
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Questioni riguardanti le Matematiche elementari

(III ed.) Zanichelli, Bologna, 1925. (Di Enriques: art. XII, Spazio e tempo davanti alla critica moderna, pp. 429-459.)



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 – Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

ARTICOLO DODICESIMO

Spazio e tempo davanti alla critica moderna, di FEDERIGO ENRIQUES a Roma.

§ 1. **Lo spazio per i Greci.** — La questione « che cos'è lo spazio? » non ha cessato di sollevare discussioni tra i filosofi fino dall'antichità. Nell'Articolo primo abbiamo già ricordato che PARMENIDE d'Elea (4° sec. a. C.) identifica *lo spazio* (l'ente) *colla materia* — qualitativamente indifferenziata — che lo occupa, la quale non lascerebbe posto a vuoti, il vuoto essendo concepito come « non ente ». Questa tesi dà luogo ad una doppia difficoltà: in quanto ponendo una materia compatta ed omogenea rende impossibile di assegnare una ragion sufficiente al processo cosmico; e d'altra parte, identificando lo spazio colla materia, fa apparire il moto dei corpi come puramente relativo; quest'ultima deduzione, sviluppata da PARMENIDE e specialmente dal suo scolaro ZENONE, ci è stata tramandata sotto una forma paradossale come « negazione del movimento ». (1)

LEUCIPPO di Mileto e DEMOCRITO d'Abdera, sostituiscono alla materia compatta un aggregato di *atomi*, ugualmente indifferenziati) e così risolvono insieme le due difficoltà sopra accennate: poichè lo *spazio vuoto* (il non-ente) diventa per essi qualcosa d'*esistente* di per sè, *indipendentemente dai corpi*, e quindi viene pôrto al moto di questi un sistema di riferimento, che possiamo dire assoluto.

Tali vedute, rispondenti al bisogno di costituire una scienza razionale del moto, s'inquadravano, del resto, in un elevato sistema scientifico, che — attraverso i progressi dei filosofi

(1) Cfr. ENRIQUES, *La relatività del movimento nell'antica Grecia*, in « Periodico di Matematiche » n. 2, Marzo 1921.

precedenti — aveva svolto il pensiero relativistico del vecchio ANASSIMANDRO di Mileto, sciogliendosi in gran parte dalla concezione geocentrica ed antropocentrica. Ma contro queste idee, secondo lo spirito di SOCRATE, reagisce la filosofia di PLATONE e d'ARISTOTELE.

La dottrina aristotelica — che doveva esercitare tanto vasta influenza durante il Medio Evo — riprende la negazione eleatica del vuoto, ma assegna ai corpi un *luogo naturale*, che ciascuno tende ad occupare, e che — pur serbandosi la nozione acquisita della rotondità della terra — è concepito secondo le apparenze della caduta dei gravi e del salire della fiamma.

Ora, sorvolando sulle discussioni dei filosofi medio-evali, vediamo il Rinascimento tornare — attraverso PLATONE ed ARISTOTELE — alle idee dei più grandi naturalisti che li precedono nella cultura greca.

§ 2. Opinioni sullo spazio di Descartes, Galileo, Newton e Leibniz. — Le concezioni degli antichi, sopra ricordate, si ritrovano ancora, nei secoli 17° e 18°, alla base dello sviluppo della scienza e del pensiero moderno.

RENATO DESCARTES, coll' idea d' una *materia estesa* priva di qualità, riempiente lo *spazio* ⁽¹⁾, non fa che riprendere la tesi della scuola d'Elea; e ne trae similmente la conseguenza della relatività del moto: sebbene a dir vero vi sia qualche difficoltà a accordare tale veduta col principio del movimento naturale in linea retta, che l'A. introduce al n. 39 del suo trattato.

Al contrario GALILEO GALILEI, pur senza discutere la questione filosofica e sebbene non osi accogliere apertamente l'atomismo democritico, sembra non rifiutare l'idea di uno *spazio vuoto*; e d'altra parte egli accoglie anche il « movimento assoluto », che — nel concetto di DEMOCRITO — sarebbe appunto definito come « movimento rispetto al vuoto ». Queste vedute vengono esplicitamente affermate da ISACCO NEWTON: ⁽²⁾ lo *spazio assoluto* che questi tiene per « sensorium Dei », è un essere in sè, a prescindere dai corpi che vi si muovono, e porge appunto una differenza al moto, che riceve così un senso ugualmente assoluto. Quanto alla materia, NEWTON adotta più o

(1) « Principia philosophiae » II, 11-30.

(2) Cfr. NEWTON *Principi di filosofia naturale*, con note critiche di F. Enriques e U. Forti ed. Stock, 1925.

meno esplicitamente, la supposizione atomica di DEMOCRITO, rinnovata dal suo contemporaneo ROBERTO BOYLE.

Ma GALILEO e NEWTON, cercando di soddisfare le esigenze della meccanica, non hanno approfondito il problema filosofico dello spazio, che invece forma oggetto della riflessione di GOFFREDO GUGLIELMO LEIBNIZ. La polemica epistolare di questi col newtoniano CLARKE spiega bene i pensieri del sommo filosofo tedesco. Non vi è spazio reale assoluto — dice chiaramente la seconda replica a CLARKE — vale a dire che lo *spazio non è qualcosa di definito in sè*, ma ha soltanto un senso relativo ai corpi come «*ordine delle coesistenze*», così come il *tempo* è l'«*ordine delle successioni*». E poichè CLARKE obietta che, se così fosse, un movimento dell'universo in linea retta non farebbe uscire i corpi dal luogo che occupano, LEIBNIZ (nella lettera seguente) spiega che difatti un movimento in linea retta comunicato a tutti i corpi non ha alcun senso; e questa interpretazione positivistica del principio di relatività di GALILEO, viene da lui ribadita e precisata nella quinta lettera (n. 52) ove afferma che il movimento dei corpi non può avere altro significato che quello d'un cambiamento osservabile dei loro rapporti: ed anche che, se non vi è cambiamento osservabile, non vi è affatto cambiamento.

§ 3. **La critica empiristica di Berkeley.** — Una veduta comune sembra collegare i filosofi cui sopra abbiamo accennato, in quanto sono, più o meno consapevolmente, dei razionalisti. La geometria sussiste per essi incondizionatamente, come verità di ragione. Si fa valere qui l'antico principio di PARMENIDE, DEMOCRITO e PLATONE, per cui il concetto viene assunto a criterio del vero. DESCARTES lo rinnova, proclamando il valore delle idee chiare e distinte, e così giustificando a priori le nozioni comuni, per la loro evidenza.

Ora, mentre GASSENDI e HOBBS discutono di questa facoltà d'intuizione concettuale che si vorrebbe conferire allo spirito umano — e riconducono il «*concepire*» all'«*immaginare*», cioè al richiamare le rappresentazioni sensibili — sorge l'idea che i principii a priori della scienza (e in particolare gli assiomi geometrici) sieno di natura logica. Per HOBBS: definizioni arbitrarie; per LEIBNIZ: definizioni o analisi dei concetti reali, e giudizi identici (o analitici), che sono le verità prime a cui

tutte le altre verità debbono ricondursi per mezzo delle definizioni. (1)

Ma contro questo logicismo, e in genere contro il razionalismo metafisico di cui esso esprime la forma più raffinata, si leva la critica degli empiristi inglesi. JOHN LOCKE non sa dividere l'apprezzamento di LEIBNIZ sui giudizi identici, ch'ei tiene per futili ed irrilevanti ai fini della conoscenza.

Però il colpo più forte viene recato al razionalismo dalla critica di GIORGIO BERKELEY. Il significato della quale verrà chiarito dalle considerazioni che seguono.

Giova anzitutto ricordare che l'elaborazione del concetto della materia presso i Greci (2) aveva portato a distinguere due ordini di proprietà, che LOCKE doveva poi denominare « qualità primarie e secondarie »: le qualità primarie — estensione, impenetrabilità ecc. — sono riguardate appartenere alle cose in se stesse e riflettersi nelle proprietà del concetto della materia estesa; invece le qualità secondarie — colore, odore, sapore ecc. — vengono considerate mere apparenze sensibili, pertinenti al soggetto che le percepisce. GALILEO e DESCARTES avevano accolto similmente questa concezione democritea che, come abbiamo accennato, è stata poi adottata e volgarizzata da LOCKE.

Ma l'analisi da BERKELEY istituita della « Theory of Vision », viene a toglierne il fondamento. Nemmeno le proprietà primarie, in ispecie le estensive, possono riconoscersi indipendenti dalle sensazioni del soggetto, chè anzi si riducono a sensazioni tattili e visive convenientemente associate. Perciò è affatto arbitrario ritenere il concetto della materia come rappresentante d'una realtà o d'un'esistenza ultrasensibile; tutta la realtà non è infine — per noi — che possibilità di sensazioni:

esse est percipi.

Critica penetrante e decisiva, per quanto paradossale, che — completata dall'analisi della causalità di DAVID HUME — rimane uno dei pochi acquisti sicuri della filosofia!

(1) Cfr. ENRIQUES, *Per la storia della logica*. Bologna, Zanichelli 1922 (Cap. II).

(2) Cfr. ENRIQUES, *Le venerabili proprietà della materia*, in « Periodico di Matematiche », 1922.

Aggiungasi che BERCKELEY, in opposizione a NEWTON, ha misurato le conseguenze della sua dottrina rispetto ai principii della meccanica. Il movimento è essenzialmente relativo, quello cosiddetto assoluto è privo di significato; così immaginando scomparsi tutti i corpi salvo uno solo, diventerebbe impossibile riconoscere qualsiasi movimento di questo; ed ugualmente se nell'universo esistessero soltanto due globi, sarebbe impossibile riconoscere il movimento della coppia intorno al comune centro di massa; ciò diventa possibile soltanto perchè è dato il cielo delle stelle fisse, e con riferimento alle diverse parti del cielo.

§ 4. Spazio e tempo secondo Kant. — La critica empiristica della scuola inglese nel secolo decimottavo, distruttiva del razionalismo metafisico, parve ad EMANUELE KANT minacciare anche la possibilità della scienza teorica. Svegliato — per opera di HUME — dal sonno dogmatico, KANT, rimprovera a costui di non avere considerato il problema della conoscenza in tutta la sua universalità; «se questo avesse fatto — dice nell'Introduzione alla critica della ragion pura (VI) — si sarebbe accorto che, secondo i suoi argomenti, non vi sarebbe più nemmeno la matematica pura, poichè questa contiene certo dei principii sintetici a priori, e il suo buon senso l'avrebbe quindi trattenuto dal concludere in tal modo».

Nel linguaggio di KANT, i giudizi *sintetici* si distinguono dai giudizi *analitici* perchè, a differenza di questi ultimi, aggiungono al soggetto qualcosa che non è contenuto logicamente nel suo concetto. I giudizi matematici, ed anche quelli che stanno a base della Meccanica o della Fisica pura, sono sintetici eppure a priori. Nella prima tesi KANT si accorda con LOCKE, negando ogni valore scientifico costruttivo ai giudizi identici di LEIBNIZ; ma per la seconda, si allontana dalla filosofia empirica della scuola inglese: la scienza è un fatto poichè si sono costruite la geometria d'EUCLIDE e la meccanica di NEWTON; il filosofo critico — non abbastanza critico per domandarsi fino a che punto o grado valgano queste costruzioni — le prende per verità necessarie, che oltrepassano la esperienza fornendo anzi il criterio interpretativo d'ogni esperienza possibile; e si chiede quindi su quale fondamento riposi tale criterio. La risposta è che lo spirito umano non

riceve passivamente le sensazioni, ma colla sua propria attività costruttiva trae dal loro caos un ordine, imponendo ad esse le forme a priori della sensibilità e le categorie dell' intelletto. Le forme della sensibilità sono: lo *spazio*, *ordine della sensibilità esterna*, e il *tempo*, *ordine della sensibilità interna*.

Per ciò che concerne la concezione kantiana dello spazio, la differenza in confronto a LEIBNIZ è puramente metafisica, e svanisce sul terreno della scienza positiva: perchè, in luogo d'un ordine di coesistenza delle cose in sè, KANT pone un ordine delle sensazioni, che ha una realtà puramente fenomenale; ma questa realtà non è meno rigidamente determinata dalle leggi dello spirito che — per la circostanza di oltrepassare il criterio logico — non restano meno necessarie. Così — secondo la dottrina kantiana — i principii della geometria euclidea s'impongono alla nostra esperienza, che, fuori di essi, non sarebbe affatto possibile. X

§ 5. **La necessità degli assiomi geometrici di fronte alla geometria non euclidea.** — Ora la geometria non-euclidea, (Art. 11) già con GAUSS e poi con LOBACEFSKI viene a contraddire al tempo stesso il logicismo leibniziano e la dottrina kantiana dello spazio.

Anzitutto è stabilito che il postulato delle parallele può negarsi senza contraddizione, in un sistema geometrico coerente edificato sui primi principii dello stesso Euclide. È vano dunque il tentativo di fondare la geometria sopra semplici verità identiche o analitiche! E l'idea stessa di LEIBNIZ, che stà alla base d'un tentativo di codesto genere, si dimostra così veramente priva di valore.

Ma, ciò che più importa, cadendo il postulato V d'EUCLIDE, si ha una geometria più generale che dipende da una costante arbitraria k (la curvatura dello spazio) e si riduce al caso euclideo per $k=0$. Vi è dunque, a priori, una serie di spazi possibili, e sembra arbitrario affermare che la possibilità dell'esperienza richieda precisamente la condizione $k=0$. Al contrario si sarà naturalmente condotti a chiedere all'esperienza stessa la valutazione di k , che sarà fornita dalla misura della somma degli angoli d'un triangolo: e se si trovi una somma minore di due angoli retti, seguirà $k<0$, il difetto essendo uguale a k moltiplicato per l'area del triangolo.

Questo pensiero spinge GAUSS ⁽¹⁾ ad esaminare con cura il triangolo geodetico BROCKEN-HOHEHAGEN-INSELBERG i cui lati sono circa m. 69, 85, 197; ma dall'esame segue la validità della geometria euclidea nei limiti d'approssimazione delle misure geodetiche.

Più tardi LOBACEFSKI, riprendendo l'idea di SCHWEIKART che all'ipotesi non-euclidea aveva dato il nome di «astrale», si volge ad esaminare le parallassi delle stelle, arrivando alla stessa conclusione nell'ordine delle misure astronomiche. Infatti nella memoria di LOBACEFSKI sui «Nuovi fondamenti della geometria con una completa teoria delle parallele» (1835-38), che si può leggere nella traduzione di F. ENGEL (N. I. L. «Zwei geometrische Abhandlungen», Teubner, Lipsia 1899), si trovano i risultati seguenti.

Se si suppone che lo spazio fisico sia non-euclideo, le parallassi delle stelle conducono a determinare un limite inferiore per l'unità di misura che nel sistema geometrico compare come naturale o assoluta (cfr. Art. undecimo): invero la parallasse d'una stella S , il cui raggio visuale si assuma perpendicolare alla congiungente del sole e della terra, fornisce un limite superiore per la differenza fra 90° e l'angolo di parallelismo relativo a codesta distanza. Così dalla parallasse di Sirio, che ritiene $1'',24$ LOBACEFSKI deduce che l'unità anzidetta supera 170 mila volte il diametro dell'orbita terrestre. Ma in realtà la parallasse di Sirio vale soltanto $0'',37$, e vi sono stelle la cui parallasse è minore di $0'',1$: quindi l'unità di misura dello spazio non-euclideo dovrebbe superare un milione di volte, cioè risulta praticamente infinita (come per $k=0$)!

I tentativi accennati mostrano che la costruzione non-euclidea è stata interpretata dai costruttori in un senso empirico, conforme alle idee della scuola inglese; e la critica di HELMHOLTZ viene continuata nel medesimo senso. L'argomento della inconcepibilità o non intuibilità dello spazio non-euclideo, lungi dall'arrestare questi filosofi, viene superato mercè una considerazione assai ingegnosa, che si trova ugualmente in REIMANN, HELMHOLTZ e CLIFFORD.

Si immaginino dei piccoli animaletti a due dimensioni

(1) *Disquisitiones circa superficies curvas*, 428.

striscianti sopra una superficie curva. Questi animaletti, possedendo una ragione umana e dedicandosi a rappresentare geometricamente la loro superficie-ambiente, riusciranno a concipirla semplicemente come piana (curvatura nulla) se la sua curvatura è in fatto tale da sfuggire alla loro piccolezza.

Questo argomento d'analogia conserva la sua forza anche per chi non ammetta che l'intuizione spaziale sia formata dall'esperienza ed invochi a tal uopo qualche elemento strutturale della psiche umana: in ogni caso appare che l'intuizione d'una superficie piana (curvatura nulla) fornirebbe perfettamente ai nostri piccoli animali un criterio interpretativo della loro esperienza, e nessun disaccordo risulterebbe per essi da tutte le esperienze possibili entro un conveniente raggio d'azione.

Così la pretesa realtà dei giudizi sintetici a priori, che KANT deduce dal fatto della possibilità dell'esperienza, e il dilemma ch'ei pone fra l'accoglimento di tali principii e l'impossibilità della scienza, non resiste all'esame: poichè codesto dilemma contempla lo schema d'una esperienza rigorosa, che sostituisce arbitrariamente le nostre esperienze approssimate, le sole che ci sia dato di tentare!

§ 6. Il problema psicologico dell'acquisto delle nozioni spaziali. — Le riflessioni precedenti pongono il problema dell'acquisto dei concetti spaziali. Già in BERKELEY è segnato quell'indirizzo di ricerca psico-fisiologica che tenterà di derivare tali concetti dalle sensazioni. Per contro la teoria kantiana suggerisce la veduta che l'intuizione dello spazio tenga alla struttura della psiche umana, e quindi alle leggi organiche secondo cui il cervello elabora i dati dei sensi, queste medesime leggi essendo concepite in maniera preformistica.

Ora si tratta di conciliare le due vedute in una spiegazione genetica positiva delle nozioni e dei postulati della geometria.

Nella *Psicologia fisiologica* (da HELMHOLTZ, WUNDT...) si istituiscono esperienze atte a decidere quali proprietà geometriche sieno contenute immediatamente nei dati delle varie sensazioni. Ma per interpretare tali esperienze occorre conoscere i rapporti fra i concetti a cui le dette proprietà si riferiscono, onde si possa separare dalla nozione d'un fatto

tutto ciò che non è ad essa indissolubilmente legato. Qui soccorrono alcuni risultati generali della critica dei principii.

Nella geometria elementare abbiamo considerato, come enti fondamentali, il *punto*, la *retta* e il *piano*, a cui si riferiscono le proprietà d'*appartenenza* (Art. 2), di *divisione in parti* o di *ordine* (Art. 2, 5), di *congruenza* o di *movimento* (Art. 3).

Questi concetti si presentano all'intuizione in una certa relativa dipendenza, sicchè ad es. le proprietà della congruenza si esprimono in rapporto alla retta e al piano ecc. Ma essi trovano uno sviluppo più generale ed indipendente in alcuni rami elevati della geometria. La *geometria proiettiva* considera i concetti di retta e di piano, prescindendo da ogni nozione di eguaglianza e di movimento; essa considera dunque l'insieme delle *proprietà grafiche*, ad esclusione delle *proprietà metriche* (che entrano soltanto in alcune sue applicazioni). All'opposto invece i concetti metrici ricevono uno sviluppo indipendente dalle nozioni di retta e piano, nella *geometria sopra le superficie o le varietà più volte estese* (studiata di solito coi metodi differenziali), dove all'idea dell'*eguaglianza di segmenti o distanze* si sostituisce l'idea più generale della *ugual lunghezza di archi di linea*, e quindi l'espressione dell'*elemento lineare* (RIEMANN).

Ebbene a questi due rami della geometria corrispondono due indirizzi principali nelle ricerche sui fondamenti della geometria ⁽¹⁾, i quali pongono in luce l'assoluta indipendenza fra i concetti grafici e metrici, che rispettivamente in ciascuno di essi vengono scelti come punto di partenza. E quei due rami hanno pur comuni alcune proprietà che insieme costituiscono una teoria distinta: la generale *teoria del continuo o Analysis situs*; che viene edificata sui concetti primi e generalissimi di linea, superficie, varietà a più dimensioni e dà luogo ad una ricerca critica preliminare, indipendente dalla proiettiva e dalla metrica.

Ora quale rapporto intercede fra questi sviluppi critici e il problema fisio-psicologico sopra accennato?

Anzitutto si può osservare (con HELMHOLTZ e KLEIN) che la vista dà, in modo immediato, soltanto, le nozioni grafiche

⁽¹⁾ Cfr. Art. undecimo §§ 14 e seguenti. Cfr. pure ENRIQUES, *Prinzipien der Geometrie*, art. III A, B 1, nella « Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften ».

e non le metriche. All'opposto invece dalle sensazioni tattili-muscolari, si acquista la conoscenza immediata delle proprietà (metriche) della congruenza, e solo in via subordinata quelle della retta e del piano. Ma, se si distinguono le sensazioni tattili-muscolari generali, da quelle del tatto speciale, si ha di più che le prime — fino a che non sia localizzata per abitudine una sede di paragone — sono incapaci di dare la nozione della congruenza; il loro contenuto — per quanto riguarda le cognizioni spaziali — si limita alle relazioni più generali inerenti a linee e superficie, che abbiám detto costituire l'oggetto della teoria del continuo, ed essere comune fondamento delle proprietà grafiche e delle metriche.

Onde: *i tre rami della geometria in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.*

Non enteremo nelle discussioni che occorrerebbero per giustificare questa conclusione, e dovremo pure arrestarci dinanzi ai problemi più determinati che qui si riattaccano: come da ciascun gruppo di sensazioni traggano origine i concetti geometrici fondamentali, e come essi si leghino fra loro secondo le leggi logiche e associative, le quali trovano poi la loro espressione nei postulati. Quest'analisi è stata da noi ampiamente sviluppata nell'articolo « *sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria* » (Rivista filosofica, Pavia 1901), e nel cap. IV dei « *Problemi della Scienza* » (Bologna, 1906).

Ed essa ci ha permesso di render conto del sentimento d'evidenza o necessità che accompagna assiomi o postulati, ravvisando in questi la sovrapposizione di principi logici a certe condizioni associative onde sorgono i concetti.

Ma vogliamo richiamare, a questo proposito, l'osservazione che vi è differenza tra postulati aventi il loro fondamento in un sol gruppo di sensazioni, e postulati che nascono dall'associare sensazioni appartenenti a gruppi diversi. È naturale che questi ultimi abbiano in confronto ai primi un minor grado d'evidenza.

Si ha qui, in qualche modo, una ragione dei tentativi, an-

noverati dalla storia delle matematiche per bandire dalla geometria il *postulato delle parallele* (cfr. Art. undecimo). La sua minore evidenza si spiega osservando che esso è un *postulato d'associazione fra le sensazioni ottiche e le sensazioni tattili-muscolari o meccaniche*. Infatti se cerchiamo di comprendere la repugnanza che proviamo a contraddire l'ipotesi d'un'unica parallela ad una retta data, passante per un punto dato, riconosciamo che essa dipende dal doppio modo di rappresentarci le parallele: come limiti di due rette che si tagliano, ove il punto comune si allontani indefinitamente in un verso determinato, e come linee *equidistanti*. In questo doppio modo di rappresentazione vi è un fatto d'associazione ottico-meccanica, che riposa appunto sulla sensibile validità del postulato delle parallele.

§ 7. **Poincarè e la dottrina della geometria convenzionale.** — Ma, qualunque sia il grado d'evidenza del postulato d'Euclide, abbiám detto che la sua necessità psicologica, rispetto alla nostra intuizione, non si traduce in una necessità per la scienza dello spazio fisico.

Nondimeno le verificazioni tentate nel campo geodetico-astronomico sono riuscite a confermare la geometria euclidea entro l'ordine di precisione che è al limite delle nostre osservazioni.

Sarà possibile superare questo limite con adeguate esperienze e scoprire un giorno il carattere non-euclideo dello spazio?

No, risponde POINCARÈ (¹), perchè le nostre esperienze non portano sullo spazio e nemmeno sui rapporti di spazio, ma sui corpi, di cui mettono in giuoco le proprietà fisiche. Così la verità o la falsità della geometria euclidea non è una questione di fatto, ma una pura *convenzione*: si tratta di sapere a quali proprietà fisiche si vuol fare appello per definire la linea retta ecc.

È chiaro che un argomento specioso di questo genere si può ripetere press'a poco per ogni problema scientifico: di ciascuno si potrà dire che isolandolo dal corpo della scienza

(¹) *Science et hypothèse, La valeur de la Science*. Parigi, Flammarion 1903-5.

non contiene un fatto ma si riduce a una convenzione arbitraria. Così il recente *pragmatismo* riesce a negare il valore della scienza.

Noi abbiamo già avuto occasione di combattere lo spirito di questo convenzionalismo ⁽¹⁾, la scelta d'un linguaggio o di definizione convenienti rende certo possibile di cambiare formalmente l'espressione d'un fatto, come chi dica p. es. che il « bianco » è « nero »; ma quest'aspetto arbitrario della verità non tiene che ad una considerazione nominalistica del fatto, astrattamente isolato; mentre nell'insieme delle sue relazioni si ritrova qualcosa d'invariante, che risponde giusto al nostro concetto del vero.

Pure POINCARÈ non spingeva la sua dottrina fino alle estreme conseguenze del pragmatismo. Egli tentava anzi di sfuggire alle suggestioni scettiche della relatività dell'esperienza, ammettendo stabilita una gerarchia naturale delle nostre conoscenze in cui la fisica è subordinata alla geometria: *geometria convenzionale, fisica scienza di fatti*.

Si è giustamente ravvicinato lo spirito che muove questa dottrina di POINCARÈ a quello di KANT. Infatti la critica kantiana è egualmente ispirata dal bisogno di sfuggire alle conseguenze scettiche dell'empirismo e del nominalismo: avendo riconosciuto che l'interpretazione dei dati sperimentali si fa alla luce di conoscenze presupposte, si erigono queste a principii, ponendo un ordine necessario della scienza. POINCARÈ non fa che sostituire alla necessità l'arbitrarietà dei principii (convertiti in definizioni mascherate), ma non tocca il posto privilegiato che viene loro conferito nell'ordine naturale delle nostre conoscenze.

D'altronde questa specie d'investitura per diritto divino che KANT accorda agli assiomi regolatori dell'esperienza (le forme della sensibilità e le categorie dell'intelletto), implicando l'accettazione della geometria d'EUCLIDE e della meccanica di NEWTON, riesce infine a confermare quello stesso ordine dogmatico della classificazione delle scienze che AUGUSTO COMTE, secondo uno spirito somigliante di conservazione, doveva ritrovare più tardi sul terreno della storia.

Ma è facile scoprire qui una sopravvivenza del razionalismo metafisico. Riferimmo già (Art. primo § 11, Vol. I,

(1) *Problemi della scienza e Scienza e razionalismo*, Bologna, 1912.

pag. 30) l'opinione di ARISTOTILE che ritiene i principii della scienza precedere naturalmente alle conclusioni e costituirne la causa. Questo canone della logica dimostrativa è d'accordo colla veduta ontologica, per cui le idee appaiono disposte secondo un ordine di comprensione crescente o di generalità decrescente, che fornisce appunto l'ordine naturale delle deduzioni scientifiche.

Ora i pensatori moderni sono stati condotti a discutere assai del procedimento — che ARISTOTELE riteneva come circolo vizioso — in cui vogliansi provare le premesse ipotetiche per mezzo delle conseguenze che ne dipendono; ma non sembra che KEPLERO, GALILEO o DESCARTES, e nemmeno NEWTON (¹), sieno mai arrivati a dubitare della possibilità teorica di principii atti a fondare un ordine deduttivo naturale del sapere, che risponda alla conoscenza delle cause. Quanto a LEIBNIZ e LAMBERT, li vediamo tentare addirittura un'analisi dei concetti volta a definire le idee prime, assolutamente semplici, che per combinazione dovrebbero dare tutto lo scibile (²).

Soltanto la critica di HUME, riducendo il rapporto di causa a una successione invariabile di fenomeni e togliendo così ogni base reale alla pretesa di scoprirvi un rapporto di dipendenza concettuale, colpisce l'idea che sta a fondamento d'una gerarchia naturale delle conoscenze. Tuttavia abbiám visto che questa sopravvive come un'esigenza nel pensiero di COMTE alla stessa guisa che in quello di KANT, e si ritrova perfino in POINCARÈ: giacchè la possibilità della scienza sembra venir meno se non si abbia un ordine dei concetti che, collegando i fatti, costituisca il quadro del reale universo.

Orbene, la critica degli assiomi geometrici che principalmente accompagna la geometria non-euclidea, è riuscita a distruggere ogni assoluto logico: la deduzione ha un carattere puramente relativo; quindi la scelta dei principii d'una teoria deduttiva è sottomessa soltanto a criterii di convenienza o d'economia, restando logicamente arbitraria.

Di più anche dal punto di vista psicologico, abbiamo riconosciuto possibili diversi ordini d'intuizione, che rispondono a diverse costruzioni scientifiche storicamente sviluppatesi.

(¹) Cfr. *Optices liber III*, Patavii, 1741 pag. 165, ENRIQUES, *Per la storia della logica*, § 31, pag. 219.

(²) Cfr. ENRIQUES, *ibidem* §§ 15, 19.

È poi chiaro che la comprensione relativa dell'ordine dei concetti e dei postulati entro il campo d'una teoria deduttiva, conduce infallibilmente a considerare come relativa ed arbitraria anche la subordinazione d'una teoria ad un'altra. La geometria non può conservare il suo posto privilegiato rispetto alla fisica!

§ 8. La geometria estesa ad una successiva approssimazione nella meccanica. — Riprendiamo ora la domanda: che senso può avere la ricerca sulla validità della geometria euclidea o non-euclidea?

I motivi della critica di KANT, ripresi da POINCARÈ, non ci permettono di ritornare semplicemente alla posizione dell'empirismo nominalistico. Occorre dunque approfondire il significato delle esperienze tentate dai geometri non euclidei per valutare la curvatura dello spazio, attraverso la misura della somma degli angoli d'un triangolo.

È evidente che questo procedimento mette in ginoco le proprietà fisiche dei corpi: ciò è già vero se si operi su triangoli costruiti in carta od in legno ecc. Pure, se per questi si scoprisse che la somma degli angoli differisce sensibilmente da due retti, il carattere non-euclideo dello spazio ne risulterebbe stabilito. Poichè il fatto geometrico sarebbe così separato dalle proprietà specifiche della materia, per mezzo di quegli stessi procedimenti statistici che valgono ad isolare l'azione delle cause generali, in mezzo alle complicazioni accidentali della realtà concreta.

Similmente non era escluso a priori che l'esame di triangoli di maggiori dimensioni, sulla terra o nel cielo, potesse condurre ad una curvatura dello spazio minore di zero, per quanto l'aprezzamento di cause perturbatrici indirette dovesse dar luogo qui a più forti difficoltà. Comunque la possibilità d'una conclusione positiva dipenderebbe strettamente da ciò che i difetti misurati oltrepassino certi limiti, in rapporto all'esattezza delle osservazioni.

Al contrario abbiamo visto (§ 5) che nessun difetto di questo genere ha potuto essere messo in evidenza. Dunque lo spazio ha realmente curvatura nulla o almeno così piccola che, da un punto di vista positivo, è indifferente supporla nulla.

Qui la riflessione del filosofo si risveglia: come è possibile che ipotesi contraddittorie sieno *indifferenti* per lo svi-

luppo della scienza? Questo può accadere in un certo ordine d'esperienze che comportano un certo ordine d'approssimazioni, ma chi oserebbe ipotecare le esperienze future, negando che anche le conseguenze indirette delle nostre ipotesi rechino il segno d'una differenza, che si è tenuta per trascurabile?

A priori non si può rifiutare siffatta possibilità; tuttavia occorre comprendere meglio il significato della questione.

Il procedimento statistico con cui si riesce a separare i rapporti geometrici concepiti come parte della realtà sperimentale, non costituisce soltanto un metodo di verifica, ma anche la vera *definizione della geometria*, per colui che riguardando le cose sotto l'aspetto positivo non saprebbe accordarle un senso trascendente l'esperienza. Ora codesto procedimento si fonda sul paragone di misure d'ordine diverso, sicchè al di là d'un certo limite, l'ipotesi geometrica diventa una vuota astrazione, priva di significato: in quest'ordine, geometrico e fisico si confondono, cioè le esperienze indirette con cui si vorrebbe verificare le nostre ipotesi, metterebbero in giuoco contemporaneamente quei principii ed altri ancora, reggenti un campo più esteso di previsioni fisiche.

Più precisamente, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al *movimento dei corpi* e alla *propagazione della luce*, che si ottengono facendo astrazione dal *tempo* e dalle *forze*. Si avrà dunque un'estensione naturale della geometria ed un grado d'approssimazione successivo alla realtà, prolungando la geometria nella *cinematica*, che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo; e a sua volta la cinematica si prolungherà nella *dinamica* che, dando ragione delle forze, toccherà ad un grado più concreto della realtà fisica.

Questo concepimento d'una fisica estensione della geometria, a cui riesce la critica del problema dello spazio ⁽¹⁾, ha acquistato un'importanza eccezionale nella scienza contemporanea, grazie allo sviluppo che esso riceve nella teoria di ALBERTO EINSTEIN, a cui quella critica costituisce la naturale preparazione filosofica.

§ 9. Il tempo: successione e durata. — Sebbene oggi il « tempo » si accompagni generalmente allo « spazio » nella di-

(1) Cfr. ENRIQUES, *Problemi della scienza* (1906) Cap. V, VI.

scussione filosofica, vi è per gli antichi una differenza peculiare che li distingue: giacchè, pensando lo spazio in concreto, come materia estesa, quei filosofi vedono in esso il tipo di ciò che immutabilmente *esiste*, mentre il tempo mal si accorda coll'idea che si formano dell'esistenza. Del resto questa difficoltà o oscurità metafisica nasce dal concepire il tempo come qualcosa d'attinente al movimento, mettendolo in rapporto coi moti celesti che ne porgono la misura.

Per i PITAGORICI (FILOLAO?) «la terra è un astro che ruotando attorno ad un fuoco centrale è come l'organo del tempo, causa dei giorni e delle notti» (1), mentre per altri (DEMOCRITO?) il tempo sarebbe «il movimento del mondo ovvero la sfera stessa di questo» (2). PLATONE, nel «Timeo», definisce il tempo come «immagine mobile dell'eternità che procede secondo numeri» (37 D) e lo concepisce generato coll'ordine del cielo, da cui derivano i giorni e le notti, i mesi e gli anni: aggiunge che il sole, la luna e i cinque astri detti pianeti, sono deputati a distinguerne e conservarne i numeri.

ARISTOTELE, si occupa a lungo dell'argomento nel «De Coelo»; ivi dopo aver richiamato le precedenti definizioni (*l. c.*), definisce il tempo come «numero del movimento, quando si considera in questo un precedente ed un successivo», pur rilevando che la natura di codesta nozione presenta qualcosa d'oscuro.

Fra i moderni GALILEO (3) sopra tutti sembra avere riflettuto sulla misura del tempo, a cui attribuisce un significato naturale per riguardo alla sensazione del ritmo nella musica e alla battuta del polso. Infatti a questi mezzi egli accenna, in primo luogo, per misurare le durate nelle esperienze.

In altre esperienze più precise ricorre poi alla caduta dell'acqua da un secchio per un cannellino (4) — espediente già messo in opera nella *clessidra* con cui i Romani limitavano il tempo agli oratori nel foro — ed infine si vale dell'isocronismo delle piccole oscillazioni del pendolo: questa proprietà fu da lui scoperta fin da giovane; osservando la famosa

(1) ARISTOTELE. *De Coelo* B 13. 293^a 18 in *Diels* «Vorsokratiker B 37, 30. (Vol. I, pag. 356, 24).

(2) ARISTOTELE. *Phys.* Δ 10. 218^a 33 in *Diels* «Vors» B 33 (I 355, 5).

(3) *Opere*, ed. naz. IV, 723, e VII, 46, 54, 180.

(4) *ibidem* VIII, 213.

lampada nel duomo di Pisa (1583) (di cui misurava la durata delle oscillazioni mercè le battute del polso e della musica), e confrontando poi sperimentalmente pendoli d'ugual lunghezza, fatti oscillare con diversa velocità. Infine lo stesso GALILEO ideò l'orologio meccanico, che nella forma più perfetta fu costruito più tardi da HUYGHENS (1).

GALILEO non si era indugiato in disquisizioni sulla natura del tempo, limitandosi a riportare le definizioni di PLATONE ed ARISTOTELE (2). Una analisi più filosofica si trova in LEIBNIZ (cfr. § 2) che definisce il tempo come «ordine delle successioni». Pure questa formula — a prescindere da altri rilievi — accenna soltanto ad un elemento del tempo la *successione*, e non alla *misura* degli intervalli di tempo, cioè alla *durata*.

NEWTON (3), pone invece un concetto del tempo perfettamente analogo a quello dello spazio assoluto, cui si riferiscono i moti: il *tempo vero* o *matematico*, che importa una misura naturale in sè, indipendente dai fenomeni. E sebbene questo concetto sollevi le obiezioni di BERKELEY, bisogna giungere fino a ERNESTO MACH (4) per vederlo sottoposto ad una critica approfondita.

EMANUELE KANT, considerando il tempo accanto allo spazio quale forma della sensibilità, non fa che mutare la definizione metafisica leibniziana in quella di un «ordine della sensibilità interna», dove non si scorge il fondamento della misura: sebbene sembri d'altra parte accettare il «tempo vero» di NEWTON, come un presupposto necessario della nostra intuizione, fondamento della dinamica.

Ora, lasciando da parte altri sviluppi metafisici per istituire una critica positiva del «tempo», si è condotti anzitutto a domandare se oltre alla nozione che esso implica di un «ordine di successione» dei fenomeni, contenga anche un criterio di misura delle durate. A tal uopo si avvertirà che l'ordine d'una qualsiasi serie fenomenica, permette di associare gl'i-

(1) Cfr. il rapporto di VIVIANI in GALILEO, *Opere*, XIX, 648. HUYGHENS, *Orologium oscillatorium* (1658).

(2) *Opere*, IV, 211.

(3) *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Cfr. trad. it. citata, Nota III.

(4) *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Lipsia, 1883.

Questa formula si assumerà dunque, come definizione dell'intervallo o *distanza elementare* fra due *punti* dello S_4 , e varrà a stabilire in questo spazio una *metrica convenzionale*. La quale ha invero molte analogie colla metrica che, secondo RIEMANN, s'introduce sopra una superficie o varietà (*), salvo la circostanza che la forma differenziale qui assunta per definire il quadrato dell'elemento lineare non è essenzialmente positiva. Comunque l'espressione data dal ds conduce a definire la *lunghezza d'una linea* qualunque segnata nello S_4 (distanza di due punti-eventi congiunti entro una serie continua). E si possono quindi definire nello S_4 le linee analoghe alle *geodetiche*, che sono le rette dello S_4 ; le quali invero — a motivo della natura segnalata della forma ds — corrispondono, non già ad un minimo, ma ad un *massimo* della lunghezza: $\int ds..$

Con queste convenzioni il *principio d'inerzia* di GALILEO riceve una nuova formulazione in linguaggio geometrico: *Il moto libero d'un punto* (traiettoria rettilinea descritta con velocità uniforme) *corrisponde ad una retta-geodetica dell'universo S_4* ; ciò significa che « di più punti materiali partenti insieme da una medesima posizione e giungenti insieme ad un'altra, impiega il massimo tempo proprio il punto che si muove di moto libero » non soggetto a forze.

§ 13. **Cenno sulla teoria generale della relatività di Einstein.** — Aggiungeremo un breve cenno sull'ulteriore sviluppo della dottrina di EINSTEIN, che è la sua nuova costruzione della dinamica (1914-17). Assegnare una legge (d'inerzia) per il moto libero dei punti materiali ed aggiungervi poi l'azione di *forze* modificanti il moto, è ancora un'astrazione. La quale risponderebbe invero alla realtà soltanto nel caso che la materia fosse disseminata in piccole masse, così lontane le une dalle altre da muoversi ciascuna indipendentemente, senza subirne l'influenza. Invece, nel nostro mondo, la materia, che vediamo muoversi, si trova sotto l'azione di altra materia, che — nella dinamica di NEWTON — viene ritenuta come causa di *forze gravitazionali*.

Così, nella realtà concreta, un sasso lasciato libero ad una

(*) Cfr. Art. undecimo, §§ 17, 19.

qualche altezza dalla terra, non si muove già in linea retta con velocità uniforme, bensì descrive in generale, con moto accelerato, una parabola. Rispetto a questa realtà, il linguaggio astratto della dinamica classica, che riduce il moto ad un moto traslatorio uniforme modificato continuamente dalla forza di gravità, è soltanto una *finzione* semplificatrice.

La rappresentazione geometrica dell'universo, S_4 , porge un linguaggio atto ad esprimere la realtà dinamica in una maniera più concreta: purchè si modifichi la determinazione metrica stabilita innanzi nello S_4 , mercè l'espressione della distanza elementare, ds , fra due punti-eventi. Perciò osserviamo che una qualsiasi distribuzione di forze, agenti sui punti materiali, dà luogo a modificare il tempo proprio elementare con cui si passa da un punto all'altro infinitamente vicino: l'espressione del ds^2 (che era una particolare forma differenziale quadratica in dx, dy, dz, dt) diventa quindi una forma quadratica qualunque nei differenziali dx, dy, dz, dt :

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + \dots + g_{44} dt^2 + 2 g_{12} dx dy + \dots + 2 g_{34} dz dt.$$

Ora una formula siffatta ove le g sieno funzioni qualsiasi di x, y, z, t definisce nello S_4 una metrica riemanniana (cfr. Art. undecimo) che tuttavia qui occorre prendere in un senso più generale, prescindendo dall'ipotesi che la forma sia essenzialmente positiva. Si può dire dunque che «ad ogni distribuzione di forze nello spazio fisico risponde una metrica dello spazio-tempo S_4 » e il principio newtoniano delle forze (la *lex motus II*) si lascia esprimere ora come un'estensione del postulato d'inerzia di GALILEO: al movimento d'un punto materiale libero entro un campo di forze, corrisponde una *linea geodetica* dello S_4 ; cioè:

Se, entro un campo di forze, si considerano due punti, materiali in due tempi successivi, fra tutte le linee che i due punti possono descrivere per giungere insieme dalla posizione iniziale alla finale, la traiettoria descritta secondo la dinamica newtoniana corrisponde ad un *massimo* del relativo tempo proprio (la proprietà di massimo essendo intesa, come nella geometria differenziale, per intervalli convenientemente ristretti).

Fin qui non abbiamo fatto che porgere una nuova rappre-

stanti successivi ad una quantità variabile t , e quindi ad assegnare una misura: in questo senso un punto mobile sopra una linea porge un possibile orologio, sebbene affatto convenzionale. Ma la misura così introdotta non è definita, potendosi sostituire a t una funzione arbitraria $f(t)$. Si pone quindi il problema se fra i diversi modi di misura possibili vi sia una ragione naturale di scelta che fornisca una misura, per così dire, assoluta: e ciò conduce a ricercare un criterio di confronto degli intervalli successivi, per cui questi abbiano a dirsi uguali o disuguali, riuscendo così a definire $f(t)$ a meno d'una sostituzione lineare.

Alla domanda se un siffatto criterio abbia un senso possibile, si risponde con Galileo, facendo appello al significato fisio-psicologico del ritmo musicale. La realtà «durata» riceve in tal guisa una prima definizione sensibile immediata, sebbene il *trasporto* che così è dato di fare d'un intervallo nel tempo sia assai ristretto e poco preciso. Ma tosto la costruzione di orologi (come le clessidre ecc.) permette di estendere e precisare tale trasporto.

In pari tempo la storia stessa di codesta costruzione, cui si è pur dianzi accennato, mette in evidenza un postulato — implicitamente accolto come criterio di misura — che trova conferma nell'accordo dei diversi orologi, rivelando quindi il significato più profondo della *realtà della durata*. La durata è un carattere dei fenomeni; in condizioni che stimiamo uguali, fenomeni uguali si ripetono in tempi uguali. Questo è il *postulato* generalissimo, che sta a base *della misura del tempo*, e che la nostra critica ⁽¹⁾ ha messo esplicitamente in rilievo: sebbene l'enunciato possa apparire un po' vago, esso riceve nelle applicazioni pratiche una determinazione più precisa.

Aggiungiamo che l'anzidetto postulato, a chi ne esamini assai profondamente il significato, sembra richiedere una *ragion sufficiente*, attestando una certa *unità delle forze fisiche*. Esso riesce quindi a suffragare l'ipotesi, suggerita dalle recenti teorie elettro-magnetiche, che riconduce tutti i fenomeni al tipo elettrico e assegna agli atomi un modello costituito da elettroni girevoli attorno ad un nucleo centrale: si può dire dunque che *l'elettrone rotante nel mondo atomico*

(1) *Problemi della Scienza*, Cap. V.

porge un orologio elementare, che sta alla base delle comuni misure offerte da tutti gli orologi macroscopici.

In tal guisa viene definita la misura del tempo, in rapporto ad un osservatore legato ad un corpo o sistema di riferimento. Ma il confronto dei tempi appartenenti ad osservatori diversi dà luogo ad un nuovo problema, che mette in giuoco la relatività del movimento.

§ 10. **Relatività del movimento.** — Vedemmo già che tutti i pensatori per cui lo spazio non ha significato all'infuori dei corpi, sono condotti a ritenere il movimento di questi come puramente relativo. Così hanno opinato, nell'antichità **PARMENIDE** e **ZENONE** d'Elea, e nei tempi moderni (pur con qualche oscillazione) **DESCARTES** e **LEIBNIZ**.

Ma i creatori della dinamica (**GALILEO** e **NEWTON**) concepivano come un'esigenza per la costruzione di questa, l'idea d'un movimento assoluto, che, ove si voglia definire in rapporto ad un sistema di riferimento, conduce alla veduta democritea che anche lo spazio vuoto sia qualcosa in sè stesso. **NEWTON** in particolare ha recato quì un argomento molto notevole, quale si ricava dai fenomeni che accompagnano e mettono in evidenza i moti di rotazione (assi permanenti di rotazione, forze centrifughe ecc.); in questo senso il pendolo di **FOUCAULT** porgerebbe una prova della rotazione assoluta della terra rispetto a se stessa. Ma di ciò più avanti.

Frattanto altre concezioni fisiche venivano a collegarsi, in qualche modo, colla precedente veduta. Per quanto la dottrina newtoniana postuli un'azione reciproca dei corpi a distanza, questa forza *gravitazionale* fu accolta dallo stesso autore soltanto come l'espressione positiva di un fatto (i moti celesti vanno « come se »), che ipotesi ulteriori avrebbero dovuto spiegare (1); giacchè il nostro concetto della causa richiede la *contiguità dell'azione nello spazio e nel tempo*. **NEWTON** stesso ha tentato di spiegare secondo questo spirito i fenomeni luminosi, ricorrendo ad un'ipotesi d'emissione della luce. La quale però, nello sviluppo della teoria, dovette cedere di fronte all'ipotesi ondulatoria, introdotta da **HUYGENS**.

Ora quest'ultima ipotesi assume come sede dei fenomeni

(1) *Optices quaestio*, 313.

luminosi un *etere*, riempiente il cosiddetto spazio vuoto. Era troppo naturale di prendere l'etere a sistema di riferimento del moto dei corpi, e di cercare se opportuni fenomeni — come l'aberrazione di BRADLEY — mettessero realmente in evidenza il movimento della materia rispetto ad esso, che legittimamente potrebbe tenersi per assoluto.

Però una critica approfondita doveva mostrare che i fenomeni osservati hanno un significato puramente relativo.

Ma, dopochè l'ottica fu ricondotta all'elettro-magnetismo da MAXWELL e HERTZ, apparve chiaro che una teoria elettromagnetica dei corpi in movimento, edificata, come quella di LORENTZ, sull'ipotesi d'un etere immobile, dovrebbe riuscire in qualche modo a riconoscere nell'esperienza il moto della materia rispetto all'etere. Con questa fiducia il fisico americano MICHELSON ha tentato nel 1881 le sue celebri esperienze, che pur ripetute con ogni scrupolo insieme a MORLEY nel 1887, hanno dato risultato negativo. Si trattava di mettere in evidenza il moto della terra: a tal uopo un raggio luminoso, emesso da una sorgente terrestre, veniva costretto a percorrere due cammini uguali d'andata e ritorno, uno nella direzione del moto della terra e l'altro in direzione perpendicolare; contrariamente alle previsioni della teoria di LORENTZ, i due tempi sono risultati uguali: così le tentate esperienze ottiche non consentono di riconoscere il movimento dei corpi rispetto all'etere!

Questo risultato negativo ha spinto i fisici FITZ — GERALD e LORENTZ a modificare la teoria elettromagnetica con alcune ipotesi complementari (contrazione longitudinale dei corpi in moto rispetto all'etere, tempo locale) che contrapponendo una realtà trascendente a un'apparenza sperimentabile — preparano la revisione critica dei concetti fondamentali da cui è uscita la *teoria della relatività ristretta* di ALBERTO EINSTEIN (1905-7).

EINSTEIN parte da una veduta filosofica: l'etere (almeno nel senso della fisica classica) è una finzione, lo spazio non è che un ordine di rapporti fra i corpi, quindi il moto rispetto all'etere o allo spazio è privo di senso; il principio di ragion sufficiente esige a priori la relatività del movimento. La relatività si estende a qualsiasi ordine d'esperienze; tuttavia essa

concerne i moti traslatorii (più precisamente uniformi) e non quelli in cui si ha rotazione riguardo alle direzioni delle cosiddette stelle fisse.

Questa distinzione è un po' delicata e del resto gli sviluppi ulteriori della teoria apprenderanno a superarla; intanto basti rilevare che l'esistenza di stelle lontanissime, le cui velocità relative non superano un certo limite, conduce a definire delle rette congiungenti le cui direzioni restano reciprocamente invariate, nell'ordine delle approssimazioni sperimentali: così appunto si definiscono le direzioni (sensibilmente) fisse, a cui si paragonano i moti rotatorii; ciò che, nell'argomento di NEWTON, era ritenuto come assoluto (o relativo allo spazio) appare dunque soltanto relativo al cielo delle stelle! (MACH).

Precisiamo ora il principio di relatività, considerando i sistemi galileiani (su cui non agiscono forze), cioè i sistemi inerziali che sono supposti muoversi lontano da ogni materia circostante, in guisa che questa non eserciti su di essi alcuna azione sensibile. Due sistemi galileiani qualsiasi, *A* e *B*, possono essere in quiete o muoversi l'uno rispetto all'altro d'una traslazione uniforme (una traslazione non uniforme rispondendo a forze acceleratrici); ma le leggi della dinamica di GALILEO e NEWTON sono egualmente valide rispetto a qualsiasi sistema inerziale di riferimento, e però, con esperienze meccaniche interne ad uno qualunque di questi sistemi, p. es. a *B*, è impossibile discernere se esso sia in quiete o in moto rispetto ad *A*.

EINSTEIN estende questo principio di GALILEO ad esperienze qualsiasi, enunciando così il *postulato di relatività del movimento*. Il moto traslatorio uniforme d'un sistema inerziale, rispetto ad un altro, non può esser posto in evidenza da esperienze interne al dato sistema di qualsiasi specie, sia meccaniche che ottico-elettro-magnetiche.

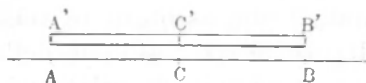
Questo postulato conduce ora alla relatività del tempo.

§ 11. **Relatività del tempo.** — Abbiamo veduto come si ponga per un dato osservatore la misura del tempo; occorre ora paragonare i tempi di osservatori diversi, che in generale potranno muoversi comunque l'uno rispetto all'altro; ma, considerando i moti durante intervalli non troppo lunghi, si potrà limitare il paragone al caso elementare di due osserva-

tori (appartenenti p. es. a due sistemi inerziali) che sieno dotati di traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro.

Per accordare i loro orologi occorre definire gli avvenimenti che nei due sistemi sono da ritenere *simultanei*, e ciò può farsi in maniera positiva ricorrendo ad opportune *segnalazioni*.

Si consideri p. es. un treno o un'asta rigida $A' B'$, che si muova di moto traslatorio rispetto ad una strada rettilinea $A B$: in un certo istante un viaggiatore vede gli estremi $A' B'$ del treno coincidere coi punti A e B della strada. Per identi-



ficare un istante, due osservatori collocati in A e B possono ricorrere a segnalazioni di diversa natura: segnalazioni balistiche, acustiche, ottiche ecc. Tutte queste indicazioni portano egualmente a ritenere come simultanei due eventi in A e B che vengono segnalati contemporaneamente ad un osservatore collocato nel punto medio C del segmento $A B$.

Ora, se le stesse segnalazioni vengono fatte sul sistema mobile $A' B'$, l'idea che ci formiamo comunemente della simultaneità ci porta a credere che «avvenimenti simultanei per A e B saranno del pari simultanei per $A' B'$ ». E nella cinematica di GALILEO ciò accade realmente, almeno per segnalazioni balistiche: giacchè la velocità del segnale lanciato da A' si compone colla velocità di traslazione (p. es. positiva) di A' , e quella del segnale lanciato da B' colla velocità (negativa) di B' , sicchè i due segnali giungono contemporaneamente al punto C' che divide per metà il segmento $A' B'$, sebbene questo punto si sia nel frattempo spostato allontanandosi da C . Ma questa deduzione è legata alla legge di composizione per somma delle velocità, in una maniera invertibile: se gli eventi simultanei per A e B devono apparire simultanei anche per A' e B' , bisogna che le velocità delle segnalazioni a mezzo delle quali si giudica della contemporaneità, si compongano colla velocità del sistema A' e B' , secondo la legge cinematica galileiana.

Supponendo ancora valida questa cinematica, affinchè il giudizio di simultaneità conduca allo stesso risultato con se-

gnalazioni ottiche, bisogna che anche la velocità della luce si componga con quella della sorgente, come avviene nell'ipotesi balistica (teoria dell'emissione) di NEWTON.

Invece si può chiarire ciò che accade secondo l'ottica ondulatoria di HUYGHENS fermandoci un momento a considerare il caso delle segnalazioni acustiche, nell'aria. Se (movendosi $A' B'$ nell'aria che costituisce l'atmosfera terrestre) si ricorre a segnalazioni acustiche, la velocità dell'onda sonora non dipende da quella della sorgente e quindi i segnali partiti contemporaneamente da A' e B' non giungono insieme a C' : così il confronto dei tempi A' e B' con segnali balistici ed acustici dà luogo a una differenza, che vale a discernere il moto del sistema $A' B'$ rispetto all'aria, sede delle vibrazioni sonore.

Quel che si è detto per le segnalazioni acustiche rispetto all'aria, vale per le segnalazioni ottiche rispetto all'etere nella teoria ondulatoria di HUYGHENS.

Ora EINSTEIN, pur lasciando cadere l'ipotesi dell'etere supporto delle ondulazioni luminose, ha dovuto conservare una conseguenza positiva di questa teoria ondulatoria, a cui tale modello aveva familiarizzato i fisici per analogia col caso del suono: *la velocità della luce resta costante indipendentemente dal moto della sorgente.*

Questo principio ha assunto un'importanza così grande per lo sviluppo della teoria, che vale la pena di dire come esso sia confermato da osservazioni ed esperienze di vario genere: specie dalle osservazioni relative alle stelle doppie di DE SITTER, e dalle esperienze dirette di MAJORANA in cui intervengono sorgenti luminose terrestri (specchi) in rapido moto.

Ciò posto, ritorniamo alla considerazione del nostro treno $A' B'$. I due viaggiatori posti in A' e B' , comunicando a mezzo di segnalazioni ottiche, debbono giudicare come simultanei due avvenimenti dei rispettivi luoghi, che sono successivi per un osservatore legato alla strada su cui corre il treno. E se vale la cinematica galileiana gli stessi osservatori avranno modo di discriminare la differenza, per mezzo di segnalazioni balistiche, onde infine riusciranno — con esperienze interne al loro sistema — a riconoscere il movimento traslatorio del sistema stesso. Vi è qui una palese contraddizione col postu-

lato di relatività: se la strada AB appartiene ad un sistema inerziale, anche $A'B'$ costituisce un sistema somigliante, e nessuna esperienza interna deve permettere di decidere del moto di questo rispetto a quello!

Il paradosso si risolve modificando opportunamente la legge galileiana di composizione delle velocità. Senza indugiare sul calcolo che qui occorre, scriveremo la formula della cinematica einsteiniana, dove u e v sono le velocità componenti e w la risultante, c designa la velocità della luce:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Da essa appare in particolare che se una delle due velocità componenti raggiunge c , anche w è uguale a c , che costituisce un *massimo delle velocità*.

La modifica della cinematica sopra esposta, risponde alla esigenza che per riguardo a due osservatori A' e B' del nostro sistema mobile, qualsiasi segnalazione balistica conduca al medesimo criterio della simultaneità di due avvenimenti che viene offerto dalle segnalazioni ottiche. Ma abbiamo già rilevato come tale criterio differisca da quello che appartiene ad un osservatore legato alla strada AB , rispetto a cui il nostro sistema $A'B'$ si muove. Pertanto *il giudizio di contemporaneità degli avvenimenti non è assoluto, ma relativo al moto dell'osservatore che li contempla*.

Due avvenimenti contemporanei per un certo osservatore saranno, per un altro, successivi in un certo ordine ovvero nell'ordine inverso.

Questo risultato critico porta una rivoluzione nelle idee ricevute intorno al tempo. Conviene rimuover subito la più grave difficoltà filosofica che osta ad accoglierlo. Se di due eventi P e Q , P precede Q , noi concepiamo che P possa influire sopra Q come causa o concausa; ma se la precedenza di P a Q è relativa, sicchè per un altro osservatore Q preceda P , sembra si vada incontro ad ammettere che un avvenimento possa influire sul passato allo stesso modo che sul futuro!

Questa difficoltà è molto grave, perchè tutti i criterii regolativi del determinismo scientifico ne sarebbero rovesciati.

Ma si muove osservando che nel sistema fisico einsteiniano ogni azione si propaga — per contiguità — con una certa velocità che — come accennammo — non può mai superare la velocità della luce: invece gli avvenimenti suscettibili di apparire simultanei a qualche osservatore, il cui ordine è puramente relativo o invertibile, sono quelli che non possono agire come causa l'uno dell'altro, perchè la loro distanza nel tempo rimane in ogni caso assai piccola in confronto alla distanza nello spazio, cioè inferiore a quella occorrente al propagarsi d'un'azione dall'uno all'altro colla velocità della luce.

Diciamo ora che la relatività del tempo, conseguita colle precedenti considerazioni, porta di conseguenza la *relatività delle lunghezze*: per misurare la lunghezza del treno $A'B' = AB$ occorre trasportare l'unità-metro lungo $A'B'$ un certo numero di volte, che dà appunto la misura cercata per i viaggiatori; ma per i cantonieri (posti sulla strada AB), A è la posizione della coda del treno ad un certo istante, mentre B è la posizione della testa in un istante successivo, così la *lunghezza apparente del treno* risulta accorciata per un osservatore che dalla strada lo vede muoversi.

Questi risultati si possono tradurre in formule precise, che ci limiteremo ad enunciare:

Se due sistemi S ed S' si muovono l'uno rispetto all'altro colla velocità v, un intervallo di tempo che per un orologio entro S' venga misurato da τ' , rispetto ad un orologio di S verrà misurato da

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

e l'intervallo di spazio fra due punti di S', che entro S' ha la lunghezza l' avrà rispetto ad S la lunghezza

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

È appena necessario avvertire che per la velocità ordinaria (v molto piccolo in confronto alla velocità della luce c) il fattore di riduzione

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

è vicinissimo all'unità: così, per un osservatore posto nel sole, il diametro terrestre (di circa 12740 km.) apparirà scorciato nella direzione del moto della terra, soltanto di cm. 6,4!

§ 12. **Lo spazio-tempo di Minkowsky.** — Gli sviluppi precedenti mettono in luce che lo spazio e il tempo sono soltanto due astrazioni, di fronte ad una realtà composita, che è lo spazio-tempo. Per comprendere questa conclusione fondamentale, cerchiamo di fissare un punto dello spazio: è ovvio che — per il relativista — la domanda non ha senso se non in rapporto ad un sistema materiale di riferimento. La mia casa rimane veramente nello stesso posto? Sì, per riguardo alla terra, ma un osservatore posto nel sole la vede muoversi trasportata dalla terra stessa. Che cosa occorre dunque per identificare i punti dello spazio? Che ci riferiamo ad un osservatore S e ad un determinato istante: i punti che egli può fissare simultaneamente (nel detto istante) sono così definiti, e il loro insieme è lo spazio. Ma ecco che passando ad un altro osservatore S' — mobile rispetto ad S — lo spazio di S subisce un cambiamento essenziale, perchè quegli eventi contemporanei di cui S si valeva per definire due punti, sono per S eventi successivi e quindi la posizione relativa dei punti corrispondenti è divenuta per S affatto diversa.

Ciò che rimane fisso, in questa crisi dei nostri concetti più familiari, è la nozione dell'*evento*. Rispetto ad S si può introdurre un sistema di coordinate e determinare un punto (x, y, z) in un certo istante t : la quaterna di numeri x, y, z, t risponde ad un evento determinato, quale può osservarsi per esempio da S' ; che a sua volta lo definirà con una quaterna di coordinate x', y', z', t' ; comunque la coincidenza dei due eventi

$$(x y z t) \equiv (x' y' z' t')$$

ha un significato assoluto, cioè indipendente dall'osservatore che li contempla.

Ora quattro numeri-coordinate x, y, z, t , definiscono un *continuo a quattro dimensioni* che, in senso astratto, si può ancora chiamare uno *spazio*: questo è l'universo dei punti-eventi o lo *spazio-tempo* di MINKOWSKY. Anche prima di EINSTEIN questa forma poteva essere definita (ed abbiamo invero la

denominazione di *cronotopo* datale da GIOBERTI (1); ma la realtà che essa esprime si presumeva potersi scindere in due altre, lo spazio e il tempo della comune intuizione, in quanto si attribuiva un senso reale assoluto alle varietà (o ipersuperficie)

$$t = \text{cost.}$$

Oggi questa scomposizione appare (sia pure entro piccoli limiti) relativa alla scelta dell'osservatore o del sistema di riferimento, e quindi convenzionale. Veramente ha ragione MINKOWSKY di dire che lo spazio e il tempo sono ormai due cadaveri, di cui prende il posto lo spazio-tempo!

Giova però di considerare questo universo sotto la specie geometrica d'uno *spazio a quattro dimensioni*, S_4 , in cui le equazioni lineari fra le coordinate x, y, z, t , rappresenteranno gli *imperpiani* (S_3), secantisi a due a due secondo *piani* (S_2) e a tre a tre secondo *rette* (S_1) ecc.. Questo linguaggio geometrico offre una figurazione interessante della cinematica einsteiniana, di cui daremo solo un cenno fuggevole.

Cerchiamo di definire l'intervallo o *distanza* che separa due punti-eventi del nostro universo, cioè due punti dello S_4 . Una misura di questo intervallo s'introduce naturalmente nel caso in cui i due punti-eventi possano ritenersi come uno stesso luogo per riguardo ad un sistema inerziale di Galileo (in moto traslatorio uniforme), poichè allora si è condotti a considerare il *tempo proprio* che separa i due eventi, cioè l'intervallo di tempo relativo ad un orologio portato dal sistema stesso (che ha il valor massimo in confronto al tempo misurato con orologi diversi): così l'intervallo di spazio-tempo che separa la mia casa di ieri da quella d'oggi, viene misurato dal tempo trascorso fra ieri ed oggi, in rapporto ad un orologio che si muove colla terra.

Applichiamo questa definizione a due *punti* (punti-eventi) dell'universo S_4 , infinitamente vicini, come (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$: allora per un movimento infinitesimo — da ritenere traslatorio uniforme — che sovrappone i due punti, si trova il tempo proprio ds dato dalla formola

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

(1) Cfr. R. MARCOLONGO, *Relatività*. Principato, Messina, 1921.

sentazione di una vecchia teoria. Non vi sarebbe difficoltà a spingere avanti questo sviluppo, adottando per le forze l'ipotesi gravitazionale di NEWTON; allora si troverebbe, nello S_4 , una metrica ben definita, corrispondente ad una certa espressione del quadrato dell'elemento lineare ds .

Ma EINSTEIN ha proceduto altrimenti, e il valore della sua ricerca sta in ciò che essa riesce a scoprire una nuova dinamica, rispetto a cui la dinamica newtoniana figura soltanto come un'approssimazione. Nella meccanica classica le forze gravitazionali danno luogo ad un *potenziale newtoniano*, che soddisfa ad una ben nota equazione a derivate parziali; ora a questa equazione deve corrispondere un sistema d'equazioni differenziali cui soddisfino i coefficienti g della forma ds . Per determinare tale sistema (oltre ad adottare qualche ipotesi matematica semplificativa) EINSTEIN si vale essenzialmente del *principio di relatività* preso nella sua più vasta estensione:

le leggi della natura debbono tradursi in proprietà dello spazio-tempo che sieno intrinseche, cioè non dipendenti dal particolare sistema di coordinate x, y, z, t rispetto a cui vengono espresse.

In altri termini, le equazioni a derivate parziali a cui soddisfano le g non debbono mutare di forma se si eseguisce sulle x, y, z, t una qualsiasi sostituzione, passando dunque ad un sistema di coordinate curvilinee affatto arbitrario. Questa condizione d'*invarianza* conduce a scrivere a priori le equazioni anzidette e così a definire (almeno virtualmente) il ds^2 , e quindi la metrica dello S_4 e la dinamica dello spazio fisico.

La dinamica di EINSTEIN contiene come approssimazione la dinamica di NEWTON (forze centrali esercitanti fra le masse in ragione inversa ai quadrati delle distanze), ma importa una correzione di questa, che dà luogo ad osservazioni o esperienze discriminatrici: è soprattutto importante a tale riguardo la spiegazione, che essa porge dell'anomalia osservata pel moto del perielio di Mercurio (circa $42''$ in un secolo, secondo NEWCOMB), che restava inesplicata nella teoria newtoniana.

Ma qui ci fermiamo, senza addentrarci in un esame della dinamica einsteiniana. Basti dire che — per la grandiosità della sintesi di conoscenze diverse, meccaniche, ottico-elettro-

magnetiche, non meno che per il soddisfacimento di esigenze razionali non appagate dalla dottrina di NEWTON — codesta dinamica rappresenta il grado più elevato raggiunto dalla scienza contemporanea. Il progresso è frutto, non soltanto di un lungo sviluppo delle teorie fisiche dell'eletto-magnetismo, bensì anche di una revisione filosofica dei concetti che stanno a base delle nostre costruzioni scientifiche, e in particolare della critica dei principii della geometria cui si aggiunge la critica del tempo. Mercè questa larga revisione critica la pseudo-evidenza o necessità dello spazio e del tempo assoluto sono state sacrificate a un più profondo apprezzamento delle ragioni sufficienti dei fenomeni che porta la relatività, e quindi il carattere invariante delle leggi della natura, la contiguità dell'azione causale ecc.

Il lettore che voglia approfondire lo studio di questi argomenti, potrà cominciare dalla critica dei fondamenti della meccanica come scienza locale, rendendosi conto del significato dei concetti e dei principii della dinamica relativa ad un sistema di riferimento qualsiasi, p. es., nei cap. V e VI dei nostri citati « Problemi della Scienza »; passando poi alla meccanica come scienza cosmica, egli troverà un'esposizione volgarizzata delle dottrine einsteiniane in ALBERTO EINSTEIN « sulla teoria speciale e generale della relatività », trad. Calisse, Bologna, Zanichelli, 1920; GUIDO CASTELNUOVO « Spazio e tempo secondo le vedute di A. EINSTEIN », Bologna, Zanichelli, 1923.
