
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Angolo: Geometria [par 1-3]

in Enciclopedia Italiana, **III**, 1929, pp. 335-337.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

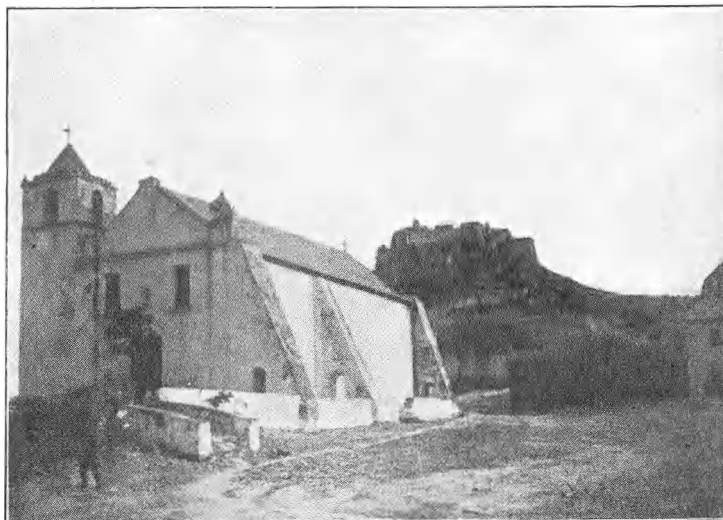
*promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 - Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali*

STORIA. - La parte costiera dello stato indigeno dell'Angola fu occupata nel 1574 da Paolo Diaz de Novaes, nipote del famoso Bartolomeo, in nome del re del Portogallo. Tale occupazione era conseguenza delle antiche relazioni esistenti fra il limitrofo regno del Congo e i Portoghesi: giacché il Diaz, inviato ad appianare, nel 1558, una contesa sorta fra il sovrano del Congo e quello dell'Angola, giunse in tale occasione fino a Pungo Ndongo, capitale dell'Angola. Quindici anni dopo, egli riapparve sulle coste dello stato con numerose truppe e vi fondò, nel 1576, la città di San Paolo di Loanda.

Per qualche anno i Portoghesi vissero in pace con gl'indigeni; ma infine questi, temendo che i nuovi colonizzatori volessero allargare l'occupazione all'interno, massacrarono a tradimento gran parte delle loro truppe. Ma Diaz reagì subito, coi pochi soldati rimastigli; e intraprese un'ardimentosa e fortunata campagna, in seguito alla quale poté, morendo (1588), lasciar il dominio portoghese fortemente stabilito sull'una e l'altra sponda del fiume Cuanza. Nel 1597 furono fatti serî tentativi per colonizzare l'Angola, mercé l'invio in tale regione di 200 Fiamminghi; ma essi furono ben presto decimati dalle febbri. Pochi anni dopo, l'Angola subì il contraccolpo della guerra fra la Spagna, a cui il Portogallo era aggregato, e l'Olanda, la quale inviò navi a saccheggiare S. Tomé, nel 1600, e ad attaccare San Paolo di Loanda, nel 1602. Appena scomparsa la minaccia dell'invasione olandese, l'Angola fu assalita dal capo indigeno Cafuche, che, finalmente, fu sconfitto dal governatore Silveira Pereira. Questi nel 1615 ingrandì la colonia al sud, mercé l'occupazione dei salubri e ubertosi altipiani del Benguella. Non scoraggiati né dalle vicende politiche, né dall'insuccesso dei loro tentativi di colonizzazione, i Portoghesi, al principio del sec. XVII, dimostrando ardimento e vastità di concetti, si sforzarono tuttavia di mettere in qualche modo in valore il loro possedimento; e tentarono perciò, a più riprese, di stabilire sicure e regolari comunicazioni, attraverso l'Africa ignota, fra l'Angola e il Mozambico. Fra le imprese tentate allora a tal fine, si ricorda quella di Rebello de Aragao, nel 1606. Anche notevole fu l'opera di conversione al cristianesimo delle popolazioni: grandi masse di fedeli si formarono allora, dando al movimento religioso una intensità, che poi si perse col tempo, per l'abbandono in cui le popolazioni vennero lasciate. Sennonché, nemmeno questa seconda fase di attività propriamente colonizzatrice durò a lungo; e l'utilità maggiore che i Portoghesi trassero dall'Angola si ridusse alla lucrosa tratta degli schiavi, destinati alle Americhe, che fu da essi sistematicamente organizzata e continuata fino al sec. XIX. San Paolo di Loanda e Benguella (fondata nel 1612) sono due città tristemente celebri nella storia della tratta dei negri.

Nel 1627, i possedimenti portoghesi furono invasi dai capi indigeni dell'interno, alleatisi fra loro e guidati dalla regina dell'Angola, Ginga Bandi, che pur era stata battezzata dai Portoghesi e professava il cristianesimo. Nel 1641, i ribelli trovarono appoggio negli Olandesi, che s'impadronirono di San Paolo, cacciandone i Portoghesi. Non appena il Portogallo ebbe ricuperata l'indipendenza, si rappacificò con l'Olanda anche in Africa; ma gli Olandesi rinnovarono con successo le ostilità nell'Angola durante il 1643. Con tutto ciò, il Portogallo non cedette e, nel 1645 inviò nell'Angola prima il Sotomayor, governatore del Brasile, che sconfisse la regina Ginga Bandi; poi, nel 1648, un altro governatore del Brasile, il De Sà Benevedes, che cacciò gli Olandesi. L'Angola fu di nuovo invasa nel 1665 dal re del Congo, Don Antonio, che fu respinto, il 1° gennaio 1666, nella battaglia di Ambuilla, da Luiz Lopez de Sequeira; ma gl'indigeni, risorti in armi nel 1684, riuscirono ad impadronirsi del Benguella, ove si mantennero per qualche tempo. L'Angola e il Benguella ritrovarono la pace solo circa il 1764, sotto il governatorato di Sousa Coutinho, che introdusse nelle colonie opportune riforme amministrative e si adoperò altresì per metterle in valore, favorendo le imprese di colonizzazione di Encoge e Ambaca, sull'altipiano, e quelle iniziate nel distretto di Ambriz, che era stato occupato nel 1758. Un altro attivo governatore, il barone di Mossamedes, fondò nel 1785 la città sulla costa del Benguella che porta il suo nome.

Alla metà del sec. XIX, si volsero verso l'Angola importanti correnti migratorie, provenienti da Madera e dal Brasile; e, circa il 1880, cominciarono ad affluire negli altipiani del Benguella forti nuclei di coloni boeri, che si stabilirono a Humpata e nella regione della Serra da Chela e Serra da Munda. La colonizzazione è stata assai favorita dalla costruzione di importanti linee ferroviarie



ROVINE DELL'ANTICO FORTE DONDO (sec. XVII)
Sul davanti la chiesa costruita nel 1775 dai Gesuiti (da Marquardsen-Stahl, Angola)

che, partendo rispettivamente da San Paolo di Loanda, Benguella e Mossamedes, raggiungono gli altipiani dell'interno e sembrano destinate a divenire capolinea per le comunicazioni interoceaniche del continente africano. I confini politici dei possedimenti portoghesi nell'Africa occidentale sono stati determinati dalla convenzione con la Germania del 30 dicembre 1886, con la Francia del 12 maggio 1886, con l'Inghilterra dell'11 giugno 1891, col Congo belga del 25 maggio 1891. Infine, la delimitazione di frontiera fra l'Angola e la Rhodesia fu risolta ricorrendo all'arbitrato del re d'Italia (30 maggio 1905).

A. M. d. M.

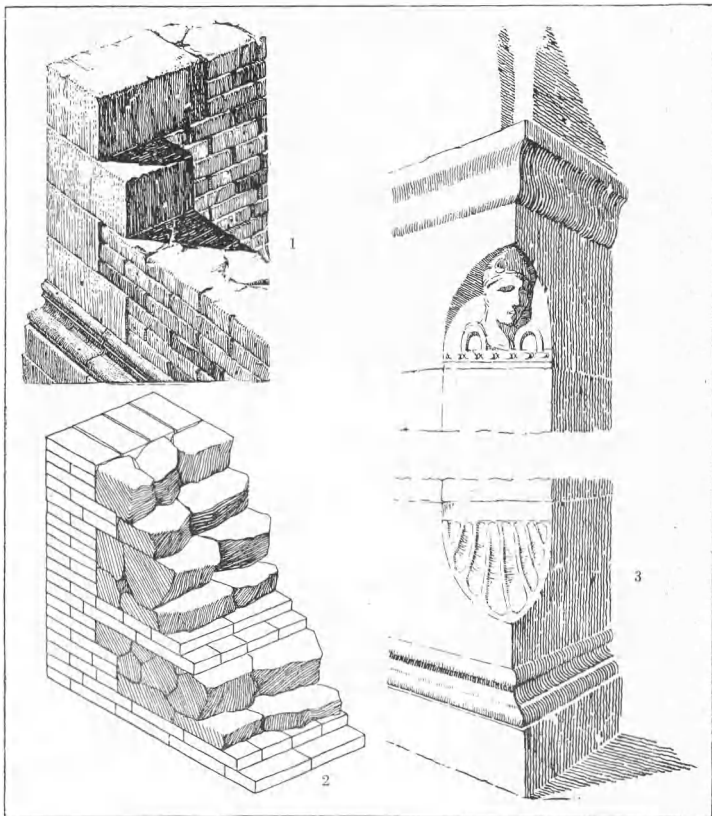
BIBL.: *Boletim da Agencia Geral das Colonias*, Lisbona; *Peace Handbooks*, Angola, Londra 1920; H. Marquardsen, *Angola*, Berlino 1920; 2ª ed. rived. da Stahl, Berlino 1928, con una carta della regione alla scala di 1 : 2.000.000; Correa, *L'Afrique Portugaise, l'Angola*, Bruxelles 1924; M. Busetto, *L'Angola*, Bologna 1923; Rohan Chabot, *Exploration de l'Angola. Géographie*, Marsiglia 1921; *Esboço de Carta de Angola*, scala di 1 : 2.000.000, Lisbona 1917; A. Engler, *Die Pflanzenwelt Afrikas*, ecc., in A. Engler e O. Drude, *Die Vegetation der Erde*, IX, 1, Lipsia 1910.

Per la parte etnologica: Capello e Ivens, *De Benguela ás terras de Iácca*, Lisbona 1881; id., *D'Angola á Contra-Costa*, Lisbona 1886; Serpa Pinto, *Como eu atravessei a Africa*, Londra 1881; H. de Carvalho, *Expedição portuguesa ao Muatiamvua*, Lisbona 1890; E. de Vasconcellos, *Colonias portuguesas*, Lisbona 1896; A. Bastros, *Traços gerais sobre a etnografia do districto de Benguela*, in *Boll. da Soc. de Geogr. de Lisboa*, s. 26ª, 1908; Deniker e Laloy, *Les races exotiques à l'exposition universelle de 1889*, in *L'Anthropologie*, Parigi 1890; Mendes Corrêa, *Antropologia angolense*, in *Arquivo de Anatomia e Antropologia*, Lisbona 1916 e 1918; id., *Notas antropológicas sobre os Luangos da região dos Dembos*, in *Instituto*, Coimbra 1922; J. A. Pires de Lima, Monteiro e Mascarehas, *Contribuição para o estudo antropológico do Angolense*, Loanda 1923; Ferreira Diniz, *Populações indígenas de Angola*, Coimbra 1918; F. A. Pinto, *Angola e Congo*, Lisbona 1888; J. d'Almeida, *Sul d'Angola*, Lisbona 1912; Paiva Couceiro, *Relatorio de viagem entre Bailundo e as terras do Moccusso*, Lisbona 1802; A. de Andrade, *Relatoria da viagem d'exploração geográfica no districto de Benguella e Novo Redondo*, Lisbona 1902.

Per la parte storica: Almada Negreiros, *Angola*, 1901; P. Borchardt, *Bibliographie de l'Angola (1500-1910)*, Bruxelles-Parigi 1912; Cardozo, *Historia do Angola*, 1825; *Catalogo dos Governadores do Reino de Angola*, 1812; Costa Quintella, *Annaes da marinha portugueza*, 1839; C. de Lannoy e H. Van der Linden, *Histoire de l'expansion coloniale des peuples européens. Portugal et Espagne*, Parigi 1907.

ANGOLO (dal lat. *angulus*). - *Geometria* (fr. *angle*; sp. *ángulo*; ted. *Winkel*; ingl. *angle*). - 1. Euclide (I, *Def.*, 8, 9) definisce come *angolo piano* «l'inclinazione reciproca di due linee che non sono per diritto», e in particolare l'angolo rettilineo formato da due linee rette. Ma questa definizione ha sollevato critiche fino dall'antichità, anche limitatamente al caso dell'angolo rettilineo. Che due linee rette con un estremo comune diano luogo alla considerazione di una grandezza dipendente dalla loro posizione reciproca, e non dalla lunghezza delle linee stesse, sembra sia stato riconosciuto dai geometri greci, da Talete ai primi Pitagorici, attraverso le proprietà dei triangoli simili. E l'uso di angoli curvilinei ricorre già in una dimostrazione dell'eguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, riferita da Aristotele.

Apollonio (circa 225 a. C.) ed Erone (circa 100 a. C.) definiscono l'angolo come «contrazione di una superficie o d'un solido in un punto, rispetto ad una linea o a una superficie spezzata». Qui si può vedere adombrato il nuovo concetto dell'angolo, che Ger-



1, ANGOLO DI CONCI DI PIETRA IN UNA MURATURA; 2, ANGOLO DI MATTONI IN UNA MURATURA; 3, ANGOLO DEL PALAZZO DEL COMUNE DI PISTOIA

berto d'Aurillac (papa Silvestro II) definì come *spatium, quod sub duabus lineis se invicem tangentibus continetur*. Più chiaramente il concetto è espresso in A. Arnaud (*Éléments de Géométrie*, 1667) e in L. Bertrand (*Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*, Ginevra 1778, II, p. 6): « un angle est une portion de superficie plane contenue entre deux lignes droites qui se coupent et sont terminées à leur point de section ».

Questa definizione, adottata da Lacroix, Baltzer ecc., si mantiene fino ai nostri giorni, accanto ad un'altra proposta dal Möbius, che si riattacca a W. Schmid (1539), secondo la quale l'angolo è la grandezza di una rotazione. Ma, sotto l'influenza della moderna geometria proiettiva, in cui s'introduce la considerazione dei fasci di raggi e di piani, le due definizioni, in qualche modo, si unificano: l'angolo non è più veduto come « parte di piano » bensì come « parte del fascio di raggi » a cui appartiene. Questo concetto è stato introdotto nella geometria elementare da G. Veronese.

2. L'angolo di due linee non rette si misura in generale dall'angolo delle tangenti. Ciò porta a ritenere come nullo l'angolo formato da una linea con la sua tangente, a cui Giordano Nemorario (1220) ha dato il nome di *angolo di contingenza*. Ma, a tale proposito, agl'inizi dell'età moderna si è accesa una grossa questione, probabilmente già discussa fra gli antichi.

La proposizione III, 6 d'Euclide viene a dire che l'angolo di contatto della circonferenza con la tangente è minore di qualunque angolo rettilineo. Il commento esitante di Proclo sulla definizione 8 viene interpretato di solito nel senso che il detto angolo di contingenza sia nullo. Però Campano (sec. XIII) già osservava che esso si può dividere in parti e perciò possiede gli attributi d'una grandezza. Peletier (1557) confutò tale veduta sostenendo che un più piccolo (cioè un infinitamente piccolo) fra le grandezze continue è *extra intelligentiam*. Ma a sua volta venne combattuto da Candalla (1566), da Cardano e da Clavio.

Il dibattito verteva infine sulla possibilità dell'*infinitesimo attuale*, e acquistò perciò una notevole importanza nelle origini dell'analisi infinitesimale. Vi interloquirono Vieta (1593) e Galileo (1635), e poi Wallis. Ma soltanto Newton trovò nelle osservazioni di Cardano e di Clavio il nodo del problema, riconoscendo che la misura dell'angolo di contatto mette in giuoco, non più le direzioni delle tangenti (prime derivate), bensì le curvature (seconde derivate).

Con ciò la polemica era chiusa nel sec. XVIII, mentre l'analisi

infinitesimale si andava costituendo con l'eliminazione del concetto dell'infinitesimo attuale. Soltanto nel sec. XIX si riaffacciò l'idea che questo infinitesimo (pur non necessario agli sviluppi del calcolo infinitesimale) non sia assurdo in sé. G. Cantor ne ha riconosciuto la possibilità logica nella teoria degli insiemi, P. Du Bois Reymond nello studio degli ordini d'infinito delle funzioni. Quindi G. Veronese (nel 1900) spiegava gli angoli di contatto come grandezze appartenenti a un sistema non archimedeo, cioè ad una geometria in cui più non valga il postulato di Eudosso-Archimede per cui « date due grandezze esiste sempre un multiplo della più piccola, maggiore dell'altra ». Ulteriori sviluppi sui numeri non archimedei e sulla corrispondente geometria sono stati dati da T. Levi-Civita e poi da D. Hilbert e dalla sua scuola.

3. Una qualsiasi figura può essere dilatata o contratta in un certo rapporto, dando luogo a una figura *simile*, dove gli angoli sono conservati. In altre parole la similitudine fra due figure piane è una corrispondenza biunivoca (punto a punto e retta a retta) che conserva gli angoli. Questa proprietà è, in un certo senso, caratteristica della similitudine, quando però si estenda la corrispondenza a tutte le rette che congiungono i punti omologhi delle due figure. Per es., due rettangoli riescono simili se non solo i loro lati, ma anche le rispettive diagonali formano angoli eguali. Più precisamente, nella geometria proiettiva si enuncia che « la corrispondenza biunivoca fra due piani, in cui ad ogni punto corrisponde un punto, a punti in linea retta punti in linea retta e a ogni angolo retto un angolo retto, è una similitudine (ove il rapporto di due segmenti omologhi è sempre costante) ».

Ma si possono considerare, nel piano, corrispondenze o trasformazioni più generali, che conservano la grandezza degli angoli curvilinei, ma mutano in generale rette in curve. Anzi il problema della cosiddetta rappresentazione conforme di una regione piana su di un'altra (stabilire fra le due regioni una trasformazione che conservi gli angoli) deve ritenersi risolubile in generale, per le aree semplicemente connesse, qualunque sia la forma della linea che ne porge il contorno (principio di Dirichlet).

Così le rappresentazioni conformi vengono a dipendere da una funzione arbitraria; e il nesso viene chiarito nella teoria delle funzioni di variabile complessa. Anche nello spazio si possono considerare trasformazioni conformi più generali delle similitudini; ma queste si riducono solo alle trasformazioni (per raggi vettori reciproci) che mutano sfere in sfere. F. En.

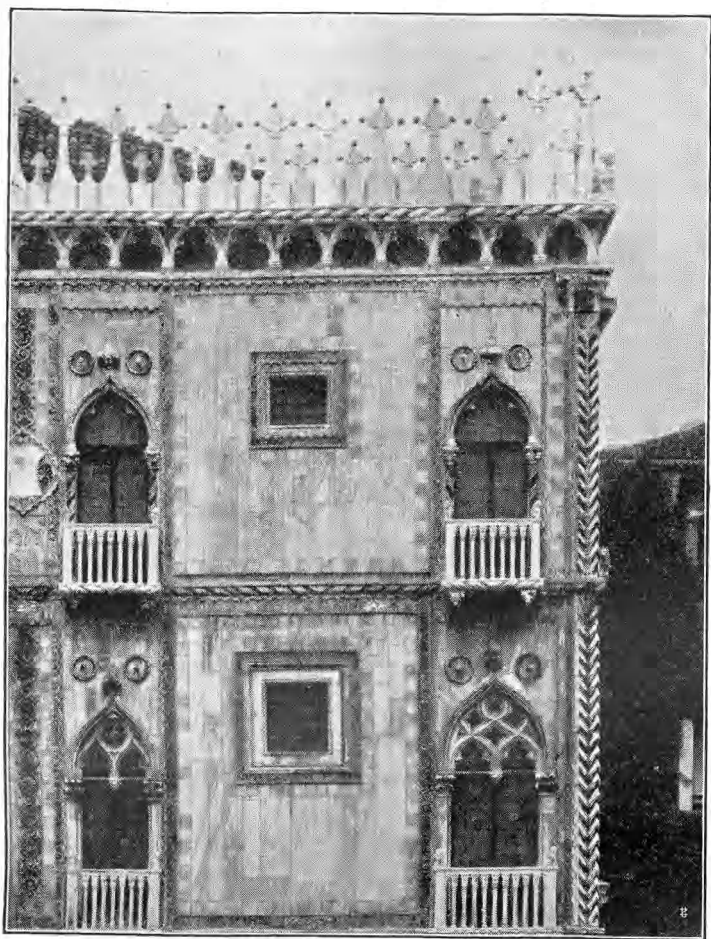
4. Gli angoli si misurano mediante i corrispondenti archi del cerchio di raggio uno che ha il centro nel vertice: il cerchio viene diviso in 360 gradi, ogni grado in 60 minuti, ogni minuto in 60 secondi. L'angolo *retto* è di 90°, gli angoli *acuti* e *ottusi* rispettivamente minori e maggiori di 90°.

5. La misura degli angoli ha speciale importanza nella *geodesia* e nell'*astronomia*, soprattutto in vista di due operazioni fondamentali: misurare la distanza d'un punto inaccessibile P, essendo data una base AB e gli angoli che i raggi visuali AP e BP formano con questa (*triangolazione*); e stimare mediante il diametro apparente la grandezza d'un corpo sferico posto a una nota distanza dall'osservatore.

Gli angoli che più frequentemente occorre considerare in astronomia sono i seguenti:

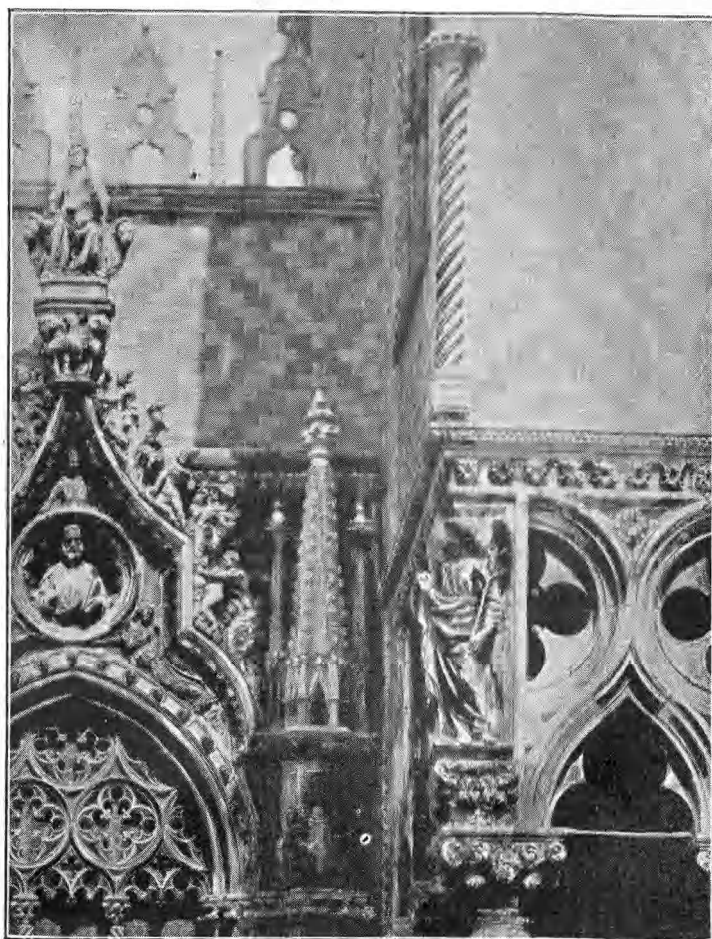
a) *angolo orario*, che è l'angolo fra il semicircolo orario passante per una stella e il semicircolo meridiano del luogo d'osservazione contenente il punto sud, misurato, quest'angolo, verso ovest e variabile da 0° a 360°, o, in tempo, da 0 a 24 ore. È una delle due coordinate del secondo sistema sferico celeste: i semicircoli orari sono i luoghi di angolo orario costante (v. ASTRONOMIA SFERICA);

b) *angolo di posizione*, che è l'angolo compreso fra il circolo orario e il circolo massimo perpendicolare all'eclittica passanti per una stella e avente il vertice nella stella. Quando però si voglia riferire un oggetto celeste ad un altro, in generale angolarmente assai vicino (p. es. in un sistema doppio o multiplo di stelle riferire la stella secondaria o una delle secondarie alla principale), per mezzo di un sistema di coordinate sferiche polari, avente origine nel secondo oggetto (stella principale), si assume per una delle coordinate (distanza) l'arco di circolo massimo orario passante per l'oggetto origine (stella principale) e si chiama pure *angolo di posizione* dell'oggetto rispetto all'altro; esso si misura nel senso nord-est-sud-ovest. Queste due coordinate si misurano direttamente a uno strumento equatoriale col micrometro e il circolo di posizione.



ANGOLO DELLA CA' D'ORO A VENEZIA

(fot. Alinari)



ANGOLO DEL PALAZZO DUCALE VERSO LA PORTA DELLA CARTA A VENEZIA

(fot. Alinari)

c) *angolo parallattico*, che è l'angolo fra il circolo orario e il circolo verticale passanti per una stella e avente il vertice nella stella stessa (v. GEOMETRIA).

BIBL.: *Questioni riguardanti le matematiche elementari raccolte e coordinate* da F. Enriques, I, Bologna 1924: art. II, 27, art. VI, 56; *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* editi da F. Enriques, I, Roma 1925, note alle def. I, 8, 9 e alle prop. I, 5 e III, 16. L. Vo.

Architettura. (fr. *coin*; sp. *ángulo*; ted. *Ecke*; ingl. *corner*). - L'incontro di due muri, e cioè il loro angolo, è sempre negli edifici uno dei punti più delicati della compagine muraria, tale da dover essere curato e rinforzato in modo particolare, sia costruttivamente, sia nell'aspetto esteriore.

Un esempio evidente della necessità di rinforzare gli angoli lo abbiamo nel caso dei portici ad arcate. In essi le spinte degli archi intermedi si elidono a vicenda, mentre quelle degli archi che s'incontrano ad angolo si compongono in una spinta maggiore diretta secondo la diagonale, rendendo necessario un piedritto angolare più robusto di quelli intermedi, qualora non si voglia ricorrere all'espedito di tenere a posto gli archi con catene.

Ritornando al caso generico degli angoli degli edifici, e precisamente della loro costruzione, osserveremo come essa cambi secondo le varie tecniche strutturali. Così, quando si tratti di muri in pietrame di cava rozzamente squadrato, tipo di costruzione attualmente molto usato nelle fabbriche comuni, gli angoli, sia che costituiscano i canti degli edifici, sia che formino gli

stipiti di aperture, vengono formati con pietra più grossa e squadrata o con mattoni.

Con pietre squadrate vengono rinforzati anche gli angoli delle costruzioni in mattoni o con apparecchio in pietrame squadrato e a filari di spessori differenti, del tipo cioè di struttura molto comune nelle fabbriche medievali. Questo sistema di rinforzo angolare degli edifici per mezzo di bugne in pietra viene specialmente usato nei palazzi del nostro Rinascimento con facciate ad intonaco e senza ordini, ove tale accentuazione con rinforzo in bugnato è resa organicamente visibile e consiste nel sistemare all'angolo alternativamente una bugna corta ed una lunga, ovvero, con maggior precisione, una in chiave rispetto ad una delle facce dell'angolo ed una in spessore. Questa, che è la disposizione più economica e

razionale dal lato costruttivo, è usata soprattutto nel Quattrocento, come nel Palazzo Venezia a Roma, in ville, chiese e case fiorentine. Nel Cinquecento invece si preferiva mettere le bugne in modo meno razionale, alternativamente lunghe e corte, ma della stessa lunghezza tanto da una parte quanto dall'altra dell'angolo.

Esistono anche facciate in paramento di pietra che hanno una speciale accentuazione degli angoli con conci di maggiori dimensioni, come nel caso già citato di alcune costruzioni medievali; oppure in bugnato più robusto, come nel primo piano del palazzo Farnese a Caprarola. Tali esemplari non sono però molto comuni; mentre sono molto più



BASI DI COLONNINI ANGOLARI DEL PALAZZO DI ORSANMICHELE A FIRENZE