Enriques, Federigo

Il cerchio. Articolo di prova per l'Enciclopedia italiana

Period. di Matem. (IV) **VI** (1926), pp. 26-38.

dei due nuclei, descrivendo delle orbite intrecciate, e allora il composto si dice omeopolare; se invece gli elettroni si separano in un gruppo che rota attorno all'uno, e in un gruppo che rota attorno all'altro nucleo la molecola si dice polare. A questo secondo tipo appartengono specialmente le molecole dei sali, e il suo studio è assai più avanzato che non quello dei composti omeopolari.

Consideriamo p. es. un atomo di cloro e uno di sodio. L'atomo di cloro ha molta tendenza ad assorbire un elettrone, perchè, con esso, forma un ione negativo, Cl^- assai stabile; invece il Na perde assai facilmente un elettrone, perchè il ione che ne risulta, Na^+, è molto stabile. Si capisce dunque che quando i due atomi si troveranno in presenza uno dell'altro, il sodio cederà uno dei suoi elettroni al cloro, in modo che i due atomi si trasformeranno nei due ioni Cl^- e Na^+. Una volta formati, questi due ioni di segno contrario si attireranno per la legge di Coulomb, avvicinandosi finchè la repulsione dei loro elettroni corticali non diventerà tale da controbilanciare la attrazione. Avrà così luogo la formazione della molecola di cloruro di sodio.

Arcetri, 1925. Enrico Fermi

Il Cerchio [1]

Cerchio. Dicesi cerchio o circolo (circulus, κύκλος) la superficie piana racchiusa da una curva luogo dei punti equidistanti da un punto interno detto « centro »: codesta curva prende anche lo stesso nome di « cerchio », ovvero si distingue dalla superficie racchiusa col nome di « circonferenza » (circumferentia, κύκλου περιφερεία = periferia del cerchio).

Il segmento che congiunge il centro con un punto della circonferenza (o anche la sua lunghezza) si chiama « raggio »

---

[1] Articolo di prova per l'Enciclopedia Italiana: cfr. le « Norme » nelle Notizie.

del cerchio; ogni retta per il centro, od anche il segmento di questa retta intercetto dalla circonferenza, si chiama « diametro »; « corda » è un segmento cogli estremi sulla circonferenza.

La figura del cerchio è naturalmente conosciuta alla più remota antichità, ed a questa anche risalgono alcuni problemi celebri come quelli della quadratura, di cui diremo in appresso.

1. Proprietà elementari.

Le proprietà elementari del cerchio trovansi già esposte negli *Elementi* d'Euclide (circa 300 a. C.) e segnatamente nel 3° libro, senza che si possa sicuramente affermare a quale epoca ne risalga la scoperta nella storia greca: soltanto di alcune (divisione del cerchio in parti uguali per mezzo dei suoi diametri, l'angolo inscritto nel semicerchio è retto) vi è qualche motivo di attribuirle a Talete di Mileto (nel 6° sec. a. C.). Le prime proprietà elementari, cui qui vogliamo accennare, si possono dividere in due gruppi:

1) Proprietà dei diametri: ogni diametro divide per metà le corde perpendicolari e viceversa.

2) Proprietà degli angoli iscritti in un arco di cerchio: tutti gli angoli iscritti in un medesimo arco sono uguali fra loro e alla metà dell'angolo al centro i cui lati vanno all'estremo dell'arco; in particolare l'angolo iscritto nel semicerchio è retto. Reciprocamente il luogo dei punti da cui un dato segmento è veduto sotto un angolo fisso è un arco di cerchio che ha il segmento come corda.

Altre proprietà elementari che concernono i cerchi sono:

3) Il cerchio è determinato da tre punti non allineati.

4) Le proprietà relative alle mutue intersezioni di due cerchi, che — nei trattati moderni, a partire da Legendre e Baltzer — si sogliono riassumere nel teorema: due cerchi, in un piano, hanno due punti d'intersezione se la distanza dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi; invece si toccano (esternamente o internamente) in un punto se la detta distanza uguaglia la somma o risp. la differenza dei raggi; e infine non hanno alcun punto comune (restando esterni l'uno all'altro e risp. l'uno interno

all'altro) se la distanza dei centri è maggiore della somma o minore della differenza dei raggi.

5) La proprietà di due corde che si tagliano (internamente o esternamente al cerchio) di dividersi scambievolmente in parti inversamente proporzionali, onde segue che « il prodotto delle distanze d'un punto dai due estremi d'una corda condotta per esso riesce indipendente dalla corda considerata », costituendo quella funzione del punto che riceve il nome di « potenza di esso rispetto al cerchio ». Più avanti rileveremo il significato della « potenza » per riguardo alla teoria dei sistemi di cerchi.

6) Le costruzioni delle tangenti comuni a due cerchi o del cerchio tangente a cerchi o rette date, sempre in numero di tre: problemi di contatto che sono risolti elementarmente fino da Apollonio di Perga.

2. Divisione del cerchio.

Il problema della divisione del cerchio, ossia della costruzione dei poligoni regolari iscritti, è celebre fin dall'antichità.

Già i Pitagorici scoprirono la costruzione dei poligoni regolari di 3 e 6 lati (triangolo e esagono) ed anche del pentagono e del decagono: e questi problemi (e quindi anche la costruzione del pentadecagono) si vedono risolti nel 4° libro dell'Euclide. Sostanzialmente le regole costruttive si possono far dipendere, oltrechè dalla bisezione dell'angolo, da due teoremi: « il lato dell'esagono iscritto nel cerchio è uguale al raggio », e « il lato del decagono regolare è la parte aurea del raggio », cioè una parte del raggio il cui quadrato uguaglia il rettangolo (prodotto) della differenza e dell'intero segmento.

Tenuta presente la bisezione dell'angolo, di qui si desume la costruzione dei poligoni di

$$2^p, \quad 3 \cdot 2^p, \quad 5 \cdot 2^p, \quad 3 \cdot 5 \cdot 2^p \quad \text{lati.}$$

Ora è naturale di cercare d'estendere questi resultati proponendosi la costruzione di altri poligoni regolari, come quelli di 7, 9, 11 lati. Ma il problema va incontro a nuove ed essenziali difficoltà, tantochè dapprima si presenta la ricerca di soluzioni approssimate. Così Ipparco di Nicea (nel 2° sec. a. C.) ha indicato delle formule approssimate per i lati dell'ennagono e dell'endecagono regolare, le quali vengono riportate da Erone d'Alessandria, che vi aggiunge una formula analoga per il lato dell'ettadecagono.

La questione, in quell'epoca, e fino a che l'analisi non divenne capace di fornire nuovi e più rapidi mezzi di calcolo, aveva importanza per l'astronomia, in rapporto alla costruzione di tavole delle corde (cui più tardi gli arabi sostituirono tavole di « seni », o corde degli archi doppi). Ed a tale proposito giova rammentare che nel 2° sec. a. C., l'astronomo alessandrino Claudio Tolomeo, nel cosidetto « Almagesto » ebbe a costruire una tavola di corde procedente per gli archi di $^1/_2$ grado in $^1/_2$ grado: dove, per mettere le sue tavole d'accordo colla divisione sessagesimale del cerchio già adottata fin dai Babilonesi, egli ha dovuto dare la trisezione approssimata dell'arco di 1 $^1/_2$ gradi, cui si perviene con semplici bisezioni. La difficoltà che qui s'incontra risiede in ciò che la trisezione dell'angolo (come la costruzione dei poligoni regolari di 7, 9 lati di cui diciamo in appresso) conduce, non più ad equazioni di 2° grado, bensì ad un'equazione di 3° grado.

Senza arrestarci sulle ricerche di soluzioni approssimate che proseguono quelle accennate innanzi (basterà solo nominare l'arabo Aboul Wafa 900-998, e poi, all'epoca del Rinascimento, Giordano Nemorario, Luca Pacioli, Girolamo Cardano, ecc.), diciamo ora che sotto forma esatta il problema della costruzione dei poligoni regolari diversi da quelli euclidei viene trattato per la prima volta dagli arabi (Albiruni, Abu'l Dschud), i quali s'incontrano appunto nella relativa equazione di 3° grado.

Nuovi tentativi di risoluzione sono stati ritrovati dal Vacca e dall'Agostini nei matematici italiani del Rinascimento: per l'ettagono in Luca Pacioli, Lodovico Ferrari, Girolamo Cardano, e per l'ennagono in Raffaele Bombelli. Più tarde sono le ricerche comunemente note di Keplero, Huyghens, Agnesi.

Da queste ricerche si passa poi a quella del Vandermonde (1771) che collega la costruzione dal poligono regolare di 11 lati alla risoluzione, nel campo complesso, dell'equazione binomia

$$x^{11} = 1.$$

Appunto di qui prende le mosse la classica analisi di Gauss.

La quale riesce a dimostrare rigorosamente che i problemi relativi alla costruzione dei poligoni regolari di 7, 9, 11 lati non sono di quelli che possono risolversi elementarmente, cioè coll'uso degli istrumenti riga e compasso. Anzi Gauss assegna la condizione necessaria e sufficiente per la costruibilità dei poligoni regolari di n lati: sono costruibili elementarmente quei poligoni e soltanto quelli per cui il numero n si decompone nel prodotto di una potenza del 2 moltiplicata per fattori primi della forma $2^n + 1$, ciascuno dei quali vi compaia semplicemente coll'esponente 1.

Fra i poligoni regolari di un numero primo di lati, si trova così, dopo i casi euclidei, il poligono di 17 lati, per cui si danno poi in effetto svariate costruzioni elementari.

3. Quadratura del cerchio.

La misura della superficie del cerchio di raggio r e della lunghezza della circonferenza danno luogo a due problemi strettamente connessi, perchè — designando con π il rapporto della circonferenza al diametro, che si dimostra essere costante — la superficie è misurata da πr^2, mentre la lunghezza vale $2\pi r$: ciò implica la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei raggi e delle circonferenze ai diametri, collo stesso coefficiente di proporzione. Sotto l'aspetto geometrico, si può enunciare che il cerchio ha la stessa superficie d'un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio.

Se si sapesse effettivamente costruire un segmento della lunghezza della circonferenza sarebbe poi facile trasformare il detto triangolo in un quadrato e così risolvere il problema della « quadratura del cerchio », che invece dà luogo ad una difficoltà essenziale ed anzi alla impossibilità d'una soluzione elementare (con riga e compasso).

Le ricerche sul problema della quadratura del cerchio risalgono alla più remota antichità. Infatti nel « Papyrus Rind » attribuito allo scrittore egiziano AHMES (circa 2000 a. C.) si trova appunto la domanda di costruire un quadrato equivalente ad un dato cerchio. E, come risposta, viene data la regola di prendere il diametro del cerchio diminuito di $^1/_9$: ciò che equivale a prendere per π il valore assai bene approssimato 3,1604 (invece che $\pi = 3,1415\ldots$).

Il primo accenno al problema della rettificazione della circonferenza si ha nella Bibbia, in cui si attribuisce alla lunghezza della circonferenza il valore triplo del raggio, assumendo dunque implicitamente $\pi = 3$, che è un valore grossolanamente approssimato.

Ora soltanto presso i Greci i problemi della misura della superficie e della lunghezza del cerchio danno luogo ad uno sviluppo scientifico. Pare che da EUDOSSO di Cnido nel 4° sec. a. C. — se non già da IPPOCRATE di Chio — la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei raggi (cfr. EUCLIDE XII, 1, 2) abbia ricevuto la prima dimostrazione rigorosa. Occorreva però valutare, in una maniera sistematica il rapporto, π, che qui interviene. Questa fu l'opera d'ARCHIMEDE, nello scritto κύκλου μέτρησις: la rettificazione della circonferenza viene ottenuta per approssimazioni successive calcolando i perimetri dei poligoni iscritti e circoscritti di 6, 12, 24... lati. E dal poligono di 96 lati l'A. trae un valore di π approssimato per eccesso a meno di 2/1000, cioè 22/7. Il metodo anzidetto si trova spiegato in tutti i trattati moderni di geometria elementare.

Esso ha ricevuto, dopo ARCHIMEDE uno sviluppo da parte del matematico olandese ADRIANO MEZIO (seconda metà del sec. 16°) che assegnò per π il valore $\dfrac{355}{113} = 3,\ 14\ 15\ 29\ldots$, diverso dal vero solo dalla 7ª cifra decimale in poi. In seguito, collo stesso metodo, il matematico francese FRANCESCO VIETA (1540-1603) ha spinto il calcolo approssimato di π fino alla 9ª cifra decimale esatta, ch' egli ottiene dal poligono di 6.2^{16} lati. ADRIANO ROMANO e LUDOLPH VAN CEULEN, olandesi, spinsero il calcolo ancor più innanzi: quest' ultimo fino alla 35ª decimale esatta. D'altra parte SNELLIUS e HUYGHENS hanno perfezionato il metodo stesso.

Ma, a questo punto si apre un nuovo indirizzo di ricerca, che contrassegna un secondo periodo scientifico: in luogo di calcolare π col metodo geometrico dei poligoni iscritti e circoscritti al cerchio, si scoprono espressioni analitiche che porgono π mediante semplici algoritmi infiniti. Così il matematico inglese WALLIS (1616-1703) dà l'espressione

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

e dimostra esatto lo sviluppo in frazione continua

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ddots}}},$$

enunciato senza dimostrazione dal BROUNKER (1620-1684).

Sviluppi in serie atti a calcolare π partono dallo sviluppo scoperto dal GREGORY e dal LEIBNIZ:

$$\text{arc tang}\, x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\cdots$$

Facendo $x=1$ si ottiene la cosidetta serie di LEIBNIZ

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

la quale può convenientemente trasformarsi in altre più rapidamente convergenti: p. es. nella serie di MACHIN (1680-1752)

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\ldots\right).$$

Altri sviluppi infiniti notevoli sono stati dati da EULERO (1707-1783) e da altri.

Senza indugiarci di più su tale argomento, vogliam dire che la quadratura approssimata del cerchio e la valutazione di π che vi si collega, dà origine a problemi interessanti di geometria asintotica (V. *Asintotica G.*): p. es. se nel piano d'un cerchio si traccia un reticolo di quadrati, nell'ipotesi che il raggio r del cerchio sia molto grande rispetto al lato dei quadrati preso come unità, il numero dei vertici del reticolo dà approssimativamente l'area del cerchio: e GAUSS ha dimostrato che — per $r = \infty$ — la differenza di codesto numero dall'area è dell'ordine di r al più; recentemente LANDAU ha fatto vedere che codesto ordine resta inferiore ad $r^{\frac{2}{3}}$.

Ora gli anzidetti resultati sugli sviluppi analitici e sulla valutazione approssimata di π si allontanano dal problema della quadratura del cerchio, in senso stretto, com'era concepito dai Greci avanti Archimede. Per essi invero si trattava di « costruire colla riga e col compasso, il lato d'un quadrato avente ugual area d'un dato cerchio ».

Abbiamo già detto come questo problema sia sostanzialmente equivalente a quello della rettificazione della circonferenza. Ma, tanto nella forma diretta, che in questa forma modificata, i tentativi fatti per risolvere il problema riuscirono vani. E già gli antichi — dopo l'insuccesso di IPPOCRATE di Chio (che tuttavia da tali ricerche fu condotto alla scoperta di lunule quadrabili, circa 450 a. C.) — mostrarono di dubitare della sua possibilità, come appare dall'uso che DINOSTRATO ha fatto per questo scopo della curva *quadratrice*, scoperta e adoperata da IPPIA d'Elide per la trisezione dell'angolo.

Col passare dei secoli l'antico problema della quadratura del cerchio, nella sua posizione ristretta in cui si chiede una soluzione con riga e compasso, ha acquistato sempre maggiore celebrità, invitando matematici ed anche ingenui appassionati delle difficoltà matematiche a tentarne la soluzione. Ma i matematici più colti compresero bene che la questione doveva porsi sopra il terreno della possibilità, domandando « quali proprietà del numero π corrisponderebbero all'ipotesi che la quadratura del cerchio fosse possibile » e « se veramente π goda o no di tali proprietà ».

Alla prima domanda si risponde « se la quadratura del cerchio è possibile, con riga e compasso, il numero π, rapporto della circonferenza al diametro, deve soddisfare ad un'equazione algebrica a coefficienti interi, risolubile con sole estrazioni di radici quadrate ».

L'ipotesi più semplice che qui potrebbe avverarsi sarebbe che π fosse un numero razionale (radice di un'equazione di 1° grado); ma anche essendo irrazionale la possibilità della quadratura non sarebbe ancora esclusa.

Come si vede si tratta d'indagare la *natura aritmetica* del numero π.

LAMBERT, pel primo, utilizzando gli sviluppi in frazione continua d'EULERO, ha fatto un passo su questa via; egli è riuscito a provare che π, così come il numero e base dei logaritmi neperiani, è un numero *irrazionale*.

Più tardi è nato il dubbio se (indipendentemente dalle proprietà cui questa dovrebbe soddisfare) potrebbe darsi che non esista alcuna equazione a coefficienti interi avente per radice π; e in questa occasione si è domandato anzitutto se esistano numeri irrazionali *trascendenti*, che non soddisfino ad alcuna equazione algebrica a coefficienti interi. La questione pregiudiziale è stata risolta affermativamente dal LIOUVILLE (1840) e poi dal CANTOR, che ha fatto vedere anzi come l'insieme dei numeri trascendenti sia, in confronto a quello dei numeri algebrici, infinitamente più esteso (cioè di potenza superiore: V. *Infinito*). Finalmente HERMITE nel 1873 riusciva a stabilire, per la prima volta, la trascendenza d'un numero effettivamente dato nell'analisi, cioè del numero e, base dei logaritmi neperiani. E quindi il LINDEMANN (« Ueber die Zahl π », Math. Annalen 1882) dimostrava che anche e^x dove x sia un esponente algebrico è sempre un numero trascendente; donde, utilizzando la relazione d'EULERO $e^{\pi i} = -1$, segue che anche π deve essere un numero trascendente.

La classica questione della quadratura del cerchio era così risoluta in senso negativo, ma in una maniera precisa e definitiva!

E, all'infuori degli incolti pazzoidi che ognora riprendono ostinatamente il tentativo (soprattutto ad ogni nuova primavera!) nessun matematico ormai si proverà più a sciogliere l'antico problema, almeno nel senso in cui la domanda era tradizionalmente posta e che sopra abbiamo spiegato. In altri sensi, naturalmente, il problema — ammettendo soluzione — non deve affatto dirsi impossibile, ed una soluzione di esso teoricamente perfetta si ottiene invero dall'uso degli integrafi.

4. Proprietà isoperimetrica.

Fra tutte le linee chiuse di data lunghezza il cerchio racchiude area massima, e però anche il cerchio è la linea di lunghezza minima fra quelle che racchiudono un'area data. Questa proprietà *isoperimetrica* è nota fin dall'antichità: e se ne trova una dimostrazione rigorosa fin da ZENODORO (che sembra essere di poco posteriore ad ARCHIMEDE); cfr. PAPPI ALEXANDRINI: « Mathematicae Collectiones » (ed. it., Bologna 1660, ed. Hultsch, Berlino 1878 col supplemento *Zenodori Commentarius de Figuris isoperimetricis*).

Una nuova dimostrazione semplicissima essa ha ricevuto ai primi del secolo scorso, per opera di STEINER, che su di essa ha fondato, in una maniera elegantissima, tutta la teoria degli isoperimetri (V. *Isoperimetri*).

Vi sono su questo argomento molti sviluppi interessanti, che qui non possono trovar posto, pei quali rimandiamo all'articolo di CHISINI e al libretto di BLASCHKE, citati in fine nella bibliografia.

5. Il cerchio nella geometria analitica e proiettiva.

L'equazione del cerchio, prendendo come assi cartesiani due diametri perpendicolari, è

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dove r designa il raggio. Rispetto ad assi cartesiani ortogonali arbitrarii, l'equazione stessa prende la forma

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0,$$

che differisce dall'equazione di 2° grado completa per la mancanza del termine in xy e per l'uguaglianza dei due coefficienti di x^2 e di y^2.

Queste condizioni mostrano che il cerchio figura fra le curve di 2° grado (V. *Coniche*) come una curva particolare; ed anzi esse si lasciano interpretare cercando le intersezioni (immaginarie) del cerchio stesso colla retta all'infinito del piano: per ciò si renderà l'equazione omogenea cambiando

x e y in x/z e y/z e moltiplicando quindi per z; allora per $z = 0$ si avranno le intersezioni cercate.

Resulta così che: « tutti i cerchi del piano passano per due punti fissi immaginarii all'infinito, detti *punti ciclici* » e reciprocamente « i cerchi sono caratterizzati come coniche passanti pei detti punti ».

I punti ciclici rispondono alle direzioni delle rette *isotrope* uscenti dall'origine:

$$y = \pm ix;$$

la loro feconda considerazione risale alla scuola francese della prima metà del secolo passato (PONCELET e LAGUERRE).

A proposito dell'equazione del cerchio riferita a due diametri ortogonali vogliamo ancora fare due osservazioni.

Anzitutto l'equazione predetta

$$x^2 + y^2 = 1,$$

dove si è assunto il raggio $r = 1$, conduce nel modo più rapido all'introduzione delle *funzioni circolari*, giacchè — introducendo la lunghezza α dell'arco di cerchio che ha per estremo il punto (xy) ed il punto origine $(1, 0)$ — si possono definire

$$x = \operatorname{sen} \alpha, \quad y = \cos \alpha$$

ed

$$x/y = \operatorname{tg} \alpha;$$

onde appaiono le relazioni note fra queste funzioni (V. *Trigonometria*).

La seconda osservazione è che le coordinate x e y del punto della circonferenza si lasciano esprimere come funzioni razionali fratte d'un parametro t, per mezzo delle formule

$$x = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}:$$

di qui emerge, in particolare, che al cerchio appartengono infiniti punti di coordinate razionali, del tipo m/p e n/p con n, m, p, interi) a cui rispondono soluzioni in numeri interi dell'equazione pitagorica $x^2 + y^2 = p^2$. Per quest'equazione, considerata fino dall'antichità, v. PITAGORA (teorema di); il modo di risoluzione di essa precedentemente accennato è stato messo in rilievo recentemente da FELIX KLEIN.

6. Sistemi di cerchi.

I geometri francesi e tedeschi della prima metà del secolo scorso (Poncelet, Steiner, Möbius, ecc.) si sono assai occupati dei sistemi di cerchi le cui equazioni si ottengono come combinazioni lineari di quelle di due e tre cerchi dati (*fasci* e *reti* di cerchi): l'importanza di questi apparendo anche in relazione alle prime applicazioni del principio della continuità geometrica. Così il fascio di cerchi, che — nel caso di cerchi che si tagliano — è costituito da tutti i cerchi passanti per due *punti base* fissi, si lascia anche definire nel caso in cui i detti punti base diventino immaginarii, come il sistema dei cerchi che hanno a due a due lo stesso *asse radicale*. Asse radicale di due cerchi è la retta luogo dei punti di ugual potenza rispetto ad essi; retta già conosciuta dai geometri arabi intorno al 1000 come luogo dei punti da cui partono tangenti di ugual lungezza ai due cerchi, e che — nel 1813 — ha ricevuto la sua attuale denominazione da Gaulthier La Tour.

Analogamente la rete definita da tre cerchi dati contiene i cerchi che hanno il medesimo *centro radicale*: punto d'ugual potenza rispetto a tre cerchi.

Ricerche d'ordine più elevato hanno poi messo in luce che il sistema di tutti i cerchi del piano (rispetto ad una interpretazione astratta della geometria in cui le « coordinate » dei cerchi si assumono a rappresentare « punti » dello spazio) dà luogo ad una notevole rappresentazione della geometria non-euclidea.

Ma noi non c'indugeremo su tale argomento e nemmeno sugli studi anche più elevati concernenti i sistemi di cerchi nello spazio, che basterà segnalare. Menzioneremo soltanto (e per il loro interesse geometrico e per il legame colle sostituzioni lineari sopra la variabile complessa) le trasformazioni del piano che mutano cerchi in cerchi e che costituiscono le cosidette *affinità circolari* di Möbius. Delle quali basterà dire che si ottengono tutte moltiplicando le similitudini del piano per le inversioni: si dice *inversione* rispetto ad un cerchio di centro O e di raggio r, quella trasformazione per cui ad ogni punto P del piano si fa corrispondere quel punto P' del raggio OP che dà $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

Bibliografia. — Per le prime proprietà elementari del cerchio, menzionate nei nn. 1, 2 cfr. *Gli Elementi d' Euclide e la critica antica e moderna* editi da F. Enriques, libri III e IV per cura di A. Enriques e A. Agostini: Roma, Stock, 1925, ed anche, in generale, tutti i trattati di Geometria elementare. Per lo sviluppo dei problemi della divisione del cerchio e della quadratura, vedansi gli articoli di F. Enriques, E. Daniele e B. Calò nelle *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, 3ª ediz., Bologna, vol. III, 1926. Per le proprietà isoperimetriche (n. 4) l'articolo di O. Chisini nel vol. IV delle medesime *Questioni* e specialmente il libretto di W. Blaske: *Kreis und Kugel*, Lipsia, 1916.

Per la considerazione dei cerchi e dei sistemi lineari di cerchi nella geometria analitica e proiettiva (nn. 5, 6), cfr. p. es. G. Castelnuovo: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, 2ª ediz., Roma 1909, §§ 39, 48, 53-61, 267; F. Enriques: *Lezioni di Geometria proiettiva*, 4ª ediz., Bologna 1920, §§ 40, 62, 65bis, 74, 82; F. Severi: *Complementi di geometria proiettiva*, Bologna 1906, §§ 98, nn. 16-20; 12 nn. 9, 11, 13, 18; 13 nn. 5, 13; 15 n. 21; nonchè l'articolo di Sabbatini nel vol. III delle predette *Questioni*, da cui si acquisteranno particolarmente notizie sui problemi di contatto. Gli sviluppi più elevati sui sistemi di cerchi nello spazio, che abbiamo soltanto accennato, trovansi in J. C. Coolidge: *A Treatise on the Circle and the Sphere*, Oxford, University Press, 1916.

Per le costruzioni con cerchi e rette o con soli cerchi v. *Compasso*; per le funzioni circolari v. *Esponenziale*, *Triangolo*, *Trigonometria*.

Roma, Università.

F. Enriques