ldots. y_n$ della $y(x)$, descriventi gli n fogli sovrapposti di una superficie di Riemann (1), viene designato nel linguaggio della geometria algebrica come una *retta n-pla,* i punti della quale sono riferiti biunivocamente ai gruppi della g_n^1 di C; e le coincidenze di questa g_n^1 corrispondono ai punti di diramazione della retta *n-pla.* Siccome vi sono ∞^3 modi di riferire (proiettivamente) i gruppi

(1) L. 2°, § 34, vol. I, pag. 358.

di una g_n^1 ai punti di una retta, così vi sono ∞^3 rette *n-ple*, con gruppi di diramazione proiettivi, che rispondono a una stessa C e a una stessa g_n^1 sopra di questa.

Per contro, se i punti $A_1\, A_2 \ldots . A_m$ sono punti di diramazione di una retta *n-pla* di genere p (sicchè esista una C possedente una g_n^1 rappresentata su quella retta *n-pla*), si possono costruire infinite curve K, dello stesso genere p, contenenti una g_n^1 riferita alla retta *n-pla*, in guisa che ad $A_1\, A_2 \ldots . A_m$ rispondano i gruppi della g_n^1 dotati di punto doppio: infatti basta prendere come curva K unà qualsiasi trasformata birazionale della C. Ma è importante notare che « le curve rappresentate sopra una retta *n-pla* coi medesimi punti di diramazione si distribuiscono, in ogni caso, in un numero finito di classi birazionalmente distinte ». Per dimostrarlo basta ricordare che se si hanno nel piano della variabile complessa x due funzioni algebriche ad n rami, $y(x)$ e $Y(x)$, con gli stessi punti di diramazione e con lo stesso gruppo di monodromia (tali cioè che i giri attorno ai punti di diramazione, relativi a un dato sistema di cappi, producano sui rami le medesime sostituzioni), risulta Y funzione razionale di x e y (cfr. § 3). Qui, essendo dati i punti di diramazione $A_1\, A_2 \ldots . A_m$, si può avere tutt' al più un numero finito di casi, in ordine alle sostituzioni corrispondenti, e pertanto non può esistere che un numero finito di curve birazionalmente distinte, rappresentate sulla nostra retta *n-pla*.

Ora, dopo avere riconosciuto che un gruppo di $2n+2p-2$ punti di diramazione dato sopra una retta, non può definire che un numero finito di rette *n-ple* corrispondenti a curve birazionalmente distinte, passiamo a dimostrare che:

Esiste (almeno) una curva algebrica irreducibile, C, di genere p, rappresentabile sopra una *retta n-pla con* $2n+2p-2$ *punti di diramazione* (distinti) *assegnati ad arbitrio.*

In ciò che segue supporremo sempre n abbastanza elevato (così che le g_n^1 che avremo luogo a considerare sopra una curva di genere p saranno sempre non speciali); ma al termine delle nostre deduzioni riusciremo a liberarci da questa restrizione.

A partire dalle curve C di genere p, cerchiamo di costruire tutte le possibili rette *n-ple* con $m=2n+2p-2$ punti di diramazione. A tale scopo giova contare la infinità delle g_n^1 appartenenti ad una C; vi sono ∞^p serie g_n^{n-p} complete, e dentro ogni g_n^{n-p} vi sono $\infty^{2(n-p)-2}$ involuzioni g_n^1; dunque le g_n^1 sopra una C dipendono da $2n-p-2$ parametri. Ma poichè vi sono ∞^{p-3} curve C_3 birazionalmente distinte, si troveranno $\infty^{2n+2p-5}$ rette n-*ple* rappresentanti curve di genere p. Di qui segue che i $2n+2p-2$ punti di diramazione di una retta n-*pla* di genere p, possono assumersi ad arbitrio, giacchè un gruppo di $2n+2p-2$ punti contiene precisamente $2n+2p-5$ birapporti indipendenti, che lo definiscono a meno di una trasformazione proiettiva.

La deduzione tratta dal precedente computo di costanti è perfetta, tenuto conto che un dato gruppo di punti di diramazione non può rispondere ad infinite curve birazionalmente distinte, e che la varietà costituita da tutti i gruppi di m punti di una retta è irriducibile. (Cfr. L. 1°, § 26).

Ora, lo stesso teorema di esistenza sopra stabilito (che limitiamo per il momento al caso di n abbastanza elevato) è suscettibile di una dimostrazione diretta che, a sua volta, ci dà un nuovo modo di contare il numero dei moduli per le curve algebriche di genere p.

Premettiamo l'osservazione (cui già innanzi avemmo pure occasione di ricorrere sotto una forma lievemente diversa) che, almeno per una particolare scelta di $A_1\, A_2 \ldots A_m$ $(m=2n+2p-2)$ esiste una curva irriducibile di genere p, rappresentata sopra la retta n-*pla* coi punti di diramazione $A_1\, A_2 \ldots A_m$; infatti sappiamo che esistono certo curve (irriducibili) iperellittiche di genere p, e in corrispondenza ad una di queste si otterrà una retta n-*pla* partendo da una g_n^1 presa sopra la curva; per $n > p+1$ una g_n^1 generica conduce certo a punti di diramazione semplici.

Domandiamoci di costruire effettivamente una curva piana d'ordine $n+h$, possedente un punto h-*plo* P ed altri

$$\frac{(n+h-1)(n+h-2)}{2} - \frac{h(h-1)}{2} - p$$

punti doppi in posizione non assegnata, la quale debba avere date tangenti $PA_1, PA_2, \ldots, PA_m$ $(m=2n+2p-2)$, uscenti da P: questo problema algebrico, per n ed h superiori a certi limiti, dà luogo ad un numero finito di sistemi continui di curve, di dimensione $3n+2h+p-1-m$ (almeno); aggiungendo un conveniente numero di condizioni (per es. che alcuni punti doppi siano fissi o si riuniscano in punti fissi di più alta molteplicità, ovvero condizioni di passaggio per punti semplici) il detto problema diventa determinato. Così dunque si riesce a costruire un numero finito di curve $C_1\, C_2 \dots C_s$ (d'ordine $n+h$) rappresentate sopra una data retta n-*pla* di cui vengano assegnati ad arbitrio i punti di diramazione $A_1\, A_2 \dots A_m$. Si tratta di provare che una almeno di codeste curve è irriducibile [1].

La dimostrazione richiesta è contenuta nell'osservazione che: se per una scelta particolare dei punti $A_1\, A_2 \dots A_m$, si ha una curva irriducibile C_1, quando i punti $A_1\, A_2 \dots A_m$ vengano fatti muovere per continuità (senza mai coincidere) anche la curva C_1 si muove per continuità, e *rimane algebricamente irriducibile.* Infatti riferendosi al piano complesso rappresentativo della retta n-*pla*, si consideri un sistema di cappi $OA_1, OA_2, \dots OA_m$, relativi alla curva C_1: in corrispondenza a questi avremo delle sostituzioni sui rami della $y(x)$ definita da C_1 le quali — per una C_1 irriducibile — formano un gruppo transitivo; ora alla variazione continua di $A_1\, A_2 \dots A_m$ si può accompagnare la variazione continua dei cappi anzidetti, in guisa che le relative sostituzioni sui rami della funzione algebrica restino immutate.

Tuttavia la dimostrazione qui accennata dà luogo a qualche dubbio che occorre rimuovere con analisi precisa: infatti si può dubitare che in corrispondenza al particolare gruppo $A_1 A_2 \dots A_m$, per cui abbiamo riconosciuto l'esistenza di una curva C_1 irriducibile, il problema della costruzione delle C diventi indeterminato, e quindi che la C_1 non si possa più ritenere come limite di una curva irriducibile, soluzione del nostro problema generale.

Per eliminare questo dubbio si consideri il sistema continuo costituito da tutte le curve C d'ordine $n+h$ e di genere p (generalmente) irriducibili, che posseggono in P un punto h-*plo* (ove non si voglia ammettere l'irriducibilità di questo sistema — che dimostreremo al § 34 — si consi-

[1] Si potrebbe credere *a priori* che il caso della riducibilità si presenti in questo problema come eccezionale: di fatto non è così, e — come risulterà poi — fra le curve C si trovano ugualmente delle curve riducibili e delle curve irriducibili. (E di queste ultime valuteremo il numero).

deri il sistema continuo delle C che contiene la particolare C_1 di cui è detto innanzi), il quale sistema $\{C\}$ ha la dimensione

$$3n + 2h + p - 1$$

(almeno).

La C, variando entro questo sistema, resta sempre *algebricamente irriducibile*, e non acquista ipermolteplicità in P, *fino a che due tangenti per P non vengano a coincidere*. Può darsi bensì che la detta curva *degeneri proiettivamente*, ma dovrà allora ridursi ad una curva razionale di un certo ordine r con P $(r-1)$-*plo*, da contarsi n volte, cui si aggiungano eventualmente

$$n + h - nr$$

rette per P $\left(r \leq \frac{h}{n} + 1\right)$: questa degenerazione proiettiva corrisponde all' ipotesi che la g^2_{n+h} segata sulla C dalle rette del piano risulti composta con la g^1_n segata dalle rette per P.

Ora basta osservare che il sistema di queste C proiettivamente degeneri ha la dimensione

$$R = n + h + (2 - n) r,$$

sicchè, per h assai grande, imponendo alle C m tangenti distinte per P, si otterrà un sistema di curve di dimensione

$$R' \geq n + 2h - p + 1 > R,$$

e quindi genericamente irriducibili (anche in senso proiettivo).

Infine se, come si è fatto innanzi, si renda determinato il problema della costruzione della C_1 aggiungendo condizioni complementari, si potrà sempre supporre che queste siano introdotte in modo che, in corrispondenza a m tangenti distinte assegnate per P, si ottenga una C_1 proiettivamente irriducibile.

Dopo ciò rileveremo esplicitamente che: la possibilità di costruire una retta n-*pla* di genere p, con m punti di diramazione arbitrari, porta che le curve di genere p dipendano precisamente da $3p-3$ moduli (o da $3p - 3 + \rho$ per $p \leq 1$): infatti il computo delle g^1_n (non speciali) appartenenti ad una curva di genere p, ci ha già mostrato che il numero dei moduli sarebbe minore di $3p-3$ qualora esistessero legami fra i punti di diramazione di una retta n-*pla*, mentre per essere maggiore (cioè uguale a $3p - 3 + \rho$) dovrebbero esistere infinite curve birazionalmente distinte, rappresentabili sopra una retta n-*pla* con gli stessi punti di diramazione, ovvero ∞^{ρ} trasformazioni birazionali di una di queste curve in se stessa; la quale ultima ipotesi porta $p \leq 1$.

Ripigliamo le considerazioni di continuità che ci hanno condotto alla dimostrazione diretta del teorema di esistenza. Abbiamo veduto che, partendo da una funzione algebrica irriducibile ad n rami $y(x)$, con gli m punti di diramazione $A_1\, A_2 \ldots\ldots A_m$, si passa per continuità ad un'altra funzione algebrica analoga con dati punti di diramazione $B_1\, B_2 \ldots\ldots B_m$; si domanda se in questo modo (essendo n abbastanza alto) si giunga a costruire una qualunque delle curve di genere p (birazionalmente distinte) che sono rappresentate da una funzione ad n rami $z(x)$ coi punti di diramazione $B_1\, B_2 \ldots\ldots B_m$.

Ora la risposta affermativa alla nostra questione risulta dall'osservare che

1) la trasformazione per continuità che ci fa passare da una funzione (ad n rami) coi punti di diramazione $A_1\, A_2 \ldots\ldots A_m$, ad una funzione coi punti di diramazione $B_1\, B_2 \ldots\ldots B_m$, si può accompagnare con una variazione continua dei cappi, in guisa che restino inalterate le relative sostituzioni;

2) per una scelta conveniente dei sistemi di cappi (trasformati per continuità l'uno nell'altro) le sostituzioni sui rami della y, relative ai punti A_i, possono supporsi rispettivamente uguali a quelle sui rami della z, relative ai punti B_i.

Quest'ultima affermazione è contenuta nella riduzione delle superficie di Riemann con n fogli al tipo canonico di Lüroth-Clebsch (cfr. § 3), che qui giova richiamare.

Si consideri nel piano della variabile complessa x un sistema di linee aperte non attraversantisi che, partendo da un estremo comune O, vadano agli $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione ($A_1\, A_2 \ldots\ldots A_m$) di una funzione algebrica, ad n rami, $y(x)$: queste linee si succederanno secondo un certo ordine circolare, come se fossero raggi del fascio O. In relazione alle linee anzidette (prese come tagli o come cappi relativi ai punti di diramazione), ove si fissino i valori iniziali $y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n$ della $y(x)$ nel punto O, si ottengono ben definite sostituzioni sulle y_i: per es. alla linea OA_1 corrisponderà la sostituzione $(y_1 y_2)$ o brevemente (12), se accada che un giro fatto a partire da O ed avvolgente la linea OA_1 (ma non attraversante nessuno degli altri tagli) permuti fra loro

y_1 e y_2. Orbene il teorema di Lüroth-Clebsch afferma che — qualunque sia la funzione algebrica $y(x)$, e comunque si scelga il punto O in relazione ai suoi punti di diramazione — si può sempre assegnare un ordine di questi punti per cui esista un sistema di tagli successivi

$$OA_1, OA_2, ..., OA_m,$$

al quale rispondano rispettivamente

$2p+2$	sostituzioni	(12)
2	sostituzioni	(23)
2	sostituzioni	(34)
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
2	sostituzioni	$(n-1, n)$.

Lo studioso che vuole rappresentarsi chiaramente alla vista questo tipo canonico della superficie di Riemann, non ha che da riferirsi al caso particolare in cui i punti $A_1 A_2 ... A_m$ si succedano sopra un cerchio di centro O, per es. come i vertici di un poligono regolare, e i tagli siano dati dai raggi del cerchio che vanno a cotesti punti.

Diciamo di più: « la superficie di Riemann canonica si può sempre ridurre al tipo particolare qui indicato, per semplice accorciamento e successiva rettificazione dei tagli »; invero, si può sempre supporre che le linee OA_i siano delle poligonali, ed allora basta far muovere i punti A_i sulle dette linee fino a portarli sul cerchio di centro O che ha per raggio il più piccolo lato di queste poligonali, fra quelli uscenti da O.

Ora questa riduzione permette appunto di stabilire la prop. 2), di cui appare così il significato più preciso. Infatti, date le due funzioni di genere p a n rami $y(x)$ e $z(x)$, è sempre possibile ordinare i loro punti di diramazione (che verranno quindi numerati designandoli con $A_1 A_2 .... A_m$ e $B_1 B_2 ... B_m$) per modo che si abbiano due sistemi di tagli $OA_1, OA_2, ... OA_m$, e $OB_1, OB_2, ... OB_m$, rispetto a cui si hanno sopra i rami di y e di z le medesime sostituzioni

$$(12)(12) .... (12),\ (23)(23),\ (34)(34) ....,\ (n-1, n)(n-1, n).$$

Ma allora la deformazione continua della prima riemanniana che porta la linea OA_i rispettivamente nella OB_i, dà origine ad una funzione algebrica, riattaccantesi per continuità alla $y(x)$, che coincide con la $z(x)$, ovvero con una sua trasformata birazionale.

Per tal modo risulta dimostrato il

Teorema. *Le classi di curve* (birazionalmente identiche) *di genere p costituiscono un sistema continuo,* cioè si possono riguardare come elementi di una varietà irreducibile (che per $p > 1$ ha $3p - 3$ dimensioni). Ciò significa che le curve canoniche di genere p (> 1) formano un sistema continuo, a $3p - 3 + (p + 1)(p - 1) = (p - 1)(p + 4)$ dimensioni. Ed anche — tenuto conto che per $n > p + 1$ le g_n^2 appartenenti ad una curva di genere p formano una serie continua — che:

Tutte le curve piane irriducibili d' ordine n con

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punti doppi, per $n > p + 1$, formano un unico sistema continuo.

Questo resultato è tanto più notevole, che la proprietà non sussiste più quando si lasci cadere la condizione di irriducibilità delle curve. Infatti già le curve piane del quart' ordine con tre punti doppi si distribuiscono in due sistemi continui ∞^{11}, l' uno costituito di quartiche irriducibili e l' altro formato dalle curve spezzate in retta e cubica. E per dare un esempio più complesso, le curve piane del sesto ordine con 9 punti doppi formano cinque sistemi continui ∞^{18}, uno di sestiche irriducibili, un secondo di curve spezzate in una retta e in una quintica (irriducibile) con 4 punti doppi, un terzo di curve spezzate in una quartica con un punto doppio e in una conica, un quarto le cui curve si compongono di una quartica senza punti doppi e di due rette, e un quinto formato dalle coppie di cubiche.

Le considerazioni di continuità svolte innanzi in ordine al tipo canonico della superficie di Riemann assegnato da Lüroth-Clebsch, permettono anche di completare il nostro teorema di esistenza, affermando che:

Esiste una funzione algebrica irriducibile $y(x)$, ad n rami, (determinata a meno di una trasformazione birazionale) *che possiede dati punti di diramazione $A_1 A_2 \dots A_m$, e che* — in relazione ad un certo sistema di tagli susseguentisi OA_i (segnati nel piano della variabile complessa x) — *dà luogo a trasposizioni $S_1 S_2 \dots S_m$, date ad arbitrio con le condizioni:*

1) il prodotto delle trasposizioni successive sia l' identità

$$S_m S_{m-1} \dots S_1 = 1;$$

2) le dette trasposizioni generino un gruppo transitivo di sostituzioni sopra gli n valori di y relativi al punto O.

Questo teorema segue dall' analizzare le condizioni in cui viene dimostrata la riduzione della riemanniana al tipo di Lüroth-Clebsch, ove si avverta che tale riduzione non suppone *a priori* l' esistenza della funzione algebrica (irriducibile) ma soltanto le condizioni che esprimono

1) che l' ipotetica funzione non possiede altri punti di diramazione (cioè $S_m \dots S_2 S_1 = 1$);

2) l' irriducibilità di cotesta ipotetica funzione, cioè la transitività del gruppo generato dalle sostituzioni $S_1, S_2, \dots S_m$.

In base a questa osservazione, la riemanniana ad n fogli della costruenda $y(x)$ si può derivare per variazione continua da quella di una qualsiasi funzione algebrica ad n rami di genere p, che si conosca già esistente ed irriducibile; quindi anche l' esistenza della $y(x)$ risulta dimostrata.

Dopo avere completato il teorema di esistenza delle rette *n-ple* di genere p con dati punti di diramazione, supponendo sempre n abbastanza alto rispetto a p, siamo ora in grado di liberarci da questa restrizione, estendendo il resultato ai valori più piccoli di n. Infatti la costruzione di una $y(x)$ ad n rami con $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione e con relative assegnate trasposizioni, si riduce all' analoga costruzione per una funzione dello stesso genere, Y, ad $n + 1$ rami, dove si aggiungano ad $A_1 A_2 \dots A_m$, altri due punti successivi di diramazione A_{m+1}, A_{m+2}, rispetto a cui vengano assegnate le trasposizioni $(n, n + 1)(n, n + 1)$: portando a coincidere i due punti A_{m+1}, A_{m+2}, ed i relativi tagli (ciò che, per la nostra ipotesi, è possibile senza attraversamento degli altri tagli) la funzione Y si spezza nella y richiesta e in una funzione razionale (costituita dal ramo Y_{n+1}). Similmente si deduce l' esistenza di una $y(x)$ ad n rami da quella di una $Y(x)$ dello stesso genere con $n + s$ rami, per $s > 1$.

Giova anche osservare a che cosa conduca il passaggio al limite qui adoperato, quando si portino a coincidere due punti di diramazione successivi, cui rispondano trasformazioni qualunque. Se le trasposizioni sono uguali, ma le rimanenti danno ancora un gruppo transitivo, la curva $y = y(x)$ resta irriducibile, ma acquista un punto doppio: così accade, per es., riferendoci al tipo di Lüroth-Clebsch, quando si portino a coincidere i due punti A_1 e A_2 $(p > 0)$. E giova avvertire che sempre da questo modo di particolarizzazione hanno origine le curve dotate di un nuovo punto doppio, entro un sistema continuo di curve di genere p.

In secondo luogo se si portano a coincidere due punti successivi A_i e A_{i+1}, con scambi S_i e S_{i+1} diversi, non si abbassa il genere della curva, ma si produce un punto di diramazione doppio, cui risponde la sostituzione $S_{i+1}S_i$. Se ci riferiamo al tipo di Lüroth, prendendo per es. $i = 2p + 2$, la coincidenza dei due punti cui rispondono le trasposizioni (12) e (23) darà luogo a un punto di diramazione con la sostituzione $(23)(12) = (132)$: la curva corrispondente acquista una tangente di flesso parallela all' asse y. Se invece ci riferiamo ad una funzione algebrica tale che ai due punti di diramazione successivi A_i A_{i+1} corrispondano le sostituzioni (12) e (34), saremo condotti ad un punto di diramazione doppio con la sostituzione $(34)(12)$, che nasce da una tangente doppia della curva parallela all' asse y. (Si osservi che per dar luogo a questo caso, partendo dal tipo di Lüroth, occorre far coincidere due punti di diramazione non consecutivi; ma per dare un significato preciso al passaggio al limite — in modo che al punto di diramazione doppio corrisponda un unico taglio — conviene anzitutto rendere consecutivi quei due punti, e così facendo si ottiene una riemanniana che non risponde più alle condizioni di Lüroth).

Ora, riferendoci ad una riemanniana di tipo qualsiasi, potremo sempre farne muovere i punti di diramazione, in guisa che due o più punti successivi $A_1 A_2 .... A_r$ vengano a coincidere; così nasce in generale un punto di diramazione cui corrisponde la sostituzione $S = S_r S_{r-1} .... S_1$, prodotto delle sostituzioni relative ad $A_1 A_2 .... A_r$. E se — come è lecito supporre — le $S_1, S_2, ... S_r$ sono semplici trasposizioni, nascerà un punto di diramazione *r-plo* senza abbassamento di genere, qualora la sostituzione S sia composta di cicli di ordine r_1, r_2, ... con $r = (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + ...$, equivalendo quindi al prodotto di r, e non meno, trasposizioni diverse (cfr. L. 2°, § 36 e L. 4°, § 19).

Da ciò segue nella sua forma più generale il

TEOREMA D' ESISTENZA. *Ad una qualsiasi superficie di Riemann ad n fogli, corrisponde sempre una classe di funzioni o di curve algebriche,* definite a meno di una trasformazione birazionale.

Cioè: siano dati nel piano della variabile complessa, di cui si vuol costruire una funzione algebrica ad n rami $y(x)$, i punti di diramazione, semplici o multipli, $A_1 A_2 \dots A_i$, e per un sistema di tagli congiungenti ordinatamente codesti punti ad un punto O, si fissino le sostituzioni $S_1, S_2, \dots S_i$ $(S_i \dots S_2 S_1 = 1)$ formanti un gruppo transitivo: a questi dati risponde sempre una funzione $y(x)$ effettivamente esistente ed irriducibile, definita a meno di una trasformazione birazionale.

Ricordiamo che la condizione $S_i \dots S_2 S_1 = 1$ esprime che la $y(x)$ non ha altri punti di diramazione fuori di $A_1 A_2 \dots A_i$; inoltre il genere della curva $y = y(x)$ si valuta per mezzo delle molteplicità $r_1 r_2 \dots r_i$ dei punti di diramazione (r_h è la somma degli ordini dei cicli di S_h diminuita del loro numero) giacchè si ha

$$2n + 2p - 2 = r_1 + r_2 \dots + r_i.$$

Come si vede, il problema algebrico di costruire una retta *n-pla* con dati punti di diramazione, riesce determinato in rapporto ad alcuni dati topologici, che implicano una scelta, corrispondendo quindi ad una *irrazionalità* atta a staccare l'una dall'altra le diverse classi di curve rappresentate sulla medesima retta *n-pla,* con gli stessi punti di diramazione. Difatti due funzioni $y(x)$ e $Y(x)$ che — dando luogo a sostituzioni essenzialmente diverse — non si possono esprimere razionalmente l'una per l'altra, corrisponderanno *in generale* a curve birazionalmente distinte; perchè un conto di costanti — che sembra attendibile per $p > 2$ — indica che sopra una data curva non esistono in generale due g_n^1 conducenti a rette *n-ple* con gruppi di diramazione proiettivi.

Per costruire le classi di curve birazionalmente distinte che rispondano ad una retta *n-pla* con dati punti di diramazione, dovremo dunque assegnare — per un certo sistema di tagli — le varie sostituzioni possibili che definiscono una $y(x)$, distinguendo quelle che non sono essenzialmente diverse: ed è chiaro che debbono ritenersi uguali due sistemi di sostituzioni

$$S_1, S_2, \dots S_i, \quad \text{e} \quad S_1', S_2' \dots S_i',$$

quando queste vengano trasformate ordinatamente nelle altre per un semplice cambiamento dei nomi dei rami della $y(x)$, cioè per una sostituzione sopra $y_1, y_2, \dots y_n$.

Con tale avvertenza diventa possibile calcolare il numero delle superficie di Riemann ad n fogli, essenzialmente distinte, che si possono costruire a partire da dati punti di diramazione, per es. da $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione semplici, e in relazione ad un sistema di tagli che può assumersi ad arbitrio: il numero anzidetto risulterà una funzione $\varphi(n, m)$, topologicamente definita, dei numeri n e m; la sua legge di formazione è piuttosto complessa, ed ha formato oggetto di studio per parte di HURWITZ. Rimandando per ciò il Lettore alla memoria originale di cotesto geometra [1], ci limiteremo qui ad enunciare che:

Esistono in generale $\varphi(n, m)$ curve algebriche irreducibili birazionalmente distinte, rappresentabili sopra una stessa retta n-pla con

$$m = 2n + 2p - 2$$

punti di diramazione semplici.

Per

$$n = 2 \quad \text{si ha} \quad \varphi(n, m) = 1;$$

per

$$n = 3, \quad » \quad \varphi(n, m) = \frac{1}{3!}(3^{m-1} - 3);$$

per

$$n = 4, \quad » \quad \varphi(n, m) = \frac{1}{4!}(2^{m-2} - 4)(3^{m-1} - 3).$$

E via dicendo.

Notizia storica.

Il teorema di esistenza, per cui ad ogni superficie connessa ad n fogli (riemanniana) R corrisponde una classe di funzioni algebriche, viene posto — in una forma alquanto diversa — come fondamento della teoria edificata da RIEMANN (1851-1857); la quale offre una trattazione qualitativa delle funzioni trascendenti che si ottengono per integrazione delle funzioni algebriche (*integrali abeliani*).

Riemann le definisce mediante il loro comportamento

[1] Math. Annalen, Bd. 39 (1891).

sulla superficie R, sopra cui sono polidrome, aumentando di una costante per ogni ciclo non nullo, e — del resto — finite e continue, salvo tutt'al più un numero finito di poli e di singolarità logaritmiche. Ora, per costruire effettivamente tali funzioni sopra una data R, di genere p, (e più precisamente quelle di *seconda specie* dotate soltanto di singolarità polari) si è condotti anzitutto a trasformare R in una superficie semplicemente connessa, R', mediante un sistema di $2p$ *retrosezioni* (cfr. 37); dopo ciò occorre costruire la parte reale y_1, della funzione richiesta

$$y(x) = y_1(x_1 x_2) + i y_2(x_1 x_2) \qquad (x = x_1 + i x_2),$$

che è una funzione armonica delle due variabili x_1 e x_2. Sulla base del così detto *principio di Dirichlet* (postulando l'esistenza di massimi e minimi, suggerita da considerazioni fisiche), Riemann ammette che esista una funzione armonica la quale possegga in R' dati poli, ed assuma sul contorno valori arbitrariamente assegnati, soddisfacenti a condizioni di continuità e tali che in due punti associati del contorno (cioè provenienti dagli orli opposti di un medesimo taglio di R) differiscano per una certa costante (o modulo di periodicità) pure assegnato ad arbitrio. In tal guisa Riemann dimostra l'esistenza di un sistema di funzioni di seconda specie annesse ad una superficie R, le quali — per combinazione lineare — conducono pure a funzioni monodrome dotate soltanto di poli, e riescono quindi razionali sopra R, cioè algebriche (ad n rami) rispetto ad x.

A questa dimostrazione di Riemann si è fatta un'obbiezione critica concernente il principio di Dirichlet, ma i metodi di Newmann e di Schwarz permettono di sostituire il postulato del massimo o del minimo con considerazioni che offrono infine una giustificazione rigorosa del resultato.

Dal teorema di esistenza (trascendentemente stabilito come si è detto) Riemann deduce la soluzione del problema algebrico di contare i moduli indipendenti per le classi di funzioni (o curve) di genere p: il suo procedimento [1] è sostanzialmente riprodotto nella seconda dimostrazione che noi

[1] « Theorie der Abel'schen Functionen », § 12. Cfr. Oeuvres math. di Riemann, trad. Laugel. Parigi, Gauthier-Villars, 1898, pag. 131.

abbiamo offerto di questo computo, dove invero si adopra la conoscenza del numero delle funzioni algebriche di un corpo con dati poli (dimensione di una g_n^r completa); questo numero veniva calcolato da Riemann nella forma $r = n - p$, senza discussione approfondita del caso delle serie speciali (ROCH, 1864). Infine si noti che Riemann confermò anche il numero dei moduli $3p - 3$ $(p > 1)$ mediante la considerazione delle curve normali, che egli assegna in corrispondenza alle g_n^1 (speciali) d'ordine minimo.

Il computo dei moduli per le curve di genere p, può essere tentato con procedimento algebrico-geometrico (cioè senza ricorrere a funzioni trascendenti) riferendosi a curve-modello della classe, proiettivamente determinate, p. es. a curve piane d'ordine basso (cioè ad equazioni $f(xy) = 0$ di cui si riduca il grado complessivo anzichè il grado separato come accade in Riemann). Un tentativo di tale natura ha condotto CAYLEY nel 1865 (1) ad opinare che il numero dei moduli, per $p \geq 1$, valga sempre $4p - 6$: ma il numero di Riemann, $3p - 3$, è stato confermato con l'analisi speciale del caso $p = 4$ da BRILL (1869) (2). Poco dopo il CASORATI (3) comunicava intorno al problema una semplice osservazione, cioè che una curva di genere p si può sempre ridurre ad una curva piana d'ordine $p + 1$ con $\frac{p(p-3)}{2}$ punti doppi, la quale possiede $4p - 6$ invarianti assoluti, ma che la trasformazione di una curva d'ordine n e genere p in cotesto modello dipende dalla scelta di $p - 3$ punti presi come base di una rete di curve aggiunte d'ordine $n - 3$; Casorati ne deduce che il numero dei moduli non potrà superare $3p - 3$ salvo il caso che una g_{p+1}^2 speciale nasca sempre come residua di infiniti gruppi diversi di $p - 3$ punti. Abbiamo tradotto così le parole di Casorati, per mettere in luce che il dubbio da lui incontrato era già implicitamente risolto dal teorema di RIEMANN-ROCH; ed è singolare che non se ne sia accorto nè lo stesso Casorati, nè il CREMONA, che alle osservazioni del collega ne aggiunse altre, per provare in modo geometrico diretto che le curve di genere $p = 4, 5, 6$ dipendono da $3p - 3 = 9, 12, 15$ moduli.

(1) Proceedings of the London Math. Society, III (16 ott. 1865).

(2) Math. Annalen, Bd. 1.

(3) Cfr. CASORATI e CREMONA: *Rend. Istituto Lombardo*, serie II vol. 2 (1869).

Sul teorema di Riemann-Roch si fondano invece BRILL e NÖTHER nella loro fondamentale memoria del 1873 (1), dove si considerano le curve piane d'ordine minimo cui può ridursi in generale una curva di genere p (cfr. § 14), e così, dal computo di queste curve proiettivamente distinte, si deduce il numero $3p-3$ dei moduli ($p>1$).

Questa dimostrazione può riguardarsi veramente come una dimostrazione geometrica di esistenza, capace di sostituire — in tale ordine di questioni — il teorema di Riemann? Il SEGRE stima di no, e nel n. 89 della sua « Introduzione.... » (2), esprime l'avviso che i computi di costanti istituiti in vari modi da Brill e Nöther, non possano tenersi come completamente soddisfacenti se non presupponendo il teorema di Riemann o qualcosa di equivalente. Cerchiamo di approfondire la critica.

Quando si ammette che le curve piane d'ordine n con d $\left(<\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$ punti doppi dipendano da $\frac{n(n+3)}{2}-d$ parametri, si fanno implicitamente due supposizioni:

1) che le condizioni algebriche imposte dai punti doppi siano compatibili, potendo venire soddisfatte da curve che non posseggano parti multiple, ed anzi addirittura da curve irriducibili;

2) che le condizioni anzidette siano indipendenti.

Ora, quanto alla prima supposizione (che è anche la supposizione essenziale affinchè il numero dei moduli risulti $\geq 3p-3$), essa viene giustificata da semplici *esempi* di curve irreducibili d'ordine n con d punti doppi. Tuttavia l'esempio più facile che si penserebbe di ricavare dalle curve iperellittiche, conduce a curve d'ordine minimo doppie. Per tale motivo conviene modificare la via seguita da Brill e Nöther, prendendo come curve normali, non più curve (piane) d'ordine minimo, bensì curve non speciali, il cui ordine sia abbastanza alto rispetto al genere: ciò appunto ha fatto ENRIQUES nella sua Nota dell'Accademia di Torino del 14 gennaio 1912.

In questa stessa Nota Enriques ha accennato pure come si superi la seconda difficoltà qui sopra indicata, mercè la considerazione della serie segata sopra una curva d'ordine n con d punti doppi, dalle curve, con gli stessi caratteri, infinitamente vicine.

(1) Math. Annalen, Bd 7.

(2) Annali di Matematica, 1894.

E quindi, invertendo la posizione classica della teoria, ha messo in rilievo come il calcolo dei moduli contenga il teorema d'esistenza di Riemann, almeno nella sua forma più semplice. Il complemento ch'egli si proponeva di darne, stabilendo che si passa con continuità da un sistema di sostituzioni relative ai punti di diramazione ad un altro qualsiasi, non fu pubblicato che nella Nota dell'Accademia di Bologna del 17 aprile 1921, scritta per render conto e prender data della redazione di questo Capitolo, e dove si avverte che il detto passaggio è contenuto nel teorema di Lüroth-Clebsch; ma all'autore era sfuggita la circostanza che, precisamente ricorrendo a questo teorema, la cosa era stata indicata dal Severi in una Nota dell' Accademia dei Lincei del 1915 (pag. 877 e 1011).

D' altra parte, poco dopo la pubblicazione della Nota anzidetta, comparivano al pubblico le « Vorlesungen über algebraische Geometrie » dove lo stesso Severi tratta, in diverse aggiunte, le questioni che formano oggetto della nostra esposizione [1], alla quale tuttavia non ci è parso di dover recare mutamento.

Fra i teoremi che qui s' incontrano, merita particolare rilievo quello che « tutte le curve irreducibili di dato ordine e di genere p, formano un unico sistema continuo », che vale a giustificare la supposizione (accolta in generale senza chiarimento) che la classificazione delle curve algebriche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali dipenda da

[1] In particolare nel n. 8 dell' « Anhang G. », l'A. ne deduce il computo rigoroso delle g_n^r speciali appartenenti alle curve di genere p. In una Nota del Circolo Matematico di Palermo (4 nov. 1921), l'A. è ritornato sul teorema d' esistenza, dimostrandolo con la stessa costruzione delle curve d' ordine $n+h$ con un punto h-*plo*, che è qui sopra spiegata a pag. 362 e che già era accennata nella Nota riassuntiva di Enriques del 17 aprile 1921. Ma ad eliminare il dubbio critico della riducibilità proiettiva delle curve così costruite (che da parte nostra avevamo già esaminato nella redazione di queste Lezioni) egli è ricorso ad un altro concetto, deducendo l' arbitrarietà delle m tangenti dalla considerazione della serie segata sulla C_1 dalle C infinitamente vicine.

Ora l' aver nella nostra dimostrazione fatto a meno di ogni concetto di Geometria sopra la curva, acquista una particolare importanza in ordine alla Nota che costituisce il § 34 *bis*, che viene qui aggiunto all'antica redazione. Tuttavia convien dire che nel lavoro del Severi trovansi altre nuove deduzioni interessanti, per es. intorno alle curve che contengono date serie di ordine minimo.

un solo carattere numerico « il genere » e da parametri variabili in modo continuo « i moduli ». Anche questo teorema è dato nella citata Nota d'Enriques; e nel seguente paragrafo ne riproduciamo la dimostrazione, secondo il concetto originale, nella forma più precisa: ricavandone poi nuove deduzioni.

Ritorniamo ai moduli, per porre un' importante questione che vi si riferisce.

Dopo avere valutato il numero dei parametri indipendenti (o moduli) da cui dipendono le curve birazionalmente distinte di un dato genere p, in qual modo definiremo i moduli atti a caratterizzare una di queste classi?

È chiaro che si possono riguardare come moduli tutti i parametri dipendenti soltanto dai coefficienti dell'equazione $f(xy)=0$ che, essendo formati mediante un procedimento algebrico rigorosamente definito, non cambiano di valore quando si deducono, col medesimo procedimento, dai coefficienti di una trasformata, o che, nel caso in cui fossero funzioni irrazionali dei coefficienti, non possono trasformarsi che in un numero finito di valori differenti dai primi (cioè in qualcuno dei valori ad essi associati).

Così, per es., per $p=2$ si possono assumere come moduli di una curva i birapporti a cui danno luogo i sei punti della g_2^1 canonica o i punti di diramazione della retta doppia corrispondente. Se si fissano tre di questi punti, gli altri tre formano tre birapporti indipendenti capaci di definire *razionalmente* la curva f: per contro i nostri moduli dipendono *irrazionalmente* dai coefficienti di f. Il problema di introdurre moduli razionali, si riconduce qui alla ricerca di tre invarianti assoluti razionali di una sestina di punti sopra la retta, che riprendano gli stessi valori in corrispondenza ai diversi birapporti nascenti dai diversi ordini della sestina.

Per $p=3$ si possono dare come moduli (o invarianti assoluti) della quartica piana canonica, i birapporti delle nove tangenti della curva condotte dal tangenziale di un flesso. Fra questi birapporti si trovano 6 moduli indipendenti (funzioni irrazionali dei coefficienti della curva), i quali però non determinano razionalmente la curva stessa, corrispondendo a un numero finito di quartiche diverse, che vengono rappresentate sopra una retta tripla coi medesimi punti di diramazione.

Ma, procedendo in altra guisa, si riesce pure a introdurre

6 moduli della quartica (funzioni irrazionali dei suoi coefficienti) capaci di definire razionalmente *una* quartica. A tale scopo si consideri lo spazio S_{14} che ha per elementi le quartiche piane, e dentro di questo la serie ∞^6 delle varietà V_8 rappresentanti quartiche proiettive: segando questa serie con un S_6 si ottiene in questo una involuzione di gruppi di punti, ogni punto della quale porge — con le sue coordinate nello S_6 — una sestina di moduli capaci di definire proiettivamente una quartica.

Ora, passando alle curve di genere $p = 4, 5, ...$ si può cercare di estendere l'uno e l'altro modo di definizione dei moduli usato innanzi. Anzitutto, riferendosi ad una curva di genere p comunque grande, si ha che un punto *p-plo* della serie canonica (uno dei cosidetti punti di Weierstrass) definisce una g_p^1 che conduce ad una retta *p-pla* con $3p$ punti di diramazione (uno di questi, multiplo d'ordine $p-1$, corrispondente al punto *p-plo*): i detti $3p$ punti porgono $3p-3$ birapporti indipendenti, che sono funzioni irrazionali della curva e che a loro volta definiscono (irrazionalmente) un numero finito di curve birazionalmente distinte. Sono questi i moduli introdotti da Brill e Nöther (e anche da Weierstrass).

Invece la definizione di un sistema di moduli, sian pure irrazionali, ma capaci di determinare razionalmente *una* curva, si riesce a dare estendendo il metodo spiegato per $p = 3$, solo nei primi casi, p. es. per $p = 4, 5$, dove è facile stabilire che le corrispondenti curve canoniche possono rappresentarsi biunivocamente coi punti di uno spazio lineare. Per p qualunque resta dubbio se ciò sia possibile, e pertanto: *nello stato attuale delle nostre conoscenze, la definizione di una classe di curve algebriche di genere p può essere data soltanto assegnando un sistema di $3p-2$ moduli legati fra loro da una relazione algebrica.* Qui si mostrerebbe facilmente che moduli di tale natura possono sempre essere presi sotto forma di funzioni razionali dei coefficienti, diguisachè l'identità birazionale di due curve venga espressa semplicemente con l'uguagliare i rispettivi $3p-2$ moduli (legati dall'accennata equazione).

34. Nota sulla irriducibilità della famiglia delle curve di genere p e sul teorema di Lüroth-Clebsch. — Sulla base della riduzione delle riemanniane a fogli al tipo di Lüroth-Clebsch, abbiamo dimostrato il teorema che « tutte le curve piane irriducibili di ordine n con $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ punti doppi, per $n > p + 1$ formano un unico sistema continuo », potendosi sempre passare da una curva di genere p ad un'altra con variazione continua dei moduli. Ora di questo teorema si può fornire una dimostrazione algebrico-geometrica diretta, che trovasi accennata nella Nota di Enriques (1912) sopra citata, e che qui vogliamo sviluppare; mostreremo poi come, dalla irriducibilità della famiglia delle curve di genere p, si tragga a sua volta una nuova dimostrazione del teorema di Lüroth-Clebsch che riescirà così illuminato da un nuovo punto di vista e liberato dalle minuzie del ragionamento topologico, occorrenti nel § 3.

Anzitutto l'irriducibilità del sistema continuo delle curve piane di ordine n e di genere p appare manifesta per i primi valori del genere: $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$; per es. per $p = 1$, basta osservare che: 1° le cubiche piane, sulle quali possono rappresentarsi tutte le curve ellittiche, formano un sistema continuo; 2° le g_n^2 sopra una cubica formano un sistema continuo.

Ora la dimostrazione del nostro teorema procederà per induzione completa da p a $p+1$.

Si considerino le curve piane irreducibili (non speciali) d'ordine n e genere p $(n > p + 1)$ con $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ punti doppi, e pongasi che, per un certo valore di p, queste curve formino un unico sistema continuo (irreducibile) Σ_d; partendo da questa ipotesi dimostreremo che anche il sistema Σ_{d-1} di tutte le curve irreducibili d'ordine n e di genere $p+1$, con $d-1$ punti doppi, è irreducibile.

La dimostrazione si basa sulle quattro osservazioni seguenti, che giustifichiamo rigorosamente in appresso.

1) Il sistema Σ_{d-1} costituisce una varietà (che vogliamo dimostrare irriducibile) a $N - d + 1$ dimensioni, nello spazio S_N rappresentativo del sistema di tutte le curve piane d'ordine n.

2) La varietà rappresentativa del sistema Σ_d, che per ipotesi è irriducibile, a $N - d$ dimensioni, è contenuta in Σ_{d-1} ed eventualmente in ciascuna delle sue parti.

3) La Σ_d è una varietà multipla secondo d per la Σ_{d-1}, ed in ogni punto generico di Σ_d (immagine di una curva piana C con d punti doppi distinti), vi sono d falde lineari di Σ_d.

Precisamente due falde α e β di Σ_{d-1}, relative a un punto generico di Σ_d, corrispondono a due gruppi di $d-1$ punti doppi della curva immagine $\overline{C}$, ottenuti scartando due punti doppi di questa: A e B.

4) Le due falde α e β appartengono a una medesima varietà irriducibile, potendosi scambiare l'una con l'altra per una variazione continua di C, entro Σ_d, che permuti A con B.

In virtù dell'osservazione 2), due punti qualunque C_1 e C_2 di Σ_{d-1} possono portarsi, con variazione continua, nell'intorno di uno stesso punto $\overline{C}$ di Σ_d, e quindi — in forza della 4) — si può passare con continuità da C_1 a C_2. Ciò significa l'irriducibilità di Σ_{d-1} che dovevasi dimostrare.

1) Poichè l'osservazione 1) esprime soltanto un fatto già stabilito nel paragrafo precedente (pag. 358) restano da dimostrare le proposizioni 2), 3) e 4).

2) Se alle curve C di Σ_{d-1} s'impone la condizione di contenere un ulteriore punto doppio, si otterranno entro Σ_{d-1} uno o più sistemi ∞^{N-d} di curve con d punti doppi, riducibili o irriducibili; fra questi sistemi, per ipotesi, ve ne è uno solo, Σ_d, costituito di curve irriducibili. Nell'ipotesi che Σ_{d-1} si spezzi: $\Sigma_{d-1} = \Sigma'_{d-1} + \Sigma''_{d-1} + \ldots$, proveremo che ciascuno dei sistemi componenti, per es. Σ'_{d-1}, contiene Σ_d, facendo vedere che si può trovare entro Σ'_{d-1} una curva $\overline{C}$ irriducibile con d punti doppi; infatti è chiaro che il sistema ∞^{N-d} delle curve con d punti doppi cui appartiene $\overline{C}$ non potrà esser costituito da curve spezzate.

Ora per provare l'esistenza della detta $\overline{C}$ entro Σ'_{d-1} si potrà costruirla, per es., nel seguente modo:

α) S'imponga anzitutto ad una C di avere un contatto *n-punto*, A, con una retta a: è certo che esistono in Σ'_{d-1} curve C soddisfacenti a questa condizione, quali si ottengono (in una serie di curve birazionalmente identiche) a partire da una g_n^2 con un punto *n-plo*. Le curve C anzidette si manterranno sempre irriducibili, fino a che non accada che venga a coincidere con a qualcuna delle tangenti semplici condotte da un punto generico, O, di a; ciò risulta evidente dalla rappresentazione di codeste curve sopra una retta *n-pla* per proiezione da O, imperocchè alla a risponde un punto in cui vengono connessi gli n fogli delle riemanniane (permutati circolarmente per un giro intorno ad esso).

β) In secondo luogo si imponga alla nostra C di possedere un nuovo punto doppio fuori di a: ciò importa di far coincidere, in una retta per O diversa da a, due tangenti semplici condotte a C da O (due punti doppi della g_n^1), ed è sempre possibile poichè le nostre costanti permettono di disporre liberamente dei birapporti formati dalle tangenti per O (primo teorema di esistenza dedotto dal computo dei moduli per via algebrica). Per precisare la costruzione occorre che non solo si avvicinino fra loro le due tangenti anzidette, ma che anche i loro punti di contatto si avvicinino movendosi sopra una linea che non tocchi la tangente limite; altrimenti la C acquisterebbe una tangente doppia o un flesso, in luogo di un punto doppio. Ora l'analisi del modo di soddisfare alla nominata condizione offre qualche difficoltà; si può evitarla imponendo alla C condizioni ulteriori che importano l'avvicinamento di 3, o di 4... o al massimo di n tangenti semplici per O, dove si osservi che il numero delle tangenti (diverse da a) di cui si dispone è certamente superiore ad n, essendo il genere $p > 0$. A chiarimento di ciò basti rilevare che quando una tangente semplice si avvicina a una tangente di flesso nasce un punto doppio, o un contatto quadripunto, ovvero una bitangente di cui uno dei contatti è tripunto.

In conclusione abbiamo imparato a costruire entro Σ'_{d-1} una curva irriducibile (¹) C con un punto doppio di più; dal

(¹) L'irriducibilità della $\overline{C}$ è stata da noi dedotta mercè la considerazione della riemanniana ad n fogli relativa alla funzione algebrica $y(x)$ che corrisponde alla curva: trattandosi di una curva *d'ordine* n, l'irriducibilità della funzione porta anche quella del modello proiettivo costruito a partire da una g_n^2 contenente la data g_n^1, purchè nella serie delle curve proiettivamente identiche che porgono le immagini della g_n^2 si eviti il caso delle rette *n-ple* per cui il riferimento proiettivo della g_n^2 al piano rigato riesce degenere: il valore di questa osservazione sta in ciò che, se l'ordine della nostra curva anzichè n fosse $n+h > n$, si potrebbero staccare fino ad h rette per O. Tuttavia l'irriducibilità della $\overline{C}$ dedotta dal contatto *n-punto* che essa ha in A con a — diciamo l'*irriducibilità in grande* dedotta dalla irriducibilità *in piccolo* che la curva presenta nell'intorno di A — può dare origine a qualche dubbio per parte di chi consideri le singolarità che possono nascere in A come caso particolare di quel contatto: per es. un nodo con un ramo tangente ad a, appare come caso particolare di un contatto tripunto etc. Ma qui bisogna considerare soltanto quei casi particolari che possono nascere per l'avvicinamento ad A di qualcuno dei punti doppi della C, senza che nessuna delle tangenti semplici condotte per O si accosti ad a. Allora si riconosce che in A può nascere in tal guisa soltanto una cuspide con tangente a: cioè per $n=3$ una cuspide ordinaria; per $n=4$ una cuspide di seconda specie ovvero che emerge, come abbiam detto, che Σ'_{d-1} contiene tutto il sistema Σ_d.

3) Consideriamo nello S_N la varietà Σ_1 che rappresenta il sistema di tutte le curve piane, C, d'ordine n, dotate di un punto doppio. Ricordando che il fascio determinato da una C con un' altra curva del sistema ad essa infinitamente vicina possiede come punto base il punto doppio di C (cfr. L. 2°, § 5, vol. I, pag. 182) si vede che l'iperpiano tangente a Σ_1 in un suo punto (immagine di) C, rappresenta il sistema lineare delle curve piane d'ordine n che passano per il punto doppio della curva C. Ciò posto si noti che la varietà Σ_d, considerata nell'intorno di un punto generico $\overline{C}$ (immagine di una curva $\overline{C}$ con d punti doppi distinti), si può ritenere come intersezione di d falde lineari di Σ_1: i d iperpiani $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_d$, tangenti a queste falde, rappresentano i d sistemi lineari di curve piane che hanno come punti base i punti doppi della $\overline{C}$, e però sono indipendenti, intersecandosi secondo un S_{N-d} tangente alla Σ_d.

Ora appare che la $\overline{C}$, e con essa il suo intorno sulla Σ_d, appartiene a d falde lineari della varietà Σ_{d-1} (che — nell' intorno di $\overline{C}$ — è così riducibile), le quali hanno come S_{N-d+1} tangenti gli spazi che si ottengono intersecando i nominati iperpiani $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_d$, presi a $d-1$, $d-1$: la circostanza che questi iperpiani siano fra loro indipendenti, porta che i detti S_{N-d+1} siano determinati e distinti fra loro, ciò che significa che la Σ_{d-1}, nell' intorno di $\overline{C}$, consta effettivamente di d falde lineari non toccantisi fra loro. Di qui risulta che la Σ_d è effettivamente multipla secondo d per la Σ_{d-1}, e che due falde (lineari) α e β di Σ_{d-1} per un punto $\overline{C}$ di Σ_d si distinguono in rapporto a due punti doppi A e B della curva $\overline{C}$.

4) Ora è facile vedere che — per una variazione continua della curva piana $\overline{C}$ entro il sistema Σ_d — si può ritornare alla $\overline{C}$ stessa scambiando fra loro i due punti doppi

un ramo cuspidale del terz' ordine, etc. Quest' affermazione, che si può giustificare con lo studio del comportamento delle polari, risulterà chiarita a chi consideri l'eventualità a cui può dar luogo la costruzione di una g_n^2 che debba contenere una g_n^1 assegnata, con punto n-plo A, sopra una curva definita a meno di trasformazioni birazionali: se A deve appartenere ad una coppia o a un gruppo neutro per la g_n^2, questo gruppo non può essere costituito che da punti infinitamente vicini ad A.

A e B. A tal uopo basta far variare $\overline{C}$ entro il sistema delle curve che si ottengono per proiezione di una medesima curva normale K dello spazio S_{n-p} (supposto n abbastanza alto). Ora basta osservare che le corde di K formano una varietà irriducibile, diguisachè due corde a e b possono sempre essere scambiate l' una con l' altra mediante un certo movimento di esse: pertanto sarà lecito considerare uno spazio S_{n-p-3} incidente ad a e b, che ritorni in se stesso quando le a e b vengono scambiate; allora la proiezione piana di K fatta dal detto spazio, darà luogo precisamente ad una variazione continua della $\overline{C}$, che vale a scambiare i due punti doppi A e B corrispondenti alle corde a e b.

Il nostro teorema è così pienamente dimostrato. Il ragionamento svolto ci dà però qualche cosa di più, permettendoci di enunciare che: *tutte le curve piane di un dato genere p e di un dato ordine $m = n + h$, con un punto fisso O multiplo secondo h, formano sempre un sistema continuo irriducibile.*

Anche qui la dimostrazione procede induttivamente da p a $p+1$, essendo evidente la verità del teorema per $p < n$, poichè allora le g_n^1 appartenenti ad ogni curva di genere p formano una serie continua; infatti dalla scelta di una g_n^1 dipende la trasformazione della curva, che conduce a una immagine proiettiva d' ordine $n+h$ con O h-*plo*.

Supposto dunque che le C_{n+h} irriducibili, d' ordine $n+h$ con O h-*plo* e d punti doppi variabili, formino un unico sistema continuo Σ_d, costituente una varietà a $k-d$ dimensioni entro lo spazio S_k, rappresentativo del sistema lineare di tutte le curve d' ordine $n+h$ con O h-*plo*, si dimostrerà che il sistema Σ_{d-1}, costituito dalle C_{n+h} con O h-*plo* e $d-1$ punti doppi variabili, contiene Σ_d, ed anzi che Σ_d si trova in ciascuna delle parti che eventualmente costituiscono Σ_{d-1}. Dopociò si riconosce come innanzi che la varietà Σ_d è d-*pla* per la Σ_{d-1}, e che nell' intorno di ogni punto (immagine di una) $\overline{C}_{n+h}$ si distinguono d falde lineari di Σ_{d-1} non tangenti fra loro, due delle quali, α e β, rispondono alla scelta di due punti doppi A e B di $\overline{C}_{n+h}$. Resta a far vedere che, con variazione continua della $\overline{C}_{n+h}$ entro Σ_d, si possono scambiare i due punti doppi A e B: è questo soltanto il punto che richiede una considerazione nuova in confronto al discorso precedente.

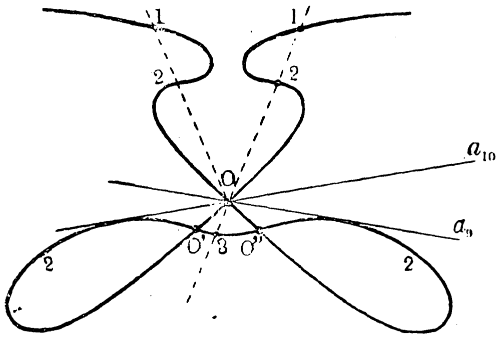
La C_{n+h} si potrà ritenere come proiezione di una curva K dello spazio S_r con $r = n+h-p$ dimensioni (r alto quanto si vuole), proiezione fatta da uno spazio S_{r-3} giacente in un S_{r-2} che si appoggia in h punti a K. Allora si tratta di vedere che due corde $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ di K incidenti al detto S_{r-3} si possono scambiare con movimento continuo durante il quale si mantengano sempre incidenti al detto spazio. A questa richiesta si può certo soddisfare se è irriducibile la varietà delle coppie di punti appartenenti ai gruppi G_n della g_n^1, che gl' iperpiani per il nostro S_{r-2} segano sempre sopra K. Ora questa irriducibilità si può ammettere, ogni qual volta si tratti di una curva C_{n+h} generica del sistema Σ_d, per modo che il gruppo di monodromia relativo alla g_n^1 segata dal fascio O sia il gruppo totale; ciò che sicuramente si verifica ove le tangenti altrove condotte da O alla $\overline{C}_{n+h}$ siano distinte, l' anzidetto gruppo di monodromia venendo allora generato da semplici trasposizioni ([1]).

Il resultato ottenuto importa che « una curva di genere p contenente una g_n^1, comunque speciale, si può ridurre per variazione continua — della curva con la relativa g_n^1 — ad un' altra curva particolare della stessa famiglia, sulla quale la g_n^1 può avere acquistato dei punti fissi »; in tal caso il modello proiettivo, cioè la C_{n+h} con O h-*plo*, si riduce — con l' assorbimento in O di alcuni dei punti doppi variabili — ad una curva passante per O con molteplicità superiore ad h. In particolare se h è abbastanza alto in confronto al genere p, esiste una curva C_{n+h} di questo genere che ha in O la molteplicità $n+h-2$, e quindi « ogni curva C_{n+h} con O h-*plo*, si può ridurre per variazione continua ad una curva iperellittica, dello stesso genere, con O $(n+h-2)$-*plo* ». ***Questa possibilità implica la riduzione di una qualsiasi riemanniana ad n fogli al tipo di Lüroth-Clebsch, della quale riduzione si ottiene da questo punto di vista una nuova dimostrazione.***

Per chiarezza riferiamoci dapprima al caso di una riemanniana a tre fogli, e — per fissare le idee — sia quella rappresentativa di una quintica C_5 con tre punti doppi O,

([1]) Cfr. BIANCHI « Lezioni sulla Teoria dei gruppi di sostituzioni... », cap. I, § 13. Qui tuttavia si dimostra che « se un gruppo transitivo contiene una trasposizione, esso è imprimitivo, ovvero coincide col gruppo totale »; e poichè un gruppo imprimitivo non può, chiaramente, essere generato da trasposizioni, segue il fatto che sopra utilizziamo.

O', O'': facciamo avvicinare O' e O'' ad O lungo i due rami distinti uscenti da O, per modo che il ramo $O'O''$ venga a passare per O, così come viene suggerito dall'annessa figura. Nel passaggio al limite due fra i 10 punti di diramazione del piano triplo, cioè i punti $A_9 A_{10}$ che rispondono alle tangenti a_9 e a_{10} della nostra figura, si confondono in un solo punto, perdendosi dopo ciò la connessione dei fogli 1 e 2 col foglio 3. Emerge così che la riemanniana a 3 fogli, vicina alla forma limite iperellittica, può essere definita mediante un sistema di 10 tagli successivi congiungenti un punto generico P del piano complesso coi 10 punti di diramazione $A_1 A_2 \ldots A_9 A_{10}$,



tali che lungo i primi 8 tagli $PA_1 \ldots PA_8$ vengano saldati i fogli 1-2, mentre lungo i tagli PA_9 e PA_{10}, che possono supporsi vicinissimi fra loro, si saldano i fogli 2 e 3. Questo è appunto il tipo di Lüroth-Clebsch per la riemanniana a 3 fogli.

La riduzione a questo tipo resta così dimostrata per una curva vicina alla curva limite iperellittica; ora quando la nostra curva subisca una variazione continua, anche i tagli che definiscono la corrispondente riemanniana si possono far variare in modo che non s'attraversino fra loro, sicchè lungo di essi si saldino sempre gli stessi fogli. Pertanto anche una qualsiasi riemanniana a 3 fogli di genere p, come quella vicina alla forma limite iperellittica, può sempre ridursi al tipo di Lüroth-Clebsch.

Ora non occorre spendere molte parole per spiegare come questa riduzione si estenda al caso di una riemanniana ad n fogli; infatti, quando ci troviamo vicini ad una forma limite iperellittica, la nostra riemanniana si può definire assumendo come tagli uscenti da un punto P del piano complesso: $2+2p$ tagli che vanno ai punti di diramazione $A_1 A_2 \dots A_{2p+2}$, lungo i quali si saldino i fogli 1 e 2, e $2n-4$ tagli distribuiti in $n-2$ coppie di tagli vicinissimi, che vanno ai punti $A_{2p+3} A_{2p+4}, \dots A_{2n+2p-3} A_{2n+2p-2}$, tali che lungo i tagli della prima coppia si saldino i fogli 2 e 3, lungo quelli della seconda i fogli 3 e 4 .... In definitiva per ogni riemanniana ad n fogli di genere p, si ottiene un tipo definito in rapporto a $2p+2$ sostituzioni $(1, 2)$, e a $n-2$ coppie di sostituzioni $(2, 3), (3, 4) \dots (n-1, n)$, come appunto enuncia il teorema di Lüroth-Clebsch.

Osservazione. Il confronto fra le due vie secondo le quali abbiamo dimostrato il teorema di Lüroth-Clebsch e l'irriducibilità della famiglia delle riemanniane ad n fogli di genere p, nei §§ 3 e 33 e in questo paragrafo, dà luogo ad alcune osservazioni.

Anzitutto la prima dimostrazione (topologica) del teorema di Lüroth-Clebsch, riuscendo indipendente dall'esistenza della funzione algebrica, è richiesta appunto per stabilire il teorema di esistenza nella forma più estesa a cui siamo pervenuti alla fine del precedente paragrafo, dove si afferma che esiste una funzione algebrica di cui si assegni non solo l'insieme dei punti di diramazione, ma anche le sostituzioni relative ad un certo sistema di tagli susseguentisi, con le condizioni che esse generino un gruppo transitivo e che il loro prodotto sia la identità.

In secondo luogo giova osservare che le dimostrazioni dei due teoremi, sostanzialmente identici, di cui qui si discorre — tipo canonico delle riemanniane e irriducibilità della famiglia — possono utilmente ottenersi con metodo misto, ove si proceda induttivamente, da p a $p+1$, nell'ipotesi che essi sussistano insieme per un certo valore di p.

34 *bis*. — Nota: una nuova visione della Geometria sopra la curva dedotta dal computo dei moduli.

Nel § 33 la considerazione del sistema continuo delle curve irriducibili C d'ordine n e genere p, per $n > 2p-2$, ci ha condotti al computo dei moduli, in base all'avvertenza che la serie $g^R_{3n+2p-2}$ segata sopra una C dalle C infinitamente vicine è non speciale, sicchè $R = 3n + p - 2$, e non maggiore.

Da questo computo poi abbiamo dedotto il *caso elemen-*

tare del teorema di esistenza (almeno per $n > p + 1$) per cui si può affermare che « gli $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione di una retta *n-pla* (rappresentante una curva irriducibile) si possono assumere ad arbitrio ».

Ora il caso elementare del teorema di esistenza ha ricevuto da noi anche un' altra dimostrazione, mercè la costruzione diretta di una C_{n+h} d' ordine $n+h$ e genere p irriducibile, passante per un punto *h-plo* (cfr. pag. 361). D' altra parte anche la verifica che il sistema continuo $\{C\}$ delle curve d' ordine n e genere p (per $n \geq p + 2$) ha la dimensione

$$3n + p - 1$$

e non maggiore (cioè $R = 3n + p - 2$) si può rendere indipendente da ogni conoscenza di geometria sopra la curva, poichè, introducendo l' irriducibilità del sistema $\{C\}$, si può vedere in altro modo che i

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punti doppi impongono alle curve d' ordine n condizioni indipendenti, come mostreremo fra poco.

Otteniamo così due vie per valutare il numero dei moduli pertinenti alle curve di genere p: dove però figura la dimensione della serie completa a cui appartiene una g_n^2 generica, sopra la curva; dal confronto segue ([1]) che questa dimensione è

$$r = n - p.$$

Da questo risultato si deduce, in tutta la sua generalità, il teorema di Riemann-Roch, con un procedimento ([2]) che crediamo presentare qualche interesse.

Pertanto questo metodo dà una completa visione della Geometria sopra una curva, che tuttavia sembrerebbe doversi limitare all' ipotesi di curve a moduli generali; ma si giustifica il passaggio al limite in rapporto a curve particolari, traducendo i risultati ottenuti nella forma proiettiva del teorema del resto. Spieghiamo più precisamente le cose accennate.

([1]) Cfr. Chisini « La Geometria sopra una curva dedotta dal computo dei moduli » (*Rend. Acc. dei Lincei*, 1923, II semestre).

([2]) Cfr. Chisini, l. c.

Per semplicità di discorso ci riferiamo a curve di genere $p > 1$, escludendo le curve che posseggono una serie continua ∞^{2} di trasformazioni birazionali in se stesse.

Nell'ignoranza dei teoremi caratteristici della geometria sopra la curva, che qui vogliamo riguadagnare, sappiamo soltanto che, per n abbastanza alto, e già per $n \geq p + 2$, un gruppo generico di n punti appartiene sempre ad una serie lineare completa

$$g_n^{n-p+i}$$

con $i \geq 0$ (cfr. § 7, pag. 47).

Quindi, lasciando per ora indeterminato il valore di i (e senza nemmeno escludere che esso vari con n), possiamo calcolare la dimensione del sistema delle curve di genere p birazionalmente identiche, procedendo come a pag. 357.

Infatti le g_n^2 (generiche) sopra una curva di genere p dipenderanno da

$$3(n - p + i) - 6 + (p - i)$$

parametri, e quindi — tenuto conto che una g_n^2 può riferirsi omograficamente in ∞^8 modi diversi al piano rigato — il sistema continuo delle curve $C_{n,\,p}$, d'ordine n e genere p, birazionalmente identiche, avrà la dimensione

$$3(n - p + i) - 6 + (p - i) + 8 = 3n - 2p + 2i + 2.$$

D'altronde la dimensione del sistema $\{C_{n,\,p}\}$ completo, che si ottiene imponendo $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ punti doppi alle curve d'ordine n, vale

$$R = 3n + p - 1 + \omega,$$

con $\omega > 0$ se le condizioni imposte dai punti doppi non fossero indipendenti.

Ma ora l'irriducibilità del sistema continuo delle curve il cui ordine superi il genere di almeno due unità ci porta ad affermare che $\omega = 0$: infatti se il sistema delle $C_{n,\,p}$ è sovrabbondante, risulterà *a fortiori* sovrabbondante anche il sistema delle $C_{n,\,p-1}$ con $d + 1$ punti doppi che è contenuto in esso, e quindi anche quello delle $C_{n,\,p-2}$ ecc., fino al sistema delle $C_{n,\,0}$, cioè delle curve razionali, che non può essere sovrabbondante perchè altrimenti la dimensione della serie segata su una $C_{n,o}$ dalle curve infinitamente vicine superebbe l'ordine della serie stessa [1].

Per differenza si trova dunque che il numero dei moduli vale

$$M = 3p - 3 - 2i.$$

Ora facciamo intervenire il teorema di esistenza: nella nostra ipotesi, $n > p + 2$, esistono rette *n-ple* con

$$m = 2n + 2p - 2$$

punti di diramazione arbitrari, e siccome le g_n^1 sopra una di queste curve dipendono da

$$2n - p + i - 2$$

paramenti, tenuto conto che ogni g_n^1 corrisponde ad ∞^3 rette *n-ple* trasformate proiettive l'una dell'altra, si trova (cfr. pag. 363) che il numero dei moduli vale

$$M = 3p - 3 - i.$$

Uguagliando le due espressioni di M si ricava $i = 0$, cioè

Teorema. *Sopra una curva generica C, di genere p, un gruppo generico di $n \geq p + 2$ punti appartiene ad una serie completa g_n^r di dimensione $r = n - p$.*

Come corollario si può dire che « *un gruppo generico G_p di p punti dato sopra C* (quale si ottiene come residuo di $n - p$ punti rispetto a una g_n^{n-p}) *non può appartenere ad una g_p^1*.

È chiaro che questi risultati dicono che « sopra una curva generica C d'ordine n e genere p le curve aggiunte d'ordine $\geq n - 2$ formano un sistema lineare non sovrabbondante e segano una serie completa »; quindi (imponendo

(1) Anche in altri modi si può dimostrare che $\omega = 0$. Per es. ricorrendo al teorema di esistenza delle rette *n-ple*, dove si sciolga un punto doppio delle $C_{n,p}$, in due punti di diramazione relativi ad una $C_{n,p+1}$ ($n \geq p + 3$); ovvero anche osservando che il sistema $\{C_{n,p}\}$ contiene un sistema di curve iperellittiche con un punto $(n-2)$-*plo*, per le quali si verifica che i d punti doppi, sostituiti in parte dal punto $(n-2)$-*plo*, costituiscono d condizioni indipendenti, in rapporto al sistema di tutte le curve d'ordine n.

il passaggio per gruppi di punti allineati) risulterà anche completa la serie segata sopra la C dal sistema delle curve aggiunte di un ordine qualsiasi; ma conviene esplicitamente notare che la serie segata dalle φ_{n-3}, aggiunte d'ordine $n-3$, è una g^r_{2p-2} di dimensione $r \geq p-1$, nella quale dunque la differenza fra l'ordine e la dimensione è $< p$.

Per stabilire ulteriormente, in tutta la sua estensione, il Teorema di Riemann-Roch, conviene definire sulla C la serie canonica.

Questa si fa nascere naturalmente dalla considerazione della *varietà dei gruppi di p punti* (speciali) G_p che appartengono a una g^1_p. Da quanto abbiam detto risulta che l'appartenenza di un G_p di C ad una g^1_p, implica qualche condizione per il G_p; e d'altra parte si vede che questa condizione di specialità è soddisfatta almeno per i G_p che sono contenuti in un G_{2p-2} sezione con una φ_{n-3} aggiunta.

Preso sopra la C un gruppo *generico* G_{p-1} di $p-1$ punti, si considerino i punti che insieme al G_{p-1} costituiscono un G_p speciale; la determinazione di questi punti dipende da una condizione algebrica che ammetterà un certo numero, $s \geq p-1$, di soluzioni: $P_1\ P_2 \dots P_s$

Allora si prova che la serie completa cui appartiene il gruppo

$$G_{p-1} + P_1 + P_2 \dots + P_s$$

ha la dimensione s.

Infatti la dimensione di questa serie diminuisce successivamente di 1 quando si staccano i punti $P_1 P_2 \dots$, perchè nessuno di questi punti può riuscire fisso, altrimenti il nostro G_{p-1}, *che è generico*, apparterebbe ad una g^1_{p-1}.

Ma non può aversi $s \geq p$, perchè altrimenti un G_p generico sarebbe contenuto in questa serie ed apparterebbe ad una g^1_p.

Si conclude che $s = p-1$, e che la serie più ampia in cui sono contenuti parzialmente i G_p speciali è la g^{p-1}_{2p-2} segata dalle φ_{n-3}. (Per ora la deduzione si limita ai G_p generici per i quali si sa a priori che contengono un G_{p-1} non appartenente a una g^1_{p-1}).

Infine per avere il teorema di Riemann-Roch prendiamo le mosse dal caso di una g^1_n completa speciale per cui $n < p$: aggiungendo ad un G_n generico della g^1_n $p-n$ punti arbitrari presi come fissi, si avrà un G_p speciale contenuto nella g^{p-1}_{2p-2}

canonica; invero dentro questo G_p esiste un G_{p-1} non appartente ad una g^1_{p-1}, quale si ottiene scartando un punto del G_n che non sia fisso per la g^1_n.

Si conclude che i gruppi di una g^1_n completa con $n < p$, appartengono a ∞^{p-n} gruppi canonici.

Di qui si passa subito al caso di una g^r_n completa speciale, $r = n - p + i$, imponendo $r - 1$ punti fissi. Segue che ogni gruppo della serie speciale completa

$$g_n^{n-p+i}$$

appartiene ad ∞^{i-1} gruppi canonici.

In ciò che precede i teoremi caratteristici della geometria sopra una curva di genere p vengono stabiliti per curve C a moduli generali; ma di qui si può passare al caso di una $\overline{C}$ particolare; per la quale basta stabilire che le curve aggiunte di un certo ordine m segano una serie completa; poichè invero per m abbastanza alto il sistema di queste φ_m non potrà essere sovrabbondante, e quindi la dimensione della serie segata sarà proprio uguale all'ordine diminuito di p, e non maggiore.

Ora se la serie segata su $\overline{C}$ dalle serie aggiunte φ_m non è completa, la serie completa verrà segata dalle curve aggiunte $\varphi_{m'}$ di un certo ordine $m' > m$, passanti per un certo gruppo di punti $\overline{G}$; ma considerando una C variabile che ha per limite $\overline{C}$, la serie segata su questa dalle aggiunte φ_m potrà essere segata similmente dalle $\varphi_{m'}$ passanti per un gruppo G che ha per limite $\overline{G}$. Il teorema del resto nella sua forma proiettiva (che appunto vogliamo estendere da C a $\overline{C}$) dice che « ogni gruppo di punti sezione di C con una $\varphi_{m'}$ per G, appartiene ad una φ_m »: ebbene questa affermazione rimane vera nel passaggio al limite.

35. Il metodo di degenerazione e le questioni numerative sopra la curva. — Prendiamo le mosse dal teorema stabilito nel § 33 che, per n abbastanza alto in confronto al genere p (p. es. per $n \geq p + 2$), le curve piane irriducibili d'ordine n con $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ punti doppi formano un sistema continuo irriducibile Σ_p. Entro questo sistema sarà contenuto il sistema Σ_{p-1} delle curve d'ordine n con $d + 1$ punti doppi ([1]), e così di seguito: in fine Σ_p contiene entro di sè il sistema Σ_0 delle curve d'ordine n e genere 0 con $d+p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi. Una curva C_0 di quest'ultimo sistema si potrà considerare come limite di una C_p di Σ_p che viene ad acquistare p nuovi punti doppi. Vero è che la C_0 può essere riguardata come limite di una C_p variabile entro serie (differenzialmente) distinte; per es. una quartica con tre punti doppi $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, appare come limite di tre serie di quartiche con due punti doppi: A e B, B e C, C e A, tendenti rispettivamente ad $\bar{A}$ e $\bar{B}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$, $\bar{C}$ e $\bar{A}$; così, per una C_0 (con $d+p$ punti doppi distinti), *si potranno assumere come* **nuovi**, *p fra i suoi punti doppi*, scelti ad arbitrio, restando fissata entro Σ_p (e nell'intorno di C_0) una serie di C_p di cui la C_0 viene riguardata come limite: in tal caso parleremo anche della C_0 come di una *curva di genere p con p punti doppi accidentali*, ritenuti *virtualmente inesistenti.*

Ora il principio di continuità c'insegna a riguardare la C_0 con p (nuovi) punti doppi come immagine della C_p generale, ricercando in qual modo si rispecchino sul caso limite le proprietà della C_p, e reciprocamente se dalla considerazione di questo caso limite sia possibile risalire alle proposizioni generali della geometria sopra la curva.

Una prima applicazione che può farsi del principio di degenerazione delle curve di genere p, si riferisce alla *geometria numerativa*, e risale al De-Jonquières nella sua memoria del *Journal für Mathematik* del 1866 ([2]): nella quale egli ha determinato con questo metodo il numero dei gruppi di una g_n^r che posseggono più punti multipli d'ordine $i_1 i_2 \dots i_h$, con $i_1+i_2+\dots i_h=r+h$. Per semplicità ci limiteremo a dedurre questa formula per il caso in cui si tratti di determinare i gruppi di una g_n^r ($n \geq 2r$) con r punti doppi ($i_1=i_2=\dots i_h=2$).

Si designi con $f(n, r, p)$ il numero dei gruppi di una g_n^r appartenenti ad una C_p, che sono dotati di r punti doppi. Quando

([1]) Questa proposizione può essere dimostrata direttamente come si è visto nella Nota che costituisce il § 34, dove ne viene dedotta l'irriducibilità del sistema continuo Σ_p.

([2]) A questa applicazione si è accennato nel L. 3°, § 42, vol. 2, pag. 284, dove tuttavia occorre citare per il metodo la sopra indicata memoria del 1866, anzichè quella del 1861, di cui ivi si riportano i risultati.

la C_p acquista un punto doppio accidentale A, il detto numero si abbassa ad $f(n, r, p-1)$, venendo diminuito in corrispondenza ai gruppi della serie che contengono la coppia neutra rappresentata da A, e che hanno altrove $r-1$ punti doppi. Ciò appare evidente se si consideri la g_n^r segata su C_p da un sistema lineare di curve φ, che al limite non abbiano A come punto base: sulla C_p limite col punto doppio accidentale A, le φ passanti per A appariscono limiti di due curve analoghe toccanti una C_p generica in due punti (la curva che passa per un punto doppio assorbendo due curve tangenti in un fascio). Pertanto potremo scrivere l' equazione

$$1)\qquad f(n, r, p) = f(n, r, p-1) + 2f(n-2, r-1, p-1).$$

Questa relazione permetterà di calcolare $f(n, r, p)$ appena si conosca $f(n, r, 0)$, tenuto conto che

$$f(n, 1, p) = f(n, 1, p-1) + 2,$$

e quindi

$$f(n, 1, p) = 2p + f(n, 1, 0) = 2p + 2n - 2,$$

ciò che corrisponde ad assumere

$$f(n, 0, p) = 1.$$

Ora è facile calcolare $f(n, r, 0)$ mediante il principio di corrispondenza sopra la retta; infatti una g_n^r dà luogo ad una corrispondenza simmetrica, in cui ad ogni punto P corrispondono gli $(n-2r+1)f(n-1, r-1, 0)$ punti che si ottengono dai gruppi della $g_{n-1}^{r-1} = g_n^r - P$ dotati di $r-1$ punti doppi, quando si tolgano questi punti. Tenuto conto che ogni gruppo della g_n^r con r punti doppi risponde ad r coincidenze, si avrà

$$2)\qquad f(n, r, 0) = \frac{2(n-2r+1)}{r} f(n-1, r-1, 0);$$

dalla quale si deduce facilmente

$$f(n, r, 0) = 2^r \binom{n-r}{r}.$$

Dopo ciò, eseguendo le somme portate dal metodo, si arriva alla formula che dà *il numero dei gruppi dotati di r punti doppi per una g_n^r appartenente ad una curva di genere p*:

$$f(n, r, p) = 2^r \left[\binom{n-r}{r} + \binom{n-r-1}{r-1} p + \binom{n-r-2}{r-2}\binom{p}{2} + \ldots\right] \text{ (1)},$$

dove sono da ritenere come nulli i termini corrispondenti a numeri fattoriali del tipo $\binom{m}{-h}$ con $h > 0$.

Senza eseguire le somme accennate, la detta formula si dimostra, osservando che la f così definita soddisfa alle equazioni funzionali 1) e 2) e alla condizione iniziale $f(n, 0, p) = 1$.

Applichiamo la formula anzidetta al caso di una g_{2n}^n, riferendoci dapprima al caso di una serie non speciale in cui $2n > 2p$. Allora la nostra formula da

$$f(2n, n, p) = 2^n \left[1 + p + \binom{p}{2} + \ldots + \binom{p}{p}\right] = 2^n (1+1)^p = 2^{n+p}.$$

I gruppi G_n di n punti doppi per la g_{2n}^n, appartengono in generale, per $n > p$, a serie lineari complete di dimensione $n - p$, le quali raddoppiate danno la g_{2n}^{2n-p} completa cui appartiene la g_{2n}^n, cioè che sono, come diremo brevemente, le *serie metà* della g_{2n}^{2n-p}. Ma questa bisezione della nostra g_{2n}^{2n-p}, porta, non già a 2^{n+p} serie distinte, ma soltanto a 2^{2p} serie (almeno ge-

(1) Questa formula (contenuta come si è detto nel resultato generale di De Jonquières) viene ritrovata, con metodo lievemente modificato, dal Castelnuovo in una Nota presentata al *Circolo Matematico di Palermo* il 23 dicembre 1888, dove si richiama per $p = 0$ la dimostrazione di Weyr (*Sitzungsber.* Vienna, 1879).

La formula di De Jonquières ha ricevuto più tardi una dimostrazione indipendente dall'uso della degenerazione della C_p, sulla base del principio di corrispondenza sopra la curva (cfr. § 40) da R. Torelli (*Rendic. Circolo Mat. di Palermo*, 1906). Si può anche adoperare il metodo che consiste nell'aggiungere (o togliere) alla serie data dei punti, riducendosi poi — per continuità — a serie convenientemente spezzate (cfr. § 10). Con questo metodo si riesce induttivamente a stabilire la formula sopra riferita per le curve di genere p iperellittiche, che — in tale questione — possono sostituirsi alle C_p generali: qui ci si riduce a valutare il numero dei gruppi dotati di r punti doppi per la serie non lineare composta dei gruppi di una g_n^{r-1} e delle coppie della g_2^1. Questo sviluppo è stato dato dalla signorina Vittoria Notari nella sua tesi di laurea presentata all'Università di Bologna nel 1920 e pubblicata negli *Atti dell'Istituto Veneto*, t. LXXXII (1923).

neralmente) distinte, i 2^{n+p} G_n sopra nominati dividendosi in 2^{2p} gruppi di 2^{n-p} G_n equivalenti. Infatti se per una g_n^{n-p} metà della g_{2n}^{2n-p} si fissano ad arbitrio $n-p$ punti $A_1 A_2 \dots A_{n-p}$, si ottengono come residui i G_p che raddoppiati appartengono alla $g_{2p}^p = g_{2n}^{n-p} - 2(A_1 + A_2 \dots + A_{n-p})$.

Ora si pone la questione: le 2^{2p} serie fornite dalla bisezione di una g_{2n}^{2n-p} $(n > p)$ saranno sempre distinte, ovvero potranno in parte coincidere?

Riferendosi ad una g_{2p}^p, a cui siamo sempre ricondotti dal nostro metodo, si può sollevare il dubbio:

1) che, essendovi un numero finito di G_p provenienti dalla bisezione della serie, due di questi — in generale distinti — vengano a coincidere;

2) o che il problema della bisezione conduca ad infiniti G_p, la g_{2p}^p essendo il doppio di una g_p^1 speciale, e che allora questa g_p^1 assorba almeno 2 soluzioni del problema.

Il primo dubbio si rimuove osservando che qualora, per una particolare g_{2p}^p, due G_p venissero a coincidere in un medesimo $\bar{G}_p$, essi, contati due volte, definirebbero una g_{2p}^1, la quale — passando al limite — dovrebbe avere come fissi i punti del $\bar{G}_p$, sicchè questo G_p apparterrebbe ad una g_p^1 contro l'ipotesi: si adopera qui un'osservazione stabilita per le g_n^1 sopra la retta ([1]), che viene legittimamente applicata anche alle curve di genere $p > 0$, trattandosi di una proprietà differenziale.

Ora si consideri pure una g_{2p}^p che sia il doppio di una g_p^1: dimostriamo che anche per questa la bisezione fornisce 2^{2p} serie distinte (una delle quali ha la dimensione 1 anzichè zero). A tale scopo si aggiungano $r > p$ punti, $A_1 A_2 \dots A_r$, alla g_p^1; allora si ottiene certo una serie somma g_{r+p}^r non speciale, che raddoppiata dà la serie completa

$$\left| 2(A_1 + A_2 + \dots + A_r) + 2\, g_p^1 \right| = g_{2r+2p}^{2r+p};$$

e tante sono le serie-metà della g_{2p}^p quante sono le metà di questa g_{2r+2p}^{2r+p}. Ma, assumendo sulla curva, in luogo di $A_1 A_2 \dots A_r$, r punti generici $A_1' A_2' \dots A_r'$, si definisce un solo gruppo della g_{r+p}^r e quindi *un* G_p residuo, che non appartiene ad una g_p^1, sicchè la bisezione della g_{2r+2p}^{2r+p} viene ricondotta a quella di una g_{2p}^p, diversa dalla primitiva, che non

([1]) Cfr. L. 2°, § 5, vol. I, pag. 179.

è più il doppio di una g_p^1. Ciò vale a rimuovere il dubbio 2). E pertanto concluderemo che:

Il problema della bisezione di una serie lineare g_{2n}^{2n-p} con $n > p$, sopra una curva di genere p, conduce sempre a 2^{2p} serie distinte (1).

Un semplice esempio ci è offerto dalla ricerca delle coniche quadritangenti ad una quartica piana senza punti doppi ($p = 3$). Qui si tratta di bisecare la serie g_8^5 segata sulla curva dalle coniche del piano, e la nostra formula ci dà $2^6 = 64$; scartando però la soluzione che corrisponde alle rette contate due volte, si ottengono 63 serie di coniche quadritangenti, i cui punti di contatto descrivono altrettante g_4^1; risultato a cui già pervenimmo direttamente nel L. 2°, § 26.

Il caso in cui si tratti di cercare le coniche tritangenti (altrove) ad una quartica con punto doppio O, già soggette a passare per O, risponde alla bisezione della serie non speciale g_6^4 segata sulla curva dal sistema di tutte le coniche per O; e, poichè si ha qui $p = 2$, si trovano $2^4 = 16$ serie ∞^1 di coniche tritangenti, di cui la nostra quartica risulta essere l'inviluppo. Si noti che in questo caso, essendo $p = 2$, i nostri risultati sono applicabili anche alla g_4^2 segata sulla quartica dalle rette del piano, e però la bisezione di codesta serie conduce ancora a 16 coppie-metà, che sono le coppie dei punti di contatto delle 16 tangenti doppie. Ora si presenta una conferma dell'analisi svolta innanzi: anche la g_4^2 doppia della g_2^1 canonica dà luogo a 16 serie metà distinte, cioè alle 15 coppie (serie d'ordine 0) formate con punti doppi della g_2^1 e a questa g_2^1, che conta dunque per una serie-metà della g_4^2.

Il numero dei gruppi di una g_{2n}^n dotati di n punti doppi, non è più dato da 2^{n+p}, quando sia $n < p$; diciamo quando sia $n = p - 1$, perchè non esiste altra serie speciale g_{2n}^n che la serie canonica g_{2p-2}^{p-1} (cfr. § 12). Infatti si ha ora:

$$f(2p-2,\ p-1,\ p) =$$
$$= 2^{p-1}\left[\binom{p-1}{p-1} + \binom{p-2}{p-2}p + \binom{p-3}{p-3}\binom{p}{2} + \dots \binom{p-p}{p-p}\binom{p}{p-1}\right],$$

(1) Il problema enunciato è in sostanza il problema delle curve aggiunte pluritangenti ad una curva data, e sotto questa forma è stato risoluto da Clebsch, riconducendolo alla bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane. (Cfr. la memoria « Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie », *Journal für Math.*, t. 63).

giacchè il termine

$$\binom{p-p-1}{p-p-1}\binom{p}{p}$$

deve essere ritenuto come nullo, secondo ciò che è detto innanzi. Avremo adunque

$$f(2p-2\,,\,p-1\,,\,p)=2^{p-1}(2^p-p).$$

Questa formula dà il *numero dei gruppi canonici costituiti da $p-1$ punti doppi* [1]. Così per $p=3$ si ottengono le 28 tangenti doppie della quartica piana senza punti doppi; per $p=4$ si trova che la sestica gobba canonica possiede 120 piani tritangenti; etc.

Le considerazioni precedenti si estendono al caso in cui si vogliano determinare i gruppi di una $g_{in}^{(i-1)n}$ dotati di n punti *i-pli* ($i>2$), e così, in particolare, si è condotti a porre e sciogliere il problema della *divisione di una serie* (non speciale) g_{in}^{in-p} *per un numero intero i* (>2): si trova che le serie risolventi il problema sono in numero di i^{2p}. Ma non ci indugeremo ulteriormente su tale questione, che crediamo più opportuno rimandare al volume sugli integrali abeliani che completerà queste « Lezioni ».

Nello studio delle questioni numerative De-Jonquières ha già avuto luogo di considerare, accanto alla degenerazione delle curve di genere p che consiste nell'acquisto di punti doppi accidentali, anche lo spezzamento di esse in due o più componenti irriducibili: il caso più semplice di spezzamento si riconduce al primo tipo di degenerazione, quando ci si riferisca alle curve gobbe dello spazio a tre o più dimensioni. Precisamente ci proponiamo di stabilire che:

Una curva gobba, non speciale, d'ordine n e genere p, dello spazio S_r, con $r\leq n-p$ ($r\geq 3$), si può far degenerare nella somma di una curva d'ordine $n-1$ e di genere $p-1$ dello stesso spazio, e di una sua corda.

(1) Questo caso particolare del problema della bisezione, che risponde alla ricerca delle curve aggiunte d'ordine $n-3$, $p-1$ volte tangenti ad una curva piana d'ordine n, risulta pure dall'analisi di Clebsch nella sua citata memoria. Cfr. le Lezioni di Clebsch-Lindemann, t. 3°, cap. I-IX (trad. franc. pag. 229 e seg.).

Sia infatti $C_{n,p}$ la nostra curva gobba non speciale, di ordine n e di genere p, appartenente ad un S_r, e sia

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

l'equazione di una curva piana, trasformata birazionale della $C_{n,p}$, per es. di una sua proiezione; e si indichi in fine con

$$\lambda_0 \varphi_0(x_1 x_2 x_3) + \lambda_1 \varphi_1(x_1 x_2 x_3) + \dots + \lambda_r \varphi_r(x_1 x_2 x_3) = 0$$

un sistema di curve aggiunte seganti su f la g_n^r immagine della serie segata su $C_{n,p}$ dagli iperpiani. L'equazione della $C_{n,p}$ potrà scriversi allora nella forma

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = \varphi_0 \\ y_1 = \varphi_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_r = \varphi_r \\ f(x_1 x_2 x_3) = 0. \end{array}\right.$$

Le curve φ avranno su f un certo gruppo G di punti base, e poichè la g_n^r non è speciale questi punti imporranno alle φ condizioni indipendenti, sicchè uno di essi potrà farsi variare ad arbitrio su f.

Si faccia ora variare con continuità la f, fino ad acquistare un nuovo punto doppio A, e si porti in A, sopra uno dei due rami di f, un punto del G. Con ciò la g_n^r su f si riduce a una $g_{n-1}^r + A$, e in corrispondenza si stacca dalla $C_{n,p}$ una corda a, immagine dell'intorno di A, i due punti di appoggio di a corrispondendo ai due rami di f per A. Si ottiene dunque così una $C_{n-1,\,p-1} + a$, limite della $C_{n,p}$.

Il principio di degenerazione che abbiamo stabilito, assume particolare importanza ove si rilevi che l'applicazione reiterata di esso conduce al seguente resultato:

Una curva gobba d'ordine n e genere p, entro uno spazio S_r con $r \leq n - p$ dimensioni, si può far degenerare in una curva razionale di questo spazio S_r e in p corde di essa: la degenerazione di una $C_{n,p}$ normale dello S_{n-p} conduce ad una curva razionale normale aumentata sempre di p corde.

L'importanza di questo principio si è a noi manifestata fino dal L. 3° (§ 43), in quanto vedemmo che l'indicata degenerazione di una curva gobba conduce a risolvere in modo assai semplice il difficile problema numerativo delle trisecanti e delle quadrisecanti di essa, almeno quando i caratteri soddisfino ad una diseguaglianza che vediamo sussistere per le curve non speciali.

Ma il principio stesso ha rivelato tutto il suo valore nell'uso fattone da CASTELNUOVO (¹) per la risoluzione del più elevato problema numerativo fra quelli attinenti alla geometria sopra una curva: diciamo il problema di determinare il numero delle serie g_n^r speciali, di dimensione r e d'ordine minimo, appartenenti ad una curva di genere p, nel caso in cui, avendosi

$$n - r = (p - n + r)r,$$

questo numero risulta (generalmente) finito (cfr. § 14). Per l'interesse storico giova dire che Castelnuovo ha semplicemente postulato il principio di cui si vale, mentre più tardi KLEIN ha fatto vedere che esso trova la sua giustificazione nel teorema di esistenza, o piuttosto nella irriducibilità del sistema delle curve di genere p, a cui si riconduce infine anche la nostra dimostrazione (²).

Vogliamo dare un rapido cenno del modo come Castelnuovo giunse al suo resultato.

È anzitutto chiaro che, presa comunque sulla curva C_p una g_{n+p}^n completa e non speciale, questa contiene entro di sè tutte le serie d'ordine n, e quindi in particolare anche le g_n^r minime che qui si ricercano. Pertanto, riferendosi ad una curva immagine K_{n+p} dello S_n, le dette g_n^r verranno segate su questa da iperpiani passanti per spazi S_{n-r-1} p-secanti la curva. Si tratta dunque di determinare il numero di questi S_{n-r-1}. A tale scopo si fa degenerare la K_{n+p} in una K_n razionale normale e in p corde: dopo ciò il nostro problema si spezza in una serie di problemi, dove si domanda di ricercare gli S_{n-r-1} seganti in i punti la K_n ed incidenti a

(¹) Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 1889 (II, pag. 130).

(²) Cfr. KLEIN « Riemann'sche Flächen » II Vorlesung 1892. Seconda edizione, Lipsia, Teubner, 1906, pag. 122 e seg.

$p-i$ corde di essa. Ma si trova che per $i>0$ il problema non ha soluzioni, e quindi resta infine da ricercare il numero degli S_{n-r-1} incidenti a p rette dello S_n: questo numero è in generale finito giacchè gli S_{n-r-1} di S_n dipendono da $(n-r)(r+1)$ parametri, e si ha qui — per ipotesi —

$$(n-r)(r+1)=p.$$

A questo punto la ricerca rientra nell'ambito dei problemi a cui si riferisce il calcolo simbolico dello SCHUBERT (cfr. L. 3°, § 46), mercè cui viene trattata da Castelnuovo. In tal guisa egli dimostra che:

Il numero delle g_n^r minime, appartenenti ad una curva di genere p, supposto finito, è dato in generale da

$$\frac{1!\,2!\ldots.r'!\,1!\,2!\ldots.r!}{1!\,2!\ldots.(r+r'+1)!}\,p!,$$

dove si è designato con $r'=n-r-p-1$ la dimensione della serie $|g_{2p-2}^{p-1}-g_n^r|$ residua della g_n^r rispetto alla serie canonica ([1]). È naturale, e conferma la formula, la circostanza che r e r' figurino in essa simmetricamente.

Ad illustrazione del risultato richiamiamo gli esempi addotti nel § 14. Per $p=4$ si hanno in generale 2 g_3^1 segate sulla sestica canonica dalle due schiere di generatrici della quadrica contenente la curva. Ora, secondo il metodo di Castelnuovo, il numero delle g_3^1 sopra valutato si troverà ricercando le quadrisecanti di una curva C_7 d'ordine 7 e di genere 4 dello S_3. Facciamo degenerare la C_7 in una cubica gobba C_3 e in quattro corde di essa. Si verifica subito che non vi sono rette incidenti alla C_3 e a tre delle sue corde, poichè le rette incidenti a quest'ultime formano una rigata quadrica che non incontra la C_3 fuori dei sei punti di appoggio delle 3 corde direttrici. D'altronde è ovvio che non vi sono nemmeno corde della C_3 incidenti ad altre (due) corde, e quindi tutte le quadrisecanti della C_7 verranno date dalle rette incidenti alle quattro rette sghembe dello spazio: che notoriamente sono 2.

Passiamo alle curve di genere $p=6$. Abbiamo pure ac-

([1]) Per $r=1$ BRILL (1890) è riuscito a ritrovare il risultato mediante il principio di corrispondenza sopra le curve (*Math. Annalen*, Bd. 36); cfr. anche ZEUTHEN, *Math. Annalen*, Bd. 40.

cennato come esercizio che esistono, in questo caso, 5 g_4^1. Ora col nostro metodo abbiamo da ricercare i piani di S_4 che riescono incidenti ad una C_{10} dello S_4 composta di una quartica razionale normale C_4 e di 6 corde di essa. Ma anche qui si verifica tosto che non vi sono piani incidenti alla C_4 e a 5 delle sue corde, $a_1\ a_2 \dots a_5$: infatti i piani incidenti ad $a_1 \dots a_5$ formano una varietà d'ordine 5 (essendovi 5 piani incidenti a 6 rette) che passa doppiamente per le nominate rette a_i, essendovi precisamente due piani incidenti ad $a_1 a_2 \dots a_4$ per un punto P di a_5 (cioè i piani che proiettano da P le rette incidenti comuni alle proiezioni di $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ in S_3); risulta quindi che la varietà dei piani incidenti ad $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$, non incontra la C_4 fuori dei 10 punti di appoggio delle dette corde a_i. D'altra parte non esistono nemmeno piani incidenti a quattro corde della C_4 che si appoggino alla C_4 stessa in due punti, giacchè — proiettando da uno di questi — si avrebbero in S_3 rette incidenti ad una cubica gobba e a quattro delle sue corde; ecc.. Per contare le g_4^1 della C_{10} non si ha dunque che da contare i piani incidenti a 6 rette dello S_4, che — come già abbiamo ricordato — sono 5.

Questi esempi danno un cenno del modo come si possa compiere la dimostrazione del teorema di Castelnuovo, nel punto fondamentale che sopra non fu sviluppato.

Osservazione sul genere della curva spezzata. Le degenerazioni di una curva, C, di genere p, che sopra abbiamo avuto luogo di considerare, rientrano tutte nel caso più generale in cui la C si spezzi in due (o più) componenti. Ciò vale anche per il caso in cui la C acquisti un punto doppio accidentale O, poichè una semplice trasformazione quadratica di centro O riconduce questo caso a quello in cui la C degenera per lo staccamento di una retta.

Ora giova indicare qui la formula che dà in ogni caso il genere di una curva spezzata, definita come limite di una curva irriducibile.

Sia dunque C una curva piana variabile, d'ordine n e genere p, la quale venga a spezzarsi in due parti C_1 e C_2, d'ordini n_1 e n_2 e di generi p_1 e p_2: la C possiederà in generale

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punti doppi, e le C_1 e C_2 rispettivamente

$$d_1 = \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - p_1 \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{(n_2-1)(n_2-2)}{2} - p_2$$

punti doppi: i quali $d_1 + d_2$ punti ammetteremo che siano tutti limiti di punti doppi variabili della C. Ora la $C_1 + C_2$ possiederà altri $n_1 n_2$ punti doppi, cioè i punti comuni alle due componenti C_1 e C_2 (che riterremo semplici per esse); e fra questi $n_1 n_2$ punti ve ne saranno alcuni, in numero di $d - d_1 - d_2$, limiti di punti doppi variabili della C, mentre gli altri saranno punti doppi *nuovi* per la $C_1 + C_2$: il numero di questi ultimi verrà designato con i, sicchè

$$i = n_1 n_2 - d + d_1 + d_2 .$$

Dalle uguaglianze sopra scritte si deduce facilmente

$$p = p_1 + p_2 + i - 1 :$$

al quale risultato si perviene più rapidamente scrivendo la classe delle curve C, C_1 e C_2

$$\begin{aligned} m &= 2n + 2p - 2, \\ m_1 &= 2n_1 + 2p_1 - 2, \\ m_2 &= 2n_2 + 2p_2 - 2, \\ m &= m_1 + m_2 - 2i . \end{aligned}$$

Dalla formula precedente appare l'importanza speciale che spetta a quei punti, comuni alle C_1 e C_2, $P_1 P_2 \dots P_i$, che non sono limiti di punti doppi variabili della C, i quali punti vogliamo designare col nome di *punti di collegamento* delle C_1 e C_2.

Il genere di una curva spezzata in due parti uguaglia in generale la somma dei generi delle componenti e del numero dei loro punti di collegamento diminuito di un' unità.

Questa relazione può essere anche provata con un ragionamento topologico, riferendosi alle superficie di Riemann delle C, C_1 e C_2, e così viene messo in luce il significato dei punti di collegamento, dandosi ragione del loro nome.

Si può considerare la superficie di Riemann $C_1 + C_2$

come un'immagine particolare della C, ove si ritenga possibile di passare dalla superficie C_1 alla C_2 attraverso gli i punti di collegamento, ma non attraverso gli altri punti comuni a C_1 e a C_2, limiti di punti doppi appartenenti a due rami distinti della C. Riesce quindi agevole di riconoscere la connessione della superficie $C_1 + C_2$: a tale scopo si immagini la C_1 come una sfera dotata di p_1 manichi, e la C_2 come un'altra sfera dotata di p_2 manichi (cfr. L. 2.°, § 37): e si considerino i punti di collegamento come filetti o tubi colleganti le due sfere anzidette. Osservando che due sfere collegate da un tubo equivalgono topologicamente ad una sfera, la nostra $C_1 + C_2$ appare (cfr. la fine del prossimo § 37, e in particolare la relativa figura) come una sfera con $p_1 + p_2 + i - 1$ manichi, e quindi di genere

$$p = p_1 + p_2 + i - 1.$$

(Lo studioso è invitato a riconoscere il ponte di passaggio tra questa dimostrazione topologica e la precedente, dove ricorre l'espressione numerica della classe. A tal uopo egli avrà da considerare superficie di Riemann costruite con n fogli, indagando la degenerazione dei cicli che risponde alla coincidenza di due punti di diramazione cui si riferisce la medesima trasposizione).

Indicheremo ora la formula assolutamente generale che dà il genere di una curva C spezzata in h componenti $C_1, C_2 \ldots C_h$, di generi $p_1, p_2 \ldots p_h$, dove la C_r e la C_s abbiano i_{rs} punti di collegamento: il *genere della curva spezzata* vale

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_h + \Sigma\, i_{rs} - (h - 1).$$

Questa formula (che si può dedurre o direttamente o per reiterata applicazione della precedente) può tenersi valida senza eccezione, adottando opportune convenzioni suggerite dalla continuità; in specie nel caso che una delle componenti di C abbia un punto doppio accidentale O, converrà ritenere l'intorno di O come una curvetta infinitesima (di genere zero) componente di C, sulla quale si trovano due punti di collegamento.

In tutto ciò che precede abbiamo considerato lo spezzamento di curve piane, ma le cose dette si estendono anche al caso di curve gobbe (dello spazio ordinario o di un iperspazio) che è proprio a recare qualche luce sulla questione;

si può infatti passare per proiezione dalle curve gobbe alle curve piane.

Riferendoci per semplicità di discorso allo spazio ordinario, si consideri una curva variabile C, generalmente irriducibile e priva di punti doppi; la quale venga spezzata in due componenti C_1 e C_2, parimente prive di punti doppi, con i punti comuni. Se questi debbono ritenersi come punti di collegamento, il genere della C si esprimerà per i generi di C_1 e di C_2 mediante la formula

$$p = p_1 + p_2 + i - 1.$$

Ma quale significato ha l'ipotesi precedente? Stando al nostro procedimento, si tratta di escludere che le proiezioni dei punti comuni a C_1 e C_2 siano limiti di punti doppi apparenti della proiezione di C. Di conseguenza occorre che le rette passanti per un qualunque punto comune a C_1 e a C_2 non figurino come limiti di corde della C.

La necessità di questa restrizione apparirà evidente a chi ricordi la possibilità che per variazione continua un punto doppio apparente di una curva gobba diventi un punto doppio effettivo (cfr. L. 3°, § 18, vol. II, pag. 147).

Invero una quartica gobba di seconda specie può acquistare prima un punto doppio, e quindi degenerare in una cubica gobba e in una sua corda: valutando il genere della curva spezzata come se i due punti di appoggio della corda fossero punti di collegamento si troverebbe

$$p = 0 + 0 + 2 - 1 = 1$$

anzichè $p = 0$; ma, secondo il modo col quale abbiamo ottenuta la degenerazione anzidetta, uno dei due punti di appoggio nominati appare come centro di una stella le cui rette sono limiti di corde della quartica: tenuto conto di ciò si ha un solo punto di collegamento e quindi

$$p = 0 + 0 + 1 - 1 = 0.$$

Qui giova osservare che la degenerazione di una quartica gobba di seconda specie in una cubica e in una sua corda, non riesce possibile quando si faccia muovere la quartica sopra una superficie di second'ordine (non conica) che la contiene. Questa osservazione ha una portata generale: se una curva gobba, C, priva di punti doppi, variando sopra una superficie F ugualmente priva di punti doppi viene a spezzarsi in due curve C_1 e C_2, i punti comuni a queste sono sempre da ritenere punti di collegamento della curva spezzata. Infatti, se le rette passanti per un punto O comune a C_1 e a C_2 fossero sempre limiti di corde della C, esse avrebbero ivi due intersezioni riunite con F, sicchè O risulterebbe doppio per la superficie. Pertanto:

Sopra una superficie priva di punti doppi, il genere della curva spezzata in due parti vale

$$p = p_1 + p_2 + i - 1$$

essendo i il numero dei punti comuni alle due componenti.

È poi chiaro che lo stesso principio si estende allo spezzamento di una curva C appartenente ad una superficie, F, dotata di singolarità; almeno quando i punti comuni alle due componenti C_1 e C_2 cadano in punti semplici di F, ovvero in punti di una curva nodale, purchè i due rami di C_1 e C_2 appartengano ivi alla stessa falda di F.

Come *notizia storica* diremo che la formula del genere delle curve spezzate risale a VALENTINER (1883) e a NOETHER (¹) (1886), dove tuttavia occorre aggiungere qualche precisione in rapporto alla possibilità — sopra accennata — che un punto comune alle due componenti di una curva gobba C rimpiazzi un punto doppio apparente. La stessa formula viene ripresa negli sviluppi della geometria sopra la superficie da ENRIQUES (1893-96) e da PICARD (²) (1899).

Vale anche la pena di rilevare che la citata memoria di Nöther non si limita alla considerazione dei caratteri numerici delle curve spezzate, ma tratta anche di ciò che divengono le serie lineari sopra di esse, ed in particolare la serie canonica. Del resto Nöther considera curve piane spezzate, anche indipendentemente dal concetto di limite. Se allora si prende come convenzione che due curve di generi p_1 e p_2 formino una curva riducibile di genere $p_1 + p_2 - 1$ (ritenendo dunque non vi siano punti di collegamento fra le

(¹) Acta Matematica, Bd. 8, pag. 161.
(²) Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. XIII, pag. 344.

due componenti) si è condotti a considerare anche curve di genere negativo, o in generale curve (di un certo ordine n) per cui il *genere numerico* sopra definito riesce diverso dal *genere geometrico*, che esprime il numero delle aggiunte d'ordine $n-3$ linearmente indipendenti. Si possono prendere come esempi la curva spezzata in due rette, e quella composta di due cubiche.

Le osservazioni qui accennate suggeriscono la domanda: qualora una curva piana riducibile C_1+C_2 appaia come limite di una C irriducibile, può darsi che i punti comuni alle C_1 e C_2 provengano tutti come limiti dei punti doppi della C, di guisa che non vi siano punti di collegamento fra le due componenti?

A questa domanda si risponde subito negativamente ove si rifletta che la superficie di Riemann della C (quale può pensarsi, per esempio, interpretando l'equazione delle C nell'S_4 immagine dei punti complessi del piano), è connessa, mentre la C_1+C_2, priva di punti di collegamento, costituirebbe una superficie su cui non si potrebbe passare con continuità da un punto di una componente a un punto dell'altra: evidentemente una deformazione continua, come quella per cui la C si riduce alla C_1+C_2, non può rompere la connessione. Alla stessa conclusione si giunge anche osservando che la funzione algebrica relativa a C non può spezzarsi, senza che si avvicinino e riuniscano almeno due punti di diramazione, per modo da fare sparire le trasposizioni per cui si passa da un certo ramo i a un certo ramo $i+1$.

Ora, l'ovvia osservazione precedente appare in tutta la sua luce quando il problema si ponga in un aspetto diverso: per es. se si cerchi di far spezzare una quartica con tre punti doppi in una cubica ed in una retta. A prima vista nulla di più facile che porre la condizione di allineamento dei tre punti doppi: ma le quartiche del nostro sistema che soddisfano alla condizione algebrica di avere tre punti doppi in linea retta, sono le ∞^{10} quartiche comuni al detto sistema e all'altro delle ∞^{11} quartiche composte di retta e cubica, e tali ∞^{10} curve contengono una retta ed una cubica con punto doppio.

Pertanto fisseremo il resultato delle osservazioni precedenti enunciando il

Principio: *Se una curva irriducibile, variando per continuità, viene a spezzarsi in due o più componenti, ad ogni componente della curva spezzata appartiene qualche punto di collegamento.*

Questo principio è stato formulato da ENRIQUES [1] che ne ha fatto uso nella geometria sopra le superficie algebriche. Esso concerne naturalmente non solo le curve piane, ma anche le curve gobbe, riferendosi alle quali appare anzi con maggiore chiarezza.

36. **Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve a moduli generali.** — Abbiamo veduto quale uso possa farsi, per lo studio delle questioni numerative sopra la curva, del principio che una curva C_p di genere p può ridursi — con variazione continua — ad una curva C_0 di genere 0, con p punti doppi accidentali. Ma, evidentemente, l'uso di questo principio di degenerazione non è ristretto alla geometria numerativa: anzi si comprende che esso deve permettere di ricondurre la geometria sopra la curva di genere p alla geometria sopra la retta immagine della curva razionale C_0 (limite di C_p), in rapporto a p coppie di punti, che in questa rappresentano i p punti doppi della C_0; la quale *retta* diremo *di genere virtuale p.*

In quanto la C_0 appare nella famiglia delle C_p come una curva di cui si sono particolarizzati i moduli (l'acquisto di p punti doppi equivale a p relazioni fra i moduli) si rispecchieranno certo sulla C_0 tutte le proprietà che appartengono ad una C_p generica. Invece vi potranno essere proprietà di talune C_p che tengano a valori singolari dei loro moduli, in guisa che non riescano comuni ad una serie di C_p avente la C_0 come limite; cioè *il principio di degenerazione offre un mezzo di studio per le proprietà delle curve a moduli generali,* ma non riesce sempre applicabile al caso delle curve a moduli singolari. Così un'analisi appropriata permette di scoprire sopra la retta, in relazione ad una coppia di punti, le proprietà generali delle (curve, p. es. delle) cubiche ellittiche, ma non quelle particolari delle cubiche armoniche ed

[1] Rendiconti dell'Acc. di Bologna, 11 dicembre 1904. Una dimostrazione algebrica di esso viene fornita da SEVERI a pag. 319 delle sue citate « Vorlesungen », (1921).

equianarmoniche, giacchè, specializzando in tal guisa il modulo di una cubica, non si riesce a farle acquistare altro punto doppio che una cuspide, e la cubica cuspidata — avendo modulo indeterminato — non offre più una degenerazione caratteristica delle diverse cubiche che tendono ad essa.

Aggiungasi l'osservazione esplicita che la retta di genere virtuale p, essendo ottenuta col disporre di p moduli della C_p generale, possiede precisamente $2p-3$ moduli, sicchè le p coppie di punti che la definiscono possono assumersi ad arbitrio sopra di essa.

Noi ci proponiamo di mostrare come la teoria generale delle funzioni razionali o serie lineari sopra una curva di genere p, si rispecchi nella geometria sopra la retta, in rapporto a p coppie di punti, quando si prenda a modello una curva C_0, con p punti doppi accidentali $A_1 A_2 \ldots A_p$, ritenuti virtualmente inesistenti.

Trattandosi qui del passaggio al limite di una C_p che si riduce alla C_0, conviene spiegare come si possa seguire la variazione di una serie lineare sulla C_p variabile. Questa serie lineare si potrà supporre definita da un sistema di curve piane di un certo ordine, passanti per certi punti fissi $P_1 P_2 \ldots$ della C_p, e quindi importa vedere come possa seguirsi la variazione di un punto o di un gruppo di punti, contemporanea a quella della C_p mobile.

Il caso più semplice si ha quando i punti $P_1 P_2 \ldots$ possono essere assunti ad arbitrio sopra la C_p; allora si possono far variare in modo determinato, facendoli muovere per es. sopra rette parallele all'asse y: in tal guisa ogni punto P_i va a finire in un punto limite determinato della C_0 che, reciprocamente, nasce da una sola serie di punti P_i: si ha eccezione soltanto per i punti di contatto della curva limite ovvero per un nuovo punto doppio A_1 della C_0. Si evita il primo caso cambiando l'orientamento degli assi coordinati; ma giova invece avvertire che il nuovo punto doppio A_1 della C_0 appare come limite di due serie di punti distinti della C_p variabile, senza che si possa dire che una delle due serie risponda al punto A_1 considerato sopra un ramo piuttosto che sopra l'altro: infatti già la considerazione dell'iperbole riducentesi alla coppia dei suoi asintoti, ci fa vedere che i due archi reali della curva comprendenti i due vertici tendono, non già a due segmenti rettilinei delle rette limiti comprendenti il punto comune, bensì a due angoli, diguisachè non può dirsi che il punto limite di un vertice dell' iperbole appartenga piuttosto ad un asintoto che all' altro.

Dopo ciò rileviamo che, nel passaggio al limite della C_p ad una C_{p-1} o ad una C_0, le serie lineari g^r_n segate dai sistemi completi delle curve aggiunte d'ordine $\geq m-3$ (m designando l'ordine delle nostre curve) conservano la loro dimensione e divengono serie lineari che posseggono p *coppie neutre* $A_{i_1}A_{i_2}$ $(i=1, 2 \dots p)$, dove si indicano con A_{i_1} e A_{i_2} i due punti appartenenti ai due rami per il punto doppio A_i, cioè i punti funzionalmente distinti che trovansi sovrapposti nel punto doppio A_i: il nome di coppia neutra indica che la coppia $A_{i_1}A_{i_2}$ impone *una sola* condizione ai gruppi G_n della g^r_n che debbano contenerla.

Ora si consideri una g^r_n segata sopra una C_p dal sistema di curve aggiunte φ, di un certo ordine, passanti per h punti semplici $P_1P_2 \dots P_h$; e supponiamo dapprima che $P_1P_2 \dots P_h$ impongano alle φ stesse condizioni indipendenti. Variando la C_p si farà variare anche il nostro sistema, facendo muovere i punti $P_1P_2 \dots P_h$ sopra rette $x=\text{cost.}$, come è detto innanzi: si può ammettere che al limite nessuno di questi punti mobili vada a cadere nel nuovo punto doppio A_1 di C_{p-1}, sicchè in generale la coppia $A_{11}A_{12}$ presenterà *una* condizione ai G_n della g^r_n limite che debbano contenerla. Nel caso particolare che il sistema delle φ acquisti A_1 come nuovo punto base, la serie limite possiederà A_{11} e A_{12} come punti fissi, la coppia dei quali offrirà dunque ai G_n zero condizioni, e però sarà ancora da ritenere — in senso lato — come coppia neutra.

In secondo luogo si consideri il caso in cui i punti base $P_1P_2 \dots P_h$ impongano al sistema delle φ condizioni sovrabbondanti. Se questo accade per una certa C_p, a moduli generali, si potrà far variare con la C_p anche il gruppo $P_1P_2 \dots P_h$, in guisa da offrire alle φ lo stesso numero di condizioni indipendenti; ma, per determinare sulla C_p variabile il nostro gruppo, sarà lecito far muovere su rette $x=\text{cost.}$ soltanto alcuni dei punti P. Tuttavia si può ancora ammettere di giungere ad una serie limite g^r_n con le medesime dimensioni: infatti è lecito supporre che la variazione della C_p sia accompagnata da una variazione del sistema delle φ in cui più curve linearmente indipendenti di questo si mantengano tali, per modo che il sistema conservi al limite la stessa dimensione; e d'altra parte non può accadere che questo sistema seghi sulla C_{p-1} una serie di dimensione minore di n, poichè il sistema residuo della C_{p-1} rispetto ad esso è sempre — come prima del limite — il sistema totale delle curve di un dato ordine del piano. Ora *in generale* accadrà che i punti $P_1 P_2 \dots P_h$, variando sulla C_p che tende a C_{p-1}, non andranno a finire nel nuovo punto doppio A_1: il significato di questa affermazione sta in ciò che la posizione in cui si fa nascere il nuovo punto doppio della C_{p-1} dipende dalla scelta arbitraria di elementi che non hanno alcun rapporto col gruppo dei punti P o con la particolare serie g_n^r di cui si tratta. Del resto, se per es. P_1 andasse a cadere in A_1, si eviterà questo inconveniente sostituendo all'intiera serie delle nostre C_p una serie di trasformate quadratiche: a tal uopo si prenderà una rete di coniche con tre punti base su C_p, due dei quali diventino al limite infinitamente vicini, coincidendo in A_1 in una certa direzione; in tal guisa alla C_{p-1} si sostituisce un'altra curva, limite delle trasformate delle C_p, il nuovo punto doppio della quale corrisponde ad una coppia neutra della serie segata su C_{p-1} dalle dette coniche, coppia non comprendente P_1.

Aggiungiamo che, nel caso particolare in cui qualcuno dei punti P, base per le φ su C_p, vada a cadere nel nuovo punto doppio, A_1, della C_{p-1}, si può ancora definire sopra C_{p-1} una serie g_n^r con punti fissi, la quale appaia come limite della g_n^r di C_p e per cui la coppia $A_{11} A_{12}$ sia ancora — in senso lato — coppia neutra. Per es. se un solo punto, P_1, va a cadere in A_1, si potrà ritenere come g_n^r limite quella che contiene come punto fisso A_{11} ovvero A_{12} (senza che questa scelta possa rendersi determinata a priori). Se invece due punti P_1 e P_2 si riuniscono in A_1, avremo un sistema di φ tangenti in A_1, per modo che le φ passanti per A_{11} (cioè tangenti ad un ramo di C_{p-1}) avranno in A_1 un punto doppio e passeranno di conseguenza anche per A_{12} ecc..

Concludiamo che:

Le g_n^r sopra una curva di genere p si riducono sopra la retta a g_n^r dotate di p coppie neutre che — giova notarlo — possono assumersi ad arbitrio; in questo senso possiamo parlare di una *retta con p coppie* come di una *curva di genere virtuale p*.

Ora è assai interessante *vedere come i teoremi fondamentali della geometria sopra una curva si rispecchino semplicemente sopra una retta con p coppie*:

1) Sopra la curva di genere p, ogni gruppo di n punti appartiene ad una serie lineare completa g_n^r con $r \geq n - p$.

Si tratta di mostrare che sopra la retta « esiste una determinata serie lineare g_n^r, con $r \geq n - p$, contenente un dato gruppo G_n e possedente p coppie neutre $A_{i_1}A_{i_2}$ $(i = 1, 2 \ldots p)$ ».

A tale scopo si osservi che la serie g_n^{n-1} completa contenente un G_n e rispetto a cui è data una coppia neutra A_1A_2, si costruisce combinando linearmente il G_n con la g_n^{n-2} che possiede — sulla retta — i punti fissi A_1 e A_2: quindi la nostra g_n^r completa con p coppie neutre, resta definita come intersezione di p serie g_n^{n-1}, per cui sarà in generale $r = n - p$ e in ogni caso $r \geq n - p$.

Corollarii del teorema 1) sono le proposizioni relative alla somma e sottrazione delle serie, in particolare il teorema del resto, per cui la serie residua di un G_m rispetto a una g_n^r è la medesima quando si sostituisca al G_m un gruppo equivalente.

2) Ogni g_n^r completa per cui $n > 2p - 2$ ha la dimensione $r = n - p$.

Riportandoci alla retta, si stacchino dalla g_n^r $p - 1$ coppie neutre $A_{i_1}A_{i_2}$, per es. quelle per cui $i = 2, 3 \ldots p$: con ciò la dimensione della serie residua sarà

$$r' \geq r - (p - 1).$$

Ma questa serie residua, d'ordine $n - (2p - 2)$, possiede la coppia neutra $A_{11}A_{12}$ e quindi è di dimensione

$$r' \leq n - (2p - 2) - 1;$$

combinando le due diseguaglianze si deduce

$$r \leq n - p$$

e quindi, per il teorema 1),

$$r = n - p.$$

(Si noti che il caso $n = 2p - 1$ non fa eccezione nel ragionamento precedente, giacchè la serie residua cui si è condotti non può essere la g_1^1, essendo A_{i1} e A_{i2} due punti distinti, ma deve ridursi ad una g_1^0, cioè ad un punto fisso).

3) Esiste una determinata serie completa g_{2p-2}^{p-1}. Questa serie canonica si ottiene — sopra la retta — combinando linearmente i p gruppi di $p-1$ coppie neutre.

Anzitutto si vede che i p gruppi definiti dalle coppie: $2, 3 \ldots p$; $3, 4 \ldots p, 1$;... $1, 2 \ldots p-1$, sono linearmente indipendenti; infatti i primi $p-1$ hanno comune la coppia p-esima $A_{p1}A_{p2}$, che non appartiene all'ultimo gruppo. Resta così dimostrato che i nostri p gruppi definiscono effettivamente una serie g_{2p-2}^{p-1}, ed è evidente che questa possiede le coppie $A_{i1}A_{i2}$ come coppie neutre, giacchè ciascuna di queste coppie è fissa per una g_{2p-2}^{p-2} contenuta nella g_{2p-2}^{p-1}.

D'altra parte è chiaro che una serie lineare g_{2p-2}^{p-1} possedente le p coppie neutre $A_{i1}A_{i2}$, contiene i gruppi formati da $p-1$ di queste coppie (importanti nel loro insieme $p-1$ condizioni) e quindi coincide con la serie lineare definita da questi gruppi: ciò significa l'unicità della serie g_{2p-2}^{p-1} sopra la retta di genere virtuale p.

Vale la pena di notare che, essendo data nel piano una C_0 d'ordine m con p punti doppi accidentali, la g_{2p-2}^{p-1} determinata come sopra, riuscirà definita dalle curve d'ordine $m-3$ che passano per i punti doppi non accidentali: ciò si riconosce osservando che vi è fra le predette una curva d'ordine $m-3$ passante (per i punti doppi non accidentali) ed anche per $p-1$ punti doppi accidentali, la quale non sega ulteriormente la C_0.

4) Ogni g_n^r completa con $r \geq n-p$ è contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} canonica, e precisamente ogni gruppo della g_n^r impone $n-r$ condizioni ai gruppi canonici che debbono contenerlo (Teorema di Riemann-Roch).

Riportandoci alla retta, togliamo dalla nostra g_n^r r coppie neutre; otteniamo così un gruppo di $n-2r$ punti, che impone ai gruppi canonici al più $n-2r$ condizioni; ma le r coppie neutre impongono a questi stessi gruppi r condizioni e perciò un gruppo particolare della g_n^r e quindi — per il teorema del resto — anche un gruppo qualunque di questa serie impone $n-r$ condizioni, al più, ai gruppi canonici che debbono contenerlo: applicando il teorema alla serie residua, si trova che il numero delle condizioni imposte è precisamente $n-r$, come dice il teorema di Riemann-Roch. Segue, in particolare, che una g_n^r è certo contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} se $n-r \leq p-1$.

Osserveremo infine come la curva iperellittica di genere $p>1$ sia suscettibile di ridursi ad una retta virtuale di genere p, dove le p coppie caratteristiche appartengano ad una involuzione, rappresentativa della g_2^1. La possibilità di questa riduzione è d'accordo con la circostanza che le curve iperellittiche (possedendo $2p-1$ moduli forniti dai birapporti dei $2p+2$ punti doppi della g_2^1) si ottengono entro la famiglia delle curve C_p di genere p ponendo $3p-3-(2p-1)=p-2$ relazioni fra i moduli di una C_p; infatti la degenerazione di una C_p in una retta con p coppie importa p relazioni fra i moduli, e così questa degenerazione è ancora possibile per una curva variabile iperellittica, restando infine $(2p-1)-p=p-1$ moduli per la retta di genere virtuale p. Questi moduli vengono forniti dai birapporti che $p-1$ delle nostre coppie (appartenenti ad una g_2^1) formano con una di esse.

Dopo ciò riesce evidente che sopra la retta iperellittica di genere virtuale p, la serie canonica è composta con la g_2^1; ecc.

Nota. Gli sviluppi che precedono (¹) offrono una bella verifica del principio di continuità. Qualora si ignorassero i teoremi fondamentali della geometria sopra una curva, si sarebbe indotti per tal guisa alla loro scoperta; ma, se al valore euristico di codesti sviluppi si vuole aggiungere un valore dimostrativo, basterà riprendere le considerazioni fatte al termine del § 34 *bis*, e provare la possibilità di un passaggio al limite in cui ogni serie proviene da una serie con ugual dimensione.

Il principio di degenerazione della curva di genere p in una retta con p coppie, reca luce ai problemi che concernono le trasformazioni birazionali di una curva.

In primo luogo giova osservare che cosa diventi il gruppo misto delle trasformazioni ordinarie di una cubica ($p=1$) quando — diventando il modulo $k=1$ — la cubica acquista un punto doppio, e però si riduce ad una retta su cui vien segnata una coppia A_1A_2. Qui è evidente che le g_2^1 danno al limite delle involuzioni trasformanti in sè la coppia A_1A_2, cioè aventi due punti doppi coniugati armonici rispetto ad A_1A_2; codeste involuzioni moltiplicate a due a due producono le ∞^1 proiettività coi punti uniti A_1 e A_2. Dunque:

(¹) Cfr. ENRIQUES: « Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche ». *Math. Annalen.* Bd. 85 (1922).

Il gruppo misto delle trasformazioni ordinarie di una curva ellittica, si rispecchia nel gruppo misto delle ∞^1 proiettività della retta che possiedono una coppia invariante.

La circostanza che le proiettività della retta lascianti ferma una coppia siano tutte contenute nelle due schiere continue del detto gruppo misto (la schiera delle proiettività con gli stessi punti uniti che forma gruppo, e le schiera delle involuzioni che scambiano fra loro i due punti), questa circostanza diciamo vale a confermare la proprietà che le curve ellittiche non posseggono in generale altre trasformazioni in se stesse fuori delle trasformazioni ordinarie costituite dalle g_2^1 e dai loro prodotti.

Ora, se in luogo di una cubica a modulo k variabile, si fa degenerare una cubica che si conservi sempre armonica od equianarmonica (in guisa da possedere trasformazioni straordinarie) la curva razionale limite — supposta irriducibile — dovrà avere una cuspide; si otterrà quindi una retta di genere virtuale 1, su cui verrà segnata una coppia di punti coincidenti $A_1 = A_2 = A$: il gruppo misto delle trasformazioni ordinarie diventa qui parabolico (anzichè iperbolico) essendo costituito dalle ∞^1 involuzioni col punto doppio A e con le ∞^1 proiettività paraboliche generate dai loro prodotti. Ma tutte queste proiettività sono contenute nel più ampio gruppo ∞^2 che lascia fermo il punto A. Tale circostanza è d'accordo con la possibilità di riguardare la retta parabolica di genere 1 come una curva di modulo indeterminato, cioè come forma limite di curve ellittiche, il cui modulo abbia un valore arbitrario (anche discosto da 1). Effettivamente il gruppo misto della curva ellittica armonica, come pure quello della equianarmonica, si rispecchiano in gruppi misti sulla retta parabolica di genere 1: che tuttavia perdono qui il loro significato caratteristico, allargandosi ad un gruppo ∞^2 come è detto innanzi. Il gruppo misto della curva armonica si riduce sopra la retta al gruppo costituito dalle quattro schiere seguenti:

1) $x' = x + \text{cost.}$

2) $x' = -x + \text{cost.}$

3) $x' = ix + \text{cost.}$

4) $x' = -ix + \text{cost.}$;

le trasformazioni singolari 3) (e 4), in cui sia nulla la costante, sono cicliche del quart'ordine e — in ogni caso — una qualsiasi di esse, elevata alla quarta potenza, riproduce una trasformazione della prima serie, cui appartiene l' identità; per moltiplicazione poi esse generano l' intero gruppo misto come già dimostrammo accadere sopra la cubica armonica.

Similmente si riconosce sopra la retta parabolica di genere 1 il gruppo misto relativo al caso equianarmonico, che qui viene costituito da 6 schiere di proiettività:

$$x' = \varepsilon^r x + \text{cost.}$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{6}}, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

È chiaro come questi gruppi si generalizzano sulla retta, prendendo per ε una radice n-esima dell' unità, ma soltanto i casi $n = 4$, $n = 6$ hanno riscontro in curve ellittiche singolari non degeneri.

Lasciamo da parte le curve ellittiche per indicare come il principio di degenerazione permetta di stabilire in generale il

Teorema. *Curve a moduli generali di genere $p > 2$ non posseggono trasformazioni in se stesse.*

Pongasi che una C_p generale ammetta una trasformazione birazionale in se stessa, π, la quale non degeneri quando la C_p acquista p punti doppi accidentali. Allora è chiaro che la π, considerata come trasformazione della curva razionale, dovrà lasciare invariato l' insieme delle coppie di punti $A_{i_1}A_{i_2}$, che sono neutre per il sistema delle g^r_n. Ma, se le coppie $A_{i_1}A_{i_2}$, (per $i = 1, 2, \ldots p$), con $p > 2$ vengono assunte ad arbitrio sopra una retta, non vi è nessuna trasformazione (proiettiva) di questa, che lasci invariato il sistema dei $2p$ punti $A_{i_1}A_{i_2}$.

Tuttavia occorre rimuovere il dubbio che — nel passaggio al limite — la trasformazione (ciclica) π della C_p diventi, sulla retta, una proiettività degenere. Per ciò osserviamo che la π trasforma una qualunque g^1_n sopra la C_p in un' altra g^1_n associata; al limite, se la π degenera, la g^1_n associata ad una data (che può scegliersi ad arbitrio colla sola condizione di avere p coppie neutre sopra la retta) risulterà costituita da un punto fisso multiplo e da un punto variabile: sarà fisso il punto, M, che risponde a un punto generico della retta, e sarà variabile il punto che corrisponde al centro, N, il cui omologo in π riesce indeterminato. Ma una g^1_n siffatta non può possedere due coppie neutre distinte; così resta esclusa, per $p > 1$, la degenerazione della π.

37. I cicli delle superficie di Riemann di genere p, e le loro degenerazioni. — È importante illuminare la degenerazione che subisce una curva di genere p per l'acquisto di nuovi punti doppi, ricercando la variazione dei caratteri topologici delle corrispondenti superficie di Riemann. Giova anzitutto mettere in una nuova luce i concetti fondamentali della connessione delle superficie (chiuse e bilatere) esposti nel L. 2°, definendo qui i *cicli* di una tale superficie.

Abbiamo visto che una superficie chiusa e bilatera F, di genere p, quale è la riemanniana di una curva algebrica, può essere ridotta per continuità alla forma di una sfera dotata di p manichi formati da altrettanti tori. Se si taglia ciascuno dei p tori lungo un meridiano e un parallelo, mediante una coppia di tagli A_i e B_i $(i = 1, 2 \dots p)$, che prende il nome di *retrosezione*, la F viene ridotta a una sfera dotata di p fori quadrangolari, i cui lati opposti costituiscono gli orli dei tagli A_i e B_i. Allargando uno di questi fori, e distendendo la sfera sul piano, la nostra F viene ora ridotta a un quadrato con $p - 1$ fori quadrangolari; e da questo tipo si passa a quello del poligono di $4p$ lati, facendo scorrere i $p - 1$ quadrati interni; il che equivale a far sì che i $2p$ tagli A_i e B_i $(i = 1, 2 \dots p)$ vengano a passare per un medesimo punto, O, che riesce rappresentato ugualmente dai $4p$ vertici del poligono (cfr. L. 2°, § 37).

Viceversa si consideri *un qualunque sistema di $2p$ tagli chiusi, che rendano la superficie F semplicemente connessa, divisi in p coppie di tagli coniugati, tali che quelli di una medesima coppia abbiano un punto a comune e quelli di coppie diverse non s' incontrino;* un tale sistema di tagli dà evidentemente origine a una sfera con p fori quadrangolari (i cui lati opposti corrispondono agli orli dei tagli) sicchè *costituisce un sistema di p retrosezioni che possono evidentemente considerarsi quelle relative ai p manichi anulari di una sfera con p manichi.* In modo analogo $2p$ tagli, passanti per un punto O, che rendano la superficie semplicemente connessa, danno origine a un poligono con $4p$ lati, e corrispondono a un sistema di retrosezioni che siano state condotte a passare per il punto O.

Ora, senza eseguire i $2p$ tagli sopra ricordati, possiamo considerare le linee che essi segnano sopra F, prese in un loro *verso*, come cammini chiusi o *cicli*, descritti da un punto mobile sopra F.

Relativamente ai cicli della superficie POINCARÉ distingue due specie di equivalenza: un' equivalenza in senso lato cui dà il nome di *omologia* e un' equivalenza in senso stretto o *equivalenza* propriamente detta. Si chiamano *omologhi due cicli C e C' che per deformazione continua possono ridursi l' uno all' altro*: questa relazione si designa scrivendo

$$C \sim C'.$$

Invece Poincaré chiama *equivalenti* i cicli C e C' descritti a partire da un' origine A, quando essi si riducano l' uno all' altro *mantenendo sempre fissa l' origine A*. L' importanza di questa considerazione appare a chi pensi ad una funzione irrazionale dei punti della superficie F, i cui rami vengano permutati fra loro per un ciclo descritto a partire da A; noi dovremo dunque ritornarvi nello studio delle *curve o superficie di Riemann multiple* (§§ 38 e 39). Qui ci riferiremo sempre alla omologia.

Per *somma* $(C + C')$ di due cicli C e C', intendiamo il ciclo che si ottiene, a partire da un qualsiasi punto O di F, descrivendo prima un cammino chiuso omologo a C e poi un cammino chiuso omologo a C'. Se per es. il punto O viene preso su C, otterremo il ciclo somma, descrivendo prima C, poi una linea aperta (e sciolta) L che congiunga O ad un punto O' di C', indi C', e finalmente — in senso inverso — la linea L. In particolare si parlerà del *multiplo* γC di un ciclo C.

Rispetto all' omologia la somma gode della proprietà commutativa :

$$C + C' \sim C' + C$$

(proprietà che non appartiene — come vedremo — all' equivalenza in senso ristretto).

Infatti, il ciclo $C + C'$ somma di due cicli uscenti da O, si può ritenere come una linea chiusa formata di due archi OO' e $O'O$, dove O' è vicino ad O: l' arco OO' dà C e l' arco $O'O$ dà C'. Ora possiamo fare scorrere la linea $C + C'$ su se stessa, in guisa che O e O' si muovano contemporaneamente fino a scambiarsi l'uno con l'altro; ciò implica una variazione continua di C e C' che permuta i due cicli.

Accanto alla somma di due cicli C e C' si può anche considerare la loro *differenza* $C - C'$; essa non è altro che la somma di C col ciclo C' preso secondo il verso opposto.

La sottrazione dei cicli porta a considerare sopra F i *cicli nulli,* riducibili ad un archetto infinitesimo attorno ad un punto.

Invero sussiste l'osservazione fondamentale: *Se C e C' sono due cicli omologhi, $C - C'$ è un ciclo nullo*:

$$C - C' \backsim 0.$$

Per dimostrarlo giova deformare C' riducendolo a C di guisa che C e C' possano ritenersi come i due orli di una medesima linea C: ora il ciclo che si ottiene percorrendo un pezzo di orlo della linea C, a partire da un'origine O fino a un punto P, e ritornando in O per l'altro orlo, è sempre nullo; in particolare esso è nullo quando P — dopo aver descritto completamente C — ritorni in O. c. d. d.

L'osservazione precedente si giustifica anche notando come la superficie descritta da una linea chiusa, che partendo da C vada a C', si può ritenere — dal punto di vista topologico — un cilindro, il quale si distacca da F quando si eseguiscano i tagli C e C'; aggiungendo un taglio lungo una generatrice $L = OO'$, il cilindro si riduce ad una superficie aperta semplicemente connessa il cui orlo, $C + L - C' - L \backsim C - C'$, è dunque un ciclo nullo.

Ora importa riconoscere *come i $2p$ cicli $C_1 C_2 - C_{2p}$ corrispondenti ai tagli chiusi che, partendo da un punto O, rendono semplicemente connessa la superficie P, formano un sistema di* **cicli primitivi**, nel senso che essi sono linearmente indipendenti, e ogni altro ciclo può esprimersi come combinazione lineare di essi.

Dimostriamo anzitutto che essi sono *linearmente indipendenti,* cioè che non può essere

$$\lambda_1 C_1 \backsim \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_{2p} C_{2p}.$$

Per quanto abbiamo sopra ricordato, possiamo supporre che la nostra F sia una sfera con p manichi, e che i cicli $C_1 C_2 \ldots C_{2p}$ siano rispettivamente i meridiani e i paralleli dei p tori costituenti i manichi della sfera. Supponiamo di aver resi i manichi coi cerchi di gola appartenenti a un medesimo piano, e per ciascuno di essi consideriamo il cerchio, c, luogo dei centri dei meridiani, e la retta, r, asse di questo cerchio; abbiamo allora che un meridiano avvolge c e un parallelo avvolge r. Osservando che i p cerchi e le p rette così costruite non hanno punti comuni con la sfera, si deduce immediatamente che non può essere

$$\lambda_1 C_1 \sim \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_{2p} C_{2p}.$$

Infatti, posto che C_1 sia un meridiano del primo toro, avvolgente dunque il cerchio c_1, non può accadere che un suo multiplo (avvolgente λ_1 volte c_1) si riduca — per deformazione continua sopra la F — alla somma di cicli quali $C_2 \dots C_{2p}$ che non avvolgono il cerchio c_1.

Ciò posto dimostriamo la seconda parte del nostro enunciato, cioè che

Ogni ciclo C, descritto sopra F a partire da un punto O, *è una combinazione lineare* dei $2p$ *cicli indipendenti* $C_1 C_2 \dots C_{2p}$.

Per vederlo riduciamo la superficie ad un poligono piano con $2p$ coppie di lati $C_{i_1} C_{i_2}$ $(i = 1, 2, \dots 2p)$, ogni coppia rappresentando i due orli di un taglio C_i e i vertici $O_1 O_2 \dots O_{4p}$ il punto O. Ammettiamo che C incontri i cicli C_i (e i loro deformati) in un numero finito di punti, che successivamente indichiamo con $P_1 P_2 \dots P_h$: è lecito deformare C facendo muovere P_1 sul ciclo C_i a cui appartiene fino a portarlo in O, e così dicasi per $P_2 \dots P_h$. Dopo ciò C verrà rappresentato sul nostro poligono da un insieme di tratti (per es. segmenti) ognuno dei quali congiunge due vertici del poligono; ma uno di questi, per es. $O_1 O_2$, si riduce per deformazione alla somma di un certo numero di lati del poligono; ciò significa che C è una combinazione lineare dei cicli C_i. c. d. d.

Nota. L'ipotesi che C incontri i cicli C_i in un numero finito di punti, implica due cose:

1) di escludere quelle infinite oscillazioni che una linea può presentare in corrispondenza ad altre, quando le linee si definiscono soddisfacendo alla sola condizione di continuità, e non ad una illimitata derivabilità;

2) che la linea C — supposta rettificabile — abbia una lunghezza finita.

Ora quanto alla prima restrizione è sempre lecito soddisfarvi in base a noti teoremi che permettono di approssimare una linea continua con linee di tipo determinato, per es. razionali, o composte con linee razionali. Ma la seconda restrizione costituisce una limitazione necessaria alla teoria dei cicli, giacchè importa escludere quelle linee che equivarrebbero alla ripetizione di un numero infinito di cicli elementari.

Si consideri ora, sopra la F, un secondo sistema di cicli: $K_1\ K_2 \ldots K_{2p}$

$$K_i \backsim \sum_h a_{ih} C_h\,;$$

condizione necessaria e sufficiente perchè i K_i formino un sistema di cicli primitivi è che sia uguale ad uno il determinante dei coefficienti a_{ih}.

È chiaro anzitutto che la condizione è sufficiente: infatti scriviamo formalmente il sistema delle $2p$ equazioni

$$\sum_h a_{ih} C_h = K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots 2p),$$

e risolviamolo considerando le C come incognite e le K come parametri; troveremo allora delle espressioni

$$C_s = \sum_r \lambda_{sr} K_r \qquad (s = 1, 2, \ldots 2p)$$

con coefficienti λ_{sr} interi, che ci danno i cicli C_s (e quindi qualunque altro ciclo) come combinazione lineare dei cicli K.

Viceversa se i K formano un sistema di cicli primitivi, avremo

$$C_s \backsim \sum_r \lambda_{sr} \sum_h a_{rh} C_h \backsim \sum_h \Big(\sum_r \lambda_{sr} a_{rh}\Big) C_h\,,$$

il che — essendo i C_h indipendenti — porta

$$\sum_r \lambda_{sr} a_{rh} \begin{cases} = 1 & \text{per } h = s \\ = 0 & \text{per } h \neq s. \end{cases}$$

Ciò prova che esistono dei moltiplicatori λ_{sr} tali che moltiplicando le linee del determinante $|a_{rh}|$ per essi e sommando per colonne, si ottiene una nuova linea (che può essere sostituita a una di quelle del determinante primitivo) in cui sono nulli tutti gli elementi, meno uno che è dato dall'unità: in tal modo il determinante $|a_{rh}|$ appare uguale al determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Vediamo ora come si possano determinare i $2p$ cicli fondamentali sopra una riemanniana ad n fogli. A tal fine giova riferirsi al tipo di Lüroth-Clebsch che — in sostanza — permette di ridurre le nostre considerazioni al caso delle superficie a due fogli 1 e 2, cioè al tipo iperellittico. Infatti i cicli della riemanniana si otterranno per combinazione dei cappi uscenti da un punto O e circondanti i $2p+2$ punti di diramazione $A_1 A_2 \ldots A_{2p+2}$ che danno luogo alla sostituzione (12), e i cicli elementari risulteranno dalla somma di due cappi siffatti: sommando invece i cappi che avvolgono i due punti di diramazione

$$B_1 = A_{2p+3}, \quad B_2 = A_{2p+4},$$

cui risponde la sostituzione (23), si ottiene sulla riemanniana una linea chiusa, tagliata la quale si rompe la connessione, poichè resta impedito il passaggio dai fogli 1 e 2 ai fogli 3, 4, ... n.

Dopociò si vede che le linee chiuse riducibili alle somme di cappi:

$$C_1 = OA_1 + OA_2, \quad C_2 = OA_2 + OA_3 \ldots C_{2p} = OA_{2p} + OA_{2p+1},$$

ovvero anche le

$$\begin{aligned} &C_1 = OA_1 + OA_2, \quad C_3 = OA_3 + OA_4 \ldots \quad C_{2p-1} = OA_{2p-1} + OA_{2p} \\ &C_1' = OA_1 + OA_{2p+1}, \; C_3' = OA_3 + OA_{2p+1} \ldots C'_{2p-1} = OA_{2p-1} + OA_{2p+1} \end{aligned}$$

formano un sistema di $2p$ cicli indipendenti, dai quali si ottiene, per combinazione lineare, ogni altro ciclo della nostra riemanniana. Ciò risulta subito dalla teoria della connessione delle superficie di genere p svolta nel Cap. III, del L. 2°, dove appunto (vol. I, pag. 385) vengono indicati i $2p$ tagli chiusi che non spezzano la connessione di una riemanniana a fogli del tipo Lüroth-Clebsch. Infatti non vi è difficoltà a verificare che i sistemi di linee sopra indicati rispondono a tagli che rispettano la connessione della superficie, e da ciò si deduce che essi porgono i domandati sistemi di cicli per la superficie di genere p. Ma qui vale la pena di riprendere *ex novo* lo studio della questione, dimostrando direttamente (senza togliere alcunchè in prestito dalla teoria generale della connessione delle superficie) che veramente ogni ciclo segnato sopra la nostra riemanniana ad n fogli si riduce ad una combinazione lineare di quelli elementari, appartenenti ad uno dei due sistemi sopra indicati. Il lettore frettoloso potrà lasciare da parte questa dimostrazione. La quale riposa sulle seguenti osservazioni:

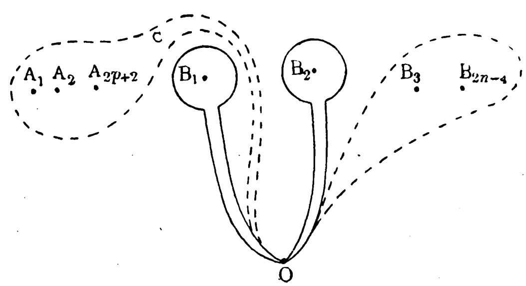
1) Ogni ciclo C viene rappresentato sul piano da una linea chiusa C, riducibile per deformazione continua ad una somma di cappi presi in un dato ordine.

2) Quando una parte del nostro ciclo partendo, per es., da un punto del foglio 1, comprenda un cappio — come (23) — che non operi sulla determinazione 1, il ciclo può essere *semplificato* sopprimendo questo cappio, che è un ciclo nullo sul foglio 1 della riemanniana.

3) Parimente un ciclo si può *semplificare* sopprimendo dalla linea C un qualunque cappio che figuri successivamente 2 volte. Infatti la linea chiusa $OA_1 + OA_1$ risponde ad un ciclo composto di due linee aperte coincidenti $O_1O_2 + O_2O_1$ che è evidentemente nullo.

4) Ogni linea chiusa composta di due cappi $OB_{2i-1}\ OB_{2i}$ cui rispondono le trasposizioni $(i+1,\ i+2)$ con $i \geq 1$, porge un ciclo nullo.

Si consideri per es. un giro intorno a B_1 e B_2 concepito



come ciclo a partire da un punto, O_2, del foglio 2. È lecito complicare il nostro ciclo girando anzitutto attorno a B_1, poi ai punti $A_1 A_2 \ldots A_{2p+2}$, quindi intorno a B_2, e infine intorno a $B_3 B_4 \ldots B_{2n-4}$: infatti il primo giro porta 2 in 3, che resta immutato girando attorno agli A, quindi 3 va in 2 per il giro attorno a B_2, e 2 resta immutato girando attorno a $B_3 B_4 \ldots B_{2n-4}$. Ora il ciclo così complicato costituisce una linea sciolta che avvolge tutti i punti di diramazione, e perciò si riduce ad un giro attorno al punto all'infinito che non produce diramazione alcuna; in conclusione è un ciclo nullo. A chiarimento della dimostrazione vale l'annessa figura; del resto questa dimostrazione si riconduce a far passare il cappio OB_1 alla sinistra degli OA_i, ciò che accade senza mutamento della corrispondente sostituzione (23).

5) Ogni ciclo si può semplificare sopprimendo da esso i cappi, che ne faccian parte, avvolgenti i punti B_i cui rispondono le sostituzioni (23) (34)....

Consideriamo una porzione del nostro ciclo che — partendo per es. da un punto del foglio 2 — comprenda un certo numero di cappi avvolgenti punti B, fino a ritornare nello stesso punto con la determinazione 2: tenuto conto della semplificazione 2), le sostituzioni che s'incontrano successivamente ci daranno una serie del tipo:

$$
\begin{array}{c}
(23) \ldots (23) \\
(34) \ldots (34) \\
(45) \ldots (45) \\
\cdots\cdots\cdots \\
(2i-1,\ 2i) \ldots (2i-1,\ 2i) \\
(2i,\ 2i-1) \ldots (2i,\ 2i-1)\ . \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(54) \ldots (54) \\
\cdots\cdots\cdots \\
(32) \ldots (32),
\end{array}
$$

dove ogni sostituzione figurerà successivamente un numero dispari di volte; e in forza delle osservazioni 3) e 4) questo numero dispari si riduce all'unità. Avremo dunque per es. una successione del tipo

$$(23)\ (34)\ (45)\ (54)\ (43)\ (32);$$

ma il ciclo corrispondente si semplifica ancora, sopprimendo la coppia di cappi (45) (54), e quindi la (34) (43) e infine anche la (23) (32), sicchè in ultimo appare ridursi a un ciclo nullo.

La nostra osservazione 5) risulta così dimostrata, ove si avverta che ogni ciclo può immaginarsi partire da un punto del foglio 1, e che ogni porzione di esso — che non sia *a priori* nulla — avvolgente qualche punto B, dovrà quindi partire da un punto del foglio 2 e ritornare allo stesso punto del detto foglio.

6) Da quanto precede risulta che ogni ciclo C della nostra riemanniana si può semplificare in guisa da apparire una somma di cappi avvolgenti i punti $A_1 A_2 \dots A_{2p+2}$ cui rispondono le sostituzioni (12). Qui si può aggiungere che il numero dei cappi OA_i, figuranti in C, dovrà essere pari, affinchè dal foglio 1 si ritorni allo stesso foglio; inoltre — per la 3) — in C non figura mai successivamente due volte il medesimo cappio.

7) Il ciclo che è costituito dalla somma dei cappi OA_1, $OA_2, \dots OA_{2p+2}$, avvolgendo dunque tutti i punti di diramazione A, è nullo, perchè equivale a quello che avvolge (in senso inverso) tutti i punti B. Ne emerge che il cappio OA_{2p+2}, ove figuri come parte in una somma di cappi OA_i, può essere rimpiazzato con la somma dei cappi $OA_1 + OA_2 \dots + OA_{2p+1}$.

8) La somma di due cappi OA_r, OA_s (con $r \leq 2p+1$, $s \leq 2p+1$, $r \neq s$) si riduce ad una somma di cicli elementari C_i

$$(C_i = OA_i + OA_{i+1}, \quad i \leq 2p).$$

Infatti supposto $r < s$, si ha

$$OA_r + OA_s = (OA_r + OA_{r+1}) + (OA_{r+1} + OA_{r+2}) + \dots + \\ + (OA_{s-1} + OA_s).$$

In definitiva, applicando l'osservazione 8) alle coppie di cappi che figurano successivamente nel nostro ciclo semplificato C, abbiamo il

Teorema: *Ogni ciclo della riemanniana del tipo Lüroth-Clebsch si ottiene per somma dei cicli elementari C_i definiti dalle somme di cappi*

$$C_i = OA_i + OA_{i+1}.$$

In luogo di codesti cicli *si può anche assumere come sistema di cicli elementari quello formato dai cicli C_1, C_3, ..., C_{2p-1}, e da*

$$C_1' = OA_1 + OA_{2p+1}, \quad C_3' = OA_3 + OA_{2p+1} \dots, \\ C'_{2p-1} = OA_{2p-1} + OA_{2p+1}.$$

Infatti anche a questo sistema si applica l'osservazione 8). Per es. la somma dei cappi

$$OA_2 + OA_5 = (OA_2 + OA_1) + (OA_1 + OA_{2p+1}) + \\ + (OA_{2p+1} + OA_5) = -C_1 + C_1' - C_5',$$

e lo stesso dicasi per ogni altra somma del tipo $OA_r + OA_s$.

Ora passiamo a studiare le *degenerazioni dei cicli*. Perciò consideriamo una curva variabile K_p, di genere p, la cui riemanniana ad n fogli venga ridotta al tipo di Lüroth-Clebsch, in ordine ad un sistema di tagli o cappi susseguentisi OA_1, OA_2 ...., OA_{2p+2}, OB_1, ..., OB_{2n-4}.

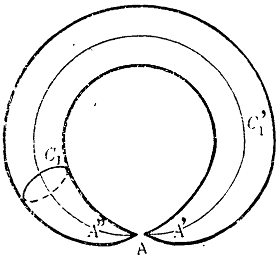
Facciamo avvicinare i due punti di diramazione A_1 e A_2, cui risponde la sostituzione (12), insieme alle linee OA_1 e OA_2, fino alla coincidenza: allora la K_p acquista un nuovo punto doppio (nodo) A, corrispondente ad $A_1 \equiv A_2$, che deve ritenersi virtualmente inesistente.

In questa degenerazione, come cicli della riemanniana di genere $p-1$, si conservano $2p-2$ fra i cicli elementari della K_p variabile, mentre *due cicli degenerano* nel modo che ci proponiamo di mettere in luce. Perciò riferiamoci p. es. al secondo sistema dei cicli elementari, sopra nominato. È chiaro anzitutto che i cicli diversi da C_1 e C_1', i quali non comprendono i cappi OA_1 e OA_2, non subiscono alcuna degenerazione. Invece il ciclo $C_1 = OA_1 + OA_2$, ovvero una linea chiusa omologa, quale la somma dei segmenti lievemente prolungati $A_1A_2 + A_2A_1$, si riduce al limite all'uno o all'altro dei cerchietti infinitesimi che circondano A sopra le due falde della C_{p-1} (secondochè C_1 è costruito a partire da un punto del foglio 1 o da un punto del foglio 2). Quanto al ciclo $C_1' = OA_1 + OA_{2p+1}$, sostituibile con una linea chiusa omologa $A_1\,A_{2p+1} + A_{2p+1}\,A_1$, esso si riduce al limite ad una linea che partendo dal punto A sopra una falda della K_{p-1}, ritorna ad A sopra l'altra falda: se dunque si designano con A' e A'' i due punti (funzionalmente distinti sulla K_{p-1}) sovrapposti in A, si può dire che la degenerazione del ciclo C_1' è costituita da una linea aperta $A'A''$.

In modo analogo la K_p si può far degenerare in una K_0 irriducibile, acquistando p nuovi punti doppi (nodi) ove si facciano coincidere a coppie i punti di diramazione $A_1\,A_2$, $A_3\,A_4$, ..., $A_{2p-1}\,A_{2p}$; allora i cicli $C_1\,C_3 \ldots . C_{2p-1}$ si riducono, come prima, a cerchietti infinitesimi, mentre i cicli $C_1'\,C_3' \ldots .$

divengono linee aperte, congiungenti ciascuna i due punti sovrapposti delle falde che rispondono ai nuovi punti doppi.

Ritorniamo alla considerazione elementare di un solo punto doppio per porgere un' immagine visiva del fatto topologico della degenerazione. Pongasi per es. che la K sia di genere $p = 1$ e la corrispondente riemanniana sia un toro; quando la K acquista un punto doppio, la sua riemanniana si riduce topologicamente ad una sfera; ci possiamo rappresentare il passaggio operando, lungo un circolo meridiano del toro, una strozzatura, dove si vedranno due falde della superficie torica riunite nel punto conico A. È chiaro che rompendo la connessione in A la nostra superficie si riduce al tipo sferico. È anche chiaro che i due cicli fondamentali del toro, quali sono dati da un meridiano e da un parallelo, si riducono al limite ad uno dei due cerchietti infinitesimi omologhi che circondano A sopra una falda, e a una linea aperta $A'A''$ che congiunge i due punti A' e A'' sovrapposti in A.

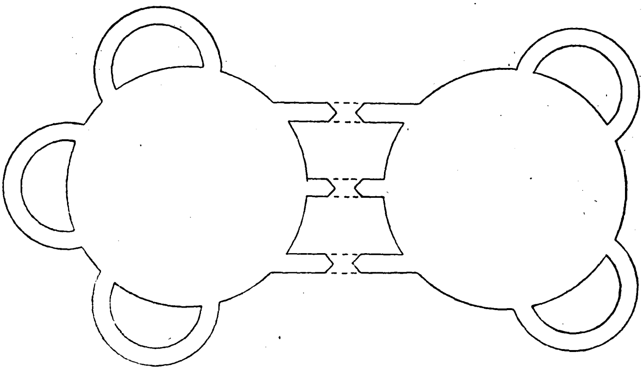


Le cose dette innanzi suffragano in generale la visione che un nuovo punto doppio A, acquisito da una superficie di Riemann (rappresentata come sfera con p manichi) si può considerare come una strozzatura operata secondo una sezione trasversale di un manico, ovvero anche nel corpo stesso della sfera. Viceversa dalla superficie degenerata di genere $p - 1$ si ripassa a quella di genere p stabilendo un ponte, filamento o manico strozzato, a collegare due falde diverse. Appunto in tal guisa *la riduzione di una K_p ad una K_0 con p punti doppi virtualmente inesistenti, si rispecchia topologicamente nella rappresentazione della superficie riemanniana di genere p come sfera con p manichi.*

Ora la visione che abbiamo guadagnato dei nuovi punti doppi acquisiti da una K_p, è propria a porgere *la verifica topologica della formula che dà il genere di una curva spezzata.* La curva K di genere p, generalmente irriducibile, venga a spezzarsi in due parti K_1 e K_2 aventi comuni i punti semplici, che non siano limiti di punti doppi di K; allora la superficie di Riemann K, ammetterà una forma limite composta con le due superficie di Riemann K_1 e K_2: potremo rappresentarci la K_1, di genere p_1, come una sfera con p_1 manichi, e la K_2, di genere p_2, come una sfera con p_2 manichi, le due sfere essendo congiunte da i filamenti o tubi. Nella figura si è preso $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $i = 3$. Ciò posto, uno dei filamenti che congiungono le due sfere, si può ritenere costituire insieme a queste, una superficie topologicamente identica ad una sfera, nella quale si vedranno quindi $p_1 + p_2 + i - 1$ manichi. Da ciò risulta

$$p = p_1 + p_2 + i - 1. \qquad \text{c. d. d.}$$

Nota. La degenerazione dei cicli di una riemanniana che acquisti un punto doppio, viene studiata innanzi supponendo



a priori che la riemanniana abbia il tipo di Lüroth-Clebsch, e che il punto doppio nasca per l'avvicinamento di due punti di diramazione successivi A_1 e A_2, e dei relativi cappi. Ora si può domandare se — data una riemanniana K ad n fogli di genere p che acquisti un punto doppio — sia sempre lecito rappresentarsi la K nel modo detto innanzi, nella vicinanza della forma limite. La risposta è affermativa solo per il caso che la curva limite, dotata di nuovi punti doppi, sia irreducibile; il caso in cui la K si spezzi in due curve K_1 e K_2, esorbita in generale da questa considerazione, giacchè è facile vedere che, per avvicinamento di coppie di punti di diramazione successivi, una riemanniana del tipo Lüroth-Clebsch può spezzarsi solo con staccamento di parti razionali o iperellittiche.

Tuttavia basta qui una lieve modificazione del nostro discorso. Invece di riferirci al tipo di Lüroth-Clebsch giova riferirci al *tipo più generale di Lüroth* dove si considerano successivamente un numero pari $2\pi_1 + 2$ di cappi (12), $2\pi_2 + 2$ cappi (23), ..., $2\pi_{n-1} + 2$ cappi $(n-1, n)$:

$$p = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{n-1}.$$

Qui i cicli sono dati semplicemente dai cicli delle riemanniane a due fogli, con $2\pi_s + 2$ punti di diramazione, in cui la nostra riemanniana appare virtualmente scomposta. (Infatti si trovano così $2p$ cicli che non spezzano la connessione).

Si dimostra che nelle vicinanze di una curva K, spezzata in due componenti K_1 e K_2 con i punti comuni (all'infuori di quelli che siano limiti di punti doppi della K), si può sempre ridurre la riemanniana al tipo di Lüroth anzidetto, per modo che il passaggio al limite si effettui per l'avvicinamento delle $i = \pi_s + 1$ coppie di punti di diramazione successivi, rispondenti ad una medesima sostituzione $(s, s+1)$. Per es., se una riemanniana a 5 fogli si spezza in due riemanniane, una a 3 e l'altra a 2 fogli, avremo una successione di $2\pi_1 + 2$ cappi (12), $2\pi_2 + 2$ cappi (23), $2i = 2\pi_3 + 2$ cappi (34), $2\pi_4 + 2$ cappi (45); e lo spezzamento avverrà per l'avvicinarsi delle nominate coppie (34) e dei relativi cappi. Di qui si ottiene subito una nuova dimostrazione della formula che dà il genere della curva spezzata.

La dimostrazione delle cose sopra enunciate si effettuerà:

1) riducendo al tipo Lüroth separatamente le riemanniane K_1 e K_2;

2) osservando che per una K vicina a $K_1 + K_2$ si presentano i nuove coppie di punti di diramazione coi cappi vicinissimi e rispondenti alla medesima sostituzione;

3) che questa sostituzione di passaggio, per ciascuna coppia, può sempre immaginarsi collegare i fogli consecutivi 3 e 4, potendosi tutte ridurre a questa col trasformare opportunamente le coppie dei cappi nominate mediante i rimanenti (cfr. § 3, pagg. 26 e 29).

Gli sviluppi potranno fornire oggetto di interessante esercitazione per lo studioso.

Capitolo IV.

Corrispondenze fra curve.

38. **Curve multiple.** — Già nella nota del § 2 (Osservazione 3), si è rilevata la possibilità che si abbia una corrispondenza $[1, \nu]$, di ordine $\nu > 1$, fra due curve non razionali φ ed f, cioè che una curva di genere $\pi > 0$ possegga una trasformata semplicemente razionale f (di genere $p > 0$) nascente da essa con una sostituzione razionale non invertibile. In tal caso riesce definita sopra f una *involuzione* γ_ν^1 di genere π, e per contro la curva f di genere p viene rappresentata sopra la *curva multipla* φ, alla quale apparterrà in generale un certo numero δ di punti di diramazione, corrispondenti ai punti doppi della γ_ν^1.

Fra i caratteri sopra definiti π, p, ν e δ relativi alla corrispondenza supposta fra φ e f, intercede la relazione di Zeuthen

$$\nu(2\pi - 2) + \delta = 2p - 2,$$

che fra un momento apparirà conseguire dalla relazione topologica fra le riemanniane di f e φ, e che viene pôrta dal modo di trasformazione della serie canonica di φ, cioè dal teorema di Painlevé-Castelnuovo dimostrato nel § 9:

La serie canonica di f si ottiene sommando alla trasformata della serie canonica di φ il gruppo dei δ punti (doppi per la γ_ν^1) omologhi dei punti di diramazione.

Giova notare che la relazione precedente porta di necessità che il numero δ sia pari: $\delta = 2\delta'$, essendosi designato con δ il numero dei punti di diramazione *semplici* (cui rispondono punti doppi della γ_ν^1) o il suo equivalente:

Ora le corrispondenze $[1, \nu]$ fra due curve conducono a porre due problemi fondamentali, che si riferiscono

1) alla costruzione delle curve multiple con d dati punti di diramazione;

2) alle involuzioni irrazionali appartenenti ad una curva di genere p.

Il primo problema, riguardato sotto l'aspetto dell'*analysis situs* si presenta come una generalizzazione della costruzione delle superficie di Riemann a fogli, giacchè si tratta qui di costruire una superficie di Riemann sovrapponendo e collegando fra loro non più dei fogli semplicemente connessi, ma invece dei fogli di genere π. D'altronde appare subito che il problema più generale si riconduce al caso particolare già trattato, poichè basta insomma sostituire a ciascuno dei fogli di genere π un gruppo di fogli semplicemente connessi, convenientemente collegati fra loro. Riferiamoci — per semplicità di discorso — al caso generale in cui sopra la φ vengano dati $\delta = 2\delta'$ punti di diramazione semplici, per modo che girando attorno ad uno di questi si produca un semplice scambio fra due punti del gruppo della γ_ν^1 corrispondente (o fra due valori della relativa funzione algebrica); giungeremo quindi al seguente teorema:

Una curva φ, su cui vengano fissati $\delta = 2\delta'$ punti di diramazione, dà origine a un numero finito di curve ν-ple, cioè a un numero finito di trasformate birazionali f, di genere $p = \nu(\pi - 1) + \delta' + 1$, tra loro birazionalmente distinte.

Pongasi che la φ (in relazione ad una sua g_n^1 generica) venga rappresentata sul piano della variabile complessa contato n volte, con $2n + 2\pi - 2$ punti di diramazione, A_i; e su questo stesso piano α si segnino i δ punti di diramazione, B_i, fissati per definire la φ multipla. In tal caso la costruenda f verrà rappresentata sul piano α a $n\nu$ fogli, e si dovrà ritenere birazionalmente determinata, non appena siano fissate le sostituzioni relative ai punti A_i e B_i. Da ciò segue che esiste soltanto un numero finito di curve f, rappresentabili sulla φ multipla coi dati punti di diramazione. Questo numero dipende non solo dalla scelta degli scambi relativi ai punti B_i, ma anche da una certa arbitrarietà nella determinazione delle sostituzioni relative ai punti A_i. Infatti, se nel punto A vengono scambiati due fogli 1 e 2 della φ, ivi verranno scambiati i due gruppi di ν fogli (che indichiamo con) 11, 12, ... 1ν, e 21, 22, ... 2ν, della f senza che sia detto se il foglio 11 debba scambiarsi col foglio 21 piuttosto che con 22, ... 2ν, etc.

La costruzione precedente pone in evidenza la relazione di ZEUTHEN

$$\nu(2\pi - 2) + \delta = 2p - 2,$$

giacchè i $2n + 2\pi - 2$ punti A_i di diramazione semplice relativi alla g_n^1, data su φ, divengono punti di diramazione ν-*pli* relativi a una $g_{n\nu}^1$ di f, che ha poi altri δ punti doppi corrispondenti ai punti B_i, e così questa $g_{n\nu}^1$ viene a possedere un numero di punti doppi dato da

$$\nu(2n + 2\pi - 2) + \delta = 2n\nu + 2p - 2.$$

Aggiungeremo l'osservazione che alcuni dei punti di diramazione della curva multipla φ, possono venire a coincidere in punti di diramazione d'ordine superiore, per modo che girando attorno ad uno di essi sulla riemanniana di φ, si produca sui fogli di f una sostituzione qualunque: per es. coincidendo B_1 e B_2 può aversi una permutazione ciclica di tre fogli, ovvero due scambi fra due coppie di fogli, etc.

Ora, richiamando il teorema di esistenza del § 33, si può precisare il modo di definizione di una curva multipla, col seguente

Teorema di esistenza per le superficie di Riemann multiple. Si fissino sopra una riemanniana φ un gruppo di punti di diramazione $B_1 B_2 \ldots$ e altrettanti cappi (cammini chiusi nulli) che partendo da un punto O della riemanniana girino attorno a questi; si assumano poi, in relazione ai detti cappi, delle sostituzioni $S_1 S_2 \ldots$ sopra le ν lettere $12 \ldots \nu$; e si assumano ancora le sostituzioni $\Sigma_1 \Sigma_2 \ldots \Sigma_{2\pi}$ fra le stesse ν lettere, in corrispondenza ai 2π cicli indipendenti della detta φ, uscenti dallo stesso punto O: le sostituzioni anzidette determinano *una* riemanniana f (coi fogli $12 \ldots \nu$) rappresentata sulla φ ν-*pla* coi dati punti di diramazione, ogniqualvolta vengano soddisfatti i requisiti seguenti:

1) le sostituzioni S e Σ generino un gruppo transitivo (condizione di irriducibilità);

2) il prodotto di tutte le sostituzioni S e Σ (relative al cammino composto dei cappi giranti intorno ai punti B e dei 2π cicli considerati per O, presi nell'ordine che essi presentano nell'intorno di O), dia l'identità. È da notare che nel prodotto considerato insieme a ciascuna sostituzione Σ compare anche la sua inversa, corrispondente alla circostanza

che ogni ciclo uscente da O presenta in O due raggi tangenti opposti l'uno all'altro, segnanti i due versi opposti in cui il ciclo può venire descritto [1].

Un particolare interesse presenta la costruzione delle curve (o superficie di Riemann) multiple che sono prive di punti di diramazione, e segnatamente nei casi più semplici che avremo luogo di esaminare in appresso.

Ad esemplificazione della teoria, occupiamoci anzitutto di costruire le *curve doppie*, di cui impareremo poi a distinguere algebricamente le diverse classi.

Secondo il teorema generale, data una superficie di Riemann φ, di genere $\pi > 0$, e fissati su di essa 2π cicli indipendenti uscenti da un punto O, si può costruire una f rappresentata sulla φ doppia, facendo corrispondere a ciascuno dei 2π cicli suddetti lo scambio (12) ovvero la sostituzione identica, e associando inoltre la sostituzione (12) a $\delta = 2\delta'$ cappi uscenti dallo stesso punto O ed avvolgenti δ punti di diramazione comunque fissati.

Quando si fa il prodotto delle trasposizioni $S_i = (12)$ corrispondenti ai cappi (che sono in numero pari) e delle sostituzioni Σ relative ai cicli di φ, si ottiene sempre l'identità, qualunque sia il numero e la posizione delle effettive trasposizioni (12) che figurano fra le dette Σ, imperocchè sappiamo che ciascuna Σ compare nel nostro prodotto insieme alla sua inversa $(\Sigma^{-1} = \Sigma)$. Pertanto si ottengono in tal guisa $2^{2\pi}$ curve, o superficie di Riemann, f, rappresentate sulla φ doppia coi δ punti di diramazione assegnati: tuttavia, nel caso che manchino i punti di diramazione $(\delta = 0)$, *una* di queste f — cioè quella per cui tutte le Σ sono l'identità — risulta riducibile, sicchè rimangono $2^{2\pi} - 1$ ***curve doppie irriducibili senza punti di diramazione*** rappresentate sopra una medesima φ di genere π.

[1] A chiarimento di questa osservazione giova considerare lo sviluppo della superficie di Riemann di genere π sul poligono di 4π lati (cfr. L. 2°, § 38, vol. I, pag. 381). Allora il ciclo complessivo che risponde all'insieme di tutti i cicli di φ viene rappresentato dal contorno del poligono (il punto O venendo rappresentato dai vertici del poligono: per es. per $\pi = 1$, dai vertici del rettangolo che porge lo sviluppo del toro). Qui si vede come a ciascun ciclo corrispondono due lati del poligono che vengono percorsi in senso opposto.

Nota. Ora sorge la domanda: le $2^{2\pi}-1$ curve doppie irriducibili costruite sopra una medesima φ, senza punti di diramazione, saranno fra loro birazionalmente distinte?

Dimostreremo che ciò accade *in generale.*

Caso $\pi > 2$. Per $\pi > 2$ la dimostrazione si dà facilmente. Infatti se due curve f e f' sono rappresentate doppiamente sopra una medesima φ di genere π, e si ha fra f e f' una corrispondenza birazionale, la stessa f *riesce riferita* in due modi alla φ contata due volte; e possono presentarsi due ipotesi:

1) La f contiene una sola γ_2^1. Allora la φ ammette una trasformazione birazionale in sè stessa, dove sono omologhi i punti che corrispondono a una medesima coppia della γ_2^1. Ma l'esistenza di una trasformazione birazionale sopra una φ, di genere $\pi > 2$, importa una particolarità dei moduli della φ stessa.

2) La f contiene due γ_2^1 (e quindi si ottiene una corrispondenza [2, 2] sopra la φ). Che questo caso implichi una particolarizzazione dei moduli di φ, si può verificare facilmente considerando le curve canoniche C di un S_{p-1}, per $p=2\pi-1$: imponendo ad una tale C di possedere una trasformazione involutoria con due spazi di punti uniti non incontranti la curva, si ha una C, immagine della f, contenente una γ_2^1 di genere π, immagine della φ, priva di coincidenze, ed in generale questa condizione non porta che esistano altre trasformazioni involutorie della nostra curva canonica, come avverrebbe se questa contenesse una seconda γ_2^1 di genere π.

Caso $\pi = 2$. I ragionamenti che precedono si applicano, come sopra è detto, al caso $\pi > 2$. Per $\pi = 2$ sussiste tuttavia la conclusione che la f possiede in generale una sola γ_2^1 di genere 2, ma la φ che la rappresenta ammette sempre una trasformazione involutoria in se stessa; non di meno si può riconoscere che questa trasformazione fa sempre corrispondere a un ciclo della riemanniana φ un ciclo equivalente, dal che si deduce che le curve f di genere 3, costruite a partire da una φ doppia con diversi sistemi di sostituzioni, sono birazionalmente distinte.

Le cose asserite innanzi si giustificano come segue.

In primo luogo: « se una f di genere 3 contiene una γ_2^1 di genere 2 (priva di coincidenze) essa è iperellittica, cioè contiene sempre una g_2^1 (involuzione razionale con 8 coincidenze), e conseguentemente anche una terza involuzione ellittica γ_2^1 (con quattro coincidenze) prodotto delle due involuzioni nominate; ma la detta f non contiene in generale altre involuzioni γ_2^1 ». Infatti la f canonica sarà a priori una quartica piana, trasformata in sè da una omologia armonica di centro O e asse o: ora appare impossibile che questa subordini sopra f una involuzione γ_2^1 priva di coincidenze, giacchè risulterebbero punti doppi per la γ_2^1 le intersezioni di f con o; bisogna dunque che f si riduca a una conica doppia, con 8 punti di diramazione. Presa d'altronde una conica C e su questa quattro coppie di punti (di diramazione) coniugati nell'omologia armonica di centro O e asse o, si costruisce come curva doppia una f iperellittica di genere 3; su questa f si trovano due involuzioni γ_2^1 corrispondenti all'involuzione subordinata su C dalla nostra omologia armonica; queste due γ_2^1, il cui prodotto risulta la g_2^1, lasciano invariate le due coppie della g_2^1 stessa rispondenti alle intersezioni di o con C; perciò accadrà che una delle due γ_2^1 abbia quattro coincidenze e l'altra zero, ovvero che ciascuna di esse abbia due coincidenze: ma quest' ultimo caso è escluso dalla formula di Zeuthen per la quale un'involuzione di genere $\pi = 0, 1, 2$, appartenente ad una curva di genere 3 ha rispettivamente $\delta = 8, 4, 0$ coincidenze. Si conclude dunque che la f iperellittica costruita innanzi possiede una γ_2^1 di genere 2, ed una γ_2^1 ellittica prodotto di questa per la g_2^1; ma in generale codesta f non conterrà altre γ_2^1, poichè l'esistenza di un'altra involuzione su f importa una seconda omologia armonica trasformante in sè C e il gruppo degli 8 punti di diramazione della C doppia.

In secondo luogo se la curva φ, immagine della γ_2^1 di genere 2 di f, ha moduli generali, la φ non possiede altra trasformazione in se stessa che quella fornita dalla g_2^1 canonica: ora, per il nostro scopo, basterà provare che questa trasformazione muta ogni ciclo della riemanniana φ in un ciclo equivalente, e però muta in se stessa ognuna delle $2^{2\pi} - 1 = 15$ curve doppie φ, definite dai diversi possibili sistemi di sostituzioni. Effettivamente la riemanniana della φ viene pôrta da una superficie a due fogli 1 e 2, collegati fra loro in 8 punti di diramazione $A_1 A_2 \dots A_8$; quindi un ciclo elementare della φ si può ridurre per continuità alla somma di due cappi K_1 e K_2 partenti da un punto P e giranti, p. es., attorno ad A_1 e A_2; allora è chiaro che mentre P descrive, nel piano, il cappio K_1 i punti omologhi P_1 e P_2, sopra φ, descrivono in sensi opposti lo stesso arco; sicchè infine si trova un ciclo di φ descritto da P_1 e da P_2 in sensi inversi. Da ciò segue che in generale ad ogni ciclo descritto sopra φ da P_1 corrisponde un ciclo omologo descritto (inversamente) da P_2. c. d. d.

Caso $\pi = 1$. Rimane da trattare il caso $\pi = 1$: anche qui vale sempre la conclusione che « le 3 curve ellittiche doppie f, senza punti di diramazione, costruite a partire da una medesima φ, sono birazionalmente distinte, quando la φ abbia modulo generale [1] »; ma la dimostrazione di ciò riesce più difficile per la circostanza che una f ellittica contiene sempre non una, bensì tre involuzioni ellittiche γ_2^1 e che — d'altra parte — la φ ellittica ammette infinite trasformazioni in se stessa. Nondimeno riescono allo scopo considerazioni sull'omologia dei cicli corrispondenti per una trasformazione di φ, analoghe a quelle che abbiamo adoperate per $\pi = 2$.

Se una curva ellittica f è rappresentata in due modi sopra la φ contata due volte (corrispondendo ai due cicli di φ diverse sostituzioni) possono darsi due ipotesi:

1) che — come nell'ipotesi 1), per $\pi \geq 2$ — a ogni punto di φ corrispondano sopra f due coppie di una medesima γ_2^1; e quindi si ottenga su φ una trasformazione biunivoca T dove sono omologhi i punti di φ che danno origine ad una medesima coppia della γ_2^1;

2) che, invece, ad un punto di φ corrispondano sopra f coppie di due diverse γ_2^1, e quindi che « sopra una curva ellittica f esistano due γ_2^1 birazionalmente identiche, sicchè le coppie omologhe di esse diano luogo su f a una corrispondenza $[2, 2]$ ».

1) Riferendoci al primo caso, si ripeterà il ragionamento fatto per $\pi = 2$. La trasformazione T deve mutare un ciclo della riemanniana φ in un ciclo non omologo; per esempio, se φ è realizzata da un toro con l'asse verticale, mutare un circolo orizzontale C in un circolo verticale K. Ma

(1) Questa conclusione si può ritenere nota, essendo implicitamente contenuta nella *teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche*, per la quale si può vedere: Bianchi « Lezioni sulla teoria delle funzioni » Cap. XV.

le trasformazioni appartenenti ad una φ a moduli generali sono trasformazioni ordinarie di prima o di seconda specie; e per quest'ultime — che sono g_2^1 — si prova come innanzi che mutano i cicli in cicli omologhi; pertanto lo stesso accade per le trasformazioni di prima specie ottenute come prodotto di due g_2^1.

Soltanto se la φ sia armonica od equianarmonica, vi saranno trasformazioni singolari T non conservanti i cicli, ed allora si verifica effettivamente che φ doppie costruite à partire da diverse sostituzioni riescono birazionalmente identiche.

Così, se la φ sia armonica, vi è una trasformazione singolare $T = \tau$ della quale si può vedere che permuta fra loro i due sistemi di cicli C e K, sicchè riescono birazionalmente identiche due delle φ doppie, cioè quelle definite dal prendere come sostituzioni relative a C e K rispettivamente (11), (12) e (12), (11). Per vedere che effettivamente τ permuta fra loro C e K, si prenda come riemanniana φ una superficie a due fogli coi quattro punti di diramazione $A_1 A_2 A_3 A_4$ vertici di un quadrato, il cui birapporto riesce appunto $(A_1 A_2 A_3 A_4) = -1$. Dopo ciò apparirà che la rotazione del piano che porta $A_1 A_2 A_3 A_4$ in $A_2 A_3 A_4 A_1$, muta il ciclo avvolgente i due punti di diramazione $A_1 A_2$ nel ciclo avvolgente $A_2 A_3$, e questi due cicli, non omologhi, possono ritenersi corrispondere a quelli designati prima con C e K.

Similmente, se la φ sia equianarmonica, possiederà una trasformazione $T = \omega$, la quale permuta circolarmente i tre sistemi di cicli C, K e $-(C + K)$, come appare dalla rappresentazione sul piano doppio in cui si assumono come punti di diramazione i vertici di un triangolo equilatero $A_1 A_2 A_3$ e il suo centro A_4: pertanto le tre φ doppie risultano tutte e tre birazionalmente identiche.

2) Innanzi di passare all'esame del secondo caso, osserviamo che se una curva ellittica φ è a modulo generale, anche le curve ellittiche doppie costruite sopra di esse sono a modulo generale, poichè il parametro-modulo di f è suscettibile di variare con continuità in dipendenza di quello di φ. Ciò premesso, pongasi che due γ_2^1 appartenenti ad una curva ellittica f, a modulo generale, siano birazionalmente identiche; allora le coppie di punti omologhi di queste γ_2^1 daranno origine ad una corrispondenza [2, 2]; osserviamo anzitutto che questa non può spezzarsi in due trasformazioni biunivoche,

che dovrebbero mutare una γ_2^1 nell'altra. Infatti le trasformazioni biunivoche di una f a modulo generale, sono trasformazioni ordinarie di prima o di seconda specie, che lasciano invariata ciascuna delle tre γ_2^1 appartenenti alla curva.

Ora se la corrispondenza [2, 2] supposta sopra la f è irriducibile, accadrà che per un ciclo descritto da un punto P sopra la riemanniana f, i due punti omologhi P_1 e P_2 verranno a scambiarsi, in altre parole vi sarà qualche ciclo di diramazione per la nostra corrispondenza; ma poichè non vi sono *punti* di diramazione, perchè le γ_2^1 ellittiche sono prive di coincidenze, sarà di diramazione un ciclo non nullo e tutti quelli equivalenti della stessa famiglia.

Per introdurre l'ipotesi che la f sia a modulo generale, la faremo variare con continuità fino ad acquistare un punto doppio, riducendosi dunque ad una retta di genere virtuale 1 con una coppia neutra.

La degenerazione che subisce in tal guisa la riemanniana ellittica φ, si può riconoscere guardando alla superficie costituita da due fogli piani sovrapposti con quattro punti di diramazione $A_1A_2A_3A_4$, dove due di questi punti A_3 e A_4 vengano a coincidere. Allora (cfr. § 37) il punto $A_3 \equiv A_4$ rappresenta due punti A' e A'' sulla riemanniana limite (i punti della coppia neutra sulla retta di genere 1), e quindi il ciclo elementare rappresentato nel piano dalla linea chiusa che avvolge A_1 e A_3 diventa una linea aperta di estremi A' e A''; in pari tempo il ciclo rappresentato da una linea chiusa che avvolge A_1 e A_2, diventa al limite un ciclo che — tagliando in un punto la linea $A'A''$ — lascia da parte opposta i due punti A' e A''. Dunque, sulla sfera con coppia A' e A'', che costituisce la riemanniana della retta di genere 1, i due sistemi di cicli sono dati: dalle linee aperte di estremi A' e A'', e dalle linee chiuse che separano A' e A''. Si può sempre supporre che queste linee chiuse separanti A' e A'', siano limiti dei cicli diramanti della nostra corrispondenza [2, 2], essendo arbitraria la scelta della coppia dei punti di diramazione del piano doppio che — riunendosi — danno luogo alla degenerazione della f ellittica.

Si deduce quindi che i punti A' e A'' sono punti di effettiva diramazione per ciò che diventa al limite la corrispondenza [2, 2] considerata sopra la f. Esaminiamo d'altra parte ciò che diventano, nel passaggio al limite, le due nominate γ_2^1

di f e quindi la relativa corrispondenza [2, 2]. Poichè le γ_2^1 corrispondono a trasformazioni di prima specie di f, esse si riducono, al limite, alla stessa involuzione che ha per punti doppi A' e A''. Segue che la corrispondenza [2, 2] si riduce ad una corrispondenza [2, 2] sulla retta che scambia proiettivamente le coppie della suddetta involuzione; ma è chiaro che una tale corrispondenza [2, 2] si spezza in due proiettività coi punti uniti A' e A'', cosicchè non esiste per essa alcun punto di diramazione. Questa conclusione contraddice a quella ottenuta innanzi; l'assurdo prova che la corrispondenza [2, 2] irriducibile, supposta sopra la f a modulo generale, non può esistere, e per conseguenza che due γ_2^1 appartenenti ad f sono birazionalmente distinte. c. d. d.

Giova notare che la conclusione ottenuta è strettamente legata all'ipotesi che la f (e quindi anche la φ) abbia modulo generale. Così se la f è una curva ellittica armonica, la trasformazione singolare di essa lascia ferma una delle tre γ_2^1 e scambierà le altre due: la prima γ_2^1 conduce ad una φ doppia armonica, già considerata nell'esame dei casi particolari cui conduce l'ipotesi 1); le altre due γ_2^1 conducono ad una φ doppia che — come si potrebbe vedere — non è più armonica, ma possiede una corrispondenza singolare [2, 2]. Similmente se la f sia equianarmonica, la trasformazione singolare permuterà le tre γ_2^1, le quali condurranno ad una medesima curva ellittica φ, non equianarmonica, ma dotata di una corrispondenza singolare [2, 2]. L'analisi di questi casi è in rapporto con la teoria delle *funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa*, e il suo svolgimento geometrico può costituire un'utile esercitazione per lo studioso.

Ricapitolando i risultati ottenuti per i vari casi: $\pi > 2$, $\pi = 2$, $\pi = 1$ enunceremo che:

Le $2^{2\pi} - 1$ curve doppie irriducibili di genere $p = 2\pi - 1$, costruite sopra una medesima φ di genere π a moduli generali, in rapporto ai diversi sistemi di sostituzioni per i cicli, sono fra loro birazionalmente distinte.

Questo *teorema si estende* al caso delle *curve doppie con punti di diramazione*: anzi la dimostrazione si compie ormai molto più facilmente. Infatti, senza bisogno di esaminare di nuovo la questione, ci si può ricondurre al risultato già conseguito mercè l'osservazione seguente. Se si parte da una φ a moduli generali, su cui si scelgono δ punti di diramazione in posizione generale, non possono certo ottenersi curve doppie birazionalmente identiche; imperocchè riunendo a coppie i δ punti anzidetti, si fa sparire ogni diramazione riducendosi al teorema precedente.

Dopo avere stabilito l'esistenza delle diverse famiglie di curve doppie f, rappresentate sopra una medesima φ, passiamo ora ad esaminare come queste f possano essere costruite algebricamente. A tal uopo si osservi che, dato un punto (xy) di φ, le coordinate dei due punti corrispondenti di una f che in qualunque modo nasca dalla φ per una trasformazione [1, 2], ci saranno pôrte dalla risoluzione di un'equazione di secondo grado a coefficienti razionali in x e y, sicchè esse verranno espresse razionalmente mediante un radicale quadratico che potrà supporsi portare sopra un polinomio $\psi(xy)$: pertanto una tale f potrà rappresentarsi mediante la curva gobba

$$f \equiv \{\varphi(xy) = 0, \quad z^2 = \psi(xy)\},$$

cui corrisponde appunto il campo di razionalità

$$\{x, \ y, \ \sqrt{\psi(xy)}\}.$$

In generale sopra una f siffatta, avremo una γ^1_2, dotata di punti doppi, che rispondono a punti di diramazione sopra la φ: vediamo come si determino questi punti. È chiaro anzitutto che se la φ viene segata dalla $\psi(xy) = 0$ in un punto semplice $O \equiv (00)$ non di contatto, questo è un punto critico di diramazione per la curva doppia: infatti, tenuto conto del carattere differenziale della questione, la φ può essere sostituita con la tangente (o con una parabola osculatrice in O) ciò che ci riporta alla costruzione delle curve iperellittiche. Questo ragionamento si sviluppa analiticamente come segue: si ricordi che il polinomio ψ, considerato sopra φ nell'intorno del punto O, diventa infinitesimo del prim'ordine (cfr. L. 3°, § 12, vol. II, pag. 84, e L. 4°, § 3, vol. II, pag. 338) sicchè, eliminando y, si ottiene per i punti di f (nell'intorno di O)

$$z = \sqrt{ax + bx^2 + \ldots} \qquad \text{con } a \neq 0.$$

Ciò che è detto sopra si estende senz'altro al caso in cui la φ possegga in O un nodo, purchè la ψ non tocchi in O

nessuno dei due rami: si avranno allora su φ due punti di diramazione sovrapposti appartenenti ai due distinti rami.

Ma se due delle intersezioni delle curve φ e ψ vengono a coincidere in un punto di contatto, spariscono due punti di diramazione venendo assorbiti in un *punto critico apparente*, cui risponde un (nuovo) punto doppio di f; e così in generale un contatto i-punto di φ e ψ sarà o meno un punto di diramazione secondo che i sia dispari o pari. Queste cose seguono: sia dal principio di continuità ove si osservi che i trasposizioni (12) sovrapposte producono la sostituzione $(12)^i$, sia dall'analisi svolta innanzi per $i = 1$, che si estende subito al caso di i qualunque.

Ora, supponendo in generale che la curva ψ abbia con φ un gruppo, A, di punti di contatto (semplici) e fuori di questo un gruppo, D, d'intersezioni semplici, saremmo tratti a dire che i punti di diramazione della curva doppia cadono soltanto nei punti di D. Però non si è fatta attenzione ai punti all'infinito! Infatti si ha un punto di diramazione per $\sqrt{\psi(xy)}$ non solo dove ψ diventa infinitesima, ma anche ove essa diventa infinita d'ordine dispari; e quindi si dovranno aggiungere al gruppo D dei punti di *diramazione* anche le intersezioni semplici della curva φ con la retta all'*infinito* del piano, nel caso in cui il *polinomio* ψ sia d'*ordine dispari*. (Questa deduzione si può anche ridurre al caso già trattato delle curve iperellittiche, osservando il piano doppio $z^2 = \psi(xy)$, definito da una ψ d'ordine dispari, possiede come curva di diramazione non solo la ψ ma anche la retta all'infinito). Aggiungasi che — per evitare la considerazione di punti di diramazione all'infinito — è sempre lecito ricorrere ad una trasformazione omografica, onde si giustifica l'ipotesi che la ψ sia sempre d'ordine pari.

Ciò posto rivolgiamoci alla costruzione effettiva delle $2^{2\pi}$ classi di curve doppie f, possedenti su φ un dato gruppo di diramazione D. Per confrontare due diverse curve

$$z^2 = \psi_1(xy)$$

e

$$z^2 = \psi_2(xy) \qquad \{\varphi(xy) = 0\}$$

giova ridurci al caso in cui φ_1 e φ_2 abbiano il medesimo ordine: a tal uopo basta sommare alla curva d'ordine minore una retta, per es. $x = 0$, contata un numero pari di volte; è chiaro che questa aggiunta non altera il campo di razionalità della corrispondente curva f, poichè si ha

$$\sqrt{x^2\psi} = x\sqrt{\psi}.$$

Avremo dunque che tutte le $2^{2\pi}$ curve doppie costruite sulla φ in rapporto al gruppo di diramazione D, si otterranno partendo da curve ψ di un certo ordine $2m$ (che può supporsi alto quanto si vuole) passanti per i $\delta = 2\delta'$ punti di D, e tangenti ulteriormente alla φ (supposta d'ordine n) in $\alpha = mn - \delta'$ punti, che costituiscono — per ciascuna — il gruppo A dei punti critici apparenti. Questi gruppi A, di punti critici apparenti, sono tali che i loro doppi appartengono alla medesima serie lineare $g^r_{2\alpha}$ segata dalle ψ per D, che può essere completa o meno, ed — in ogni caso — può supporsi non speciale e di dimensione $r \geq \alpha$.

Ora rileviamo che, partendo da due gruppi A equivalenti, si ottengono certe curve doppie f birazionalmente identiche: infatti si può passare con continuità dall'una all'altra curva doppia facendo variare A entro una serie lineare g_α, sicchè — avendosi soltanto un numero finito di curve doppie rappresentate sulla φ col gruppo di diramazione D — la nostra f (i cui moduli dovrebbero variare per continuità) resta sempre birazionalmente identica a se stessa. Da questa osservazione segue che le f birazionalmente distinte corrisponderanno a gruppi A appartenenti a serie g_α non equivalenti scelte fra quelle che si ottengono bisecando la $g^r_{2\alpha}$; ma sappiamo (§ 35, pag. 394) che la bisezione di una serie non speciale sopra una curva di genere π conduce appunto a $2^{2\pi}$ serie non equivalenti, quante sono le curve doppie rappresentate sulla φ; si conclude pertanto che a gruppi A non equivalenti rispondono f birazionalmente distinte. Cioè sussiste il

Teorema. *Le $2^{2\pi}$ curve f distinte, rappresentate sopra una medesima φ con un dato gruppo D di punti di diramazione, si ottengono estraendo sopra φ una radice*

$$\sqrt{\psi(xy)},$$

dove $\psi = 0$ designa una curva di un certo ordine $2m$ abbastanza elevato, passante per i punti di D, e fuori di questi tangente, ovunque incontri, alla φ: i gruppi, A, dei punti critici apparenti, costituiti dai contatti anzidetti, definiscono in *generale le f birazionalmente distinte, e precisamente queste si ottengono scegliendo i gruppi A entro le $2^{2\pi}$ serie non equivalenti fornite dalla bisezione della medesima serie lineare che viene segata su φ da tutte le curve d' ordine $2m$ passanti per D.*

L' ordine $2m$ delle ψ si può abbassare tutte le volte che una serie di ψ per D, pluritangenti a φ, contenga entro di sè una ψ riducibile, $\psi = \psi_1\theta^2$, dotata di una parte doppia; ma tralasciamo di determinare il minimo valore che così può essere attribuito a $2m$.

Come corollario del teorema precedente: *le $2^{2\pi} - 1$ f irriducibili, rappresentate sulla φ doppia senza punti di diramazione, si ottengono estraendo sopra φ una*

$$\sqrt{\psi(xy)},$$

dove $\psi = 0$ designa una curva d' ordine $2m$ abbastanza elevato, che tocca φ in mn punti, costituenti un gruppo A non equivalente a quelli segati su φ dalle curve d' ordine m.

Per es. le curve irriducibili di genere $p = 5$ rappresentate sopra una quartica (di genere $\pi = 3$) doppia, senza punti di diramazione, si ottengono estraendo su questa una $\sqrt{\psi(xy)}$ dove ψ designa una delle coniche appartenenti ai 63 sistemi di coniche quadritangenti alla quartica (cfr. L. 2°, § 26); se invece si prende come ψ una retta contata due volte, si cade nella f riducibile, costituita da due quartiche non connesse fra loro.

Vediamo come le cose dette si estendano ad un tipo di curve multiple secondo un ordine $\rho > 2$, *tipo* che designeremo col nome di *ciclico,* e che si lascia definire nella maniera seguente.

Dicesi che una curva multipla f, rappresentata sopra una φ contata ρ volte, appartiene al tipo ciclico, quando, in rapporto a tutti i possibili cammini chiusi che P possa descrivere su φ, i punti $P_1 P_2 \dots P_\rho$ di f, corrispondenti ad un punto P di φ, subiscono un gruppo ciclico di sostituzioni che può ritenersi generato dalla sostituzione $(P_1 P_2 \dots. P_\rho)$. In questo caso si dimostra che lo staccamento dei punti $P_1 P_2 \dots P_\rho$ dipende dalla estrazione di una radice ρ-*esima* portante sopra una funzione razionale delle coordinate di P. La dimostrazione di questa proprietà, che s' incontra nella nota teoria delle *equazioni abeliane* [1], viene qui riprodotta per comodità del lettore.

Anzitutto si osservi che i punti $P_1 P_2 \dots P_\rho$ corrispondono ai ρ rami $z_1 z_2 \dots z_\rho$ di una funzione algebrica definita da una equazione di grado ρ

$$F(z) = 0,$$

i cui coefficienti sono funzioni razionali delle coordinate (xy) di P. Ora si consideri l'espressione

$$u_h = z_1 + \varepsilon^h z_2 + \varepsilon^{2h} z_3 + \dots + \varepsilon^{(\rho-1)h} z_\rho$$

dove ε designa una radice primitiva ρ-*esima* dell'unità, per es. $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\rho}}$ $(i = \sqrt{-1})$. Poichè $z_1 z_2 \dots z_\rho$ si permutano circolarmente in corrispondenza ai cicli descritti da P sulla riemanniana di φ, la funzione u_h subisce per questi cicli una semplice moltiplicazione per qualche radice ρ-*esima* dell'unità, sicchè u_h^ρ riesce funzione univoca del punto P, e si riduce ad una funzione razionale $\psi_h(xy)$. Scriviamo per $h = 1, 2 \dots \rho - 1$ le ρ equazioni lineari

$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 + \dots + \varepsilon^{\rho-1} z_\rho = \sqrt[\rho]{\psi_1(xy)},$$

$$z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^4 z_3 + \dots + \varepsilon^{2(\rho-1)} z_\rho = \sqrt[\rho]{\psi_2(xy)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_1 + \varepsilon^{\rho-1} z_2 + \varepsilon^{2(\rho-1)} z_3 + \dots + \varepsilon^{(\rho-1)^2} z_\rho = \sqrt[\rho]{\psi_{\rho-1}(xy)}$$

cui aggiungiamo la

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_\rho = \theta(xy)$$

dove θ, che contiene simmetricamente le z, riesce razionale in (xy).

Risolvendo questo sistema a determinante non nullo, troveremo per z_1, ossia per la funzione algebrica z, una funzione del tipo

$$z = A_0 + A_1 \sqrt[\rho]{\psi_1} + A_2 \sqrt[\rho]{\psi_2} \dots + A_{\rho-1} \sqrt[\rho]{\psi_{\rho-1}}$$

dove le A sono razionali in x e y.

[1] Cfr. per es. BIANCHI « Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni... », cap. VI.

Ma osserviamo che il prodotto

$$u_1^{\rho-h} u_h$$

rimane invariato per la sostituzione circolare $(z_1 z_2 \dots z_\rho)$, sicchè può definirsi come funzione razionale di x e y; segue da ciò che la $\sqrt[\rho]{\psi_h}$ si riduce alla $\sqrt[\rho]{\psi_1}$ moltiplicata per una funzione razionale, e per conseguenza z risulta espressa razionalmente per la radice ρ-*esima* di ψ_1. c. d. d.

Riferendoci dunque alle curve multiple del tipo ciclico

$$f \equiv \{ x, y, \sqrt[\rho]{\psi(xy)}, \quad \varphi(xy) = 0 \}$$

rappresentate sopra una φ di genere π senza punti di diramazione, cerchiamo di contare quante sono le famiglie diverse in cui tali f si distribuiscono. Per semplicità ci limiteremo all'ipotesi che l'ordine ρ sia un numero primo.

Per definizione, si ottiene una qualunque f assegnando — in corrispondenza ai 2π cicli della riemanniana φ — sostituzioni che siano potenze di una medesima:

$$S_i = (12 \dots \rho)^{r_i};$$

i casi possibili sono $\rho^{2\pi}$, ma si stacca anzitutto il caso della f riducibile per cui tutte le S_i sono l'identità $(r_i = 0)$; inoltre sistemi diversi di sostituzioni non danno f distinte quando si passi dall'uno all'altro con un semplice cambiamento di designazione dei ρ fogli, cioè quando esista un intero h per cui

$$r_i' \equiv h r_i \pmod{\rho};$$

poichè può aversi $h = 1, 2, \dots, \rho - 1$, si deduce che le f irriducibili distinte, sono soltanto

$$\frac{\rho^{2\pi} - 1}{\rho - 1}.$$

Che queste f, distinte come superficie di Riemann multiple, sieno anche *birazionalmente distinte*, almeno per una φ *a moduli generali*, si dimostra con facile estensione del ragionamento svolto per $\rho = 2$ nella Nota che abbiamo dedicato all'esame di tale questione.

Ora occupiamoci della *costruzione algebrica* delle nostre f. È chiaro che si ottengono curve multiple f del tipo ciclico anzidetto,

$$f \equiv \{x,\ y,\ \sqrt[\rho]{\psi(x)},\quad \varphi(xy) = 0\}$$

in corrispondenza a curve ψ di un ordine ρm abbastanza elevato aventi mn contatti ρ-punti con la φ (d'ordine n). E, se si considerano due siffatte curve pluritangenti, ψ e ψ', per cui i gruppi dei punti di contatto (punti critici apparenti) A e A' siano equivalenti, le f corrispondenti risultano identiche. Ma, a differenza del caso $\rho = 2$, l'equivalenza dei gruppi A e A' non è necessaria perchè si abbia codesta identità birazionale: ciò risulta *a priori* dalla circostanza che si avrebbero in tal guisa $\rho^{2\pi} - 1$, anzichè $\dfrac{\rho^{2\pi} - 1}{\rho - 1}$ curve f distinte. D'altronde è anche chiaro che la $\sqrt[\rho]{\psi}$ e la $\sqrt[\rho]{\psi^h}$ $(h = 2 \ldots \rho - 1)$, estratte sopra φ, definiscono lo stesso campo di razionalità; e la $\sqrt[\rho]{\psi^h}$ si riconduce al tipo $\sqrt[\rho]{\psi'}$ (dove ψ' ha ancora l'ordine ρm) sostituendo a ψ^h una curva, che tocca in un gruppo di punti equivalente, costituita da ψ' e da una θ, d'ordine m, contata $(h-1)\rho$ volte. Così facendo si otterrà un gruppo A' (di contatto della ψ') non-equivalente ad A, tutte le volte che A non equivalga al gruppo segato su φ da una curva d'ordine m, e ciò qualunque sia il valore di h: infatti, designando con $|A|$ e $|A'|$ le serie d'ordine mn determinate su φ da A e A', e con $|T|$ quella definita dal gruppo T sezione della θ, si ha per ipotesi che gli equimultipli

$$|(h-1)A| \quad \text{e} \quad |(h-1)T|$$

sono serie diverse per $1 < h < \rho$, e quindi la serie

$$|A'| = |hA - (h-1)T|$$

è diversa dalla $|A|$. c. d. d.

Emerge da quanto precede che le ψ, pluritangenti a φ, che danno origine alle $\dfrac{\rho^{2\pi} - 1}{\rho - 1}$ curve f irriducibili diverse fra loro, si distribuiscono in

$$\frac{\rho^{2\pi} - 1}{\rho - 1}$$

famiglie, ognuna delle quali comprende $\rho - 1$ sistemi per cui i gruppi di contatto sono non equivalenti. Si può caratterizzare brevemente la relazione di questi gruppi di punti critici apparenti, che danno origine ad f identiche, introducendo il concetto di *gruppi di punti simili* sopra φ. Diremo che due gruppi A e A' di mn punti, presi sulla curva φ d'ordine n, sono simili (in ordine ai sistemi di curve d'ordine ρm con mn contatti ρ-punti), quando due multipli di essi, secondo numeri r e s inferiori a ρ, risultino equivalenti ovvero differiscano soltanto per un multiplo della serie $|T|$ segata dalle curve θ d'ordine m, cioè quando sia:

$$rA \equiv sA' \quad (\text{mod. } T).$$

È ovvio che tale relazione porta l'esistenza di un $h < \rho$ per cui $|A'| = |hA - (h-1)T|$; infatti si determini il minimo numero k per cui $ks \equiv 1$ (mod. ρ): avremo allora

$$A' \equiv krA \quad (\text{mod. } T),$$

e, sostituendo a kr il suo resto, h, rispetto al modulo ρ, risulterà ancora

$$A' \equiv hA \quad (\text{mod. } T),$$

cioè, tenuto conto che A, A', T sono formati ugualmente di mn punti,

$$A' + (h-1)T \equiv hA,$$

e tale equivalenza di gruppi significa appunto l'identità delle due serie scritte sopra.

Ora potremo enunciare il

Teorema: *Esistono in generale, quando ρ è un numero primo, $\dfrac{\rho^{2\pi} - 1}{\rho - 1}$ curve f irriducibili, birazionalmente distinte, ottenute estraendo sopra la φ, di genere π, una radice d'ordine ρ, priva di punti di diramazione*: queste f corrispondono ad un radicando che sia un polinomio ψ, d'ordine ρm abbastanza elevato, tale che la curva $\psi = 0$ abbia con φ mn contatti ρ-punti: *le f distinte* si ottengono in rapporto a gruppi di punti critici apparenti *non simili* fra loro.

Osservazione. La costruzione delle curve multiple del tipo ciclico prive di punti di diramazione, si estende al caso in cui l'ordine sia un numero ν composto. Anche qui si ha da estrarre un radicale d'ordine ν portante sopra un polinomio $\psi(xy)$, dove ψ designa una curva di un certo ordine νm avente con φ mn contatti ν-punti. Naturalmente si ottengono curve multiple *riducibili*, non solo quando la ψ si riduca ad una curva d'ordine m contata ν volte: $\psi = \theta_m^\nu$, ma anche quando si abbia $\psi = \theta_{mh}^{\frac{\nu}{h}}$, dove θ_{mh} sia una curva d'ordine mh con mn contatti h-punti; e quindi si ottengono curve riducibili se il gruppo dei contatti di φ con ψ sia equivalente a quello di una delle curve θ indicate innanzi. Aggiungasi che, come pel caso in cui ν è primo, risultano equivalenti le curve multiple ottenute partendo da una ψ, o da una ψ^r quando r sia primo con ν, e quindi anche da due ψ dello stesso ordine i cui punti di contatto formino gruppi simili sopra φ.

Notizia. La distinzione delle diverse classi di curve multiple

$$\{ x,\ y,\ \sqrt[\nu]{\psi(x,\ y)},\ \ \varphi(x,\ y) = 0 \}$$

senza punti di diramazione, in ordine alle serie cui appartengono i gruppi dei punti di contatto delle diverse ψ con φ, è stata stabilita da ENRIQUES per il caso $\pi = 1$, mercè l'uso delle funzioni ellittiche [1]. COMESSATTI [2] ha esteso il teorema alle curve doppie costruite sopra una φ di genere π qualsiasi, adoperando all'uopo le funzioni abeliane; e CHISINI [3] ha illuminato la questione mostrando come si costruiscano — per ν qualsiasi — le nostre curve multiple, quando si assegnino, in ordine ai 2π cicli, determinate sostituzioni. Più tardi [4], egli è tornato sull'argomento, limitatamente al caso caratteristico $\pi = 1$, ma per ν qualsiasi, onde ottenere la costruzione delle superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto. In questo lavoro è stabilito per via trascendente, ed algebricamente interpretato, il concetto dei *gruppi*

(1) « Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero ». (*Rend. del Circolo mat. di Palermo* (5 marzo 1905). Cfr. § 6 (pag. 22 dell'estratto).

(2) Memorie dell'Acc. di Torino, serie II, t. XL.

(3) Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 17 gennaio 1915.

(4) In tre Note dei Rendiconti dell'Acc. dei Lincei del 2° semestre 1921.

di punti critici apparenti, da cui dipende la distinzione delle varie curve multiple birazionalmente distinte.

§ 39. **Applicazioni: curve ellittiche multiple senza punti di diramazione.** — I resultati precedenti trovano una interessante applicazione, venendo più precisamente determinati, nel caso delle curve ellittiche.

Osserviamo anzitutto che se una curva f di genere p è rappresentata sopra una curva ellittica φ, contata ν volte, senza punti di diramazione, si ha

$$\pi = 1\,;$$

sicchè lo studio delle curve ellittiche multiple senza punti di diramazione equivale allo studio delle involuzioni ellittiche γ^1_ν appartenenti ad una curva ellittica. Ora si può dimostrare che:

Un' involuzione γ^1_ν ellittica, appartenente ad una curva ellittica f, viene generata da un gruppo di ordine ν di trasformazioni birazionali permutabili della f, che sono per essa trasformazioni di prima specie, sicchè l'equazione algebrica da cui dipende lo staccamento dei ν punti di un gruppo generico della γ^1_ν è un' equazione *abeliana*.

Per dimostrare il teorema riferiamoci alla riemanniana della curva φ, che può supporsi realizzata da un toro, nel quale considereremo i cicli costituiti dai due fasci di cerchi ortogonali C e K. Su un punto generico P del toro si immagineranno deposti i ν punti $P_1 P_2 \ldots . P_\nu$ della curva multipla f.

Vediamo anzitutto che il gruppo G delle sostituzioni su $P_1 P_2 \ldots . P_\nu$ prodotte dai cicli della φ, è abeliano, cioè composto di sostituzioni permutabili. Infatti sono permutabili le due sostituzioni generatrici di G corrispondenti ai cicli C e K, poichè il ciclo trasformato di C mediante K si riduce a C stesso *per equivalenza*, cioè con deformazione continua in cui si tien ferma l'origine P [1]: questa deformazione si effettua facendo descrivere a C il relativo fascio fino a tornare in se stesso.

Ora, per l'irriducibilità di f, il gruppo G deve essere

[1] Cfr. la Nota a pag. 455.

transitivo; da ciò si deduce che una sostituzione di G che lasci fermo un punto P_1, lascia pur fermi tutti gli altri punti P_2, P_3,...., P_ν nei quali P_1 è portato dalle altre sostituzioni di G. Questa proprietà del gruppo G significa che ciascuno dei punti P_i dipende razionalmente da P_1: così la coppia P_1P_i determina una trasformazione birazionale (P_1P_i) della curva f, la quale permuta i punti di un gruppo $P_1P_2....P_\nu$ secondo una certa sostituzione S che è una sostituzione di G. Pertanto la γ_ν^1 viene generata effettivamente da un gruppo Γ — isomorfo a G — di trasformazioni permutabili di f, come si era enunciato. Aggiungasi che le trasformazioni birazionali anzidette sono trasformazioni di prima specie della curva f, non potendo essere nè trasformazioni di seconda specie nè trasformazioni singolari, perchè prive di punti uniti.

Ora dunque la costruzione delle curve ellittiche senza punti di diramazione, viene ricondotta alla determinazione dei gruppi finiti Γ di trasformazioni di prima specie, di una curva ellittica f.

Tenuto conto dell'isomorfismo che intercede fra Γ e il gruppo di monodromia G (relativo ai cicli della riemanniana φ), dovremo considerare due casi:

1) Γ è ciclico, le due operazioni generatrici, corrispondenti ai cicli di φ, essendo potenze di una medesima: la curva multipla f appartiene al tipo ciclico definito innanzi;

2) Γ non è ciclico, essendo generato da due trasformazioni che non sono potenze di una medesima.

1) Nel primo caso la f è definita dal campo di razionalità

$$\{x,\ y,\ \sqrt[\nu]{\psi_\nu(xy)},\quad \varphi_3(xy)=0\},$$

dove φ_3 designa una cubica senza punti doppi, e ψ_ν una curva d'ordine ν avente con φ_3 tre contatti ν-punti.

Abbiamo già visto che quando ν è primo, le f irriducibili così definite si ripartiscono in $\nu+1$ famiglie, in generale birazionalmente distinte; invero le terne dei punti di contatto non equivalenti di una ψ_ν sono ν^2-1 (essendo escluso che esse appartengano alla g_3^2 segata dalle rette); ma codeste terne si ripartiscono in $\dfrac{\nu^2-1}{\nu-1}=\nu+1$ famiglie di gruppi simili, cui rispondono $\nu+1$ curve f.

Quando ν non è primo, il numero delle f distinte si può calcolare tenendo conto dell'osservazione fatta innanzi: ciò che può formare oggetto di esercitazione per lo studioso.

2) Per il secondo caso occorre premettere un

Lemma sui gruppi abeliani generati da due operazioni. Si considerino le operazioni α e β generatrici del gruppo Γ; in quanto esse sono definite in corrispondenza ai due cicli della riemanniana φ, non si può ammettere *a priori* che esse siano indipendenti; tuttavia si riesce in ogni caso a costruire due operazioni π_1 e π_2, per moltiplicazione delle quali viene generato l'intiero gruppo abeliano Γ, soddisfacendo alle seguenti condizioni:

le π_1 e π_2 sono indipendenti, cioè i due gruppi ciclici da esse generati non hanno comune che l'identità: in conseguenza l'ordine ν di Γ è il prodotto dei periodi ν_1 e ν_2, di π_1 e π_2;

il periodo ν_2 di π_2 è divisore del periodo ν_1 di π_1.

La costruzione di queste operazioni generatrici, che appartiene alla teoria generale dei gruppi (abeliani) di operazioni permutabili, si effettua come segue [1].

Si designino con a e b i periodi di α e β, e si decompongano i numeri a e b in prodotti di fattori primi, scrivendo

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}$$
$$b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_i^{b_i}$$

dove qualcuno degli esponenti può essere uguale a zero. Potremo distinguere i nostri fattori primi p in due categorie di numeri p_h e p_k, designando con p_h un fattore per cui sia

$$a_h < b_h$$

e con p_k un fattore per cui sia invece

$$a_k \geq b_k .$$

[1] Per la costruzione generale della *base* di un gruppo abeliano cfr. per es. BIANCHI (op. cit.); tuttavia non si ha qui una semplice particolarizzazione del procedimento ivi spiegato, ma occorre aggiungere qualche cosa in rapporto alla circostanza che Γ viene definito da due operazioni non necessariamente indipendenti. La costruzione qui riprodotta appartiene a CHISINI, e trovasi nella prima delle Note citate alla fine del paragrafo precedente.

Ciò posto porremo m uguale al prodotto dei fattori della prima categoria elevati agli esponenti a_h:

$$m = \Pi p_h^{a_h},$$

e porremo similmente

$$n = \Pi p_k^{b_k}.$$

È chiaro che i due numeri

$$m \quad \text{e} \quad n$$

così costruiti sono primi fra loro. Inoltre se si costruiscono i numeri interi

$$r = \frac{a}{m}, \quad s = \frac{b}{n},$$

è pur chiaro che riescono primi fra loro

$$m \quad \text{e} \quad r$$

e così

$$n \quad \text{e} \quad s.$$

Ma anche i due numeri

$$r \quad \text{e} \quad s$$

risultano primi fra loro, giacchè ogni fattore primo che figura contemporaneamente in a e in b, viene tolto da uno dei due prodotti quando a e b vengono divisi rispettivamente per m e n; a ciò si aggiunga che il prodotto rs è il minimo comune multiplo di a e b.

Ora poniamo

$$\pi_1 = \alpha^m \beta^n:$$

il periodo di π_1 sarà $\nu_1 = rs$ imperocchè il periodo di α^m è r e il periodo di β^n è s, ed r e s sono primi fra loro, onde α^m e β^n sono indipendenti, cioè non può esistere una potenza di α^m uguale a una potenza di β^n e diversa dall'identità. Questo periodo $\nu_1 = rs$ di π_1 sarà il massimo possibile che appartenga ad un'operazione del Γ generato per moltiplicazione da α e β, ed ogni altro periodo di un'operazione di Γ sarà un divisore di ν_1: infatti elevando $\alpha^x \beta^y$ alla potenza ν_1, multipla di a e di b, si otterrà un'operazione del tipo

$$\alpha^{x_1 a} \beta^{y_1 b} = 1.$$

Dopociò si definisca l'operazione

$$\pi = \alpha^r \beta^s :$$

dimostriamo che π e π_1 generano l'intero Γ.

A tale scopo si osserverà anzitutto che entro il gruppo ciclico, generato da $\pi_1 = \alpha^m \beta^n$, sono contenute α^m e β^n e così nel gruppo ciclico generato da π sono contenute α^r e β^s: ciò segue dall'essere primi fra loro i periodi r e s di α^m e β^n, e similmente i periodi m e n di α^r e β^s.

Ora poichè m e r sono primi fra loro e $mr = a$, α^m e α^r generano per moltiplicazione l'intero gruppo delle a potenze di α; e così pure β^n e β^s generano l'intero gruppo delle b potenze di β. Per conseguenza π_1 e π generano per moltiplicazione l'intero gruppo Γ generato da α e β.

Dopociò si consideri il *periodo* ν_2 di π *relativo* al gruppo ciclico Γ_1 generato da π_1, cioè il minimo esponente ν_2 per cui π^{ν_2} appartiene al Γ_1: può accadere che ν_2 coincida col periodo assoluto mn di π ($\pi^{\nu_2} = 1$), ma può darsi invece che ν_2 sia un divisore proprio di mn, avendosi

$$\pi^{\nu_2} = \pi_1^{\mu};$$

allora, uguagliando i periodi delle due operazioni, si ottiene

$$\frac{mn}{\nu_2} = \frac{\nu_1}{\mu} \quad \text{cioè} \quad \mu = \frac{\nu_1}{mn}\nu_2,$$

sicchè, essendo ν_1 multiplo di mn, si dedurrà che μ è multiplo di ν_2.

In tal caso per generare Γ, prenderemo, accanto a π_1 e in luogo di π, l'operazione π_2 data da

$$\pi_2 = \pi\pi_1^x \qquad (\pi = \pi_2\pi_1^{-x})$$

con

$$x = -\frac{\mu}{\nu_2},$$

costruendo così una π_2 per cui il periodo assoluto, ν_2, uguaglia il periodo relativo: infatti

$$\pi_2^{\nu_2} = \pi^{\nu_2}\pi_1^{-\mu} = 1.$$

Pertanto il gruppo Γ *si può generare con due operazioni* π_1 *e* π_2 *soddisfacenti alle condizioni poste* (¹). c. d. d.

Risulta intanto dal lemma stabilito che la classificazione dei gruppi d'ordine ν di trasformazioni di prima specie sopra una curva ellittica f, è in rapporto col carattere aritmetico di ν; giacchè si possono avere tipi di gruppi diversi in corrispondenza alle diverse decomposizioni possibili di ν in due fattori ν_1 e ν_2, uno dei quali (ν_2) divida l'altro, cioè in corrispondenza alle diverse espressioni di ν della forma:

$$\nu = pq^2 \qquad (\nu_1 = pq,\ \nu_2 = q).$$

Ora vediamo come il lemma stesso permetta di ridurre al caso ciclico 1) la costruzione di una qualsiasi curva multipla f, rappresentata sopra una φ da contarsi ν volte.

Pongasi che la γ^1_ν, i cui gruppi rispondono ai punti di φ, sia relativa ad un gruppo Γ generato da due trasformazioni di prima specie indipendenti π_1 e π_2, degli ordini

$$\nu_1 = pq, \quad \nu_2 = q \quad (\nu = pq^2):$$

allora i punti di un gruppo G_ν della γ^1_ν potranno venire rappresentati nel quadro

$$G_\nu = \left\{ \begin{array}{l} A_{11} A_{12} \dots A_{1,pq} \\ A_{21} A_{22} \dots A_{2,pq} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{q1} A_{q2} \dots A_{q,pq}, \end{array} \right.$$

dove la π_1 lascia fermi i primi indici e produce sui secondi la sostituzione $(1, 2, \dots pq)$, mentre la π_2 lascia fermi i secondi indici e produce sui primi la sostituzione $(1, 2, \dots q)$.

Ciò posto si considerino le colonne del nostro quadro come i punti di una curva f_1, e le linee come i punti di una f_2: sopra f_1 si ha una involuzione ciclica d'ordine pq avente per immagine φ, mentre sopra f_2 si ha una involu-

(¹) Per $\nu = n^2$ si ritrova in particolare un risultato fondamentale relativo al gruppo Γ_{n^2} delle trasformazioni di prima specie che lasciano invariate le g_n^{n-1} di una curva ellittica. Premesso che queste trasformazioni sono cicliche d'ordine n (o divisore di n) si deduce dal teorema enunciato che il Γ_{n^2} può generarsi mediante due trasformazioni indipendenti d'ordine n: la quale generazione fu da noi dimostrata in altro modo nel § 28, pag. 269.

zione ciclica d'ordine q rappresentata sulla stessa φ. Così i punti di f_1, corrispondenti alle colonne di un G_ν, si otterranno in funzione razionale di un punto (xy) di φ e di un radicale

$$\sqrt[pq]{\psi_{pq}(xy)},$$

mentre i punti di f_2, corrispondenti alle linee dello stesso G_ν, si otterranno in funzione razionale del medesimo punto (xy) e di un radicale

$$\sqrt[q]{\psi_q(xy)}$$

sicchè in fine *la curva multipla f corrisponderà al campo di razionalità*

$$\{ x,\ y,\ \sqrt[pq]{\psi_{pq}(xy)},\quad \sqrt[q]{\psi_q(xy)},\quad \varphi_3(xy)=0 \},$$

dove le ψ_{pq} e ψ_q designano curve d'ordine pq e q, aventi con φ_3 tre contatti rispettivamente degli ordini $pq-1$ e $q-1$.

A chiarimento della costruzione fatta si può dire che f appare qui come immagine (della serie delle coppie di punti omologhi) di una corrispondenza $[pq,\ q]$ fra due curve f_1 e f_2, rappresentate ciclicamente su φ; le quali sono a loro volta le immagini di due involuzioni γ^1_q e γ^1_{pq} (generate da π_2 e π_1) mercè cui riesce composta la γ^1_ν di f.

Aggiungiamo che la curva f relativa al campo di razionalità precedente, sia per es. la

$$z=\sqrt[pq]{\psi_{pq}(xy)}+\sqrt[q]{\psi_q(xy)},\qquad \varphi_3(xy)=0,$$

risulta effettivamente irriducibile contenendo una γ^1_ν d'ordine $\nu=pq^2$ che ha per immagine φ, quando accada:

a) che siano irriducibili le due curve f_1 e f_2 corrispondenti ai due radicali, (condizione già esaminata a proposito del caso ciclico);

b) che le terne dei punti di contatto di φ con ψ_{pq} e ψ_q — in rapporto alle varie famiglie di curve d'ordine q tritangenti — siano dissimili, cosichè le due curve

$$z=\sqrt[q]{\psi_q(xy)}\quad \text{e}\quad z=\sqrt[q]{\psi_{pq}(xy)}$$

siano birazionalmente distinte (mentre nel caso in cui tali terne fossero simili la γ^1_ν si spezzerebbe in q involuzioni d'ordine pq); e che, similmente, siano dissimili le dette terne anche rispetto le curve d'ordine q', divisore di q, pure tritangenti alla φ [1].

Quanto al *numero delle f birazionalmente distinte* che vengono fornite dalle formule precedenti, avvertiamo che esse sono tante *quante le curve* $\bar{f}$

$$z = \{ \sqrt[p]{\psi_p(xy)}, \quad \varphi(xy) = 0 \},$$

dove ψ_p designa una curva d'ordine p avente tre contatti p-punti con la cubica φ [2]. Per dimostrarlo basta osservare che la curva

$$\bar{\varphi} \equiv \sqrt[q]{\psi_q(xy)} + \sqrt[q]{\psi_{pq}(xy)}, \quad \varphi(xy) = 0$$

contiene *una* $\gamma^1_{q^2}$ che ha per immagine φ e che è — d'altra parte — identica alla stessa $\bar{\varphi}$ (ciascun gruppo della $\gamma^1_{q^2}$ è il gruppo dei punti *q-pli* di una g^{q-1}_q, e la serie delle g^{q-1}_q è identica alla $\bar{\varphi}$; cfr. § 28, pag. 265), sicchè la f si ottiene estraendo una radice p-esima sopra la $\bar{\varphi}$, cioè sulla φ.

Osservazione I. L'analisi precedente risolve completamente il problema di costruire le curve ellittiche $f(XY) = 0$, trasformate razionali di una data $\varphi(xy) = 0$, cioè nascenti da essa per una trasformazione razionale

$$x = x(X, Y), \quad y = y(X, Y).$$

Ora è interessante osservare che nello stesso tempo viene risolto anche il *problema inverso*, in cui « data la f si vogliono determinare le φ ellittiche di cui essa è trasformata razionale », cioè il problema della costruzione delle involuzioni ellittiche appartenenti ad una f.

Anzitutto *le involuzioni cicliche γ^1_q di f, corrispondono alle curve multiple rappresentate sulla f contata q volte.* Infatti l'involuzione ciclica γ^1_q di f moltiplicata per una trasformazione ciclica indipendente, dà luogo ad una $\gamma^1_{q^2}$ che sap-

(1) Cfr. Chisini, l. c., Nota II.

(2) Precisamente sarebbe facile vedere, quantunque qui non occorra, che le varie f birazionalmente distinte si ottengono in corrispondenza alle varie terne di contatto delle ψ_{pq}, dissimili in rapporto alle famiglie di curve tritangenti d'ordine p. (Cfr. Chisini, l. c., Nota II).

piamo avere per immagine una curva $\bar{f}$, birazionalmente identica ad f; in conseguenza la φ riesce rappresentata sulla $\bar{f}$, ossia sulla f, contata q volte.

Dal caso delle involuzioni cicliche si passa ora al caso generale notando che un'involuzione di f, $\gamma^1_{pq^2}$, generata da due trasformazioni cicliche di f, d'ordini pq e q, si muta in una γ^1_p ciclica, mediante la trasformazione $[q^2, 1]$ della f in se stessa, relativa alla sopra nominata $\gamma^1_{q^2}$.

Osservazione II. Riprendiamo la considerazione del gruppo abeliano Γ che viene definito sopra la f multipla d'ordine ν, dalle due operazioni fondamentali α e β relative ai cicli della φ immagine della sua γ^1_ν: vogliamo completare le cose dette innanzi assegnando un criterio per riconoscere quando il Γ risulti un gruppo ciclico, generabile da una sola operazione π di periodo ν, o invece un gruppo non ciclico generato allora da due operazioni indipendenti $\pi_1 \pi_2$ di periodi $\nu_1 = pq$ e $\nu_2 = q$.

È anzitutto chiaro che se i due periodi a e b delle operazioni α e β sono primi fra loro, il gruppo Γ è ciclico ed è $\nu = ab$. Infatti in tale ipotesi l'operazione $\pi = \alpha\beta$, ha il periodo $\nu = ab$, e quindi genera tutto il gruppo delle ab operazioni

$$\alpha^r \beta^s \qquad (r \leq a, \ s \leq b)$$

appartenenti a Γ.

Ora la condizione precedente si può estendere al caso in cui a e b non siano primi fra di loro: *il gruppo abeliano Γ, d'ordine ν, generato dalle operazioni α e β di periodi a e b, sarà ciclico o no secondochè saranno o no primi fra loro i numeri $\frac{\nu}{a}$ e $\frac{\nu}{b}$.*

Infatti:

1) se il Γ è ciclico, cioè formato dalle potenze di una π d'ordine ν, sarà

$$\alpha = \pi^{\frac{\nu}{a}}, \quad \beta = \pi^{\frac{\nu}{b}},$$

e affinchè α e β generino l'intero gruppo $\frac{\nu}{a}$ e $\frac{\nu}{b}$ dovranno esser primi fra loro;

2) invece se Γ non è ciclico si prova che $\frac{\nu}{a}$ e $\frac{\nu}{b}$ non sono primi fra loro. Invero in questo caso il Γ sarà generato da una π_1 d'ordine massimo pq e da una π_2 indipendente

d'ordine q ($\nu = pq^2$); quindi a e b dovranno dividere pq, e però $\frac{\nu}{a} = \frac{pq^2}{a}$ e $\frac{\nu}{b} = \frac{pq^2}{b}$ avranno il fattore comune q.

Nota. Il fatto fondamentale che le *curve ellittiche multiple senza punti di diramazione* corrispondono a *gruppi abeliani*, *non si estende* al caso delle φ di *genere* $\pi > 1$. Già per $\pi = 2$ si può costruire una φ multipla, per es. tripla, i cui rami si permutino, per due cicli C_1 e C_2 descritti sulla riemanniana φ a partire da un punto O, secondo sostituzioni non permutabili. Infatti consideriamo la riemanniana φ a due fogli, che denoteremo con le lettere a e b, dotata di 6 punti di diramazione $A_1 A_2 \dots A_6$; i cappi OA_i partenti da un punto O del piano danno dunque origine allo scambio (ab) dei due fogli. Ora possiamo costruire una riemanniana a 6 fogli $a_1 a_2 a_3 \; b_1 b_2 b_3$, che verrà rappresentata sulla φ tripla, assegnando che essa debba avere come punti di diramazione gli stessi $A_1 A_2 \dots A_6$ con le sostituzioni seguenti:

$$\begin{array}{lll}
\text{per } A_1 & \text{e per } A_6 & (a_1 b_1)(a_2 b_2)(a_3 b_3) \\
\text{per } A_2 & \text{e per } A_5 & (a_1 b_1)(a_2 b_3)(a_3 b_2) \\
\text{per } A_3 & \text{e per } A_4 & (a_1 b_3)(a_2 b_3)(a_3 b_1).
\end{array}$$

Queste sostituzioni formano un gruppo transitivo, e prese secondo l'ordine dei cappi $OA_1 \; OA_2 \dots OA_6$ danno come prodotto l'identità; tali condizioni assicurano l'esistenza di una curva così rappresentata sul piano, e però rappresentata sulla φ tripla senza punti di diramazione. Ciò posto si considerino i due cicli di φ che vengono dati da $C_1 = OA_1 + OA_2$, $C_2 = OA_2 + OA_3$; il primo, scambiando a_2 con a_3 e b_2 con b_3, produce sui rami 1, 2, 3, la sostituzione (23), mentre il secondo produce la sostituzione (13); si deduce che il ciclo $C_1 + C_2$ produce la sostituzione

$$(12)(13) = (132),$$

mentre $C_2 + C_1$ produce la sostituzione

$$(13)(12) = (123).$$

La non permutabilità delle sostituzioni relative a due cicli di una superficie di Riemann multipla, significa che per $\pi > 1$ la somma di due cicli C_1 e C_2 della riemanniana φ

(sebbene sia omologa a $C_2 + C_1$, cfr. § 37) non è *equivalente* a $C_2 + C_1$, cioè non può ridursi a $C_2 + C_1$ per una *deformazione continua che lasci ferma l'origine* O; in altre parole il ciclo C_1', di origine O, trasformato di C_1 mediante C_2 è equivalente a C_2 soltanto per $\pi = 1$.

A chiarimento di ciò giova dire che il ragionamento con cui innanzi si è provata la permutabilità di C_1 e C_2 per $\pi = 1$, ossia l'equivalenza di C_1' a C_1, consiste nella constatazione che « operando un taglio C_1 sopra la riemanniana φ i due orli del taglio risultano omologhi sopra la superficie tagliata ». È chiaro come questa omologia porti a sua volta $\pi = 1$, giacchè — due cicli vicini a C_1 essendo omologhi in due modi diversi — ne risulta la possibilità di considerare φ come somma di due superficie cilindriche, e quindi come superficie torica. Invece per $\pi > 1$ i due orli di un taglio C_1 praticato su φ non riescono più omologhi, e a tale circostanza si collega la non equivalenza di C_1 e del trasformato C_1', della quale il lettore potrà convincersi mercè la visione del caso $\pi = 2$, in cui la φ si presenta come una sfera con due manichi.

40. Il principio di corrispondenza sopra una curva. — Ci proponiamo qui di studiare brevemente le corrispondenze algebriche che possono intercedere fra due curve f e f', con speciale riguardo a quelle fra due curve dello stesso genere ed anzi addirittura coincidenti.

Si indichino con p e p' i generi di f e f', e pongasi che a un punto di f rispondano n' punti di f', mentre a un punto di f' rispondano inversamente n punti di f: si ha allora fra le due curve una corrispondenza $[n, n']$. Fra i caratteri di questa corrispondenza occorre considerare il numero δ dei punti di diramazione su f e il numero δ' dei punti di diramazione su f'; abbiam visto (§ 9) che i caratteri così definiti sono legati dalla relazione di ZEUTHEN

$$n'(2p - 2) + \delta = n(2p' - 2) + \delta'.$$

Se nella relazione precedente si fa $p = p' > 1$ e $n = 1$, sicchè $\delta' = 0$, si deduce $\delta = 0$ e $n' = 1$; sicchè si può enunciare con WEBER [1]:

[1] Journal für Math. Bd. 76 (1873).

Se fra due curve dello stesso genere $p > 1$ *intercede una corrispondenza razionale in un senso, questa è anche razionalmente invertibile.* Il caso $p = 1$ costituisce una vera eccezione al teorema, infatti abbiamo studiato nel § 39 la trasformazione $[1, n']$ fra due curve ellittiche, e in particolare anche le trasformazioni $[1, n']$ sopra una curva ellittica.

Ora, assumendo f e f' sovrapposte, cominciamo a costruire un tipo di corrispondenze definibili sopra una qualunque curva f: tali sono le *corrispondenze rappresentate da una sola equazione*

1) $$\varphi(xy,\ x'y') = 0$$

che aggiunta alle

$$f(xy) = 0, \quad f(x'y') = 0,$$

permette di determinare gli n' punti $(x'y')$ corrispondenti ad un punto (xy), e inversamente gli n punti (xy) corrispondenti ad un punto $(x'y')$.

A completare la definizione della corrispondenza per mezzo dell'equazione 1) giovano le seguenti osservazioni:

a) Può darsi che la φ, al variare di (xy), passi per un certo numero di punti fissi della f; allora si può dire che questi punti corrispondono a qualunque punto (xy) in una corrispondenza degenere che fa parte della 1); ma in generale si conviene di staccare questa corrispondenza degenere ritenendo dunque che gli n' omologhi del punto (xy) siano soltanto i punti variabili definiti dalla 1). E lo stesso dicasi per la corrispondenza inversa.

b) Può accadere che fra gli omologhi del punto (xy) figuri sempre il punto stesso contato un certo numero v di volte; in questo caso si può dire che la corrispondenza identica I entra v volte a far parte della 1); ma di solito si conviene di staccare la I, ritenendo dunque come omologhi di (xy) soltanto i punti variabili che sono in generale distinti da esso. Allora il numero v designa un carattere importante della nostra corrispondenza che da Brill [1] (1873) ha ricevuto il nome di *valenza* (Wertigkeit).

La valenza della corrispondenza 1) è definita dall'ordine di contatto delle due curve

$$f(x'y') = 0, \quad \varphi(xy,\ x'y') = 0,$$

[1] Math. Annalen Bd. 6.

nel punto $(x'y') \equiv (xy)$; e quindi simmetricamente per la corrispondenza diretta e per l'inversa. In forma più geometrica possiamo dire che i punti $P_1 P_2 \dots P_{n'}$, omologhi di un punto P di f, si ottengono come intersezioni di f con una curva φ, variabile in una serie ∞^1 contenuta in un sistema lineare, che ha in P un contatto v-punto con f: per conseguenza la serie dei gruppi di punti

$$vP + P_1 + P_2 + \dots + P_{n'}$$

appartiene ad una serie lineare di ordine $v + n'$. Aggiungasi che la dimensione di codesta serie $g^r_{v+n'}$ sarà in ogni caso $r \geq v$; poichè non è possibile che in una serie lineare l'imposizione di un punto $(v-1)$-*plo* porti di conseguenza un punto v-*plo*: si ha qui una proprietà differenziale che riesce ben nota nel suo aspetto proiettivo « le tangenti di una curva piana non possono avere tutte un contatto tripunto, i piani osculatori di una curva gobba non possono avere tutti un contatto quadripunto, etc. ».

Ritornando alla corrispondenza considerata di valenza v, si considerino i punti $\overline{P}_1 \overline{P}_2 \dots \overline{P}_n$, omologhi di P nella sua inversa: la serie dei gruppi di punti

$$vP + \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \dots + \overline{P}_n$$

apparterrà pure ad una serie lineare d'ordine $v + n$.

Come esempio si consideri sopra una cubica piana la corrispondenza T che intercede fra un punto P e il suo tangenziale P': poichè $2P + P'$ varia nella g^2_3 segata dalle rette, la valenza è $v = 2$. La corrispondenza inversa T^{-1} fa corrispondere a P' le quattro intersezioni della cubica con la sua conica polare, tangente in P', sicchè appare che anche la valenza di T^{-1} è uguale a 2.

Ora la definizione geometrica della valenza permette di costruire in generale su f le corrispondenze rappresentabili con una equazione

$$\varphi(x\,y,\; x'y') = 0,$$

dotate della valenza (positiva) v: queste appariranno qui come un'estensione del semplice esempio relativo ai tangenziali, considerato innanzi.

Per il nostro scopo si potrà partire da una serie lineare qualsiasi g_m^r: ogni punto P sottratto v volte dalla g_m^r dà luogo ad una

$$g_{n'}^s$$

con $n' = m - v$, $s = r - v$; nel caso $s > 0$, si potrà staccare razionalmente entro la $g_{n'}^s$ un gruppo, e così si darà luogo a una corrispondenza per cui ad ogni punto di f ne corrispondino n': l'inversa avrà un certo indice n, dipendente dalla costruzione eseguita.

Qui giova rilevare che se una corrispondenza $[n, n']$, data sopra la curva f di genere $p > 0$ mediante l'equazione 1), venga rappresentata comunque mediante un'altra equazione,

$$\psi(xy, \ x'y') = 0,$$

anche la curva ψ — come la φ — avrà con f nel punto (xy) lo stesso contatto v-punto, cosicchè *la valenza è un carattere proprio della corrispondenza, indipendente della particolare equazione che serve a rappresentarla.*

Per dimostrare il teorema enunciato basta stabilire che, sopra una curva di genere $p > 0$, una corrispondenza non può avere due valenze diverse v e v'. Ponendoci nell'ipotesi che vogliamo ridurre all'assurdo, scriviamo l'equivalenza dei gruppi di punti che si ottengono a partire da due punti P e P' contati v o v' volte cui si aggiungano gli omologhi P_i e P_i':

$$vP + P_1 + P_2 + \dots + P_{n'} \equiv vP' + P_1' + P_2' + \dots + P_{n'}$$
$$v'P + P_1 + P_2 + \dots + P_{n'} \equiv v'P' + P_1' + P_2' + \dots + P_{n'};$$

per sottrazione si deduce, supponendo $v > v'$

$$(v - v')P \equiv (v - v')P'.$$

Quest'equivalenza deve sussistere qualunque siano P e P' e quindi anche se P' diventi infinitamente vicino a P; ma in tal caso la serie lineare $g_{v-v'}^1$ determinata da $(v - v')P$ e $(v - v')P'$ possiede il punto P come punto fisso $(v - v' - 1)$-*plo*: proprietà differenziale questa che basta stabilire per le curve razionali, come in L. 2°, § 5, Vol. I, pag. 180; e da ciò si deduce che la curva f è razionale. c. d. d.

Procediamo ad esaminare i vari casi di riducibilità cui può dar luogo una corrispondenza sopra una curva f. Una corrispondenza T, d' indici n e n', data su f, deve ritenersi *riducibile,* se accada che la continuazione analitica della funzione da cui dipende uno dei punti omologhi di P, non conduca a ciascuno degli altri punti omologhi, cosicchè facendo compiere a P un giro chiuso sopra la riemanniana di f, si produce sui punti corrispondenti $P_1 P_2 \dots P_{n'}$ un gruppo intransitivo di sostituzioni.

Un primo caso di riducibilità della corrispondenza T di indici n, n', si ottiene supponendo che l' equazione di essa $\varphi(xy, x'y') = 0$, si spezzi in due fattori

$$\varphi(xy, x'y') = \varphi_1(xy, x'y')\, \varphi_2(xy, x'y'):$$

allora la T si ridurrà alla *somma* di due corrispondenze T_1 e T_2 con certi indici n_1, n_1' e n_2, n_2', e con certe valenze $v_1 \geq 0$ e $v_2 \geq 0$;

$$T = T_1 + T_2; \quad n = n_1 + n_2; \quad n' = n_1 + n_2; \quad v = v_1 + v_2.$$

Qui occorre appena avvertire che si ha la stessa decomposizione della T anche se — essendo il polinomio φ irriducibile — si abbia

$$\varphi \equiv \varphi_1 \varphi_2 \qquad \text{mod. } f.$$

Ma può accadere che la corrispondenza T sia riducibile, contenendo come parte una corrispondenza T_1 rappresentata da $\varphi_1(xy, x'y') = 0$, senza che sia possibile di rappresentare la corrispondenza residua $T_2 = T - T_1$ mediante una equazione $\varphi_2(xy, x'y') = 0$; per dimostrarlo basterà costruire una corrispondenza T di valenza v (≥ 0) che contenga come parte una T_1 di valenza $v_1 > v$. A tal uopo si assuma una corrispondenza T_1 d'indici n_1 e n_1' a valenza $v_1 \geq 1$: designando con $P_1 P_2 \dots P_{n'}$ gli omologhi di un punto generico P, i gruppi $v_1 P + P_1 + P_2 \dots + P_{n'}$ saranno contenuti in una serie lineare d' ordine $v_1 + n_1'$. Ora la nostra serie potrà ritenersi contenuta in una serie lineare g d'ordine $v + n' > v_1 + n_1'$ con $0 \leq v < v_1$, di dimensione $\geq v + n_1'$; quindi si potrà definire una corrispondenza T, contenente T_1, determinando razionalmente un gruppo di g che contenga gli n_1' punti $P_1 P_2 \dots P_{n_1'}$, corrispondenti a P, ed inoltre il punto P contato v volte: questa T fa corrispondere al punto P precisamente n' punti, mentre la sua inversa avrà un certo indice n.

La costruzione indicata porta a considerare sopra f delle corrispondenze come T_2 che — non possedendo una valenza $v_2 \geq 0$, non possono essere rappresentate mediante un' equazione $\varphi_2(xy,\ x'y') = 0$.

Questa conclusione cesserà d'apparire paradossale ove si osservi che una corrispondenza fra i punti di f costituisce una serie di coppie (ordinate) di punti e però si rispecchia in una curva appartenente ad una superficie F dello $S_4 = (xyx'y')$ intersezione dei due cilindri

$$f(xy) = 0, \quad f(x'y') = 0;$$

ora è chiaro che la F potrà contenere curve che non siano intersezioni complete con una varietà Φ dello S_4; in questa categoria dovrà appunto rientrare la curva rappresentativa di T_2. Pertanto le corrispondenze di f non rappresentabili con una sola equazione, si potranno sempre rappresentare con un sistema di due equazioni (legate in modo da assicurare che esistano ∞^1 soluzioni comuni)

$$\varphi(xy,\ x'y') = 0, \quad \varphi'(xy,\ x'y') = 0,$$

dove si prescinde eventualmente da un numero finito di punti fissi della f che figurino come soluzioni comuni delle equazioni precedenti: per definire in questo modo la corrispondenza T_2, ottenuta innanzi per sottrazione di T_1 da T, basterà considerare una seconda corrispondenza T' $(\varphi' = 0)$ che come T contenga T_2, non avendo altra parte a comune con essa, diguisachè T_2 risulti come interferenza di T e T'.

Aggiungeremo che per le corrispondenze T_2 ottenute sottraendo da una T di valenza $v \geq 0$ una T_1 di valenza $v_1 > v$, si introduce naturalmente una *valenza negativa* $-v_2 = v - v_1$ sussistendo ancora per i gruppi omologhi di due punti P e P' l'equivalenza virtuale

$$-v_2 P + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n_2'} \equiv -v_2 P' + P_1' + P_2' + \ldots + P_{n_2'}',$$

che significa

$$v_2 P' + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n_2'} \equiv v_2 P + P_1' + P_2' + \ldots + P_{n_2'}'.$$

Il più semplice esempio di corrispondenze a valenza negativa è costituito dall'identità, $(x - x' = 0,\ y - y' = 0)$, che stando alla definizione, risulta appunto di valenza $v = -1$. Sono anche di valenza $v = -1$ le corrispondenze fornite da una trasformazione di prima specie π di una curva ellittica; infatti se PP' e QQ' sono due coppie di punti omologhi per una π, la g_2^1 determinata dalla coppia PQ' trasforma la π nella π^{-1} cioè porta P' in Q e quindi si ha:

$$P + Q' \equiv Q + P'$$

ossia

$$P - P' \equiv Q - Q'.$$

Abbiamo visto che ad una curva f appartengono corrispondenze a valenza negativa non rappresentabili con una sola equazione, le corrispondenze rappresentate da una sola equazione avendo sempre una valenza $v \geq 0$: ora è importante rilevare che, reciprocamente, « le corrispondenze a valenza positiva (o nulla) possono sempre rappresentarsi con una sola equazione ». Infatti si consideri una corrispondenza T a valenza $v \geq 0$: il gruppo $vP + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n'}$ al variare di P, appartiene sempre ad una serie lineare $\varphi(x'y', \lambda_1\lambda_2 \ldots) = 0$, e risulta determinato razionalmente entro questa in funzione del punto $P \equiv (xy)$, esprimendosi dunque $\lambda_1\lambda_2 \ldots$ come funzioni razionali di x e y, le quali si lasciano calcolare tenendo conto della $f(xy) = 0$: ove si sostituiscano queste espressioni al posto di $\lambda_1\lambda_2 \ldots$ si ottiene appunto l'equazione della corrispondenza nella forma $\varphi(xy, x'y') = 0$. c. d. d.

Riassumiamo le cose dette enunciando il

Teorema: *Ad una qualsiasi curva algebrica f, di genere $p > 0$, appartengono sempre corrispondenze $[n, n']$ a valenza positiva (o nulla) $v \geq 0$, e queste si lasciano definire mediante una sola equazione $\varphi(xy, x'y') = 0$; per sottrazione si ottengono da queste delle corrispondenze a valenza negativa, non più rappresentabili mediante una sola equazione, le quali si possono rappresentare invece (per interferenza) mediante due equazioni $\varphi(xy, x'y') = 0$, e $\varphi'(xy, x'y') = 0$.*

Il problema fondamentale di determinare le coincidenze di una corrispondenza T, di indici n e n' e di valenza v, data sopra una curva f di genere p, è stato risolto, per $v \geq 0$, da CAYLEY (1866), che tuttavia ha dimostrato la sua formula soltanto in un caso particolare. La dimostrazione generale, sempre per $v \geq 0$, è dovuta a Brill [1] (1873), mentre la considerazione di corrispondenze a valenza negativa e la correlativa estensione della formula che dà i punti uniti, si trova nella memoria fondamentale di Hurwitz del 1886 [2], dove le corrispondenze vengono determinate in maniera affatto generale mediante l'uso delle funzioni abeliane, stabilendo resultati essenziali di cui rechiamo la dimostrazione algebrico-geometrica nei paragrafi seguenti. La dimostrazione algebrico-geometrica della formula dei punti uniti per corrispondenze di valenza positiva o negativa, si può dare come nella memoria di Severi [3] del 1903, la quale reca pure (in diverse guise) una interpretazione geometrica dei risultati di Hurwitz.

Il numero delle coincidenze di una corrispondenza $[n, n']_v$ *d'indici* n, n', *e di valenza* v, *è dato dalla formula di* Cayley:

$$\delta = n + n' + 2pv.$$

Questa relazione numerica è contenuta nella seguente relazione funzionale: si designino con N' e N i gruppi dei punti omologhi di un punto P nella corrispondenza data e nella inversa, con K un gruppo canonico, e con Δ il gruppo delle coincidenze: allora si ha la relazione di equivalenza

$$1) \qquad \Delta \equiv N + N' + 2vP + vK.$$

È facile dimostrare questa relazione per le corrispondenze di valenza $v = 0$. Infatti se una corrispondenza T, con $v = 0$, viene rappresentata dall'equazione

$$\varphi(x y, x'y') = 0,$$

d'ordine n_1 rispetto alle xy e d'ordine n_1' rispetto alle $x'y'$, e se le curve φ (al variare di xy) non posseggono punti fissi sopra la f d'ordine m, si avrà

$$n = n_1 m, \quad n' = n_1' m,$$

(1) Math. Annalen Bd. 3, pag. 33.

(2) « Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip » (*Math. Annalen*, Bd. 28). Altre dimostrazioni s'incontrano in Junker, Bobeck, Segre, Schubert, Zeuthen (*Math. Annalen*, 1892); quest'ultimo si è pure occupato di valutare la molteplicità dei punti uniti.

(3) « Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica ». *Memorie dell'Acc. di Torino*, Serie 2ª, t. 54.

e la curva
$$\varphi(xy,\ xy)=0,$$

riuscendo d'ordine n_1+n_1', segherà la f in $\delta=(n_1+n_1')m=n+n'$ punti, costituenti le coincidenze di T e formanti un gruppo equivalente alla somma dei gruppi omologhi di un punto P nella corrispondenza T e nella sua inversa T^{-1}. La stessa conclusione si estende al caso in cui la curva φ possegga dei punti fissi sopra f.

Ma quando la T possegga una valenza $v>0$, il ragionamento precedente urta nella difficoltà che le coincidenze della T, calcolate come intersezioni delle curve $f=0$ e $\varphi=0$, diventano infinite, poichè f figura come fattore in φ: infatti per ipotesi, ponendo nella $\varphi(xy,\ x'y')$, $x'=x$, $y'=y$, la φ si annulla (v volte) per ogni punto di f. Questa difficoltà nel calcolo delle coincidenze per le T a valenza $v>0$, si può evitare (con SEVERI) fondandosi sulle due osservazioni seguenti:

a) che la relazione di equivalenza 1) sussiste per una corrispondenza $T=T_1\pm T_2$ quando sia stabilita per T_1 e T_2;

b) che la stessa relazione sussiste per le corrispondenze *elementari* $[n-1,\ n-1]$ di valenza $v=1$ intercedenti fra i punti di un medesimo gruppo di una g_n^1 (teorema fondamentale del § 8).

Infatti sommando v corrispondenze elementari si otterrà una corrispondenza T_1 di valenza positiva v, per cui resta dimostrata la relazione 1). Dopo ciò la relazione stessa si estende al caso di una corrispondenza T' a valenza negativa $v'=-v$, tenuto conto che la $T+T'$ è a valenza $v+v'=0$.

Infine, essendo dimostrato il teorema per le corrispondenze a valenza negativa, esso si estenderà a tutte le corrispondenze a valenza positiva, che sommate con quelle divengono corrispondenze a valenza nulla.

Osservazione. Si noti che se $T=T_1+T_2$, i punti uniti di T_1 sono sempre punti uniti per T, e perciò il ***numero dei punti uniti di una corrispondenza non può mai diventar negativo***, onde risulta un limite superiore per il valore assoluto della valenza negativa di una corrispondenza $[n,\ n']$:

$$|v|\leq\frac{n+n'}{2p}.$$

Nel computo del numero δ delle coincidenze di una corrispondenza $[n, n']_v$ occorre precisare la *molteplicità* con cui figura una coincidenza multipla. Poichè, evidentemente, si tratta di una questione di natura differenziale, per cui la curva f può considerarsi come razionale, varrà in generale la *regola di* ZEUTHEN che, a proposito delle corrispondenze sopra una retta, abbiano incontrato nel L. 2°, § 2 (Vol. I, pag. 161), e che qui conviene enunciare di nuovo.

« Per valutare la molteplicità che spetta a un punto A nel gruppo dei δ punti uniti di una corrispondenza T, si consideri la corrispondenza fra i punti P e gli omologhi P' nell'intorno di A: ad ogni P corrisponderà un certo numero $s \leq n'$ di punti P' prossimi a A, $P_1' P_2' \ldots P_s'$. Ciò posto si considerino le s differenze infinitesime $P_i' - P$ (cioè, per esempio, le differenze delle ascisse di P_i' e P, supponendosi che la curva f sia — nell'intorno di A — unisecata dalle rette perpendicolari all'asse x); *la somma degli ordini di queste s differenze infinitesime, comparate a $P - A$, fornisce la molteplicità del punto unito A* ».

Nelle numerose applicazioni del principio di corrispondenza sopra una curva, giova riconoscere l'effetto che hanno sulla valenza, le operazioni fondamentali di *somma* e *prodotto* delle corrispondenze.

Anzitutto la valenza è stata definita in modo che *sommando* due corrispondenze $[n_1, n_1']_{v_1}$ e $[n_2, n_2']_{v_2}$ di valenze rispettive v_1 e v_2 si ottenga una corrispondenza $[n, n']_v$, con $n = n_1 + n_2$, $n' = n_1' + n_2'$, di *valenza*

$$v = v_1 + v_2 .$$

Il *prodotto* $T = T_2 T_1$ di due corrispondenze $[n_1, n_1']_{v_1}$ e $[n_2, n_2']_{v_2}$ è una corrispondenza $[n, n']$ con

$$n = n_1 n_2 , \quad n' = n_1' n_2' ;$$

la cui *valenza è*

$$v = - v_1 v_2 .$$

Per dimostrarlo si designino rispettivamente con N_1' ed N' i gruppi dei punti omologhi di un punto generico P in T_1 e T; per ipotesi il gruppo (effettivo o virtuale)

$$v_1 P + N_1'$$

varia in una serie lineare, e così anche

$$v_2 N_1' + N'$$

varia nella serie lineare (n_1'-*pla* di quella cui appartengono i gruppi $v_2 P + N_2'$); si deduce che il gruppo

$$v_2 N_1' + N' - v_2(v_1 P + N_1') = - v_1 v_2 P + N',$$

varia in una serie lineare. c. d. d.

Una conseguenza del teorema stabilito è che *due corrispondenze* $[n_1 n_1']_{v_1}$ e $[n_2 n_2']_{v_2}$ *sopra una curva di genere* p *hanno in generale*

$$n_1 n_2' + n_2 n_1' - 2pv_1 v_2$$

coppie comuni, i punti di queste essendo uniti per il prodotto di una corrispondenza per l'inversa dell'altra. Sotto questa forma il teorema della composizione della valenza del prodotto compare in Brill, nel caso di valenze positive.

Si noti che il numero delle coppie comuni alle due corrispondenze date T_1 e T_2 si riduce alla metà se queste sono *simmetriche,* giacchè ciascuna delle coppie comuni PP' contiene come uniti per $T_2^{-1} T_1$ non solo P ma anche P'.

La nostra formula porge anche un criterio per riconoscere se una corrispondenza T sia simmetrica. Infatti si cerchi il numero delle coppie di una $T \equiv [n, n]_v$ che si corrispondono in doppio modo.

Dovremo cercare i punti uniti della corrispondenza T^2 e dividere questo numero per 2: si ottiene così che *il numero delle coppie di punti omologhi distinti che si corrispondono in doppio modo in* T *vale:*

$$\frac{1}{2}\{ n(n-1) + n(n-1) \} - pv(v+1).$$

Di conseguenza sulla f di genere p *una corrispondenza irriducibile* $[n, n]_v$, *la quale possegga più che*

$$n(n-1) - pv(v+1)$$

coppie di punti corrispondentisi in doppio modo, è necessariamente simmetrica.

Aggiungiamo la seguente avvertenza. Le definizioni precedenti di somma e prodotto di corrispondenze conducono a considerare dei polinomi a coefficienti interi costruiti a partire da corrispondenze date, e in particolare combinazioni lineari a coefficienti interi del tipo

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_r T_r.$$

Queste corrispondenze risultano sempre effettive per valori positivi dei coefficienti λ, mentre per valori *negativi* sono definite soltanto formalmente, e possono avere un significato soltanto *virtuale*. Ma, quando si tratti di considerare relazioni di equivalenza fra i gruppi di punti che si possono costruire sopra la curva mediante certe corrispondenze, è lecito di operare sulle corrispondenze senza distinguere se esse siano effettive o virtuali, giacchè sappiamo che quelle relazioni fra gruppi di punti conservano sempre un significato. (Cfr. l'Osservazione del § 6, pag. 44).

40 *bis*. **Applicazioni del principio di corrispondenza: trisecanti e quadrisecanti di una curva gobba.** — Offriamo ora applicazione del principio di corrispondenza, trattando alcuni esempi.

Anzitutto calcoliamo il numero dei *flessi di una curva piana di ordine n*.

Supponiamo dapprima che la curva sia priva di punti doppi, e quindi di genere $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Si consideri la corrispondenza che intercede fra un punto P della curva f e i suoi $n-2$ tangenziali (ulteriori intersezioni con la tangente in P): questa corrispondenza ha valenza 2, e l'indice della sua inversa è $n(n-1)-2$; pertanto le sue coincidenze, che danno i flessi, saranno

$$\{n(n-1)-2\} + (n-2) + 2\cdot 2\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 3n(n-2).$$

Ora, per ogni *nodo* che possegga f si abbassa di 2 l'indice della nostra corrispondenza inversa, e di 1 il genere, ciò che porta a diminuire il numero dei flessi di 6. Se poi la f abbia una *cuspide* (ordinaria) l'indice della corrispondenza inversa diminuisce di 3 (anzichè di 2 come nel caso del nodo) e d'altra parte una coincidenza della corrispondenza cade precisamente nella cuspide: perciò la riduzione del numero dei flessi risulta precisamente di 8. Così si ritrova la terza formula di Plücker che dà il numero i dei flessi di una f d'ordine n dotata di δ nodi e k cuspidi:

$$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k.$$

L'esempio precedente si può generalizzare determinando il *numero dei punti* $(r+1)$*-pli* di una g_n^r (cfr. § 9 pag. 69) e quindi in ispecie il numero dei punti (di contatto dei piani) stazionari di una curva gobba dello S_3, etc. La ricerca dei punti stazionari richiede la conoscenza dei flessi della curva piana, e così in generale si trova una formula ricorrente che fa passare da $r-1$ ad r, e ci riconduce quindi al risultato già noto.

Un secondo esempio di applicazione del principio di corrispondenza, si ha nella ricerca diretta del *numero delle tangenti doppie di una curva piana d'ordine n*. Per semplicità di discorso riferiamoci ad una quartica generale. Qui occorre considerare la corrispondenza T_1 fra i punti P e P' che sono tangenziali di un medesimo. Questa corrispondenza simmetrica T_1 è [10, 10]. Per calcolare la sua valenza si consideri la corrispondenza T frà un punto e un suo tangenziale; si costruisce T_1 facendo il prodotto TT^{-1} e staccando da esso 10 volte l'identità che vi figura come fattore; pertanto la valenza di T_1 risulterà

$$v = -2 \times 2 - (-10) = 6.$$

Si deduce che T_1 possiede

$$10 + 10 + 2 \cdot 3 \cdot 6 = 56$$

coincidenze, e perciò vi sono

$$\frac{56}{2} = 28 \qquad \text{tangenti doppie.}$$

La determinazione fatta non è che un caso particolare del problema di trovare i gruppi di una g_n^r $(n \geq 2r)$ dotati di r punti doppi, problema da noi risoluto col metodo di degenerazione nel § 35. Per mostrare come questo problema si possa trattare col principio di corrispondenza, ci limiteremo ad esaminare un secondo caso particolare [1], nel quale meglio appariscono le difficoltà che gli sono proprie.

[1] La trattazione generale del problema si troverà nella memoria del Torelli già indicata nel § 35.

Numero dei piani tritangenti a una sestica gobba di genere 4. — Si consideri una sestica gobba C, di genere $p=4$, e fra i punti di essa la corrispondenza T che intercede fra i punti P e P' ulteriori intersezioni di C con un piano bitangente (fuori di P e P'). I punti uniti di T danno i punti di contatto dei piani tritangenti a C, e il loro numero, diviso per 3, dà quello di tali piani.

Gli indici della T si calcolano facilmente: preso un punto P di C, da questo si proietti la C sopra un piano α: si ottiene una quintica con due punti doppi, per cui le formule di Plücker danno 68 bitangenti (cfr. L. 2° § 21, vol. I, pag. 267), sicchè a ogni punto P corrispondono 68 punti P', staccati (fuori dai punti di contatto) dai piani che da P proiettano queste 68 bitangenti. E poichè la corrispondenza T è simmetrica, anche a P' corrispondono 68 punti P.

Occorre ora valutare la valenza v di T. A tale oggetto si indichino con P_1 e P_1' i due punti di contatto di un piano bitangente (uscente da P), e si consideri anzitutto la corrispondenza T' fra i punti P_1 e P_1' di cui ci servirà conoscere la valenza v'. Questa si ottiene osservando che i 14 punti P_1' (di contatto dei piani tangenti in P_1 e altrove) costituiscono il gruppo jacobiano della g_4^1 segata dai piani tangenti in P_1, e che, se a tale gruppo jacobiano si sottraggono due gruppi della detta g_4^1 (sezioni di due piani tangenti in P_1, tolto P_1) si ottiene la serie canonica; pertanto, siccome la sezione completa di C con una coppia di piani varia entro una serie lineare g_{12}, segue che il punto P_1 contato quattro volte, e sommato ai suoi 14 punti omologhi P_1', dà un gruppo che varia in una serie lineare; ciò possiamo esprimere scrivendo

$$4P_1 + \Sigma P_1' \equiv g_{18}$$

ossia

$$v' = 4.$$

In secondo luogo si indichino genericamente con P' le ulteriori intersezioni di C con piani che la tocchino una prima volta in P_1 e una seconda volta altrove (nei 14 punti P_1'). Avremo che i 14 piani bitangenti segano C in P_1 contato 28 volte, nei 14 punti P_1' contati 2 volte, e nei 28 punti P': sicchè

$$28P_1 + 2\Sigma P_1' + \Sigma P'$$

varia in una serie lineare g_{84}; ciò possiamo esprimere scrivendo

$$28P_1 + 2\Sigma P_1' + \Sigma P' \equiv g_{84}.$$

Tenendo conto della

$$4P_1 + \Sigma P_1' \equiv g_{28},$$

si ottiene per sottrazione

$$20P_1 + \Sigma P' = g_{28};$$

ciò esprime che la corrispondenza T'' che fa corrispondere a ogni punto P_1 i punti (quali P e P') ulteriori intersecazioni di piani bitangenti alla C (e tangenti in P_1) ha valenza

$$v'' = 20,$$

onde la stessa valenza ha la corrispondenza inversa, cioè se si considera un punto P e i punti P_1 e P_1' di contatto dei 68 piani bitangenti uscenti da P, sommando P, contato 20 volte, a questi 68 punti P_1 e P_1' si ha un gruppo che varia in una serie lineare:

$$20P + \Sigma P_1 + \Sigma P_1' \equiv g_{156}.$$

Ma, d'altra parte, i 68 piani bitangenti segano su C un gruppo che varia in una serie lineare g_{408}, sicchè

$$68P + 2\Sigma P_1 + 2\Sigma P_1' + \Sigma P' \equiv g_{408}.$$

In fine, per differenza, dalle relazioni precedenti si ha

$$28P + \Sigma P' \equiv g_{96},$$

onde la nostra corrispondenza T risulta avere precisamente la valenza $v = 28$.

Pertanto i punti uniti di T sono

$$68 + 68 + 2 \cdot 4 \cdot 28 = 360,$$

sicchè i piani tritangenti alla C appaiono 120, come si era detto nel § 35, pag. 395, riga 9 (¹).

(¹) Si avverta che è occorso un errore di stampa nella formula della riga 5 di detta pagina, dove anzichè

$$f(2p-2), p-1, p) = 2^{p-1}(2^p - p),$$

si deve leggere

$$f(2p-2, p-1, p) = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Grado della rigata delle trisecanti di una curva gobba. — Sia n l'ordine di una curva gobba C e p il suo genere. Per calcolare il grado della rigata delle trisecanti di C, occorrerà determinare quante di queste si appoggino ad una retta data r. Ora i punti di incidenza alla C di una tale trisecante si possono ottenere come punti uniti di una certa corrispondenza T, la quale si costruisce come segue.

Dato un punto P di C, si considerino gli $(n-1)$ punti Q che insieme a P giacciono in un piano per r: la corrispondenza che fa passare da P a Q è una corrispondenza simmetrica T_1, di indici $n-1$ e $n-1$, la cui valenza è chiaramente

$$v_1 = 1.$$

Ora a ciascun punto Q si associno i punti P' che riescono punti di appoggio delle trisecanti condotte per Q: abbiamo che da Q escono

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} - p$$

trisecanti (le cui traccie su un piano α sono i punti doppi della curva C' proiezione di C da Q), e ciascuna incide la C in due punti fuori di Q: pertanto si ottiene in tal modo su C una corrispondenza T_2 che associa a Q

$$(n-2)(n-3) - 2p$$

punti P'.

La corrispondenza T_2 è simmetrica (si può dire che vi sono omologhi due punti Q e P' appartenenti ad una stessa trisecante) e importa calcolarne la valenza v_2. A tale oggetto si osservi che i punti doppi di C' appartengono a una curva φ d'ordine $n-4$ aggiunta a C' (d'ordine $n-1$) la quale sega ulteriormente la C' nella serie canonica: pertanto proiettando φ da Q si ottiene un cono d'ordine $n-4$ che sega su C:

il punto Q contato $n-4$ volte,

gli $(n-2)(n-3)-2p$ punti nei quali incidono le trisecanti uscenti da Q,

e un gruppo canonico.

Poichè il gruppo complessivo segato da una superficie d'ordine $n-4$ varia, al variare di questa, in una serie lineare, si deduce che

$$(n-4)\,Q + \Sigma P'$$

varia in una serie lineare, cioè che

$$v_2 = (n-4).$$

Ora consideriamo la corrispondenza

$$T = T_2 T_1:$$

si riconosce immediatamente che tutti e soli i punti uniti per T sono i punti per cui passa una trisecante incidente ad r, e più precisamente che ciascun punto siffatto coincide con due dei propri omologhi. Ma la T ha i due indici uguali al prodotto degli indici di T_1 e T_2, cioè

$$(n-1)\{(n-2)(n-3)-2p\}$$

e ha valenza

$$v = -v_1 v_2 = -(n-4).$$

Pertanto le coicidenze di T sono

$$2(n-1)\{(n-2)(n-3)-2p\} - 2(n-4)p =$$
$$= 2(n-1)(n-2)(n-3) - 6(n-2)p.$$

Si conclude che il numero dei punti di appoggio delle trisecanti incidenti a r è

$$(n-1)(n-2)(n-3) - 3(n-2)p,$$

e che il grado della rigata delle trisecanti vale

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} - (n-2)p.$$

Questa espressione, introducendo il numero d dei punti doppi apparenti della curva C, si può scrivere nella forma

$$(n-2)\left\{ d - \frac{n(n-1)}{6} \right\}$$

incontrata nel L. 3° § 43 (Vol. II, pag. 300).

Numero delle quadrisecanti di una curva gobba. — Per calcolare il numero delle quadrisecanti di una curva gobba C, d'ordine n e di genere p, occorre determinare il numero N dei relativi punti di appoggio. Questi punti riescono chiaramente punti uniti per la corrispondenza T' costruita nel modo che segue.

Preso un punto P si considerino le trisecanti di C uscenti da P, e sia Q un punto di appoggio di una tale trisecante; da Q si mandino le trisecanti *diverse* da PQ, e sia P' un punto d'appoggio di una di esse; così fra i punti P e P' viene stabilita una corrispondenza T.

Ora la T è legata alla corrispondenza T'_2, considerata nell'esempio precedente, dalla seguente relazione

$$T = T_2^{\prime 2} \{ (n-2)(n-3) - 2p \} I - T'_2,$$

essendo I la corrispondenza identica.

Infatti se si applica la $T_2^{\prime 2}$ si passa da P a Q, e da Q ancora a P e al terzo punto R appartenente alla trisecante PQ, sicchè si ritrova P una volta per ciascuno dei punti di appoggio delle trisecanti condotte da P, e similmente si ritrovano tutti, e una sola volta, tali punti d' appoggio. La T risulta una corrispondenza simmetrica, per la quale si può dire che sono omologhi due punti P e P' di C quando le trisecanti per essi s'incontrano su C (fuori di P e P'). Ora se P è un punto per cui passa una quadrisecante, si vede facilmente che 6 dei suoi punti omologhi in T coincidono con P, ma non tutte le coincidenze di T sono punti siffatti. Si verifica infatti che una coincidenza di T o è un punto di appoggio di una quadrisecante, o un punto di appoggio di due trisecanti infinitamente vicine, cioè un punto P, per cui passa una trisecante PQR, siffatta che, proiettando la curva C da R, si ottiene una curva dotata di tacnodo. Ciò significa che le due tangenti alla curva nei punti di appoggio P e Q della nostra trisecante sono fra di loro complanari. Pertanto ove si voglia determinare il numero $\frac{N}{4}$ delle quadrisecanti deducendolo da quello Δ delle coincidenze di T, siamo condotti a scartare un certo numero di soluzioni, che indichiamo con N_1, e che determineremo poi; avremo intanto $\Delta = 6N + N_1$.

Ora vediamo che la corrispondenza simmetrica T, definita da

$$T = T_2^{\prime 2} - \{ (n-2)(n-3) - 2p \} I - T_2$$

ha i due indici uguali a

$$\{ (n-2)(n-3) - 2p \} \{ (n-2)(n-3) - 2p - 2 \},$$

ed ha valenza

$$v = -v_2^2 + \{(n-2)(n-3) - 2p\} - v_2$$

dove v_2, valenza di T_2, è

$$v_2 = (n-4).$$

Pertanto si ha

$$6N + N_1 = 2\{(n-2)(n-3) - 2p\}\{(n-2)(n-3) - 2p - 2\}$$
$$+ 2p\{-(n-4)^2 + (n-2)(n-3) - 2p - (n-4)\},$$

dalla quale formula si deduce N, appena sia noto N_1.

Siamo così condotti al calcolo del numero dei punti P della curva per cui passa una trisecante PQR, tale che le tangenti a C in P e Q siano fra loro complanari.

Tali punti possono determinarsi facilmente con lo stesso procedimento, ricorrendo a un' altra corrispondenza sulla curva.

Questa nuova corrispondenza T'' si otterrà come prodotto della T_2 e di un' altra corrispondenza T_3 così costruita: dato un punto Q, si mandi per la tangente in Q a C un piano tangente altrove alla C stessa: il nuovo punto di contatto P', è il punto che associamo a Q nella T_3. La corrispondenza T_3 è simmetrica, in quanto sono omologhi in essa due punti che appartengono a un piano bitangente; e ha i due indici uguali a

$$2(n-2) + 2p - 2 = 2(n-3) + 2p.$$

La valenza della T_3 si calcola (¹) osservando che se ai punti P', costituenti il gruppo jacobiano della g_{n-2}^1 segata dai piani tangenti in Q, si tolgono due gruppi di detta g_{n-2}^1 (sezioni di due piani tangenti in Q, tolto Q due volte per ogni piano) si ottiene la serie canonica; così, osservando che la sezione completa di C con una coppia di piani varia in una serie lineare, si ottiene che il punto Q, contato quattro volte, e sommato ai $2(n-2) + 2p$ suoi omologhi P' dà luogo a un gruppo che varia in una serie lineare, cioè, per la T_3, la valenza v_3 vale

$$v_3 = 4.$$

(¹) In sostanza questo calcolo è stato già fatto nel caso $n = 6$, $p = 4$, a proposito della ricerca dei piani tritangenti ad una sestica gobba di genere 4: lì la corrispondenza era indicata con T'' e si è trovato $v' = 4$.

Si conclude che la valenza della

$$T' = T_3 T_2$$

vale

$$v' = -4(n-4).$$

La corrispondenza T' ha per indici il prodotto degli indici di T_2 e T_3, cioè ha due indici uguali fra loro dati da

$$\{(n-2)(n-3)-2p\}\{2(n-3)+2p\}.$$

Ora un punto P per cui si abbia una trisecante PQR tale che le tangenti a C in P e Q siano complanari, è certo un punto unito della T', ma non è vera la reciproca; poichè, come si vede facilmente, punto unito di T' è anche un punto in cui la tangente a C riesca trisecante, ed anche l'ulteriore intersezione Q di tale trisecante. Precisamente un punto P in cui la tangente sia trisecante viene a coincidere con uno dei suoi omologhi sulla T', mentre Q, ulteriore intersezione di questa tangente, è un punto che coincide con 4 dei suoi corrispondenti, in quanto da Q esce la trisecante QPP, e i piani per la tangente in P segano una g^1_{n-2} con un punto fisso Q, che assorbe due punti del relativo gruppo jacobiano. Ma applicando alla nostra corrispondenza la *regola di* ZEUTHEN, che abbiamo riportata nel paragrafo precedente, si trova che un tale punto Q assorbe solo una coincidenza della T', imperocchè dando uno spostamento σ a Q, P subisce uno spostamento dell'ordine di $\sigma^{\frac{1}{2}}$, e similmente dando a P lo spostamento $\sigma_1 = \sigma^{\frac{1}{2}}$, la tangente in P ha uno spostamento dello stesso ordine, mentre i due punti del gruppo jacobiano che coincidevano in Q subiscono uno spostamento dell'ordine di $\sigma_1^{\frac{1}{2}}$, cioè di $\sigma^{\frac{1}{4}}$.

Pertanto, ove si indichi con N_2 il numero delle trisecanti tangenti, si ha che le coincidenze della T' sono in numero di $N_1 + 2N_2$, donde segue

$$N_1 + 2N_2 = 2\{(n-2)(n-3)-2p\}\{2(n-3)+2p\} - 8p(n-4).$$

In conseguenza, per valutare N_1 e quindi N, occorre conoscere il numero delle trisecanti tangenti, che si calcola subito osservando che i punti di contatto di tali trisecanti sono i punti uniti della corrispondenza T_2 più volte sopra considerata, e quindi

$$N_2 = 2\{(n-2)(n-3)-2p\} + 2p(n-4).$$

In base a queste relazioni, con calcolo facilissimo anche se un po' lungo per la complessità dei termini che occorrono, si trova che il numero N dei punti di appoggio delle quadrisecanti vale

$$\frac{2(n-2)(n-3)^2(n-4)}{6} + 2p^2 - 2p\{(n-3)(n-4)+1\},$$

cioè che le quadrisecanti di una curva gobba C d'ordine n e genere p sono

$$\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{12} + \frac{p}{2}\{p-(n-3)(n-4)-1\}:$$

la quale espressione, introducendo il numero d dei punti doppi apparenti di C, si può scrivere nella forma

$$\frac{1}{2}d(d-4n+11) - \frac{1}{24}n(n-2)(n-3)(n-13),$$

incontrata nel L. 3° § 43 (Vol. II, pag. 303).

§ 41. **Le involuzioni irrazionali sopra una curva: teoremi di Painlevé e di Castelnuovo-Humbert.** — Il principio di corrispondenza, sviluppato nel paragrafo 40, permette ora di trattare il problema inverso di quello a cui si riferiscono i paragrafi 38 e 39: ivi si è appreso a costruire una curva f trasformata razionale di una data φ, cioè rappresentata sopra la φ multipla con dati punti di diramazione; qui si vuole costruire le curve φ, di genere $\pi > 0$, di cui la f è trasformata semplicemente razionale, cioè *costruire le involuzioni irrazionali appartenenti ad una curva* f (di genere $p > 0$).

Rileviamo anzitutto che per una curva f di genere $p > 1$, il *possesso di una involuzione irrazionale* I_ν di genere $\pi \geq 1$ e con $\delta = 2p-2-\nu(2\pi-2)$ punti doppi, si traduce in

$$(\nu-1)(3\pi-3) + \frac{1}{2}\delta > 0$$

condizioni particolari a cui i moduli di f devono soddisfare. Infatti le curve f di genere p dipendono da $3p - 3$ moduli, e le curve φ di genere π, multiple secondo ν con δ punti di diramazione, dipendono da $3\pi - 3 + \delta$ moduli (questa formula riuscendo vera anche per $\pi = 1$, tenuto conto che le ∞^1 trasformazioni della curva ellittica φ danno luogo a curve multiple birazionalmente identiche) ed è appunto

$$(3p - 3) - (3\pi - 3 + \delta) = (\nu - 1)(3\pi - 3) + \frac{1}{2}\delta,$$

poichè

$$2p - 2 = 2\pi - 2 + \delta.$$

Quanto al modo di esprimere che due curve di genere p (come la data f e una φ multipla) sono birazionalmente identiche, sappiamo che per $p > 1$ si è ricondotti alla identità proiettiva delle loro immagini canoniche o pluricanoniche, e che vi è tutt'al più un numero finito di trasformazioni proiettive di una di queste curve nell'altra, facenti corrispondere certi gruppi invarianti di punti, costituiti per es. dai punti di Weierstrass (punti di contatto degli iperpiani stazionari).

Ora, poichè il problema della costruzione di una involuzione irrazionale I_ν, appartenente alla f, si traduce con un sistema di condizioni algebriche, ne risulta che le I_ν saranno in numero finito o si distribuiranno in un numero finito di serie continue. Dopo questa osservazione siamo in grado di dimostrare il

Teorema di PAINLEVÉ. *Ad una curva f non può appartenere che un numero finito di involuzioni irrazionali di genere $\pi > 1$; le involuzioni ellittiche ($\pi = 1$), appartenenti ad una f, possono essere in numero infinito ma costituiscono in ogni caso una serie discreta,* avendosene tutt'al più un numero finito per ogni valore dell'ordine.

Il teorema si dimostra facendo vedere che « la f non può contenere in nessun caso una serie continua di involuzioni irrazionali I_ν », e tenuto conto della formula di Zeuthen $2p - 2 = \nu(2\pi - 2) + \delta$, che — per un dato p e per $\pi > 1$ — fissa un limite superiore al valore di ν.

Ora si riesce ad escludere l'esistenza di una serie continua di I_ν di genere $\pi > 0$ sulla f di genere $p > 1$, cercando il numero delle coppie di punti comuni a due involuzioni, I_ν e I_ν', della serie, giacchè, nell'ipotesi di una tale esistenza, questo numero risulterebbe negativo: ciò che costituisce un assurdo. Infatti le coppie comuni ad I_ν ad I_ν' vengono date dai punti uniti della corrispondenza prodotto $I_\nu I_\nu'$, dove le dette involuzioni sieno concepite come corrispondenze simmetriche $[\nu - 1, \nu - 1]$ fra i punti di un medesimo gruppo. Ora la $I_\nu I_\nu'$ è una corrispondenza $[(\nu-1)^2, (\nu-1)^2]$, la quale — quando I_ν' variando nella ***ipotetica serie continua*** si avvicini ad I_ν — tende a ridursi alla

$$I_\nu^2 = (\nu - 2) I_\nu + (\nu - 1) I,$$

dove I designa l'identità; come è facile a verificarsi.

Ciò posto — nelle nostre ipotesi — il numero delle coincidenze di $I_\nu I_\nu'$ si calcolerà mediante il principio di conservazione del numero, riducendosi a quello di I_ν^2; vero è che quest'ultima corrispondenza contiene come fattore l'identità, e quindi una infinità di punti uniti, ma questa infinità può computarsi secondo la sua equivalenza, tenendo conto che la valenza di I è $v_1 = -1$, sicchè I, conta per $2 - 2p$ coincidenze. Avremo dunque per il numero delle coincidenze di $I_\nu I_\nu'$

$$x = (\nu - 2)\delta - (\nu - 1)(2p - 2).$$

Pertanto, se $\pi > 0$ e $p > 1$, essendo per la formula di Zeuthen $\delta \leq 2p - 2$, si deduce l'assurdo

$$x < 0. \qquad \text{c. d. d.}$$

Notisi che nel caso $p = 1$ sappiamo già dal § 39 che le involuzioni ellittiche I_ν dipendono dalle trasformazioni di prima specie della f, e quindi (§ 27, pag. 271) sono — per ogni valore di ν — in numero finito.

Così il nostro teorema riesce pienamente dimostrato, e giova soltanto osservare che — per $\pi = 1$ — si possono avere effettivamente sopra una f di genere p infinite involuzioni ellittiche. Ciò risulta già per quanto sappiamo relativamente ad una f che sia essa stessa ellittica, avendosi $p = 1$; di conseguenza anche sopra una f di genere $p > 1$ che possegga una involuzione ellittica, se ne otterranno infinite altre composte con quella. Vero è che tale esempio è assai triviale, ma non ci indugiamo ulteriormente a ricercare come possano costruirsi curve di genere qualunque possedenti infinite involuzioni ellittiche semplici: tale ricerca si riduce allo studio degli integrali abeliani riducibili, risultando da un teorema di PICARD e POINCARÉ che l'esistenza di p involuzioni ellittiche (semplici) sopra una curva di genere p, porta di conseguenza l'esistenza di una infinità discreta di involuzioni analoghe.

Notizia storica. Il teorema sopra enunciato travasi dimostrato per via analitico-trascendente da P. PAINLEVÉ nella sua memoria sulle equazioni differenziali degli Annales de l'École Normale del 1891 (pag. 135).

Lo stesso teorema fu ritrovato, ugualmente con l'uso degli integrali abeliani, da CASTELNUOVO ([1]) e da HUMBERT ([2]) (1893), i quali ne deducono la *linearità delle involuzioni semplici più volte infinite appartenenti ad una curva,* di cui diremo più avanti. Più tardi (1903) DE FRANCHIS ([3]) ha fornito una dimostrazione algebrica del teorema, ricorrendo alla superficie che rappresenta le coppie di punti della curva. Ora, in realtà, questa considerazione giova, nei ragionamenti di De Franchis, soltanto in una maniera accessoria; la riduzione all'assurdo della ipotesi di una serie continua di involuzioni irrazionali viene a dipendere dal calcolo delle coppie comuni a due involuzioni della serie, e questo calcolo si può compiere in modo più diretto e semplice come sopra abbiamo indicato.

Del resto, l'idea di utilizzare le corrispondenze sopra una curva in questa questione si è già presentata a TORELLI ([4]) per il caso a cui condurrebbe l'ipotesi di una involuzione non lineare Γ due volte infinita, di cui diciamo più avanti: il Torelli deduce l'assurdo dal calcolo dei punti tripli della serie.

Aggiungeremo che, nella memoria sopra citata, De Franchis estende il teorema dalle involuzioni alle corrispondenze simmetriche, ed osserva pure come in quest'ordine di idee si ritrovi il teorema di SCHWARZ che le curve con una serie continua di trasformazioni birazionali in se stesse sono di genere zero o uno. Qui ci limiteremo a proporre al lettore il seguente

Esercizio. Mediante il calcolo del numero delle coppie comuni a due trasformazioni [1, 1] variabili in una serie continua, si dimostri che:

([1]) Atti dell'Accademia di Torino, 11 giugno 1893.

([2]) Comptes Rendus, 12 giugno 1893; Journal de Mathématique (1894).

([3]) Rendiconti Lincei, 19 aprile 1903.

([4]) Atti dell'Istituto Veneto, 1908.

1) Una curva con una serie continua di trasformazioni in sè è di genere $p \leq 1$.

2) Sopra una curva di genere 1 una serie continua di trasformazioni è necessariamente di dimensione 1, ed è tale che due punti corrispondenti determinano una trasformazione della serie.

Abbiamo accennato che CASTELNUOVO ed HUMBERT si sono incontrati nel risolvere la questione della linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva f, rispondendo alla domanda « se la proprietà (involutoria) di una serie ∞^r di gruppi di n punti su f, che r punti generici determinino *un* gruppo, valga a definire le serie lineari g_n^r ». In modo preciso enunciamo qui il

Teorema di CASTELNUOVO-HUMBERT. *Un' involuzione ∞^r di gruppi di n ($> r$) punti sopra una curva è una serie lineare g_n^r ovvero si compone degli ∞^r gruppi di un' involuzione irrazionale γ_ν^1 ($n = \nu r$) presi ad r ad r.*

Abbiasi su f un'involuzione Γ di ∞^r gruppi di n punti ($n > r$) la quale non sia composta con una γ_ν^1; allora i gruppi della serie contenenti come punti fissi $r-1$ punti generici di f, non potendo dar luogo ad una serie continua di involuzioni irrazionali γ_{n-r+1}^1, costituiranno una involuzione lineare. Si deduce di qui che due gruppi di Γ aventi a comune $r-1$ punti sono equivalenti; anche due gruppi G_n e G_n' che abbiano comuni $r-2$ punti fissi $P_1 P_2 \dots P_{r-2}$ saranno pure equivalenti, riuscendo equivalenti al gruppo di Γ che viene determinato dai detti punti P presi insieme ad un altro punto del G_n ed a un altro punto del G_n'. Procedendo con questo modo di deduzione, si arriva infine a provare che sono equivalenti due gruppi qualsiansi di Γ. Pertanto la serie Γ sarà contenuta in una serie lineare g_n^s, con $s \geq r$.

Se $s = r$ il teorema è già dimostrato. Supponiamo dunque $s > r$, e — per maggior chiarezza — facciamo dapprima $r = 2$, $s = 3$. Avremo come immagine proiettiva della curva f una C_n d'ordine n di S_3, e in questo S_3 un sistema Σ ∞^2 di piani, tale che per due punti di C_n passi *un* piano di Σ: inoltre i piani di Σ passanti per un punto A di C_n (segando su C_n una g_n^1) formeranno un fascio avente un certo asse a per A. Ora anche i piani di Σ per un punto B di C_n passeranno tutti per una retta b, uscente da B, e le rette a e b giaceranno nel piano di Σ per A e B. Dunque gli assi dei fasci di piani di Σ, determinati dai punti della C_n, riescono a due a due incidenti, sicchè (non giacendo in un piano) passeranno tutti per un medesimo punto O: ciò significa che il sistema Σ è la stella dei piani per O.

Il ragionamento si estende subito al caso in cui $r = 2$ ed $s > 3$. Avremo allora una C_n entro uno spazio S_s ed un sistema Σ di ∞^2 iperpiani, così fatto che gli iperpiani uscenti da un punto A di C_n passeranno per un S_{s-2}; si conclude quindi che tutti gli S_{s-2} analoghi (dovendo essere a due a due incidenti secondo un S_{s-3}) passano per un medesimo S_{s-3}, sicchè il sistema Σ è costituito dalla rete di iperpiani per questo spazio S_{s-3}. Dopociò la dimostrazione si estende per induzione completa da r a $r + 1$, sicchè il teorema risulta dimostrato in ogni caso. Qui per semplicità di discorso basterà trattare il caso tipico di una C_n di S_4, in cui è dato un sistema Σ di ∞^3 iperpiani, tale che tre punti di C_n determinano un iperpiano di Σ. Ora sappiamo che gli iperpiani di Σ per un punto A di C_n formano una rete cioè contengono una retta a uscente da A, e similmente gli iperpiani per un punto B contengono una retta b; inoltre gli iperpiani di Σ passanti contemporaneamente per A e B formano fascio, e perciò passano per un piano, contenente a e b: si conclude pertanto che gli assi delle reti di iperpiani determinate dai punti di C_n passano per uno stesso punto O, il che significa appunto che il sistema Σ è il sistema lineare degli iperpiani per O. c. d. d.

§ 42. **Criterio numerativo perchè una serie di gruppi di punti sia contenuta in una serie lineare.** — Nell'ordine di idee in cui ci stiamo movendo, trova posto un notevole criterio di Castelnuovo, esprimente la condizione perchè una serie s, di ∞^1 gruppi di n punti, sia contenuta in una serie lineare.

Questo criterio si basa sopra la formula che dà il numero, N, dei gruppi di $r + 1$ punti comuni alla nostra $s = s_{n,i}$ ed a una g^r_m posta sulla medesima f: formula nella quale figurano accanto all'*ordine*, n, di s anche gli altri suoi caratteri, cioè l'*indice*, i, (numero dei gruppi contenenti un punto) e il *numero dei punti doppi*, d. La formula accennata trovasi già da noi stabilita, col metodo funzionale, nel § 10 (pag. 77), dove tuttavia indicavamo con m l'ordine della s e con n quello della serie lineare r volte infinita; con le notazioni *qui adottate* la formula che dà il numero N diviene precisamente

$$N = im\binom{n-1}{r} - \frac{d}{2}\binom{n-2}{r-1}.$$

Alla stessa formula si può giungere col principio di corrispondenza (SEVERI): occorre infatti ricercare le coincidenze della corrispondenza T che si ottiene associando ad un punto P tutti i punti residui rispetto alla g^r_m di un qualsiasi G_r, residuo di P rispetto a un gruppo della s che lo contiene. Ora tale ricerca si compie agevolmente, perchè la T dà una corrispondenza di valenza zero quando le si sommi la corrispondenza simmetrica $[i(n-1,\ i(n-1)]$ definita dalla serie s, contata un certo numero di volte. Così, p. es., se $i=1$ ed $n=r+1$, basta sommare semplicemente al gruppo degli omologhi di P in T gli r punti coniugati di P nell'involuzione s, ottenendosi un gruppo G_m della g^r_m. La trattazione del caso generale viene lasciata al lettore come esercizio.

Avemmo già occasione di rilevare che l'espressione di N, data dalla formula precedente, non può diventare negativa, se la serie $s_{n,i}$ non possegga infiniti G_{r+1} comuni con la g^r_m. Pongasi ora che la g^r_m sia una g^{n-1}_{n-1+p}; avremo:

$$r=n-1,\quad m=n-1+p,\quad N=i(n-1+p)-\frac{d}{2}.$$

Se i gruppi G_n della nostra s non sono tutti contenuti in gruppi della g^{n-1}_{n-1+p}, si dovrà avere

$$d \leq 2i(n+p-1);$$

e poichè si può sempre costruire una g^{n-1}_{n-1+p} in modo che non contenga un G_n della nostra s, si ottiene così un *massimo per il numero dei punti doppi di una serie* $s_{n,i}$ appartenente ad una curva di genere p.

Il massimo numero dei punti doppi, $d = 2i(n+p-1)$, è raggiunto per le serie contenute in una serie lineare d'ugual ordine [1].

[1] Questo criterio di Castelnuovo è stato esteso alle serie più volte infinite da TORELLI (*Atti dell' Istit. Veneto*, 1908); d'altra parte il carattere considerato da Castelnuovo per una serie ∞^1 di gruppi di punti sopra una curva, si può considerare come il primo di una serie di caratteri definiti per via trascendente da A. COMESSATTI (*Rendic. del Cir. Mat. di Palermo*, 1913).

Pongasi infatti che, per una data $s = s_{n,i}$ sia

$$d = 2i(n + p - 1).$$

Allora non vi è nessun gruppo della s che sia contenuto in un gruppo di una g^{n-1}_{n-1+p} generica; ma se una g^{n-1}_{n-1+p} contiene un G_n della s, li contiene tutti, cioè ogni G_n della serie che abbia $n-1$ punti entro un gruppo della g^{n-1}_{n-1+p} ha di conseguenza entro questo gruppo anche il suo n-esimo punto.

Ciò posto, si consideri sulla curva una g^n_{n+p}: se un punto P è tale che la g^{n-1}_{n-1+p} residua di esso rispetto alla g^n_{n+p} contiene un G_n della s, allora questa serie residua contiene tutti i G_n di s. Ma vi sono p punti P della curva per cui la detta serie residua contiene un dato G_n, cioè i p punti del G_p residuo di G_n rispetto alla g^n_{n+p}; si conclude pertanto che tutti i G_n della serie s appartengono alla stessa serie lineare g_n, residua del G_p rispetto alla g^n_{n+p}.

Abbiamo dimostrato che « le serie $s_{n,i}$ aventi il massimo numero di punti doppi sono contenute in serie lineari g_n ». Reciprocamente si verifica che le $s_{n,i}$ contenute in una serie lineare posseggono il massimo numero di punti doppi $d = 2i(n+p-1)$. Infatti una tale serie non ha G_n comuni con una g^{n-1}_{n-1+p} completa che non contenga la g_n. D'altronde il numero dei punti doppi di una $s_{n,i}$ contenuta in una g_n si calcola direttamente col principio di corrispondenza, poichè la $s_{n,i}$ definisce una corrispondenza simmetrica $[i(n-1),\ i(n-1)]$ che — nell'ipotesi nostra — ha la valenza $v \doteq i$, diguisachè risulta

$$d = 2i(n-1) + 2ip = 2i(n+p-1).$$

Dal criterio di Castelnuovo sopra enunciato segue come corollario una proposizione, già incontrata da Severi che la ha stabilita per via trascendente [1]:

Se una serie ∞^1 irriducibile, $s_{n,i}$, appartenente ad una curva algebrica, gode della proprietà che l'insieme degli i gruppi di essa contenenti un punto P della curva si muove, al variare di P, in una serie lineare d'ordine ni, allora la stessa $s_{n,i}$ è contenuta in una serie lineare d'ordine n. Infatti, nell'ipotesi posta, la $s_{n,i}$ definisce sulla curva una corrispondenza

[1] « Il teorema di Abel sulle superficie algebriche ». Annali di Matematica, 1905.

$[i(n-1,\ i(n-1)]$ di valenza i, sicchè il numero dei suoi punti doppi è dato da $d=2i(n+p-1)$.

Il criterio numerativo perchè una serie di gruppi di punti, data sopra una curva, sia contenuta in una serie lineare dello stesso ordine, permette ora di illuminare la questione della rappresentazione analitica delle corrispondenze intercedenti fra due curve distinte.

In generale una corrispondenza $[n,\ n']$ fra due curve

$$f(xy)=0 \quad \text{e} \quad f'(x'y')=0,$$

si può rappresentare — a prescindere da punti singolari — con *due* equazioni

$$\varphi_1(x\,y,\,x'y')=0, \quad \varphi_2(x\,y,\,x'y')=0,$$

così come si è veduto nel § 40 pér il caso che le curve f e f' siano coincidenti: le due equazioni predette debbono essere legate in modo da ammettere infinite coppie di soluzioni comuni (xy) $(x'y')$. Ma già una sola equazione

$$\varphi(x\,y,\,x'y')=0,$$

definisce fra i punti delle f e f' una corrispondenza. La classe delle corrispondenze così definibili si lascia caratterizzare dicendo che « la serie dei gruppi di n punti che corrispondono su f ai punti di f', è contenuta in una serie lineare dello stesso ordine ». Questa proprietà si dimostra con lo stesso ragionamento adoperato per studiare le corrispondenze a valenza positiva sopra una curva, tenuto conto che il punto di f' di cui si cercano gli omologhi sopra f non appartiene ad f: si osserva che la φ, al variare dei parametri $x'y'$, è una curva di un certo ordine passante per certi punti fissi di f, e quindi contenuta in un sistema lineare di curve secanti f in n punti variabili; e similmente si riproduce il ragionamento inverso.

Ciò posto possiamo enunciare il

Teorema: abbiasi fra due curve f e f', rispettivamente di genere p e p', una corrispondenza irriducibile $[n,\ n']$ con δ punti di diramazione su f e δ' su f', diguisachè ai punti di f' corrispondano su f i gruppi di una serie d'ordine n e di indice $i=n'$ con $d=\delta'$ punti doppi, e similmente si ottenga su f'

una serie d'ordine n' e d'indice n con $d' = \delta$ punti doppi: i caratteri indicati sono legati dalla relazione di Zeuthen

$$n'(2p-2) + d' = n(2p'-2) + d,$$

la quale fissa il valore della differenza $d' - d$. *I massimi valori di d e d' rispondono al caso di corrispondenze rappresentate da una sola equazione, per cui*

$$n'(2n+2p-2) - d = n(2n'+2p'-2) - d' = 0.$$

Nel caso di due curve f e f' sovrapposte, la condizione precedente risponde all'ipotesi che la corrispondenza sia a valenza zero, poichè, se la valenza è positiva, l'equazione che la rappresenta porge una corrispondenza riducibile in cui figura come parte l'identità.

Terminiamo proponendo come esercizio di dedurre, in questo ordine di idee, una nuova dimostrazione del teorema, stabilito nel § 10, pag. 78, che: *una serie razionale di gruppi di n punti sopra una curva è sempre contenuta in una serie lineare dello stesso ordine.*

§ 43. **Le corrispondenze sopra una curva a moduli generali.** — Abbiamo veduto che, sopra una curva f di genere $p > 0$, il prodotto di due corrispondenze a valenza v e v' è una corrispondenza di valenza $-vv'$, diguisachè il prodotto di due corrispondenze a valenza negativa ha sempre valenza negativa, mentre il prodotto di due corrispondenze a valenza positiva ha valenza negativa. Quindi, lasciando per il momento da parte le corrispondenze a valenza nulla, i risultati precedenti si possono enunciare dicendo che:

Sopra una curva f, di genere $p > 0$, le corrispondenze a valenza diversa da zero formano un gruppo misto che contiene come sottogruppo l'insieme delle corrispondenze a valenza negativa; le corrispondenze a valenza positiva prese da sole non formano gruppo.

Questa proprietà si può illustrare studiando il modo con cui le corrispondenze appartenenti ad una f operano sui cicli della relativa superficie di Riemann.

Infatti si riconosce come — in un senso che verrà precisato fra poco — le corrispondenze a valenza conservano sempre i cicli di codesta superficie, salvochè le corrispondenze a valenza negativa ne mantengono anche il verso, riuscendo dunque *concordi*, mentre le corrispondenze a valenza positiva sono *discordi*.

Per chiarire le idee conviene prender le mosse dalla considerazione di una g_n^1, che porge su f una corrispondenza elementare. Si rappresentino i gruppi della g_n^1 sui punti del piano della variabile complessa z, per modo che la riemanniana di f venga pôrta da una superficie ad n fogli, che possiederà $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione, A_i, $(i = 1, 2 \dots m)$. Supporremo per semplicità che gli m punti di diramazione siano distinti, e quindi che — in ordine a un certo sistema di cappi uscenti da un punto O del piano — le trasposizioni relative siano ridotte al tipo di LÜROTH-CLEBSCH:

$$\underbrace{(1,2)(1,2) \dots (1,2)}_{2p+2} \quad (2,3)(2,3) \quad (3,4)(3,4) \dots (n-1, n)(n-1, n).$$

Allora i cicli della nostra riemanniana si compongono tutti mediante i $2p$ cicli elementari rappresentati dalle somme di cappi avvolgenti $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, ... $A_1 A_{2p+1}$ (così come accade nel caso iperellittico). Ciò posto si consideri il ciclo C_1 determinato dal cammino avvolgente $A_1 A_2$; mentre la variabile complessa z percorre nel piano questo cammino, i punti omologhi z_1 e z_2 di f percorrono in senso opposto lo stesso ciclo C_1; quanto agli altri punti $z_3 \dots z_n$, corrispondenti a z, essi si muovono contemporaneamente descrivendo cicli nulli (riducibili a un punto).

L'osservazione precedente si lascia generalizzare, riferendosi al caso in cui il punto z descriva, nel piano complesso, una qualsiasi linea chiusa (priva di nodi) avvolgente A_1 e A_2: in questo caso z_1 e z_2 percorrono, in senso opposto, due cicli *omologhi*, riducibili per continuità ad uno stesso ciclo C_1, mentre $z_3 \dots z_n$ danno ancora cicli nulli; per conseguenza la somma dei cicli percorsi da $z_1\, z_2 \dots z_n$ è omologa a zero. Questa proprietà sussistendo per i cicli elementari, si può enunciare che: per ogni particolare *circolazione* di un gruppo di una g_n^1, corrispondente ad un cammino chiuso del punto z che lo rappresenta nel piano della variabile complessa, la quale circolazione riporti in se stessi i singoli punti del gruppo, la somma dei cicli descritti da questi punti è omologa a zero.

Più in generale si consideri una qualsiasi circolazione di un gruppo entro la g_n^1, per cui i punti del gruppo vengano comunque scambiati fra loro; allora un singolo punto z_i potrà descrivere un cammino aperto, ma l'insieme degli n punti darà luogo ad uno o a più cicli, la cui somma riuscirà sempre omologa a zero. Infatti, ripetendo la circolazione un numero conveniente, h, di volte, ogni punto z_i ritorna in se stesso, e la somma dei cicli descritti, che è multipla secondo h della precedente, riesce omologa a zero (h designa qui il periodo della sostituzione prodotta su $z_1 z_2 \dots z_n$ dalla circolazione considerata).

Riassumiamo le cose dette come segue.

Siano $C_1 C_2 \dots C_{2p}$ i cicli elementari di una superficie di Riemann f: *per ogni circolazione di un gruppo di n punti entro una g_n^1* appartenente ad f, vengono descritti $s \leq n$ cicli

$$K_j \backsim \Sigma \lambda_{ji} C_i \qquad (j = 1, 2 \dots s)$$

la cui somma è omologa a zero, cioè

$$K_1 + K_2 + \dots + K_s \backsim 0.$$

Il teorema si estende alle possibili circolazioni di un gruppo entro una g_n^r della nostra f, per $r > 1$. Infatti si può rendere visibile che una siffatta circolazione si riduce, con deformazione continua, ad una circolazione entro una g_n^1. Per semplicità di discorso porremo $r = 2$, e ci riferiremo quindi ad uno spazio S_4 che offra la rappresentazione reale dei gruppi della g_n^2 (dipendenti da due variabili complesse). Nello S_4 si avrà una superficie (di diramazione) F, immagine della varietà dei gruppi della g_n^2 dotati di punto doppio; una circolazione di un G_n, entro la g_n^2, corrisponde a un cammino chiuso C descritto da un punto P nello S_4, ed è sempre lecito deformare C per continuità purchè non si venga ad attraversare la F; dimostreremo che con una siffatta deformazione continua C può sempre ridursi a stare entro un piano, e precisamente in uno degli ∞^4 piani che rappresentano le g_n^1 della g_n^2.

Pongasi dapprima che il ciclo C di cui si discorre appartenga ad un S_3 passante per uno dei detti piani π: la F viene segata dallo S_3 secondo una linea L, e il ciclo C avvolge un certo numero di volte la L. Ora è chiaro come questa C si riduca per continuità ad una linea avvolgente i punti di intersezione di L con π: ognuno si renderà conto di questa affermazione materializzando la linea L con un filo di ferro rigido, e la C con un filo di gomma flessibile ed elastico: basterà quindi fare scorrere C lungo L.

La stessa deformazione di C si può fare anche nel caso generale. Per renderlo manifesto si sostituisca anzitutto a C una poligonale chiusa ad essa sufficientemente vicina:

$$H_1 H_2 \ldots H_n \quad (H_{n+1} \equiv H_1).$$

I punti $H_1 H_2 H_3 H_4$ appartengono ad S_3, e quindi la poligonale $H_1 \ldots H_4$ può ridursi a una linea piana, con gli stessi estremi, senza attraversare F: nello stesso modo si opera ora sulla linea $H_1 \ldots H_4 H_5$ che appartiene pure ad un S_3, e così di seguito: si perverrà in fine ad una linea $H_1 \ldots H_n$, giacente in un piano, che conterrà anche il segmento $H_1 H_n$, e che porgerà una deformata del ciclo C, ottenuta sempre senza attraversamento della superficie F. Ora per due punti di questa linea passa un piano π, che insieme col piano della linea stà in un S_3; quindi si riesce a deformare la nostra linea riducendola ad un ciclo del piano π avvolgente i punti di diramazione segati da F. c. d. d.

Dopo avere così esteso il nostro teorema alle serie lineari di dimensione $r > 1$, siamo in grado di togliere ogni dubbio relativo alla restrizione posta innanzi, che le g_n^1 di cui si tratta abbiano punti doppi distinti (e ciò senza estendere a questo caso la nostra analisi). Infatti, essendo data sulla f una g_n^1 con punti multipli qualsiasi, si costruisca sulla f stessa una g_m^r $(m > n)$ nella quale si trovino delle g_m^1 con punti doppi distinti [1]: almeno per $r \geq n$ la g_m^r conterrà la g_n^1, che apparirà quindi come residua di un gruppo di $m - n$ punti fissi, G, rispetto alla g_m^r. Allora dall'essere a circolazione nulla la g_m^r, si deduce che è pure a circolazione nulla la $G + g_n^1$.

Il teorema sopra stabilito esprime il contenuto topologico di un celebre teorema di Abel sugli integrali di differenziali algebrici [2] e però sarà da noi designato brevemente col nome

[1] È ovvio che ciò accade sempre per la g_m^1 generica contenuta in una g_m^r semplice con $r > 1$; infatti le tangenti condotte per un punto generico ad una curva piana d'ordine m hanno con essa soltanto contatti semplici.

[2] E sotto questo aspetto è presentato da Rosati (*Rendic. della Acc. dei Lincei*, 1913).

di « teorema d'Abel topologico »: esso può enunciarsi come segue:

Teorema d'Abel topologico: Sopra una superficie di Riemann, immagine di una curva algebrica di genere p qualsiasi, ***ogni circolazione di un gruppo di n punti entro una serie lineare che lo contiene, dà luogo ad una somma di cicli nulla.***

In particolare si può dire che ogni *serie algebrica* ∞^1 di gruppi di n punti, dipendente da uno o più parametri complessi, che sia *contenuta entro una serie lineare* dello stesso ordine, è a *circolazione nulla.*

Questo teorema permette di spiegare il significato topologico della valenza v, per ogni corrispondenza $[n', n]$ data sopra una curva f. Si consideri un punto P e i suoi n corrispondenti $P_1 P_2 \dots P_n$; quando P descrive un ciclo C della riemanniana di F, i punti $P_1 P_2 \dots P_n$ descrivono nel loro insieme uno o più cicli $C_1 C_2 \dots C_s$ $(s \leq n)$: ora, se $v > 0$, si avrà

$$vC + C_1 + C_2 + \dots + C_s \sim 0:$$

dunque la valenza della nostra corrispondenza è il numero delle volte che bisogna contare un qualsiasi ciclo descritto da P, perchè insieme ai cicli descritti dagli n punti corrispondenti dia una somma nulla. L'inversione del teorema di Abel topologico ci permetterà più innanzi di riconoscere che si ottiene così *una vera definizione topologica della valenza*: la quale si estende subito al caso della valenza negativa. Infatti, se la valenza riceve il valore negativo $-v$, si può ancora scrivere l'omologia

$$C_1 + C_2 + \dots + C_s - vC \sim 0,$$

che si dimostra considerando che il gruppo $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ preso insieme col gruppo $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{m-v}$, residuo di vP rispetto ad una g^v_m, dà luogo ad un gruppo variabile in una serie lineare: precisamente, designando con $K_1 K_2 \dots K_i$ $(i \leq m-v)$ l'insieme dei cicli descritti da $Q_1 Q_2 \dots Q_{m-v}$ quando P descrive C, si ha

$$C_1 + C_2 + \dots + C_s + K_1 + K_2 + \dots + K_i \sim 0$$
$$vC + K_1 + K_2 + \dots + K_i \sim 0$$

donde

$$C_1 + C_2 + \dots + C_s - vC \sim 0.$$

Ora appare che le corrispondenze a valenza positiva sono da ritenere come *discordi*, giacchè mentre un punto P descrive un ciclo C della riemanniana, l'insieme dei punti corrispondenti descrive un ciclo omologo, ma in senso opposto; invece le corrispondenze a valenza negativa sono concordi. È chiaro pertanto come accada che le corrispondenze a valenza negativa formino gruppo, mentre il prodotto di due corrispondenze a valenza positiva ci fa uscire dal sistema di queste, porgendoci una nuova corrispondenza di valenza negativa.

Rileviamo ora la condizione particolare in cui si trovano le corrispondenze a valenza nulla. Per il teorema d'Abel topologico la somma dei cicli descritti dai corrispondenti di un punto P, per qualunque ciclo C descritto da P, si riduce per omologia ad un ciclo nullo: è quanto dire che codesta somma riesce omologa al multiplo vC secondo $v = 0$. Di qui appare nuovamente come « il prodotto di una corrispondenza a valenza nulla per una corrispondenza qualsiasi sia ancora a valenza nulla ». Frattanto si può dire che:

Sopra una curva f di genere $p > 0$, tutte le corrispondenze a valenza formano un gruppo Γ, entro il quale formano sottogruppo:

1) *le corrispondenze a valenza negativa $v < 0$,*
2) *le corrispondenze a valenza $v \leq 0$,*
3) *e le corrispondenze a valenza nulla $v = 0$.*

Queste ultime formano un sottogruppo Γ_0 che resta invariato per moltiplicazione con una qualsiasi operazione di Γ.

Quest'ultima proprietà è *paradossale*, contraddicendo alle nozioni ricevute nella usuale teoria dei gruppi di trasformazioni. Infatti, designando con π, π'.... le operazioni di Γ_0 e con τ quelle di Γ, dalla relazione

$$\pi\tau = \pi'$$

sembra dedursi

$$\tau = \pi^{-1}\pi',$$

e quindi τ appartenente a Γ_0. Ma questa deduzione suppone l'inversione univoca di π per cui $\pi^{-1}\pi = 1$; qui invece si considerano corrispondenze plurivoche, che moltiplicate per la loro inversa danno origine a corrispondenze non identiche, in cui l'identità figura solo come fattore.

Insieme al teorema d'Abel topologico sussiste anche il suo inverso, cioè

Ogni serie algebrica a circolazione nulla appartenente ad una curva (superficie di Riemann) *qualsiasi è contenuta in una serie lineare dello stesso ordine.*

In questo paragrafo ci limiteremo a dimostrare il teorema riferendoci alle *curve di moduli generali* [1], ciò che basta allo studio delle corrispondenze sopra tali curve; nel successivo paragrafo lo stesso teorema riceverà una nuova dimostrazione valida per curve qualsiansi [2].

Prendiamo le mosse dal caso delle curve f di genere $p=1$. Abbiasi dunque su f una serie algebrica s_n di gruppi di n punti, a circolazione nulla; è chiaro che possiamo limitarci all'ipotesi in cui la serie dipenda da *un* solo parametro complesso, cioè sia, in questo senso ∞^1, (dal punto di vista reale ∞^2). Fissata sulla f stessa una generica serie g^n_{n+1}, si costruisca il punto P residuo di un G_n di s_n rispetto a questa serie. Se P resta fisso al variare di G_n entro s_n tutti i G_n sono equivalenti e il teorema è dimostrato; se invece P non è fisso, ad ogni P corrisponderà un numero finito di G_n; ora si faccia muovere P descrivendo un conveniente numero $i>1$ di volte un certo ciclo C di f; diguisachè a questo ciclo risponda una circolazione del G_n entro s_n (che riporti il G_n in se stesso); questa circolazione produrrà una somma di cicli omologa a $-iC$. Se dunque la serie s_n è a circolazione nulla, il punto P resta fisso. c. d. d.

Dopo avere dimostrato il nostro teorema per tutte le curve di genere $p=1$, possiamo estenderlo alle curve di genere $p=2$ con moduli generali.

Se sopra una f di genere $p=2$, è data una serie s_n a circolazione nulla, nell'ipotesi che essa non sia contenuta in una serie lineare, i suoi gruppi avranno come residui rispetto ad una g^n_{n+2} ∞^1 coppie non equivalenti, formanti una serie s_2 a circolazione nulla: questa s_2 potrà ritenersi contenere una coppia assegnata a priori sopra f, dalla quale dipende la scelta della nominata g^n_{n+2}.

(1) Cfr. ENRIQUES « Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche (*Math. Ann.*, Bd. 85).

(2) Cfr. CHISINI « Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico ». *Rendic. dell' Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1921.

Ora, se ogni f di genere 2 contiene una siffatta s_2, vediamo che cosa divenga al limite questa serie quando f acquista un punto doppio O, degenerando così in una $\bar{f}$ ellittica su cui vien segnata una coppia $O_1 O_2$ (rappresentante i due punti sovrapposti in O).

Anzitutto occorre rilevare che la serie limite $\bar{s}_2$ può ritenersi effettivamente ∞^1, essendo lecito supporre che contenga una coppia G_2 arbitrariamente assegnata su $\bar{f}$: infatti sulla f variabile si hanno ∞^1 s_2 analoghe; se ciascuna di queste al limite si riducesse ad una coppia di punti (anzichè ad una infinità di coppie di punti) della $\bar{f}$, soltanto coppie particolari di $\bar{f}$ figurerebbero come limiti delle coppie di punti generici di f; ma ciò non accade certo, ove il passaggio al limite sia fatto in modo che ogni punto semplice di $\bar{f}$ sia limite di un sol punto della f variabile.

Ciò premesso è chiaro che la nostra $\bar{s}_2$, limite di una s_2 a circolazione nulla, sarà essa stessa a circolazione nulla, ovvero si comporrà di più serie ∞^1 di coppie di punti, ciascuna a circolazione nulla: quella componente di s_2 che contiene G_2 (coppia generica di $\bar{f}$) sarà dunque sulla $\bar{f}$ ellittica una g_2^1. Se ora proveremo che in questa g_2^1 il coniugato di O_1 deve essere O_1 stesso o O_2, arriveremo ad un assurdo, poichè una g_2^1 soddisfacente a questa condizione particolare non potrebbe contenere la coppia G_2, segnata ad arbitrio.

La prova di cui sopra si fornisce nel seguente modo: si consideri un giro C_1 fatto da un punto P_1 attorno ad O_1: il suo coniugato rispetto alla g_2^1, P_2, compierà un giro C_2, che potrà rendersi infinitesimo con C_1; quindi se C_2 non comprende O_1 o O_2, esso compare come limite di un ciclo nullo della f variabile tendente ad $\bar{f}$, laddove C_1 appare come limite di un ciclo non nullo; di conseguenza tale ipotesi porterebbe una circolazione non nulla entro la s_2 di f che ha per limite la $\bar{s}_2$, ciò che contraddice la condizione fondamentale supposta per la s_2. Così il nostro teorema è dimostrato per $p=2$.

La dimostrazione svolta per $p=2$ si estende induttivamente da $p-1$ a p nel modo che brevemente accenniamo.

Se ad una f di genere p appartiene una s_n a circolazione nulla, non contenuta in una serie lineare, si costruirà su f una serie ∞^1 s_p, pure a circolazione nulla, e formata di gruppi non equivalenti, che anzi potrà supporsi contenere un gruppo generico G_p assegnato a priori. Passiamo al limite riducendo la f ad una $\bar{f}$ di genere $p-1$ su cui viene segnata una coppia O_1O_2. La s_p si riduce ad una $\bar{s_p}$ a circolazione nulla, e — poichè il teorema si suppone dimostrato per $p-1$ — questa $\bar{s_p}$ conterrà una g_p^1 che dovrà contenere la coppia O_1O_2 oppure avere O_1 e O_2 come punti doppi: ma questa conclusione è assurda poichè la g_p^1 di cui si tratta è affatto generica, riuscendo definita da un gruppo G_p assegnabile a priori.

Passiamo allo studio delle corrispondenze $[n', n]$ appartenenti ad una curva f di genere p. E cominciamo con lo stabilire una distinzione fondamentale.

Diremo che una corrispondenza $[n', n]$ è *ordinaria*, o che conserva i cicli, se accada che quando un punto P descrive un ciclo C della riemanniana, l'insieme dei punti corrispondenti descriva un ciclo (o una somma di cicli $C_1+C_2+\ldots+C_s$) omologo a C o a un suo multiplo, secondo un numero v, positivo, negativo o anche nullo. È ovvio che questo numero v non può dipendere dalla scelta del ciclo descritto da P; infatti se a due cicli C_1 e C_2 corrispondessero due numeri diversi v_1 e v_2, al ciclo C_1+C_2 corrisponderebbe un ciclo omologo a $v_1C_1+v_2C_2$ che non è omologo ad un multiplo di C_1+C_2.

Per contro diremo che una corrispondenza è *singolare* se non è ordinaria, cioè se accade che, mentre un punto P descrive un ciclo C della riemanniana, l'insieme dei suoi corrispondenti descriva un ciclo (non nullo) che non si riduce per omologia ad un multiplo di C.

Come già abbiamo avvertito, il teorema di Abel topologico dice che *le corrispondenze a valenza* conservano i cicli, cioè *sono ordinarie*. L'inverso del detto teorema conduce reciprocamente ad affermare che *le corrispondenze ordinarie posseggono una valenza*. Questo risultato può ritenersi qui come acquisito almeno per le curve di genere $p=1$ e per quelle di genere $p>1$ a moduli generali; basandosi su di esso dimostreremo il

Teorema: ***Ad una curva con moduli generali appartengono soltanto corrispondenze a valenza*** (1).

Il teorema sussiste formalmente, ma non è significativo,

(1) Cfr. Hurwitz: *Math. Annalen*, Bd. 28 (1886).

per il genere $p=0$: forniremo la dimostrazione per $p=1$ e poi faremo vedere come essa si estenda per $p>1$.

La dimostrazione che cominceremo a svolgere, come si è detto, per $p=1$, si basa sul metodo di degenerazione per cui una curva di genere p si riduce con variazione continua ad un'altra di genere $p-1$ con un nuovo punto doppio $O=O_1+O_2$ (O_1 e O_2 sono i punti, appartenenti ai due rami, che vengono a sovrapporsi in O). Pertanto gioverà indagare anzitutto che cosa diventi al limite una corrispondenza $[n', n]$ appartenente ad una curva f di genere p, che subisca l'anzidetta degenerazione.

Può darsi che, nel passaggio al limite, la nostra corrispondenza:

1) si conservi una corrispondenza irriducibile con gli stessi indici, o si spezzi in più corrispondenze (non degeneri) con gli indici ≥ 1;

2) ovvero può darsi che dalla corrispondenza limite si stacchino delle *corrispondenze degeneri* del tipo $[1, 0]$ o $[0, 1]$, cioè corrispondenze in cui a un punto generico sia associato un punto fisso o reciprocamente, a quel modo che una proiettività variabile può ridursi al limite ad una proiettività degenere, che è una corrispondenza $[1, 1]$ composta di due corrispondenze $[1, 0]$ e $[0, 1]$. Per esempio si consideri la corrispondenza T fra un punto e il suo tangenziale sopra una cubica f: quando f acquista un punto doppio O $(=O_1+O_2)$, la T, che è una corrispondenza $[4, 1]$ si riduce ad una corrispondenza $[2, 1]$, che deve essere aumentata di due corrispondenze degeneri $[1, 0]$, cioè delle corrispondenze in cui ad O_1 e O_2 rispondono tutti i punti della curva. Ciò appare manifesto a chi consideri la costruzione della corrispondenza inversa, dove la cubica viene segata con la conica polare di un punto generico P, giacchè questa conica va a passare sempre per il punto doppio.

Ora si può chiedere se le degenerazioni considerate siano le sole possibili cui può andar soggetta una corrispondenza appartenente ad f, quando la f acquisti, con passaggio al limite determinato in modo generico, un nuovo punto doppio. La risposta è affermativa, cioè si può escludere quella degenerazione più radicale in cui ad ogni punto della curva corrisponderebbe ogni altro punto. Per convincersene basta considerare le possibili degenerazioni delle corrispondenze a valenza positiva, giacchè ogni altra corrispondenza può ritenersi come parte di una siffatta, costruendosi appunto come interferenza di due corrispondenze a valenza positiva. Or dunque si consideri sopra una curva piana f, dipendente algebricamente da un parametro λ, una corrispondenza (a valenza positiva) rappresentata da un'equazione

$$\varphi_\lambda(x\,y,\ x'y') = 0:$$

supponiamo che per un certo valore di λ ($\lambda = 0$), la f si riduca ad una $\bar{f}$ dotata di un nuovo punto doppio; e notiamo che, presa una retta generica a, alle sue intersezioni con f non risponderà alcuna delle intersezioni di f con $\bar{f}$. Ciò posto, mentre la f varia con λ, si consideri un punto P intersezione di f con a; i suoi corrispondenti $P_1 P_2 \ldots. P_n$ varieranno descrivendo una curva algebrica $\psi(xy) = 0$. Questa ψ potrà eventualmente essere riducibile, ma (in quanto è definita come luogo dei punti $P_1 P_2 \ldots. P_n$) non conterrà certo come parte la $\bar{f}$, poichè le intersezioni di $\bar{f}$ con f non figurano tra i punti corrispondenti a P (o alle altre intersezioni di f con a) nella nostra corrispondenza. Ciò significa che, al limite per $\lambda = 0$, la corrispondenza stessa associerà sempre al punto $\bar{P}$ di $\bar{f}$ un numero finito di punti.

Dopo queste premesse, consideriamo sopra una riemanniana ellittica f una corrispondenza suscettibile di variare insieme ad f, e passiamo al limite in guisa che la f acquisti un punto doppio O ($= O_1 + O_2$), ricordando che i cicli fondamentali C e K si riducono, l'uno a una linea chiusa circondante O_1 (o ciò che è lo stesso O_2) e l'altro a una linea aperta di estremi $O_1 O_2$ (§ 37, pag. 424). Ora, se la corrispondenza data sulla f variabile muta il ciclo C in un altro ciclo $C' \backsim vC + uK$ con $u \neq 0$ (C' essendo descritto dal gruppo dei punti che corrispondono a un punto descrivente C), questa proprietà si rifletterà sulla riemanniana limite $\bar{f}$; precisamente dovrà accadere che a un ciclo infinitesimo circondante O_1 — non contenente punti singolari della corrispondenza — corrisponda un ciclo contenente come parte una linea finita aperta, congiungente O_1 con O_2; ma ciò è assurdo perchè al detto ciclo infinitesimo dovrà corrispondere certo una linea infinitesima, sia che questa avvolga O_1 od O_2, provenendo come limite da un ciclo multiplo di C, sia che non comprenda nessuno dei detti punti, provenendo da un ciclo nullo. Si conclude che ogni corrispondenza appartenente ad una f ellittica di modulo generale conserva i cicli, e quindi è a valenza.

Il ragionamento svolto per $p=1$, si estende ora, similmente, alle curve f di genere $p>1$. A tale scopo basta conoscere in qual modo vengano a degenerare i cicli della riemanniana f, per una conveniente degenerazione in cui la f stessa acquista un punto doppio O $(=O_1+O_2)$; e per ciò giova riferirsi al modello Lüroth-Clebsch della riemanniana f. Avremo qui $2p+2$ punti di diramazione $A_1 A_2 \ldots. A_{2p+2}$ tali che i cappi che li avvolgono producono sui fogli di f la trasposizione (12).

La degenerazione di f in una $\bar{f}$ di genere $p-1$, si può far corrispondere al fatto che A_1 e A_2 vengano a coincidere in uno stesso punto O, che — rispettivamente sui due fogli 1 e 2 — prende i nomi O_1 e O_2. Allora il ciclo elementare C, somma dei cappi avvolgenti A_1 e A_2, si riduce per es. ad un ciclo infinitesimo avvolgente O_1 sul primo foglio. Un altro ciclo qualsiasi C', che non sia nullo e non si riduca ad un multiplo di C, è omologo ad un ciclo contenente come parte: 1) o una linea chiusa avvolgente uno solo dei due punti A_1 e A_2 (p. es. una linea che giri attorno ad $A_1 A_3$), che al limite diviene su $\bar{f}$ la linea aperta $O_1 O_2$; 2) o un altro ciclo elementare avvolgente due punti come A_3 e A_4, che al limite diventa un ciclo non nullo di $\bar{f}$. Appare di qui essere impossibile che una corrispondenza definita sulla f variabile faccia corrispondere a un ciclo elementare C un altro ciclo non nullo C', il quale non si riduca per omologia ad un multiplo di C; imperocchè la corrispondenza limite su $\bar{f}$ trasformerebbe un ciclo infinitesimo avvolgente O_1 (non contenente punti singolari per la corrispondenza stessa) in un ciclo — limite di C' — che non sarebbe più infinitesimo.

Così il nostro teorema riesce pienamente dimostrato.

Questo teorema è dovuto ad Hurwitz, che lo ha dedotto dalla rappresentazione generale delle corrispondenze mediante funzioni abeliane [1], e fu completato in un punto da Severi [2]: la sua dimostrazione algebrico-geometrica compare qui per la prima volta.

[1] Math. Annalen, 1886.
[2] Math. Annalen, 1913.

Termineremo questo paragrafo fornendo esplicitamente alcuni *esempi di corrispondenze singolari* che appartengono a curve di genere p con moduli particolari.

Anzitutto per $p=1$ sono singolari le trasformazioni birazionali di periodo 3 o 4 che si hanno rispettivamente sopra la curva ellittica equianarmonica od armonica, delle quali già nel § 38, pag. 434 si verificò che non conservano i cicli. Qui si può verificare indirettamente la singolarità di siffatte trasformazioni in base a semplici osservazioni di numero.

Per il caso equianarmonico, riferendoci alla cubica

$$y^3=(x-a)(x-b)(x-c),$$

basta osservare che la trasformazione [1, 1] possiede 3 punti uniti (a, b, c) e, se ci fosse una valenza v, si dovrebbe avere $3=1+1+2v$, che è assurdo.

Nel caso armonico la trasformazione [1, 1] di periodo quattro possiede 2 punti uniti: infatti, riferendoci alla cubica $y^2=x^3-x$, la trasformazione $x=-x'$, $y=iy'$, ha come punti uniti sulla curva i punti $(x=y=0)$ e $(x=0,\ y=\infty)$. Ciò posto se la nostra trasformazione possedesse una valenza v, si avrebbe $2=2+v$, donde $v=0$; ma ciò significa che i punti della curva (corrispondenti ai punti generici) dovrebbero formare una serie razionale g_1^1, il che è assurdo, essendo $p=1$.

Non ci fermeremo ulteriormente sul caso ellittico, limitandoci ad avvertire che altre corrispondenze singolari si ottengono più generalmente in rapporto a funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa [1]; passeremo invece a considerare le curve f di genere $p>1$ con trasformazioni birazionali in se stesse. Se una corrispondenza [1, 1] siffatta possiede una valenza v, il numero dei punti uniti sarà dato da

$$x=2+2pv\geq 0,$$

donde $v\geq 0$.

D'altra parte, poichè $p>1$, la nostra trasformazione sarà ciclica di un certo ordine n, generando una involuzione γ_n^1, con x punti *n-pli* ed eventuali altri punti multipli secondo

[1] Cfr. per es. BIANCHI, « Lezioni sulla teoria delle funzioni.... », Cap. XVIII.

divisori di n, in tutto equivalenti a $y \leq 2n + 2p - 2$ punti doppi, e si avrà quindi

$$x \leq \frac{y}{n-1},$$

da cui

$$(n-1)(2 + 2pv) \leq 2n + 2p - 2,$$

onde segue:

$$v(n-1) \leq 1.$$

Questa diseguaglianza non può essere soddisfatta che per $v = 1$ o $v = 0$ ($n \geq 2$, $v \geq 0$). L'ipotesi $v = 1$ porta che sia $n = 2$, e le ∞^1 coppie di punti omologhi nella nostra trasformazione appartengano ad una g_2^1; invece l'ipotesi $v = 0$ è assurda, perchè i punti della curva dovrebbero formare una serie razionale g_1^1. Si conclude che *ogni corrispondenza biunivoca appartenente ad una curva non iperellittica di genere $p > 1$ è una corrispondenza singolare* (priva di valenza): nel caso iperellittico è non singolare soltanto la trasformazione involutoria fornita dalla g_2^1.

Considerazioni numerative in parte simili alle precedenti permettono anche di stabilire che: *la corrispondenza simmetrica* $[n-1, n-1]$, pôrta da *un'involuzione irrazionale* γ_n^1 *appartenente ad una curva di genere $p > 1$, è singolare.*

Infatti si consideri il numero x dei punti doppi della γ_n^1: se la corrispondenza di cui si tratta ha una valenza v, dovrà essere

$$x = 2(n-1) + 2pv \geq 0,$$

e quindi

$$v \geq -\frac{n-1}{p}.$$

D'altra parte, si consideri un gruppo generico $G = P_1 + \ldots + P_n$ della γ_n^1, e si designi con G_i il gruppo stesso privato del punto P_i; poichè il gruppo

$$vP_i + G_i$$

deve variare in una serie lineare, anche

$$v\Sigma P_i + \Sigma G_i = vG + (n-1)G$$

varierà in una serie lineare. Quindi, posto

$$s = v + n - 1,$$

si può dire che — se $s \neq 0$ — i gruppi della γ_n^1 contati s volte appartengono ad una serie lineare g_{ns}; dal che segue che, nell'ipotesi $s \neq 0$, anche i gruppi dell'involuzione γ_n^1 dovranno esser contenuti in una delle serie lineari g_n (in numero finito) provenienti dalla divisione per s della detta g_{ns}, e perciò la γ_n^1 sarà una serie lineare g_n^1 di genere $\pi = 0$ (cfr. § 35). Si deduce che per $\pi > 0$, deve aversi

$$s = v + n - 1 = 0,$$
$$v = -(n-1).$$

Ma questa conclusione può accordarsi colla diseguaglianza precedente $v \geq -\frac{n-1}{p}$, solo per $p = 1$ (nel qual caso $\pi = 1$).

Con ciò il nostro assunto resta dimostrato.

§ 44. **Le corrispondenze singolari.** — Abbiamo veduto che le corrispondenze appartenenti a curve di moduli generali sono sempre corrispondenze ordinarie dotate di valenza; ed invece sopra le curve di moduli particolari possono esistere corrispondenze singolari. Ora Hurvitz [1] ha dimostrato per via trascendente che in ogni caso tutte le corrispondenze appartenenti ad una curva data *dipendono* da un numero finito di esse, e il significato geometrico di tale dipendenza è stato rilevato da Severi [2]. Noi porgeremo qui una dimostrazione algebrico-geometrica di questo teorema fondamentale, ma perciò occorre riprendere l'inverso del teorema d'Abel topologico e offrirne un'altra dimostrazione, valida per moduli qualsiansi [3].

Il concetto di questa dimostrazione è il seguente:

Si abbia, sopra una curva di genere p, una serie algebrica ∞^1 di gruppi di n punti, d'un certo indice i, a circolazione nulla; si tratta di riconoscere che essa è contenuta in una serie lineare dello stesso ordine. A tale scopo si applicherà il criterio di Castelnuovo (cfr. § 42), che importa la conoscenza del numero dei punti doppi della serie. Ora

(1) l. c. 1887.

(2) l. c. 1903.

(3) Cfr. Chisini: « Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico ». *Rendic. dell' Istituto Lombardo* (3 nov. 1921).

questo numero verrebbe dato dal principio di corrispondenza, qualora si sapesse che la nostra serie è contenuta in una serie lineare (avendosi allora una corrispondenza ordinaria con $v = i$). Ma poichè proprio questo fatto costituisce l'oggetto della nostra dimostrazione, si cercherà di stabilire il principio di corrispondenza mediante considerazioni topologiche, le quali riescono valide per tutte le *corrispondenze* $[n, n']$, *anche non algebriche*, che possano darsi sopra una superficie di Riemann, purchè siano corrispondenze *continue, senza eccezione*, che, come le rappresentazioni conformi (analitiche), conservino il senso della rotazione intorno a un punto, moltiplicando, eventualmente, per un intero il numero dei giri.

A siffatte corrispondenze sia consentito qui dare un nome, designandole come *quasi analitiche*. Cominciamo dal caso elementare in cui la corrispondenza sia sopra una riemanniana R di genere $p = 0$, cioè sul piano-sfera di Argand-Gauss.

In questo caso il teorema da stabilire è sostanzialmente il teorema fondamentale dell'algebra: del quale vuolsi richiamare qui la dimostrazione di Cauchy che oggi si suol presentare nella forma dell' *indicatore logaritmico* e che, nella forma originale, sembra si basasse soltanto sopra i criteri topologici cui passiamo ad accennare.

Teorema di Cauchy. Data una funzione analitica monodroma $y(x)$, dotata di un *numero finito* di poli e di zeri entro un'area piana semplicemente connessa A, la quale non si annulli e non diventi infinita sul contorno, la differenza $N_0 - N_\infty$ fra il numero degli zeri e dei poli entro l'area, è uguale al numero dei giri di cui cresce l'argomento di y quando x percorre in senso positivo il contorno di A.

Questa formula si dimostra senza introdurre l'analiticità di $y(x)$, purchè si abbia una corrispondenza continua in cui a ogni punto x dell'area A risponda un punto della sfera y, in guisa che quando x descrive un cerchietto intorno a un punto, y giri corrispondentemente intorno al punto omologo, una o un numero finito di volte. Infatti la cosa si svolge come segue.

Anzitutto se x descrive, in senso positivo, un giro infinitesimo intorno ad un punto X (di A) che non sia zero nè polo, y descrive un cerchietto infinitesimo lontano da $y = 0$ e $y = \infty$, sicchè il suo argomento rimane invariato.

Invece se X cade in uno zero, y descrive sulla propria sfera un cerchietto intorno al punto $y = 0$, e nel senso positivo, sicchè il suo argomento cresce dell'angolo-giro. E se X cade in un polo (che è uno zero della funzione $\frac{1}{y}$), y gira intorno al punto $y=\infty$, e il suo argomento decresce di un giro.

Il teorema è così stabilito per le aree piccole; e si estende ad una qualunque area A, semplicemente connessa, notando che esso segue per A ove sia riconosciuto per due aree in cui A venga divisa da una linea elementare che abbia i suoi estremi sul contorno. Conviene soltanto tenere debito conto degli zeri (o dei poli) multipli, rispondenti all'ipotesi che a un giro di x intorno ad X, rispondano due, o più, giri di y intorno ad $y=0$ (o $y=\infty$).

Il teorema di Cauchy dà subito il numero (finito) delle coincidenze di una corrispondenza $[n, n']$ sopra la sfera, nella ipotesi che essa sia quasi analitica, nel senso dichiarato innanzi.

Infatti chiamando x_i' ($i=12 \dots n'$) i punti omologhi di un punto x, si consideri la funzione

$$y = \Pi(x - x_i'),$$

i cui N_0 zeri danno le coincidenze cercate. Un cerchietto infinitesimo, descritto da x intorno ad un punto generico, può ritenersi come contorno della intera sfera, e poichè per tale giro l'argomento di y non subisce variazione, si avrà sopra l'intera sfera

$$N_0 - N_\infty = 0, \quad \text{cioè} \quad N_0 = N_\infty.$$

Pertanto basterà contare i poli della y, che sono: il punto $x=\infty$, polo d'ordine n', e gli n punti x, omologhi del punto $x'=\infty$; avendosi dunque

$$N_0 = N_\infty = n + n'.$$

La formula che dà il numero dei punti uniti di una corrispondenza quasi analitica è stata così stabilita sopra una sfera, cioè per $p=0$, e si può ora estenderla alle corrispondenze quasi analitiche T sopra una riemanniana di genere p qualunque.

Questa estensione si fa tagliando R lungo p cicli indipendenti e senza punti comuni, quali sono i cicli trasversali dei p manichi, di una sfera con p manichi realizzante R, per modo che R si riduca ad una sfera R_0 con p coppie di buchi: dopo ciò, come prima, si contano gli zeri della funzione

$$y = \Pi(x - x_i')$$

mediante il teorema di Cauchy. Tuttavia sulla sfera così dedotta dalla R la corrispondenza T, e quindi la funzione y, acquista delle discontinuità relative all'attraversamento delle linee omologhe degli orli dei buchi, nella corrispondenza inversa T^{-1}, e l'area di R_0 è divenuta più volte connessa. Il computo resta nondimeno possibile se si considera la sfera bucata come area A limitata da un contorno che comprenda gli orli dei buchi e le dette linee omologhe di essi nella T^{-1}, ciascuna di queste linee apparendo sdoppiata nei suoi due orli.

Siccome l'area A è più volte connessa, conviene ritenerla come somma di piccole aree elementari, e questa avvertenza porta ad estendere a questo caso il teorema di Cauchy, con la convenzione che i diversi pezzi del suo contorno vengano percorsi, secondo sensi determinati, cioè ciascuno nel modo che è definito dal senso positivo di un cerchietto tangente ad esso che sia interno all'area.

Con queste avvertenze si può contare il numero delle *coincidenze di una corrispondenza quasi analitica* T, di indici n e n', data sopra la riemanniana R di genere p, nell'ipotesi che essa abbia una *valenza topologica* v (1), cioè che ogni ciclo C venga trasformato da T e da T^{-1} in una somma di cicli omologa a $-vC$: si trova in tal guisa

$$N_0 - N_\infty = 2pv$$

e quindi, essendo come nel caso $p = 0$, $N_\infty = n + n'$, il numero delle coincidenze di T risulta

$$n + n' + 2pv.$$

(1) Notisi che a differenza delle corrispondenze $[n, n']$ analitiche, cioè algebriche, le corrispondenze quasi analitiche possono aver valenze diverse per la diretta e per l'inversa. E in queste ipotesi, e anche in ipotesi più generali, il nostro metodo permette sempre il computo delle coincidenze. Cfr. CHISINI, l. c.

L'esame particolareggiato del precedente ragionamento può limitarsi, per semplicità di discorso, al caso di una corrispondenza [1, 1] di valenza $v = -1$ sopra la riemanniana R di genere $p = 1$.

Si prenda su R un ciclo C, e si considerino le due linee K e L omologhe di C nella corrispondenza diretta T e nella inversa T^{-1}: supporremo che K e L non taglino la C, e questa supposizione semplificatrice si giustifica *a priori* variando ove occorra, per continuità, la corrispondenza T data su R, che per una tale variazione conserverà sempre lo stesso numero di coincidenze [1].

Ora si tagli R lungo C in guisa da ridurla ad un pianosfera R_0 con due buchi, i cui orli verranno designati con C_1 e C_2: sopra R_0 le linee K e L non taglieranno C_1 e C_2, e, per essere $v = -1$, saranno linee che riterremo circondanti C_1 e non C_2 (caso della figura). Ciò posto dobbiamo far percorrere al punto x le linee C_1, C_2, e i due orli di L. Qui il senso che compete a queste linee è, per C_1 e C_2, un medesimo senso che, in conformità della osservazione precedente, risulta negativo (qualunque sia la convenzione che fissa il senso di rotazione positiva sul piano, che, tuttavia, nella figura è il solito senso contrario a quello delle lancette dell'orologio); per l'orlo di L_1 che è rivolto all'area piana interna, il senso è positivo, e negativo per l'orlo esterno. Occorre guardare come varia l'argomento di $y = x - x'$, quando x descrive la detta linea. E si vede che:

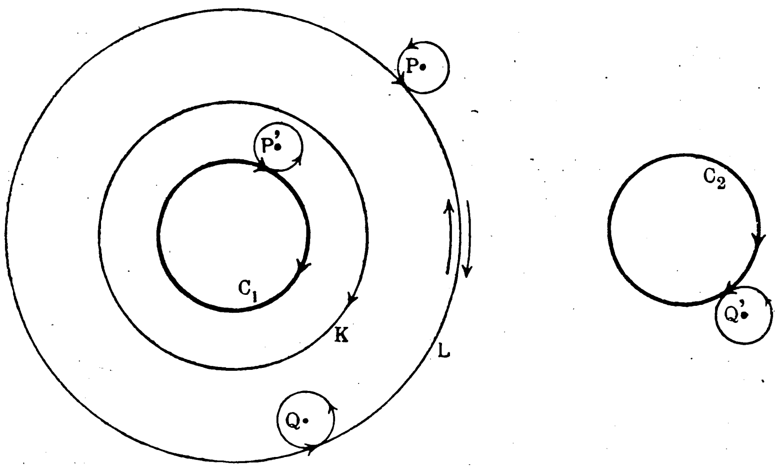
1) Quando x descrive C_1 in senso negativo, x' descrive K nello stesso senso (la corrispondenza di valenza $v = -1$ essendo concorde), e così per la differenza $x - x'$, l'argomento diminuisce di un giro (ciò si rende più evidente qualora si riduca C_1 a un punto).

2) Quando x descrive C_2, x' descrive K (in senso positivo), e poichè le due linee sono esterne l'una all'altra, l'argomento di $x - x'$ non varia.

3) Quando x descrive l'orlo esterno di L, si vede che x' descrive C_1, e quando x descrive l'orlo interno, x' de-

[1] Ciò risulta dal nostro metodo di calcolo per mezzo del teorema di Cauchy, applicato ad una piccola area che comprende il punto di coincidenza.

scrive C_2, e ciò nello stesso senso, in quanto i due orli di L debbono qui essere percorsi in senso inverso: l'asserzione si giustifica con riguardo alla figura (dove son segnate le coppie



di punti omologhi PP' e QQ'), tenuto presente che la nostra corrispondenza deve conservare il senso di un cerchietto infinitesimo tangente ad L.

In conseguenza risulta che quando x descrive L esternamente, l'argomento di $x - x'$ decresce di un giro, mentre quando x descrive l'orlo interno l'argomento di $x - x'$ resta invariato.

Così il nostro criterio dà

$$N_0 - N_\infty = -2.$$

Ma $N_\infty = n + n' = 2$, sicchè $N_0 = 0$; così come accade effettivamente per le trasformazioni di prima specie sopra le curve ellittiche.

Dopo avere in tal guisa dimostrato che ogni corrispondenza $[n, n']$ di valenza topologica v, appartenente a una riemanniana di genere p, possiede

$$n + n' + 2pv$$

coincidenze, applichiamo questo principio di corrispondenza al calcolo dei punti doppi d'una serie algebrica d'ordine n e indice i, supposta a *circolazione nulla* sopra la riemanniana: codesti punti sono le coincidenze d'una corrispondenza simmetrica

$$[i(n-1),\ i(n-1)],$$

la cui valenza topologica è

$$v = i,$$

sicchè il loro numero vien dato da

$$2i(n-1) + 2pv = i(2n + 2p - 2).$$

E il criterio di CASTELNUOVO dice che la detta serie algebrica di gruppi di n punti, a circolazione nulla, è sempre contenuta in una serie lineare: la quale affermazione costituisce appunto *l'inverso del teorema d'Abel topologico, stabilito così per moduli qualunque* della riemanniana.

L'inverso del teorema d'Abel topologico ci conduce ora a stabilire il teorema di HURWITZ già innanzi annunciato. Per chiarezza premettiamo alcune definizioni.

Più corrispondenze $T, T_1, T_2 \dots T_\mu$, sopra una curva, si diranno fra loro linearmente *dipendenti* (secondo $\nu, \nu_1, \nu_2 \dots \nu_\mu$) se esista una combinazione lineare a coefficienti interi (effettiva o virtuale)

$$\nu T + \nu_1 T_1 + \dots + \nu_\mu T_\mu = T_0$$

che sia a valenza zero. E qualora si abbia $\nu = 1$ (o -1) diremo anche che T *dipende* linearmente da $T_1 T_2 \dots T_\mu$ secondo i numeri $\nu, \nu_1, \nu_2 \dots \nu_\mu$.

La dipendenza di più corrispondenze verrà rappresentata semplicemente scrivendo

$$(1) \qquad \nu T + \nu_1 T_1 + \dots + \nu_\mu T_\mu \equiv 0.$$

Dal punto di vista topologico (e grazie al teorema d'Abel topologico e al suo inverso) la relazione precedente equivale a dire che mentre un punto descrive un qualsiasi ciclo della riemanniana, la combinazione indicata dei cicli descritti dai gruppi di punti corrispondenti è omologa ad un ciclo nullo. E questa interpretazione topologica porta che « *le congruenze del tipo* 1) *si possono dividere per ogni numero intero che sia un fattore comune di* $\nu, \nu_1, \nu_2 \dots \nu_\mu$ [1] ».

Rileviamo ora una conseguenza immediata della definizione che precede.

Sopra una curva a moduli generali vi sono soltanto cor-

[1] La cosa resulta anche dalla definizione precedente: invero se un gruppo G varia per continuità sopra una curva, in guisa che rG appartenga ad una serie lineare, anche G varia in una serie lineare (dello stesso ordine).

rispondenze ordinarie, a valenza positiva o negativa o nulla. In questo caso si confronti una qualsiasi corrispondenza T (di valenza v) coll'identità I, che è di valenza -1: avremo

$$T - vI \equiv 0$$

o

$$T \equiv vI,$$

cioè:

Sulle curve a moduli generali ogni corrispondenza dipende dall'identità secondo la propria valenza v.

Ora questo teorema non è più vero per curve a moduli particolari. Ma si può dimostrare il

Teorema di Hurwitz. *Sopra una curva, di genere p, vi è sempre un numero finito μ di corrispondenze indipendenti, per modo che date comunque $\mu + 1$ corrispondenze, si ha una loro combinazione lineare a coefficienti interi di valenza zero.*

Infatti una corrispondenza T cambierà in generale il ciclo C_r in un insieme di linee omologo a

$$\lambda_{r1}C_1 + \lambda_{r2}C_2 \ldots + \lambda_{r2p}C_{2p} \sim \sum_s \lambda_{rs}C_s \qquad (s = 1\ 2, \ldots 2p)$$

e ciò per $r = 1,\ 2 \ldots 2p$.

Associamo alla T i $4p^2$ numeri interi (positivi, negativi o nulli) λ_{rs}, che si prenderanno come coordinate dei punti di uno spazio S_n, a $n = 4p^2$ dimensioni: ognuno di questi punti determina la relativa corrispondenza T a meno di una corrispondenza addittiva a valenza zero, poichè la differenza di due corrispondenze relative allo stesso punto di S_n risulta a valenza zero.

Ora è chiaro che, almeno per $\mu = 4p^2$, fra i punti rappresentativi di $\mu + 1$ corrispondenze intercede sempre una relazione lineare i cui coefficienti possono rendersi interi, e quindi esiste una combinazione lineare a coefficienti interi di $\mu + 1$ corrispondenze qualsiansi $T\ T_1\ T_2 \ldots T_\mu$ che costituisce una corrispondenza a valenza zero: secondo le nostre notazioni

$$\nu T + \nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 + \ldots + \nu_\mu T_\mu \equiv 0.$$

A questo teorema di Hurwitz si può dare una forma più significativa [1]:

[1] Questo punto accennato in Hurwitz (l. c. pag. 582) è sviluppato da Klein-Fricke « Vorlesungen über elliptischen Modulfunctionen », Bd. 2, pag. 543 (Lipsia, 1892).

Sopra una curva di genere p si può scegliere un certo numero μ di corrispondenze indipendenti, costituenti una base minima, per modo che ogni altra corrispondenza sopra la curva si esprima come una combinazione lineare di esse a coefficienti interi, a meno di una corrispondenza additiva di valenza zero.

Pongasi che μ corrispondenze $T_1 T_2 \ldots T_\mu$, costituiscano, sulla nostra curva, una base (non diciamo minima) per modo che un'altra qualunque corrispondenza T sia legata a quelle da una relazione a coefficienti interi:

$$\nu T \equiv \nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 \ldots + \nu_\mu T_\mu .$$

Per semplificare il nostro discorso supponiamo dapprima che sia $\mu = 4p^2 = n$, cioè uguale alla dimensione dello spazio rappresentativo delle corrispondenze. Le coordinate $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{in}$ (del punto rappresentativo) di T_i, per $i = 1, 2 \ldots n$, danno un determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

le cui linee rispecchiano il modo di operare delle corrispondenze T_i sopra il sistema dei cicli.

Ora, essendo data la T con le relative coordinate $b_1 b_2 \ldots b_n$, la determinazione degli interi $\nu, \nu_1 \ldots \nu_n$, o più precisamente dei rapporti $\frac{\nu_i}{\nu}$, dipende dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \nu b_1 = \nu_1 a_{11} + \nu_2 a_{21} \ldots + \nu_n a_{n1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \nu b_n = \nu_1 a_{1n} + \nu_2 a_{2n} \ldots + \nu_n a_{nn} , \end{cases}$$

il cui determinante è D; quindi i rapporti $\frac{\nu_i}{\nu}$ si esprimeranno con frazioni aventi un comune denominatore D. Ma, se le frazioni $\frac{\nu_i}{\nu}$ non sono tutte frazioni apparenti, cioè numeri interi, si riesce a diminuire (in valore assoluto) il determinante D, sostituendo ad una T_i una combinazione di T

e T_i. Invero, se una delle ν_i, per es. ν_1, non è divisibile per ν, si ha

$$\frac{\nu_1}{\nu} = q + \frac{\nu_1'}{\nu} \quad \text{con} \quad \nu_1' < \nu,$$

e quindi

$$T_1' = T - qT_1 \equiv \frac{\nu_1'}{\nu} T_1 + \frac{\nu_2}{\nu} T_2 + \dots + \frac{\nu_n}{\nu} T_n,$$

e perciò, sostituendo a T_1 la corrispondenza T_1', il determinante D viene cambiato in

$$D' = D \frac{\nu_1'}{\nu},$$

cioè viene diminuito.

Così procedendo, si arriverà a rendere interi i rapporti $\frac{\nu_i}{\nu}$, almeno quando il valore assoluto del determinante (per sua natura intero e per ipotesi diverso da zero) sia abbassato fino all'unità.

Nel ragionamento precedente si può abbandonare l'ipotesi di comodo $\mu = n$, poichè se $\mu < n$, si otterrà ancora un sistema di equazioni lineari per determinare i rapporti $\frac{\nu_i}{\nu}$, con un determinante estratto dalla matrice

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu n}, \end{matrix} \right.$$

e basterà ragionare su questo come prima si è ragionato su D.

Osservazione. Il numero μ delle corrispondenze indipendenti che costituiscono la base per il sistema di tutte le corrispondenze appartenenti ad una curva di genere p, risulta, secondo la nostra dimostrazione, $\mu \leq 4p^2$; invece la trattazione trascendente di Hurwitz [1] (in cui si tiene conto delle relazioni fra i periodi degli integrali abeliani) conduce al limite più basso $\mu \leq 2p^2$. Più precisamente Rosati ne ha

[1] Cfr. Rosati « Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere 2 » (*Annali di Mat.*, 1915). Vedansi pure dello stesso A. le « Nuove ricerche sulle corrispondenze... » (ibidem 1921) e gli altri lavori ivi citati.

dedotto che la base si può costituire con $\mu_1 \leq p^2$ corrispondenze *simmetriche*, (congruenti alle proprie inverse), e $\mu_2 \leq p^2$ *emisimmetriche*, cioè tali che la differenza dei punti omologhi di un punto nella diretta e nella inversa vari in una serie lineare (1).

Aggiungasi che quando una corrispondenza $[n, n']$ sia data come combinazione lineare di μ corrispondenze indipendenti, secondo gli interi $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\mu$, il numero dei punti uniti di essa viene dato in funzione dei punti uniti delle corrispondenze della base: in ciò consiste il cosidetto *principio generale di corrispondenza di* HURWITZ.

(1) Cfr. HURWITZ, l. c., pag. 582.

CAPITOLO V.

Sulla teoria delle curve gobbe.

Esposizioni generali della teoria trovansi in

NOETHER: « Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven ». Memorie di Berlino, 1882 (premio Steiner 1882).

HALPHEN: « Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques ». Journal de l' École Polytecnique, t. 52 (premio Steiner 1882).

VALENTINER: Zur Theorie der Raumkurven » Acta Mathematica, t. 2 (1883).

Per una trattazione meno sviluppata si può vedere

SALMON: « Traité de géométrie analitique à trois dimensions » (trad. fr. Parigi, 1891): Cap. XII, II.

PICARD e SIMART: Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes » (Parigi, 1898), cap. VIII.

Per notizie sull' argomento e sulla relativa letteratura rimandiamo ai due articoli di

L. BERZOLARI: Allgemeine Theorie der algebraischen Raumkurven »; « Besondere algebraische Raumkurven », che costituiscono i capitoli 36 e 37 del Pascal' s Repertorium.

45. **Rappresentazione analitica.** — La geometria sopra una curva riceve una notevole applicazione nella teoria proiettiva delle curve gobbe dello spazio ordinario, o anche di uno spazio S_r con $r > 3$. Noi ci limiteremo al caso più interessante $r = 3$.

Una curva gobba, C, si può ritenere come immagine di una curva definita dal punto di vista delle trasformazioni birazionali, su cui sia data una g_n^3 (*semplice e senza punti fissi*) che, sopra C, viene segata dai piani dello S_3. Ove si scelga come modello della classe una curva piana, d'un certo ordine n,

$$f(uv) = 0,$$

la C riuscirà rappresentata analiticamente mediante tre funzioni razionali di u e v, in generale fratte:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)}, \\ y &= \frac{\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)}, \\ z &= \frac{\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)}. \end{aligned}\right.$$

Nel caso particolare in cui si prenda come curva f la proiezione della C, fatta dal punto all'infinito dell'asse z, si avrà una rappresentazione del tipo

$$x = u, \quad y = v,$$
$$z = \frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)},$$

e quindi la C si presenta come intersezione del *monoide* (¹)

$$z\psi(xy) - \varphi(xy) = 0$$

col cilindro

$$f(xy) = 0,$$

all'infuori di un certo numero di rette parallele all'asse z. Si ha qui la *rappresentazione monoidale delle curve gobbe* indicata da CAYLEY nel 1862, e considerata sotto forma più geometrica da HALPHEN e VALENTINER (1882, 83): da noi accennata nel L. 3°, § 14, vol. II, pag. 101. Tuttavia occorre richiamare e precisare l'avvertimento fatto nel § 13 dello stesso L. 3° (vol. II, pag. 137) che la curva gobba più generale, non passante per il punto all'infinito dell'asse z, si ottiene in corrispondenza ad una f particolare e a due polinomi φ e ψ soddisfacenti essi pure a condizioni particolari.

Infatti se la curva piana f deve essere proiezione di una curva gobba C dello stesso ordine n, bisogna che la g_n^2 segata

(¹) Superficie d'ordine m con un punto $(m-1)$-*plo*.

su f dalle rette appartenga ad una g_n^3 (cfr. § 4 pag. 37); e perchè la C non passi per il punto all'infinito dell'asse z, la funzione z non deve avere poli, cioè le intersezioni di $f=0$ e $\psi=0$ debbono essere comuni alla curva $\varphi=0$; infine le condizioni espresse portano che l'ordine di φ superi di una unità quello di ψ. La rappresentazione più semplice della C (valida per C speciali e non speciali) si otterrà dunque prendendo per ψ una curva φ_{n-3} aggiunta ad f d'ordine $n-3$, e per φ una φ_{n-2} aggiunta d'ordine $n-2$, irriducibile, che passi per le intersezioni della precedente. Così *la curva gobba C, d'ordine n e genere p, appare come intersezione del monoide d'ordine $n-2$*

$$z\varphi_{n-3}(xy) - \varphi_{n-2}(xy) = 0,$$

col cilindro d'ordine n

$$f(xy) = 0:$$

che hanno ulteriormente a comune le rette parallele all'asse z

$$f(xy) = 0, \quad \varphi_{n-3}(xy) = 0;$$

cioè le $2p-2$ rette semplici che passano per le intersezioni semplici di f con la φ_{n-3}, e le $d = \dfrac{n(n-3)-(2p-2)}{2}$ corde di C, ossia le rette per i nodi di f, che sono doppie per il cilindro e semplici per il monoide [1].

Una curva algebrica gobba C può essere determinata anche come intersezione di due o più superficie. Se la C è data come intersezione delle due superficie

$$F_1(xyz) = 0, \quad F_2(xyz) = 0,$$

l'eliminazione di z fra queste due equazioni (cfr. L. 3°, § 14) conduce appunto a scrivere l'equazione del cilindro

$$f(xy) = 0$$

che proietta C dal punto all'infinito dell'asse z: il quale,

[1] Del resto si può provare facilmente che una curva d'ordine n appartiene sempre a un monoide d'ordine $\geq \frac{n}{2}$.

se gli assi sono orientati in modo generico, risulta semplice e dello stesso ordine di C. Pertanto, in corrispondenza ad ogni punto (xy) della curva f, si ottiene z funzione razionale di x e y: $z = \dfrac{\varphi(xy)}{\psi(xy)}$, sicchè *il procedimento dell' eliminazione conduce alla rappresentazione monoidale della curva gobba* C.

Questa conclusione si estende al caso in cui la curva C sia data come *intersezione di tre superficie*:

$$F_1(xyz) = 0, \quad F_2(xyz) = 0, \quad F_3(xyz) = 0.$$

In questo caso, eliminando z fra F_1 e F_2, si ottiene un cilindro

$$f_{12}(xy) = 0,$$

mentre l' eliminazione di z fra F_2 e F_3 porge un cilindro

$$f_{23}(xy) = 0.$$

Ora, se l' intersezione di F_1 e F_2 è composta di due curve C e C', di cui soltanto la prima appartiene anche ad F_3, i due cilindri, ossia le due curve f_{12} e f_{23}, saranno riducibili, contenendo una parte comune $f(xy) = 0$, che è la proiezione di C. Ebbene la determinazione di f (e quindi la rappresentazione monoidale di C) si ottiene razionalmente mercè il noto processo per la ricerca del massimo comun divisore, che va applicato ai polinomi $f_{12}(xy)$ e $f_{23}(xy)$, in cui si consideri y come costante.

Al punto in cui siamo è appena necessario di ricordare che una curva gobba non può ottenersi sempre come intersezione completa di due superficie algebriche; *a priori* questo è impossibile per curve il cui ordine sia un numero primo, e d' altronde si incontrano subito curve che non sono intersezioni complete, pur essendo d' ordine composto: per es. la quartica di seconda specie.

Ora, in un certo senso, si può dire che una curva gobba C riesce sempre determinata mediante tre superficie algebriche

$$F_1(xyz) = 0, \quad F_2(xyz) = 0, \quad F_3(xyz) = 0,$$

poichè se la C fa parte dell' intersezione di F_1 e F_2, e queste si segano ulteriormente in una curva C', si riesce a staccare C da C' considerando una superficie F_3 (per es. un cono) che passi per essa e non per C'. Ma la F_3 incontrerà generalmente C' in punti non appartenenti a C, e perciò ***non si può dire che il sistema delle tre equazioni***

$$\begin{cases} F_1(xyz)=0 \\ F_2(xyz)=0 \\ F_3(xyz)=0 \end{cases}$$

rappresenti soltanto la curva C; a tale scopo occorrerà aggiungere una quarta equazione

$$F_4(xyz)=0,$$

rappresentante una superficie che passi ancora per C ma non per le intersezioni di F_1, F_2, F_3.

Qui nasce il problema: essendo data una curva gobba C, è possibile condurre per essa tre superficie che non abbiano ulteriori intersezioni fuori di C, per modo che la C stessa venga perfettamente rappresentata da un sistema di tre sole equazioni?

A questa domanda VAHLEN ha dato risposta negativa, stabilendo il teorema essenziale per la teoria dei sistemi di equazioni algebriche: ***La rappresentazione perfetta di una curva gobba esige in generale quattro equazioni in*** x y z.

Per dimostrare il teorema occorre verificare che vi sono curve C tali che tre superficie qualunque passanti per C, s'incontrino necessariamente anche fuori di C. Tale verifica esige dunque la risoluzione di un problema numerativo (di equivalenza) che è stato da noi già trattato nel L. 3°, § 45 (vol. II, pag. 312), e che del resto riprenderemo da un punto di vista più intrinseco nel seguente paragrafo. Adoperiamo intanto la formula già ottenuta che dà il numero delle intersezioni ulteriori di tre superficie d'ordine m_1, m_2 e m_3 passanti per una curva C d'ordine n con $d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p$ punti doppi apparenti:

$$f(m_1,\, m_2,\, m_3;\; n,\, d)=$$
$$=n(n+1)-2d+m_1m_2m_3-n(m_1+m_2+m_3);$$

è facile vedere che il numero f non può in generale annullarsi. E basta considerare l'esempio della quintica C_5 di genere 1, dove

$$n=5,\quad d=5.$$

Si osservi anzitutto che la C_5 di genere 1 non può appartenere ad una quadrica, perchè una quintica appartenente ad una quadrica viene proiettata da un punto generico O di questa in una curva piana del quint' ordine che possiede nelle traccie delle generatrici passanti per O un punto triplo e un punto doppio, ovvero un punto quadruplo e un punto semplice, resultando così di genere 2 o 0. Ora le tre superficie d' ordine minimo passanti per la nostra C_5 — in corrispondenza a cui il numero f riceve il valore minimo — saranno tre superficie cubiche, quali si ottengono certo obbligando una superficie cubica a contenere 16 punti generici della curva; e la nostra formula ci dà

$$f(3,\ 3,\ 3;\ 5,\ 5) = 2.$$

A questa dimostrazione del teorema si può obbiettare che le intersezioni di tre superficie $F_1\ F_2\ F_3$, per C, che si calcolano esistenti fuori di C, possono venire a cadere sopra C, o più propriamente infinitamente vicine ad essa, per posizioni particolari di quelle superficie. Un esame approfondito mostrerebbe che questa circostanza può effettivamente presentarsi nell' esempio della quintica considerato innanzi, e occorrerebbe invero una critica assai più minuta per accertare che esistono di fatto curve gobbe per cui la suddetta circostanza può assolutamente escludersi. Ma, senza indugiarci in tale esame, è lecito dire che quando tre superficie $F_1\ F_2\ F_3$ per C abbiano un' intersezione ulteriore infinitamente vicina ad un punto O di C, la rappresentazione di C mediante le tre equazioni $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, già non può dirsi perfetta: poichè in O si ha un piano tangente comune ad $F_1\ F_2\ F_3$, per modo che, quando si va ad intersecare un piano generico per O col sistema delle tre superficie, si trova una equazione resultante di sesto grado che ha una radice doppia in corrispondenza ad O, mentre per un' altra rappresentazione questa resultante riesce del quinto grado, avendosi in O una radice semplice.

Notizia storica. La definizione algebrica delle curve gobbe (con le relative condizioni di irriducibilità) rientra nella rappresentazione delle varietà algebriche a un numero qualunque di dimensioni cui si riferiscono i lavori di KRONECKER (Journal für math., 1881) e di MOLK (Acta math., 1885) (¹). La impossibilità di rappresentare perfettamente una curva gobba con tre sole equazioni in x, y, z, è stata riconosciuta da VAHLEN (Journal für Math., 1891), e precisamente con l'esempio della quintica di genere 0 con una sola quadrisecante.

Oltre alla rappresentazione monoidale considerata innanzi, si possono dare altre notevoli rappresentazioni analitiche di una curva gobba, per es. quella che fu indicata da Cayley (1856, 60, 62) in cui si determina la curva scrivendo l'equazione del complesso delle rette incidenti a essa; la quale deve soddisfare a due equazioni differenziali caratteristiche (²).

Un'altra elegante rappresentazione analitica delle curve gobbe, in relazione ai coni proiettanti i cui vertici stanno sopra una retta, è stata adoperata da BRILL (1901, 1907) (³).

Termineremo questo paragrafo rilevando esplicitamente che il possesso d'un *punto doppio* O, per una curva gobba (irreducibile) C, costituisce una *particolarità*, in forza della quale tutte le superficie passanti per C acquistano in O un contatto: se O è (almeno) *triplo* e i rami passanti per O non toccano uno stesso piano, le superficie per C acquistano in O un punto *doppio*, ecc.

Quando si costruisce C a partire da una g_n^3, semplice e senza punti fissi, sopra una curva piana f, l'esistenza di un punto doppio di C dipende dall'esistenza d'una *coppia neutra* della g_n^3, che può anche essere costituita da due punti sovrapposti in un punto doppio O' di f (non appartenente come punto base al sistema lineare delle curve secanti la g_n^3). Variando la g_n^3 sopra la f, ovvero variando f senza cambiarne il genere (nel supposto che la costruzione di una g_n^3 rimanga sempre possibile), si ottiene in generale una *famiglia di curve gobbe senza punti doppi, dello stesso genere* p, *in cui la* C *dotata di punto doppio rientra come caso particolare*: e quindi il punto doppio considerato appare come limite d'un punto doppio apparente. Invece se il punto doppio O di C risponde a un punto doppio O' di f, e si fa variare f in modo che questo sparisca, si ottiene una *famiglia di curve gobbe senza punti doppi, di genere* $p+1$, *che contiene*

(¹) Cfr. SEGRE « Introduzione », *Annali di Mat.*, 1894.
(²) Cfr. KLEIN, *Math. Annalen*, Bd. 5, 1872.
(³) Cfr. Math. Annalen, Bd. 64.

la C di genere p dotata di punto doppio: qui il punto doppio è essenzialmente nuovo, e non limite d'un punto doppio apparente (cfr. vol. II, pag. 148).

Nota. Le asserzioni fatte innanzi sono suscettibili di una giustificazione rigorosa, dove si faccia vedere che « la g_n^3 più generale appartenente ad una curva C_p di moduli qualunque non ha punti fissi, ed è semplice senza coppie neutre [1] ». Senza ricorrere qui al computo delle serie speciali che si trovano sopra una curva, procederemo come segue.

Riduciamo per continuità la C_p ad una curva di genere 0 con p punti doppi, da ritenere virtualmente inesistenti, (cioè limiti di coppie di punti non sovrapposti), ossia ad una retta con p coppie (§ 35, pag. 390 e § 36, pag. 405). E prendiamo come immagine di questa retta una curva razionale normale dello S_n, C^n, della quale verranno poste in evidenza p corde generiche $a_1 = A_1 A_1'$, $a_2 = A_2 A_2'$,... $a_p = A_p A_p'$, congiungenti le dette coppie; per modo che la curva composta d'ordine $n+p$ apparirà come limite d'una curva non speciale d'ordine $n+p$ dello S_n (cfr. § 34, pag. 396). Ora le g_n^3 di C_p verranno segate sulla C^n dai sistemi d'iperpiani per gli S_{n-4} incidenti a p corde a_i, e si può provare che « le condizioni d'incidenza d'un S_{n-4} a corde generiche a_i sono indipendenti ». Infatti, se gli S_{n-4} incidenti a p corde risultassero incidenti a un'altra corda qualunque di C^n, si avrebbe l'assurdo d'una g_n^3 con ∞^2 coppie neutre.

Dalla precedente osservazione, che è di per sè interessante e gioverà più tardi richiamare, segue:

1) Che per gli S_{n-4} incidenti a $p-1$ corde, la condizione di incidenza a una *p-esima* corda generica non può confondersi con la condizione di incidenza alla C^n (mancanza di punti fissi della g_n^3).

2) Che gli S_{n-4} incidenti a p corde generiche non possono di conseguenza incidere ad un'altra corda di C^n (mancanza di coppie neutre e quindi semplicità della g_n^3): infatti un gruppo di $p+1$ corde di C^n, in cui p corde vengano assunte ad arbitrio, si può sempre trasformare omograficamente nel gruppo di $p+1$ corde generiche mediante un'omografia che lascia ferma la C^n.

[1] Cfr. SEVERI « Vorlesungen... », Anhang G.

Nel seguito, parlando di *curve gobbe, supporremo in generale* che esse sieno *prive di punti doppi*; e così anche, parlando di superficie passanti per tali curve e di cui esse si presentano come intersezioni complete o parziali, *escluderemo*, per quanto dipende da noi, le *superficie dotate di punti doppi o di curve doppie*, etc.

46. Parametri da cui dipende una famiglia di curve gobbe: problemi di classificazione. — A differenza di ciò che accade per le curve piane, le curve gobbe di un dato ordine n (senza punti doppi) non formano un solo sistema continuo, ma si distribuiscono in diverse famiglie, a cui competono caratteri differenti. Infatti si presenta subito, accanto all'ordine n, un secondo carattere della curva gobba che è dato dal genere p: diremo poi come altri caratteri si introducano necessariamente, per i valori più piccoli di n rispetto a p.

Qui giova anzitutto distinguere le curve $C_{n,p}$ (d'ordine n e genere p) in curve *speciali* e *non speciali*, secondochè la serie g_n^3 segata dai piani è speciale, ciò che esige in particolare $n \leq 2p-2$, ovvero non speciale.

Dimostriamo anzitutto che:

Le curve gobbe non speciali d'ordine n e genere p ($n \geq p+3$) *formano una sola famiglia, dipendendo da $4n$ parametri.*

Che effettivamente le $C_{n,p}$ non speciali formino una sola famiglia (in cui tuttavia possono entrare come casi particolari delle curve speciali), resulta dalla costruzione di esse a partire da una g_n^3 sopra una qualunque curva C_p di genere p. Infatti:

1) Tutte le $C_{n,p}$ birazionalmente identiche nascono da una medesima C_p e dalle g_n^3 prese su questa; ma, essendo $n \geq p+3$, un gruppo generico di n punti dà luogo su C_p ad una g_n^{n-p} completa, che contiene un sistema continuo di g_n^3, e quindi anche l'insieme delle g_n^3 su C_p costituisce un sistema continuo;

2) Le C_p birazionalmente distinte costituiscono un sistema continuo irriducibile (cfr. § 33) che, per $p > 1$, contiene $3p-3$ parametri, detti moduli.

Procediamo a valutare il numero dei parametri da cui dipendono le $C_{n,p}$, basandoci sulla costruzione di esse sopra indicata. E supponiamo dapprima $p > 1$.

Il computo delle g_n^3 appartenenti ad una C_p si fa col metodo incontrato nel § 33 (pag. 397):

1) In primo luogo il numero dei parametri da cui dipende una g_n^{n-p} è p (tutti i gruppi di n punti sulla curva essendo ∞^n);

2) In secondo luogo le g_n^3 appartenenti ad una g_n^{n-p} sono come gli S_3 di un S_{n-p}, e però il numero dei parametri da cui dipendono vale

$$4(n-p)-4\cdot 3=4n-4p-12;$$

3) In terzo luogo una g_n^3 di C_p dà luogo a ∞^{15} curve dello spazio proiettivamente identiche.

Di conseguenza le $C_{n,p}$ (birazionalmente identiche) che nascono da una medesima curva C_p dipendono da

$$p+(4n-4p-12)+15=4n-(3p-3).$$

Aggiungendo il numero dei moduli, $3p-3$, si trova che il numero dei parametri da cui dipende una $C_{n,p}$ è precisamente $4n$, come sopra è enunciato.

La conclusione si estende ai casi $p=0$, 1, sebbene il numero dei moduli sia qui $3p-3+\rho$, dove $\rho=1$ o $\rho=3$ designa l'infinità delle trasformazioni birazionali della C_p in se stessa. Infatti le ∞^ρ g_n^3 che sono trasformate birazionali di una medesima danno luogo a curve gobbe proiettivamente identiche.

In relazione al teorema stabilito diamo alcuni semplici *esempi*.

Anzitutto le cubiche gobbe $C_{3,0}$ dipendono da $3\cdot 4=12$ parametri. La cosa è nota direttamente perchè una cubica gobba è determinata da 6 dei suoi punti, come intersezione di una coppia di coni quadrici, ciascuno dei quali possiede come vertice uno dei 6 punti e passa per gli altri 5. Invero il passaggio di una curva gobba per un punto importa due condizioni, giacchè la curva contiene ∞^1 fra gli ∞^3 punti dello spazio: onde i parametri delle $C_{3,0}$ resultano così $2\cdot 6=12$.

In secondo luogo le quartiche di prima specie $C_{4,1}$ dipendono da 16 parametri. E ciò appare anche direttamente, considerandole come curve base di fasci di quadriche, poichè questi — come le rette di un S_9 — dipendono da $2\cdot 9-2=16$ parametri.

Anche le quartiche di seconda specie $C_{4,0}$ dipendono da 16 parametri. Ove si voglia verificarlo direttamente, si ricordi che una $C_{4,0}$ appartiene ad *una* quadrica, e nella rappresentazione piana di questa corrisponde ad una quartica piana passante triplamente per uno dei punti fondamentali e semplicemente per l'altro; così l'infinità del sistema delle $C_{4,0}$ appartenente ad una quadrica è

$$14 - 6 - 1 = 7,$$

e aggiungendo l'infinità delle quadriche si trovano i 16 parametri delle $C_{4,0}$.

Come ultimo esempio consideriamo le quintiche $C_{5,2}$, le quali dipendono da $5 \cdot 4 = 20$ parametri. Per trovare direttamente questo numero si osservi anzitutto che una $C_{5,2}$ appartiene sempre ad una quadrica, perchè le ∞^9 quadriche dello spazio segano sopra la curva una serie g_{10}^r di dimensione $r \leq 8$, sicchè la quadrica che contiene 9 punti generici della $C_{5,2}$ la contiene per intero. L'unicità di questa quadrica (da cui segue $r = 8$) è poi evidente, perchè una curva d'ordine 5 non potrebbe essere intersezione di due superficie del second'ordine. Ora dunque conteremo le $C_{5,2}$ appartenenti ad una quadrica che — nella rappresentazione piana — corrispondono a curve del quint'ordine passanti doppiamente per uno dei punti fondamentali e triplamente per l'altro: la dimensione del sistema risulta così

$$\frac{5 \cdot 8}{2} - 6 - 3 = 11,$$

e quindi, sommando il numero 9 che designa l'infinità delle quadriche, si ottengono i 20 parametri da cui dipendono le $C_{5,2}$.

Ora sorge la domanda: *fino a che punto si possono estendere alle curve speciali le proprietà che le curve gobbe d'ordine n dipendono da $4n$ parametri, e che le $C_{n,p}$ formano una sola famiglia?*

Per rispondere occorre contare le g_n^3 (speciali) d'ordine $n < p + 3$, appartenenti ad una curva di genere p. Come ciò possa farsi è stato già indicato nel § 14, ma qui giova richiamare il procedimento.

Se, sopra una curva C_p di genere p, un gruppo di n punti G_n, con $n = p + 3 - i$ $(i > 0)$, deve appartenere ad una g_n^3, per il teorema di Riemann-Roch gli i gruppi canonici che contengono $p-i$ punti del G_n dovranno contenere di conseguenza gli altri 3 punti del gruppo: così il G_n soddisfa a

$$3i = 3p + 9 - 3n$$

condizioni. Ora si avranno in generale, su una C_p, ∞^{n-3i} gruppi G_n d'indice di specialità i, e — poichè una g_n^3 contiene ∞^3 G_n siffatti — l'infinità delle g_n^3 sarà

$$n - 3i - 3 = 4n - 3p - 12.$$

In questo computo si è ragionato come se le g_n^3 di cui si discorre debbano essere complete; ma ciò accade in generale, come si vede contando le g_n^r speciali con $r > 3$ appartenenti a una C_p, poichè le g_n^3 contenute in tali g_n^r (e formate da G_n più speciali) risultano dipendere da meno che $4n - 3p - 12$ parametri.

Ora il computo precedente significa che sopra una C_p di moduli generali esistono g_n^3 solamente se

$$4n \geq 3p + 12,$$

e in questo caso il numero dei parametri da cui esse dipendono vale precisamente

$$r = 4n - 3p - 12.$$

Quindi, riferendo una g_n^3 allo spazio di piani, e tenendo conto che vi sono ∞^{15} curve proiettivamente identiche e ∞^{3p-3} C_p birazionalmente distinte, si deduce che, anche per curve speciali, *quando*

$$4n \geq 3p + 12,$$

le curve $C_{n,p}$ dipendono sempre da $4n$ parametri.

È infatti

$$4n = 4n - 3p - 12 + 15 - (3p - 3).$$

In pari tempo risulta di qui che, per n e p soddisfacenti alla disuguaglianza predetta, le curve $C_{n,p}$ corrispondenti a valori generici dei nominati parametri sono curve con *moduli generali.*

Nota. Nel computo precedente, fatto secondo Brill e Noether, abbiamo implicitamente supposto che le condizioni perchè un G_n abbia un indice di specialità i sopra una curva di genere p, almeno nelle condizioni in cui è possibile soddisfarle sopra la curva a moduli generali, risultino indipendenti. Questo *presupposto è suscettibile di una dimostrazione rigorosa* [1], che possiamo dare in modo semplicissimo come rapidamente accenniamo.

Se l'infinità delle g_n^3 sopra una C_p di moduli generali risultasse maggiore di

$$4n - 3p - 12,$$

sicchè il sistema delle g_n^3 fosse quivi sovrabbondante, risulterebbe sovrabbondante anche il sistema delle g_n^3 con p coppie neutre sopra una retta; ma, come già abbiamo avvertito nella Nota del § 45, questa retta conduce ad una curva C^n razionale normale nello spazio S_n di cui vengono messe in evidenza p corde, in guisa che la curva composta d'ordine $n+p$ appare come forma degenere di una curva irriducibile di genere p. Ora la nostra tesi si riduce a provare che le condizioni perchè un S_{n-4} di S_n riesca incidente a p corde della C^n sono fra loro indipendenti: ciò che appunto si è già provato nella Nota sopra ricordata.

Accenneremo qui ad una questione delicata che trova posto in quest' ordine di idee: « *se*, nell' ipotesi

$$4n - 3p - 12 \geq 0$$

che porta l' esistenza di *curve d' ordine n e genere p a moduli generali*, le curve $C_{n,p}$ *formino sempre una sola famiglia* », siccome abbiamo riconosciuto accadere per le curve (non speciali) d' ordine $n \geq p+3$.

Il *problema non ha ricevuto* finora una *risposta* esauriente. Seguendo il metodo di degenerazione adoperato innanzi, si è condotti a considerare gli spazi S_{n-4} (di S_n) incidenti a p corde d' una curva razionale normale C^n, dello S_n: la diseguaglianza $4n - 3p - 12 \geq 0$ dice che, per p corde (o p rette dello S_n) date ad arbitrio, esistono S_{n-4} siffatti, i quali saranno in numero finito nel caso estremo $4n = 3p + 12$. Ebbene, si facciano variare le nominate p corde della C^n: occorre provare che il sistema Σ formato dai detti S_{n-4} riesce irriducibile, in guisa che, per una circolazione delle p corde, uno degli S_{n-4} ad essi incidente si può scambiare con un altro qualunque.

[1] Cfr. SEVERI « Vorlesungen... » Anhang G, n.° 8.

Ora si può provare induttivamente (da $p-1$ a p) l'irriducibilità del sistema degli S_{n-4} incidenti a p *rette* dello S_n; ma la condizione restrittiva che queste rette debbano essere *corde* d'una C^n, dà luogo a difficoltà di cui converrebbe approfondire l'esame.

Ritorniamo alla costruzione generale delle curve gobbe d'ordine n e genere p. Questa costruzione, abbiam visto, riesce sempre, e conduce a curve birazionalmente identiche ad una C_p qualunque, se

$$4n \geq 3p + 12.$$

Che dire invece dell'ipotesi in cui

$$4n < 3p + 12 ?$$

In questo caso una C_p di moduli generali non conterrà alcuna g_n^3, ma le condizioni d'esistenza d'una serie siffatta si tradurranno in

$$r = 3p + 12 - 4n$$

condizioni fra i moduli di C_p. E si avranno quindi delle $C_{n,p}$ i cui moduli soddisfano ad r condizioni. Il *numero dei parametri delle $C_{n,p}$ risulta sempre* $\geq 4n$, $(4n = 3p - 3 - r + 15)$, cioè $4n$ se le r condizioni suddette sono indipendenti, e $> 4n$ nel caso in cui le dette condizioni non sieno indipendenti: del qual caso si daranno, nel seguito, *effettivi esempi.*

Qui si presenta un'osservazione fondamentale per la teoria delle curve gobbe.

Le curve gobbe $C_{n,p}$ d'ordine

$$n < \frac{3p + 12}{4},$$

a differenza di quelle per cui

$$n \geq \frac{3p + 12}{4},$$

sono necessariamente curve di moduli particolari.

E in questo caso (almeno per i valori più grandi di p) le $C_{n,p}$ non formano più un solo sistema irreducibile. Anzi si prova che *già* per

$$n = 9, \quad p = 10$$

esistono più famiglie di curve $C_{n,p}$ (a moduli singolari) *distinguibili mediante altri caratteri* (cfr. § 53).

§ 47. **Intersezioni complete di due superficie.** — Quando una curva C viene definita come intersezione completa di due superficie di dati ordini m_1 e m_2, e però è di ordine

$$n = m_1 m_2,$$

si può facilmente determinare il suo genere p, col seguente metodo di SALMON (1849). Siano

$$F_1(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0 \quad \text{e} \quad F_2(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

le equazioni delle due superficie, e si costruiscano i piani tangenti a C che passano per una retta generica r, rappresentata dalle equazioni

$$\begin{aligned} \alpha &= ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ \alpha' &= a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0. \end{aligned}$$

I loro punti di contatto si ottengono come intersezioni di C con una superficie Φ d'ordine $m_1 + m_2 - 2$

$$\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0.$$

Infatti, per i punti di C, la condizione $\Phi(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ significa che i due piani tangenti ad F_1 e F_2 nel punto $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ e i due piani secantisi in r passano per uno stesso punto, cioè che la tangente alla curva C, intersezione di F_1 e F_2, è incidente ad r.

Ora le intersezioni di Φ con C sono i punti doppi della g_n^1 segata dai piani per r, e perciò il loro numero sarà

$$2n + 2p - 2 = n(m_1 + m_2 - 2).$$

Di qui si ricava

$$2p - 2 = n(m_1 + m_2 - 4) = m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 4).$$

Questa formula non è che l' aspetto aritmetico di una importante relazione geometrica dovuta a NOETHER (1874): *Le superficie* Ψ *d' ordine* $m = m_1 + m_2 - 4$ *segano gruppi canonici sulla curva intersezione di due superficie d' ordini* m_1 e m_2.

Infatti sommando ad una Ψ due piani α e α' si ha una superficie d' ordine $m_1 + m_2 - 2$, come la nostra Φ, e però i gruppi intersezioni di $\Psi + \alpha + \alpha'$ e di Φ con C sono equivalenti, dando i gruppi dei poli e degli zeri della funzione

$$t = \frac{\Phi}{\Psi \alpha \alpha'};$$

e pertanto basta ricordare la definizione della serie canonica come differenza della serie definita dal gruppo jacobiano di una g_n^1 e del doppio di questa (cfr. § 8).

Il teorema stabilito dà luogo ad una interessante conseguenza. Da un punto esterno O proiettiamo la C in una curva piana C' che sarà ancora d' ordine n; su C' l' insieme di m rette sega un gruppo canonico, che su C è dato dagli m piani proiettanti da O; ma questo gruppo è anche l' intersezione di C' con una curva aggiunta d' ordine $n - 3$, dalla quale si staccheranno le m rette; la curva residua d' ordine

$$n - 3 - m = (m_1 - 1)(m_2 - 1)$$

segherà dunque la C' soltanto nei suoi punti doppi.

Questo resultato si può enunciare dicendo:

Per la curva C, intersezione completa di due superficie d' ordini m_1 *e* m_2, *le coppie di punti d' appoggio delle corde condotte da un punto sono le*

$$m_1(m_1 - 1)\ m_2(m_2 - 1)$$

intersezioni con un cono d' ordine $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ *che ha il vertice nel punto*, cioè « per la curva piana proiezione di C è

$$d = \frac{m_1(m_1 - 1)\ m_2(m_2 - 1)}{2},$$

e i punti doppi apparenti sono le intersezioni con una curva d' ordine $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ ».

Questo teorema è dovuto a Valentiner (¹): Cayley (²) fin dal 1845 aveva calcolato il numero d delle corde di C, e Salmon (1847, 1849) aveva dimostrato che i loro punti d'appoggio stanno sopra una *superficie* d'ordine $(m_1-1)(m_2-1)$ (³), ma non vide che stanno sopra un *cono*.

Si osservi poi che dal teorema di Valentiner, stabilito in modo analitico diretto, segue reciprocamente il teorema di Nöther sulla costruzione della serie canonica di C.

Nota. Il teorema di Valentiner è stato invertito da Halphen (1882):

Se per una curva gobba C, d'ordine $n=m_1m_2$, le corde condotte da un punto sono

$$d=\frac{m_1(m_1-1)\,m_2(m_2-1)}{2}$$

ed appartengono a un cono d'ordine $(m_1-1)(m_2-1)$, la C è intersezione completa di due superficie d'ordini m_1 e m_2.

Ci limiteremo a fornire una semplice dimostrazione del teorema di Halphen in un caso particolare tipico, cioè per la sestica C_6 (di genere $p=4$) con $d=6$.

Sappiamo (§ 45) che la C_6 appartiene a una superficie (monoidale) del 4° ordine Φ_4, con un punto triplo O, e si ottiene quindi come intersezione di questa con un cono del 6° ordine di vertice O, che sega ulteriormente Φ_4 in 18 rette, cioè più precisamente nelle 6 corde di C_6 che — essendo doppie per il cono e semplici per Φ_4 — contano per $2\cdot 6=12$, e in altre 6 rette semplici. Si consideri la rappresentazione della Φ_4 su un piano, ottenuta per proiezione da O (⁴): le immagini delle sezioni piane sono curve del 4° ordine K_4 che passano per 12 punti fissi, tracce delle rette di Φ_4 per O, e stanno su una cubica K_3, traccia del cono osculatore in O.

Ora introduciamo l'ipotesi che le corde di C_6 per O appartengano a un cono quadrico: segue di qui che fra i 12 punti

(¹) « Bidrag til Rumcurverner Theori ». Dissertazione inaugurale, Copenhagen, 1879 (pag. 65). Cfr. Nöther (l. c. 1882).

(²) Journal de Math., X, 250.

(³) In questo senso va corretta l'indicazione del § 18 del L. 3 (Vol. II, pag. 150). Anche nel trattato di geometria analitica a tre dimensioni di Salmon (trad. fr. 1891), e precisamente al n. 343, l'A. richiama il proprio teorema del 1849, senza accennare alla circostanza sopra dichiarata.

(⁴) Cfr. p. es. Enriques « Lezioni di Geometria descrittiva ». Parte II, § 57.

base del sistema $|K_4|$ ve ne sono 6 sopra la conica K_2 traccia di quel cono, e quindi gli altri 6 appartengono a un' altra conica K_2'. Vediamo adesso la proiezione C_6' di C_6: essa passa doppiamente per i primi 6 punti suddetti e semplicemente per gli altri 6; perciò insieme alla conica K_2' costituisce una curva d'ordine 8 passante doppiamente per i 12 punti base di $|K_4|$, che è l'immagine dell'intersezione completa di Φ_4 cón una quadrica.

Così appare che la C_6 appartiene ad una quadrica, e similmente si prova ch'essa appartiene ad ∞^4 superficie cubiche non composte d'una quadrica e d'un piano. Perciò è l'intersezione completa d'una quadrica con una di queste superficie cubiche.

Riprendiamo la costruzione della serie canonica sopra la curva C, intersezione completa di due superficie F_1 e F_2.

Resta da vedere se *tutti* i gruppi canonici della C, supposta *irreducibile,* si ottengano come intersezioni di superficie Ψ d'ordine $m = m_1 + m_2 - 4$; e perciò occorre valutare la dimensione della serie segata su C dalle Ψ. Qui si può osservare che quando si conosca questa dimensione essere uguale a $p-1$, si può dedurne che la serie segata su C dalle Ψ è la g_{2p-2}^{p-1} canonica (questa serie essendo definita in modo univoco dai suoi caratteri), indipendentemente dalla costruzione dei piani per una retta tangente a C di cui ci siamo valsi innanzi. Appunto per questa via NÖTHER (¹) è giunto al teorema che precisa il resultato ivi ottenuto:

Le superficie Ψ d' ordine $m = m_1 + m_2 - 4$ segano sull' intersezione di due superficie d' ordini m_1 e m_2, la serie canonica completa.

Ora come si calcolerà la dimensione della serie segata dalle superficie Ψ sulla curva C?

Anzitutto si conosce il numero

$$N_m = \binom{m+3}{3} - 1 = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6} - 1$$

che designa la dimensione del sistema di tutte le superficie Ψ d' ordine m; il quale numero si ottiene osservando che i coef-

(¹) Math. Annalen, Bd. 8 (1874).

ficienti a_{ikl} dell'equazione di una superficie d'ordine m

$$\Psi = \Sigma a_{ikl}\, x^i y^k z^l = 0 \qquad (i + k + l = m)$$

sono tanti quante le combinazioni con ripetizione di 3 elementi a m a m.

In secondo luogo la serie g segata dalle Ψ su C avrà la dimensione

$$N_m - r,$$

dove r è la dimensione del sistema delle Ψ che passano per un gruppo G di g. A sua volta questa dimensione r supera di un'unità quella, ρ, del sistema delle Ψ che contengono C, imperocchè le Ψ per G costrette a passare per un altro punto di C conterranno tutta la curva (irreducibile) C. Dunque la dimensione della serie segata su C dalle Ψ vale

$$N_m - \rho - 1 = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6} - \rho - 2,$$

dove, come si è detto, ρ designa la dimensione del sistema delle Ψ passanti per C.

Per calcolare in generale questa dimensione ρ, occorre estendere alle superficie il teorema relativo alle curve combinazioni lineari di due altre, che abbiamo denominato dell'$Af + B\varphi$ (§§ 15 e 16): estensione che, come quello stesso teorema, è dovuta a Nöther (l. c. 1874).

Se una superficie $\Psi(xyz) = 0$ passa per la curva (semplice) comune a due superficie irreducibili $F(xyz) = 0$ e $\Phi(xyz) = 0$, si ha

$$\Psi = AF + B\Phi,$$

dove A e B sono due polinomi in x, y e z, i cui ordini risultano dall'identità precedente.

La dimostrazione si riduce al teorema analogo nel piano. Seghiamo le superficie F, Φ e Ψ con un piano $z = k$: avremo

$$\Psi(xyk) = \alpha(xyk)F(xyk) + \beta(xyk)\Phi(xyk);$$

dove α e β sono polinomi in x e y; se il parametro k, che entra in α e β, vi figurasse in modo razionale intero, il teorema risulterebbe senz'altro dimostrato; ma, *a priori*, si può vedere soltanto che vi entra in modo razionale, e l'esame dei denominatori darebbe luogo a qualche difficoltà. Per evitarla applichiamo l' identità precedente a $k=0$, scrivendo

$$\Psi(xy0)=\alpha(xy)\,F(xy0)+\beta(xy)\,\Phi(xy0).$$

Siccome il polinomio

$$\Psi(xyz)-[\alpha(xy)F(xyz)+\beta(xy)\Phi(xyz)]$$

diventa identicamente nullo per $z=0$, esso sarà divisibile per z, e avremo quindi identicamente

$$z\Psi'(xyz)=\Psi(xyz)-[\alpha(xy)F(xyz)+\beta(xy)\Phi(xyz)].$$

In tal guisa siamo condotti a considerare (in luogo della Ψ d' ordine m) la superficie Ψ' d' ordine $m-1$, che come la Ψ passa per l' intersezione C della F e Φ: la formula precedente dice che se Ψ' è combinazione lineare di F e Φ, altrettanto accade di Ψ. Così la dimostrazione del teorema, che dobbiamo fornire, si riduce dall' ordine m all' ordine $m-1$. Ma quando, con riduzioni successive, si sia giunti al più piccolo fra i due ordini di F e Φ supposti diseguali, sia per es. all' ordine di F, il teorema riesce evidente, perchè non vi è altra superficie dello stesso ordine di F che passi per C, all' infuori della F stessa; e se invece i due ordini fossero uguali, si vede subito che le tre superficie Ψ, F, Φ appartengono ad un fascio, perchè la superficie del fascio determinato da due di esse, la quale abbia un punto sopra la terza (supposta irriducibile), coincide con questa.

Applichiamo il teorema precedente al caso delle superficie F_1 e F_2, d'ordini m_1 e m_2, e delle Ψ d'ordine $m=m_1+m_2-4$. Scriveremo

$$\Psi=AF_1+BF_2,$$

dove i polinomi A e B riusciranno (in questo caso) determinati, perchè se si avesse contemporaneamente

$$\Psi=A'F_1+B'F_2,$$

risulterebbe identicamente

$$(A-A')F_1=(B'-B)F_2,$$

e poichè F_2 non ha fattori a comune con F_1, dovrebbe dividere $A - A'$, ciò che è impossibile, dato che $A - A'$ ha il grado $m_2 - 4$, se non è identicamente $A - A' = 0$, e quindi $B' - B = 0$.

Ora, contando i coefficienti dei polinomi A e B d'ordine $m_2 - 4$ e $m_1 - 4$, troviamo subito la dimensione del sistema delle Ψ passanti per C, che vale

$$\rho = \frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)(m_2 - 3) + (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)}{6} - 1.$$

Quindi deduciamo che la dimensione della serie segata dalle Ψ su C vale

$$\frac{(m_1 + m_2 - 1)(m_1 + m_2 - 2)(m_1 + m_2 - 3)}{6} - 1 -$$

$$- \left\{ \frac{(m_2 - 1)(m_2 - 2)(m_2 - 3) + (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)}{6} - 1 \right\} - 1$$

$$= \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 4)}{2} = \frac{2p - 2}{2} = p - 1.$$

c. d. d.

§ 48. **Curve gobbe intersezioni parziali di due superficie: formule di equivalenza e serie canonica.** — Si consideri ora una curva gobba C, affatto generale, di un certo ordine n e di un certo genere p, che apparirà intersezione di tre superficie F_1, F_2 e F_3 degli ordini m_1, m_2 e m_3. Per la C si presentano i seguenti problemi:

1) Determinare il numero i dei punti comuni alla curva C e all'intersezione complementare C' delle F_1 e F_2 passanti per essa;

2) Determinare i caratteri, e in ispecie il genere p', di codesta C';

3) Determinare il numero delle intersezioni, fuori di C, di tre superficie F_1, F_2 e F_3 che la contengano, e quindi la *equivalenza* di C rispetto alle intersezioni di F_1, F_2 e F_3;

4) Costruire sopra C la serie canonica.

Tutti questi problemi vengono risoluti quando si applichino i risultati conseguiti nel precedente paragrafo al caso in cui l'intersezione completa delle due superficie F_1 e F_2 si spezzi in due parti C e C'.

Designamo con $n' = m_1 m_2 - n$ l'ordine della C', e consideriamo la superficie d'ordine $m_1 + m_2 - 2$

$$\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0$$

che (§ 47) sega l'intersezione di F_1 e F_2 nei punti di contatto dei piani tangenti condotti per la retta r:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0.$$

Essendo ora codesta intersezione composta di $C + C'$, la Φ segherà questa curva non solo nei punti di contatto dei piani tangenti a C e a C' condotti per r, ma anche negli i punti comuni a C e C', che sono doppi per la $C + C'$, e dove le F_1 e F_2 hanno lo stesso piano tangente. Ma i piani tangenti a C sono $2n + 2p - 2$, e i piani tangenti a C' sono $2n' + 2p' - 2$; quindi, intersecando Φ e C, avremo

$$2n + 2p - 2 + i = (m_1 + m_2 - 2)n,$$

sicchè *il numero delle intersezioni delle curve complementari C e C' vale*:

$$i = (m_1 + m_2 - 4)n - (2p - 2).$$

Analogamente

$$i = (m_1 + m_2 - 4)n' - (2p' - 2),$$

e quindi *il genere della curva complementare C' è dato da*

$$2p' = (m_1 m_2 - 2n)(m_1 + m_2 - 4) + 2p,$$

formula che assume un aspetto notevole lasciandovi figurare n':

$$2(p' - p) = (n' - n)(m_1 + m_2 - 4).$$

Qui è interessante rilevare che risulta

$$p + p' + i - 1 = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 4)}{2} + 1,$$

dove il secondo membro designa il genere dell'intersezione completa di due superficie d'ordini m_1, m_2, e si ricade così nell'espressione del genere della curva spezzata trovata nel § 35, pag. 399. Ricordiamo anche che, considerando la curva $C+C'$ come limite di una intersezione completa irriducibile, appare che *il numero i delle intersezioni di C e C' è essenzialmente positivo* (ibidem).

Dopociò prendiamo a considerare la terza superficie F_3, d'ordine m_3, passante per C; essa incontrerà C' in $m_3 \cdot n'$ punti, di cui i appartengono a C, e perciò in

$$n'm_3 - i = m_1m_2m_3 - (m_1 + m_2 + m_3 - 4)n + (2p - 2).$$

Dunque:

Il numero delle intersezioni ulteriori di tre superficie di ordini m_1, m_2, m_3, passanti per una curva d'ordine n e genere p, vale

$$m_1m_2m_3 - (m_1 + m_2 + m_3 - 4)n + (2p - 2),$$

sicchè l'equivalenza della curva è

$$(m_1 + m_2 + m_3 - 4)n - (2p - 2).$$

Questa formula concorda con quella ottenuta nel § 45 del L. 3° (vol. II, pag. 312, cfr. l'errata corrige) dove al posto del genere p figura il numero dei punti doppi apparenti

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

Notizia storica. Il termine di « equivalenza », nel senso qui usato, è stato introdotto da CAYLEY (1870). La determinazione dell'equivalenza d'una curva risale a SALMON (1847, 1849, 1866): Salmon stesso, Cayley (1869), e più completamente NÖTHER [1] (1871) trattano anche casi più generali in cui si considerano tre superficie per una curva multipla.

Infine otteniamo la costruzione della serie canonica su C (o su C') considerando le intersezioni di essa con le superficie Ψ d'ordine $m = m_1 + m_2 - 4$ che passano per gli i punti comuni a C e C': infatti (ragionando come nel para-

[1] Annali di Mat., serie 2ª, t. V.

grafo precedente) il gruppo delle intersezioni di Ψ con C, fuori degli i punti nominati, sommato con due sezioni piane, riesce equivalente al gruppo jacobiano della g_n^1 segata dai piani per una retta r.

Così appare che le Ψ d'ordine m, condotte per i punti comuni a C e C', segano gruppi canonici tanto sull'una come sull'altra delle due curve. Ma il risultato si può precisare nel senso che le serie suddette sono complete, ed anzi sussiste il teorema più espressivo che:

Se la curva C è intersezione parziale di due superficie F_1 e F_2 d'ordini m_1 e m_2, secantisi ulteriormente in una curva C', le superficie Ψ d'ordine $m = m_1 + m_2 - 4$, passanti per la C', segano su C la serie canonica completa (NÖTHER).

Per dimostrarlo si consideri anzitutto la serie segata sopra la curva C' da tutte le superficie Ψ d'ordine m: questa serie ha l'ordine $2p' - 2 + i$, e quindi è non speciale e di dimensione

$$p' - 2 + i - \varepsilon',$$

designandosi con $\varepsilon' \geq 0$ la deficenza della serie stessa. Costringendo una Ψ a contenere $p' - 1 + i - \varepsilon'$ punti generici di C', si avrà quindi una superficie Ψ passante per C', e la dimensione del sistema delle Ψ passanti per C' risulterà

$$N_m - (p' - 1 + i) + \varepsilon'.$$

Ora la serie segata sopra C dalle Ψ passanti per C' ha l'ordine $2p - 2$, e quindi la dimensione

$$p - 1 - \varepsilon$$

con $\varepsilon \geq 0$. Perciò, costringendo una Ψ, che già passi per C', a contenere $p - \varepsilon$ punti generici di C, si avrà una Ψ contenente l'intera curva $C + C'$: si trova così che la dimensione delle Ψ per $C + C'$ vale

$$N_m - (p' - 1 + i) - p + \varepsilon + \varepsilon'.$$

Ma il teorema

$$\Psi = AF_1 + BF_2$$

ci ha già dato che questa dimensione vale:

$$N_m - P,$$

dove

$$P = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 4)}{2} + 1$$

è il genere dell'intersezione completa di F_1 e F_2, cioè della curva composta $C + C'$:

$$P = p + p' + i - 1.$$

Si deduce

$$\varepsilon = \varepsilon' = 0. \qquad \text{c. d. d.}$$

§ 49. **Formula di postulazione: curve del massimo genere.** — Abbiamo veduto che una curva C, di ordine n e genere p, *equivale* a un certo numero di punti comuni per tre superficie di dati ordini che debbano contenerla. Da un altro punto di vista la curva C conta pure come un certo numero di punti, cioè rispetto alle condizioni che essa impone alle superficie di dato ordine che debbano contenerla: e codesto numero ha ricevuto da Cayley [1] il nome di *postulazione*.

Per determinare la postulazione di C rispetto alle superficie di un qualunque ordine m, si consideri la serie lineare g^r_{mn} segata su C da tutte le superficie del detto ordine: *la postulazione di C vale $r + 1$*. Infatti le superficie d'ordine m passanti per $r + 1$ punti generici di C conterranno interamente C, mentre ciò non accade in generale per le superficie costrette a passare soltanto per r di essi. Del resto in ciò che precede si è già avuto luogo di applicare questo ragionamento relativamente a casi particolari.

Ora, per calcolare la postulazione di C rispetto alle superficie d'ordine m, occorre determinare la dimensione r della nominata serie g^r_{mn}. E un limite superiore di r è dato subito da

$$r \leq mn - p$$

per $mn > 2p - 2$, giacchè in questo caso la serie non è speciale. Ma si può vedere di più che: per m abbastanza elevato la serie g^r_{mn} riesce completa (la C non avendo punti doppi) e quindi, per $mn > 2p - 2$, si ha proprio

$$r = mn - p.$$

(1) Proceedings of the Math. Society, vol. III, 1870.

Il limite inferiore di m per cui si può accertare l'integrità della detta serie, può determinarsi in due modi, dimostrando che:

1) Se la C è intersezione completa o parziale di due superficie d'ordini m_1 e m_2, riesce completa la serie segata dalle superficie d'ordine

$$m \geq m_1 + m_2 - 4;$$

tuttavia questa serie è la serie canonica, cioè speciale d'indice 1, se si tratta di una intersezione completa, e vale il segno di uguaglianza: sicchè allora $r = mn - p + 1 = p - 1$.

2) In ogni caso le superficie d'ordine $n - 2$ segano sulla C d'ordine n una seria completa non speciale.

Il teorema 1) è sostanzialmente dimostrato nel paragrafo precedente, dove si è fatto vedere che le superficie d'ordine $m = m_1 + m_2 - 4$ segano su ciascuna delle due curve complementari C e C', una serie completa non speciale, mentre — se C è intersezione completa — segano su di essa la g_{2p-2}^{p-1} completa. Lo stesso ragionamento si può ripetere passo a passo per superficie d'ordine $m > m_1 + m_2 - 4$, in base al teorema dell'$AF + B\Phi$, applicando il quale però convien contare le diverse rappresentazioni possibili di una medesima superficie Ψ quando l'ordine di questa sia $m > m_1 + m_2$ (cfr. § 15, pag. 126, dove tuttavia si esamina la questione, equivalente, di quando sia $Af \equiv B\varphi$). Si perviene così alla conclusione enunciata.

Per giustificare il teorema 2) si considerino le

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

corde di C passanti per un punto O: i coni d'ordine $n - 2$ passanti per queste corde segano ulteriormente su C una serie completa non speciale, quale è determinata sulla proiezione di C dalle curve aggiunte d'ordine $n - 2$. *A fortiori* le superficie passanti per i $2n$ punti d'appoggio delle nominate corde segano ulteriormente su C una serie completa non speciale. Ora, per il nostro scopo, basta riconoscere che quei $2d$ punti di appoggio offrono condizioni indipendenti alle superficie d'ordine $n - 2$ che debbono contenerli; ma ciò si verifica costruendo una superficie d'ordine $n - 2$ che contenga $2d - 1$ fra i detti punti e non il rimanente, quale si ottiene aggiungendo ad un cono d'ordine $n-3$, contenente $d-1$ corde di C, un piano che passi per uno solo fra i due punti d'appoggio della corda rimanente. Dove occorre avvertire che il detto cono non passa di conseguenza per la *d-esima* corda, perchè i d punti doppi della proiezione di C offrono condizioni indipendenti alle curve d'ordine $n-3$ che debbono contenerli (cfr. § 11, pag. 89).

Riassumiamo le conclusioni ottenute:

La postulazione d'una curva gobba senza punti doppi, di ordine n e genere p, rispetto alle superficie d'ordine m, vale certo

$$mn-p+1,$$

ogniqualvolta sia

$$m \geq n-2,$$

ovvero

$$m \geq m_1+m_2-4, \quad mn > 2p-2,$$

dove m_1 e m_2 designano gli ordini di due superficie segantisi lungo C.

Se la C possiede *punti doppi* (ma non multipli) la postulazione è la medesima, purchè si consideri il *genere virtuale* di C, ritenendo i punti doppi virtualmente inesistenti.

Per la teoria delle superficie interessa specialmente il caso in cui la C possegga un certo numero i di *punti tripli,* per cui essa passa con tre rami non tangenti ad un piano. In questo caso si valuterà la postulazione di C considerando le superficie d'ordine m che passino — acquistando ivi dei punti doppi — per gli i punti tripli, le quali segano ulteriormente C in $mn-6i$ punti: così, per i valori di m abbastanza grandi per cui la g^r_{mn-6i} segata riesce completa e non speciale, si avrà

$$r = mn-6i-p,$$

designando p il *genere effettivo* di C; e quindi se m è ancora abbastanza grande perchè gli i punti tripli di C offrano condizioni indipendenti alle superficie d'ordine m che vi passano doppiamente, *la postulazione di C varrà*

$$r+1 = mn-6i-p+1.$$

Queste formule di postulazione, dopo CAYLEY (1880), sono state stabilite più perfettamente da NÖTHER [1] in ipotesi assai

[1] « Sulle curve multiple di superficie algebriche ». *Annali di Mat.*, serie 2ª, t. 5 (1871).

generali, dove s' impone ad una superficie di passare per una data curva *con una certa molteplicità*, e in varii modi poi trattate ed estese al caso di curve singolari qualsiansi da CASTELNUOVO (¹) ed ENRIQUES (²).

Quando si sappia che la serie segata sopra una curva C dalle superficie d'ordine m sia non speciale, senza sapere che è completa, si ha almeno, se non esattamente la postulazione di C, un limite superiore di questa. Ora, per riconoscere la non specialità della serie abbiamo usato della condizione sufficiente $mn > 2p - 2$; però questa condizione non è necessaria e, indipendentemente da essa, intervengono altri criteri di riconoscimento. Infatti possiamo dimostrare che:

Sopra una curva d' ordine n le superficie F_m d' ordine

$$m \geq \frac{n-3}{2}$$

segano certo serie non speciali.

Per vederlo, procediamo per assurdo, supponendo dunque che le superficie di quest' ordine m seghino su C una serie speciale g_{mn} di dimensione r_m (serie contenuta nella serie canonica g_{2p-2}^{p-1}). Il teorema di Riemann-Roch dice che ogni gruppo G_n, sezione piana di C, appartenendo ad una g_n^3 (completa o no) offre al più $n-3$ condizioni ai gruppi canonici che debbano contenerlo; *a fortiori* il G_n offrirà al più $n-3$ condizioni ai gruppi della nostra g_{mn} contenuta nella g_{2p-2}^{p-1}, cioè alle superficie F_m che debbano contenerlo. Dunque le superficie F_m le quali passino per $n-3$ punti di una sezione piana di C, passeranno di conseguenza per i rimanenti tre punti. Ma per m sufficientemente alto ciò riesce impossibile, perchè si può costruire una F_m composta di piani che passi per almeno $n-3$ di quei punti e non per i rimanenti. Invero, ammesso che il piano contenente il G_n non passi per una

(¹) « Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica ». *Circolo Mat. di Palermo*, 1893.

« Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica ». *Annali di Mat.*, serie II, t. 15 (1897) - cfr. nn. 9 e 10. (Cfr. il citato trattato di PICARD et SIMART).

(²) « Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche ». *Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL* (1894): n. 37.

delle ∞^2 trisecanti di C, si prenda un primo piano per due punti del G_n, un secondo piano per altri due, e così di seguito: si ottiene in tal guisa una superficie F_m d'ordine m che contiene $2m$ punti del G_n senza contenere i rimanenti $n-2m$, e, per $n-2m \leq 3$ cioè

$$m \geq \frac{n-3}{2},$$

si è costruita così una F_m che contiene almeno $n-3$ punti del G_n senza passare per i rimanenti: conclusione che appunto abbiamo rilevato contraddire all'ipotesi della specialità della serie segata sulla C dalle F_m.

Esemplificazioni del teorema precedente sono le seguenti:

Per $n=6$ si consideri la sestica C_6 intersezione completa d'una quadrica con una superficie cubica: su C_6 le superficie d'ordine $2 > \frac{6-3}{2}$ segano una serie non speciale, mentre le superficie d'ordine inferiore, cioè i piani, segano la serie canonica.

Per $n=9$ si consideri la curva C_9 intersezione di due superficie cubiche: su C_9 le superficie d'ordine $3 = \frac{9-3}{2}$ segano una serie non speciale, mentre le superficie d'ordine inferiore segano serie speciali, la serie canonica venendo data dalle quadriche.

Ora il risultato sopra ottenuto conduce a risolvere l'importante problema di « determinare il massimo genere delle curve gobbe di dato ordine n ».

A tale scopo si confrontino le dimensioni r_m e r_{m-1} delle serie segate sopra C rispettivamente dalle F_m e dalle F_{m-1}: costringendo le F_m a contenere un gruppo G_n, sezione piana di C, si avrà un certo numero s_m di condizioni, e le F_m contenenti il G_n segheranno su C una serie contenente quella segata dalle F_{m-1} o — in particolare — coincidente con essa, sicchè

$$r_m \geq r_{m-1} + s_m$$

ossia

$$r_m - r_{m-1} \geq s_m.$$

Ora si può vedere che, per $m \leq \frac{n-3}{2}$, è in ogni caso:

$$s_m > 2m,$$

cioè

$$s_m \geq 2m + 1.$$

Infatti, per $m < \frac{n}{2}$, si può costruire una F_m composta di m piani che contengano m coppie di un G_n sezione piana generica di C, senza contenere i rimanenti punti.

Il confronto delle diseguaglianze ottenuto ci dà

$$r_m - r_{m-1} \geq 2m + 1.$$

Scriviamo accanto alla relazione $r_1 = 3$, le successive disuguaglianze che si ottengono da questa dando ad m i valori 1, 2, 3 .... fino al massimo intero μ contenuto in $\frac{n-2}{2}$, $\mu = \left[\frac{n-2}{2}\right]$:

$$\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = 3 \\ r_2 - r_1 \geq 5 \\ r_3 - r_2 \geq 7 \\ r_4 - r_3 \geq 9 \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_\mu - r_{\mu-1} \geq 2\mu + 1; \end{array} \right.$$

sommando avremo

$$r_\mu \geq \frac{(2\mu + 4) \cdot \mu}{2} = \mu(\mu + 2).$$

Applichiamo ora il teorema che la serie segata dalle superficie F_μ è non speciale, essendo $\mu \geq \frac{n-3}{2}$; avremo

$$r_\mu \leq n\mu - p,$$

e quindi

$$n\mu - p \geq \mu(\mu + 2).$$

Di qui si ricava

$$p \leq n\mu - \mu(\mu + 2) = \mu(n - \mu - 2).$$

Per esprimere il limite superiore di p in funzione soltanto di n, distinguiamo i due casi

$$n \text{ pari}, \qquad \mu = \left[\frac{n-2}{2}\right] = \frac{n-2}{2}$$

$$n \text{ dispari}, \qquad \mu = \left[\frac{n-2}{2}\right] = \frac{n-3}{2};$$

Avremo rispettivamente

$$p \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2, \quad p \leq \frac{(n-1)(n-3)}{4}.$$

In conclusione:

Il massimo valore che possa avere il genere di una curva d' ordine n è:

$$\text{per } n \text{ pari} \qquad P = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$$

$$\text{per } n \text{ dispari} \quad P = \frac{(n-1)(n-3)}{4},$$

cioè in ogni caso

$$P = \left[\frac{(n-2)^2}{4}\right].$$

Affinchè questi massimi valori siano raggiunti, bisogna che in tutte le relazioni α) valga il segno di uguaglianza, e in particolare che sia $r_2 - r_1 = 5$, donde

$$r_2 = 8.$$

Di conseguenza la quadrica che passa per 9 punti generici della C la contiene per intero, cioè

Le curve di genere massimo fra quelle di dato ordine appartengono ad una quadrica.

Dopociò si verifica che il massimo valore del genere

$$P = \left[\frac{(n-2)^2}{4}\right]$$

viene effettivamente raggiunto, tanto per n pari che per n dispari.

Infatti per n pari riesce di genere $\frac{(n-2)^2}{4}$ la curva di ordine n intersezione completa di una quadrica con una superficie d' ordine $\frac{n}{2}$, che viene proiettata da un punto della quadrica in una curva piana d' ordine n con due punti multipli secondo $\frac{n}{2}$; invece per n dispari si ottiene la curva di genere massimo segando la quadrica con una superficie di ordine $\frac{n+1}{2}$ che passi per una sua generatrice: poichè la proiezione, da un punto della quadrica, della curva così ottenuta è una curva piana d' ordine n con un punto multiplo d' ordine $\frac{n+1}{2}$ e un altro d' ordine $\frac{n-1}{2}$. Aggiungasi che qualunque altra curva d' ordine n tracciata sulla quadrica risulta di genere inferiore al massimo, come appare da ciò che la sua proiezione piana da un punto di quella possiede due punti multipli per cui la somma delle molteplicità è uguale a n.

Concludiamo enunciando il

Teorema di HALPHEN. *Le curve di dato ordine per cui il genere riceve il massimo valore*

$$P = \left[\frac{(n-2)^2}{4}\right]$$

appartengono ad una quadrica e sono l' intersezione di questa con una superficie d' ordine $\frac{n}{2}$, *ovvero con una superficie d' ordine* $\frac{n+1}{2}$ *passante per una sua generatrice.*

Nota. La via che abbiamo tenuto per determinare le curve del massimo genere, appartiene a CASTELNUOVO, che nelle sue « Ricerche di Geometria sulle curve algebriche » [1] ha esteso il teorema alle curve iperspaziali: precisamente egli ha dimostrato che il massimo genere d' una curva d' ordine n appartenente allo S_r vale

$$P = \varkappa \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \varkappa \frac{(r-1)}{2} \right\},$$

designando $\varkappa$ il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$. E, per $n > 2r$, la curva d' ordine n e di genere massimo dello S_r giace sopra una superficie d' ordine $r-1$ di quello spazio: che è una rigata o una superficie di VERONESE per $r=5$. Estensioni di questo resultato alle curve di genere $P-1$ e $P-2$, sono state date da G. FANO nella memoria « Sopra le

[1] Atti dell'Accademia di Torino, 1889. Cfr. « Sui multipli d' una serie lineare di gruppi di punti.... » (Circolo di Palermo, 1893) e il citato volume di PICARD et SIMART.

curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque » [1].

§ 50. **Curve tracciate sopra un monoide di dato ordine.** — Per studiare le curve di dato ordine, in luogo di partire dalle curve piane di genere $p=0, 1, 2\ldots$, e determinare le g_n^3 sopra di esse, si può riferirsi a un monoide che le contenga, e cercare le curve d'ordine n tracciate su questo. A tal uopo giova considerare la rappresentazione del monoide sopra un piano, che si ottiene proiettando il monoide stesso dal suo centro: la quale rappresentazione, che è stata già studiata nelle « Lezioni di Geometria descrittiva », giova qui brevemente richiamare.

Sia F una superficie monoidale d'ordine m, con un punto $(m-1)$-*plo* O:

$$z=\frac{f_m(xy)}{f_{m-1}(xy)}.$$

Da codesto centro O si proietti la superficie sopra un piano α: un punto generico A di F dà luogo a un punto A' di α; e, reciprocamente, ogni punto generico A' di α nasce da *un* punto A di F.

Fanno eccezione:

1) Sopra la superficie F il punto O, la cui proiezione riesce indeterminata; per ragioni di continuità bisogna considerare come corrispondenti ad O (o al suo intorno) tutti i punti della curva *fondamentale* $f_{m-1}(xy)=0$, d'ordine $m-1$, che si ottiene come traccia su α del cono osculatore in O.

2) Sul piano α i punti comuni alle due curve f_m e f_{m-1}, che sono punti base per il sistema lineare $|\varphi|$ costituito dalle curve

$$\varphi=axf_{m-1}+byf_{m-1}+cf_m+df_{m-1}=0,$$

immagini delle sezioni di F coi piani

$$ax+by+cz+d=0:$$

a codesti punti *fondamentali* corrispondono le rette del monoide per O, che in generale saranno, come i detti punti, in

[1] Memorie dell'Accademia di Torino, 1893.

numero di $m(m-1)$; ma in casi particolari potrà accadere che il sistema $|\varphi|$ abbia un punto base r-*plo*, che sarà traccia di una retta r-*pla* di F, assorbente r^2 rette semplici.

Le curve C, d'ordine n, che appartengono al monoide F, senza passare per O, si proiettano in curve C', dello stesso ordine, aventi n intersezioni variabili con le curve φ, immagini delle sezioni piane.

Reciprocamente si consideri nel piano α una curva C', d'ordine n, che abbia n intersezioni variabili (cioè fuori dei punti base) con le curve del sistema $|\varphi|$: è chiaro che C' è immagine di una curva C di F che, essendo segata dalle sezioni piane, ossia dai piani, in n punti, deve avere come C' l'ordine n. E siccome la C ha lo stesso ordine della proiezione C', non passa certo per O. Ciò appare anche sopra il piano α, dal considerare che la C' sega in n punti la curva composta della linea fondamentale f_{m-1} e di una retta, e che d'altronde essa ha già n intersezioni con questa retta, sicchè le sue intersezioni con f_{m-1} sono tutte assorbite dai punti fondamentali.

Ove si considerino invece le curve C d'ordine n che appartengono al monoide F e passano semplicemente per O, si avrà che le proiezioni C' sono d'ordine $n-1$, ed hanno n intersezioni variabili con le φ ed *una* intersezione con la curva fondamentale f_{m-1} fuori dei punti fondamentali, etc.

Pertanto la *ricerca delle curve d'ordine* n tracciate *sul monoide* F, e non passanti o passanti semplicemente per O, e quindi delle curve C senza punti multipli, si riduce alla *risoluzione d'un problema d'analisi indeterminata*. Per semplicità riferiamoci all'ipotesi in cui F possieda $m(m-1)$ rette semplici, e quindi vi sieno su α altrettanti punti fondamentali $1, 2 \ldots i \ldots \frac{m(m-1)}{2}$, e designamo con x_i la molteplicità di C' nel punto i: avremo per le C non passanti per O

$$mn - \Sigma x_i = n,$$

e per le C passanti semplicemente per O

$$m(n-1) - \Sigma x_i = n.$$

Risolvendo, rispetto alle x_i, queste equazioni d'analisi indeterminata, si ottengono tutte le famiglie di curve d'ordine n senza punti multipli, che appartengono al monoide F: dove tuttavia conviene por mente alle *condizioni di irriducibilità.*

Aggiungiamo l'osservazione esplicita che « le intersezioni complete della superficie F con le superficie d'ordine r, sono rappresentate da curve d'ordine rm passanti r volte per tutti i punti fondamentali, e *reciprocamente* tutte le curve d'ordine rm con le dette molteplicità rappresentano intersezioni di F con superficie d'ordine r ». La proposizione diretta segue dal considerare che il sistema lineare delle superficie d'ordine r si può determinare combinando linearmente gruppi di r piani. L'inversa si dimostra facilmente; ma ci limiteremo per semplicità al caso in cui $r = 2$. Si tratta di provare che le curve C_{2m} d'ordine $2m$, passanti doppiamente per i punti fondamentali, sono soltanto le ∞^9 immagini delle sezioni quadriche e non più. Ora se vi fossero ∞^{10} C_{2m}, le C_{2m} costrette a passare per un altro punto della curva fondamentale, d'ordine $m-1$, si spezzerebbero in questa e in ∞^9 C_{m+1}, passanti semplicemente per i punti fondamentali e secanti sulla curva fondamentale la g^2_m completa segata dalle rette; quindi le C_{m+1} costrette a contenere un gruppo della g^2_m e un altro punto fondamentale sarebbero ∞^6, mentre queste curve si spezzano nella curva fondamentale e in una delle ∞^5 coniche.

L'esempio più semplice della rappresentazione piana d'un monoide si ha nel caso $m = 1$, in cui si è ricondotti alla nota *proiezione stereografica della quadrica.* Qui le curve φ, immagini delle sezioni piane di F_2, sono le coniche passanti per due punti fondamentali 1 e 2 (che sono distinti quando F_2 non sia un cono), a cui rispondono le due rette (generatrici di diverso sistema) di F_2 passanti pel centro di proiezione O, l'intorno del quale è rappresentato sul piano α dalla retta 1 2; i due fasci di rette per 1 e 2 rappresentano le due schiere di generatrici.

Data l'arbitrarietà del centro di proiezione su F_2, in questo caso la ricerca delle curve C d'ordine n tracciate su F_2 può limitarsi all'ipotesi in cui le C non passino per O. Perciò si ha da risolvere soltanto l'equazione in numeri interi

$$2n - (x_1 + x_2) = n,$$

cioè

$$x_1 + x_2 = n.$$

E si trova che: *le curve irreducibili d'ordine n appartenenti ad una quadrica si distribuiscono su di essa in $n-1$ famiglie, le curve d'una famiglia $(r, n-r)$ segando le generatrici d'una schiera in r e quelle dell'altra in $n-r$ punti*: del resto ogni famiglia $(r, n-r)$ si spezza in due sistemi corrispondenti allo scambio dei numeri r e $n-r$, salvo naturalmente la famiglia $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ corrispondente ad un n pari.

Ora le curve sezioni di F_2 con una superficie d'ordine r appartengono alla famiglia (r, r); e, reciprocamente, come abbiamo già osservato in generale.

Da ciò risulta che, *per* $2r < n$, *le curve, d'ordine* n, $C_{(r, n-r)}$ *del tipo* $(r, n-r)$ *si ottengono su* F_2 *come sezioni ulteriori di superficie d'ordine* $n-r$, *passanti per* $n-2r$ *generatrici* $(n-r)$*-secanti.* Infatti se nella rappresentazione piana si aggiungono alla proiezione C' della nostra curva $n-2r$ rette passanti per il punto fondamentale di molteplicità $r < n-r$, si ottiene una curva d'ordine $2n-2r$ immagine di una intersezione completa.

Consideriamo *una curva* $C_{(r, n-r)}$ $(r < n-r)$ sopra F_2: sapendo come essa si ottenga quale intersezione di F_2 con una superficie passante per $n-2r$ generatrici, si potrebbe calcolare il suo *genere* p_r sulla base del teorema di Nöther del § 48, che dà sulle nostre curve la serie canonica; ma dall'esame della proiezione piana risulta direttamente

$$p_r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{r(r-1)}{2} - \frac{(n-r)(n-r-1)}{2} =$$
$$= (r-1)(n-r-1).$$

Si può anche calcolare il *numero* q_r *dei parametri* da cui dipendono le *curve gobbe* $C_{(r, n-r)}$ *appartenenti a quadriche:* sopra una *data* quadrica l'infinità della famiglia delle dette curve è

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} - \frac{(n-r)(n-r+1)}{2} = n(r+1) - r^2$$

e quindi, per $n > 4$, si ha

$$q_r = n(r+1) - r^2 + 9.$$

Da questa formula appare che le curve gobbe d'ordine n,

$C_{(r,n-r)}$, appartenenti a quadriche, formano nello spazio un sistema sovrabbondante con $q_r > 4n$ parametri, appena sia

$$n(r+1) - r^2 + 9 > 4n,$$

cioè

$$(n-r-3)(r-3) > 0.$$

Questa disuguaglianza per $n > 4$ (non potendo essere insieme $r \leq 2$, $n - r \leq 2$) significa

$$r > 3, \quad n - r > 3.$$

Dunque *formano un sistema sovrabbondante le curve gobbe che posseggono due schiere di quadrisecanti*, la superficie doppiamente rigata di queste essendo una quadrica. In questo enunciato una retta secante in $r > 4$ punti viene ritenuta come una quadrisecante.

All'opposto se per la $C_{(r,n-r)}$, appartenente ad una quadrica, si ha

$$n(r+1) - r^2 + 9 - 4n = (n-r-3)(r-3) < 0,$$

cioè, per $n > 5$,

$$r < 3 \qquad (r < n - r),$$

le $C_{(r,n-r)}$ si presentano come *casi particolari di curve gobbe dello stesso ordine n che non stanno in generale sopra una quadrica*. Ciò accade dunque per le *curve* (razionali o iperellittiche) che sono *unisecanti o bisecanti le generatrici di una delle due schiere* sopra una quadrica.

Soltanto le quintiche (di genere 2) appartenenti a quadriche e secanti le generatrici delle due schiere in 2 e 3 punti, contengono 20 parametri e perciò esauriscono le famiglie delle *quintiche gobbe di genere* 2.

In fine il *caso* che a priori si sarebbe potuto credere *regolare*, in cui le curve d'ordine $n > 4$ tracciate sopra quadriche formino una famiglia con $4n$ parametri, è caratterizzato dalla proprietà che le *generatrici di una schiera* siano esattamente *trisecanti*.

Quando si proponga di classificare le curve gobbe di un dato ordine n, la rappresentazione piana della quadrica basta soltanto a risolvere il problema nei casi $n = 3$ (cubiche gobbe) e $n=4$ (quartiche di genere $p=1$, 0, dette di prima e seconda specie; cfr. L. 3°, § 18, vol. II, pag. 145). Ma per *classificare le curve gobbe del quint'ordine*, occorrerà usare anche la rappresentazione piana della superficie cubica con punto doppio.

Il genere di una quintica gobba C_5 non può superare il valore massimo $P=\left[\frac{(5-2)^2}{4}\right]=2$, ciò che segue già dal considerare che la proiezione della C_5 da un suo punto è una quartica di genere $p \leq 3$ e che perciò la g_5^3 segata dai piani è non speciale. Procediamo dunque a discutere i casi $p=2, 1, 0$.

La C_5 di genere massimo $p=2$ appartiene sempre ad una quadrica (ciò che qui appare direttamente perchè la serie segata dalle ∞^9 quadriche è una g_{10} di dimensione ≤ 8): e nello studio della rappresentazione della quadrica abbiamo visto che codeste C_5 bisecano le generatrici di una schiera e trisecano le altre; così una C_5 si presenta come intersezione parziale della quadrica con una superficie cubica che passa per una generatrice trisecante. L'infinità delle superficie cubiche F_3 contenenti la C_5 risulta quindi essere uguale a 5, il che significa che le ∞^{19} superficie cubiche segano sulla C_5 una serie di dimensione 13, cioè completa: l'infinità anzidetta si determina osservando che le F_3 per C_5 segano sulla quadrica ∞^1 rette, e che aggiungendo la condizione di contenere un altro punto della quadrica si trovano le ∞^3 F_3 spezzate in una quadrica e in un piano.

Per $p=1$ si vede anzitutto che la C_5 non può stare sopra una quadrica, giacchè nella classificazione delle quintiche tracciate sopra quadriche si trovano soltanto quintiche $C_{(2,3)}$ e $C_{(1,4)}$ di genere 0 e 2. Ma per la nostra C_5 con $p=1$ passano ∞^4 superficie cubiche F_3; infatti le superficie cubiche dello spazio segano su C_5 una g_{15} non speciale di dimensione ≤ 14; anzi, una serie completa la cui dimensione è precisamente 14 trattandosi di superficie d'ordine $3 \geq 5-2$ (cfr. § 49, pag. 536). Ora fra le ∞^4 F_3 per C_5 ve ne sono ∞^3 dotate di punto doppio, ed anzi ve ne è una (monoidale) che possiede un punto doppio O assegnato ad arbitrio nello spazio. Per proiezione da O la C_5 dà una curva piana C_5', con 5 punti doppi, che cadono in 5 fra i 6 punti fondamentali per la rappresentazione piana del monoide; infatti le 5 corde di C_5 per O, avendo due intersezioni con F_3, fuori di O, appartengono al monoide F_3.

Reciprocamente si vede che una curva C_5' passante doppiamente per 5 fra i 6 punti fondamentali del piano, ha 5 intersezioni variabili con le cubiche per codesti 6 punti (immagini delle sezioni piane di F_3), e perciò rappresenta una C_5 appartenente ad F_3. Si trovano così, sopra F_3, ∞^5 C_5 di genere 1; e, tenuto conto che vi sono ∞^{18} monoidi cubici e che una C_5 appartiene a ∞^3 superficie siffatte, si ritrovano i $20 = 4 \cdot 5$ parametri pertinenti ad un sistema di curve gobbe (non speciali) del quint' ordine. Aggiungiamo che la quintica piana C_5' passante doppiamente per i punti fondamentali 1 2 3 4 5, diventa immagine dell' intersezione completa con un' altra superficie cubica, quando vi si aggiunga una quartica C_4' passante triplamente per il punto 6 e semplicemente per i punti 1 2 3 4 5. Da ciò si deduce che la quintica di genere 1 è intersezione parziale di due superficie cubiche secantisi ulteriormente in una quartica di seconda specie.

Passiamo alle quintiche di genere 0. Per una tal C_5 passano ∞^3 superficie cubiche, le quali sono certo irriducibili se — come qui supporremo — la C_5 non appartiene ad una quadrica, e fra le dette superficie vi sono ∞^2 F_3 dotate di un punto doppio O, generalmente fuori di C_5. Rappresentiamo sopra un piano α il monoide F_3 per proiezione da O: la C_5', immagine di C_5, dovrà avere 6 punti doppi, o moltepl icità equivalenti rispetto al genere, nei punti fondamentali 1 2 3 4 5 6 (appartenenti ad una conica f_2), per cui passano tutte le cubiche φ immagini delle sezioni piane. Ma la C_5' non può avere come doppi codesti 6 punti, perchè avrebbe soltanto 3 invece che 5 intersezioni variabili con le φ; tenuto conto di ciò si vede che la C_5' deve passare triplamente per un punto, per es. 1, doppiamente per altri tre, p. es. 2, 3, 4, e semplicemente per uno dei rimanenti, p. es. 5.

Aggiungendo alla C_5' una quartica C_4' che passi triplamente per 6, doppiamente per 5 e semplicemente per 2, 3, 4, si otterrà l' immagine di una intersezione completa di F_3 con un' altra superficie cubica. Ma la C_4' si spezza necessariamente nella retta 5 6, immagine di una retta di F_3 non passante per O, e in una cubica passante doppiamente per 6 e semplicemente per 2, 3, 4, 5, la quale rappresenta una cubica gobba di F_3 : e questa cubica gobba e la retta precedentemente nominata non hanno punti a comune, perchè le loro immagini piane si segano soltanto in punti fondamentali.

Tenendo presente anche ciò che si è detto per le quintiche appartenenti ad una quadrica, concluderemo che: *la quintica gobba C_5 di genere 0 si può ritenere in generale come intersezione parziale di due superficie cubiche irriducibili, secantisi ulteriormente secondo una cubica gobba e una retta senza punti comuni. Però nella famiglia ∞^{20} delle C_5 vi sono ∞^{18} quintiche particolari che non appartengono ad alcuna superficie cubica irriducibile, le quali sono date da intersezioni di una quadrica con una superficie del quart' ordine passante per tre generatrici dello stesso sistema.*

§ 51. **La rappresentazione piana della superficie cubica.** — Lo studio contenuto in questo paragrafo, a cui si è condotti naturalmente dalla estensione delle cose precedenti, servirà qui per la determinazione di importanti classi di curve gobbe (§ 52), e costituisce d'altronde una parte essenziale della teoria generale delle superficie cubiche, che — insieme ai cenni contenuti nel L. 3°, §§ 10 e 19 (cfr. L. 4°, § 38, vol. II, pag. 626) — vale a dare una veduta abbastanza completa delle proprietà elementari di codeste superficie.

Nel paragrafo precedente abbiamo ottenuto la rappresentazione di una superficie cubica con punto doppio, sopra un piano α, dove le immagini delle sezioni piane costituiscono un sistema di cubiche φ passanti per sei punti posti sopra una conica. E conviene osservare che reciprocamente questo sistema rappresentativo

$$\lambda_1\varphi_1(x_1x_2x_3) + \lambda_2\varphi_2(x_1x_2x_3) + \lambda_3\varphi_3(x_1x_2x_3) + \lambda_4\varphi_4(x_1x_2x_3) = 0$$

può essere assegnato ad arbitrio (con la condizione che vi siano 6 punti base sopra una conica): infatti ponendo

$$X_i = \varphi_i(x_1x_2x_3) \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

si costruisce una superficie F, rappresentata punto per punto sul piano in guisa che le immagini delle sezioni piane sono le cubiche φ, secantisi a due a due in tre punti variabili: da ciò risulta che la F è una superficie incontrata da una retta (intersezione di due piani) in tre punti, e perciò d'ordine 3; si vede poi che la F possiede un punto doppio O, corrispondente alla conica fondamentale del sistema $|\varphi|$: infatti vi sono ∞^2 cubiche φ spezzate nella detta conica e in una retta, a cui rispondono piani di una stella di centro O, e le rette per O segano F in un sol punto variabile.

Ora si consideri un sistema lineare ∞^3 di cubiche φ passanti per sei punti base 1, 2, 3, 4, 5, 6, in posizione generica, lasciando cadere la condizione che essi appartengano ad una conica: la superficie F, definita come innanzi, risulta ancora del terz' ordine, ma priva di punti doppi; infatti, senza esaminare per quali legami fra i punti fondamentali possa sorgere un punto doppio di F, appare qui che il sistema delle superficie F così rappresentate contiene entro di sè il sistema ∞^{18} dei monoidi, ed è ∞^{19}, sicchè la rappresentazione data si riferisce alla superficie cubica F_3 affatto generale.

Che una superficie F_3 senza punti doppi si rappresenti sempre biunivocamente su un piano α (in guisa che le immagini delle sezioni piane siano le cubiche per 6 punti del piano) può apparire tanto più sorprendente, perchè ciò è impossibile ad ottenersi mediante proiezione da un punto. Ma in diversi modi si può dare una costruzione diretta che faccia corrispondere ad ogni punto di F_3 un punto del piano, con inversione parimente univoca. Il modo più semplice è offerto dal *metodo della proiezione sghemba*.

Si ricordi che la F_3 generale (cioè senza punti doppi) contiene 27 rette (cfr. L. 3°, § 19, vol. II, pag. 155) fra cui si possono scegliere due rette sghembe a e b. Per ogni punto P di F_3 passa una retta incidente ad a e b, che va ad incontrare un dato piano α in un punto P', e viceversa per P' passa una sola retta incidente ad a e b che incontra F_3, fuori di queste rette, soltanto nel punto P.

Secondo questa costruzione, le immagini delle sezioni piane di F_3 risultano in generale quartiche; ma si ottiene la precedente rappresentazione mediante cubiche per 6 punti, quando si assume un piano α passante per una terza retta c di F_3 incidente ad a e b, che sappiamo esistere certo sulla F_3 generale [1].

Infatti le rette incidenti ad a e b e a una cubica sezione

[1] Del resto il sistema rappresentativo delle cubiche si deduce dal sistema delle quartiche (che possiede in generale due punti base doppi e cinque punti base semplici) mediante una trasformazione quadratica. È opportuno che lo studioso si eserciti a trovare la rappresentazione piana più generale della F_3 mediante quartiche, di cui qui è fatto cenno, e a indicarne la trasformazione quadratica riduttrice. Cfr. ENRIQUES: « Lezioni di Geometria descrittiva », § 71.

piana di F_3 (la quale incontra a e b in due punti) formano una rigata di grado $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 = 4$, che contiene c e perciò sega il piano α secondo una cubica. Si vede poi che queste cubiche immagini delle sezioni piane di F_3 passano per i due punti comuni a c e alle rette a e b che sono doppie per la rigata, e inoltre per altri 4 punti fissi, tracce per altrettante rette di F_3 incidenti ad a e b.

Quest' ultima osservazione risulta dalle proprietà di incidenza delle 27 rette di una superficie cubica per cui vi sono 5 rette incidenti ad a e b (¹); ma senza richiamare tali proprietà basta notare che il sistema rappresentativo di F_3 deve avere 6 punti base, perchè le curve di esso si seghino a due a due in 3 punti variabili. Così appare che, con qualunque metodo si sia riferita la superficie cubica al piano per modo che le immagini delle sezioni piane risultino cubiche, due di queste devono avere sei intersezioni fisse, e perciò il sistema rappresentativo deve possedere 6 punti base semplici (distinti o infinitamente vicini) o in particolare un punto doppio A e due punti base semplici: ma in tal caso, le sezioni piane di F_3 essendo di genere zero, la superficie possiede una retta doppia e risulta una rigata: le cui generatrici vengono rappresentate dalle rette per A.

La costruzione precedente ci ha condotto a rappresentare sul piano, mediante un sistema di cubiche, immagini delle sezioni piane, la superficie cubica F_3 affatto generale, a cui appartengono 27 rette distinte. Senza bisogno di esaminare minutamente quando e come la costruzione stessa si applichi nei vari casi particolari, basterà osservare che:

1) Le 27 rette di F_3 rimangono sempre distinte fino a che la superficie non acquisti punti doppi. Infatti queste rette hanno come proiezioni, da un punto generico O di F_3, 27 bitangenti della quartica immagine del contorno apparente (la 28-*esima* è la traccia del piano tangente in O), e tali bitangenti rimangono certo distinte fino a che la quartica non acquisti punti doppi: che è impossibile, se non vi è un punto doppio sopra F_3, quando si supponga che nessuna retta di F_3 passi per O.

(¹) Nel L. 3°, § 19 (vol. II, pag. 156) si è rilevato che ogni retta a appartiene a 5 trilateri di F_3, ed è ovvio che ogni trilatero contiene una retta incidente ed una sghemba a b.

2) La superficie cubica F_3 dotata di un punto doppio O (che non sia triplo) si rappresenta sul piano per proiezione da O; come si è visto, e poichè in O confluiscono due rette distinte o infinitamente vicine di F_3, questa proiezione centrale appare come caso limite della proiezione sghemba del caso generale. Il sistema rappresentativo risulta sempre un sistema di cubiche, e, soltanto nel caso delle F_3 rigate, possiede un punto base doppio in luogo di quattro fra i punti base semplici [1].

3) Quando la F_3 acquisti un punto triplo essa diventa un cono, e la rappresentazione di questo sopra il piano riesce impossibile, a meno che il cono stesso non possegga una generatrice doppia (riducendosi il suo genere da uno a zero). Infatti se il cono di genere uno potesse — in qualunque modo — essere rappresentato punto per punto sopra il piano, alle generatrici del cono corrisponderebbero nel piano le curve di un sistema ∞^1 di genere 1, soddisfacente alla condizione che per un punto generico ne passi una; ma, per il Teorema di Lüroth applicato all' involuzione segata sopra una retta, questa proprietà caratterizza nel piano i fasci lineari (cfr. L. 2°, § 14, vol. I, pag. 231), che sono enti razionali.

Riassumendo enunceremo che: *Ogni superficie cubica, che non sia un cono ellittico, si può rappresentare sul piano mediante un sistema di cubiche con 6 punti base* (distinti o infinitamente vicini o ridotti ad un punto doppio e due semplici).

La rappresentazione della superficie F_3 mediante il sistema delle cubiche piane φ per sei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, comunque sia ottenuta, mette in evidenza le 27 rette appartenenti alla superficie cubica generale e le loro relazioni di incidenza. In breve basti dire che codeste rette sono rappresentate:

1) dai 6 punti base 1, 2, 3, 4, 5, 6 (supposti distinti), e più propriamente dai loro intorni del prim' ordine, poichè ogni φ possiede nel punto 1 una tangente, e quindi all' intorno di 1 risponde su F_3 una curva che incontra i piani in un punto variabile;

2) dalle $\binom{6}{2} = 15$ rette che congiungono a due a due

(1) In tal caso il sistema rappresentativo si può ridurre, con una trasformazione quadratica, e un sistema lineare ∞^3 di coniche per un punto (Cfr. Enriques, l. c.).

i 6 punti fondamentali, e segano le φ, fuori di questi, in un punto variabile;

3) e dalle $\binom{6}{5} = 6$ coniche che passano per cinque punti fondamentali (e non per il sesto), le quali pure incontrano le φ in un sol punto variabile.

Qui riesce opportuno *precisare* un'osservazione fatta innanzi, rilevando *come il numero delle 27 rette si riduca quando la F_3 acquisti un punto doppio.* Infatti le 27 rette si riducono a 21 quando accada una delle seguenti circostanze:

1) Se il punto fondamentale 2 diventa infinitamente vicino al punto 1, nel qual caso le ∞^2 φ costrette ad avere ivi una tangente generica acquistano un punto doppio, segandosi fuori di questo in un solo punto variabile: in questo caso le 4 rette 2 3, 2 4, 2 5, 2 6, vengono a coincidere con le 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, e così vengono a coincidere le due coniche 1 3 4 5 6 e 2 3 4 5 6; ma d'altra parte, per ciò che è osservato innanzi, l'intorno del punto 1 non rappresenta più una retta, bensì un punto doppio, (centro della stella di piani corrispondenti alle ∞^2 φ passanti doppiamente per 1); invece l'intorno del punto 2, che diventa ora del second'ordine rispetto a 1, rappresenta sempre una retta.

2) Se tre punti fondamentali 1, 2, 3 vengono su una retta (fondamentale), cui risponde un punto doppio su F_3.

3) Se i sei punti fondamentali vengono sopra una conica, che — come si è visto — rappresenta un punto doppio di F_3.

Lo studioso noti come questi tre casi si riducano l'uno all'altro mediante trasformazioni quadratiche, che abbiano come fondamentali tre punti base delle φ.

Dall'esame delle rette appartenenti alle F_3 si passa subito a quello delle *coniche.* La rappresentazione piana ne fornisce 27 *sistemi associati alle* 27 *rette,* in quanto che una conica è sezione di F_3 con un piano che ne contiene una retta. Si avranno dunque: 6 fasci corrispondenti ai fasci di rette per uno dei punti 1, 2,.... 6; 15 fasci corrispondenti ai fasci di coniche per 3, 4, 5, 6, etc.; e 6 fasci corrispondenti ai fasci di cubiche passanti doppiamente per 1 e semplicemente per 2, 3, 4, 5, 6, etc. E un fascio d'un tipo si ridurrà a quello d'un altro mediante una trasformazione quadratica.

Passiamo a ricercare le *cubiche gobbe appartenenti a F_3:* vediamo che esse si distribuiscono in 72 *reti omaloidiche* (cioè costituite di curve secantisi a due a due in *un* punto). Infatti le curve immagini sul piano rappresentativo dovranno avere tre intersezioni variabili colle cubiche per 1, 2, 3, 4, 5, 6, e quindi apparterranno a una delle seguenti reti omaloidiche:

la rete delle rette del piano;

$\binom{6}{3} = 20$ reti di coniche per 1, 2, 3, etc.;

$6 \cdot 5 = 30$ reti di cubiche passanti doppiamente per 1 e semplicemente per 2, 3, 4, 5 ma non per 6, etc.;

$\binom{6}{3} = 20$ reti di quartiche con tre punti doppi 1, 2, 3 e tre punti semplici 4, 5, 6, etc.;

la rete, in fine, delle quintiche che passano doppiamente per 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Queste reti, riferite al piano rigato, conducono a 72 *rappresentazioni della F_3, proiettivamente distinte*, in cui il sistema rappresentativo delle sezioni piane è egualmente costituito da cubiche per sei punti.

Si noti anche che le suddette reti vengono associate a coppie, dove *due cubiche associate sono sezioni complementari di F_3 con una quadrica*: ciò appare a chi consideri che le ∞^9 sestiche piane passanti doppiamente per 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono immagini delle sezioni quadriche di F_3.

Qui conviene invitare lo studioso ad osservare che, quando la superficie F_3 acquisti dei punti doppi, il numero delle reti di cubiche gobbe sopra di essa si riduce, ma rimane sempre *almeno una* rete di cubiche *gobbe*, finchè la F_3 non diventi rigata, ovvero non acquisti un *punto doppio uniplanare* così *specializzato* che per esso passi una sola retta, cioè tale che i tre fasci di sezioni tacnodate per esso, le quali corrispondono ai tre punti doppi infinitamente vicini ([1]), vengano a coincidere: in questo caso infatti il sistema rappresentativo sul piano viene costituito dalle cubiche φ passanti per i sei punti comuni a una φ e a una sua tangente di flesso contata due volte.

L'esistenza d'una rete di cubiche gobbe sopra F_3 assume speciale importanza grazie al seguente teorema:

Se da tre punti (semplici) A, B, C della superficie si mandano le corde relative a ciascuna cubica gobba K d'una rete trac-

([1]) Cfr. L. 4°, § 36, vol. II, pag. 597.

ciata su quella, si ottengono tre stelle omografiche; e la superficie viene generata come luogo delle intersezioni dei piani omologhi di queste stelle. Tale generazione proiettiva appartiene ad ogni superficie cubica non rigata, fatta eccezione per il caso che essa possegga un punto uniplanare per cui passi una sola retta.

Per dimostrarlo, si osservi anzitutto che la corrispondenza stabilita fra le stelle A, B, C e la rete delle cubiche K è biunivoca, poichè vi è una sola corda per A ad una K, e reciprocamente una retta per A sega F_3 in due punti per cui passa *una* K. Dopociò consideriamo le cubiche della rete di F_3 come sezioni delle quadriche per una cubica complementare K', e facciamo vedere che ai raggi di un fascio, in un piano π per A, rispondono le cubiche K per un punto fisso Q (costituenti un fascio entro la rete). Infatti segando F_3 con π si ha una cubica ellittica f_3 sopra cui le K determinano una g_3^2, che si può segare mediante le coniche che passano per i tre punti, T_1 T_2 T_3, tracce di K'; quindi le terne della g_3^2 costrette a contenere due punti P_1 e P_2 di F_3 allineati con A passano di conseguenza per un punto fisso Q di f_3, che risulta comune a tutte le coniche per T_1 T_2 T_3 P_1 P_2.

Pertanto si avrà fra le rette delle stelle A, B e C una corrispondenza biunivoca tale che a ogni fascio di rette per A corrisponde (un fascio di cubiche e quindi) un fascio di rette per B e uno per C. È poi chiaro che tre piani omologhi π, π', π'', rispettivamente per A, B, C, si incontrano in un punto della superficie cubica, e cioè nel punto Q (che prima abbiamo costruito sopra π) che riesce base per il fascio di cubiche K corrispondente ai tre piani.

Nota storica. La teoria della superficie generale del terzo ordine si inizia con la scoperta delle 27 rette fatta da CAYLEY e da SALMON nel 1849 e con quella del *pentaedro* di SYLVESTER (1851) (cfr. L. 3°, § 10). La generazione della superficie mediante tre stelle proiettive di piani, rientra in una generazione generale delle superficie di dato ordine resa nota da GRASSMANN nel 1855, che fu particolarmente studiata in rapporto alla superficie cubica da SCHRÖTHER nel 1863, e poi da CREMONA [1]

[1] « Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre ». *Journal für Math.* Bd. 68 (1868). Opere, tomo III, pag. 1.

e Sturm [1], nelle loro fondamentali memorie premiate dall'Accademia di Berlino del 1866, in cui vengono dimostrate le proprietà semplicemente enunciate da Steiner [2] nel 1857.

A rigore Grassmann giustifica soltanto la proposizione diretta che « tre stelle proiettive di piani generano una superficie cubica », mentre la descrizione effettiva di una superficie cubica data è stata conseguita da Cremona (completata da Sturm nel 1905); nella forma da noi esposta innanzi il teorema si trova in Sturm.

Tuttavia il fatto che la generazione con tre stelle proiettive di piani conduca alla superficie cubica più generale, risulta da ciò che la suddetta generazione porta a scrivere l'equazione della superficie cubica:

$$1) \qquad \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \\ c_x & c'_x & c''_x \end{vmatrix} = 0,$$

dove i termini del determinante sono forme lineari nelle $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$; e in questa rientra in particolare l'equazione canonica di Cayley-Salmon

$$2) \qquad y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & x_1 \\ z_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Appunto in tal forma la cosa era nota a Schläfli fin dal 1854, e fu poi anche oggetto di corrispondenza fra Schläfli e Steiner [3]. Il modo più rapido di giustificare l'equazione canonica 1) o, in particolare, la 2), è un computo di costanti; il secondo tipo dice che una superficie cubica generale appartiene ad un fascio contenente due terne di piani: e combinando linearmente due terne di piani (dipendenti ciascuna da 9 parametri) si ottengono appunto ∞^{19} superficie cubiche.

La circostanza notevole che la generazione proiettiva della F_3 (non rigata) ammetta un caso d'eccezione è stata rilevata dal Segre (1906) [3].

(1) « Synthetische Untersuchungen über Flächen 3 Ordnung » Lipsia, 1867.

(2) Werke, II, pag. 649.

(3) Cfr. Segre. *Archiv der Math. und Phys.*, 1906.

Aggiungiamo che, in connessione ai resultati generali di Grassmann, Steiner ha messo in luce altre notevoli generazioni della superficie cubica, su cui qui non ci indugeremo.

La rappresentazione piana della F_3 è stata scoperta contemporaneamente da CLEBSCH [1] e CREMONA nel 1866, partendo dalla generazione proiettiva innanzi indicata. Clebsch deduce da questa la risoluzione analitica dell'equazione cubica omogenea in 4 variabili, ponendo in sostanza una corrispondenza proiettiva fra una delle stelle generatrici di piani e il piano rappresentativo; per Cremona la rappresentazione viene subordinata ad una trasformazione birazionale cubica dell'intiero spazio. La rappresentazione diretta della superficie cubica, che sopra abbiamo ottenuto mediante la proiezione sghemba di Steiner, s'incontra in STURM [2].

Un'esposizione analitica della teoria delle superficie cubiche trovasi in SALMON-FIEDLER « Analitische Geometrie des Raumes », vol. II, 3ª ed., Lipsia, 1880; un'esposizione sintetica in REYE « Die Geometrie der Lage », vol. III, 4ª ed., Lipsia, 1910.

Per più ampie notizie sull'argomento rimandiamo all'articolo « Flächen dritter Ordnung » di L. BERZOLARI, che costituisce il Cap. 34 dell'ultima edizione del Pascal's Repertorium.

§ 52. Curve gobbe tracciate sopra una superficie cubica. — La rappresentazione piana della superficie cubica generale, che abbiamo svolta nel precedente paragrafo, reca un importante contributo alla teoria generale delle curve gobbe, permettendo di *determinare le classi di curve che appartengono a superficie cubiche.* Infatti, seguendo il procedimento che abbiamo spiegato nei casi $n = 1, 2, 3$, la ricerca delle curve C_n, di un dato ordine n, appartenenti ad una F_3, si riduce a quella delle curve piane C_m', di un ordine incognito m, che segano le cubiche φ (immagini delle sezioni piane) in n punti variabili, e quindi posseggono nei punti fondamentali 1, 2, 3, 4, 5, 6, delle molteplicità $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, tali che

$$3m - \sum_{i=1}^{i=6} x_i = n.$$

(1) Journal für Math., t. 65.

(2) « Die Lehre von den geom. Verwandtschaften » II, Lipsia, 1908.

Il problema è così ricondotto a un' equazione di analisi indeterminata, cui si debbono aggiungere le disuguaglianze relative alla effettiva esistenza della C_m' irriducibile.

Qui conviene notare che può sempre supporsi $m \leq n$, perchè se $m > n$, le quintiche passanti doppiamente per i punti 1, 2,... 6, segano le C_m' in $2n - m < n$ punti variabili, e quindi la trasformazione cremoniana del quint'ordine in cui a codeste quintiche corrispondono le rette conduce a un'altra rappresentazione della F_3, in cui ancora le immagini delle sezioni piane sono cubiche (per sei punti) e dove la nostra C_n è rappresentata da una curva d' ordine

$$m' = 2n - m < n.$$

Anzi più precisamente si può dimostrare che: ***data una curva irriducibile C_n, d' ordine n, appartenente ad una superficie cubica F_3, si può sempre rappresentare la F_3 sul piano in guisa che la C_n abbia per immagine una curva dello stesso ordine n*** (e quindi la C_n potrebbe particolarizzarsi in modo che appartenga a un monoide cubico, senza contenerne il centro).

Per giustificare questa utile osservazione, procederemo induttivamente, supponendo che essa sia stabilita per i valori inferiori ad n, poichè si è già visto che essa vale per i primi valori di n: $n = 1, 2, 3$.

Mostreremo che la nostra C_n si può sempre ritenere come intersezione parziale di F_3 con una superficie F_m di ordine $m < \frac{2n}{3}$, sicchè l' intersezione complementare sia una curva K_{3m-n} d' ordine $3m - n < n$, quindi sceglieremo una rappresentazione piana di F_3 dove l' immagine di K sia dello stesso ordine $3m - n$; in conseguenza l' immagine della $C + K$, che è intersezione completa di una F_m, risulterà una curva d' ordine $3m$ spezzata in due parti d' ordini $3m - n$ e n, la seconda delle quali rappresenterà la C_n.

Per rendere effettiva la dimostrazione così indicata, resta solo da riconoscere l' esistenza di una F_m irriducibile passante per C_n, quando è $m < \frac{2n}{3}$.

A tal uopo si calcoli la dimensione del sistema di tutte le F_m dello spazio, che vale

$$\binom{m+3}{3} - 1,$$

e si noti che la dimensione della serie che esse segano sopra C_n è in ogni caso

$$r_m \leq nm,$$

sicchè, l'infinità delle F_m per C_n sarà almeno

$$\binom{m+3}{3} - 1 - (nm+1);$$

scriviamo che questo numero supera l'infinità delle F_m spezzate nella F_3 e in una qualunque superficie d'ordine $m-3$:

$$\binom{m+3}{3} - 1 - (nm+1) > \binom{m}{3} - 1.$$

A calcoli fatti questa disuguaglianza dà

$$m+1 \geq \frac{2n}{3},$$

come occorre per la nostra dimostrazione.

Possiamo dunque dire che la ricerca delle curve d'ordine n appartenenti a superficie cubiche (dove non si abbia a tener conto delle mutue relazioni delle diverse famiglie sopra una stessa superficie) dipende semplicemente dall'equazione di analisi indeterminata

$$3n - \Sigma x_i = n$$

cioè

$$\Sigma x_i = 2n.$$

Vogliamo valerci della rappresentazione piana delle superficie cubiche per *determinare tutte le curve gobbe d'ordine $n \leq 9$, per i più grandi valori del genere*; e potremo supporre $n > 5$, perchè per $n \leq 5$ la determinazione è già stata fatta innanzi. Per $n < 9$ possiamo comprendere nella nostra determinazione tutte le curve speciali, per cui $p > n-3$.

Per $n = 6$, una curva speciale C_6 ha il genere $p = 4$, ed è la curva canonica intersezione completa di una superficie cubica con una quadrica.

Per $n = 7$, una curva speciale C_7 ha il genere $p \geq 5$; ma se essa non sta sopra una quadrica, il suo genere è inferiore al valor massimo $\left[\frac{(7-2)^2}{4}\right] = 6$, e però vale $p = 5$; di conseguenza la serie segata dalle superficie cubiche sulla C_7 è una g^r_{21}, di dimensione $r \leq 16$, e vi sono per la C_7 (almeno) ∞^2 superficie cubiche. Dunque le C_7 cercate si trovano fra le intersezioni parziali di due superficie cubiche F_3, le quali avranno ulteriormente a comune una curva del secondo ordine, che *a priori* può supporsi una conica o una coppia di rette sghembe.

Ora senza ricorrere alle formule che danno il genere delle intersezioni parziali di due superficie (cfr. § 48), si vede qui che nella rappresentazione piana di una F_3 può assumersi come immagine della C_7, di genere $p = 5$, una C_7' la quale passi con le molteplicità *tre* per due punti fondamentali 1 e 2, e con la molteplicità *due* per i rimanenti punti fondamentali 3, 4, 5, 6, riuscendo così complementare di una conica per questi rispetto al sistema ∞^{18} delle C_9' che passano triplamente per i sei punti fondamentali, e che rappresentano le intersezioni complete della F_3 con le altre superficie cubiche dello spazio. Invero una C_7, intersezione residua della F_3 con un' altra superficie cubica per due rette sghembe (rappresentate dall' intorno del punto 1 e dalla conica 2, 3, 4, 5, 6), si può supporre rappresentata da una C_7' che abbia un punto 4-*plo* in 1 e un punto doppio nei rimanenti punti fondamentali 2, 3, 4, 5, 6, sicchè il suo genere risulta $p = 4$.

Per $n = 8$, una curva speciale C_8 ha il genere $p \geq 6$ e $p \leq 9$, sicchè in ogni caso la serie segata su C_8 dalle superficie cubiche è una g^r_{24} non speciale di dimensione $r \leq 18$; di conseguenza la C_8 appartiene ad almeno una superficie cubica, irriducibile o no. Ma per il valore massimo $p = 9$, sappiamo già che la C_8 appartiene ad una quadrica e quindi non può essere contenuta in una superficie cubica irriducibile. Restano da esaminare i valori $p = 8$, $p = 7$, $p = 6$.

Ora, per $p = 7, 8$ la nostra C_8 appartiene ad (almeno) ∞^1 superficie cubiche e quindi, se non sta sopra una quadrica, si presenterà come intersezione di due F_3 con una retta a comune; ma nella rappresentazione piana di una F_3 questa intersezione parziale può supporsi avere per immagine la curva C_8' che passa triplamente per i punti 1, 2, 3, 4 e doppiamente per i punti 5 e 6, onde risulta $p = 7$ (d' accordo col fatto che essa incontra in 4 punti la retta complementare e che il genere della curva composta, calcolato secondo la formula del § 37, pag. 425, vale 10). Si deduce che per $p = 8$ non vi sono altre C_8 che quelle *appartenenti ad una quadrica* (e secanti i due sistemi di generatrici in 3 e 5 punti); invece per $p = 7$ non è possibile costruire C_8 appartenenti ad una quadrica, e quindi *tutte le C_8 di genere $p = 7$ sono intersezioni parziali di due superficie cubiche con una retta comune.*

Per $p = 6$ si osservi anzitutto che non si trovano C_8 sopra una quadrica. Ora una C_8 sopra una F_3 irriducibile non può appartenere ad una seconda superficie cubica, poichè altrimenti risulterebbe l' intersezione parziale sopra determinata, che ha $p = 7$; ma per la C_8 passano (almeno) ∞^7 superficie F_4 del quart' ordine, irriducibili, fra le ∞^{34} superficie del quart' ordine dello spazio; e l' intersezione residua di una di queste F_4 con F_3 sarà una quartica C_4 variabile in un sistema di una certa dimensione x, che facilmente possiamo calcolare. Invero una F_4 che passi per $C_8 + C_4$ e contenga un altro punto di F_3 deve spezzarsi nella F_3 e in un piano residuo, sicchè

$$7 - x - 1 = 3,$$

ovvero

$$7 + \varepsilon - x - 1 = 3,$$

nel caso che le F_4 per C_8 fossero $\infty^{7+\varepsilon}$; onde si deduce in ogni caso

$$x \geq 3.$$

Ora vi sono sopra F_3 due specie essenzialmente diverse di sistemi di quartiche C_4: i sistemi ∞^4 delle C_4 ellittiche, sezioni delle quadriche per una conica, e i sistemi ∞^3 delle C_4 razionali, sezioni delle quadriche per due rette sghembe; nella rappresentazione piana, una C_4 della prima specie può assumersi rappresentata da una C_4' che passi due volte per i punti fondamentali 1 e 2, e semplicemente per i punti 3, 4, 5, 6. mentre una C_4 della seconda specie può assumersi rappresentata da una C_4' passante doppiamente per i punti 1, 2, 3, e semplicemente per 4 e 5. Quindi la C_8 intersezione residua di F_3 con una F_4 per una C_4 vien data rispettivamente nei due casi: da una C_8' passante doppiamente per 1 e 2 e triplamente per 3, 4, 5, 6, ovvero da una C_8' passante doppiamente per 1, 2, 3, triplamente per 4 e 5, e quadruplamente per 6. Ma la prima C_8 è quella di genere $p = 7$, già innanzi determinata come intersezione parziale di due F_3; mentre la seconda C_8 ha precisamente il genere $p = 6$. In conclusione *la* C_8 *con* $p = 6$ *si ottiene come intersezione parziale di una* F_3 *con una* F_4 *passante per una quartica di seconda specie.*

Per $n = 9$ ci limiteremo a cercare le curve in cui il genere assume i valori $p = 12, 11, 10$.

Anzitutto sappiamo che le C_9 di genere massimo $p = 12$ appartengono ad una quadrica, segando le generatrici dei due sistemi in 4 e 5 punti.

Per $p = 11$ abbiamo la sorpresa di trovare che *non esistono curve gobbe d'ordine* 9 (senza punti doppi). Infatti si vede anzitutto che non vi sono curve di questo genere sopra una quadrica: invero quella di genere immediatamente inferiore a 12 è la C_9 (sezione d'una F_6 per 3 generatrici di F_2) che sega le generatrici in 3 e 6 punti, per cui il genere vale $p = 10$. In secondo luogo, se esistesse una C_9 con $p = 11$, si trova che per essa dovrebbero passare almeno ∞^2 superficie cubiche irriducibili: il che è assurdo, perchè una C_9 comune a due F_3 è la curva base di un fascio di F_3 (ogni superficie cubica per C_9 costretta a contenere un altro punto di una di queste F_3 coincide con essa).

Restano a costruire le C_9 di genere $p = 10$. Abbiamo già veduto che esiste una famiglia di C_9 siffatte appartenenti ad una quadrica, e si verifica che il numero dei parametri da cui dipendono queste C_9 vale $27 + 9 = 36$ $(= 4 \cdot 9)$. Ora per una C_9 con $p = 10$ passano almeno ∞^1 superficie cubiche, e quindi, se la C_9 non sta sopra una quadrica, essa risulta l'intersezione completa di due F_3 irriducibili: effettivamente questa intersezione completa ha il genere $p = 10$, ed è suscettibile di variare in una famiglia contenente 36 parametri (36 essendo l'infinità dei fasci contenuti nel sistema ∞^{19} delle superficie cubiche dello spazio).

La conclusione a cui siamo arrivati è molto istruttiva:

Per $n = 9$ *esistono due famiglie distinte di curve* C_9 *di genere* $p = 10$, *contenenti egualmente* $4 \cdot 9 = 36$ *parametri, cioè: le intersezioni complete di due superficie cubiche, e le* C_9 *sezioni ulteriori di una quadrica e di una superficie del sesto ordine per tre rette sghembe* [1].

Secondo HALPHEN, queste due famiglie di $C_{9,10}$ si possono distinguere introducendo un nuovo carattere, che desi-

[1] WEYR: Dissertazioni di Gottinga, 1873; HALPHEN: *Bullettin de la Société Mathématique*, 1874.

gneremo con ν, cioè l'ordine minimo di un cono che debba contenere le $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ corde passanti per un punto: qui per entrambe le $C_{9,10}$ si ha $d = 18$, ma per quelle della prima famiglia $\nu = 4$ (§ 47, pag. 526), mentre per quelle della seconda $\nu = 5$.

§ 53. **Notizia sulla classificazione delle curve gobbe.** — Dopochè Salmon ebbe distinto le curve del quart' ordine di genere 0 e 1 (1850), le curve del quarto e del quinto ordine sono state determinate da Cayley per mezzo della rappresentazione monoidale (1862-64), quelle del quinto, sesto e settimo ordine da Weyr (1873-74) sebbene queste determinazioni non siano complete. Quindi Weyr e Halphen, come è detto innanzi, scoprirono la circostanza notevole che esistono due tipi distinti di curve del nono ordine e di genere dieci (1873, 74).

Ora gli esempi che così si traggono dalle curve dei primi nove ordini, che abbiamo esaminato nel precedente paragrafo, rientrano in alcuni teoremi generali relativi alla classificazione delle curve gobbe appartenenti a superficie di dato ordine: il qual problema è stato trattato da Halphen e Noether nelle loro memorie fondamentali del 1882.

Così la circostanza che le curve d'ordine $n = 8, 9$, effettivamente esistenti sopra una superficie cubica irriducibile, devono avere il genere inferiore di più che un' unità al massimo $\left[\frac{(n-2)^2}{4}\right]$, rientra nel generale

Teorema di Halphen: *appartengono ad una quadrica non soltanto le curve d' ordine n per cui il genere p riceve il valore massimo*

$$p = \left[\frac{(n-2)^2}{4}\right],$$

cioè con

$$d = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]$$

punti doppi apparenti, ma *anche tutte le curve per cui*

$$p > \frac{(n-1)(n-2)}{6},$$

cioè con $d < \left[\frac{(n-1)(n-2)}{3}\right]$ punti doppi apparenti.

Pertanto *nella classificazione delle curve d' ordine n si presentano delle lacune per i valori del genere p compresi fra*

$$\left[\frac{(n-2)^2}{4}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{(n-1)(n-2)}{6}\right]$$

(limite inferiore escluso): i valori possibili di p corrispondendo ai valori interi di x per cui riesce

$$(x-1)(n-x-1) > \frac{(n-1)(n-2)}{6}.$$

Un esempio di ciò si è presentato nella classificazione delle curve d' ordine 9, dove si è trovato mancare il caso $p = 11$.

HALPHEN ha poi dimostrato che *per ogni valore di*

$$p \leq \left[\frac{(n-1)(n-2)}{6}\right]$$

esistono sempre curve d' ordine n e genere p appartenenti ad una superficie cubica F_3; anzi per

$$p > \left[\frac{n^2+3}{8}\right]$$

cioè per

$$d < 3\left[\frac{(n-2)^2}{8}\right],$$

queste curve esauriscono tutte le possibili famiglie di $C_{n,p}$; vale a dire:

Ogni curva d' ordine n, di genere

$$p > \left[\frac{n^2+3}{8}\right]$$

appartiene ad una superficie cubica (irriducibile o no).

Questa proposizione si estende, e si ottengono così dei criteri generali secondo cui le curve $C_{n,p}$, per le quali p riesce superiore a un certo limite, appartengono a superficie di un dato ordine m: tali risultati s' incontrano in HALPHEN, NÖTHER e VALENTINER.

Rileveremo qui un bellissimo

Teorema di NÖTHER. *Le curve di genere massimo fra quelle di dato ordine che appartengono a una superficie F,* *sono sezioni di F con una superficie Φ passante per una curva piana* (che può essere intersezione completa o parziale di questo piano).

Infine diciamo qualcosa della ricerca dei *caratteri capaci di definire le diverse famiglie di curve* $C_{n,p}$.

In seguito all' esempio relativo alle due famiglie distinte di $C_{9,10}$, di cui già abbiamo discorso, HALPHEN ha introdotto per la classificazione un nuovo carattere — che noi abbiamo designato con ν — cioè l' ordine minimo d' un cono che contenga le $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ corde della curva uscenti da un punto: mediante il quale si esprimono alcuni dei teoremi cui sopra abbiamo accennato. E CAYLEY (1) (1892-93) ha messo in luce alcune interessanti condizioni d' esistenza per le famiglie di curve con dati caratteri n, p, ν: p. es. l' esistenza delle curve C coi caratteri $n = 9$, $p = 12$ (cioè $d = 15$), $\nu = 4$, richiede che le 16 corde costituiscano il gruppo base d' un fascio di coni del quart' ordine.

Ma *i caratteri n, p, ν non bastano* ancora per la classificazione delle curve gobbe; infatti già per $n = 15$, $p = 28$ (cioè $d = 63$), $\nu = 9$, esistono due diverse famiglie di curve, che lo stesso Halphen ha indicate, e ulteriormente distinte.

Infine l' analisi approfondita della questione fatta da Halphen conduce a ritenere non inverosimile che una classificazione completa delle curve gobbe esiga l' introduzione di infiniti caratteri numerici.

Viste le difficoltà che presenta la classificazione delle curve gobbe secondo i criteri spiegati innanzi, ZEUTHEN ha avuto l' idea di ricorrere, per tale scopo, alla ricerca delle *forme degeneri* costituite da *n-lateri* sghembi connessi: se una curva d' ordine n e genere p degenera in un *n-latero* con un certo numero r di vertici (punti comuni a due rette), fra cui s ($< r$) appariscano punti doppi *propri* e $r - s$ come limiti di punti doppi apparenti, la formula che dà il genere della curva spezzata sarà $p = s - (n - 1)$.

Ora si chiede « se e come tutte le curve (irriducibili) di ordine n possano ottenersi a partire da *n-lateri* sghembi connessi, con $r = n - 1$, $n \ldots$ vertici, ritenendo un certo numero

(1) « Papers » v. pag. 613, XIII, pag. 468.

di questi come punti doppi propri e i rimanenti come impropri », o in particolare « se tutte le curve d'ordine n e genere p possano ottenersi a partire da *n-lateri* connessi con $r = p + n - 1$ vertici (senza punti doppi propri) ».

Questo programma di ricerca appare in occasione d'un concorso bandito dall'Accademia delle Scienze di Copenhagen nel 1901 (dove si mirava più strettamente a problemi d'ordine numerativo). Ma la questione posta a concorso « se ogni famiglia di curve contenga forme degeneri costituite da *n-lateri* sghembi » rimase allora senza risposta, e solo nel 1907 fu risoluta dal Brill per $p \leq 2$. Severi ha ripreso tale questione nelle sue Note dell'Accademia dei Lincei « Sulla classificazione delle curve algebriche....; del 1915 ». In queste Note e nella Anhang G. delle egualmente citate « Vorlesungen » (dove lo studio viene esteso alle curve iperspaziali) si dimostra precisamente che « *in ogni famiglia di curve gobbe d'ordine n e genere p, con moduli generali, esistono forme degeneri costituite da n-lateri connessi dotati di $p + n - 1$ vertici* ».

Anche in ogni famiglia di curve *a moduli singolari* esistono forme degeneri costituite da *n-lateri* (connessi), ma in questo caso, che è il più interessante per il nostro problema di classificazione, sembra più difficile provare la cosa essenziale che esistono *n-lateri* dotati soltanto di $p + n - 1$ vertici, sicchè « tutte le curve d'ordine n (e genere p) possano sempre ottenersi a partire da *n-lateri* connessi con $p + n - 1$ vertici » e soprattutto che « ogni *n-latero* connesso con $p + n - 1$ vertici appartiene ad una famiglia di curve irriducibili di genere proprio uguale a p (e non minore di p) ».

Per mostrare come la considerazione delle forme degeneri varrebbe a risolvere il problema della classificazione riporteremo infine l'esempio delle curve $C_{9,10}$, d'ordine 9 e genere 10, addotto da Severi. I due tipi distinti di $C_{9,10}$ che sopra abbiamo riconosciuto, corrispondono:

1) al 9-*latero* costituito da 3 rette sghembe e da 6 rette incidenti ad esse;

2) al 9-*latero* intersezione di una superficie cubica con una terna di piani tritangenti (o più semplicemente al 9-*latero* intersezione di due triedri).

In ciascuno dei due casi si hanno precisamente 18 vertici.

Richiamiamo infine esplicitamente l'osservazione che pure s'incontra in Severi che, *a priori*, due *n-lateri* non isomorfi possono appartenere alla medesima famiglia. Così, nell'esempio precedente, occorre dimostrare a posteriori che i due 9-*lateri* danno luogo a due famiglie distinte.

Per più ampie notizie intorno alle curve gobbe rimandiamo ai due articoli di L. Berzolari citati in principio.

Addizioni.

1. **Sul teorema dell'** $Af + B\varphi$ (§§ 15, 16, 47). — Il concetto della dimostrazione di questo teorema che abbiamo adottato nel testo appartiene alla signora ANGAS SCOTT: « A proof of Noether's fundamental Theorem » (Math. Annalen 52, 1899). Estensioni del teorema alle superficie e varietà a più dimensioni sono state date, dopo NOETHER, da SEVERI, nei Rendiconti Lincei, 2 febbraio 1902, e negli Atti dell'Accademia di Torino, 31 dicembre 1905.

2. **Sulle curve con infinite trasformazioni in sè** (§§ 26, 31). — Il teorema del § 31, che una curva con infinite trasformazioni birazionali in sè stessa è di genere $p \leq 1$ appartiene a SCHWARZ, NÖTHER e KLEIN. Anzitutto lo Schwarz (Journal für Math., t. 87, 1879) dette il teorema per le curve che ammettono un gruppo *continuo* di trasformazioni, e una lacuna della sua dimostrazione fu poi colmata dal Nöther (Math. Annalen, t. 20 e 11, 1882-83)

Il Klein, in una lettera al Poincaré del 1882 (Acta Math., t. 7, 12) avvertiva che una serie infinita anche *discontinua* di trasformazioni permette già di concludere che il genere della curva vale $p \leq 1$. La dimostrazione svolta nel testo s'ispira a NÖTHER (l. c., t. 21), SEGRE (« Introduzione... », 1894, n. 88) e a CHISINI (Istituto lombardo, 1914).

La questione del numero di trasformazioni che possono appartenere ad una curva di genere $p > 1$, si collega alla ricerca del numero dei punti singolari *distinti* che si trovano sopra ad una curva di genere $p > 1$. A questo proposito HURWITZ (Math. Annalen, t. 41, 1892) valuta l'influenza che un punto singolare qualunque può avere sul numero dei punti d' iperosculazione della curva canonica e giunge a riconoscere che il numero dei punti singolari distinti è $\geq 2p+2$ (il segno di eguaglianza rispondendo al caso iperellittico). Limiti più alti sono stati dati dal SEGRE (Lincei, 1899) e dalla sig.na CIPOLLA (Lincei, 1905).

L' esistenza del *gruppo misto* ∞^1 *di trasformazioni della curva di genere* $p=1$, risulta dalla teoria delle funzioni ellittiche (*teorema d' addizione*). Lo studio geometrico di tale gruppo è stato svolto dal SEGRE nella Nota « Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche » (Atti dell' Acc. di Torino, 1889); questa trattazione è ripresa e semplificata nel nostro § 27.

La teoria delle funzioni abeliane conduce ad estendere le corrispondenze puntuali delle curve ellittiche colla considerazione delle corrispondenze tra gruppi di p punti sulla curva di genere $p>1$: lo studio geometrico di tale argomento trovasi in una Nota di CASTELNUOVO (Istituto lombardo, 15 dicembre 1892).

3. Sulla non esistenza di trasformazioni in sè delle curve a moduli generali (§§ 31, 36). — Il teorema che una curva a moduli generali di genere $p>2$ non possiede trasformazioni birazionali in sè stessa, è stabilito nel testo per $p=3$ (pag. 310), e risulta, in qualche modo, indirettamente dalla considerazione delle curve senza punti doppi (pag. 311); esso è stato poi esteso da $p=3$ a $p>3$ col metodo di degenerazione (pag. 413).

Vale la pena di aggiungere la prova diretta del teorema, che qui indichiamo.

Se una curva C_p di genere $p>2$ possiede trasformazioni in sè, essa deve ammettere una trasformazione ciclica d' ordine primo q (cfr. § 31, pag. 310). Quindi si trova su C_p una involuzione ciclica γ_q^1 di genere $\pi \geq 0$. Designando con δ il numero dei punti multipli (*q-pli*) dell' involuzione, avremo — per la formula di Zeuthen —

$$(2\pi-2)q+\delta(q-1)=2p-2.$$

Distinguiamo i due casi:

$$\pi=0, \quad \pi>0.$$

Nel primo caso

$$\delta = 2 + \frac{2p}{q-1} \leq 2 + 2p;$$

e i moduli della retta *q-pla* su cui viene rappresentata C_p saranno dati da $\delta - 3$ birapporti, con

$$\delta - 3 < 2p \leq 3p - 3 \qquad (p > 2):$$

dove $3p - 3$ è il numero dei moduli da cui dipende la più generale curva di genere $p > 1$ (cfr. § 33).

Nel secondo caso i moduli da cui dipende la curva *q-pla* di genere π su cui viene rappresentata la C_p saranno (tanto per $\pi > 1$ che per $\pi = 1$) $3\pi - 3 + \delta$;
ma

$$\left.\begin{aligned} 3\pi - 3 &\leq (2\pi - 2)q \\ \delta &\leq \delta(q-1) \end{aligned}\right\} \quad \pi \geq 1, \; q \geq 2$$

e quindi la formula scritta innanzi ci dà

$$3\pi - 3 + \delta \leq 2p - 2 < 3p - 3 \qquad (\text{per } p > 1).$$

Rileviamo esplicitamente che il teorema dimostrato contiene come corollario che « le curve di genere $p > 2$ di moduli generali non sono iperellittiche (cfr. pag. 99); anzi le curve iperellittiche sono caratterizzate entro la famiglia corrispondente al genere p, come curve particolari soddisfacenti a $3p - 3 - (2p - 1) = p - 2$ condizioni fra i moduli » (cfr. pag. 90, 115, 366, 382, 411).

4. **Sui punti razionali della cubica.** — Alla letteratura indicata nel § 32 si aggiunga:

A. Hurwitz « Ueber ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades ». Vierteljahrschrift der Naturforschende Gesellschaft in Zürich 1917.

In questa memoria (a pag. 226 del volume) è risolto con un effettivo esempio il dubbio critico affacciato nel nostro testo sull' esistenza effettiva di cubiche con infiniti punti razionali. E d' altra parte sono discussi in maniera approfondita numerosi esempi di cubiche con un numero finito di punti siffatti.

INDICI

INDICE ALFABETICO

(¹) Qui indicate nell' ordine del testo e non in quello alfabetico.

V

W

Y

Z

INDICE DEI CAPITOLI

LIBRO QUINTO

Curve e funzioni algebriche di una variabile.

Capitolo I

Le serie lineari sopra una curva.

Capitolo II

La geometria sopra le curve del piano e le trasformazioni cremoniane: evoluzione storica delle idee.

CAPITOLO III

Curve e trasformazioni.

CAPITOLO IV

Corrispondenze fra curve.

CAPITOLO V

Sulla teoria delle curve gobbe.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 37 riga 8 invece di g_n^s leggi g_m^s
A pag. 47 riga 9 invece di li lascia leggi si lascia
A pag. 53 riga 8 invece di g_4^1 leggi g_4^2
A pag. 69 riga 8 invece di δ_{r-1} leggi S_{r-1}
A pag. 332 riga 17 invece di >0 leggi $\beta>0$
A pag. 349 nota a piè pagina. Aggiungi: Anche a complemento del testo si veda. A. HURWITZ. Vierteljahrskrft der Zürcher Naturw. Ges. 1917.
A pag. 373 riga 1 invece di Brill o leggi Brill e
A pag. 374 riga 14-15 invece di Nota anzidetta leggi Nota anzidetta d'ENRIQUES dell'Aprile 1921
A pag. 395 riga 5 invece di $f(2p-2, p-1, p) = 2^{p-1}(2^p - p)$
leggi $f(2p-2, p-1, p) = 2^{p-1}(2^p - 1)$
A pag. 445 riga ultima del testo invece di gruppi leggi gruppi simili

Finito di stampare
il giorno 25 giugno 1924
nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi
in Bologna