Enriques, Federigo

Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche

Zanichelli, Bologna, 1934. (pubbl. per cura di O. Chisini)

F. ENRIQUES - O. CHISINI

LEZIONI

SULLA

TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

VOLUME IV.

FUNZIONI ELLITTICHE E ABELIANE

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1934 - XII

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - V-1934-XII

PREFAZIONE

Il disegno dell'opera che ho intrapreso, colla collaborazione di Oscar Chisini, fino dal 1915, comprendeva già nella nostra mente, dopo la trattazione algebrico-geometrica delle funzioni di una variabile indipendente (curve), anche i principii della teoria trascendente: cioè gli integrali ellittici ed abeliani e le loro funzioni inverse.

Ma, in ispecie a motivo del nostro allontanamento, il IV volume delle « Lezioni », esce ora con notevole ritardo rispetto al III. Tuttavia la tessitura del volume è stata da noi ordita durante una comune villeggiatura, ed in seguito ambedue abbiamo avuto occasione di prendere queste teorie come argomento delle nostre lezioni universitarie, rispettivamente a Roma e a Milano, e così di migliorarne la trattazione coll'esperimento didattico.

Con questo quarto volume, resta conchiuso il trattato di Geometria algebrica, da noi disegnato: sebbene da parte mia abbia già in vista di proseguirlo, trattando ancora delle superficie o funzioni algebriche di due variabili, che ho preso come argomento di speciali lezioni e conferenze al Seminario matematico dell'Università di Roma.

Per qualunque corso in cui vengano dati sviluppi superiori della geometria algebrica, i quattro volumi di queste «Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni» formeranno la propedeutica più completa, porgendo ai giovani studiosi la conoscenza larga ed approfondita delle dottrine elementari.

E, se non c' illudiamo, la maniera d'esposizione da noi adot-

tata — il confronto di diversi metodi, la visione storica e dinamica della ricerca che domina dal principio alla fine il nostro trattato — varrà a dare a codesti giovani, non tanto la conoscenza di resultati da prendere a fondamento degli studi ulteriori, quanto l'apprezzamento delle idee, e quindi la comprensione più alta del significato dei problemi e delle vie per cui sono stati tentati o diventa possibile di tentarli.

Roma, Dicembre 1933.

FEDERIGO ENRIQUES

LIBRO SESTO

FUNZIONI ELLITTICHE E ABELIANE

Capitolo I

Integrali e funzioni ellittiche

1. **Introduzione.** — Rilevammo già nel L. V, § 19 (Vol. III pag. 146 e seg.) come le origini della geometria sopra la curva si colleghino allo studio degli integrali di funzioni algebriche. Volendo ora esporre in breve questo aspetto della nostra teoria, conviene che prendiamo le mosse da un problema elementare di calcolo integrale.

Ricordiamo anzitutto come si effettua l'integrazione delle funzioni razionali fratte, cioè il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int F(x)dx$$

dove

$$F(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

È noto che a questo scopo basta decomporre la funzione $F(x)$ in frazioni elementari corrispondenti alle radici (reali o complesse) del denominatore.

E tale decomposizione riesce illuminata dalla teoria delle funzioni analitiche.

Infatti se l'equazione

$$b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m = 0$$

ammette una radice $x = \beta$, d'ordine $r \geq 1$, la F avrà in β un polo d'ordine r, e

$$\Phi(x) = F(x) \cdot (x - \beta)^r$$

sarà ivi regolare. Avremo uno sviluppo di Taylor

$$\Phi(x) = c_0 + c_1(x - \beta) + c_2(x - \beta)^2 + \dots,$$

la serie convergendo entro un certo cerchio di centro β; e conseguentemente sarà

$$F(x) = \frac{c_0}{(x-\beta)^r} + \frac{c_1}{(x-\beta)^r} \dots + \frac{c_{r-1}}{-\beta} + \Psi(x)$$

dove $\Psi(x)$ che — come differenza di funzioni razionali è anch'essa una funzione razionale — possiede soltanto i poli di F diversi da β. Così procedendo per rapporto alle varie radici del denominatore di F, si ottiene infine $F(x)$ come somma di termini del tipo

$$\frac{k}{(x-\gamma)^s}$$

e di un eventuale polinomio

$$P(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_h x^h,$$

con $h = n - m$, che si presenta soltanto nel caso $n > m$ in cui la F abbia polo all'infinito. Qui ricordiamo che codesto polinomio porge la caratteristica del polo $x = \infty$, come la funzione razionale elementare

$$\frac{c_0}{(x-\beta)^r} + \dots + \frac{c_{r-1}}{x-\beta}$$

dà la caratteristica del polo $x = \beta$; ciò che appare trasportando il punto all'infinito nel punto 0 con la sostituzione $x' = \frac{1}{x}$.

Ciò posto il calcolo dello

$$\int_a^x F(x)dx$$

si riduce al calcolo degli integrali del tipo

$$\int_a^x \frac{k}{(x-\gamma)^s}\, dx,$$

ai quali si aggiungerà eventualmente il polinomio integrale di $P(x)$. Più precisamente sarà:

per $s > 1$ $$\int_a^x \frac{k}{(x-\gamma)^s}\, dx = \frac{k}{(-s+1)(x-\gamma)^{s-1}} + \text{cost.}$$

per $s = 1$ $$\int_a^x \frac{k}{(x-\gamma)}\, dx = k \log (x-\gamma) + \text{cost.}$$

In tal guisa *l'integrazione delle funzioni razionali conduce in generale a funzioni razionali e logaritmiche*, e le singolarità dell'integrale riescono definite da quelle dell'integrando come segue: ogni polo del prim'ordine diventa un punto critico logaritmico, ogni polo d'ordine $s > 1$ in un punto a distanza finita dà origine a un polo d'ordine $s - 1$ cui può sovrapporsi ancora un punto critico logaritmico, ed infine nel punto all'infinito si potrà avere un polo superiore di un'unità a quello dell'integrando, complicato con la singolarità che proviene dagli eventuali termini logaritmici sopra enunciati; è ovvio che questi si riuniscono in un solo $\log x$, il cui coefficiente può anche annullarsi, e che d'altronde proviene dall'integrazione di eventuali termini del tipo $\frac{1}{x - \alpha}$ appartenenti allo sviluppo di $F(x)$.

Ora alla ricordata integrazione delle funzioni razionali fratte si lascia ricondurre anche l'integrazione di alcune funzioni irrazionali; per es. il calcolo dello

$$\int_a^x F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx.$$

Infatti pongasi

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}\,;$$

la conica

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

ammette una rappresentazione parametrica mediante funzioni razionali

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

così il nostro integrale si trasforma in un integrale della funzione razionale

$$F\{\varphi(t),\ \psi(t)\}\ \varphi'(t),$$

e però si esprime esso stesso con funzioni razionali e logaritmiche di t, che è a sua volta funzione razionale di x e di

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}\,.$$

Più in generale, questo metodo di sostituzione permette di esprimere mediante funzioni razionali e logaritmiche di un parametro ausiliario gli integrali di funzioni algebriche di genere zero, cioè gli integrali del tipo

$$\int y\,dx,$$

dove y è legato ad x da un' equazione

$$f(xy) = 0$$

di genere zero, ovvero anche — sotto una forma che è solo apparentemente più generale — integrali di funzioni razionali della x e della y predetta.

Così dunque (esprimendo t come funzione razionale di x e y) *l'integrazione di funzioni algebriche di genere zero conduce in generale a funzioni algebrico-logaritmiche*, che posseggono in ogni caso qualche punto d' infinito.

Ma quando si passa a funzioni algebriche di genere $p > 0$, non soltanto non si riesce più ad integrarle col metodo di sostituzione sopra indicato, ma s' incontrano veramente delle funzioni di tipo nuovo, non riducibili alle trascendenti algebrico-logaritmiche.

Ciò si può mettere in evidenza riferendosi al semplice esempio dell' integrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}}$$

o dell' altro

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}}$$

dove il polinomio radicando è in ogni caso privo di radici doppie, così da costituire una funzione algebrica di genere 1. Pongasi invero

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)\,(x - \beta)\,(x - \gamma)\,(x - \delta).$$

È chiaro anzitutto che l' integrale u è regolare, come la funzione sotto il segno, in ogni punto a distanza finita fuori di α, β, γ, δ. Inoltre si può vedere che u è regolare anche nel punto all' infinito, giacchè nell' intorno di esso (cioè fuori di un cerchio abbastanza grande) si ha uno sviluppo del tipo

$$(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^2} + \frac{a_1}{x^3} + \frac{a_2}{x^4} + \ldots$$

che per $x = \infty$ diventa infinitesimo del second'ordine, onde, integrando, si ottiene uno zero del prim'ordine. Finalmente u si conserva finito anche nei punti α, β, γ, δ, che sono tuttavia per esso, come per l'integrando, dei punti critici di diramazione: infatti si ha — nell'intorno del punto α —

$$(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)^{-\frac{1}{2}} = (x - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Sigma c_n (x - \alpha)^n =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}} + a_1 (x - \alpha)^{\frac{1}{2}} + a_2 (x - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

e quindi, integrando termine a termine,

$$u = 2(x - a)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} a_1 (x - a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} a_2 (x - \alpha)^{\frac{5}{2}} + \ldots + \text{cost.}$$

Così dunque il nostro ***integrale*** u ***non possiede punti d'infinito sul piano della variabile complessa,*** e perciò risulta irriducibile alle trascendenti algebrico-logaritmiche ([1]).

La stessa conclusione sussiste anche per l'integrale v, dove il punto all'infinito si presenta come un punto di diramazione nel cui intorno l'integrando ammette uno sviluppo del tipo

$$(x^3 + ax^2 + bx + c)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{a_1}{x^{\frac{5}{2}}} + \frac{a_2}{x^{\frac{7}{2}}} + \ldots.$$

Vale anche la pena di notare che nello stesso modo si dimostra come l'integrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

inerente a una curva iperellittica di genere $p > 1$

$$y^2 = f(x),$$

risulti egualmente affatto privo di punti d'infinito.

Concluderemo queste considerazioni riconoscendo che l'integrazione delle funzioni algebriche conduce in generale a nuove trascendenti, che dovranno essere studiate e classificate in rapporto al genere della funzione integranda: ciò che appunto formerà oggetto di questo capitolo.

([1]) Si vedrà poi (§ 3) che essa è funzione polidroma a infiniti rami.

Nota storica. In linea storica lo studio degli integrali di differenziali algebrici si è presentato anzitutto nel campo reale, e solo con ABEL e JACOBI (1827) si trasporta nel campo complesso. Quando si rimane nel campo reale l'integrazione d'un radicale portante sopra un polinomio di secondo grado, conduce — non solo a funzioni razionali e logaritmiche — sì anche agli archi circolari, avendosi

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x\,;$$

invero l'identità dei due tipi di funzioni, cioè dell'esponenziale e delle funzioni circolari, si palesa soltanto nel campo della variabilità complessa. I primi integrali di differenziali algebrici irriducibili alle funzioni algebrico-circolari-logaritmiche, sono quelli cui conduce l'integrazione d'un radicale portante sopra un polinomio di terzo o quarto grado, quali si presentano nel problema della rettificazione di alcune curve (parabola quadratica — GIOV. BERNOULLI; parabola biquadratica e lemniscata — FAGNANI, 1714; ellisse e iperbole — MAC-LAURIN e EULERO, 1761). I matematici che hanno studiato questi integrali, ne scoprirono importanti proprietà (in specie quella che si traduce col teorema di addizione di cui parleremo più avanti), ma acquistarono a poco a poco la convinzione essere impossibile ridurli alle poche specie di funzioni elementari ad essi note, che sono quelle circolari-logaritmiche sopra menzionate. Tale convinzione è esplicitamente affermata da LEGENDRE, i cui lavori di classificazione degli integrali ellittici hanno principio col 1786.

2. Nozioni preliminari. — Prima di procedere, nei paragrafi seguenti, a uno studio più determinato degli integrali di differenziali algebrici, vogliamo qui indicare sommariamente alcune proprietà delle funzioni analitiche, le quali risulteranno utili per il seguito. Per nozioni più ampie rimandiamo il lettore al trattato del BIANCHI «Lezioni sulla Teoria delle funzioni di variabile complessa» [1] più volte citato.

[1] Pisa, Spoerri, 1916.

Sia una funzione

$$y(x)$$

analitica monodroma e regolare in una certa area A semplicemente connessa, cioè riducibile per continuità a un cerchio (o ad un poligono).

Per ogni punto al finito di A varrà per la y uno sviluppo del tipo

$$y = \Sigma\, a_n x^n$$

con
$$n = 0,1,2,\ldots;$$

e per il punto improprio, $x = \infty$, qualora questo appartenga ad A, si avrà uno sviluppo del tipo

$$y = \Sigma\, a_n \frac{1}{x^n}$$

con
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Sia ora l una linea chiusa tutta interna a questa area A: allora sussiste il

Teorema di Cauchy:

$$\int_l y\,dx = 0\,.$$

Come conseguenza: se a e b sono due punti di quest'area, resta definito l'integrale

$$\int_a^b y\,dx$$

indipendentemente dal cammino di integrazione seguito per andare da a a b (s'intende però costretto a restare entro l'area A).

Considerando l'estremo superiore x come variabile, si ha la funzione

$$\int_a^x y\,dx$$

cioè l'integrale indefinito, che si calcola con le medesime regole note per le funzioni $y(x)$ reali di variabile reale, anche quando le funzioni siano indicate mediante serie.

Nell'intorno di un punto singolare isolato (o regolare) $x = \alpha$ la funzione *monodroma* $y(x)$ ammette lo sviluppo di

LAURENT

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x - \alpha)^n = \ldots a_{-2}(x - \alpha)^{-2} + a_{-1}(x - \alpha)^{-1} +$$
$$+ a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \ldots$$

che procede per le potenze positive e negative di $x - \alpha$.

Se il punto $x = \alpha$ è regolare, mancano le potenze negative; se è un polo, questi termini sono in numero finito. Nel caso che il punto considerato sia $x = \infty$, lo sviluppo è

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n :$$

mancano le potenze positive se il punto è regolare, o queste sono in numero finito se il punto è un polo.

Chiamasi *residuo* della y nel punto $x = \alpha$ il coefficiente a_{-1} del termine in $(x - \alpha)^{-1}$; invece il *residuo nel punto* $x = \infty$ è il coefficiente di x^{-1} cambiato di segno.

Quando l'integrale

$$\int_l y dx$$

è calcolato lungo una linea l (interna al campo di monodromia) e avvolgente *un* punto singolare isolato, allora esso acquista il valore

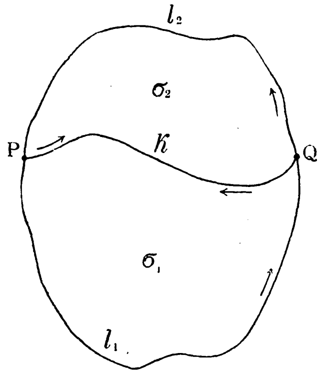
$$\int_l y dx = 2\pi i a_{-1}$$

cioè, a meno del fattore numerico $2\pi i$, questo integrale fornisce il residuo della funzione y nell'unico punto singolare. Qualora invece la l avvolga un numero finito di punti singolari (isolati) allora il detto integrale dà la *somma* dei residui.

La linea l è supposta, naturalmente, chiusa, sprovvista di nodi e percorsa in un certo senso: l'area ad essa interna è quella che resta alla sua sinistra, quindi tale area è l'area finita che naturalmente appare, quando la l è percorsa nel senso positivo, contrario alle lancette dell'orologio. Le cose dette valgono anche per una linea l percorsa negativamente; in questo caso essa avvolge l'area infinita che appare ad essa esterna. Tutto ciò è assai chiaro quando si ricordi che il piano della variabile complessa proviene, per proiezione stereografica, dalla sfera, il cui polo dà il punto all'infinito del piano stesso.

Aggiungasi che, in ogni caso, il valore dell'integrale $\int_l y dx$ non varia quando si deforma per continuità la linea l senza incontrare alcun punto singolare della funzione.

Sia σ un'area avente per contorno l: si spezzi σ in due parti, σ_1 e σ_2, mediante una linea k che unisce due punti, P e Q, di l. Le parti σ_1 e σ_2 avranno due contorni che chiamiamo l_1 e l_2 (aventi entrambi k come loro arco). In tali ipotesi si ha



$$\int_l y dx = \int_{l_1} y dx + \int_{l_2} y dx,$$

(ciò segue osservando che, in l_1 e l_2, k viene percorso in sensi opposti, sicchè, relativamente agli elementi di k nei due casi la y ha sempre lo stesso valore e il dx valori di segno contrario).

Più in generale l'integrale

$$\int_l y dx$$

si può calcolare spezzando l'area σ in un qualunque numero di parti (semplicemente connesse), finite o infinitesime, e facendo la somma degli integrali relativi ai contorni di queste.

L'area A entro la quale abbiamo considerata data la funzione y può non appartenere al piano della variabile complessa x, purchè in ciascun suo punto sia definito un valore di y e uno di x, variabili con continuità per modo che l'area A, o le sue singole parti convenientemente prese, possa rappresentarsi biunivocamente sopra un'area (o un insieme connesso di aree) del piano complesso x.

È chiaro il significato dei prodotti ydx relativi a ciascun arco infinitesimo della linea l, i quali prodotti sommati insieme danno il valore dell'integrale $\int_l y dx$.

Del resto questo integrale può ridursi a quello relativo a una linea tracciata nel piano della variabile complessa x, o a una somma di integrali siffatti.

Pertanto le cose che abbiamo ricordate valgono anche per gli integrali calcolati lungo linee tracciate sopra la riemanniana di una curva algebrica $f(xy) = 0$, qualunque sia il modello reale assunto per la riemanniana stessa.

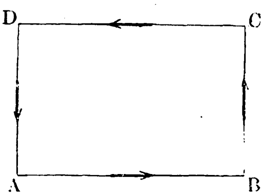
In particolare conviene qui dimostrare che *sopra la riemanniana di una curva algebrica* $f(xy) = 0$ *è nulla la somma dei residui di una qualunque funzione razionale* $\Phi(xy)$.

Limitiamo qui la dimostrazione al caso, caratteristico, che $f(xy) = 0$ sia una cubica piana.

Assumiamo come modello della riemanniana il rettangolo $ABCD$, il cui contorno indichiamo con l.

Avremo

$$\int_l \Phi dx = \int_A^B \Phi dx + \int_B^C \Phi dx + \int_C^D \Phi dx + \int_D^A \Phi dx .$$



Ma gli integrali del secondo membro, primo e terzo, secondo e quarto, sono uguali fra di loro, in quanto i punti opposti su i lati del rettangolo corrispondono a medesimi punti di $f(xy) = 0$; quindi su di essi la Φ ha il medesimo valore, mentre il dx ha segno contrario. Segue

$$\int_l \Phi dx = 0 .$$

Ma questo integrale dà la somma dei residui della funzione Φ, onde si conclude l'asserto.

Qui giova notare in modo esplicito che un polo di $\Phi(xy)$ che cada in un punto P di f, di contatto per una parallela tangente all'asse y, quando sia del primo ordine, è necessariamente a *residuo nullo*.

Infatti avremo

$$\Phi = a(x - \alpha)^{-\frac{1}{2}} + b + c(x - \alpha)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

e la funzione integrale avrà in $x = \alpha$ un punto di diramazione (del resto regolare). Una linea chiusa che avvolga P

sulla riemanniana, dà nel piano x una linea che avvolge *due* volte $x=\alpha$, e per la quale l'integrale

$$\int \Phi dx = 2a(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} + b(x-\alpha) + \frac{2}{3}c(x-\alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

ritorna al valore iniziale percorrendo tale linea.

Dalle proprietà dei residui segue, immediatamente, il teorema dell'*indicatore logaritmico*.

Sia

$$y = y(x)$$

una funzione uniforme in una certa area.

Se nel punto $x=\alpha$ la y ha uno zero dell'ordine r, si ha

$$y = a_r(x-\alpha)^r + a_{r+1}(x-\alpha)^{r+1} + \dots$$

e

$$y' = ra_r(x-\alpha)^{r-1} + \dots$$

quindi

$$\frac{y'}{y} = r(x-\alpha)^{-1} + \dots$$

ha un polo del prim'ordine con residuo r. Similmente se la y ha in β un polo d'ordine s

$$y = \frac{b_s}{(x-\beta)^s} + \frac{b_{s-1}}{(x-\beta)^{s-1}} + \dots$$

$$y' = \frac{-sb_s}{(x-\beta)^{s+1}}$$

e quindi

$$\frac{y'}{y} = \frac{-s}{(x-\beta)} + \dots$$

ha un polo del prim'ordine con residuo $-s$.

Pertanto la somma dei residui della funzione $\frac{y'}{y}$ nell'interno di un'area A è data da

$$N_0 - N_\infty,$$

differenza fra il numero degli zeri (N_0) e il numero dei poli (N_∞) della y (ciascuno contato secondo la propria molteplicità). Risulta quindi, indicando con l il contorno dell'area A,

$$\int_l \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = 2\pi i(N_0 - N_\infty).$$

Qui naturalmente si suppone che la linea l non contenga nè zeri nè poli della $y(x)$.

Notiamo che la $\frac{y'(x)}{y(x)}$ non è altro che la derivata logaritmica di $y(x)$

$$\frac{d \log x}{dx}.$$

Pertanto la formula precedente si scrive anche

$$\int_l d \log y(x) dx = 2\pi i(N_0 - N_\infty).$$

L'integrale del primo membro prende comunemente il nome di *indicatore logaritmico di Cauchy:* questo dunque, a meno del fattore $2\pi i$, *dà la differenza fra il numero degli zeri e quello dei poli* che una funzione $y(x)$ ha nell'interno di una linea l.

3. Integrali ellittici appartenenti ad una cubica: classificazione delle singolarità. — Assumiamo nel piano xy una cubica generale di genere $p = 1$

$$f(xy) = 0$$

e sopra di questa una funzione razionale

$$\Phi(xy) = \frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)};$$

ci proponiamo di riconoscere le singolarità dell'integrale indefinito

$$u = \int \Phi \{ x, y(x) \} dx$$

dove con $y(x)$ indichiamo la funzione algebrica $y = y(x)$ definita dalla equazione $f(xy) = 0$.

Osserviamo anzitutto che l'integrale

$$u = \int_{x_0}^{x} \Phi \{ x, y(x) \} dx,$$

definito fra due limiti x_0 e x e in rapporto ad un certo cammino che li congiunga, non riesce tuttavia determinato, dipendendo dalla scelta del ramo $y(x)$ che si associ ad x_0; conviene perciò riguardare l'integrale stesso come funzione dei punti della riemanniana rappresentante la cubica, limitandolo fra due punti x_0y_0 e xy, come indica la seguente scrittura

$$u = \int_{x_0y_0}^{xy} \Phi(xy)\,dx\,.$$

Allora anche il cammino di integrazione verrà concepito come una linea l tracciata su questa riemanniana; l'integrale u riesce fino a un certo punto indipendente dalla scelta di questa linea, potendosi variare per continuità la l, con gli estremi fissati, purchè essa non venga ad attraversare punti singolari dell'integrando Φ.

Ora le singolarità di u, concepita come funzione della variabile x, potranno cadere:

1) nel punto $x = \infty$,

e nei punti singolari della Φ, funzione algebrica di x, cioè

2) nei poli di Φ, che sono punti per cui $\psi = 0$, e

3) nei punti di diramazione di Φ che sono i punti di diramazione di $y(x)$.

Supporremo dapprima che le tre specie di punti che occorre considerare non si sovrappongano gli uni agli altri. Allora:

1. Nell'intorno del punto $x = \infty$ ciascun ramo della funzione, essendo regolare, ammetterà uno sviluppo del tipo

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$$

sicchè integrando si produrrà in generale una singolarità polo-logaritmica (sovrapposizione di un polo del prim'ordine e di un infinito logaritmico) definita da $a_0 x + a_1 \log x$; questa singolarità si ridurrà ad un polo semplice se $a_1 = 0$, ed invece ad un puro infinito logaritmico se $a_0 = 0$, essendo la Φ infinitesima del prim'ordine; in particolare l'*integrale* sarà *regolare* nel punto $x = \infty$ allorchè l'*integrando* divenga ivi *infinitesimo del second'ordine, essendo*

$$a_0 = a_1 = 0\,.$$

2. Nell'intorno di un polo $x = \alpha$, che, per cominciare, supponiamo del prim'ordine, la Φ ammette uno sviluppo

del tipo

$$\Phi = \frac{b_1}{x-\alpha} + a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \dots$$

sicchè, integrando,

$$\int \Phi(x)dx = b_1 \log(x-\alpha) + a_0(x-\alpha) + \frac{a_1}{2}(x-\alpha)^2 + \dots + \text{cost.} =$$
$$= b_1 \log(x-\alpha) + \theta(x-\alpha)$$

con θ simbolo di funzione regolare.

Sorge dunque per questo integrale un infinito logaritmico la cui *caratteristica*

$$b_1 \log(x-\alpha)$$

dipende dal cosidetto *residuo* di Φ relativo al polo α, cioè dal coefficiente b_1 di $(x-\alpha)^{-1}$ nello sviluppo di Φ.

Codesto residuo determina un *periodo* $2\pi i\, b_1$ del nostro integrale, poichè un giro fatto attorno ad α lascia invariata la θ e aumenta $\log(x-\alpha)$ di $2\pi i$.

Si consideri ora il caso in cui Φ possegga in α non più un polo semplice ma un polo del second' ordine, per cui

$$\Phi = \frac{b_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{b_1}{(x-\alpha)} + a_0 + a_1(x-\alpha) + \dots .$$

Qui nasce in generale una singolarità polo-logaritmica, definita da

$$-\frac{1}{2}\frac{b_2}{x-\alpha} + b_1 \log(x-\alpha);$$

questa si riduce ad un *puro polo* quando si annulli il residuo:

$$b_1 = 0 .$$

Analogamente se $x = \alpha$ sia un polo d'ordine $n > 2$, l'integrale possiederà generalmente una singolarità polo-logaritmica d'ordine $n-1$ che può ridursi a un polo puro d'ordine $n-1$.

3. Finalmente se $x = \alpha$ è un punto di diramazione della $y(x)$, e quindi di Φ, nell'intorno di esso si avrà

$$\Phi = a_0 + a_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} + a_2(x-\alpha) + a_3(x-\alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

sicchè — integrando — si ottiene ancora uno sviluppo procedente per le potenze di $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$: così l'integrale u possiede ivi un punto di diramazione della stessa natura della $y(x)$, d'accordo con l'osservazione fatta innanzi che il valore di u dipende dal foglio della riemanniana su cui è tracciato il cammino di integrazione. (La conclusione si estenderebbe ai punti di diramazione d'ordine superiore al secondo).

Occorre ora considerare in ispecie il caso in cui un polo di Φ si sovrapponga ad un punto di diramazione $x=\alpha$. Allora si ha nell'intorno di questo punto uno sviluppo di PUISEUX generalizzato, in cui figura un numero finito di potenze negative di $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$; infatti si ha, nel detto intorno

$$y = a_0 + a_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} + a_2(x-\alpha) + a_3(x-\alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

e quindi il polinomio $\psi(xy)$ ammette pure uno sviluppo per potenze positive di $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$, il quale, se $\Phi = \frac{\varphi}{\psi}$ deve avere un polo in $x=\alpha$, comincierà con un termine in $(x-\alpha)^{\frac{r}{2}}$ dove $r \geq 1$; di conseguenza $\Phi \cdot (x-\alpha)^{\frac{r}{2}}$ sarà sviluppabile in serie di PUISEUX procedente per le potenze positive di $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

Ciò posto, avremo in generale

$$\Phi = \frac{b_r}{(x-\alpha)^{\frac{r}{2}}} + \frac{b_{r-1}}{(x-\alpha)^{\frac{r-1}{2}}} \dots + \frac{b_1}{(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}} + a_0 + a_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \dots;$$

ma sarà precisamente $r=1$ quando la curva $\psi=0$ passi semplicemente per il punto di diramazione senza toccare la cubica f, e la $\varphi=0$ non vi passi, avendosi così un polo semplice di Φ su f. Infatti abbiamo in questo caso

$$y = a_0 + a_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \dots, \qquad \text{con } a_1 \neq 0,$$
$$\psi(xy) = \lambda(x-\alpha) + \mu(y-a_0) + \theta$$

dove $\mu \neq 0$, e θ è un polinomio in $(x-\alpha)$ e $(y-a_0)$ che comincia coi termini di secondo grado; risulta dunque che lo sviluppo di ψ per la potenza di $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ contiene come primo termine $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$; se poi la φ non si annulla in quel punto, $\Phi \cdot (x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ si conserverà finito nel punto α, e perciò lo sviluppo di Φ sarà

$$\frac{b_1}{(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}} + a_0 + a_1(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \dots, \qquad b_1 \neq 0.$$

Ora, integrando, vediamo che in questo caso la u si conserva finita nel punto α, il quale tuttavia costituisce per essa un punto di diramazione.

Aggiungasi che la finitezza di u nel punto $x=\alpha$, ove la Φ si suppone infinita, esige reciprocamente che Φ abbia in questo punto della riemanniana un polo semplice, e però che ψ passi semplicemente per esso e φ non vi passi (come è supposto innanzi) o più in generale che ψ abbia ivi con f un contatto s-punto e φ un contatto $(s-1)$-punto: infatti se φ e ψ hanno con f rispettivamente un contatto r-punto ed s-punto, risulta:

$$\varphi = a_r(x-\alpha)^{\frac{r}{2}} + \dots \qquad \text{con } a_r \neq 0$$

$$\psi = b_s(x-\alpha)^{\frac{s}{2}} + \dots \qquad \text{con } b_s \neq 0$$

onde, per $s > r$,

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{a_r}{b_s} \frac{1}{(x-\alpha)^{\frac{s-r}{2}}} + \dots$$

e l'integrazione del primo termine porta certo a un infinito di u, ove non sia

$$r = s - 1.$$

Precisamente per $r = s-2$ nasce un infinito logaritmico, mentre per $r < s-2$ si ha in generale una singolarità polo-logaritmica, la parte logaritmica sparendo solo ove si annulli il coefficiente di $(x-\alpha)^{-1}$.

Conviene notare esplicitamente il caso in cui punti singolari di Φ coincidano con $x=\infty$.

Anzitutto se Φ ha un polo (di ordine $r \geq 1$) all'infinito, avremo

$$\Phi = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} \dots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots$$

e integrando nascerà certo un polo d'ordine $r+1 \geq 2$.

Se invece Φ (e la y) ha all'infinito un punto di diramazione del second'ordine (ma del resto è finita) avremo

$$\Phi = a_0 + a_1 x^{-\frac{1}{2}} + a_2 x^{-\frac{2}{2}} + a_3 x^{-\frac{3}{2}} + \dots$$

e integrando nascerà: un polo da a_0; un infinito con diramazione da $a_1 x^{-\frac{1}{2}}$; una singolarità logaritmica da $a_2 x^{-\frac{2}{2}}$; diramazione da ogni altro termine con esponente non intero.

L'integrale avrà dunque, in ogni caso, diramazione all'infinito; e sarà ivi del resto regolare sulla riemanniana quando sia contemporaneamente $a_0 = a_1 = a_2 = 0$; in tal caso la Φ considerata su f avrà uno zero d'ordine 3 almeno.

Similmente qualora $\Phi(xy)$ abbia un punto $x = \alpha$ di diramazione d'ordine ν, l'integrale sarà regolare sulla riemanniana, qualora risulti

$$\Phi = a(x-\alpha)^{-\frac{\nu-1}{\nu}} + b(x-\alpha)^{-\frac{\nu-2}{\nu}} + \dots + d(x-\alpha)^{-\frac{1}{\nu}} + \\ + a_0 + a_1(x-\alpha)^{\frac{1}{\nu}} + \dots$$

cioè la Φ abbia un polo d'ordine $\frac{\nu-1}{\nu}$ *al massimo.* Quando la $\Phi(xy)$ sia considerata su f, un tale polo appare di ordine $\nu - 1$.

La nostra analisi mostra quali singolarità venga a possedere l'integrale u

$$u(x) = \int \Phi(xy)dx$$

appartenente alla curva algebrica

$$f(xy) = 0:$$

queste singolarità sono i punti di diramazione corrispondenti alle diramazioni di $y(x)$, ed inoltre eventuali poli e singolarità logaritmiche per $x = \infty$ e per i poli di Φ. Lo stesso integrale considerato invece sopra la riemanniana, come funzione di x e y:

$$u(xy) = \int_{x_0 y_0}^{xy} \Phi(xy)dx,$$

possiederà soltanto eventuali poli e singolarità logaritmiche, che cadranno fra i punti all'infinito della cubica e fra i poli di Φ. Ora è chiaro che quando la linea di integrazione che congiunge, sopra la riemanniana, due punti $(x_0 y_0)$ e $(x y)$ si deformi in guisa da attraversare un punto P di singolarità logaritmica, la u verrà accresciuta di un periodo, che corrisponde all'integrale lungo un piccolo ciclo circondante P, e per tale motivo la u appare subito una funzione polidroma a infiniti valori. Ma vi è un'altra ragione di polidromia, che sussiste anche nel caso in cui manchino punti di singolarità logaritmica: si può congiungere $(x_0 y_0)$ e $(x y)$ mediante due linee tracciate sulla riemanniana essenzialmente diverse, le quali cioè siano irriducibili per deformazione continua, costituendo nel loro insieme un ciclo riemanniano della superficie (cfr. L. V. § 37, vol. III, pag. 414): così la u ammetterà in generale, oltre agli eventuali *periodi polari* d'origine logaritmica, anche i *periodi ciclici* che tengono ai cicli della riemanniana predetti.

Dopo ciò i risultati dell'analisi precedente conducono a distinguere tre specie di integrali di differenziali algebrici appartenenti ad una cubica di genere 1, cioè — come si suol dire — *tre specie di integrali ellittici:*

1. *Integrali ellittici di prima specie,* quelli che si conservano ovunque finiti sulla riemanniana: esempio l'integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}}$$

incontrato nell'introduzione (pagg. 6, 7).

2. *Integrali ellittici di seconda specie,* che posseggono sulla riemanniana soltanto dei poli e non singolarità logaritmiche: appartengono a questo tipo le funzioni razionali dei punti della cubica, attesochè

$$F\{x, y(x)\} = \int \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\} dx .$$

3. *Integrali ellittici di terza specie,* quelli che posseggono sulla riemanniana degli infiniti logaritmici ed eventualmente dei poli distinti o sovrapposti ai primi: questo è il caso generale a cui conduce l'integrazione di funzioni razionali sopra la curva.

4. Costruzione degli integrali ellittici - Integrali di prima specie. — Ci proponiamo ora di costruire effettivamente gli integrali ellittici, delle tre specie sopra nominate, che appartengono alla cubica f, ed anzi insegneremo la costruzione di quegli integrali per cui vengano segnati ad arbitrio i punti di singolarità.

Anzitutto vogliasi che l'integrale

$$u = \int \frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)}\, dx$$

resulti di prima specie, cioè privo di singolarità sulla riemanniana f. Secondo l'analisi che precede, l'integrando $\frac{\varphi}{\psi}$ dovrà:

1) avere un infinitesimo d'ordine $i \geq 2$ in ciascuno dei tre punti all'infinito di f (altrimenti questi risulterebbero punti di infinito per u);

2) ed inoltre avere i suoi poli fra i punti di diramazione della $y(x)$, cioè fra i punti per cui

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

e più precisamente in ciascuno di questi punti si potrà avere al più un polo del prim'ordine.

Le condizioni enunciate portano in generale che $\frac{\varphi}{\psi}$ debba avere almeno tre zeri del second'ordine all'infinito e al più sei poli del prim'ordine nei punti a distanza finita intersezioni di $f = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; tenuto conto che il numero degli zeri di una funzione razionale è uguale al numero dei poli, si deduce che questa funzione avrà esattamente i tre zeri del 2° ordine e i 6 poli del 1° sopra indicati, e che così risulterà determinata a meno di una costante moltiplicativa. Precisamente, dovendo essere $\psi = 0$ l'equazione della polare del punto all'infinito dell'asse y $\left(\text{cioè la conica } f_y' = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$ e $\varphi = 0$ l'equazione della retta all'infinito contata due volte, avremo

$$\frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)} = \frac{k}{f_y'}.$$

Pertanto ad una cubica di genere uno f(xy) = 0 *appartiene un solo integrale ellittico di prima specie, cioè a meno di una* *costante moltiplicativa*,

$$u = \int \frac{dx}{f_y'}.$$

È naturale che la funzione razionale integranda $\Phi(xy)$, può assumere diverse forme equivalenti rispetto al modulo f, poichè essa è definita soltanto sopra la curva $f = 0$, in rapporto alla g_6^1 di cui abbiamo determinato i poli e gli zeri.

Ora il resultato a cui siamo pervenuti è stato dimostrato nell'ipotesi che la cubica f di genere 1 abbia una posizione generica rispetto agli assi coordinati, diguisachè non passi per il punto all'infinito dell'asse y, non abbia alcuna tangente di flesso parallela a quest'asse, e neppure tocchi la retta impropria del piano.

E non è necessario indugiarsi su questi casi, in quanto si può vedere facilmente a priori che l'integrale di prima specie, come il differenziale $\frac{dx}{f_y'}$, ha carattere covariante rispetto a una trasformazione omografica del piano, mediante la quale la cubica acquista una posizione generica rispetto agli assi. Ciò faremo vedere quanto prima: tuttavia appare istruttivo considerare brevemente i casi particolari accennati, riconoscendo in ogni caso l'esistenza di *un* integrale di prima specie dato da

$$u = \int \frac{k}{f_y'}\, dx$$

dove ora l'integrando potrà corrispondere a una g_6^1 riducibile con punti fissi all'infinito.

Consideriamo anzitutto il caso di una tangente di flesso $x = \alpha$ parallela all'asse y: a questa corrisponde un punto $x = \alpha$ di diramazione d'ordine $\nu = 3$, che dovrà essere (per l'integrando) *al massimo* un polo d'ordine $\frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$, e questo, sulla curva f, risulterà un polo d'ordine 2. Segue che anche in questo caso il denominatore ψ dell'integrando fornisce una curva che passa per i punti di contatto delle tangenti ad f parallele all'asse y, e ha, con f, un contatto bipunto nel flesso considerato: è dunque

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial y}$$

e l'integrale risulta

$$u = \int \frac{k}{f_y'}\, dx.$$

In secondo luogo pongasi che la cubica passi per il punto Y_∞, punto improprio dell'asse y (e vi passi semplicemente). In questo caso l'integrando $\frac{\varphi}{\psi}$ dovrà avere uno zero d'ordine 2 (almeno) in ciascuno dei due punti all'infinito della cubica (diversi da Y_∞) e un polo del prim'ordine (al massimo) in ciascuno dei 4 punti di contatto delle parallele per Y_∞. Segue che è

$$\Phi = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{k}{f_y'}:$$

qui si noti che tale Φ nel punto Y_∞ non è nè nulla nè infinita, in quanto Y_∞ è intersezione doppia di f tanto con la retta impropria contata due volte quanto con la $f_y' = 0$.

In terzo luogo pongasi che la cubica sia tangente alla retta impropria, in un certo punto T. Questo dovrà essere uno zero del 3^0 ordine (almeno): l'altro punto improprio di f dovrà essere uno zero del 2^0 ordine (almeno); i punti di contatto delle 5 tangenti parallele all'asse y dovranno essere poli del primo ordine (al massimo): segue

$$\Phi = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{k}{f_y'};$$

qui si noti che T appare da questa formula contemporaneamente uno zero del 4^0 ordine e un polo del 1^0, cioè appunto uno zero del 3^0 ordine.

Si consideri, infine, il caso della cubica

$$f(xy) = y^2 - (x^3 - px + q) = 0$$

in cui il punto Y_∞, improprio dell'asse y, è un flesso della cubica avendosi come tangente di flesso la retta impropria. Si ha allora, per $y(x)$, un punto di diramazione improprio e tre proprii, tutti del secondo ordine. Sulla f dunque l'integrando avrà al massimo tre poli del prim'ordine, nei punti di contatto delle tangenti parallele all'asse y, e uno zero, del terzo ordine, almeno, nel punto Y_∞; segue

$$\Phi = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{k}{f_y'}.$$

Nel caso considerato è dunque

$$u = \int \frac{dx}{f_y'} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - px + q}}\,.$$

Qui si noti che da questa formula appare che Y_∞ è, per l'integrando, contemporaneamente uno zero del 6° ordine e un polo del terzo (la $f_y' = 0$ contiene la retta impropria) cioè appunto uno zero del 3° ordine.

La funzione integranda

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 - px + q}} = \frac{1}{y}$$

corrisponde ad una g_6^1 ridotta ad una g_3^1 collo staccamento del punto Y_∞ contato tre volte.

Appare dunque che, in tutti i casi considerati, l'integrando può considerasi dedotto per continuità dal caso generale; ma, come abbiamo detto, si può riconoscere a priori che esso deve avere sempre la forma $\frac{k}{f_y'}$, mostrando la invarianza dell'integrando e dell'integrale rispetto ad una trasformazione omografica del piano, mediante la quale la cubica acquista una posizione generica rispetto agli assi.

Anzitutto è chiaro che l'integrale ellittico di prima specie, funzione del punto (xy) della cubica f, per una omografia

$$\begin{cases} x = x(XY) \\ y = y(XY) \end{cases}$$

applicata a questa cubica, diventa una funzione

$$U(XY) = u\,\{x(XY),\ y(XY)\}$$

del punto (XY) appartenente alla cubica trasformata $F(XY) = 0$; e naturalmente resta privo di punti di infinito su F, come era sopra f. Ma poichè U è, come u, un integrale di differenziale algebrico, ottenuto col trasformare omograficamente il differenziale integrando, risulta dunque che U è un integrale ellittico di prima specie appartente ad F.

Ora vediamo che l'omografia trasforma sempre

$$\frac{dx}{f_y'} \quad \text{in} \quad k\frac{dX}{F_Y'}$$

A tale uopo basterà verificare la cosa per le sostituzioni generatrici del gruppo proiettivo ([1])

α) $\begin{cases} x = Y \\ y = X \end{cases}$

β) $\begin{cases} x = X \\ y = aX + bY + c \end{cases}$ $\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{b}\,(y - ax - c) \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x = \frac{1}{X} \\ y = \frac{Y}{X} \end{cases}$ $\begin{cases} X = \frac{1}{x} \\ Y = \frac{y}{x} \end{cases}$

Questa verifica si compie brevemente come segue.

α) Essendo, sopra la curva f,

$$df = f_x'dx + f_y'dy = 0\,,$$

appare che

$$\frac{dx}{f_y'} = -\frac{dy}{f_x'}$$

cioè

$$\frac{dx}{f_y'} = -\frac{dX}{F_Y'}$$

β) Scriviamo

$$F(XY) = f(X,\ aX + bY + c)$$

$$F_Y' = f_y' \cdot b$$

$$dX = dx\,;$$

segue

$$\frac{dx}{f_y'} = b\,\frac{dX}{F_Y'}\,.$$

([1]) È ovvio che combinando le sostituzioni α) e β) si dà luogo alla più generale omografia affine che lascia ferma la retta all'infinito, invece la γ) porta la retta all'infinito nell'asse $X = 0$, e quindi, combinandola con una delle trasformazioni precedenti, si ottiene di portare la retta all'infinito in una retta qualunque del piano; dopo ciò basta notare che due omografie portanti la retta impropria nella medesima retta limite, si ottengono una dall'altra moltiplicando per una affinità.

γ) Scriviamo [1]

$$F(XY) = f\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right)X^3$$

$$F_Y' = f_y' \cdot \frac{1}{X} \cdot X^3 = f_y' X^2$$

$$dX = -\frac{dx}{x^2} = -dxX^2;$$

segue

$$\frac{dx}{f_y'} = -\frac{dX}{F_Y'}.$$

5. Integrali ellittici di seconda specie. — Vogliamo ora *costruire* sopra la curva $f(xy) = 0$ un *integrale ellittico di seconda specie elementare*, v, a cui imporremo come condizione di possedere *un unico polo semplice* in un punto $O_1 = (\alpha\beta)$. Supporremo dapprima che la f sia in posizione generica rispetto agli assi. Allora secondo l'analisi precedente la funzione integranda Φ dovrà avere al più 8 poli, cioè 6 poli semplici nei punti per cui $f_y' = 0$ e un polo doppio in O, e dovrà avere almeno 6 zeri assorbiti nell'intersezione di f con la retta all'infinito contata due volte. Ma poichè la terna dei punti all'infinito di f contata due volte è equivalente alla sestupla staccata da $f_y' = 0$, segue che gli altri due zeri di φ dovranno costituire una coppia di punti equivalente al punto O contato due volte. Queste condizioni portano che Φ debba avere la forma

$$\Phi = \frac{\varphi}{\psi_1 f_y'} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{(ax + by + c)f_y'}$$

dove $ax + by + c = 0$ è la tangente in O, e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ è un'altra retta passante per il tangenziale di O.

Ma non si può dire ancora che la Φ così determinata dia origine veramente a un integrale di seconda specie, perchè potrebbe nascere in O una singolarità polo-logaritmica, anzichè un polo semplice: condizione perchè si presenti appunto questo caso è che, nello sviluppo di $\Phi\{x, y(x)\}$ per le potenze di $(x - \alpha)$ venga a mancare il termine in $\frac{1}{x-\alpha}$.

[1] La presenza del fattore X^3 risulta dalla necessità di rendere intera la funzione trasformata (Cfr. L. 1° § 9).

Ora la mancanza di questo termine risulta a priori dal teorema di CAUCHY (§ 1) per cui la somma dei residui di una funzione razionale è nulla. Ma qui vogliamo porgere una *verifica algebrica diretta*, che effettivamente lo sviluppo di Φ non contiene il termine in $\frac{1}{x-\alpha}$. Ci riferiremo per ciò ad una opportuna posizione della cubica f rispetto agli assi coordinati; e la verifica così eseguita varrà in generale per una cubica qualunque, dappoichè è lecito per l'esame di una tale questione trasformare omograficamente l'integrale v (che si conserva sempre di seconda specie) visto che il nostro integrando

$$\frac{(a_1x+b_1y+c_1)}{(ax+by+c)f_y'}\,dx$$

ha carattere covariante rispetto alla trasformazione. [1]

Compiamo dunque la nostra verifica ponendo O nell'origine, il tangenziale di O nel punto all'infinito dell'asse x (sicchè la tangente $ax+by+c=0$ si riduce a $y=0$) e infine la retta $a_1x+b_1y+c_1=0$ nella retta impropria (sicchè $a_1x+b_1y+c_1$ si riduce alla semplice costante $c_1 \neq 0$). Tradurremo queste ipotesi scrivendo

$$f = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

$$\Phi = \frac{1}{yf_y'} = \frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x} + b_2 + b_3x + b_4x^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{x^2}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots);$$

e dovremo dimostrare precisamente che

$$b_1 = 0.$$

A tal uopo supponiamo scritto lo sviluppo di yf_y' che ha uno zero doppio in O:

$$yf_y' = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 \ldots = x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots);$$

avremo

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 \ldots) = 1$$

[1] A pag. 24 e seg. si è verificata la cosa per $\frac{dx}{f_y'}$; il nuovo fattore che qui appare ha evidentemente una definizione geometrica proiettiva.

e quindi

$$a_0 b_0 = 1$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0,$$

e però

$$b_1 = 0 \quad \text{se} \quad a_1 = 0 .$$

La nostra verifica è ridotta a calcolare il coefficiente a_1 di x^3 nello sviluppo di $y f_y'$.

Perciò risolviamo rispetto ad y l'equazione

$$f = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0,$$

ciò che si effettua col metodo dei coefficienti indeterminati (come si è visto ad esempio per il calcolo delle successive parabole osculatrici nel § 4 del L. IV): avremo

$$y = - a_{20}x^2 + a_{11}a_{20}x^3 + \dots,$$

$$y f_y' = y(1 + a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{02}y^2)$$

$$= - a_{20}x^2 + (- a_{20}a_{11} + a_{11}a_{20})x^3 + \dots$$

cioè

$$a_1 = - a_{20}a_{11} + a_{11}a_{20} = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Come conclusione possiamo enunciare che: *alla cubica f di genere 1 appartengono due integrali di seconda specie elementari, lineamente indipendenti, dotati di polo assegnato O* (del prim'ordine)

$$v = \int \frac{\varphi_1}{\psi_1 f_y'}\, dx,$$

essendo $\psi_1 = 0$ la tangente in O e $\varphi_1 = 0$ una retta qualunque per il suo tangenziale O'. Se questa φ_1 si fa coincidere con la ψ_1, l'integrale si riduce di prima specie; per conseguenza designando con v un particolare integrale di seconda specie col polo O e con u l'integrale di prima specie, *tutti gli integrali di seconda specie elementari col medesimo polo* (del prim'ordine) *verranno dati da*

$$\lambda v + \mu u$$

(si prescinde dalla costante d'integrazione che tiene al limite inferiore dell'integrale).

Questo resultato è anche chiaro a priori. Anzitutto sommando all'integrale λv l'integrale di prima specie μu si ottiene certo un integrale di seconda specie col medesimo polo; reciprocamente, sottraendo da un integrale di seconda specie, col polo O, l'integrale λv, per un valore opportuno attribuito a λ si riesce a far sparire il polo, riducendo così l'integrale a essere di prima specie: a tal uopo basta annullare il *residuo* della funzione integrale, cioè il coefficiente $\frac{1}{x}$ nel relativo sviluppo.

Aggiungiamo l'osservazione che tutti gli integrali elementari di seconda specie appartenenti alla curva f si deducono da quelli che hanno un particolare polo, sommando loro una funzione razionale di secondo grado (g_2^1). Infatti sia 0 un integrale di seconda specie avente un polo O col residuo k, e si consideri la g_2^1 definita da una coppia di punti OO'; fra le funzioni razionali di secondo grado aventi i poli O e O' scegliamone una, ψ, avente in O lo stesso residuo k: allora la funzione

$$\lambda(v - \psi) + \mu u$$

costituisce il più generale integrale di seconda specie col polo O'.

Dopo avere costruito gli integrali ellittici di seconda specie elementari, con un solo polo assegnato (del prim'ordine), è facile costruire gli integrali di seconda specie V con r poli semplici $O_1 O_2 \ldots O_r$: è chiaro che questi si ottengono combinando r integrali elementari $v_1 v_2 \ldots v_r$ coi poli $O_1 O_2 \ldots O_r$ e l'integrale di prima specie, diguisachè la forma generale di essi è

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r + \mu u;$$

infatti togliendo da un integrale O coi detti poli una espressione del tipo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r$$

si possono ridurre nulli tutti i residui, per modo che si ottenga come differenza un integrale privo di poli, cioè di prima specie.

Ma poichè gli integrali elementari di seconda specie si possono dedurre dagli integrali elementari $(\lambda_0 v_0 + \mu u)$ con un particolare polo O, sommandovi funzioni razionali, così anche tutti gli integrali V di seconda specie, con r poli $O_1 \ldots O_r$ si dedurranno analogamente dai nominati integrali elementari di polo O: infatti l'integrale V riesce definito, a meno di un integrale di prima specie, dai residui corrispondenti ai suoi poli $O_1 O_2 \ldots O_r$; quindi, togliendo una conveniente funzione razionale che abbia quei poli con gli stessi residui ed il polo O, si otterrà come differenza un integrale col solo polo O del tipo

$$\lambda_0 v_0 + \mu u .$$

(L'esistenza effettiva della funzione razionale sottraendo risulta da ciò che un gruppo di $r+1$ punti della cubica appartiene ad una g^r_{r+1}).

Il resultato ottenuto si estende al caso in cui si assegnino poli d'ordine superiore, osservando che ciascuno di questi viene caratterizzato dai coefficienti dei termini negativi del relativo sviluppo, il cui numero eguaglia l'ordine del polo.

Qui è opportuno osservare che le funzioni razionali con un polo d'ordine superiore al primo non sono decomponibili negli integrali elementari che abbiamo costruito a partire da un unico polo semplice. Per estendere a questo caso la decomposizione bisognerebbe costruire integrali di seconda specie con un unico polo O d'ordine $r = 2, 3\ldots$ per cui si assegnino anche i coefficienti dei termini caratteristici. Non ci indugiamo su tale costruzione, limitandoci a notare che essa non offre difficoltà nel nostro ordine di idee: per es. si otterrà un integrale di seconda specie con un polo del second'ordine in O dall'integrando

$$\Phi = \frac{\varphi_2}{\psi_2 f_y'},$$

dove $\psi_2 = 0$ rappresenti una conica osculatrice in O alla cubica f, e $\varphi_2 = 0$ un'altra conica che passa per le tre residue intersezioni della prima con f. (Il teorema di Cauchy ci assicura a priori che è nullo il residuo di Φ nell'unico polo O, e perciò manca nell'integrale il termine logaritmico).

Riassumeremo le conclusioni ottenute enunciando il seguente

Teorema. — *Ad una cubica di genere uno appartengono due integrali ellittici di seconda specie algebricamente indipendenti:* s'intende con ciò che un integrale qualunque differisce dalla combinazione lineare di due altri (o anche dalla combinazione di un integrale di seconda specie con quello di prima specie) per una funzione razionale.

6. Integrali ellittici di terza specie. — Finalmente indicheremo la *costruzione degli integrali ellittici di terza specie*, incominciando dagli integrali elementari cui si imponga di possedere il minimo numero di infiniti logaritmici (e non altre singolarità): cioè precisamente *due* infiniti logaritmici O_1 e O_2 che supporremo in posizione generica.

Che invero non esistano integrali di terza specie con un solo infinito logaritmico risulta già dalla nostra analisi del § 3, poichè si otterrà un integrale di terza specie con r poli generici $\psi = 0$ sulla cubica f, prendendo come funzione integranda

$$\Phi = \frac{\varphi}{\psi f_y'},$$

dove i gruppi di punti $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ devono essere equivalenti in quanto danno somme equivalenti rispettivamente con la terna dei punti all'infinito contata due volte e con la sestina $f_y' = 0$. Siccome due punti diversi di f non possono mai essere equivalenti, si avranno al minimo due singolarità logaritmiche in due punti O_1 e O_2 segati da una retta $\psi_1 = 0$; e l'integrale di Φ possiederà esclusivamente queste due singolarità qualora si assuma un numeratore φ_1 tale che la retta $\varphi_1 = 0$ passi per l'ulteriore intersezione della retta O_1O_2 con la cubica f: infatti tali ipotesi portano che $\frac{\varphi_1}{\psi_1 f_y'}$ abbia due poli semplici con residuo non nullo in O_1 e O_2, mentre si annullano i residui relativi ai punti $f_y' = 0$.

Pertanto gli integrali elementari di terza specie coi poli O_1 e O_2 vengono a dipendere linearmente da due di essi, ed anzi si riducono alla forma

$$\lambda w + \mu u$$

dove si indica con w un particolare integrale del tipo

$$w = \int \frac{\varphi_1}{\psi_1 f_y'}\, dx$$

e con u l'integrale di prima specie.

La proprietà che un integrale elementare di terza specie possegga su f almeno due infiniti logaritmici, resulta dal teorema indicato al § 1 che « per una qualunque funzione razionale sopra la superficie di Riemann, relativa alla nostra cubica f, la somma dei residui corrispondenti ai poli è nulla » e quindi — integrando — *la somma dei periodi polari degli integrali di terza specie è nulla*, così che un integrale w con un infinito logaritmico $O_1 = (\alpha_1 \beta_1)$ deve possederne necessariamente un altro $O_2 = (\alpha_2 \beta_2)$, e (nell'ipotesi che queste siano le sole singolarità logaritmiche) le caratteristiche logaritmiche di w nell'intorno di O_1 e O_2 devono avere coefficienti uguali e di segno opposto.

Ma qui conviene procedere a una verifica algebrica diretta, incominciando dal caso elementare considerato innanzi. Questa verifica procede analogamente a quella che si è incontrata nella costruzione degli integrali di seconda specie, e che si riferisce insomma al caso particolare in cui la retta ψ_1 diventi tangente alla cubica. Anzitutto si osserva che la somma dei periodi polari di un integrale di terza specie w ha evidentemente carattere proiettivo e — per quanto sopra è notato — anche la forma del suo differenziale

$$\frac{\varphi_1}{\psi_1 f_y'}\, dx$$

si muterà — per l'omografia trasformante — in un forma analoga moltiplicata tuttavia per un coefficiente. Così la verifica può ridursi al caso della cubica

$$f = x(x-1) + y\,\{a + f_1(xy) + f_2(xy)\}$$

che passa per i punti 0, 1, ∞ dell'asse delle x, ove prenderemo

$$\varphi_1 = 1, \quad \psi_1 = y.$$

Procediamo a questa verifica calcolando anzitutto il residuo della funzione

$$\Phi = \frac{1}{y f_y'}$$

nel punto $x = 0$; questo sarà il reciproco del coefficiente di x nello sviluppo di $y f_y'$.

Ora, risolvendo la $f = 0$ rispetto a y si ha

$$y = \frac{1}{a} x + \ldots$$

e poichè

$$f_y' = a + f_1 + f_2 + y(f_1' + f_2')$$

risulta

$$y f_y' = a \frac{1}{a} x + \ldots = x + \ldots$$

cioè il residuo di Φ in $x = 0$ vale 1.

Successivamente si calcolerà nello stesso modo il residuo di Φ nel punto $x = 1$, considerando Φ come funzione di y e $x - 1$; scriveremo

$$f = (x - 1)^2 + (x - 1) + y \{ b + \bar{f}_1(x - 1, y) + \bar{f}_2(x - 1, y) \}$$

$$y = \frac{-1}{b}(x - 1) + \ldots$$

$$y f_y' = b \frac{-1}{b}(x - 1) + \ldots$$

e per conseguenza il residuo di Φ vale -1. c. d. d.

Vale la pena di osservare che quando si facciano convergere i due punti O_1 e O_2 in un unico punto O, si viene ad aver qui, per l'integrando, un polo del second'ordine con residuo nullo, e conseguentemente l'integrale elementare di 3ª specie, w, si riduce a un integrale elementare di 2ª specie.

Dopo avere così verificato che la somma dei periodi polari è nulla per un integrale elementare che ha due soli infiniti logaritmici O_1 e O_2, si passerà al caso generale di un integrale W con r infiniti logaritmici $O_1 O_2 \ldots O_r$. La dimostrazione si ottiene induttivamente, riducendosi dal caso di r singolarità a quello di $r - 1$, col sottrarre da W un integrale elementare che possegga le singolarità logaritmiche O_r e O_{r-1} e che abbia in O_r lo stesso periodo polare di W.

Questo stesso ragionamento prova che: gli infiniti logaritmici di un qualsiasi integrale W di terza specie, con i relativi periodi, si possono ottenere sommando integrali elementari di terza specie: due integrali di terza specie, con gli stessi infiniti logaritmici e con gli stessi periodi polari, differiranno fra loro per un integrale di seconda specie.

Da quanto precede si trae la conclusione che: *Ogni integrale ellittico appartenente ad una cubica di genere uno, si può ottenere come somma di integrali elementari di terza specie, di un integrale elementare di seconda e di una funzione razionale.*

7. Integrali appartenenti ad una curva ellittica d'ordine $n > 3$: forme normali degli integrali ellittici. — Anche ad una curva $f(xy)=0$, di genere uno e d'ordine $n>3$, appartengono integrali di differenziali algebrici (cioè integrali ellittici) di prima, seconda, e terza specie; i quali si lasciano costruire in base alle stesse considerazioni che abbiamo svolto per il caso della cubica.

Infatti l'analisi del § 3 mostra ugualmente che l'integrale

$$\int \Phi(xy)dx$$

riuscirà privo di singolarità in quei poli semplici della funzione Φ che vengano a cadere nei punti per cui $f_y'=0$, e nei punti all'infinito di f, ove questi siano zeri del second'ordine per Φ; almeno se si suppone che:

1) la curva f abbia posizione generica rispetto agli assi coordinati;

2) i punti di diramazione della $y(x)$, per cui $f'=0$, siano punti semplici, ciò che — sussistendo l'ipotesi 1 — esclude soltanto l'esistenza di singolarità della f con rami superlineari.

Adottiamo per il momento le ipotesi 1 e 2, da cui ci libereremo più avanti.

Come nel § 4 possiamo affermare che un integrale di prima specie u verrà definito su f assumendo come funzione integranda la Φ, i cui poli sono i $2n$ punti di diramazione della $y(x)$ e i cui zeri costituiscono il gruppo equivalente segato sulla f dalla retta all'infinito contata due volte. (Sappiamo invero che, sopra una curva ellittica, il gruppo jacobiano della g_n^1 $x=\text{cost.}$ è equivalente al doppio di ogni gruppo della g_n^1 stessa). Una espressione effettiva della funzione Φ (che è definita soltanto rispetto al modulo f) si ottiene scrivendo:

$$\Phi=\frac{\varphi_{n-3}}{f_y'},$$

dove $\varphi_{n-3}=0$ designa la *curva d'ordine* $n-3$ *aggiunta* alla curva ellittica f d'ordine n. Infatti la differenza di due unità fra il grado del denominatore e quello del numeratore indica subito che la Φ possiede degli zeri del second'ordine nei punti all'infinito di f (il fascio $\lambda\varphi_{n-3}+\mu f_y'$ contiene la curva degenere costituita da φ_{n-3} e dalla retta all'infinito contata due volte); e d'altra parte si vede che la Φ possiede come poli i punti di diramazione della $y(x)$ per cui $f_y'=0$. Ma si riconosce anche che la Φ non possiede altri poli, poichè la curva

φ_{n-3} passa per le residue intersezioni di $f=0$ e $f_y'=0$ che sono i punti multipli di f, cioè per ogni punto r-plo con la moltiplicità $r-1$ che in esso compete alla f_y', la quale non possiede ulteriori contatti coi rami di f, che è supposta priva di singolarità superlineari ed in posizione generica rispetto agli assi.

Concludendo: ***Alla curva* f *di ordine* n *e di genere uno appartiene un integrale ellittico di prima specie definito a meno di una costante moltiplicativa:***

$$u=\int\frac{\varphi_{n-3}}{f_y'}\,dx.$$

Dopo avere così costruito l'integrale di prima specie appartenente ad f, non vi è difficoltà ad estendere la costruzione indicata per $n=3$ degli integrali di seconda e terza specie.

Un integrale elementare di seconda specie con un unico polo semplice in un punto generico* O *viene definito da

$$v=\int\frac{\varphi_{n-2}}{\psi_1 f_y'}\,dx$$

dove $\psi_1=0$ è la ***tangente*** ad f in O, e φ_{n-2} designa un'***aggiunta d'ordine* n − 2 *che passa per le residue intersezioni di codesta tangente:*** infatti la funzione integranda corrisponde alla g^1_{2n+2} definita dal gruppo dei punti di diramazione della $y(x)$ cui si sommi O contato due volte e dal gruppo dei punti all'infinito di f contato due volte cui si sommi la coppia di punti — sezione di φ_{n-2} — equivalente ad O^2. Ad accertare che v possiede veramente in O un polo non complicato da singolarità logaritmica, occorre sapere che il residuo della funzione integranda in O è nullo; e ciò può dedursi — come per la cubica — dal teorema di Cauchy (tenuto conto dell'annullarsi dei residui nei poli per cui $f_y'=0$) ovvero può ricondursi al risultato ottenuto per la cubica stessa (di cui ivi si è porta una verifica algebrica diretta, qui facilmente estendibile) attesochè l'integrale elementare di seconda specie, se esiste, deve rivestire la forma indicata, e la sua esistenza risulta dalla possibilità di ottenere f come trasformata birazionale di una cubica.

Si noti che nella forma precedente entrano due costanti arbitrarie, dipendenti dalla φ_{n-2}, e si hanno così due integrali elementari di seconda specie linearmente indipendenti, ciascuno dei quali può dedursi dall'altro sommando l'integrale di prima specie.

Analogamente: Un integrale elementare di terza specie dovrà avere su f due poli semplici O_1 e O_2, e sarà *dato da*

$$w = \int \frac{\varphi_{n-2}}{\psi_1 f_y'} dx$$

dove ora $\psi_1 = 0$ è la *congiungente* $O_1 O_2$, e φ_{n-2} è un'*aggiunta d'ordine* n — 2 *che passa per le* n — 2 *intersezioni residue.*

Ogni integrale ellittico appartenente ad f potrà decomporsi in integrali elementari delle tre specie ed in funzioni razionali, come sopra la cubica.

Tutti questi resultati sono ottenuti sotto due *ipotesi restrittive* da cui vogliamo *affrancarci.*

Anzitutto è lecito ricondurre in ogni caso f ad una posizione generica rispetto agli assi coordinati, usando all'uopo — ove occorre — di una trasformazione omografica: infatti si verifica che anche qui — come per la cubica — il differenziale

$$\frac{\varphi_{n-3} dx}{f_y'}$$

si riproduce a meno di un fattore costante per le trasformazioni generatrici del gruppo proiettivo, etc.

In secondo luogo il caso che f possegga in un punto multiplo $O = (00)$ un ramo superlineare d'ordine ν, si esaurisce con una facile analisi, relativa a questo punto. Basta ricordare che la f_y' (polare del punto all'infinito dell'asse y) avrà ora col detto ramo nell'origine O, $\nu - 1$ intersezioni di più che la aggiunta φ_{n-3}, obbligata a passare con la molteplicità $r - 1$ per ogni punto r — plo, sicchè, sviluppando y per le potenze di $x^{\frac{1}{\nu}}$, si otterrà per Φ

$$\Phi = \frac{b_{\nu-1}}{x^{\frac{\nu-1}{\nu}}} + \frac{b_{\nu-2}}{x^{\frac{\nu-2}{\nu}}} + \ldots + a_0 + a_1 x^{\frac{1}{\nu}} + \ldots$$

e quindi l'integrale avrà ivi uno zero d'ordine $\frac{1}{\nu}$, e una diramazione della stessa natura della $y(x)$.

Un integrale ellittico di prima, seconda o terza specie, appartenente ad una curva ellittica $F(XY)=0$, si trasforma in un integrale analogo relativo alla curva trasformata $f(xy)=0$ quando si operi su X e Y una sostituzione razionale

$$X = X(xy), \quad Y = Y(xy).$$

Così gli integrali ellittici delle tre specie possono ridursi ad alcune forme semplici (dette *normali* o *canoniche*) che giova tenere presenti.

Anzitutto si trasformi la F nella curva ellittica del quart'ordine:

$$f = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)(x-d);$$

allora l'integrale ellittico di prima specie (definito a meno d'un coefficiente moltiplicativo) si riduce alla forma:

$$(1) \qquad u = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}.$$

Infatti in questo caso la f possiede un tacnodo nel punto all'infinito dell'asse y, toccando ivi la retta all'infinito, quindi il polinomio aggiunto φ_{n-3} — che eguagliato a zero deve rappresentare la retta all'infinito — si riduce ad una costante (diversa da 0); e, d'altra parte, è $f_y' = 2y$.

Dalla 1) si avranno poi le forme corrispondenti degli integrali ellittici elementari di seconda e terza specie.

Il problema di classificare gli integrali di radicali portanti sopra un polinomio del 4° grado (gli integrali che, per incontrarsi nel problema di rettificazione dell'ellisse, hanno preso il nome di ellittici) viene posto da LEGENDRE, [1] a cui si deve pure la distinzione delle *tre specie* di codesti integrali. Le forme normali assegnate da LEGENDRE sono

$$(2) \qquad \begin{aligned} u &= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ v &= \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ w &= \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad n \neq 1. \end{aligned}$$

[1] *Traité des fonctions elliptiques...* Paris, 1825-28.

È chiaro come l'integrale (2) si deduca da (1) mediante la trasformazione proiettiva che porta la quaterna (a, b, c, d) nella $(1, -1, k, -k)$.

Ora in luogo di partire, come si è fatto, da una quartica si può assumere come curva ellittica f una cubica avente un flesso nel punto all'infinito dell'asse y e come tangente la retta all'infinito; l'equazione di tale cubica si scrive sotto la forma normale

$$f = y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3 = 0 .$$

Si è visto d'altronde come si arrivi a questa forma dalla

$$y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0 ,$$

con una trasformazione proiettiva che porti il punto d all'infinito; sicchè g_2 e g_3 porgono qui gli invarianti (della quaterna e) della cubica. [1]

Ora l'integrale ellittico di prima specie prenderà la forma (già incontrata nel § 4):

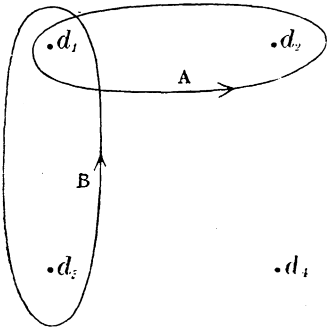
$$u = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} ,$$

che è la *forma normale di* WEIERSTRASS (cfr. § 10).

8. **Periodi: integrali normali.** — Abbiamo rilevato che un integrale ellittico di prima specie,

$$u = \int \Phi dx,$$

appartenente alla riemanniana f possiede, in generale, due *periodi ciclici*, che corrispondono ai cicli indipendenti della riemanniana. Operando sopra la superficie di Riemann a due fogli rappresentativa della $y(x)$, che ha i punti di diramazione d_1, d_2, d_3, d_4, (a distanza finita), si possono assumere come cicli irriducibili due linee chiuse A e B (che è lecito far passare per uno stesso punto O), le quali circondino rispettivamente d_1, d_2 e d_1, d_3 escludendo i rimanenti punti di diramazione



[1] L° I, Cap. I, § 5 (Vol. I pag. 34).

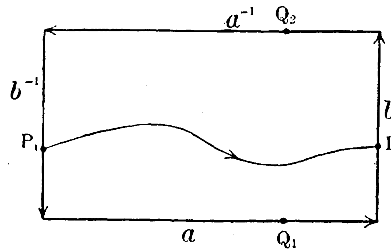
(Cfr. L. V, § 37): i periodi relativi ai due cicli sono forniti da

$$\omega = \int\limits_A \Phi\, dx_1 = \omega' = \int\limits_B \Phi dx .$$

Il teorema di CAUCHY ci insegna che questi integrali non variano quando A e B si deformino comunque senza attraversare punti di diramazione; infatti se $\bar{A}$ rappresenta una deformazione del ciclo A, che può supporsi ancora passare per O, le due linee prese in senso opposto costituiscono il contorno di una o più aree chiuse non racchiudenti nell'interno alcun punto in cui l'integrando Φ abbia un residuo diverso da zero, sicchè

$$\int\limits_{A\bar{A}} \Phi dx = 0 .$$

Così dunque i valori che l'integrale u riceve in un punto (xy) della riemanniana, quando si definisca l'integrale a partire da un'origine $x_0 y_0$, restano determinati a meno di multipli interi dei periodi ω e ω': infatti ogni cammino d'integrazione che colleghi $(x_0 y_0)$ ad (xy) si può ottenere da un cammino particolare sommandogli i cicli A e B contati un certo numero di volte (Cfr. L. V, § 37). In luogo di riferirsi ad una riemanniana a fogli si può anche assumere come riemanniana, equivalente in senso topologico, un toro che — tagliato lungo un cerchio meridiano A e lungo un cerchio parallelo B — si può spiegare sopra un rettangolo i cui lati opposti, che indichiamo con a e a^{-1}, b, b^{-1}, rappresentano gli orli dei tagli A e B percorsi in verso opposto (di qui la ragione degli esponenti -1). I periodi, forniti dagli integrali di Φ lungo A e B, appariscono ora come differenze dei valori che l'integrale prende in due punti



come P_1 e P_2 (o Q_1 e Q_2) corrispondentisi per simmetria sui lati opposti del rettangolo, che nascono da un medesimo punto (P o Q) del toro:

$$\omega = \int\limits_{P_1}^{P_2} \Phi dx, \quad \omega' = \int\limits_{Q_1}^{Q_2} \Phi dx$$

(Naturalmente per ciascun punto della linea d'integrazione P_1P_2 si deve assumere come valore della x — e quindi anche della Φ — quello che compete al punto corrispondente della riemanniana a fogli rappresentativa della funzione algebrica $y(x)$).

Dimostriamo ora che: *i periodi ciclici dell'integrale ellittico di prima specie sono ambedue diversi da zero.*

Ritroveremo questo teorema in una forma più generale a proposito degli integrali abeliani (Cap. II): la dimostrazione che qui forniamo, quantunque valida solo per gli integrali ellittici, è notevole per la sua semplicità.

Anzitutto se l'integrale di prima specie u ha i due periodi nulli ($\omega = \omega' = 0$), la funzione u essendo monodroma e priva di punti singolari sulla riemanniana, si riduce a una costante (Cfr. L. II, § 31); in secondo luogo pongasi

$$\omega \neq 0, \quad \omega' = 0,$$

allora si può supporre addirittura

$$\omega = 2\pi i,$$

bastando altrimenti moltiplicare l'integrale per $\frac{2\pi i}{\omega}$. Ora per la u così definita avremo che

$$e^u$$

riesce monodroma e priva di singolarità sopra la riemanniana e quindi riducesi a una costante; ciò porta che anche u è costante. c. d. d.

Non potendosi annullare alcuno dei periodi dell'integrale di prima specie appartenente alla curva ellittica f, si suole determinare la costante moltiplicativa che vi compare, assumendo come *integrale normale di prima specie* quello che ha un periodo uguale all'unità: designando come innanzi con ω e ω' i due periodi relativi ad un qualunque integrale di prima specie, quelli dell'integrale normale varranno dunque

$$1 \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Questo integrale normale e i suoi periodi riescono perfettamente definiti, in valore ed in segno quando si *fissano con-*

venzionalmente il primo e il secondo ciclo della riemanniana e il rispettivo senso.

Anche gli integrali di seconda specie, appartenenti alla curva ellittica f, posseggono in generale due periodi corrispondenti ai cicli indipendenti della riemanniana, riuscendo nullo l'integrale lungo un cerchietto che circondi un polo.

Un *integrale di seconda specie* v *per cui siano nulli ambedue i periodi ciclici si riduce a una funzione razionale* di x e y, essendo v una funzione monodroma con soli poli sopra la riemannianna. Di conseguenza non possono annullarsi ambedue i periodi ciclici per un integrale elementare di seconda specie che ha un dato polo.

Fra gli integrali elementari di seconda specie,

$$\lambda v + \mu u ,$$

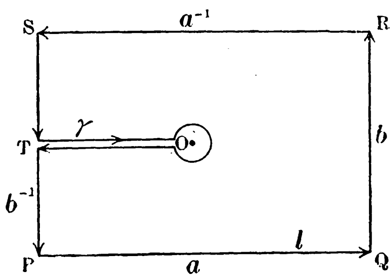
che hanno un polo assegnato in un punto generico O, ne esiste uno per cui si annulla il periodo relativo al primo ciclo A (corrispondentemente al quale il periodo di u viene ridotto all'unità); questo integrale v riesce definito a meno di una costante moltiplicativa, sicchè il suo secondo periodo σ, può rendersi uguale a qualunque valore diverso da zero. Vediamo di valutare σ in funzione del residuo dell'integrando

$$\frac{dv}{dx} = \Phi(xy) .$$

A tale scopo ci varremo del teorema di CAUCHY, considerando — con RIEMANN — l'integrale

$$\int v du ,$$

esteso ad una conveniente linea λ; u designa qui l'integrale normale coi periodi 1 e τ. Riferendoci alla riemanniana spiegata sopra il rettangolo $PQRS$, assumeremo come linea λ il contorno l del rettangolo percorso positivamente, aumentato di un cappio γ che partendo da un punto T di esso giri intorno al polo O di



v, il quale cappio risulta percorso negativamente: $\lambda = l - \gamma$. Questa λ racchiude evidentemente un'area semplicemente connessa entro cui la funzione integranda $v\,\dfrac{du}{dx}$ possiede soltanto dei poli col residuo nullo, quali sono i poli dell'integrando di prima specie $\dfrac{du}{dx}$: si ha dunque

$$\int_\lambda v du = 0 \quad \text{cioè} \quad \int_l v du = \int_\gamma u dv.$$

du

Osserviamo che la linea orientata l si compone del perimetro del rettangolo $PQRS$, percorso positivamente,

$$l = PQ + QR + RS + SP.$$

Calcoliamo pertanto l'integrale decomponendo la linea l in parti, come appare dalla seguente scrittura

$$\int_l = \left(\int_{PQ} - \int_{SR}\right) + \left(\int_{QR} - \int_{PS}\right).$$

Poichè i valori di v nei punti corrispondenti dei lati opposti PQ e SR differiscono per il periodo $\sigma = \int_{SP} du$, e il du resta il medesimo, si avrà

$$\int_{PQ} v du - \int_{SR} v du = -\sigma \int_{PQ} du = -\sigma,$$

essendo

$$\int_{PQ} du$$

in grandezza e segno il primo periodo dell'integrale normale u, che si è fissato uguale all'unità.

Invece i valori di v nei punti corrispondenti dei lati opposti QR e PS sono uguali, essendo il primo periodo di v

$$\int_{PQ} dv = 0,$$

per conseguenza

$$\int_{QR} v du - \int_{PS} v du = 0.$$

E in definitiva:

$$\int_l v du = -\sigma .$$

Resta da calcolare

$$\int_\gamma v du$$

che equivale all'integrale esteso ad un cerchietto infinitesimo avvolgente positivamente il punto O. Ora questo integrale vien dato da

$$2\pi i \cdot \rho \cdot k$$

dove ρ designa il residuo di v nel polo O, e $k = \left(\frac{du}{dx}\right)_0$ è il valore assunto dall'integrando di prima specie nello stesso punto O: infatti, nell'intorno del punto O si ha

$$v du = \frac{\rho}{x} k dx + ..$$

Si conclude

$$-\sigma = 2\pi i \rho k, \quad \text{cioè} \quad \sigma = -2\pi i \rho k;$$

in parole: *Il secondo periodo dell'integrale di seconda specie elementare* v *che ha nullo il primo periodo, è dato da* -2πi *volte il residuo della funzione integranda stessa nel polo O, moltiplicato per il valore dell'integrando di prima specie in O.*

Dopo ciò si potrà determinare *l'integrale normale di seconda specie*, v, *col polo O*, disponendo delle costanti arbitrarie che compaiono nell'integrale elementare, per modo che:

1) il primo periodo risulti nullo,

2) il secondo periodo risulti, a meno del fattore $-2\pi i$, uguale al valore dell'integrando normale di prima specie in O:

$$\sigma = -2\pi i \left(\frac{du}{dx}\right)_0 ;$$

a tal uopo occorre assumere uguale ad 1 il residuo di v in O.

Passiamo a considerare i periodi degli integrali di terza specie appartenenti alla nostra curva ellittica f. Qui un cammino chiuso qualunque appartenente alla riemanniana si potrà comporre mediante due cicli indipendenti A e B uscenti da un punto O e un certo numero di cappi circondanti i punti di singolarità logaritmica: pertanto i valori dell'integrale in O verranno espressi sotto la forma

$$\omega = r\Omega + s\Omega' + \Sigma n_i \pi_i$$

dove Ω e Ω' rappresentano i due periodi ciclici relativi ad A e B, π_i i periodi polari relativi alle singolarità logaritmiche, e r, s, n_i designano numeri interi. Giova notare che la deformazione continua di un ciclo, per es. A, non lascia più invariato il relativo periodo Ω, giacchè questo può venire accresciuto di qualche periodo polare.

Osserviamo che: *un integrale elementare di terza specie* w *non può aver nulli ambedue i periodi* Ω *e* Ω'.

Pongasi che per w siano nulli i detti periodi, e quindi vi siano soltanto due periodi polari $2k\pi i$ e $-2k\pi i$ relativi alle singolarità logaritmiche O_1 e O_2, dove l'integrando diverrà infinito del prim'ordine coi residui rispettivi k e $-k$; allora moltiplicando per $\frac{1}{k}$ si otterrà un nuovo integrale elementare, che per brevità torneremo a indicare con w, per cui l'integrando ha residui 1 e -1, e i periodi polari $2\pi i$ e $-2\pi i$.

Ciò posto si consideri sopra la riemanniana la funzione

$$e^w;$$

questa riesce monodroma, e si verifica che ha soltanto un polo semplice in O_2 (e un solo zero in O_1), perciò deve ridursi ad una *funzione razionale con un polo ed uno zero:* ma ciò costituisce un assurdo.

Verifichiamo l'assunzione fatta intorno alle singolarità di e^w. È chiaro che e^w non può divenire zero o infinito nei punti per cui w resta finito, e però è da analizzare soltanto il suo comportamento in O_1 e O_2.

Nell'intorno di $O_1 = (\alpha_1 \beta_1)$ si scriverà

$$w = \log(x - \alpha_1) + \theta_1(x - \alpha_1),$$

con θ_1 regolare, e quindi

$$e^w = (x - \alpha_1)e^{\theta_1}$$

risulta funzione regolare con uno zero in O_1. Analogamente nell'intorno di $O_2 = (\alpha_2 \beta_2)$ scriveremo

$$w = -\log(x - \alpha_2) + \theta_2(x - \alpha_2)$$

con θ_2 regolare, e quindi

$$e^w = \frac{1}{x - \alpha_2} e^{\theta_2}$$

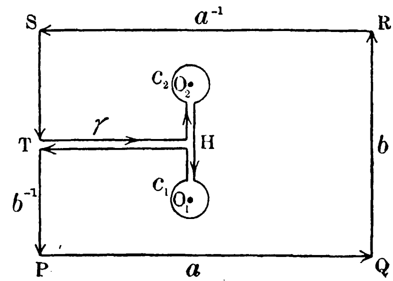
possiede un polo semplice in O_2.

Dopo ciò — analogamente a quanto si è fatto per gli integrali di seconda specie — definiremo *l'integrale* (elementare) *normale di terza specie* w, con i punti logaritmici O_1 e O_2, fissando che sia nullo il periodo relativo al primo ciclo A (per cui è 1 il periodo dell'integrale normale di prima specie u), e che i residui dell'integrando nei punti O_1 e O_2 siano rispettivamente 1 e — 1. *Vogliamo* ***calcolare il periodo*** θ ***di*** w ***relativo al secondo ciclo.***

A tale uopo (come già per l'integrale di seconda specie) considereremo lo

$$\int w du$$

esteso ad una linea chiusa λ composta del contorno l del rettangolo *PQRS* e di un cammino γ, percorso negativamente, che parte da un punto T di questo ed avvolge i punti singolari O_1 e O_2: $\lambda = l - \gamma$; questo cammino γ si può ridurre, come nell'annessa figura, ad una linea aperta TH percorsa due volte in senso opposto, e a un doppio cappio che, partendo da H, avvolge O_1 e O_2. La linea chiusa λ racchiude entro di sè un'area semplicemente connessa che non contiene nessun punto in cui l'integrando



$$w \frac{du}{dx}$$

diventi infinito con residuo diverso da zero, quindi, in base al teorema di CAUCHY,

$$\int_\lambda w du = 0, \quad \text{cioè} \quad \int_l w du = \int_\gamma w du .$$

Ora questi integrali si decompongono in parti che possiamo calcolare separatamente. Come nel caso già trattato dell'integrale di seconda specie si ha anzitutto

$$\int_l w du = -\theta,$$

e inoltre, come è ovvio,

$$\int_{TH} w du + \int_{HT} w du = 0.$$

Resta da valutare l'integrale esteso al doppio cappio. Perciò si valuteranno prima gli integrali relativi ai cerchietti infinitesimi c_1 e c_2 che circondano O_1 e O_2, e si riconoscerà facilmente che essi sono nulli, perchè l'integrando diventa in O_1 e O_2 infinito d'ordine logaritmico. Invero avremo nell'intorno di O_1

$$w \frac{du}{dx} = A_1 \log(x - \alpha_1) + \theta_1 (x - \alpha_1)$$

e quindi

$$\int_{c_1} w du = A_1 \int_{c_1} \log(x - \alpha_1) dx,$$

(essendo nullo l'integrale della funzione regolare θ_1); ora, ponendo

$$x - \alpha_1 = re^{i\varphi}, \quad dx = rie^{i\varphi} d\varphi$$

sarà

$$\int_{c_1} w du = A_1 ri \log r \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi - A_1 r \int_0^{2\pi} \varphi e^{i\varphi} d\varphi.$$

Ma gl'integrali che compariscono nel secondo termine dell'eguaglianza hanno un valore finito che non importa calcolare, sicchè essendo

$$\lim_{r=0} r \log r = 0,$$

si deduce

$$\int_{c_1} w du = 0.$$

Resta da calcolare il nostro integrale $\int w du$ esteso ai due tratti di γ che possono considerarsi come i due orli di un taglio $O_1 O_2$. Qui importa osservare che i valori di w sui due orli del detto taglio differiscono fra loro per $2\pi i$, e quindi il valore dell'integrale che dobbiamo calcolare sarà

$$2\pi i \int_{O_1}^{O_2} du = 2\pi i(u_2 - u_1)$$

ove si designano con u_1 e u_2 i valori di u in O_1 e O_2, e dove si è supposto — come appare dalla figura — che il doppio cappio venga percorso nel senso positivo cui rispondono, anche in segno, i periodi polari di w, cioè $+2\pi i$ e $-2\pi i$.

Come conclusione abbiamo

$$-\theta = 2\pi i(u_2 - u_1)$$

e quindi:

$$\theta = -2\pi i(u_2 - u_1) = 2\pi i(u_1 - u_2)$$

Il secondo periodo dell'integrale normale di terza specie coi punti singolari O_1 e O_2, è — a meno del fattore $2\pi i$ — uguale alla differenza dei valori che l'integrale normale di prima specie assume nei detti punti O_1 e *O_2*; precisamente:

$$\theta = 2\pi i(u_1 - u_2).$$

Qui si noti che in generale il valore di u in un punto è definito a meno di multipli dei periodi; qui però la differenza $u_1 - u_2$ è esattemente definita dalla circostanza di passare da O_1 a O_2 lungo un cammino che non attraversi i cicli A e B (ma del resto qualunque); in generale, lasciando cadere questa condizione, la differenza $u_1 - u_2$ risulta definita a meno di multipli dei periodi (1 e τ).

9. Teorema d'inversione: funzioni ellittiche. — I risultati ottenuti circa i periodi dell'integrale normale di 3ª specie, con i punti singolari O_1 e O_2, appartenente ad una curva ellittica f, conducono immediatamente ad una teorema di capitale importanza.

Invero abbiamo veduto che il detto integrale non può avere ambedue i periodi ciclici nulli, e che il secondo periodo, θ, è uguale, a meno del fattore $2\pi i$, alla differenza dei valori dell'integrale normale di prima specie calcolato nei due punti:

$$\theta = 2\pi i(u_1 - u_2).$$

Si deduce che non può essere, per due punti distinti O_1 e O_2

$$u_1 = u_2 .$$

Più in generale se invece dell'integrale normale di prima specie si considera un integrale qualunque, di prima specie, che è a quello proporzionale, dotato dei due periodi ω e ω', e non si fissa alcuna condizione relativa ai cammini di integrazione che determinano i valori di u_1 e di u_2, avremo

$$\frac{\theta}{2\pi i} \equiv u_1 - u_2 \qquad \text{mod. } \omega \text{ e } \omega'$$

e potremo affermare che non sarà mai

$$u_1 \equiv u_2 \qquad \text{mod. } \omega \text{ e } \omega'.$$

Ciò porta al

Teorema. — *Le coordinate* x, y *dei punti della curva ellittica f risultano funzioni monodrome del parametro* u.

Riferendoci per semplicità di discorso alla quartica ellittica

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

consideriamo l'equazione

(1) $$u = \int_{x_0y_0}^{xy} \frac{dx}{y}$$

e proponiamoci di risolverla esprimendo x e y come funzioni di u. Poichè in un punto generico, $x = \alpha$, u è funzione regolare di x:

$$u = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \ldots,$$

con $a_1 \neq 0$, invertendo la serie [1] si otterrà (in un intorno del punto $u = a_0$) x come funzione analitica e regolare di u: $x = x(u)$.

Similmente si otterrà anche y funzione analitica di u; del resto derivando la 1) si ha

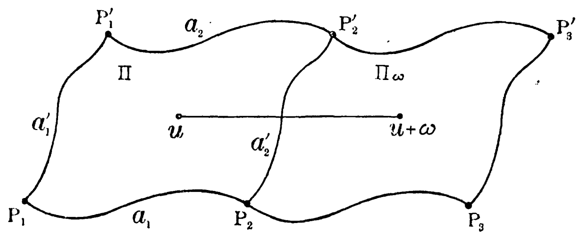
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}, \quad \text{e quindi} \quad y = \frac{dx}{du} = x'(u).$$

Si è così provato che le coordinate x e y dei punti di una curva ellittica f sono funzioni analitiche dell'integrale

[1] Cfr. p. es. Bianchi. § 58 op. c.

di prima specie; ma i risultati precedenti ci assicurano che queste funzioni, comunque estese al di là degli intorni in cui sono state definite dalle loro espressioni analitiche, riescono monodrome.

Resta da vedere che le funzioni $x(u)$ e $y(u)$ vengono definite in tutto il piano della variabile complessa u, avendo soltanto un punto singolare essenziale all'infinito (e all'infuori di questo solamente singolarità polari). A tale scopo riferendoci per esempio ad un toro rappresentante la riemanniana di f, si consideri un cerchio meridiano A: i valori di u nei punti di A (partendo da un punto P e ritornandovi dopo un giro) definiranno sul piano rappresentativo della u una linea a_1, aperta, che congiunge due punti P_1 e P_2 per cui la differenza dei valori di u eguaglia il periodo ω; codesta linea non possiede alcun nodo, poichè un nodo potrebbe nascere soltanto da due punti di A in cui u assumesse lo stesso valore. Ora si faccia ruotare il meridiano A in guisa da descrivere il toro, fino a ritornare nella posizione iniziale: la linea a_1 si muoverà — deformandosi con continuità — nel piano della u e descriverà semplicemente un'area a forma di parallelogramma con lati curvilinei, limitato da $a_1 = P_1P_2$ e dalla sua posizione



finale $a_2 = P'_1P'_2$, nonchè dalle linee a'_1 e a'_2 descritte dai punti P_1 e P_2; invero è escluso che la linea generatrice possa passare due volte per il medesimo punto u, perchè u, è funzione univoca del punto della riemanniana. Aggiungasi che i lati opposti del nostro parallelogramma a_1, a_2 e a'_1, a'_2 sono uguali e paralleli, potendosi sovrapporre l'uno all'altro mediante una traslazione rispettivamente definita dai vettori ω' e ω.

Da ciò che precede risulta che le nostre funzioni $x(u)$ e $y(u)$ (provenienti dall'inversione dell'integrale ellittico di prima specie) riescono definite entro il parallelogramma a lati curvilinei $\Pi = P_1P_2P'_2P'_1$, per modo che ad ogni punto u, entro Π, risponde un punto (xy) della riemanniana f. Qui è essenziale osservare che $P_1 P_2 P'_2 P'_1$ sono veramente i vertici di un parallelogramma e non mai punti in linea retta, di guisa che le due traslazioni ω e ω' risultano indipendenti; altrimenti si calcoli l'area di π, per comodità rispetto ad assi coordinati che non vi penetrino: si troverà che questa area è in ogni caso uguale a quella del parallelogramma rettilineo coi medesimi vertici, e quindi nella nostra ipotesi è nulla: ma ciò importa che il suo contorno debba essere una linea dotata di nodi, in contraddizione con la monodromia delle funzioni $x(u)$ e $y(u)$.

Riservandoci di ritornare più oltre sulle conseguenze dell'osservazione che precede, vediamo ora che quando il punto (xy) si muova sopra la riemanniana f, ritornando alla posizione iniziale dopo aver descritto un cerchio meridiano, il punto corrispondente nel piano rappresentativo u esce dal parallelogramma Π, e va nel punto $u+\omega$ che cade entro il parallelogramma $\Pi_\omega = P_2 P_3 P'_3 P'_2$, che si ottiene da $\Pi = P_1 P_2 P'_2 P'_1$ per la traslazione del vettore ω: così la $x(u)$ e la $y(u)$ restano definite per ogni punto di Π_ω nello stesso modo che per ogni punto di Π. Similmente si dica per il caso in cui il punto (xy) descriva sulla riemanniana f un cerchio parallelo. Appare quindi che il campo accessibile alla variabile u, in cui sono definite le $x(u)$ e $y(u)$ viene costituito da una somma di parallelogrammi $\Pi_{r\omega+s\omega'}$, che si deducono da Π componendo le traslazioni elementari ω e ω', e che — nel loro insieme — ricoprono di una rete l'intero piano, con esclusione del punto (limite) all'infinito, il quale riesce quindi una singolarità essenziale per $x(u)$ e $y(u)$.

Conviene verificare più precisamente che dentro il parallegramma Π le $x(u)$ e $y(u)$, mantenendosi ovunque continue, sono regolari salvo un numero finito di poli. Anzitutto ciò è chiaro per un punto generico del parallelogramma corrispondente a un punto generico della curva per cui x e y hanno valori finiti [1] tenuto conto che $y = x'(u)$. Ora, per analizzare il comportamento di x e y in un punto a_0 per cui riesca $x = \infty$, o $y = \infty$, basterà operare una trasformazione

[1] Si ricordi che una funzione analitica è sempre regolare in un punto per cui essa e la sua derivata assumano valori finiti ed allora anche tutte le derivate successive sono regolari.

birazionale della curva

$$f = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0$$

in un'altra dello stesso tipo

$$F = Y^2 - (X-A)(X-B)(X-C)(X-D) = 0,$$

per modo che il punto $(X_0 Y_0)$ omologo ad u_0, venga a distanza finita: appare di qui che x o y, essendo funzioni razionali di X e Y, potranno avere in u_0 soltanto un polo.

Abbiamo riconosciuto che le $x(u)$ e $y(u)$, provenienti dall'inversione dell'integrale ellittico di prima specie, sono funzioni monodrome e doppiamente periodiche in tutto il piano della variabile complessa u, le quali prendono regolarmente tutti i valori (compreso il valore ∞) nei punti di un parallelogramma a lati curvilinei $P_1P_2P'_2P'_1$, e nei parallelogrammi che si ottengono da questo mediante le due traslazioni elementari indipendenti ω e ω'.

Ora si vede che al detto parallelogramma è lecito sostituire il *parallelogramma a lati rettilinei* coi medesimi vertici, giacchè la u assume valori congrui rispetto ai periodi ω o ω', nelle parti che vengono aggiunte e tolte a Π quando si rettifichino due lati opposti. Inoltre è anche lecito sostituire a questo parallelogramma Π il parallelogramma dei periodi, cioè il parallelogramma traslato 0, ω, ω', $\omega+\omega'$, che ha un vertice nell'origine; ciò corrisponde del resto ad assumere nella costruzione precedente il punto P della riemanniana nello zero di u.

Il resultato ottenuto potrà riassumersi nel seguente

TEOREMA. — *Le coordinate* x *e* y *dei punti di una curva* f *di genere uno, si esprimono come funzioni monodrome doppiamente periodiche di un parametro* u, *che è l'integrale di prima specie della curva, e queste funzioni assumono tutti i valori entro il parallelogramma dei periodi* ω e ω' tracciato nel piano della variabile complessa u: u designa qui l'integrale ellittico di prima specie appartenente ad f.

È ovvio che anche ogni funzione razionale $X(xy)$ risulterà pure funzione monodroma di u, coi medesimi periodi, e del resto la X può essere ritenuta come ascissa del punto di una curva trasformata di f. A tutte queste funzioni X si darà il nome di *funzioni ellittiche*.

Osservazione. — Come l'inversione dell'integrale ellittico di prima specie ci ha condotti ad una rappresentazione parametrica univoca, così può chiedersi se ad un resultato analogo conduca pure la considerazione di integrali di specie superiore. La risposta è negativa: *L'inversione dell'integrale ellittico di seconda o di terza specie, non dà più origine a funzioni monodrome.*

Pongasi invero che l'integrale ellittico

$$I = \int_{(x_0 y_0)}^{(xy)} \Phi(x, y) dx$$

definisca, per inversione, x come funzione univoca di u; allora (riferendosi per semplicità a una cubica $f(xy) = 0$ posta in posizione generica rispetto agli assi coordinati) si troverà che la funzione razionale $\Phi(xy)$ deve soddisfare ad alcune condizioni che caratterizzano precisamente l'integrando di prima specie. Effettivamente avremo che:

1) Φ non si può annullare in nessun punto a distanza finita: perchè, qualora si avesse, ad esempio, uno zero nell'origine, si avrebbe

$$\Phi = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

(senza escludere $a_1 = 0 \ldots$)

e quindi integrando

$$I = \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + k$$

dimodochè l'inversione della serie dà luogo ad almeno due valori di x in funzione di $I - k$;

2) Ogni punto di diramazione della $y(x)$ (che per ipotesi è semplice e a distanza finita) è un polo di Φ.

Sia questo punto nell'origine, sicchè le x e y si esprimano nell'intorno di esso per mezzo del parametro $t = x^{\frac{1}{2}}$, i cui valori rispondono univocamente ai punti della riemanniana. Se Φ si conservasse finita in $x = 0$, sarebbe

$$\Phi = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

(senza escludere $a_0 = 0 \ldots$);

quindi, essendo $dx = 2tdt$,

$$I = a_0 t^2 + \frac{2}{3} a_1 t^3 + \ldots + k$$

sicchè l'inversione non definisce t come funzione univoca di $I - k$.

3) La funzione Φ non può diventare infinitesima d'ordine superiore a 2 per $x = \infty$, cioè $x^2 \Phi \neq 0$ per $x = \infty$.

Infatti ponendo $x = \frac{1}{X}$,

$$I = \int \Phi(xy) dx = -\int \Phi\left(\frac{1}{X}, y\right) \frac{dX}{X^2},$$

sicchè — per la proprietà 1) — l'integrando

$$\Phi\left(\frac{1}{X}, y\right) \cdot \frac{1}{X^2} = x^2 \Phi(xy)$$

non può annullarsi per $X = 0$.

Le proprietà 1), 2) e 3) portano che la $\Phi(xy)$ abbia almeno 6 poli cadenti nei punti $f_y' = 0$, e al più 3 zeri doppi nei punti all'infinito della cubica; la Φ sarà dunque del sest'ordine e si ridurrà alla forma dell'integrando di prima specie

$$\Phi = \frac{k}{f_y'}.$$

(Lo studioso confronterà l'analisi precedente con quella che nel § 4 ci è valsa a caratterizzare gli integrandi di prima specie).

Rileviamo esplicitamente che la non degenerazione del parallelogramma dei periodi, osservata innanzi per le funzioni ellittiche, importa una *diseguaglianza fondamentale per i periodi dell' integrale ellittico di prima specie.*

Infatti, distinguendo nei periodi ω e ω' le parti reali e immaginarie:

$$\omega = a + ib, \quad \omega' = a' + ib',$$

l'area del parallelogramma dei periodi essendo doppia del triangolo $0\omega\omega'$, viene espressa da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \\ a' & b' & 1 \end{vmatrix} = ab' - a'b;$$

e, come abbiamo osservato, quest'area non può annullarsi per un parallelogramma a lati rettilinei o curvilinei che rappresenti la riemanniana della data curva f, sicchè

$$ab' - a'b \neq 0.$$

Conveniamo di assumere il senso positivo dei cicli A *e* B' *della riemanniana,* di cui si è già fissato l'ordine, in guisa che i tre vertici del triangolo $0\omega\omega'$ si seguano nel senso positivo (quello contrario alle lancette dell'orologio), per modo che l'area del detto triangolo risulta positiva: avremo così

$$ab' - a'b > 0.$$

Questa diseguaglianza si può anche esprimere dicendo che: *il rapporto* $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ *non può essere reale ed anzi* — secondo la nostra precedente convenzione — ha la *parte immaginaria positiva*; infatti:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a' + ib'}{a + ib} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + i\,\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}.$$

Che $\frac{\omega'}{\omega}$ non possa essere reale, si può vedere d'altronde anche in altri modi.

Anzitutto se $\frac{\omega'}{\omega}$ fosse un numero razionale $\frac{r}{s}$, la funzione u ammetterebbe soltanto il periodo elementare $\frac{\omega'}{r} = \frac{\omega}{s} = k$, e quindi

$$e^{\frac{2\pi i}{k}u}$$

riuscirebbe funzione monodroma priva di singolarità sulla superficie di Riemann, e si ridurrebbe a una costante. E neppure può essere $\frac{\omega'}{\omega}$ un numero irrazionale, per il fatto che u non può prendere valori congrui (mod. ω, ω') in punti (xy) diversi. Infatti si noti che l'intorno di un punto (x_0y_0) si rappresenta *biunivocamente* sull'intorno di un punto u_0; ora se $\frac{\omega'}{\omega}$ fosse un irrazionale, l'espressione

$$r\omega' - s\omega,$$

con r e s interi, darebbe dei valori ε piccoli a piacere, e quindi nell'intorno del punto u_0 si troverebbe un punto $u_0 + \varepsilon$ cui risponderebbe lo ***stesso*** punto $x_0 y_0$, contro la ricordata biunivocità della corrispondenza.

La disuguaglianza fondamentale per i periodi si può dedurre, con Riemann, seguendo un procedimento artificioso ma valido in generale per gl'integrali abeliani, procedimento che riportiamo a proposito di questi nel capitolo II°.

Termineremo questo paragrafo spiegando in breve una *Seconda dimostrazione del teorema fondamentale d'inversione* dell'integrale ellittico di prima specie

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}};$$

la quale dimostrazione riesce indipendente dal calcolo dei periodi dell'integrale elementare di terza specie. Il procedimento che qui si adopera compare sotto forma non rigorosa nel trattato delle funzioni ellittiche di Briot et Bouquet, e fu reso completo da Picard (¹); esso consiste nel provare che:

1) l'inversione della u è possibile nell'intorno di *ogni* punto (xy) compresi i punti $x = a, b, c, d$, e il punto $x = \infty$, dove, naturalmente, si sviluppa in serie di potenze di u non più x ma $\frac{1}{x}$;

2) lo sviluppo così ottenuto per ciascun punto ha un raggio di convergenza superiore ad un minimo finito, di guisa che, a partire da un punto u, l'estensione analitica della funzione $x(u)$ invade tutto il piano senza mai incontrare — a distanza finita — punti singolari (di diramazione o essenziali) che non siano poli.

Si riconosce la proprietà 1) mediante l'analisi che abbiamo fatto nella precedente *Osservazione*, verificando — come ognuno

(¹) Bulletin des Sciences math. 1890 - Traité d'Analyse t. II cap 12, n. 7. (Parigi 1905) pag. 377.

può fare senza difficoltà — che le condizioni ivi incontrate come necessarie sono altresì sufficienti per l'inversione.

Dopo ciò si proverà l'asserzione 2) tracciando nel piano delle x quattro cerchi C_a, C_b, C_c, C_d, sufficientemente piccoli, intorno ai punti a, b, c, d, e un cerchio Γ, sufficientemente grande, per modo che entro ciascuno dei cerchi C e fuori di Γ valgono rispettivamente gli sviluppi di u per le potenze di

$$(x-a)^{\frac{1}{2}},\quad (x-b)^{\frac{1}{2}},\quad (x-c)^{\frac{1}{2}},\quad (x-d)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{x};$$

la funzione regolare $u(x)$ darà luogo ad un minimo r per il raggio di convergenza della funzione inversa, e sarà necessariamente $r>0$, altrimenti esisterebbe un punto limite in cui manca l'inversione. Similmente si prova che esiste un minimo, diverso da zero, per il raggio di convergenza della funzione che si ottiene invertendo $\left(\frac{1}{x}\right)$ fuori di Γ ovvero $\{(x-a)^{\frac{1}{2}}\}$ in C_a e similmente per gli altri cerchi C, sicchè infine la proprietà (2) risulta dimostrata.

10. **Proprietà generali delle funzioni doppiamente periodiche.** — Data una curva ellittica $f(xy)=0$, esprimendo x e y come funzioni di un integrale ellittico di prima specie u, si ottengono — come si è visto — due funzioni doppiamente periodiche, che possono ritenersi definite nel parallelogramma fondamentale dei periodi Π, di vertici 0, ω, ω', $\omega+\omega'$.

Abbiamo pure rilevato che ogni funzione razionale $X(xy)$ risulta funzione ellittica di u con gli stessi periodi. Si può aggiungere che la X, essendo di un certo *ordine* n sopra f (in guisa da definire una g_n^1) assumerà ogni valore lo stesso numero n di volte entro il parallelogramma dei periodi ed in particolare avrà n zeri ed n poli (tuttavia qualcuno di questi punti può cadere sul contorno ed allora deve essere ritenuto come identico al punto omologo del lato opposto). Essendo $n\geq 2$: le funzioni ellittiche sono almeno di secondo ordine.

Per $n\geq 2$ sappiamo che ogni gruppo di n punti su f appartiene ad una g_n^{n-1}, quindi:

Si può determinare, a meno di una costante moltiplicativa, una funzione ellittica d'ordine $n\geq 2$, dando ad arbitrio

— entro il parallelogramma dei periodi — i suoi n poli ed $n-1$ zeri. Ed anche:

Si può determinare, a meno di una costante additiva, una funzione ellittica d'ordine $n \geq 2$, *dando ad arbitrio gli* n *poli e i relativi residui, la cui somma sia nulla,* come richiede il teorema di CAUCHY.

Per quest'ultimo enunciato occorre osservare che la differenza di due funzioni ellittiche coi medesimi poli e residui, riuscendo priva di poli si riduce a una costante.

Se si assume come curva ellittica f la quartica

$$y^2 = f_4(x),$$

cui appartiene l'integrale di prima specie

$$u = \int \frac{dx}{y},$$

la $x(u)$ risulta funzione del second'ordine con due poli distinti, mentre la $y = x'(u)$ è del quart'ordine.

Se invece si riduce f alla cubica normale

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

(che ha come tangente di flesso la retta all'infinito), la $x(u)$ resulta funzione ellittica con un polo del second'ordine, mentre la $y = x'(u)$ è del terz'ordine con un solo polo triplo. Appunto la $x(u)$ costituisce la funzione ellittica che WEIERSTRASS assume come elementare col nome di $\wp(u)$; sebbene a dir vero questo geometra definisca la $\wp(u)$ in altra maniera, come diciamo in appresso, provando poi che essa è legata alla sua derivata da una relazione del tipo:

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3,$$

con g_2 e g_3 arbitrari, ciò che porta la coincidenza della $\wp(u)$ con la nostra $x(u)$.

Il teorema che «ogni funzione razionale dei punti di una curva ellittica $f(xy) = 0$ è funzione doppiamente periodica di u relativa allo stesso parallelogramma dei periodi ω e ω' delle $x(u)$ e $y(u)$» si inverte senza difficoltà:

Ogni funzione doppiamente periodica di u, *con gli stessi periodi* ω *e* ω', *che abbia nel parallelogramma di questi soltanto* *singolarità polari, è una funzione razionale di* x *e* y*;* infatti una funzione $X(u)$ soddisfacente alle condizioni dell'enunciato, resulta monodroma e con sole singolarità polari sopra la riemanniana di f.

Appare di qui che «se a due curve di genere uno, f e F, corrispondono funzioni ellittiche coi medesimi periodi ω e ω', le due curve sono trasformate birazionali una dell'altra», cioè: *i periodi* ω *e* ω' *determinano l'invariante assoluto della curva ellittica corrispondente.*

Ma, reciprocamente, non si può dire che l'invariante assoluto di f valga a determinare i periodi ω e ω', perchè ad una medesima f appartengono funzioni ellittiche con diversi periodi.

In primo luogo, se vengono fissati i cicli A e B della riemanniana f, rimane tuttavia nei periodi l'arbitrarietà dipendente dalla circostanza che vi sono infiniti integrali di prima specie ku, dove k è un coefficiente arbitrario: pertanto i periodi di questo integrale sono $k\omega$ e $k\omega'$, e di essi è definito soltanto il rapporto

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega},$$

che è il secondo periodo dell'integrale normale di prima specie.

In secondo luogo, data la riemanniana f, i suoi cicli primitivi A e B non risultano definiti, potendosi sostituire con due altri $A' = rA + sB'$, $B' = r'A + s'B$, dove r, s, r', s', sono numeri interi, i quali cicli tuttavia risulteranno primitivi soltanto se

$$rs' - r's = 1,$$

che è la condizione perchè A e B siano a loro volta combinazioni lineari a coefficienti interi di A' e B'. Pertanto i periodi di una funzione ellittica risultano definiti a meno di una sostituzione lineare a coefficienti interi con determinante uguale a uno, potendosi sostituire a due periodi (primitivi) ω e ω'

$$\begin{aligned} \Omega &= r\omega + r\omega' \\ \Omega' &= r'\omega + s'\omega' \qquad \text{con } rs' - r's = 1; \end{aligned}$$

con ciò il rapporto dei periodi $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$ risulta definito soltanto a meno di una sostituzione lineare fratta a coefficienti interi e di modulo 1.

Si conclude che:

L'invariante assoluto I *di una curva di genere uno determina il rapporto dei periodi delle funzioni ellittiche corrispondenti, a meno di una sostituzione lineare a coefficienti interi*

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \qquad \text{con } \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Cioè la condizione di identità birazionale, data da $I' = I$ si traduce nella relazione

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \qquad \text{con } \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,;$$

così non sono birazionalmente identiche due cubiche per cui sia, ad esempio, $\tau' = 2\tau$.

Col variare di I dovrà dunque variare anche τ, ed è facile vedere che le due variabili sono legate analiticamente. Infatti si assuma come curva f la cubica

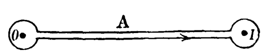
$$y^2 = x(x-1)(x-k),$$

dove $k = (0\,k\,1\,\infty)$, birapporto dei quattro punti di diramazione della $y(x)$, è funzione algebrica di I; allora, prendendo come cicli A e B (sopra la sfera della variabile complessa) due doppi cappi avvolgenti i punti 0 e 1, 0 e ∞, si otterranno per ω e ω' le espressioni rappresentanti funzioni analitiche:

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k)}},$$

$$\omega' = 2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k)}}.$$

(Notisi che per calcolare ω si dovrebbe integrare lungo una linea da 0 a 1 prendendo un segno del radicale, e poi — in senso opposto — lungo la stessa linea da 1 a 0, col segno opposto del radicale, ciò che equivale a raddoppiare il primo integrale: si avverta poi che qui non disturba la circostanza che negli estremi l'integrando diventi infinito. Analogamente per ω').



Osservazione. — Per le cubiche reali

$$y^2 = x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

che siano bipartite (α_1 e α_2 reali, cfr. L. III, § 26) i due periodi risultano uno reale e l'altro immaginario puro: infatti, posto che sia $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, nell'intervallo $0\ \alpha_1$ la y risulta reale, e nell'intervallo $\alpha_1\alpha_2$ risulta immaginaria pura, onde i due periodi

$$\omega = 2\int_0^{\alpha_1} \frac{dx}{y} \qquad \text{e} \qquad \omega' = 2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{y}$$

(dove gli integrali si prendano lungo l'asse reale) appaiono il primo reale e il secondo immaginario puro; pertanto il rapporto $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$ per le cubiche bipartite riesce immaginario puro.

Non si può dire invece nulla per le cubiche unipartite: per le armoniche si ha $\tau = i$, e per le equinarmoniche $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, che non è puramente immaginario (cfr. pagg. 99 e 100). Qui si noti che una cubica unipartita può essere proiettivamente identica ad una bipartita: ad esempio ciò capita per il caso armonico (cfr. vol. II, pag. 210).

In ogni caso però la *rete dei periodi* (cioè l'aggregato dei punti del piano complesso)

$$r\omega + s\omega' \qquad (r \text{ e } s \text{ interi o nulli})$$

relativi a una cubica reale riesce invariante per il coniugio, cioè per la trasformazione del piano x che muta un punto $x = x_1 + ix_2$ nel suo coniugato $\bar{x} = x_1 - ix_2$.

Ciò è chiaro nell'ipotesi di una cubica bipartita; nell'ipotesi invece di una cubica unipartita

$$y^2 = x(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

(con α_1 e α_2 complessi coniugati), basta osservare che i due periodi

$$\omega = 2\int_0^{\alpha_1} \frac{dx}{y}, \qquad \omega' = 2\int_0^{\alpha_2} \frac{dx}{y}$$

ove si prendano per andare da 0 ad α_1 e da 0 ad α_2 due cammini coniugati, risultano coniugati; il che d'altra parte segue anche notando che

$$\omega + \omega' = 2\int_0^\infty \frac{dx}{y} = \text{numero reale.}$$

Ora sorge la domanda se il rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ possa assumersi ad arbitrio compatibilmente con la diseguaglianza fondamentale, stabilita innanzi, in forza della quale, data la nostra convenzione sul senso dei cicli della riemanniana, il coefficiente della parte immaginaria di τ deve essere positivo, ossia τ deve trovarsi nel semipiano positivo, superiore all'asse reale.

In altre parole si chiede se un parallelogramma dato ad arbitrio provenga sempre — come parallelogramma dei periodi — da funzioni ellittiche inerenti ad una curva di genere uno.

A questa domanda si può dare risposta affermativa. Per ciò occorre dimostrare che:

1) dati comunque due periodi ω e ω', il cui rapporto non sia reale, (e che si riterrà quindi avere la parte immaginaria positiva) esistono sempre funzioni doppiamente periodiche coi periodi (primitivi) ω e ω', che nel parallelogramma dei periodi posseggono soltanto singolarità polari:

2) due funzioni siffatte $x(u)$ e $y(u)$ sono legate fra loro da una relazione algebrica $f(xy) = 0$, e possono sempre costruirsi in modo che la f risulti di genere 1 e un suo integrale di prima specie abbia come periodi ω e ω'.

Cominciamo col *dimostrare la esistenza* di una funzione doppiamente periodica coi periodi ω ed ω' insegnando la costruzione effettiva delle funzioni di Weierstrass $\wp(u)$ e $\wp'(u)$ appartenenti al tipo domandato.

Weierstrass arriva a questa costruzione costruendo dapprima una trascendente intera $\sigma(u)$ che possiede degli zeri del prim'ordine nei vertici della rete dei parallelogrammi $r\omega + s\omega'$.

Gli zeri non determinano una trascendente intera, restando arbitrario un fattore $e^{g(u)}$ che non si annulla a distanza finita: nella sua formula Weierstrass prende questo fattore uguale ad 1. Precisamente la $\sigma(u)$ di Weierstrass è data dalla espressione

$$\sigma(u) = u \cdot \prod_{r,s}{}' \left(1 - \frac{u}{r\omega + s\omega'}\right) e^{\varphi_{rs}}$$

dove

$$\varphi_{rs} = \frac{u}{r\omega + s\omega'} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(r\omega + s\omega')^2}$$

e con Π' s'intende il prodotto infinito esteso a tutte le coppie di valori (interi) r e s con esclusione della coppia $r = s = 0$. Derivando due volte il $log\, \sigma(u)$ si trova la funzione

$$(1)\quad \wp(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum_{r,\, s}{}' \left\{ \frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^2} - \frac{1}{(r\omega + s\omega')^2} \right\},$$

dove l'accento denota che nella somma Σ', estesa a tutti i valori interi di r e s, va esclusa la combinazione $r = s = 0$, e quindi

$$(2)\qquad \wp'(u) = -2\sum_{r,\, s} \frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^3}.$$

Noi partiremo addirittura dalle serie doppie (1) e (2) mostrando direttamente che esse sono convergenti e rappresentano funzioni doppiamente periodiche coi periodi ω e ω'.

Per giungere a questo risultato consideriamo più in generale una serie doppia del tipo

$$(3)\qquad \sum_{r,\, s}{}' A_{rs}$$

dove r, s, variano da $-\infty$ a $+\infty$ con esclusione della coppia $r = s = 0$, e A_{rs} è un numero *positivo* (sarà poi il modulo di un numero complesso).

Interpretiamo r e s come le coordinate cartesiane, ortogonali od oblique, con unità di misura uguali o diverse sui due assi, di un punto, P_{rs}, del piano, sicchè A_{rs} sarà una funzione del punto P_{rs}. Indichiamo con δ_{rs} la distanza del punto P_{rs} dall'origine $O = (00)$. Dimostriamo che la serie 3) converge appena sia A_{rs} infinitesimo d'ordine $n > 2$ rispetto a δ_{rs}, cioè sia

$$A_{rs} < \frac{M}{\delta_{rs}^{\,n}} \qquad \text{con } n > 2$$

dove M designa un numero positivo fisso al variare di r e di s.

A tale scopo consideriamo il parallelogramma Π_m avente i lati paralleli agli assi coordinati, il centro nell'origine di questi, e come vertice il punto P_{mm}. Sul contorno di questo parallelogramma si hanno, evidentemente, $8m$ punti P_{rs} ciascuno dei quali ha dall'origine una distanza minore od uguale a km, indicando qui con k la minima distanza del punto 0 dal contorno di Π_1.

Segue che la somma S_m dei valori A_{rs} relativi a questo parallelogramma Π_m risulta

$$S_m < 8m \cdot \frac{M}{k^n m^n} = \frac{8M}{k^n} \frac{1}{m^{n-1}}$$

Poichè la serie semplice

$$\sum_m \frac{1}{m^h} \qquad (h \text{ costante positiva})$$

converge per ogni valore di $h > 1$ (e ha un certo valore che possiamo indicare con L_h) segue che, nella nostra ipotesi $n > 2$, la somma parziale, S, ottenuta sommando un qualunque numero di termini della serie 3) risulta minore della somma di un conveniente numero di S_m, e quindi

$$S < \frac{8M}{k^n} L_{n-1}$$

il che appunto significa la convergenza della serie 3), nell'ipotesi, ripetiamo, $n > 2$.

Da questa osservazione segue subito la convergenza *assoluta* della serie

$$\wp'(u) = -2\sum_{rs} \frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^3} \tag{2}$$

cioè della serie

$$\frac{1}{u^3} + \sum_{rs}' \frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^3}$$

per tutti i valori di u diversi da 0 e da $r\omega + s\omega'$.

Infatti poichè il modulo di

$$u - r\omega - s\omega'$$

dà la distanza del punto $r\omega + s\omega'$ dal punto u, si vede subito che

$$| u - r\omega - s\omega' |^{-3}$$

è un infinitesimo del 3° ordine rispetto a

$$\delta_{rs} = | r\omega + s\omega' |.$$

(Qui è quasi inutile notare che il punto $r\omega + s\omega'$ ha le coordinate cartesiane r e s rispetto a un sistema di assi avente l'origine in $u = 0$, diretti secondo i vettori ω e ω', sui quali assi le unità di misura siano i moduli di ω e di ω').

Si ha pertanto la convergenza della serie dei moduli dei termini della serie 2), cioè la convergenza assoluta della serie stessa. Così essa rappresenta, sul piano, una funzione che ha, al finito, solamente singolarità polari nei punti $u = r\omega + s\omega'$, vertici della rete dei periodi; e sarà precisamente una funzione periodica coi periodi ω e ω', poichè cambiando u in $u + \omega$ (o in $u + \omega'$) non si fa che permutare i termini della serie stessa. Aggiungasi che la $\wp'(u)$ è una funzione dispari, cioè tale che

$$\wp'(u) = - \wp'(-u)$$

come appare subito dal relativo sviluppo.

Ora la $\wp(u)$ figura come l'integrale indefinito della $\wp'(u)$, di cui occorre precisare la costante di integrazione. Se si potesse integrare termine a termine saremmo indotti naturalmente a prendere

$$\wp(u) = \sum_{rs} \frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^2}$$

ma la serie così costruita non riesce più convergente; perciò conviene introdurre la costante di integrazione prendendo

$$\wp(u) = \sum \left[\frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^2} - K_{r s} \right]$$

e determinare le K_{rs} in modo da assicurare la convergenza. Ciò si ottiene subito facendo sì che $K_{r s}$ divenga, al crescere di r e s, infinitesimo del second'ordine, rispetto a $\delta_{r s}$, al pari di $(u - r\omega - s\omega')^{-2}$, di guisa che la differenza sia infinitesimo d'ordine $n > 2$. La soluzione più semplice è appunto

$$K_{r s} = \frac{1}{(r\omega + s\omega')^2} .$$

Si verifica subito che

$$\frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^2} - \frac{1}{(r\omega + s\omega')^2}$$

è un infinitesimo del terz'ordine rispetto a δ_{rs}.

Infatti

$$\frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^2} - \frac{1}{(r\omega + s\omega')^2} = \frac{-u^2 - 2u(r\omega + s\omega')}{(u - r\omega - s\omega')^2 (r\omega + s\omega')^2}$$

poichè

$$\delta_{rs} = |\, r\omega + s\omega' \,|$$

segue che l'espressione considerata è infinitesimo del 3° ordine.

Resta ora da dimostrare la doppia periodicità della

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^2} - \frac{1}{(r\omega + s\omega')^2} \right)$$

cioè resta da riconoscere che, ad esempio,

$$\wp(u + \omega) = \wp(u).$$

A tale scopo si osservi anzitutto che la $\wp$ è una *funzione pari*, cioè si ha

$$\wp(u) = \wp(-u).$$

In secondo luogo si confronti la $\wp(u)$ con la somma parziale

$$S_k(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}'_k \left(\frac{1}{(u - r\omega - s\omega')^2} - \frac{1}{(r\omega + s\omega)'^2} \right)$$

dove nella $\sum{}'_k$ s'intendono r e s variabili per i valori

$$r = -k, \quad -k + 1, \ldots k - 1$$
$$s = -k, \quad -k + 1, \ldots k$$

(con esclusione della $r = s = 0$).

Si ha ora, evidentemente:

$$S_k(u + \omega) = S_k(-u)$$

e poichè la S_k ha per limite la $\wp$ risulta

$$\wp(u + \omega) = \wp(-u) = \wp(u).$$

La periodicità di $\wp(u)$ si può dedurre anche nel seguente modo: Poichè la $\wp(u)$ è l'integrale della $\wp'(u)$, e questa è periodica, si ha

$$\frac{d}{du}\left[\wp(u + \omega) - \wp(u)\right] = 0,$$

cioè

$$\wp(u + \omega) - \wp(u) = K$$

dove K è una certa costante, che vogliamo riconoscere nulla.

Per valutare K, poniamo $u = -\frac{\omega}{2}$.

Avremo

$$\wp\left(-\frac{\omega}{2}\right)-\wp\left(\omega-\frac{\omega}{2}\right)=K$$

e, poichè la p è funzione pari, resulta

$$\wp\left(-\frac{\omega}{2}\right)=\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)=\wp\left(\omega-\frac{\omega}{2}\right)$$

e quindi $K=0$.

Alla stessa conclusione si perviene anche in modo diretto, calcolando la differenza delle due serie

$$\wp(u+\omega)-\wp(u)=\sum_{r,\,s}\left\{\frac{1}{[u-(r-1)\omega-s\omega']^2}-\frac{1}{(r\omega+s\omega')^2}\right\}$$

$$-\sum_{r,\,s}\left\{\frac{1}{[u-r\omega-s\omega']^2}-\frac{1}{[r\omega-s\omega']^2}\right\}.$$

Infatti questa differenza vale

$$-\sum_{r,\,s}\left\{\frac{1}{[r\omega+s\omega']^2}-\frac{1}{[(r+1)\omega+s\omega']^2}\right\}.$$

Ora la somma dei termini di questa serie, per r compreso fra $-n+1$ e n ed s compreso fra $-n$ e n, è (a parte il segno)

$$\sum_{-n}^{n}{}_{s}\left\{\frac{1}{(n\omega+s\omega')^2}-\frac{1}{(-n\omega+s\omega')^2}\right\},$$

e siccome ogni termine diventa infinitesimo per $n=\infty$, dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$, così la somma stessa riesce infinitesima dell'ordine di $\frac{1}{n}$: ciò significa che la nostra serie tende a zero per $n=\infty$

c. d. d.

Abbiamo dunque costruito le due funzioni

$$x=\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left(\frac{1}{(u-r\omega-s\omega')^2}-\frac{1}{(r\omega+s\omega')^2}\right)$$

$$y=\wp'(u)=-2\sum\left(\frac{1}{(u-r\omega-s\omega')^3}\right)$$

entrambe doppiamente periodiche coi periodi ω e ω', regolari in tutti i punti del piano, all'infuori dei punti $u=r\omega+s\omega'$, vertici della rete dei periodi, nei quali esse hanno una singolarità polare rispettivamente del 2° e del 3° ordine; all'infinito hanno un punto singolare essenziale. La $\wp(u)$ è una funzione pari, la $\wp'(u)$ è una funzione dispari.

In linea *storica* conviene ricordare che le funzioni ellitiche di Weierstrass non sono le prime che si sono presentate in questa teoria. Al loro posto Jacobi considera tre altre funzioni ellittiche del second' ordine (cioè aventi due zeri nel parallelogramma dei periodi), la prima delle quali è

$$\text{sen am}\, y \quad (\text{seno amplitudine di } y)$$

e le altre sono cos am y (coseno amplitudine di y) e Δ am y (delta amplitudine di y), che oggi si indicano brevemente coi simboli di Gudermann:

$$\text{sn}\, y, \quad \text{cn}\, y, \quad \text{dn}\, y.$$

La prima di queste tre funzioni nasce dall'inversione dell'integrale ellittico di prima specie nella forma normale di Legendre:

$$y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

le altre due si definiscono mediante la relazione:

$$\text{cn}\, y = \sqrt{1 - \text{sn}^2 y}$$
$$\text{dn}\, y = \sqrt{1 - k^2\, \text{sn}^2 y}.$$

Jacobi ha avuto l'idea che queste funzioni essendo uniformi in tutto il piano, prive di singolarità essenziali, e diventando infinite nei medesimi punti, si possono esprimere come quozienti di trascendenti intere con lo stesso denominatore. Queste funzioni si riducono in sostanza ad una sola, la *teta* di Jacobi, che, in relazione ai periodi πi e a, è data da

$$\theta(u) = \sum_{+\infty}^{-\infty} e^{an^2+2nu}.$$

La θ di Jacobi gode di una doppia periodicità rispetto ai suoi zeri, essendo

$$\theta(u+\pi i) = \theta(u)$$
$$\theta(u+a) = e^{2u-a}\,\theta(u).$$

La σ di WEIERSTRASS può considerarsi come una θ semplificata, costruita a priori partendo dagli zeri, che sono appunto distribuiti secondo una doppia periodicità.

La σ e la θ, ridotte con un cambiamento di variabile ad avere gli stessi zeri, differiscono, naturalmente, per una trascendente intera mai nulla, che risulta assai semplice, cioè del tipo ke^{u^2}.

Le serie θ si estendono dal caso di una variabile sola a quello di p variabili $u_1 u_2 \ldots u_p$, e il loro studio sarà per noi di fondamentale importanza (cfr. Cap. III).

Stabilita, mediante una costruzione effettiva, la esistenza delle funzioni doppiamente periodiche, dobbiamo ora *riconoscerne il legame algebrico.*

Anzitutto si riconosce che *ogni funzione* z(u) *doppiamente periodica dotata di un numero finito* n *di poli, entro il parallelogramma dei periodi, prende in questo lo stesso numero* n *di volte qualunque valore* (con l'avvertenza di contare come uno solo i punti equivalenti sul contorno, e naturalmente, di contare i punti secondo le relative molteplicità).

Infatti, supponendo che non vi siano poli o zeri sul contorno del parallelogramma dei periodi P (cui altrimenti si farebbe subire una traslazione) la differenza fra il numero degli zeri e il numero degli infiniti della nostra funzione $z(u)$, entro P è data dall'*indicatore logaritmico*, cioè dall'integrale esteso al contorno di P:

$$N_0 - N_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_P \frac{z'(u)}{z(u)}\, du;$$

e poichè l'integrando ha manifestamente gli stessi valori nei punti equivalenti dei lati opposti di P, che vengon percorsi in senso contrario, segue

$$\int_P \frac{z'(u)}{z(u)}\, du = 0$$

e quindi

$$N_0 = N_\infty = n$$

cioè, anzitutto, la z ammette un numero di zeri, n, uguale al numero dei poli.

Ma la funzione

$$z - \bar{z}$$

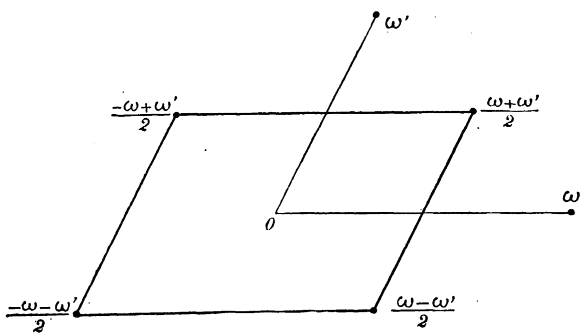
dove $\bar{z}$ è una costante qualsiasi, ha gli stessi poli di z, quindi anche $z - \bar{z}$ ammette, per il ragionamento di prima, n zeri, cioè z assume n volte il valore arbitrario $\bar{z}$.

Osserviamo ora che la $x(u)$ sopra definita è una funzione del second' ordine, avendo un polo del second' ordine nei vertici della rete dei periodi, quindi entro il parallelogramma dei periodi ammette due volte un qualunque valore. Qui per vedere la cosa con maggior chiarezza conviene evitare che il polo capiti sul contorno del parallelogramma dei periodi, e quindi prendere un parallelogramma traslato, ad esempio quello coi vertici

$$\frac{\omega + \omega'}{2}, \quad \frac{\omega - \omega'}{2}, \quad \frac{-\omega - \omega'}{2}, \quad \frac{-\omega + \omega'}{2}$$

dato dalla figura, entro il quale capita il solo polo $u = 0$.

Più precisamente, essendo $x(u)$ funzione pari, essa assume



uno stesso valore $\bar{x}$, nelle coppie di punti u e $u' = -u$ di segno opposto.

D' altra parte poichè la y è funzione dispari, si ha

$$y(u) = -y(u'),$$

sicchè la y^2 assume lo stesso valore nei punti u e u' in cui x ha un medesimo valore, cioè y^2 è funzione razionale di x; e poichè essa è infinita solo dove x è infinita, risulta

$$y^2 = \varphi(x)$$

essendo φ un polinomio. Precisamente notando che x ha un polo del secondo ordine dove y ha un polo del terzo, segue che φ è un polinomio del terz' ordine, che si può scrivere nella forma $k(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$ [1], dove e_1, e_2, e_3 sono le radici di y.

Si vede subito che y si annulla per

$$u=\frac{\omega}{2},\ u=\frac{\omega'}{2},\ u=\frac{\omega+\omega'}{2},$$

e che per $u=0$ si ha

$$\frac{y^2}{x^3}=4$$

essendo, nell'intorno di $u=0$,

$$x=\frac{1}{u^2},\quad y=\frac{2}{u^3}.$$

Segue che le funzioni

$$x=\wp(u),\quad y=\wp'(u)$$

sono le coordinate di un punto variabile sopra la cubica

$$y^2-4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)=0 \tag{4}$$

dove si è posto

$$e_1=\wp\left(\frac{\omega}{2}\right),\quad e_2=\wp\left(\frac{\omega'}{2}\right),\quad e_3=\wp\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right).$$

La relazione (4) si può anche scrivere

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

dove g_2 e g_3 rappresentano gli ***invarianti*** della equazione cubica $\varphi(x)=0$.

Non è difficile arrivare al calcolo effettivo di questi coefficienti g_2 e g_3. A tale scopo occorre sviluppare la $\wp(u)$ e

(1) A priori la curva $f(xy)=0$ possiede una g_2^1 e una g_3^1 segate rispettivamente dalle rette $x=\text{cost.}$ e $y=\text{cost.}$ i cui punti all'infinito possono indicarsi con A e B. Per questa proprietà la f dovrebbe dirsi in generale del 5° ordine, con un punto triplo in A e un punto doppio in B. Ma la g_3^1 e la g_2^1 hanno una coppia comune, che risponde appunto ad $u=0$, dove la x diventa infinita del 2° ordine e la y del 3°; poichè questa coppia comune risponde egualmente nei due fasci A e B alla retta comune AB, la retta AB si stacca due volte, e quindi la f si riduce ad una cubica che non passa per B e possiede in A un flesso colla tangente AB; ecc.

quindi la $\wp'(u)$ in serie di potenze di u (sviluppi che si lasciano dedurre dalla formula I). Si trova così (¹)

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{(r\omega + s\omega')^4},$$

$$g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{(r\omega + s\omega')^6},$$

g_2 e g_3 rappresentando gli *invarianti* della nostra cubica (cfr. L. III, § 25).

In conclusione le funzioni ellittiche di WEIERSTRASS, definite dalle formule I e II, sono effettivamente le funzioni che provengono dall'integrale ellittico normale di prima specie

$$u = \int \frac{dx}{y}, \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

È importante notare che nell'ordine della nostra teoria dove le $x(u)$ e $y(u)$ sono definite a partire dalla cubica mediante l'inversione predetta, riesce evidente a priori che g_2 e g_3 possono assumere valori arbitrari, mentre non riusciva ugualmente conosciuto il campo di variabilità dei periodi ω e ω' (o del loro rapporto τ); invece nell'ordine della teoria di WEIERSTRASS si vedono a priori arbitrari ω e ω' (di cui il rapporto non sia reale), mentre non è ugualmente chiaro che g_2 e g_3 possano assumere qualunque valore. Il confronto fra i due modi di definire le funzioni ellittiche scioglie i dubbi, mostrando l'arbitrarietà così degli invarianti come dei periodi, e quindi indicando che il campo di variabilità di τ, in cui riesce definito l'invariante assoluto $I(\tau)$, invade tutto il semipiano superiore all'asse reale.

Aggiungeremo che lo sviluppo della teoria di WEIERSTRASS, quale viene posto, per es. nelle citate Lezioni del BIANCHI, permette lo studio diretto della funzione modulare $I(\tau)$ e da questo deduce l'arbitrarietà di g_2 e di g_3: si ottiene in tal guisa *una nuova dimostrazione indiretta del teorema di inversione* dell'integrale ellittico di prima specie. Ma queste notizie hanno soltanto per iscopo di chiarire la posizione storica della teoria di WEIERSTRASS e quindi di farne comprendere il signi-

(¹) Cfr. BIANCHI op. c. Cap. IX § 103, pag. 277.

ficato e il valore, e non di riferirne gli sviluppi che lo studioso può trovare nel trattato del Bianchi.

Osservazione. — Abbiamo già notato che nel caso di una cubica (o di una curva ellittica d'ordine $n > 2$) reale, la rete dei periodi

$$r\omega + s\omega'$$

resta invariata per il coniugio, cioè per lo scambio dell'unità immaginaria i in $-i$. In questa ipotesi allora le formule che danno la $\wp(u)$ e la $\wp'(u)$, contenendo simmetricamente la rete dei periodi $r\omega + s\omega'$, danno per $x = \wp(u)$ e $y = \wp'(u)$ valori reali quando u vari sopra l'asse reale, cioè: *un ramo reale di una cubica piana ammette una rappresentazione parametrica mediante funzioni ellittiche di un parametro reale.*

Nel caso di una cubica bipartita, il ramo rappresentato è il ramo impari (per u uguale al periodo reale ω x e y sono infinite); per avere il ramo pari basta osservare che esistono g_2^1 reali che trasformano il ramo pari nel ramo impari (una tale g_2^1 è data da un qualunque fascio di rette col centro in un punto del ramo pari), sicchè si ottiene una rappresentazione parametrica reale per entrambi i rami.

Conviene ora notare che nel caso di una cubica bipartita il secondo periodo ω' è immaginario puro, $\omega' = ib$; si vede allora che il coniugio cambia i punti della retta parallela all'asse reale alla distanza $\frac{b}{2}$, in punti ad essi congrui rispetto al modulo ω', sicchè un punto del tipo

$$u - r\omega - s\omega'$$

(quando u appartenga a tale retta) viene cambiato in un punto della stessa natura: si vede così che quando u varia lungo questa parallela all'asse reale, la $x = \wp(u)$ e la $y = \wp'(u)$ assumono valori reali, avendosi così corrispondentemente il secondo ramo reale della cubica.

Le osservazioni precedenti permettono anche di affermare che: *se la rete dei periodi è invariante per il coniugio, la curva* $\mathrm{x} = \wp(\mathrm{u})$, $\mathrm{y} = \wp'(\mathrm{u})$ *è reale; essa poi è bipartita o unipartita secondo che esiste o meno un periodo immaginario puro.*

Nota. — Quando si abbia una curva ellittica $f(xy) = 0$, di un ordine n qualsiasi, e si voglia darne l'effettiva rappresentazione parametrica, esprimendo razionalmente x e y per due funzioni ellittiche $\wp(u)$ e $\wp'(u)$, occorre trasformare f nella cubica normale

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\,,$$

dopo di che le $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$ provenienti dall'inversione dell'integrale

$$u = \int \frac{dx}{y}\,,$$

risultano determinate *a meno del segno*. Ricordiamo che la prima trasformazione importa in generale di aggiungere ai coefficienti di f l'*irrazionalità aritmetica d'ordine* n, da cui dipende la determinazione di un punto O della curva (corrispondente all'origine dell'integrazione): poichè la g_3^2 definita da O^3 darà luogo alla trasformazione richiesta (cfr. L. V, § 32).

11. **Espressioni delle funzioni razionali mediante integrali ellittici di seconda e di terza specie.** — La considerazione degli integrali ellittici di seconda e terza specie permette di risolvere in due modi diversi il problema di costruire le funzioni razionali sopra una curva algebrica. Si hanno infatti due espressioni notevoli delle funzioni razionali mediante codesti integrali.

In primo luogo le funzioni razionali con dati poli si lasciano esprimere per mezzo degli integrali di seconda specie: questa espressione mette in evidenza il numero delle funzioni razionali con n poli assegnati, ed estendendosi alle curve di genere $p > 1$ condurrà a una dimostrazione trascendente del teorema di Riemann-Roch.

In secondo luogo le funzioni razionali con dati poli e zeri si lasciano esprimere mediante gli integrali di terza specie; e questa espressione metterà in evidenza una relazione trascendente fra i due gruppi di punti equivalenti, che devono essere poli e zeri di una funzione razionale: si avrà così (per ora nel caso del genere uno) il celebre teorema di Abel, di cui ci occuperemo nel seguente paragrafo.

Si assegnino, sopra una cubica f, n punti generici $O_1, O_2, \ldots O_n$ che debbano essere poli (semplici) per una funzione razionale φ. Questa funzione dovrà figurare fra gli integrali di seconda specie coi medesimi poli, i quali si ottengono per combinazione lineare dell'integrale normale di prima specie u, e degli integrali normali di seconda specie, $v_1 v_2 \dots v_n$, aventi rispettivamente un unico polo in O_1, $O_2, \dots O_n$; sarà dunque

$$\varphi = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \dots + \lambda_n v_n + \mu u + k \qquad (k = \text{cost.}).$$

Ma perchè questa combinazione lineare si riduca ad una funzione razionale è necessario, e d'altra parte anche sufficiente, che si annullino i suoi periodi relativi ai due cicli fondamentali A e B di f (risultando così una funzione monodroma dotata soltanto di singolarità polari sopra la riemanniana).

Ma i periodi di u, $v_1 v_2 \dots v_n$ relativi al primo ciclo A sono

$$1 \quad 0 \quad 0 \dots 0,$$

sicchè si deduce intanto

$$\mu = 0.$$

Invece i periodi di $v_1 v_2 \dots v_n$ relativi al secondo ciclo B sono dati da

$$\Omega_1 = -2\pi i k_1, \quad \Omega_2 = -2\pi i k_2 \dots \quad \Omega_n = -2\pi i k_n,$$

indicando k_1, $k_2 \dots k_n$ i valori dell'integrando di prima specie in O_1, $O_2, \dots O_n$; quindi si avrà la condizione

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_n k_n = 0.$$

Le funzioni razionali coi poli $O_1 O_2 \dots O_n$ *sono espresse dalla formula*

$$\varphi = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + k$$

dove le λ *soddisfano alla precedente condizione lineare.*

La suddetta condizione lineare non può divenire illusoria perchè un integrale normale di seconda specie non può avere i due periodi nulli (cfr. § 8), e ciò pone in evidenza che un gruppo g_n sopra la cubica appartiene sempre ad una g_n^{n-1}.

Osservazione. — La formula precedente per le funzioni razionali sopra la curva ellittica, offre una decomposizione di queste in elementi semplici, relativi ai singoli poli, che è perfettamente analoga alla decomposizione delle funzioni razionali fratte (sopra la retta o su l'ente di genere zero). Il caso da noi trattato corrisponde all'ipotesi dei poli semplici in cui si hanno elementi del tipo $\dfrac{\rho}{x-\alpha}$, ma è facile generalizzare la formula ottenuta, considerando integrali elementari con poli multipli (cfr. § 5).

Procediamo a indicare l'espressione di una funzione razionale φ, di cui si conoscano i poli e gli zeri (sopra la f di genere uno), per mezzo di integrali di terza specie.

Si osservi che il $\log\varphi = \int \frac{d\varphi}{\varphi} dx = \int \frac{\varphi'}{\varphi} dx$ costituisce un integrale ellittico di terza specie i cui punti singolari cadono nei poli $P_1 P_2 \ldots P_n$ e negli zeri $O_1 O_2 \ldots O_n$ di φ (che supponiamo semplici e in posizione generica). Inoltre i residui dell'integrando $\frac{\varphi'}{\varphi}$ nei punti $P_1 P_2 \ldots P_n$ sono tutti uguali a -1, mentre i residui relativi a $O_1 O_2 \ldots O_n$ sono uguali a 1: infatti, se s'indica con α l'ascissa di un polo P sarà, nell'intorno di questo

$$\varphi = \frac{\rho}{x-\alpha} + \theta$$

$$\varphi' = \frac{-\rho}{(x-\alpha)^2} + \theta'$$

e

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{-1}{x-\alpha} + \bar{\theta},$$

le θ designando sempre funzioni regolari: similmente, nell'intorno di uno zero O di ascissa β, si avrà

$$\varphi = \rho(x-\beta) + \lambda(x-\beta)^2 + \ldots$$

$$\varphi' = \rho + 2\lambda(x-\beta) + \ldots$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{x-\beta} + \theta.$$

Ciò posto si considerino gli integrali normali di terza specie $w_1 w_2 \ldots w_n$, costruiti a partire dalle coppie di punti singolari $O_1 P_1$, $O_2 P_2, \ldots O_n P_n$, per modo che i loro residui in ciascun punto O e P valgono rispettivamente $+1$ e -1.

Allora la somma

$$\log\varphi + w_1 + w_2 + \ldots + w_n = U$$

risulterà priva di punti singolari costituendo dunque un integrale di prima specie multiplo dell'integrale normale u, secondo un certo numero λ:

$$U = \lambda u + \log k \qquad (k = \text{cost}).$$

In conclusione si troverà

$$\varphi = ke^{\lambda u - \Sigma w}.$$

Questa formula porge *l'espressione della funzione razionale φ per mezzo degli integrali normali di terza specie* $\mathrm{w}_1 \mathrm{w}_2 \ldots \mathrm{w}_n$ *e dell'integrale normale di prima specie* u.

Ma perchè questa espressione rappresenti effettivamente una funzione monodroma, bisogna che l'esponente di e si accresca di multipli interi di $2\pi i$ quando il punto da cui dipende descrive un ciclo della riemanniana di f. Ora (§ 8), per i due cicli fondamentali A e B, i nostri integrali u, w_1, $w_2, \ldots w_n$ si accrescono rispettivamente dei periodi normali

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \tau & 2\pi i(u_1 - u'_1) & 2\pi i(u_2 - u'_2) & \ldots & 2\pi i(u_n - u'_n) \end{array}$$

dove con u_1 e u'_1 designamo i valori di u rispettivamente in O_1 e P_1 etc.

Avremo dunque

$$\lambda = h \cdot 2\pi i, \quad h\tau - \sum_r (u_r - u'_r) = k$$

con h e k *numeri interi.*

La seconda di queste relazioni si può scrivere anche

$$\Sigma u_r - \Sigma u'_r = h \cdot \tau - k \cdot 1$$

oppure

$$\Sigma u_r - \Sigma u'_r \equiv 0 \qquad \text{mod. } 1, \tau$$

E qui si noti che non importa precisare il cammino d'integrazione per il calcolo dei valori di u_r e u'_r, giacchè il cambiamento di un tale cammino altera solo il valore dell'integrale u per una combinazione lineare dei periodi $\lambda \cdot \tau + \mu \cdot 1$.

Concludiamo che la funzione razionale φ assume la forma

$$\varphi = ke^{2h\pi i u - \Sigma w_r};$$

e la condizione di monodromia dell'esponenziale conduce ad una relazione trascendente fra i gruppi dei poli e degli zeri della φ.

Questa relazione costituisce il teorema di Abel per le curve ellittiche, di cui andiamo ad occuparci nel seguente paragrafo.

Osservazione. — Conviene notare esplicitamente l'analogia che le due espressioni trovate per le funzioni razionali dei punti di una curva ellittica presentano con le espressioni delle funzioni razionali di un parametro.

Precisamente, come si è detto, la espressione

$$\varphi(xy) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$$

che dà la φ come combinazione lineare di n integrali elementari di seconda specie, è l'analoga della

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{x - \alpha_1} + \frac{\lambda_2}{x - \alpha_2} + \ldots \frac{\lambda_n}{x - \alpha_n} + k$$

che dà la decomposizione della funzione razionale F in frazioni elementari; invece la espressione

$$\varphi(xy) = ke^{2h\pi i u - \Sigma w_r}$$

che dà la φ in funzione degli integrali elementari di 3ª specie relativi ai poli $P_1 P_2 \ldots P_n$ e agli zeri $O_1 O_2 \ldots O_n$, è l'analoga della

$$F(x) = k\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)}{(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n)}$$

che dà la F come quoziente di due polinomi, in base ai suoi zeri e ai suoi poli.

12. **Il teorema d'Abel per le curve ellittiche.** — Abbiamo veduto che, dati — per una funzione razionale φ sopra la curva ellittica — i gruppi dei poli e degli zeri

$$G_n = P_1 + P_2 \ldots + P_n, \quad G'_n = O_1 + O_2 \ldots + O_n,$$

l'espressione di φ mediante gli integrali di terza specie

$$\varphi = ke^{2h\pi i u - \Sigma w_r}$$

porta che le somme dei valori dell'integrale di prima specie per i punti dei due gruppi

$$u_1 + u_2 \ldots + u_n \quad \text{e} \quad u'_1 + u'_2 \ldots + u'_n$$

siano congrue rispetto ai periodi di u; e la congruenza vale evidentemente anche per un integrale di prima specie non normale, rispetto ai periodi di questo:

$$\Sigma u_r \equiv \Sigma u'_r \qquad [\text{mod. } \omega, \omega'].$$

Ora reciprocamente, quando sussista questa congruenza, e quindi si abbia per l'integrale normale u

$$\Sigma u_r - \Sigma u'_r = h\tau - k$$

(h e k interi), l'esponenziale

$$e^{2h\pi i u - \Sigma w_r}$$

risulta funzione monodroma, sopra f, perchè un giro lungo A accresce l'esponente di $2h\pi i$, e un giro lungo B lo accresce di $2h\pi i\tau - 2\pi i(h\tau - k) = 2k\pi i$. Inoltre codesta funzione esponenziale non possiede evidentemente punti singolari dove il suo esponente si mantenga finito, cioè fuori dei punti P_r e O_r; ma in un punto P l'esponenziale si comporta come

$$e^{-w}$$

ed essendo — nell'intorno —

$$w = \log(x - \alpha) + \theta\,,$$

ha ivi un polo come $\dfrac{1}{x - \alpha}$; invece in ciascun punto O ha, analogamente, uno zero come $(x - \beta)$. In conclusione

$$\varphi = e^{2h\pi i u - \Sigma w_r}$$

risulta una funzione razionale che ha come poli i punti del G_n e come zeri i punti del G'_n, sicchè il G_n e il G'_n appaiono equivalenti.

Riassumeremo il risultato ottenuto enunciando il

TEOREMA. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè due gruppi di* n *punti sopra una curva ellittica siano equivalenti è che le somme dei valori che l'integrale di prima specie* u *riceve nei punti dei due gruppi siano congruenti rispetto ai periodi di* u:

$$\Sigma u_r - \Sigma u'_r \equiv 0 \qquad [\text{mod. } \omega, \omega']$$

Così l'equivalenza di due gruppi di punti sopra la curva (definita nel § 5 del L. V) riceve un significato proprio traducendosi nell'eguaglianza di due funzioni che ad essi appartengono.

ABEL fin dal 1826 [1], dando forma qualitativa ai risul-

[1] La memoria di ABEL pubblicata solo 15 anni più tardi nel tomo 7 dei «Mémoires des Savants étrangers» si trova nel tomo 1 delle Oeuvres complètes a pag. 145.

tati conseguiti prima di lui dai BERNOULLI a DE FAGNANI e ad EULERO (cfr. *Nota storica*), ha scoperto una relazione più generale contenente quella sopra enunciata, che si riferisce (a curve di genere p qualsiasi e) anche agli integrali di seconda e terza specie. Il suo teorema porta che:

La somma dei valori di un integrale ellittico nei punti di un gruppo di una g_n^1 è funzione razionale logaritmica del parametro da cui dipende il gruppo entro la serie stessa.

Il concetto semplicissimo della dimostrazione abeliana si può dare come segue:

Si consideri, sopra una curva $f(xy)=0$ di genere uno, una serie lineare g_n^1 d'ordine n, i cui gruppi rispondano biunivocamente ai valori di un parametro t. Assunto un integrale ellittico $I=\int\Phi dx$ appartenente ad f, si consideri la somma dei valori

$$I(x_1y_1)+I(x_2y_2)+\dots+I(x_ny_n)$$

che esso assume nei punti (x_iy_i) di un gruppo G_n della serie: questa somma risulterà funzione del parametro t, e precisamente — come ci proponiamo di riconoscere — integrale di una funzione razionale in t.

È lecito supporre (adoperando ove occorra una trasformazione birazionale della curva) che la g_n^1 sia segata su f dalle rette $x=\text{cost.}$, e quindi che sia

$$t=x=x_1=x_2\dots=x_n.$$

Allora avremo

$$I(x)=I(xy_1)+I(xy_2)+\dots+I(xy_n)=$$
$$=\int\{\Phi(x,\ y_1)+\Phi(x,\ y_2)+\dots+\Phi(x,\ y_n)\}\,dx$$

dove la funzione sotto il segno, contenendo simmetricamente $y_1y_2\dots y_n$, risulta una funzione razionale $\psi(x)$: dunque

$$I(x)=\int\psi(x)dx.$$

Ma poichè gli integrali delle funzioni razionali sono funzioni razionali e logaritmiche, concluderemo che, come si è enunciato, la somma ΣI_r dei valori che I assume nei punti di un gruppo della g_n^1 è funzione razionale-logaritmica del parametro da cui dipende il gruppo entro la serie stessa.

In particolare se si prende come integrale I l'integrale di prima specie u, che è privo di punti di infinito, avremo che $u(x)$ dovrà ridursi ad una costante; pertanto:

La somma dei valori che l'integrale ellittico di prima specie assume nei punti di un gruppo G_n sopra la f, rimane costante al variare del G_n entro una serie lineare g_n^1 o g_n^r: s'intende che questa costante (come l'integrale stesso) riesce definita a meno di multipli dei periodi.

L'ultimo enunciato a cui siamo pervenuti, ripete — in una forma lievemente diversa — la condizione necessaria per l'equivalenza di due gruppi.

Il teorema reciproco è strettamente legato all'inversione degli integrali ellittici di prima specie (e più in generale, per $p > 1$, delle somme degli integrali abeliani) sicchè questa inversione — come ha rilevato JACOBI — conferisce al teorema di ABEL un più preciso significato.

Infatti il reciproco del teorema di ABEL, applicato a due gruppi di un punto ($n = 1$), significa precisamente che « l'integrale ellittico di prima specie, u, non può assumere valori congrui rispetto ai periodi in due punti diversi della curva », e la stessa nostra dimostrazione non fa che estendere da $n = 1$ a n qualunque il ragionamento con cui abbiamo stabilito questo teorema d'inversione. D'altra parte quando sia comunque provata l'univocità dell'inversione di u (il che può anche farsi — come si è visto — senza ricorrere al calcolo dei periodi dell'integrale normale) si riesce subito a invertire il teorema di ABEL (almeno nel caso del genere $p = 1$ a cui per ora ci riferiamo): infatti se per due gruppi G_n e G'_n si ha

$$\Sigma u_r \equiv \Sigma u'_r,$$

si può sempre costruire un G''_n equivalente a G'_n che abbia $n - 1$ punti a comune con il G_n, e per questo riuscirà ancora

$$\Sigma u''_r \equiv \Sigma u_r,$$

ma se l'n-esimo punto del G''_n non coincidesse con l'n-esimo punto del G_n, si troverebbero due punti diversi della curva in cui u assume valori congrui.

Veniamo ora ad alcune applicazioni del teorema di ABEL, e prima di tutto vediamo come esso esprima la *proprietà di addizione* delle funzioni ellittiche.

Si consideri la cubica

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

rappresentata parametricamente da

$$x = \wp(u)$$
$$y = \wp'(u).$$

I tre punti d'intersezione della cubica con una qualunque retta, diciamo $A_1 A_2 A_3$, corrisponderanno a tre valori di u, diciamo $u_1 u_2 u_3$, per cui

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0;$$

avremo dunque

$$u_3 \equiv -(u_1 + u_2).$$

D'altra parte l'ascissa (e similmente l'ordinata) di A_3 risulterà funzione razionale delle coordinate di A_1 e di A_2; essendo poi la $\wp(u)$ una funzione pari, avremo che

$$\wp(-u_1 - u_2) = \wp(u_1 + u_2),$$

essendo l'ascissa di A_3, sarà funzione razionale di

$$\wp(u_1) \quad \wp'(u_1) \quad \wp(u_2) \quad \wp'(u_2)$$

coordinate di A_1 e A_2.

Ciò costituisce il così detto ***teorema di addizione*** per la $\wp(u)$. È facile giungere alla formula effettiva. Sia

$$y = mx + q$$

l'equazione della retta secante i tre punti $A_1 A_2 A_3$; di questi indichiamo le coordinate con $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$.

Le $x_1 x_2 x_3$ saranno radici dell'equazione

$$(mx + q)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

e quindi la loro somma risulta

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m^2}{4}$$

(in qualunque equazione $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ la somma delle radici è uguale al secondo coefficiente diviso il primo e cambiato di segno).

Sarà dunque

$$x_3 = \frac{m^2}{4} - x_1 - x_2:$$

ma

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

quindi

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2 - x_1 - x_2$$

cioè, introducendo la $\wp(u)$ e la $\wp'(u)$

$$\wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) - \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right)^2 - \wp(u_1) - p(u_2).$$

Nota storica. — Anche prima che, colla scoperta dell'inversione dell'integrale ellittico di prima specie, si riuscisse al teorema d'addizione nella forma sopra enunciata, la proprietà che esso esprime — generalizzazione del teorema d'addizione delle funzioni circolari — si era già presentata ad una serie di geometri, e proprio qui si trova l'origine storica del grande teorema d'Abel (da noi considerato, per ora, nel caso del genere $p = 1$).

Invero, dati due punti a e b della curva ellittica, la somma di due integrali di differenziali algebrici che le appartengono:

$$\int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^b \varphi(x)\,dx,$$

si riduce all'integrale stesso calcolato in un punto c, che è il coniugato dell'origine O nella g_2^1 determinata dalla coppia ab:

$$\int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^b \varphi(x)dx \equiv \int_0^c \varphi(x)dx,$$

dove il segno $\equiv$ designa la congruenza rispetto ai periodi nel caso dell'integrale di prima specie, e significa invece eguaglianza a meno di una funzione algebrico-logaritmica se si tratta d'integrale di seconda o terza specie.

In generale per le curve di genere p si trova (per $n > p$)

$$\int_0^{a_1} \varphi(x)dx + \int_0^{a_2} \varphi(x)dx + \dots + \int_0^{a_n} \varphi(x)dx \equiv \int_0^{c_1} \varphi(x)dx + \dots + \int_0^{c_p} \varphi(x)dx,$$

(cfr. Cap. II), cioè la somma di un numero qualunque d'integrali, appartenenti ad una curva algebrica, si lascia esprimere, a meno di una funzione algebrico-logaritmica, per mezzo della somma di un numero fisso d'integrali, che dà appunto il *genere* della curva (così introdotto implicitamente nella teoria di ABEL).

Questo è appunto il senso che il teorema d'addizione ha nelle ricerche sulla rettificazione delle curve, dai BERNOULLI a DE FAGNANI, fino ad ABEL. La sua importanza si vedeva in ciò che, mentre l'integrazione delle funzioni algebriche appariva condurre a trascendenti nuove, irreducibili alle trascendenti elementari già conosciute, la somma di un certo numero d'integrali si vede invece ridursi ad un solo integrale per $p = 1$, o in ogni caso ad un numero finito p.

Ora convien dire che tutte queste ricerche traggono origine dall'estensione del teorema d'addizione per le funzioni circolari.

Già nelle prime ricerche sulla rettificazione delle curve GIACOMO BERNOULLI (in una memoria degli *Acta eruditorum* di Lipsia, del 1679) notava che si possono assegnare due archi della spirale parabolica, dissimili fra loro, di eguale lunghezza.

E poco dopo (1698) GIOVANNI BERNOULLI mostrava come si possono determinare più archi di parabola la cui somma algebrica sia rettificabile. Ricerche analoghe erano proseguite da G. C. DE FAGNANI (nel 1714) intorno agli archi della parabola biquadratica $y = x^4$ e della lemniscata; ed EULERO a sua volta ne estendeva i resultati.

Più tardi MAC-LAURIN (nel *Treatise of Fluxions* del 1742) studiava, in generale, il problema della rettificazione per l'ellisse e per l'iperbole, giungendo pure a riconoscere le *proprietà d'addizione* che appartengono a questi archi.

Di qui l'impulso allo studio generale degli integrali ellittici, che EULERO proseguì negli anni 1756-57, cercando sempre di generalizzare i resultati del FAGNANI.

Questi sono i precedenti del teorema d'Abel.

Per comprendere il senso di tali ricerche, si richiami la proprietà delle funzioni circolari:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta .$$

Ponendo

$$\operatorname{sen} \alpha = a, \ \cos \alpha = \sqrt{1-a^2}$$
$$\operatorname{sen} \beta = b, \ \cos \beta = \sqrt{1-b^2}$$
$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = c,$$

la formula precedente dice che « il seno dell'arco somma si esprime algebricamente per mezzo dei seni degli archi addendi », cioè: la rettificazione dell'arco circolare (di cui si prende come dato il seno) si fa per mezzo dell'integrale

$$\alpha = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} a,$$

ma l'equazione trascendente

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

è soddisfatta dalla relazione algebrica

$$a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2} = c.$$

Appunto questa relazione viene estesa dal teorema d'addizione per gl'integrali ellittici di Mac-Laurin e d'Eulero, che resta poi assorbito nel più generale teorema d'Abel: la somma di due integrali ellittici si riduce ad un integrale, il cui limite superiore si calcola algebricamente per mezzo dei limiti superiori degli addendi (o meglio razionalmente per mezzo delle due coordinate dei punti corrispondenti della curva).

Passiamo ora ad un'altra applicazione del teorema d'Abel, che è la *bisezione delle serie lineari*, e, più in generale, la divisione di esse per un intero qualunque (divisore dell'ordine).

Data, sopra una curva ellittica, una g_{2n}, il problema della bisezione significa la ricerca delle serie g_n tali che

$$|2g_n| = |g_{2n}|.$$

Ora la g_{2n} viene caratterizzata dalla somma dei valori che l'integrale di prima specie riceve nei punti di un gruppo:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} \equiv a \qquad [\text{mod. } \omega, \omega'];$$

quindi per i gruppi di una g_n metà di g_{2n} avremo

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n \equiv \frac{a}{2} \qquad \left[\text{mod.}\ \frac{\omega}{2},\ \frac{\omega'}{2}\right],$$

e si avranno quattro valori incongrui della somma

$$u_1 + u_2 \dots + u_n;$$

$$\left\{\begin{aligned} u_1 + u_2 \dots + u_n &\equiv \frac{a}{2} \\ u_1 + u_2 \dots + u_n &\equiv \frac{a}{2} + \frac{\omega}{2} \\ u_1 + u_2 \dots + u_n &\equiv \frac{a}{2} + \frac{\omega'}{2} \\ u_1 + u_2 \dots + u_n &\equiv \frac{a}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}. \end{aligned}\right. \qquad [\text{mod.}\ \omega,\ \omega']$$

Dunque *la bisezione di una* g_{2n} *sopra una curva ellittica conduce a quattro serie distinte,* come già dimostrammo geometricamente nel § 35 del L. V.

In modo analogo si trovano r^2 *serie distinte che hanno come serie r-pla una data* g_{rn}, le quali sono definite da una relazione del tipo

$$u_1 + u_2 \dots + u_n \equiv \frac{a}{r} + \lambda\frac{\omega}{r} + \lambda'\frac{\omega'}{r},$$

dove λ e λ' possono assumere tutti i valori $0\ 1\ 2 \dots r - 1$.

Notisi che nelle formule precedenti è sempre lecito assumere $a = 0$ tenendo conto che l'integrale u è definito a meno di una costante addittiva.

Applichiamo in particolare il risultato ottenuto alla *determinazione dei flessi della cubica piana.* Assunta per la g_3^2 segata dalle rette la definizione

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \qquad [\text{mod.}\ \omega,\ \omega'],$$

i 9 flessi saranno dati dai 9 valori di u

$$\begin{matrix} 0 & \dfrac{\omega}{3} & \dfrac{2\omega}{3} \\[2ex] \dfrac{\omega'}{3} & \dfrac{\omega' + \omega}{3} & \dfrac{\omega' + 2\omega}{3} \\[2ex] \dfrac{2\omega'}{3} & \dfrac{2\omega' + \omega}{3} & \dfrac{2\omega' + 2\omega}{3}. \end{matrix}$$

Qui appare che presi due valori nella tabella ne esiste un terzo che con essi dà una somma congrua a zero; onde si deduce la proprietà fondamentale della configurazione dei flessi: *la retta congiungente due flessi sega la cubica in un terzo flesso* (cfr. L. II, § 22).

In modo analogo si troveranno i 16 punti di ondulazione di una quartica gobba di prima specie, riconoscendo la proprietà fondamentale della loro configurazione: il piano di tre punti ne contiene un quarto.

Osservazione. Lo stesso procedimento si può applicare alla ricerca dei flessi reali di una cubica reale, o dei punti d'ondulazione di una quartica gobba reale di prima specie, etc.

Ricordiamo che per la curva unipartita si ha un periodo ω, reale, e si trovano punti reali (del ramo impari) in corrispondenza ad u reale; e per la bipartita si hanno anche punti reali in corrispondenza a punti in cui la parte immaginaria sia data da $\frac{\omega'}{2}$, essendo ω' il periodo immaginario puro che si ha in questo caso.

La g_3^2 segata dalle rette riesce definita da

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv k \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

con k reale, come si vede segando con una qualsiasi retta reale che abbia intersezioni reali (due eventualmente sul ramo pari): così mediante una traslazione della variabile u lungo l'asse reale può rendersi $k = 0$. Si vede allora che: *una cubica reale possiede tre flessi reali sul ramo impari,* questi essendo definiti da

$$u \equiv 0, \quad u \equiv \frac{\omega}{3}, \quad u \equiv \frac{2\omega}{3}.$$

Si consideri ora una quartica gobba di prima specie (che per proiezione da un suo punto può riferirsi a una cubica piana). Se la quartica è composta di uno o di due rami pari, si trova, come sopra, che la g_4^3 segata dai piani vien rappresentata da

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0,$$

e quindi, *si hanno quattro punti di ondulazione reali per la quartica unipartita* corrispondenti a

$$u \equiv 0, \quad u \equiv \frac{\omega}{4}, \quad u \equiv \frac{2\omega}{4}, \quad u \equiv \frac{3\omega}{4},$$

e *otto punti di ondulazione per la quartica bipartita in due rami pari* dati da

$$u \equiv 0, \quad u \equiv \frac{\omega}{4}, \quad u \equiv \frac{2\omega}{4}, \quad u \equiv \frac{3\omega}{4},$$

$$u \equiv \frac{\omega'}{2}, \quad u \equiv \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, \quad u \equiv \frac{2\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, \quad u \equiv \frac{3\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}.$$

Invece se la quartica si compone di due rami impari, (il primo dei quali corrisponde per proiezione al ramo pari della cubica piana), un piano trisecante il secondo ramo segherà complessivamente la quartica in quattro punti reali per cui è

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv k + \frac{\omega'}{2}$$

con k reale, e quindi non si trova nessun valore u reale con parte immaginaria $\frac{\omega'}{2}$ tale che

$$4u \equiv k + \frac{\omega'}{2};$$

segue che: *la quartica di prima specie composta di due rami impari non possiede alcun punto d'ondulazione reale.* [1]

13. **Trasformazioni delle curve ellittiche.** — Secondo il teorema di Abel, le g_2^1 appartenenti ad una curva ellittica f vengono definite da

$$u + u' \equiv k \qquad (k = \text{cost.})$$

e quindi le trasformazioni (involutorie) di seconda specie sono rappresentate da

$$u' \equiv k - u;$$

e la trasformazione di prima specie $\pi = I_2 I_1$ che si ottiene moltiplicando le due involuzioni I_1, I_2:

$$u' \equiv k_1 - u, \quad u' \equiv k_2 - u,$$

(1) L'applicazione della teoria delle funzioni ellittiche allo studio delle quartiche gobbe incontrasi in *Harnack* - Math Annalen Bd. 12 (1897).
Dimostrazioni elementari di natura topologica di questi risultati (con estensione alle curve ellittiche degli iperspazii) trovansi in O. Chisini « Sulla forma delle quartiche gobbe di prima specie... » - Rendic. dell'Istituto Lombardo (1920).

riesce definita da

$$u' = u + h$$

con $h \equiv k_2 - k_1$.

Ora queste formule offrono l'immediata verifica di tutte le proprietà che abbiamo riconosciuto sussistere per le trasformazioni ordinarie della curva ellittica, di prima e seconda specie, [1] cioè che:

1) le trasformazioni di prima specie sono permutabili e formano un gruppo continuo;

2) la serie continua delle trasformazioni di seconda specie non forma da sola un gruppo, ma insieme al gruppo delle trasformazioni di prima specie dà luogo ad un gruppo misto;

3) due trasformazioni di seconda specie non sono permutabili, ma il prodotto s'inverte invertendo l'ordine dei fattori: $I_2 I_1 = (I_1 I_2)^{-1}$;

4) il gruppo delle trasformazioni π di prima specie è invariante per le trasformazioni di seconda, ogni π venendo trasformata nella inversa;

5) esistono *una* trasformazione di prima ed *una* di seconda specie che portano un punto A in un punto A'.

Il problema di determinare le *trasformazioni di prima specie involutorie ovvero cicliche* d'ordine $n > 2$, si collega — come già sappiamo (cfr. L. V, § 28) — alla bisezione o divisione delle serie: il legame appare qui in luce con grande evidenza e semplicità, risultando anche come alle trasformazioni involutorie d'una stessa curva si colleghi il problema di determinare le trasformazioni semplicemente razionali di due curve ellittiche.

Se la trasformazione

$$u' \equiv u + h,$$

deve riuscire involutoria, bisogna che sia

$$2h \equiv 0,$$

cioè

$$h \equiv 0, \quad \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

(1) Cfr. L. V, § 27.

Così, a prescindere dall'identità ($h \equiv 0$) si hanno tre diverse involuzioni di prima specie che danno luogo a tre serie involutorie γ_2^1. E si può vedere che *queste* γ_2^1 *sono ellittiche.*

Si consideri, per es., sulla nostra curva f, la γ_2^1 rappresentata da

$$u' \equiv u + \frac{\omega}{2},$$

e si costruisca una curva algebrica F i cui punti rispondano biunivocamente alle coppie della γ_2^1; così ad ogni punto $\{x(u), y(u)\}$ della f corrisponderà un punto (XY) di F, e saranno ancora X e Y funzioni doppiamente periodiche di u; ma poichè (XY) risponde a due punti u e $u + \frac{\omega}{2}$ di f, i periodi primitivi di X e Y saranno

$$\frac{\omega}{2}, \quad \omega'.$$

Si può anche dire che X e Y risulteranno funzioni doppiamente periodiche della somma dei valori di u nei punti di una coppia della γ_2^1:

$$U = 2u + \frac{\omega}{2},$$

coi periodi

$$\omega \text{ e } 2\omega'.$$

Risulta di qui che la F, cioè *la* γ_2^1, *è ellittica; ma non birazionalmente identica alla curva data* f, giacchè il rapporto dei periodi da cui dipende l'invariante assoluto (cfr. § 10, pag. 58) è, per la f, $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ e per la F, $\tau' = \frac{2\omega'}{\omega} = 2\tau$.

Ora si può anche vedere che viceversa *ogni involuzione ellittica* γ_2^1 *appartenente ad* f *viene generata da una delle tre trasformazioni involutorie di prima specie.*

Infatti sia $F(XY) = 0$ la curva ellittica rappresentativa della γ_2^1; X e Y risultano funzioni doppiamente periodiche dell'integrale di prima specie u relativo ad f, con due periodi fondamentali Ω e Ω'. Ma poichè due punti u_1 e u_2 di f, coniugati nella γ_2^1, danno luogo allo stesso punto (XY) di F, la differenza $u_1 - u_2$ risulterà una combinazione lineare a coefficienti interi di Ω e Ω':

$$u_1 - u_2 = r\,\Omega + s\,\Omega';$$

e siccome $u_1 - u_2$ varia per continuità con la coppia della γ^1_2, si ha

$$u_1 - u_2 = \text{cost.}$$

cioè la corrispondenza fra i due punti coniugati della γ^1_2 è una trasformazione di prima specie. c. d. d.

L'analisi precedente mostra che a partire da un curva ellittica $f(xy) = 0$ cui appartiene l'integrale di prima specie u coi periodi fondamentali ω e ω', si possono costruire tre curve ellittiche $F_1\ F_2\ F_3$, distinte fra loro e dalla f, rappresentanti tre involuzioni γ^1_2 della f, le quali ammettono rappresentazioni parametriche per la u coi periodi

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{2}, \quad \Omega'_1 = \omega'$$

$$\Omega_2 = \omega, \quad \Omega'_2 = \frac{\omega'}{2}$$

$$\Omega_3 = \omega, \quad \Omega'_3 = \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Reciprocamente si avranno tre curve ellittiche $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rappresentate doppiamente sulla f (senza punti di diramazione) cui apparterrà l'integrale di prima specie u coi periodi

$$\sigma_1 = \omega, \quad \sigma'_1 = 2\omega'$$

$$\sigma_2 = 2\omega, \quad \sigma'_2 = \omega'$$

$$\sigma_3 = 2\omega, \quad \sigma'_3 = \omega + \omega'.$$

Ora confrontando si trova

$$\frac{\Omega'_1}{\Omega_1} = \frac{\sigma'_1}{\sigma_1}, \quad \frac{\Omega'_2}{\Omega_2} = \frac{\sigma'_2}{\sigma_2}, \quad \frac{\Omega'_3}{\Omega_3} = \frac{\sigma'_3}{\sigma_3}.$$

Pertanto si conclude che

Esistono tre curve ellittiche rappresentate sopra la f doppia senza punti di diramazione, e queste sono birazionalmente identiche alle tre involuzioni γ^1_2 appartenenti ad f.

Infine osserveremo che le tre involuzioni

$$u' \equiv u + \frac{\omega}{2}, \quad u' \equiv u + \frac{\omega'}{2}, \quad u' \equiv u + \frac{\omega + \omega'}{2},$$

formano con l'identità un gruppo Γ_4 trirettangolo, che genera sopra la f una involuzione ellittica γ^1_4: gli elementi di questa si esprimono per funzioni ellittiche dell'integrale u relativo ad f coi periodi $\frac{\omega}{2}$ e $\frac{\omega'}{2}$: perciò *la γ_4^1 è birazionalmente identica alla f.*

Le cose dette si estendono al problema di determinare le *trasformazioni* di prima specie *cicliche d'ordine* n, e quindi le *involuzioni ellittiche* d'ordine qualunque appartenenti ad f.

Anzitutto è chiaro che le trasformazioni di prima specie cicliche di periodo n verranno date da

$$u' = u + h, \quad \text{con } nh \equiv 0 \ (\text{mod } \omega, \omega'),$$

e quindi

$$h = r\frac{\omega}{n} + s\frac{\omega'}{n}$$

$$(r = 0, 1, \dots n-1, \ s = 0, 1, \dots n-1);$$

tuttavia le trasformazioni per cui il periodo è propriamente n e non un divisore di n rispondono al caso in cui r, s, n non hanno alcun divisore comune diverso dall'unità.

Ad ogni trasformazione ciclica di periodo proprio n corrisponde l'involuzione ciclica γ_n^1 che essa genera sopra f. E si può vedere che tutte queste γ_n^1 sono birazionalmente distinte dalla f e anche birazionalmente distinte fra loro.

Anzitutto si consideri la γ_n^1 generata dalla trasformazione ciclica

$$\pi = \left\{ \ u' \equiv u + \frac{h}{n}(r\omega + s\omega') \right.$$

ove r e s si suppongono primi fra loro: affinchè π sia di periodo proprio n, dovrà essere h primo con n, e quindi esisterà un intero x per cui

$$xh \equiv 1 \, [\text{mod. } n];$$

allora il gruppo ciclico generato da π sarà generato ugualmente dalle

$$\pi^x = \left\{ \ u' = u + \frac{r\omega + s\omega'}{n} \right.$$

(con r e s primi fra loro).

Ciò posto determiniano gl'interi r_1 e s_1 per modo da soddisfare all'equazione diofantea

$$rs_1 - sr_1 = 1;$$

per tale scelta i periodi

$$\Omega = r\omega + s\omega', \quad \Omega' = r_1\omega + s_1\omega'$$

potranno sostituirsi ad ω e ω' come periodi fondamentali, rispetto ai quali la π^x assume la forma

$$u' \equiv u + \frac{\Omega}{n}.$$

Si è provato in tal guisa che una qualunque involuzione ciclica γ_n^1 sopra f, per una conveniente scelta dei periodi dell'integrale u, può ritenersi generata dalla trasformazione ciclica

$$u' \equiv u + \frac{\omega}{n}:$$

ma per questa γ_n^1 è subito chiaro che essa è birazionalmente distinta dalla f, perchè le coordinate del punto della sua curva immagine F risultano funzioni periodiche di u coi periodi

$$\Omega = \frac{\omega}{n}, \quad \Omega' = \omega'$$

per modo che

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = n\,\frac{\omega'}{\omega}.$$

Passiamo a paragonare due involuzioni γ_n^1 della f, e supponiamo dapprima che esse siano generate da due trasformazioni π_1 e π_2 fra loro *indipendenti*, cioè tali che i loro gruppi ciclici non abbiano a comune che l'identità.

Dimostriamo che, per una scelta conveniente dei periodi fondamentali ω e ω', possiamo ridurre due trasformazioni generatrici di questi gruppi ciclici al tipo:

$$\pi_1 = \left\{ \; u' \equiv u + \frac{\omega}{n} \right.$$

$$\pi_2 = \left\{ \; u' \equiv u + \frac{\omega'}{n} \right.$$

Per il primo gruppo ciclico la cosa è stata già dimostrata; è dunque lecito assumere

$$u' \equiv u + \frac{\omega}{n}$$

$$u' \equiv u + \frac{r\omega}{n} + \frac{s\omega'}{n};$$

e dovrà essere qui s primo con n, altrimenti elevando la seconda trasformazione all'esponente $\frac{n}{d}$, ove d designi un divisore di s e n, riuscirebbe questa potenza del tipo $u' \equiv u + \frac{k\omega}{n}$, cioè le due trasformazioni non sarebbero indipendenti. Ciò posto si determini un intero x tale che

$$xs \equiv 1 \quad [\text{mod. } n];$$

il gruppo ciclico generato dalla nostra seconda trasformazione sarà generato ugualmente dalla sua potenza x-esima rappresentata da

$$u' \equiv u + \frac{xr}{n}\omega + \frac{\omega'}{n}.$$

Ora al posto dei periodi ω e ω' prendiamo i periodi fondamentali

$$\Omega = \omega, \quad \Omega' = xr\omega + \omega':$$

per tale scelta si avranno come trasformazioni generatrici delle nostre γ_n^1 le

$$u' \equiv u + \frac{\Omega}{n}, \quad u' \equiv u + \frac{\Omega'}{n},$$

ovvero, tornando a chiamare i periodi con le lettere minuscole,

$$u' \equiv u + \frac{\omega}{n}, \quad u' \equiv u + \frac{\omega'}{n}.$$

E quindi riesce chiaro che le due γ_n^1 sono birazionalmente distinte, corrispondendo ai periodi

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{n}, \quad \Omega'_1 = \omega',$$

$$\Omega_2 = \omega, \quad \Omega'_2 = \frac{\omega'}{n},$$

sicchè il rapporto invariante

$$\frac{\Omega'_1}{\Omega_1} = n^2 \frac{\Omega'_2}{\Omega_2}.$$

Questa conclusione è stata ottenuta nell'ipotesi che le nostre γ_n^1 siano generate da operazioni indipendenti, il che significa che esse non sono composte con una medesima involuzione ellittica γ_m^1 ove m è divisore di n.

Ma è lecito sciogliersi da questa restrizione perchè se le due γ_n^1 sono composte con una medesima γ_m^1, basta sostituire alla curva f la curva immagine di questa γ_m^1, su cui le nostre due γ_n^1 divengono $\gamma_{n:m}^1$ indipendenti.

Riassumendo: ***tutte le involuzioni cicliche generate da trasformazioni di prima specie d'ordine n sopra la*** f ***sono birazionalmente distinte fra loro e dalla*** f ***stessa.***

Ora le trasformazioni di prima specie cicliche d'ordine n sopra la f, saranno tutte contenute nel gruppo abeliano Γ_{n^2} d'ordine n^2 generato per moltiplicazione dalle due trasformazioni indipendenti col periodo proprio n

$$\pi_1 = \left\{ u' \equiv u + \frac{\omega}{n} \right.$$

$$\pi_2 = \left\{ u' \equiv u + \frac{\omega'}{n} \right. .$$

E l'involuzione $\gamma_{n^2}^1$ corrispondente al Γ_{n^2} riuscirà birazionalmente identica alla curva f, poichè i suoi elementi sono funzioni ellittiche del parametro u (definito come integrale su f) coi periodi $\frac{\omega}{n}$ e $\frac{\omega'}{n}$, o, ciò che è lo stesso, sono funzioni ellittiche di $U = nu$ coi periodi ω e ω'.

Dopociò è facile *determinare tutti i gruppi finiti di trasformazioni di prima specie appartenenti alla* f (cfr. L. V, § 28) e *le involuzioni* che da essi vengono generate.

A tale scopo osserviamo anzitutto che essendo n un multiplo comune dei periodi delle operazioni appartenenti ad un gruppo Γ, sarà certo Γ contenuto come sottogruppo nel Γ_{n^2}; ma se il massimo periodo delle operazioni di Γ sia $m < n$, e quindi $m = \frac{n}{d}$, tutto il Γ riuscirà contenuto nel Γ_{m^2} generato da $\pi_1{}^d$, $\pi_2{}^d$, e quindi solo *impropriamente* nel Γ_{n^2}.

Ciò posto per generare un Γ, contenuto propriamente in Γ_{n^2}, è lecito assumere anzitutto una trasformazione d'ordine n, che, per una scelta conveniente dei periodi ω e ω', si può scrivere

$$\pi_1 = \left\{ u' \equiv u + \frac{\omega}{n} \right. ,$$

e in secondo luogo — come ci proponiamo di mostrare — la trasformazione

$$\pi_2^h = \Big\{ \quad u' \equiv u + \frac{h}{n}\,\omega',$$

dove h designa il minimo esponente che bisogna dare a π_2 per avere un'operazione di Γ; sarà quindi l'ordine di Γ uguale a

$$n\,\frac{n}{h} = hm^2 \qquad\qquad \left(m = \frac{n}{h}\right).$$

Infatti se a Γ (sottogruppo di Γ_{n^2}) appartiene l'operazione $\pi_1{}^r\pi_2{}^s$, vi appartiene anche $\pi_2{}^s$, e deve essere s multiplo di h, altrimenti la $\pi_2{}^r$, dove r è il resto della divisione di s per h, apparterebbe al Γ.

Ora dal fatto che il Γ venga generato dalle trasformazioni

$$\left\{\begin{aligned} u' &\equiv u + \frac{\omega}{n} \\ u' &\equiv u + \frac{\omega'}{m} \end{aligned}\right. \qquad\qquad n = hm$$

segue che l'involuzione corrispondente al Γ_{hm^2} risulta composta della involuzione $\gamma^1_{m^2}$ che corrisponde al Γ_{m^2} contenente tutte le γ^1_m, per modo che passando dalla curva f alla curva birazionalmente identica) φ immagine della $\gamma^1_{m^2}$, si avrà su questa una γ^1_h ciclica.

Concludiamo enunciando il

TEOREMA. — *Se fra due curve ellittiche* f *e* F *intercede una corrispondenza razionale* [n, 1], *e non una corrispondenza* [h, 1] *con* h < n, *i gruppi corrispondenti ai punti di* F *formano su* f *una involuzione ciclica* γ^1_n.

Così dunque si trovano tante curve F birazionalmente distinte fra loro (e dalla f) quante sono le involuzioni cicliche d'ordine proprio n appartenenti ad f, cioè quante sono le coppie di numeri r e s minori di n e prime con n.

E, in modo analogo a ciò che si è visto per $n = 2$, altrettante sono le curve ellittiche φ birazionalmente distinte che si lasciano rappresentare sopra la f presa n-pla senza punti di diramazione, e non sopra una f che sia h-pla con $h < n$. Queste *curve* f n-*ple sono birazionalmente identiche alle involuzioni cicliche* γ^1_n sopra f, dipendentemente dalla proprietà che la $\gamma^1_{n^2}$ composta con due γ^1_n indipendenti è identica alla f.

Le cose dette contegono tutti i risultati che abbiamo trovato nel L. V, § 28, e danno così il contenuto geometrico della teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche quale si trova esposta, per es., nel cap. XV del trattato del Bianchi.

In ciò che precede abbiamo considerato le trasformazioni ordinarie di una curva ellittica in se stessa e ne abbiamo dedotto lo studio delle trasformazioni semplicemente razionali fra due curve ellittiche. Ora vogliamo risolvere con l'uso delle funzioni ellittiche il problema già trattato nel L. V, § 27, domandandoci se una curva ellittica f possa ammettere altre trasformazioni birazionali in se stessa, all'infuori delle trasformazioni di prima e seconda specie $u' \equiv \pm u + k$, pervenendo al risultato che ciò è possibile solo per le cubiche armoniche od equiarmoniche, le quali ammettono, rispettivamente, le trasformazioni singolari $u' = iu$, $u' = \varepsilon u$, dove i numeri complessi i ed ε sono la radice quadrata di -1 e la cubica di 1.

Se fra i punti di f è data comunque una trasformazione birazionale, i valori di un integrale di prima specie in due punti corrispondenti, u e u', dovranno esser legati da una relazione analitica biunivoca, che sarà (cfr. L. V, § 33) bilineare; dunque si avrà

$$u' \equiv \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} \qquad (\text{con } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Ma poichè u e u' sono suscettibili di prendere tutti i valori finiti, ma non mai il valore ∞, la sostituzione avrà forma intera, riducendosi al tipo

$$u' \equiv \alpha u + \beta$$

e, moltiplicando per una trasformazione di prima specie $u' = u - \beta$, al tipo

$$u' = \alpha u .$$

Si domanda se questa equazione fra u e u' possa rappresentare una trasformazione birazionale di f, all'infuori dei casi $\alpha = \pm 1$ in cui si ottengono l'identità e la trasformazione di seconda specie $u + u' \equiv 0$.

Ora, essendo ω e ω' i periodi di u, i periodi di αu saranno $\alpha\omega$ e $\alpha\omega'$, e la condizione per la corrispondenza birazionale richiesta porta che $\alpha\omega$ e $\alpha\omega'$ si esprimano come combinazioni lineari a coefficienti interi di ω e ω' e reciprocamente, avendosi dunque

$$\alpha\omega = a\omega + b\omega'$$
$$\alpha\omega' = c\omega + d\omega'$$

con a, b, c, d, interi e $ad - bc = 1$.

Queste equazioni danno

$$\begin{cases} (a - \alpha)\omega + b\omega' = 0 \\ c\omega + (d - \alpha)\omega' = 0 . \end{cases}$$

Le relazioni precedenti implicano condizioni effettive per il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ tranne se

$$\alpha = a = d, \quad b = c = 0,$$

ipotesi che, tenuto conto della $ad - bc = 1$, porterebbe

$$\alpha^2 = 1, \quad \alpha = \pm 1 .$$

Essendo qui esclusa l'ipotesi $\alpha = \pm 1$, le nostre equazioni in ω e ω' sono effettive, e dovrà tuttavia essere soddisfatta la condizione della loro compatibilità

$$(a - \alpha)(d - \alpha) - bc = \alpha^2 - \alpha(a + d) + (ad - bc) = 0$$

cioè

$$\alpha^2 - (a + d)\alpha + 1 = 0 .$$

Frattanto

$$\alpha = \frac{a\omega + b\omega'}{\omega} = \frac{c\omega + d\omega'}{\omega'}$$

sicchè, posto $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$,

$$a + b\tau = \frac{c}{\tau} + d ,$$

$$b\tau^2 + (a - d)\tau - c = 0 .$$

Ora il discriminante di questa equazione deve essere negativo, perchè τ non è reale:

$$(a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4ad + 4bc < 0$$

ed essendo $ad - bc = 1$, risulta

$$(a + d)^2 < 4 .$$

Siffatta diseguaglianza dà luogo a tre valori possibili per $a + d$,

$$a + d = 0 , \quad a + d = \pm 1 ;$$

e corrispondentemente la equazione in α

$$\alpha^2 - (a + d)\alpha + 1 = 0$$

assume una delle tre forme

$$\alpha^2 + 1 = 0$$
$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$
$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Nel primo caso si ottiene $\alpha = \pm i$, e le due corrispondenti trasformazioni

$$u' = iu , \quad u' = - iu$$

differiscono per la trasformazione di seconda specie $u' = - u$.

Le coppie di radici relative al secondo e al terzo caso differiscono solo per il segno, e pertanto le trasformazioni corrispondenti differiscono per la trasformazione di seconda specie $u' = - u$. Consideriamo pertanto solo il terzo caso, relativo dunque all'equazione $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. In questo si ottiene

$$\alpha = \varepsilon , \quad \alpha = \varepsilon^2 \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

e le due trasformazioni corrispondenti appaiono una il quadrato dell'altra.

Resta da determinare il valore di $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$ nei due casi considerati (primo e terzo). Qui notiamo che le equazioni scritte non valgono a fissare τ, in quanto oltre che a τ corrispondono ad ogni valore

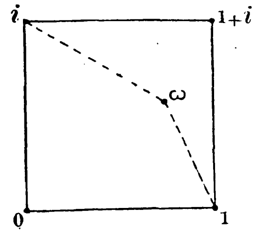
$$\frac{c\omega + d\omega'}{a\omega + b\omega'}$$

indicando con $a\omega + b\omega'$ e $c\omega + d\omega'$ una qualunque coppia di periodi primitivi.

In sostanza noi siamo condotti a ricercare non i periodi ω e ω', o i periodi 1 e τ, ma l'intera rete dei periodi.

Si consideri il primo caso $\alpha = i$.

Siccome la rete dei periodi deve restare invariata per la moltiplicazione per i, segue che, al pari di 1 e τ, anche i e τi sono periodi. Troviamo così i periodi 1 e i; questi definiscono una rete che è certo contenuta nella rete da determinarsi: vogliamo dimostrare che coincide con essa.



A tale scopo supponiamo che il periodo 1 sia periodo di minimo modulo (ipotesi questa a cui sempre ci si può ridurre): qualora 1 e i non definissero l'intera rete, entro il quadrato 0, 1, $1+i$, i, dovrebbe cadere qualche altro vertice della rete: sia esso ω.

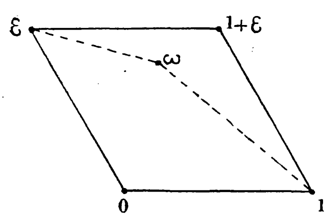
È chiaro che la somma delle distanze di ω dai vertici 1 e i è minore di 2, sicchè uno dei due periodi

$$\omega - i \quad \text{e} \quad \omega - 1$$

avrebbe modulo minore di 1.

Similmente si ragiona nel caso $\alpha = \varepsilon$ (o $\alpha = \varepsilon^2$).

Si trova anzitutto che esistono i periodi 1 e ε. Questi definiscono una rete che coincide con la rete dei periodi. Se ciò non fosse, entro il parallelogramma 0, 1, $1+\varepsilon$, ε, si troverebbe un periodo ω, e le distanze di ω dai vertici 1 e ε darebbero una somma minore di 2, sicchè uno dei due periodi



$$\omega - 1 \quad \text{o} \quad \omega - \varepsilon$$

avrebbe modulo minore di 1 (mentre si può imporre qui, come nel caso precedente, che 1 sia il minimo valore dei moduli dei periodi).

A conferma di quanto sopra è detto possiamo calcolare il valore di τ nel caso della cubica armonica e della equianarmonica, che sole (come sappiamo dagli sviluppi del § 27 del L. V), ammettono trasformazioni birazionali in sè diverse da quelle ordinarie di prima e di seconda specie.

Si consideri dunque la cubica armonica

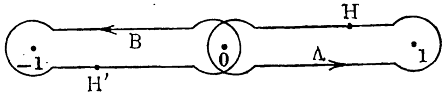
$$y^2 = x(x^2 - 1),$$

e si considerino nel piano della variabile complessa i quattro punti

$$0, \quad \infty, \quad 1, \quad -1$$

che sono di diramazione per la funzione $y=\sqrt{x(x^2-1)}$.

Tracciamo le due linee chiuse A e B avvolgenti rispettivamente i punti 0 e 1, 0 e -1: precisamente possiamo sup-



porre di aver preso le linee A, B uguali e di più simmetriche, l'una dell'altra rispetto all'origine $x=0$.

Queste due linee danno, sulla riemanniana della cubica, i due cicli fondamentali: avremo dunque

$$\omega=\int_A \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-1)}}$$

$$\omega'=\int_B \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-1)}}.$$

Ma nei punti come H' e H (cioè allineati con O e tali che $OH=OH'$) si ha

$$x'=-x, \quad \sqrt{x'(x'^2-1)}=i\sqrt{x(x^2-1)}$$

come si verifica facilmente, e pertanto sarà

$$\omega'=\int_B \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-1)}}=\int_A \frac{-dx}{i\sqrt{x(x^2-1)}}=-\frac{1}{i}\,\omega=i\omega$$

e quindi

$$\tau=\frac{\omega'}{\omega}=i\,.$$

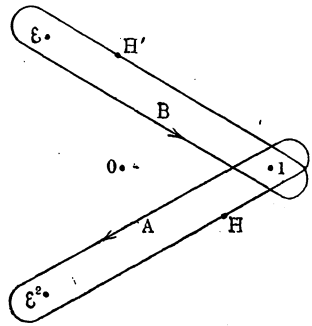
Similmente nel caso della cubica equianarmonica

$$y^2=x^3-1$$

si considerino nel piano della variabile complessa x i quattro punti di diramazione

$$\infty, \quad 1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2.$$

Si traccino le due linee A e B avvolgenti i punti ε^2 e 1, 1 e ε, dove la B è ottenuta ruotando la A, intorno al punto $x=0$, di 120 gradi, come nella figura.



Sarà

$$\omega = \int_A \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

$$\omega' = \int_B \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}\,.$$

Ma, essendo nei punti come H e H',

$$x' = \varepsilon x$$

risulta

$$\omega' = \int_B \frac{dx}{\sqrt{(x^3-1)}} = \varepsilon \int_A \frac{dx}{\sqrt{(x^3-1)}} = \varepsilon\omega$$

e quindi

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \varepsilon\,.$$

14. **Definizione geometrica dell'integrale di prima specie.** — Abbiamo veduto che le trasformazioni di prima specie della curva ellittica sono date dalla relazione

$$u' = u + k\,, \tag{1}$$

dal che, in particolare, segue che esse formano un gruppo abeliano continuo isomorfo al gruppo delle traslazioni. Noi potremo dunque rappresentare la trasformazione di prima specie (1) nella forma

$$\pi^k$$

essendo, evidentemente, soddisfatta la relazione fondamentale degli esponenziali

$$\pi^h \cdot \pi^k = \pi^{h+k}.$$

Scrivendo la trasformazione di prima specie nella forma π^k, si ha che l'esponente k è il valore dell'integrale ellittico u calcolato nel punto A' in cui la π^k porta il punto A definito da $u=0$.

Viceversa, partendo dalla teoria geometrica delle trasformazioni di prima specie, si riconosce facilmente che esse possono porsi nella forma esponenziale π^k, dove k è appunto l'integrale ellittico di prima specie

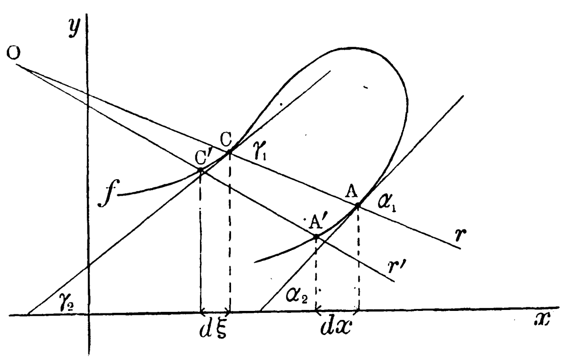
$$k = \int_A^{A'} \frac{dx}{f'_y}$$

calcolato, sulla curva ellittica $f(xy) = 0$, fra il punto A e il punto A', trasformato di A per effetto della π^k.

Per giungere a questo risultato occorre calcolare l'espressione analitica della π infinitesima, generatrice del gruppo abeliano continuo.

Tale calcolo si potrebbe fare direttamente considerando la π infinitesima come prodotto di due involuzioni g_2^1 infinitamente vicine, e scrivendo le formule relative a queste. Conviene invece procedere per una via indiretta, che ha il vantaggio di potersi estendere all'analoga questione relativa agli integrali abeliani.

Si consideri la g_2^1 segata su f dalle rette per un punto O della f stessa; siano r e r' due rette, per O, infinitamente vicine, che taglino f nelle coppie di punti AC e $A'C'$. Indichiamo con x e ξ le ascisse di A e C; con dx, $d\xi$ le relative variazioni per il passaggio ad A' e C'; con α_1 e γ_1 gli angoli che le tangenti in A e in C formano con la r; con α_2 e γ_2



gli angoli che le stesse tangenti formano con l'asse x. Come mostra chiaramente la figura (che pur essendo reale rappresenta bene circostanze relative al campo complesso) fra i suddetti elementi intercede la relazione

$$(2) \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{OC}{OA} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \gamma_1} \cdot \frac{\cos \gamma_2}{\cos \alpha_2}.$$

Immaginiamo ora fisso il punto C (e così fisso γ_2), ma variabili O e A; e precisamente O variabile in conseguenza di A in modo che risulta univocamente determinato da A stesso: sarà allora il rapporto

$$\rho = \frac{d\xi}{dx}$$

una certa funzione univoca delle coordinate di A.

La relazione (2) mostra quali sono gli zeri e i poli del rapporto ρ. Ma occorrono alcune osservazioni esplicite.

Anzitutto quando A capita in un punto improprio di f (che naturalmente, per semplicità, supponiamo in posizione generica rispetto agli assi) il rapporto ρ diventa infinitesimo del second'ordine rispetto ad $\frac{1}{x}$, essendo x l'ascissa di A che tende all'infinito. Infatti in tale circostanza $\frac{1}{OA}$ e sen α_1 diventano infinitesimi come $\frac{1}{x}$, mentre OC e cos α_2 tendono a valori finiti e diversi da zero.

In secondo luogo quando A venga a coincidere con C (riuscendo O il tangenziale di C) i due incrementi $d\xi$ e dx risultano uguali e di segno opposto (a meno, s' intende, di infinitesimi d'ordine superiore) e quindi ρ acquista il valore -1.

In terzo luogo quando O coincida con C (riuscendo A il tangenziale di C) OC e sen γ_1 sono infinitesimi dello stesso ordine, sicchè ρ ha un valore finito, e così pure ρ ha un valore finito quando O coincida con A. All'infuori dei casi considerati, mai accade che sia sen $\gamma_1 = 0$.

Si conclude dunque che

a) gli zeri del rapporto ρ sono dati dai punti all'infinito di f, dove ρ è infinitesimo del secondo ordine;

b) i poli di ρ sono i punti A in cui la tangente è parallela all'asse y ($\cos \alpha_2 = 0$);

c) nel punto C il rapporto ρ ha il valore -1.

Abbiamo dunque per ρ la seguente espressione

$$\rho = \frac{h}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

dove la costante h è data dalla derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ calcolata nel punto fisso C e cambiata di segno.

Ciò posto osserviamo che il punto A' è il trasformato di A per la π infinitesima prodotto delle due involuzioni aventi come centri i punti C e C' infinitamente vicini: questa π infinitesima è dunque definita dalla relazione

$$dx = \frac{d\xi}{\rho} = \frac{d\xi}{h}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Per maggior precisione indichiamo tale π infinitesima con

$$\pi^\varepsilon$$

ponendo $\varepsilon = \dfrac{d\xi}{h}$; volendo poi, per iterazione successiva della π^ε, arrivare ad una qualsiasi π, converrà considerare tale esponente come il differenziale di una variabile u, ponendo dunque

$$\varepsilon = du.$$

Vediamo così che la π^{du} porta ciascun punto $A = (xy)$ in un punto A', tale che

$$dx = du \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

sicchè la

$$\pi^u$$

porterà ciascun punto A in un punto A' per cui sarà

$$\int_A^{A'} \frac{dx}{f'_y} = u.$$

Si conclude pertanto che *l'integrale ellittico*

$$u = \int_A^{A'} \frac{dx}{f'_y}$$

non è altro che l'esponente della π^u *che porta* A *in* A'.

Fissato ora sulla cubica un punto A_0, per ogni valore dato ad u si avrà un determinato punto A, trasformato di A_0 mediante π^u:

$$A = \pi^u(A_0)$$

le cui coordinate x e y risultano pertanto funzioni univoche del parametro u, esponente della π^u. Precisamente x e y

saranno funzioni analitiche di u, come u è funzione analitica di x (e quindi di y).

Qui conviene precisare l'equazione della cubica ellittica, dandole la forma

$$f(xy) = y^2 - (4x^3 - g_2 x - g_3) = 0$$

sicchè

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$u = \int \frac{dx}{2y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Enunciamo pertanto il

TEOREMA D'INVERSIONE. — Le coordinate x e y di un punto A, variabile sopra la cubica $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, sono funzioni analitiche monodrome dell'integrale ellittico

$$u = \int \frac{dx}{2\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

È assai facile dedurre dalle proprietà geometriche delle trasformazioni di prima specie, le proprietà dell'integrale ellittico u, e delle funzioni che, attraverso al teorema d'inversione danno le coordinate x e y di un punto della cubica come funzioni (ellittiche) del parametro u. Si trova così anzitutto la doppia periodicità della $x(u)$ e della $y(u)$, si dà il teorema d'ABEL che assegna la definizione trascendente delle serie lineari g_n^r, il teorema di addizione, e anche si ritrovano gli sviluppi di WEIERSTRASS. Rimandiamo per tutto ciò alla Nota di O. CHISINI, « L'Integrale ellittico di prima specie dal punto di vista geometrico » [1] al quale appartiene la trattazione qui riferita.

OSSERVAZIONE. — Se si considera una cubica variabile, la quale — per un valore particolare del parametro — acquisti un punto doppio, allora il gruppo delle trasformazioni di prima specie della curva si riduce al gruppo continuo delle proiettività, con due punti uniti fissi (corrispondenti alla coppia neutra della g_3^2 segata dalla retta, che è rappresentata dal

[1] Rendiconti dell'Istituto Lombardo, adunanza del 10 giugno 1926.

punto doppio: cfr. L. V. Cap. III § 36, Vol. III pag. 411). Quindi il problema che conduce in generale alla costruzione dell'integrale di prima specie, cioè « rappresentare per isomorfismo il gruppo continuo delle trasformazioni di prima specie sul gruppo parabolico della retta », diventa ora il problema di rappresentare il gruppo iperbolico delle proiettività

$$y = a^n x,$$

sul gruppo parabolico

$$y = x + bn;$$

ed è chiaro che esso conduce alla funzione esponenziale, trasformante il prodotto nella somma. Così appare chiarito anche da questo punto di vista geometrico, come l'integrale ellittico si presenti naturale estensione della funzione esponenziale.

Capitolo II

Integrali abeliani.

15. Integrali abeliani: classificazione. — In questo paragrafo, e nei seguenti, ci proponiamo di estendere alle curve algebriche

$$(1) \qquad f(xy) = 0$$

di un genere p qualunque ciò che abbiamo visto per le curve ellittiche, cioè per il caso $p = 1$, riferendoci in particolare ad una cubica piana. Studieremo gli *integrali delle funzioni razionali* sopra la f, i quali prendono il nome di *integrali abeliani*.

Si noti anzitutto che la curva $f(xy) = 0$ definisce la y come funzione algebrica della x:

$$(2) \qquad y = y(x).$$

Ciò posto, si consideri una funzione razionale Φ dei punti della curva f

$$(3) \qquad \Phi(xy) = \frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)},$$

dove φ e ψ rappresentano due polinomi, e x e y sono legati dalla equazione $f(xy) = 0$; la Φ risulta dunque una funzione algebrica di x

$$\Phi\{x,\ y(x)\}$$

e dà luogo all'integrale indefinito

$$(4) \qquad u = \int \Phi\{x,\ y(x)\}\, dx.$$

Per esaminare la natura dell'integrale abeliano u, quale funzione della variabile x, come già nel caso della cubica, conviene considerare anzitutto l'integrale definito

$$(4') \qquad u = \int_{x_0}^{x} \Phi \{ x, y(x) \} \, dx.$$

Si vede subito che il valore di questo integrale dipende dalla linea l, tracciata sul piano rappresentativo della variabile complessa x, che congiunge x_0 ad x e lungo la quale si integra, e dal valore $y(x_0)$ che inizialmente si associa ad x_0; l'integrale u appare così funzione dei punti della riemanniana di f, che si potrà indicare con

$$u = \int_{x_0 y_0}^{xy} \Phi(xy) dx \qquad [f(xy) = 0]$$

o, più semplicemente, indicando con O il punto, di f, di coordinate x_0 e y_0 e con X il punto di coordinate x e y:

$$x = \int_{O}^{X} \Phi(xy) dx$$

sottintendendo che x e y sono legati dalla equazione $f(xy) = 0$.

Inoltre l'integrale u risulterà polidromo anche sulla riemanniana, la sua polidromia dipendendo dalla scelta arbitraria del cammino d'integrazione l che congiunge O a X.

Per lo studio delle singolarità della funzione u vale completamente l'analisi istituita nel § 4 per il caso del genere $p = 1$, analisi che è di portata affatto generale in quanto implica sviluppi relativi a campi sufficientemente piccoli del piano della variabile complessa x. Risulta dunque che

1. L'integrale u è regolare in ogni punto, della riemanniana, $X = (xy)$, che non sia polo per Φ e la cui ascissa x sia un valore finito e di regolarità per la funzione algebrica $y(x)$.

2. Del resto l'integrale u ha solo singolarità polari o logaritmiche che corrispondono ai poli di Φ e ai punti per cui $x = \infty$. Invece un punto X, che sia di contatto per una tangente parallela all'asse x, cioè abbia per ascissa un valore x di diramazione per la $y(x)$, è, sulla riemanniana, punto di regolarità per u, ove non coincida con esso un polo di Φ.

3. Precisamente: un polo semplice di Φ con residuo non nullo, dà origine a una singolarità logaritmica, e un polo d'ordine $r \geq 2$, con residuo nullo, dà origine a un polo d'ordine

$r-1$; e i punti, che siano poli d'ordine $r \geq 2$ con residuo non nullo danno luogo a una singolarità polo-logaritmica, sovrapposizione delle due precedenti. Un punto X, di ascissa $x=\infty$, risulta in generale singolare, con una singolarità polo-logaritmica; diventa invece regolare quando Φ vi sia infinitesimo d'ordine due almeno.

4. Un polo di Φ può risultare regolare, sulla riemanniana, quando cade in un punto X corrispondente ad una diramazione della $y(x)$. Per ciò occorre precisamente che sieno soddisfatte le condizioni seguenti: se x è un valore di diramazione, per la $y(x)$, d'ordine ν (permutazione ciclica di ν rami della y e conseguentemente di ν rami di Φ) allora la Φ, concepita appunto come funzione di x, deve avere in x un polo d'ordine $r \leq \frac{\nu-1}{\nu}$, e quindi la funzione razionale

$$\Phi(xy)=\frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)}$$

deve avere su f un polo d'ordine $\rho = r\nu \leq \nu - 1$; ciò significa che, ove la curva $\varphi(xy)=0$ non passi per X, e la $\psi(xy)=0$ abbia in X un contatto, con f, d'ordine $\rho \leq \nu - 1$, l'integrale resta regolare in X.

Ciò posto gli integrali abeliani

$$u=\int \Phi(xy)dx \qquad [f(xy)=0]$$

al pari degli integrali ellittici, si classificano, secondo la natura delle loro singolarità in:

a) *integrali di prima specie, ovunque regolari sopra la riemanniana;*

b) *integrali di seconda specie, dotati soltanto di singolarità polari;*

c) *integrali di terza specie, dotati di singolarità logaritmiche.*

16. Costruzione degli integrali abeliani di prima specie. — Veniamo alla costruzione degli integrali abeliani delle singole specie. Al solito indichiamo con n l'ordine della curva fondamentale $f(xy)=0$, con p il suo genere; e, per semplicità, supponiamo che la f sia dotata soltanto di punti multipli a tangenti distinte e sia collocata in posizione generica rispetto agli assi coordinati.

Cominciamo a costruire gli integrali abeliani di prima specie

$$u = \int \frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)}\, dx, \qquad [f(xy) = 0]$$

determinando la natura della funzione razionale integranda $\frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)}$.

Come accade per gli integrali ellittici di prima specie, l'integrando $\frac{\varphi}{\psi}$ dovrà:

1) avere un infinitesimo d'ordine $r \geq 2$ in ciascuno degli n punti impropri della curva f;

2) avere i suoi poli fra gli $m = 2n + 2p - 2$ punti $K_1 K_2 \dots K_m$ per cui

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

la cui ascissa è di diramazione per la funzione algebrica $y(x)$ e quindi per l'integrando.

Ora potremo sempre supporre che il denominatore $\psi(xy)$ si annulli in questi $2n + 2p - 2$ punti K, facendo eventualmente coincidere con alcuni di essi qualche zero di φ, che in tal modo viene a distruggere il polo che altrimenti sorgerebbe per Φ. Con ciò per la funzione Φ resta arbitrario un gruppo G_{2p-2} di $2p - 2$ zeri che, sommato insieme al doppio del gruppo Γ_n staccato su f dalla retta impropria, deve dare un gruppo di $2n + 2p - 2$ punti equivalente a quello dei punti K. Ora il gruppo dei punti K è un gruppo della serie jacobiana $|a_j|$ relativa alla serie $|a|$ segata dalle rette, sicchè il gruppo G_{2p-2} degli zeri (al finito) di Φ viene ad appartenere alla serie canonica

$$|a_j - 2a|.$$

Consideriamo gli $m = 2n + 2p - 2$ poli di Φ staccati sopra f dalla curva

$$f_y' = \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

la quale passa, oltre che per i punti K, anche per i punti multipli di f, e precisamente passa $r - 1$ volte per ciascun punto r — plo; allora gli zeri di Φ verranno dati da una aggiunta d'ordine $n-3$, $\varphi_{n-3}(xy)=0$, cui si sommi la retta impropria contata due volte. Risulta per l'integrando Φ la espressione analitica

$$\Phi(xy)=\frac{\varphi_{n-3}(xy)}{f_y'}.$$

Poichè le φ_{n-3} formano un sistema lineare di dimensione $p-1$, si conclude che: *sopra una curva* f *di genere* p *esistono* p *integrali abeliani di prima specie linearmente indipendenti,*

$$u_1 \; u_2 \; \dots u_p$$

per combinazione lineare dei quali, e della costante, si ottiene ogni altro integrale di prima specie: l'integrando relativo ad uno di essi è dato dal quoziente di un polinomio aggiunto, φ_{n-3}*, d'ordine* $n-3$*, diviso per il polinomio* f_y'*, polare del punto improprio dell'asse* y.

Nota. — Nella nostra analisi abbiamo ammesso per la curva $f(xy)=0$ due condizioni restrittive: che essa sia dotata soltanto di punti r — pli a tangenti distinte, e che sia disposta in modo generico rispetto agli assi. Ora la seconda di queste restrizioni si toglie, come si è fatto per il caso dell'integrale ellittico collegato ad una cubica piana, osservando che l'integrale abeliano di prima specie, come il relativo differenziale

$$\frac{\varphi_{n-3}}{f_y'}\,dx$$

ha carattere covariante rispetto ad una trasformazione omografica del piano.

Ma anche la prima restrizione è facile ad eliminarsi, riconoscendo che il differenziale suddetto ha carattere covariante rispetto ad una qualunque trasformazione birazionale, T, della curva, mediante la quale i punti multipli della f possono ridursi a tangenti distinte (ed anzi a soli punti doppi). Per dimostrare questo fatto si osservi che la T può decomporsi nel prodotto di due trasformazioni T_1 e T_2, ciascuna delle quali lascia ferma la serie segata da un fascio di rette parallele. Precisamente se la T ha la forma

$$T\equiv\left\{\begin{array}{l} X=X(xy)\\ Y=Y(xy)\end{array}\right.$$

essa può decomporsi nel prodotto di due trasformazioni T_1 e T_2:

$$T = T_2 T_1$$

dove

$$T_1 \equiv \begin{cases} X_1 = x \\ Y_1 = Y(xy) \end{cases}$$

$$T_2 \equiv \begin{cases} X_2 = X\{X_1, \ y(X_1 Y_1)\} \\ Y_2 = Y_1 \end{cases}$$

e le due trasformazioni T_1 e T_2 riusciranno certo birazionali per le curve trasformate (cosa questa particolarmente necessaria per la T_1 onde poter avere la funzione univoca $y(X_1 Y_1)$ che figura nella espressione della T_2) quando gli assi siano orientati in modo generico.

Basterà dunque riconoscere l'invarianza del differenziale

$$\left(\varphi_{n-3} : \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx$$

per la trasformazione T_1.

Pongasi ora che la T_1 trasformi la curva f, d'ordine n passante s volte per il punto improprio, I, dell'asse y, in una curva f', d'ordine n', passante s' volte per il punto improprio, I', dell'asse Y_1. Poichè la serie canonica è invariante per trasformazioni birazionali, la T_1 trasformerà il gruppo canonico segato dall'aggiunta φ_{n-3} in un gruppo canonico segato, su f', da una aggiunta $\varphi'_{n'-3}$. Inoltre, essendo $x = X_1$, la T_1, trasforma i gruppi della g^1_{n-s} staccati su f dalle rette per I nei gruppi della $g^1_{n'-s'}$, dove $n' - s' = n - s$, staccati sulla f' dalle rette per I', e i punti doppi della prima serie dati (s'intende fuori dai punti multipli) da $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ nei punti doppi della seconda dati da $\frac{\partial f'}{\partial Y_1} = 0$.

Ora si noti che il punto I, punto improprio dell'asse y, non è nè polo nè zero per l'integrando $\varphi_{n-3} : \frac{\partial f}{\partial y}$ giacchè il numeratore di questa funzione razionale va completato con la retta impropria contata due volte, sicchè I figura $s(s-1) + 2s$ volte fra gli zeri e ugualmente $s^2 + s = s(s-1) + 2s$ volte fra i poli dell'integrando (qui si ricordi che ogni punto s — plo per una curva è ugualmente s — plo per la polare del punto stesso, che riesce anzi tangente agli s rami della curva che vi passano).

Dunque la T_1 trasforma

$$\varphi_{n-3} : \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{nel termine analogo} \quad \varphi'_{n-3} : \frac{\partial f'}{\partial Y_1}$$

e poichè $x = X_1$, $dx = dX_1$, anche il differenziale

$$\left(\varphi_{n-3} : \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \quad \text{si trasforma in} \quad \left(\varphi'_{n'-3} : \frac{\partial f'}{\partial Y_1}\right) dX_1 .$$

Importa chiarire il significato della deduzione precedente: *ammettendo l'invarianza della serie* (*canonica*) segata dalle φ_{n-3} abbiamo dedotto che in ogni caso gli integrandi di prima specie sono dati da

$$\varphi_{n-3} : \frac{\partial f}{\partial y} ;$$

ma la deduzione stessa è invertibile: ammesso che l'integrando di prima specie sia dato in ogni caso da $\varphi_{n-3} : \frac{\partial f}{\partial y}$, segue l'invarianza dei gruppi appartenenti alla serie canonica. E la suddetta ammissione è facile a stabilirsi direttamente con effettivo rigore, approfondendo l'analisi svolta per il caso di una curva f dotata di punti multipli a tangenti distinte, ed estendendo così il risultato a curve f dotate di singolarità qualsiansi. A tale oggetto converrà ricordare che la polare $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ passa $r-1$ volte per ogni punto r — plo di f, sia esso punto proprio od infinitamente vicino a un punto proprio (e ciò al pari della aggiunta φ_{n-3}) e ha in più $\nu - 1$ intersezioni riunite nell'origine di ogni ramo superlineare d'ordine ν (Cfr. L 4° § 18, Vol. II pag. 441). Ciò posto, poichè l'integrando di prima specie deve avere i suoi poli fra i punti di diramazione della $y(x)$, e un punto di diramazione può essere polo d'ordine $\nu - 1$ al massimo, mentre i punti all'infinito devono essere zeri del secondo ordine almeno, anche per una f del tutto qualunque rispetto alle singolarità (ma in posizione generica rispetto agli assi) l'integrando di prima specie risulta dato, e necessariamente, da

$$\varphi_{n-3} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

essendo $\varphi_{n-3}=0$ una curva aggiunta d'ordine $n-3$ (che passa con la moltiplicità $r-1$ per ogni punto r — plo di f, sia esso proprio o infinitamente vicino a un punto proprio).

Ora è ovvio che una trasformazione birazionale T, che muta una curva f in una curva f', muta un integrale di prima specie legato ad f in un integrale, ugualmente di prima specie, legato ad f'; pertanto l'analisi della forma degli integrandi di prima specie fornisce una nuova dimostrazione del

Teorema d'invarianza della serie canonica: una trasformazione birazionale che muti una curva piana f, d'ordine n, in una curva piana f', d'ordine n', muta i gruppi segati su f dalle sue aggiunte d'ordine $n-3$ nei gruppi segati su f' dalle sue aggiunte d'ordine $n'-3$, cioè muta la serie canonica di f nella serie canonica di f'.

17. **Integrali abeliani di seconda specie.** — Passiamo ora alla *costruzione* degli *integrali abeliani di seconda specie*, cominciando dagli *integrali elementari*, dotati di un'unica singolarità polare.

Sia dunque $O=(\alpha\beta)$ un punto della curva f e si consideri la retta $ax+by+c=0$, tangente in esso alla curva f: questa tangente intersecherà ulteriormente le f in $n-2$ punti $P_1 P_2 \dots P_{n-2}$. Sia $\varphi_{n-2}(xy)=0$ una curva aggiunta d'ordine $n=2$ passante per $P_1 P_2 \dots P_{n-2}$. L'integrale

$$v=\int\frac{\varphi_{n-2}}{(ax+by+c)f_y'}\,dx$$

risulta evidentemente regolare ovunque fuor che nel punto O. Occorre dimostrare che la singolarità in O è solo polare, e non polo-logaritmica.

Questo fatto si riconosce come nel caso della cubica ellittica: l'integrando ha nel punto $O=(\alpha\beta)$ un polo del second'ordine il cui residuo è nullo, per il teorema di CAUCHY, e ammette quindi uno sviluppo del tipo:

$$\frac{b_0}{(x-a)^2}+b_2+b_3(x-a)+\dots$$

sicchè l'integrale v ha un polo semplice col residuo $-b_0$.

Anche qui, come nel caso della cubica, senza ricorrere al teorema di CAUCHY, è facile istituire del fatto una verifica analitica diretta. Supponiamo il punto O assunto come origine degli assi, e la retta $ax + by + c$ ridotta all'asse $y = 0$; questa ipotesi non è affatto restrittiva, potendosi realizzare con una omografia, come già si è detto a proposito degli integrali ellittici.

Mettiamo in evidenza le nostre ipotesi scrivendo

$$f(xy) = x^2(a_{20} + a_{30}x + \dots) + y(1 + a_{11}x + a_{21}x^2 + \dots) + y^2(a_{02} + \dots) + \dots$$
$$\varphi_{n-2}(xy) = a_{20} + a_{30}x + \dots + y(a'_{01} + a'_{11}x + \dots) + \dots;$$

qui sarà $a_{20} \neq 0$ supponendosi gli $n-2$ punti P diversi dal punto O.

Risolvendo la $f(xy)$ rispetto ad y si trova lo sviluppo in serie

$$y = -a_{20}x^2 + (a_{11}a_{20} - a_{30})x^3 + \dots;$$

il denominatore del nostro integrando risulta

$$\begin{aligned} yf'_y &= y(1 + a_{11}x + \dots) = -a_{20}x^2 + (a_{11}a_{20} - a_{30} - a_{20}a_{11})x^3 + \dots \\ &= -a_{20}x^2 - a_{30}x^3 + \dots, \end{aligned}$$

e il numeratore

$$\varphi_{n-2}\{x, y(x)\} = a_{20} + a_{30}x + \dots$$

Ciò posto lo sviluppo in serie dell'integrando sarà

$$\frac{\varphi_{n-2}}{yf'_y} = \frac{a_{20} + a_{30}x + \dots}{-a_{20}x^2 - a_{30}x^3 + \dots} = \frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x} + b_2 + \dots,$$

dove i coefficienti b_i soddisfano alle relazioni

$$\begin{aligned} a_{20} &= -a_{20}b_0 \\ a_{30} &= -a_{30}b_0 - a_{20}b_1, \end{aligned}$$

che dànno (essendo $a_{20} \neq 0$)

$$b_0 = -1, \quad b_1 = 0;$$

la relazione $b_1 = 0$ porta appunto che l'integrale v non possegga in O singolarità logaritmica, c. d. d.

Ora se v è un integrale di seconda specie col polo (del prim'ordine) O, sarà tale anche

$$v' = \lambda v + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 \dots + \mu_p u_p,$$

essendo $u_1 u_2 \dots u_p$ integrali di prima specie indipendenti; viceversa se v e v' sono due integrali elementari di seconda specie, con lo stesso polo O, e con i relativi residui ρ e ρ', l'integrale

$$\rho' v - \rho v'$$

riesce regolare in O (avendo quivi residuo nullo) e quindi è un integrale di prima specie: segue che *tutti gli integrali elementari di seconda specie con un dato polo formano un sistema lineare di dimensione* p, *riuscendo combinazioni lineari di uno qualunque di essi e dei* p *integrali di prima specie.*

Di qui si deduce che l'espressione

$$v = \int \frac{\varphi_{n-2}}{(ax + by + c) f_y'} dx,$$

dove φ_{n-2} è una qualunque aggiunta passante per i punti $P_1 P_2 \ldots P_{n-2}$ tangenziali di O, fornisce *tutti* gli ∞^p integrali elementari di seconda specie col polo O, essendo appunto p la dimensione del sistema delle aggiunte φ_{n-2} passanti per i suddetti tangenziali di O. D'altra parte, un'analisi simile a quella svolta per gli integrali ellittici di seconda specie e per gli integrali abeliani di prima, permetterebbe di riconoscere a priori che la precedente forma è non solo sufficiente ma anche necessaria per l'integrale elementare di seconda specie.

Dopo ciò è ovvio che qualunque integrale di seconda specie, dotato di poli semplici, si può ottenere come somma di integrali elementari, e che — nell'ipotesi che si abbiano anche dei poli multipli — basta aggiungere una conveniente funzione razionale. Più precisamente:

Ogni integrale di seconda specie si ottiene combinando una funzione razionale con p *integrali elementari di seconda specie*

$$v_1 \; v_2 \ldots \; v_p,$$

relativi a p *poli* $O_1 O_2 \ldots O_p$ *comunque prefissati, e coi* p *integrali di prima specie.*

Si consideri infatti un qualunque integrale di seconda specie v: siano $Q_1 Q_2 \ldots Q_m$ i suoi poli ed abbiano essi gli ordini, rispettivi, $r_1 r_2 \ldots r_m$. Esiste una funzione razionale θ avente un polo semplice in ciascun punto O_i, un polo d'ordine r_i in ciascun punto Q_i, soggetta alla condizione aggiuntiva di avere i termini negativi del corrispondente sviluppo in serie uguali agli omologhi dello sviluppo di v: infatti per una θ sifatta si impongono così Σr_i condizioni lineari, e la θ possedendo

$p+\Sigma r_i$ poli sopra la f di genere p dipende appunto da Σr_i parametri lineari. Ciò posto si potrà disporre di altri p parametri lineari $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p$ per modo che la differenza

$$v - \theta - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_p v_p$$

— che è già regolare nei punti Q_i — abbia residui nulli nei punti O_i, cioè sia regolare anche in essi; tale differenza risulterà pertanto un integrale di prima specie; cioè sarà

$$v - \theta - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_p v_p = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_p u_p,$$

e quindi

$$v = \theta + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_p u_p.$$

Come già nel caso di $p=1$ possiamo esprimere il risultato precedente enunciando il

TEOREMA. — *Ad una curva di genere* p *appartengono* 2p *integrali abeliani di seconda specie algebricamente indipendenti*, intendendo con ciò che un integrale qualunque differisce dalla combinazione lineare di altri $2p$ (fra i quali p possono essere di prima specie) per una funzione razionale.

18. **Integrali abeliani di terza specie.** — Veniamo infine alla costruzione degli integrali di terza specie, cominciando dagli *integrali elementari* cui si imponga di possedere due infiniti logaritmici O_1 e O_2, in posizione generica. Qui si noti che, per il teorema di CAUCHY, la somma dei residui dell'integrando, relativi ai poli di esso sopra la riemanniana, deve essere nulla: ciò porta che effettivamente 2 è il minimo numero delle singolarità logaritmiche che possa avere l'integrale di terza specie, e che i relativi periodi logaritmici, i quali — a parte il fattore $2\pi i$ — sono i residui dell'integrando, risultano uguali e di segno contrario.

Ciò posto l'integrale elementare richiesto si ottiene scrivendo

$$w = \int \frac{\varphi_{n-2}}{(ax+by+c)f'_y}\, dx,$$

dove $ax+by+c=0$ è una retta passante per i due punti O_1 e O_2, e $\varphi_{n-2}=0$ una curva aggiunta d'ordine $n-2$ passante per i punti $P_1 P_2 \dots P_{n-2}$, ulteriori intersezioni della retta con la curva f.

Che l'integrale w abbia le due sole singolarità logaritmiche O_1 e O_2, discende dalla solita analisi fatta per gli integrali abeliani; e che poi i residui dell'integrando in O_1 e O_2 siano uguali e di segno contrario, si può verificare direttamente, senza far ricorso al teorema di CAUCHY.

Come per l'analoga verifica relativa agli integrali ellittici di terza specie, facciamo coincidere la retta $ax+by+c=0$ coll'asse x dato da $y=0$, e i punti O_1 e O_2 coi punti di ascissa $x=0$ e $x=1$.

Per le nostre ipotesi avremo:

$$f(xy) = x(x-1)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-2}x^{n-2}) + \\ + y(1 + b_1 x + \ldots) + y^2(c_0 + c_1 x + \ldots) + \ldots,$$

$$\varphi_{n-2}(xy) = a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-2}x^{n-2} + y(d_0 + d_1 x + \ldots) + \ldots$$

Nell'intorno del punto $x=0$, risolvendo la $f(xy)$ rispetto ad y si trova:

$$y = a_0 x + \ldots;$$

il denominatore del nostro integrando risulta

$$y f_y' = y(1 + b_1 x + \ldots) = a_0 x + \ldots,$$

e il numeratore

$$\varphi_{n-2}\{x,\ y(x)\} = a_0 + \ldots.$$

Ciò posto, lo sviluppo in serie dell'integrando sarà

$$\frac{\varphi_{n-2}}{y f_y'} = \frac{1}{x} + \ldots,$$

avendo dunque per residuo 1.

Similmente per calcolare il residuo nell'intorno di $x=1$ occorre scrivere

$$f(xy) = (x-1+1)(x-1)\{a'_0 + a'_1(x-1) + \ldots\} + \\ + y\{b'_0 + b'_1(x-1) + \ldots\}$$

$$\varphi_{n-2}(xy) = a'_0 + a'_1(x-1) + \ldots + y\{d'_0 + d'_1(x-1) + \ldots\},$$

sicchè risulta

$$y = -\frac{a'_0(x-1)}{b'_0} + \ldots$$

con ciò il denominatore del nostro integrando diviene

$$y f_y' = y(b'_0 + b'_1(x-1) + \ldots) = -a'_0(x-1) + \ldots,$$

e il numeratore

$$\varphi_{n-2}\{x,\ y(x)\} = a'_0 + \ldots .$$

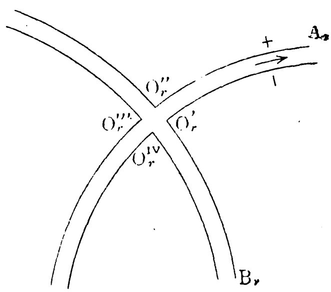
Quindi lo sviluppo in serie dell'integrando sarà

$$\frac{\varphi_{n-2}}{y f'_y} = \frac{a'_0 + \ldots}{-a'_0(x-1) + \ldots} = \frac{-1}{(x-1)} + \ldots,$$

e così l'integrando appare avere in $x = 1$ il residuo -1.

19. **Premesse topologiche.** — Allo sviluppo dell'argomento che dobbiamo trattare nei paragrafi seguenti è necessario premettere alcune semplici considerazioni topologiche, che riprendono, e completano per quanto qui occorre, quelle svolte nel L. II, § 37 (vol. 1°, pag. 334).

Consideriamo dunque la riemanniana Σ della curva $f(xy) = 0$ di genere p, e supponiamola realizzata da una sfera con p manichi (il cosidetto p-toro). Su ogni manico anulare possiamo considerare un meridiano A e un parallelo B. Abbiamo così sulla Σ $2p$-cicli fondamentali, A_r e B_r $(r = 1, 2 \ldots p)$, che prendono il nome di *retrosezioni*: le retrosezioni relative a un medesimo manico si dicono *coniugate*: esse hanno in comune un punto, O_r.

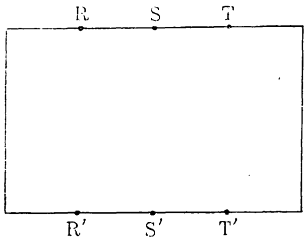


Tagliamo la superficie Σ lungo le p coppie di retrosezioni: otteniamo una sfera con p fori, e nell'orlo di ciascuno di questi possiamo distinguere 4 lati, che provengono, a coppie di lati opposti, dai due bordi di ciascuna retrosezione, e terminano a quattro punti O'_r, O''_r, O'''_r, O^{IV}_r, che provengono dal punto O_r comune alle due retrosezioni coniugate.

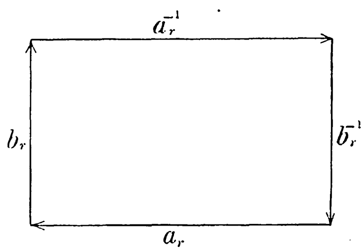
La figura mostra le due retrosezioni, nell'intorno di O_r sulla Σ, dove i bordi dei tagli sono già lievemente divaricati, in modo da mettere in luce i quattro punti suddetti.

Dunque i fori della suddetta sfera, possono essere resi rettangolari, per modo che i lati opposti di ciascun rettangolo rappresentino i due orli di una medesima retrosezione.

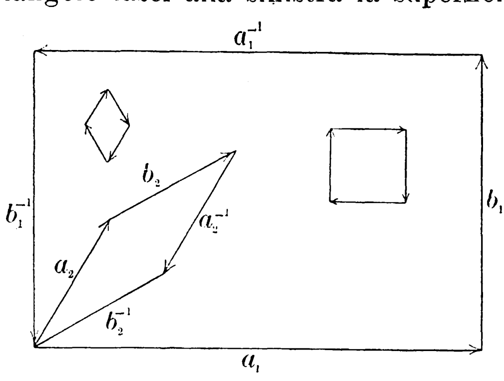
Consideriamo uno di questi fori rettangolari, e la coppia di retrosezioni corrispondenti: se un punto descrive il rettangolo, orlo del foro, nel solito senso positivo, il corrispondente punto, su Σ, descriverà due volte ciascuna retrosezione, e precisamente due volte in senso inverso; è chiaro infatti che, sopra Σ, un punto che percorra in un dato senso la retrosezione A_r (o B_r) lascia alla sua destra la superficie prossima a un orlo e alla sinistra quella prossima all'altro, mentre chi percorra l'orlo rettangolare lascia sempre la superficie da una medesima parte.



Allo stesso risultato si arriva anche osservando che i punti dei due lati opposti del rettangolo che provengono da un medesimo punto della corrispondente retrosezione, sono quelli, fronteggiantisi (cioè simmetrici rispetto alla congiungente i punti medi degli altri due lati) come, nella figura, i punti R e R', S e S', T e T'; sicchè i due sensi RST e $R'S'T'$ opposti sul contorno del rettangolo, risultano uguali sulla retrosezione.



Pertanto indicheremo con a_r e b_r due lati consecutivi del rettangolo, corrispondenti alle retrosezioni A_r e B_r, e con a_r^{-1} e b_r^{-1} i lati opposti: tutti questi lati s'intendono orientati in modo che chi percorre il rettangolo lasci alla sinistra la superficie, cioè, essendo questa esterna al rettangolo, nel senso orario. *Sopra la Σ considereremo come senso positivo della retrosezione quello che corrisponde ai lati così orientati.*



Il precedente modello della riemanniana di $f(xy)=0$, cioè la sfera con p fori rettangolari, deve essere modificato. Allargando uno dei fori rettangolari, e stendendo la sfera su di un piano, si arriva ad un rettangolo con $p-1$ fori rettangolari.

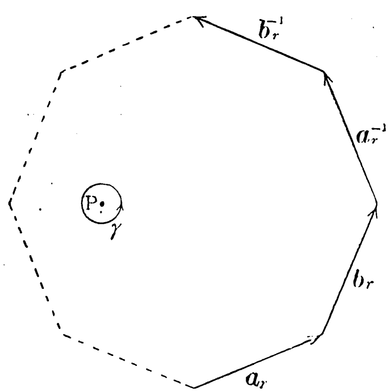
Si deformano ora successivamente i $p-1$ fori rettangolari facendo sì che il loro primo vertice vada a cadere nel primo vertice del rettangolo-contorno (vedi figura a pag. prec.).

Ridistendendo il perimetro di questi si arriva, in fine, a un poligono di $4p$ lati

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1};$$

questo è il modello, R, *della riemanniana* della curva f al quale ci riferiamo.

La deformazione eseguita equivale a far passare le retrosezioni tutte per un medesimo punto O, che viene così a corrispondere a tutti i $4p$ vertici del poligono.



In ogni punto P del poligono R è rappresentato un punto della curva $f(xy) = 0$, cioè una coppia di valori x e y; a un cerchietto infinitesimo γ, avvolgente questo punto P corrisponde un cerchietto infinitesimo γ' descritto da x nel piano rappresentativo di questa variabile complessa. Prendiamo come senso positivo di γ quello che dà γ' percorso positivamente, e quindi orientiamo il contorno, l, del poligono R, secondo il senso positivo di γ. Ribaltando, eventualmente, il poligono R intorno ad una retta del suo piano, potremo anche supporre che il verso positivo di l (e di γ) sia quello abituale (antiorario) indicato nella figura.

Come già per il modello dato dalla sfera con p fori rettangolari, ogni lato a_r, b_r, a_r^{-1} e b_r^{-1} equivale, anche per il verso, alla corrispondente retrosezione A_r, B_r, A_r^{-1} e B_r^{-1}; ciò significa, come si è detto, che per ogni retrosezione A_r e B_r è assunto quale verso positivo quello che corrisponde al verso positivo di a_r e b_r. Nella figura abbiamo messo in evidenza una sola (delle p) quaterna di lati: ciò perchè essa è rappresentativa di tutte le altre.

20. Periodi degli integrali di prima specie. — Consideriamo un particolare integrale di prima specie

$$u = \int \frac{\varphi_{n-3}}{f_y'}\, dx$$

che non si riduca a una costante. Mettiamone in evidenza la parte reale e la parte immaginaria, scrivendo

$$u = \xi + i\eta$$

dove dunque ξ e η sono numeri reali.

Fissato ora un punto del poligono R (cioè della curva $f(xy) = 0$) come origine dei cammini di integrazione, u risulta funzione univoca finita e regolare per tutti i punti rappresentati dal poligono R, intendendo i cammini d'integrazione tutti continui entro R (cioè, sulla f, non attraversanti le retrosezioni). Chiarito ciò, dimostriamo la *fondamentale*.

Disuguaglianza di Riemann

(1) $$\int_l \xi\, d\eta > 0.$$

A tale scopo immaginiamo il poligono R diviso in parti, ad esempio, mediante un reticolato di rette parallele e perpendicolari ad una qualunque direttrice. Indichiamo con σ_i ciascuna di queste parti, e con s_i il relativo contorno. È anzitutto ovvio che

$$\int_l \xi\, d\eta = \Sigma \int_{s_i} \xi\, d\eta.$$

Ora, nel piano della variabile complessa u, al contorno s_i corrisponde una linea s'_i, che — qualora sia semplice, cioè (chiusa) senza nodi — include un'area che corrisponde all'area σ_i: è poi chiaro (e notissimo) che l'integrale

$$\int_{s_i} \xi\, d\eta$$

quando il punto $(\xi\eta)$ varia lungo la linea s'_i, rappresenta l'area σ_i, e precisamente tale area presa come positiva quando s_i sia percorso positivamente.

Ora è ovvio che, essendo la u uniforme e regolare in tutto R, quando la divisione di R è fatta in parti di dimensioni abbastanza piccole, le linee s'_i riescono effettivamente senza nodi. Inoltre alle linee chiuse infinitesime del poligono R, percorse positivamente, corrispondono, nel piano della variabile complessa x, linee percorse ancora positivamente, e quindi anche linee percorse positivamente nel piano della u, che è funzione analitica di x.

Segue dunque che anche le s'_i sono percorse positivamente, e quindi

$$\int_{s'_i} \xi \, d\eta = \int_{s_i} \xi \, d\eta > 0 ;$$

perciò anche

$$\int_{l} \xi \, d\eta = \Sigma \int_{s_i} \xi \, d\eta > 0 .$$

Dalla disuguaglianza di Riemann consegue una analoga disuguaglianza relativa ai periodi.

Indichiamo con

$$\omega_r \text{ e } \omega'_r \qquad (r = 1, 2 \ldots p)$$

i periodi di u relativi ai cicli A_r e B_r, cioè i valori dell'integrale u calcolato lungo tali cicli

$$\omega_r = \int_{A_r} \frac{\varphi_{n-3}}{f_y'} dx ; \quad \omega'_r = \int_{B_r} \frac{\varphi_{n-3}}{f_y'} dx .$$

E si noti, che le scritture

$$\int_{A_r} \frac{\varphi_{n-3}}{f_y'} dx \quad \text{e} \quad \int_{a_r} \frac{\varphi_{n-3}}{f_y'} dx$$

dove a_r è un lato del poligono R, rappresentano esattamente la medesima cosa, e così dicasi per i cicli B_r e i lati b_r. Si ha invece, evidentemente

$$\int_{a_r^{-1}} \frac{\varphi_{n-3}}{f_y'} dx = - \omega_r$$

$$\int_{b_r^{-1}} \frac{\varphi_{n-3}}{f_y'} dx = - \omega'_r .$$

Poniamo ora, distinguendo nei periodi la parte reale e la parte immaginaria:

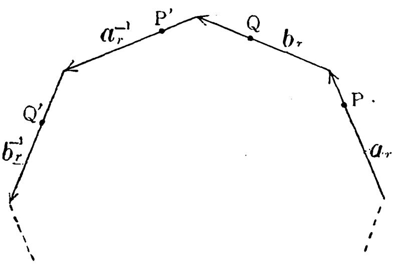
$$\omega_r = \alpha_r + i \, \beta_r$$
$$\omega'_r = \alpha'_r + i \, \beta'_r .$$

Calcoliamo l' integrale

$$\int_{l} \xi \, d\eta$$

che sappiamo essere essenzialmente positivo.

A tale scopo valutiamo l' incremento che a detto integrale porta una quaterna $a_r b_r a_r^{-1} b_r^{-1}$ di lati consecutivi di R. Per ciò consideriamo due punti corrispondenti P e P' di a_r e a_r^{-1} (cioè rappresentanti un medesimo punto della f): si passa da P a P' percorrendo un ciclo omologo a b_r, lato che appunto collega a_r ad a_r^{-1}: segue



$$u(P') = u(P) + \omega_r'.$$

Similmente se Q e Q' sono due punti corrispondenti di b_r e b_r^{-1} risulta

$$u(Q') = u(Q) - \omega_r$$

in quanto si passa da Q e Q' percorrendo un ciclo omologo a $-a_r$, lato che appunto collega b_r a b_r^{-1}.

Di qui risulta

$$\xi(P') = \xi(P) + \alpha_r'$$
$$\xi(Q') = \xi(Q) - \alpha_r.$$

È poi ovvio che nei punti corrispondenti di a_r e a_r^{-1}, b_r e b_r^{-1} i valori del differenziale du, e quindi di $d\eta$, sono uguali e di segno contrario. Segue che è

$$\int_{a_r} \xi\, d\eta + \int_{a_r^{-1}} \xi\, d\eta = \int_{a_r} \{\xi - (\xi + \alpha_r')\} d\eta = -\alpha_r' \int_{a_r} d\eta = -\alpha_r'\beta_r.$$

Similmente

$$\int_{b_r} \xi\, d\eta + \int_{b_r^{-1}} \xi\, d\eta = \int_{b_r} \{\xi - (\xi - \alpha_r)\} d\eta = \alpha_r \int_{b_r} d\eta = \alpha_r \beta'_r.$$

Sicchè il contributo della suddetta quaterna di lati è

$$\alpha_r \beta_r' - \alpha_r' \beta_r.$$

In definitiva

(2) $$\int_l \xi\, d\eta = \Sigma(\alpha_r \beta_r' - \alpha_r' \beta_r).$$

Segue la *disuguaglianza fra i periodi* che avevamo in vista:

(3) $$\Sigma(\alpha_r \beta_r' - \alpha_r' \beta_r) > 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots p).$$

21. Integrali normali di prima specie. — Dalla disuguaglianza

(1) $$\Sigma(\alpha_r \beta_r' - \alpha_r' \beta_r) > 0$$

relativa ai periodi, stabilita nel paragrafo precedente, derivano due importanti conseguenze.

Anzitutto: *un integrale abeliano di prima specie* (che non sia una costante) *non può aver nulli i periodi relativi a tutte le retrosezioni* A_r (o alle B_r). Qualora infatti risultasse

$$\omega_r = \alpha_r + i\beta_r = 0 \qquad \text{per } r = 1, 2 \ldots p,$$

sarebbe

$$\alpha_r = \beta_r = 0,$$

e ne deriverebbe

$$\Sigma(\alpha_r \beta_r' - \alpha_r' \beta_r) = 0,$$

contro la (1).

Similmente non può essere contemporaneamente

$$\alpha_r = \alpha_r' = 0 \qquad \text{per } r = 1, 2 \ldots p$$

oppure

$$\beta_r = \beta_r' = 0 \qquad \text{per } r = 1, 2 \ldots p,$$

cioè *non può darsi che tutti i* 2p *periodi dell'integrale* u *siano reali o immaginari puri.*

Segue da ciò l'*esistenza di un integrale di prima specie,* ben determinato (a meno della solita costante addittiva) per il quale siano date *ad arbitrio le parti reali* α_r e α_r' *dei* $2p$ *periodi.*

Consideriamo infatti un sistema di p integrali abeliani di prima specie linearmente indipendenti

$$u_1\, u_2 \ldots u_p,$$

e indichiamo con

$$\begin{cases} \omega_{sr} = \alpha_{sr} + i\beta_{sr} \\ \omega_{sr}' = \alpha_{sr}' + i\beta_{sr}' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2 \ldots p \\ r = 1, 2 \ldots p \end{pmatrix}$$

i periodi di u_s relativi ai cicli A_r e B_r.

Formiamo una combinazione lineare degli integrali u_s:

$$u = \Sigma \lambda_s u_s,$$

e nei parametri λ_s mettiamo in evidenza le parti reali e immaginarie scrivendo

$$\lambda_s = \mu_s + i\nu_s \qquad (\mu \text{ e } \nu \text{ reali}).$$

Con ciò i periodi ω_r e ω_r' dell'integrale u risultano dati da

$$\omega_r = \sum \lambda_s \omega_{sr} = \sum_s (\mu_s \alpha_{sr} - \nu_s \beta_{sr}) + i \sum_s (\mu_s \beta_{sr} + \nu_s \alpha_{sr})$$

$$\omega_r' = \sum \lambda_s \omega_{sr}' = \sum_s (\mu_s \alpha_{sr}' - \nu_s \beta_{sr}') + i \sum_s (\mu_s \beta_{sr}' + \nu_s \alpha_{sr}'.)$$

Possiamo imporre la condizione che le parti reali di questi periodi abbiano valori assegnati α_s e α_r': si ha così il sistema

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum_s (\mu_s \alpha_{sr} - \nu_s \beta_{sr}) = \alpha_r \\ \sum_s (\mu_s \alpha_{sr}' - \nu_s \beta_{sr}') = \alpha_r' \end{cases} \qquad (r = 1, 2 \dots p).$$

Questo è un sistema di $2p$ equazioni lineari non omogenee rispetto alle $2p$ incognite μ_s e ν_s, e vale effettivamente a determinare le incognite stesse e quindi i p parametri λ_s; così che riesce anche determinato l'integrale

$$u = \Sigma \lambda_s u_s = \Sigma(\mu_s + i\nu_s) u_s,$$

i cui periodi debbano avere le parti reali assegnate. Infatti il sistema anzidetto è un sistema normale, per il quale riesce diverso da zero il determinante dei coefficienti delle incognite, come è facile provare. Invero, ove tale determinante fosse nullo, risulterebbe possibile il sistema delle $2p$ equazioni omogenee:

$$\begin{cases} \sum_s (\mu_s \alpha_{sr} - \nu_s \beta_{sr}) = 0 \\ \sum_s (\mu_s \alpha_{sr}' - \nu_s \beta_{sr}') = 0 \end{cases}$$

cioè esisterebbe un integrale

$$u = \Sigma \lambda_s u_s = \Sigma(\mu_s + i\nu_s) u_s$$

con periodi immaginari puri.

In modo simile si riesce a ricavare un'altra conseguenza, che è anche più importante.

Esiste un integrale di prima specie, ben determinato (a meno di una costante addittiva) per cui siano *dati ad arbitrio i periodi relativi ai cicli* A_r (RIEMANN).

Riferendoci ancora ai p integrali, linearmente indipendenti, $u_1 u_2 \dots u_p$, consideriamo la tabella dei loro periodi di cui non ci importa più distinguere le parti reali dalle immaginarie:

$$\begin{array}{cccccccc} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1p} & \omega_{11}' & \omega_{12}' & \dots & \omega_{1p}' \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2p} & \omega_{21}' & \omega_{22}' & \dots & \omega_{2p}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{pp} & \omega_{p1}' & \omega_{p2}' & \dots & \omega_{pp}'. \end{array}$$

Riconosciamo anzitutto che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{pp} \end{vmatrix}$$

risulta diverso da 0.

Infatti, qualora fosse $\Delta = 0$, si potrebbero determinare p parametri

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p$$

tali che soddisfino il sistema delle p equazioni lineari omogenee

(3) $$\sum_s \lambda_s \omega_{sr} = 0 \qquad (r = 1, 2 \dots p)$$

e si avrebbe, di conseguenza, un integrale

$$u = \sum_s \lambda_s u_s$$

per cui sarebbero nulli i periodi relativi ai p cicli A_r.

La circostanza $\Delta \neq 0$ permette di risolvere il sistema di p equazioni lineari non omogenee:

(4) $$\sum_s \lambda_s \omega_{sr} = \sigma_r \qquad (r = 1, 2 \dots p),$$

dove le σ_r abbiano valori (reali o complessi) arbitrari, ma non tutti reali. Conseguentemente resta determinato un integrale

$$u = \sum_s \lambda_s \omega_{sr}$$

avente lungo i cicli A_r i periodi σ_r prefissati ad arbitrio

In particolare esisterà un integrale per cui

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 \dots = \sigma_p = 0,$$

e similmente un secondo integrale per cui sia

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \sigma_4 \ldots = \sigma_p = 0$$

e via dicendo.

Si arriva così a costruire un sistema di p integrali, che chiamiamo

$$u_1 u_2 \ldots u_p$$

tali che u_s ha il periodo 1 per il ciclo A_s e il periodo 0 per le altre retrosezioni A; i periodi di u_s relativi ai cicli $B_1 B_2 \ldots B_p$ li indichiamo con

$$\tau_{s1} \tau_{s2} \ldots \tau_{sp}.$$

Pertanto il sistema dei p integrali così costruiti dà luogo alla seguente tabella di periodi

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1p} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \ldots & \tau_{pp}. \end{array} \right.$$

È ovvio che questi p integrali sono fra loro linearmente indipendenti: essi costituiscono i *p integrali normali di prima specie.*

La matrice dei periodi (5) gode di due proprietà molto importanti per il seguito:

Anzitutto *la matrice quadrata dei periodi* τ_{rs} (relativi ai cicli B) *è simmetrica rispetto alla diagonale principale,* cioè:

$$(6) \qquad \tau_{rs} = \tau_{sr}.$$

Per dimostrare questa proprietà si considerino i due integrali normali u_r e u_s e si calcoli l'integrale

$$\int_l u_r \, du_s$$

integrale esteso dunque al contorno del poligono R a $4p$ lati, immagine della riemanniana della curva fondamentale. Questo integrale si calcola allo stesso modo con cui già calcolammo l'integrale $\int_l \xi \, d\eta$.

Indichiamo con ω_{rh} e ω_{sh} i periodi di u_r e u_s relativi al ciclo generico A_h.

Avremo allora, formula analoga alla (2) del paragrafo precedente:

$$\int_l u_r\, du_s = \sum_h (\omega_{rh}\tau_{sh} - \omega_{sh}\tau_{rh}). \tag{7}$$

Ma, per il teorema di CAUCHY,

$$\int_l u_r\, du_s = \int_l u_r \frac{du_s}{dx}\, dx = 0$$

in quanto l'integrando $u_r \dfrac{du_s}{dx}$ possiede, entro il poligono R di cui l è il contorno, singolarità polari il cui residuo è nullo. Segue la *relazione di uguaglianza di* RIEMANN:

$$\sum_h (\omega_{rh}\tau_{sh} - \omega_{sh}\tau_{rh}) = 0 \tag{7'}$$

valida qualunque siano gli integrali, anche non normali, u_r e u_s. Nel nostro caso particolare di integrali normali si ha:

$$\begin{aligned} &\omega_{rh} = 1 \quad \text{per} \quad h = r; \qquad \omega_{rh} = 0 \quad \text{per} \quad h \neq r;\\ &\omega_{sh} = 1 \quad \text{per} \quad h = s; \qquad \omega_{sh} = 0 \quad \text{per} \quad h \neq s. \end{aligned}$$

e la relazione di RIEMANN si riduce a $\tau_{rs} - \tau_{sr} = 0$, cioè appunto:

$$\tau_{rs} = \tau_{sr}$$

come volevamo dimostrare.

In secondo luogo, *distinguiamo* nei periodi τ_{rs} le *parti reali* dalle *immaginarie*:

$$\tau_{rs} = \tau'_{rs} + i\tau''_{rs},$$

e consideriamo *la forma quadratica*

$$\sum_{rs} \tau''_{rs} x_r x_s$$

dove x_r *e* x_s *sono numeri reali*: questa forma quadratica risulta *essenzialmente positiva*, cioè:

$$\sum_{rs} \tau''_{rs} x_r x_s > 0 \tag{8}$$

qualunque siano i valori, non tutti nulli, dati ai p numeri reali

$$x_1 x_2 \dots x_p .$$

Infatti si consideri l'integrale

$$u = \Sigma x_s u_s ,$$

ed applichiamo ad esso la disugliauza (1)

$$\Sigma(\alpha_r \beta_r' - \alpha_r' \beta_r) > 0.$$

Ora qui è

$$\begin{aligned} \alpha_r &= x_r \\ \beta_r' &= \Sigma x_s \tau''_{sr} \\ \alpha_r' &= \Sigma x_s \tau'_{sr} \\ \beta_r &= 0. \end{aligned}$$

Risulta dunque

$$\sum_r (\alpha_r \beta_r' - \alpha_r' \beta_r) = \sum_{rs} x_r x_s \tau''_{sr}$$

e, in definitiva si ha la disuguaglianza

$$\Sigma x_r x_s \tau''_{sr} > 0$$

che coincide con la (8).

Talvolta, e a noi ciò accadrà nel Cap. III a proposito delle funzioni θ, si assumono come *integrali normali di prima specie* i precedenti moltiplicati per πi; allora questi dànno luogo alla nuova tabella di periodi:

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \pi i & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{array} \right.$$

ed è

$$a_{rs} = \pi i \tau_{rs}$$

Ancora la *matrice* delle a_{rs} risulta *simmetrica*; inoltre le parti reali delle a_{rs}, diciamo a'_{rs}, dànno luogo a una *forma quadratica essenzialmente negativa*:

$$\Sigma a'_{rs} x_r x_s < 0. \tag{9}$$

Ciò segue subito dalla (8) osservando che è

$$a'_{rs} = \pi i (i \tau''_{rs}) = - \pi \tau''_{rs}$$

e quindi

$$\Sigma a'_{rs}\, x_r x_s = -\pi \Sigma a''_{rs}\, x_r x_s .$$

Aggiungasi che non possono tutte le a_{rs} di una stessa linea risultare immaginarie pure, chè altrimenti si avrebbe un integrale dotato di tutti periodi puramente immaginari.

22. Integrali elementari normali di seconda specie. — Veniamo ora a costruire gli *integrali normali di seconda specie.*

Sia v_0 un integrale elementare di seconda specie, dotato di una sola singolarità polare in un punto assegnato O. Esso avrà certi periodi che non ci importa indicare, relativi ai cicli A_r e B_r. Combinando linearmente questo v_0 con i p integrali normali di prima specie, arriveremo ad un integrale

$$v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$$

il quale, ove si diano alle λ valori convenienti, ha nulli tutti i p periodi relativi ai cicli A_r, e ha, inoltre, in O, una singolarità polare con residuo 1. Ed è chiaro come questo integrale v sia univocamente determinato (all'infuori di una costante addittiva) dalle condizioni poste: questo è l'*integrale elementare normale di seconda specie*, dotato del *polo* O.

Vogliamo ora determinare i periodi

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \ldots \quad \sigma_p$$

relativi ai cicli $B_1 B_2 \ldots B_p$ del nostro integrale normale v.

A tale scopo calcoliamo l'integrale

$$\int_l v\, du_s = \int_l v \frac{du_s}{dx}\, dx .$$

Qui notiamo che l'integrando

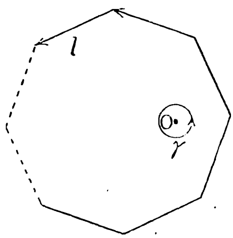
$$v \frac{du_s}{dx}$$

avrà nell'interno del poligono R, di cui l è il contorno, la sola singolarità O, con un residuo ρ_s uguale al valore dell'integrando di prima specie $\Phi_s = \dfrac{du_s}{dx}$ calcolato nel punto O

stesso (e ciò in quanto il residuo di v è 1):

$$\rho_s = \Phi_s(O).$$

Indichiamo con γ un cerchietto infinitesimo avvolgente il punto singolare O: sarà, per il teorema di CAUCHY:



$$\int_l v\, du_s = \int_\gamma v\, du_s,$$

e quest' ultimo integrale ha, evidentemente, il valore $2\pi i \rho_s$: dunque:

$$\int_l v\, du_s = 2\pi i \rho_s.$$

D' altra parte questo integrale si ottiene con una formula del tutto simile alla (7) del § prec. dove in luogo dei periodi di u_r entrano in giuoco i periodi di v. Ricordando che i periodi di v relativi ai cicli A_r sono nulli, resta

$$(1) \qquad \int_l v\, du_s = -\sigma_s$$

cioè risulta:

$$\sigma_s = -2\pi i \rho_s = -2\pi i \Phi_s(O):$$

In parole: *i periodi dell' integrale elementare normale di seconda specie, con un polo O, relativi alle retrosezioni B_s, sono uguali ai valori che hanno i corrispondenti integrandi di prima specie nel polo O, moltiplicati per la costante numerica $-2\pi i$.*

23. **Integrali elementari normali di terza specie.** — Si consideri un qualunque integrale elementare di terza specie, che abbia due singolarità logaritmiche in due punti O_1 e O_2 (i cui periodi logaritmici saranno uguali e di segno contrario): sia esso w_0; questo integrale w_0 avrà certi periodi, che non ci importa indicare, relativi ai cicli A_r e B_r. Combiniamo linearmente w_0 con i p integrali normali di prima specie; arriveremo ad un integrale

$$w = \lambda_0 w_0 + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$$

il quale, ove si diano alle λ valori convenienti, ha nulli tutti i p periodi relativi ai cicli A_r, e ha inoltre, in O_1 e in O_2, due singolarità logaritmiche con periodi logaritmici $2\pi i$ e $-2\pi i$.

È chiaro che questo integrale w è univocamente determinato (all'infuori di una costante addittiva) dalle condizioni poste: questo è l'***integrale elementare normale di terza specie*** relativo ai ***due punti logaritmici*** O_1 e O_2 (successivamente considerati).

Vogliamo ora determinare i periodi

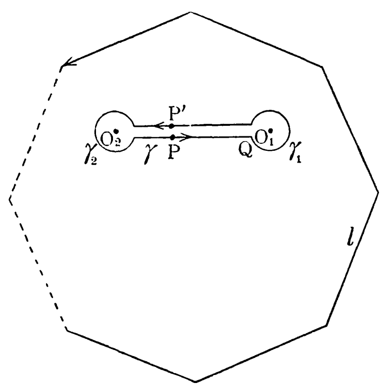
$$\vartheta_1 \; \vartheta_2 \; \dots \; \vartheta_p$$

relativi ai cicli $B_1 \, B_2 \dots B_p$ del nostro integrale normale di terza specie w.

A tale scopo calcoliamo l'integrale

$$\int\limits_l w \, du_s = \int\limits_l w \frac{du_s}{dx} \, dx.$$

L'integrando $w \dfrac{du_s}{dx}$ ha nell'interno del poligono R, di cui l è il contorno, le sole singolarità O_1 e O_2, singolarità logaritmiche con periodi uguali e di segno contrario; sarà quindi uniforme entro il poligono R cui si tolga la parte interna ad una linea γ composta di un doppio cappio che va ai punti O_1 e O_2, composta cioè di un cerchio infinitesimo (grande nella figura, per necessità tipografiche) γ_1 avvolgente il punto O_1, di un secondo cerchio infinitesimo γ_2 avvolgente il punto O_2, e di una linea, percorsa due volte, che congiunge i punti O_1 e O_2. La linea γ immaginata percorsa a partire dal punto Q della figura risulta:



$$\gamma = \gamma_1 + O_1O_2 + \gamma_2 + O_2O_1 .$$

Sarà dunque anzitutto

$$\int\limits_l w \, du_s = \int\limits_\gamma w \, du_s ,$$

e quindi anche

$$\int_l w\,du_s = \int_{\gamma_1} w\,du_s + \int_{\gamma_2} w\,du_s + \int_{O_2}^{O_1} w\,du_s + \int_{O_1}^{O_2} w\,du_s .$$

Ora gli integrali relativi a γ_1 e a γ_2 si calcolano subito integrando per parti: essendo

$$\int w\,du_s = w\,u_s - \int u_s dw$$

risulta

$$\int_{\gamma_1} w\,du_s = \text{variazione di } w\,u_s \text{ lungo } \gamma_1 - \int_{\gamma_1} u_s dw =$$

$$= u_s(O_1) 2\pi i - u_s(O_1) 2\pi i = 0.$$

Similmente

$$\int_{\gamma_2} w\,du_s = 0.$$

Notiamo poi che in due punti, quali P e P', fronteggiantisi sulla linea $O_1 O_2$ è

$$w(P') = w(P) + 2\pi i,$$

in quanto il periodo logaritmico di w per un giro intorno ad O_1 vale $2\pi i$; inoltre nei tratti corrispondenti descritti da P e da P', sulla linea $O_1 O_2$ e sulla linea $O_2 O_1$ è il du_s uguale e di segno contrario; pertanto

$$\int_{O_1}^{O_2} w\,du_s + \int_{O_2}^{O_1} w\,du_s = \int_{O_2}^{O_1} w(P) du_s - \int_{O_2}^{O_1} [w(P) + 2\pi i] du_s =$$

$$= -2\pi i \int_{O_2}^{O_1} du_s = -2\pi i \{ u_s(O_1) - u_s(O_2) \} .$$

D'altra parte, per l'integrale di terza specie normale w si ha la formula, analoga alla (1) del paragrafo precedente, ed ugualmente ottenibile:

$$(1) \qquad \int_l w\,du_s = -\theta_s ;$$

si deduce

$$\theta_s = 2\pi i \{ u_s(O_1) - u_s(O_2) \}.$$

In parole: *i periodi dell'integrale normale di terza specie, con due singolarità logaritmiche O_1 e O_2, relativi alle retrosezioni B_s, sono uguali alla differenza dei valori assunti dal corrispondente integrale di prima specie nei punti O_1 e O_2, moltiplicata per la costante numerica* $2\pi i$ (RIEMANN).

24. Espressione delle funzioni razionali per integrali di seconda specie: Teorema di Rieman-Roch. — Come già abbiamo accennato nel caso ellittico, una funzione razionale

$$\varphi(xy)$$

dei punti di una curva algebrica $f(xy) = 0$, può esprimersi mediante gli integrali elementari normali di seconda o di terza specie; e così si ottengono delle espressioni notevoli che permettono di stabilire, rispettivamente, il teorema di RIEMANN-ROCH e il teorema di ABEL.

Si consideri dunque una funzione razionale $\varphi(xy)$ che abbia certi poli

$$O_1\, O_2\, \ldots\, O_n,$$

coi residui rispettivi

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \ldots\, \lambda_n.$$

Si indichino con

$$v_1\, v_2\, \ldots\, v_n$$

gli integrali elementari normali di seconda specie definiti dai poli $O_1 O_2 \ldots O_n$; la differenza

$$\varphi(xy) - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n),$$

mancando di singolarità sulla riemanniana di f, sarà un integrale di prima specie, combinazione lineare dei p integrali normali e della costante:

$$\varphi(xy) - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ldots + \lambda_n v_n) = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 \ldots + \mu_p u_p + c.$$

Ma poichè la differenza considerata ha nulli i periodi relativi ai cicli A_s, si deduce

$$\mu_1 = \mu_2 \ldots = \mu_p = 0$$

e quindi *la funzione razionale si esprime per gli integrali elementari normali di seconda specie cogli stessi poli:*

$$(1) \qquad \varphi(xy) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n + c.$$

Ora il periodo di φ lungo ciascun ciclo B_s è nullo, quindi altrettanto deve accadere per

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n .$$

Come sappiamo, il periodo di ciascun v_r relativo al ciclo B_s è dato da

$$-2\pi i \Phi_s(O_r),$$

essendo Φ_s l's-mo integrando di prima specie e O_r il polo relativo a v_r: segue che per ogni ciclo B_s è

$$\lambda_1 \{-2\pi i \Phi_s(O_1)\} + \lambda_2 \{-2\pi i \Phi_s(O_2)\} + \ldots + \lambda_n \{-2\pi i \Phi_s(O_n)\} = 0,$$

cioè sussistono le p relazioni, ottenute dividendo per $-2\pi i$:

$$(2) \qquad \lambda_1 \Phi_s(O_1) + \lambda_2 \Phi_s(O_2) \ldots + \lambda_n \Phi_s(O_n) = 0 \qquad [s = 1, 2 \ldots p].$$

Supponiamo ora $n \geq p$ e che le p relazioni scritte siano indipendenti; ciò significa che i parametri λ soddisfano a p equazioni, e quindi la (1) indica che le funzioni razionali $\varphi(xy)$ aventi su f un determinato gruppo di n poli, dipendono, al massimo, da $n - p + 1$ costanti essenziali, che si riducono a $n - p$ ove non si voglia considerare la costante moltiplicativa che può esser data a coefficiente di φ. Ma è ovvio che qualunque sistema di λ soddisfacenti le equazioni (2) dànno una funzione φ rappresentata dalla (1) che è effettivamente razionale. Dunque, sempre nell'ipotesi dell'indipendenza delle p relazioni (2), gli n punti $O_1 O_2 \ldots O_n$ risultano definire una g_n^{n-p} completa.

Questo risultato si può completare pervenendo esattamente al teorema di Riemann-Roch (cfr. libro V, § 17, vol. III, pag. 137).

Pongasi dunque che il sistema (2) non sia di equazioni indipendenti ed anche possa essere $n < p$, per modo che la caratteristica della matrice si riduca da p, quale è in generale, a $p - i$. Questo numero intero i, da non confondersi con la $\sqrt{-1}$, è l'***indice di specialità*** del gruppo degli n punti $O_1 O_2 \ldots O_n$, come risulterà dal seguito. Essendo dunque $p - i$ la caratteristica del sistema delle equazioni (2), queste ammettono $n - p + i$ soluzioni linearmente indipendenti, e le funzioni φ, linearmente indipendenti, risultano $n - p + i + 1$ o $n - p + i$, se si trascura la costante moltiplicativa: il gruppo degli n-poli $O_1 O_2 .. O_n$ definisce dunque una g_n^{n-p+i} completa.

Si tratta di vedere il significato geometrico del numero i che entra nella valutazione della caratteristica della matrice dei coefficienti della (2), matrice che qui riscriviamo

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} \Phi_1(O_1) & \Phi_1(O_2) & \dots & \Phi_1(O_n) \\ \Phi_2(O_1) & \Phi_2(O_2) & \dots & \Phi_2(O_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_p(O_1) & \Phi_p(O_2) & \dots & \Phi_p(O_n). \end{array} \right.$$

Si consideri il sistema di equazioni che risulta scambiando le linee con le colonne:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1\Phi_1(O_1) + \mu_2\Phi_2(O_1) + \dots + \mu_p\Phi_p(O_1) = 0 \\ \mu_1\Phi_1(O_2) + \mu_2\Phi_2(O_2) + \dots + \mu_p\Phi_p(O_2) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_1\Phi_1(O_n) + \mu_2\Phi_2(O_n) \quad \dots + \mu_p\Phi_p(O_n) = 0. \end{array} \right.$$

Siccome ogni integrando di prima specie, Φ_s, è il quoziente di un polinomio aggiunto d'ordine $n-3$, $\varphi_{n-3}^{(s)}$ diviso per la $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\Phi_s(xy) = \varphi_{n-3}^{(s)}(xy) \Big| \frac{\partial f(xy)}{\partial y}$$

il sistema (4) è equivalente al sistema:

$$(4') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1\varphi_{n-3}^{(1)}(O_1) + \mu_2\varphi_{n-3}^{(2)}(O_1) + \dots + \mu_p\varphi_{n-3}^{(p)}(O_1) = 0 \\ \mu_1\varphi_{n-3}^{(1)}(O_2) + \mu_2\varphi_{n-3}^{(2)}(O_2) + \dots + \mu_p\varphi_{n-3}^{(p)}(O_2) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_1\varphi_{n-3}^{(1)}(O_n) + \mu_2\varphi_{n-3}^{(2)}(O_n) + \dots + \mu_p\varphi_{n-3}^{(p)}(O_n) = 0. \end{array} \right.$$

Infatti ognuna di queste equazioni risulta dalla corrispondente del sistema (4) moltiplicando per la $\frac{\partial f}{\partial y}$ calcolata nei punti O_1, $O_2 \dots O_n$, e, per un orientamento degli assi, si può supporre che questi moltiplicatori siano diversi da zero.

Ora ciascuna di queste equazioni (4′) esprime l'esistenza di una aggiunta d'ordine $n-3$ passante, rispettivamente, per uno dei punti $O_1 O_2 \dots O_n$; pertanto l'essere $p-i$ la caratteristica della matrice del sistema (4′) significa che esistono $p-(p-i)=i$ curve aggiunte, d'ordine $n-3$, linearmente indipendenti che passano per tutti gli n punti $O_1 O_2 \dots O_n$, per modo che i risulta appunto l'indice di specialità.

Si conclude in tal modo, per via trascendente (come nella dimostrazione originale di RIEMANN, completata da ROCH pel caso speciale) il

TEOREMA DI RIEMANN-ROCH: *Sopra una curva* $f(xy)=0$ *di genere* p, *un gruppo di* n *punti definisce una* g_n^{n-p+i} *completa, essendo* i *il numero delle curve aggiunte linearmente indipendenti che passano per il gruppo stesso.*

Dal punto di vista algebrico questo teorema significa che le funzioni razionali aventi i detti punti come poli dipendono, linearmente, da $n-p+i$ costanti arbitrarie (compresa la costante moltiplicativa).

25. Espressione delle funzioni razionali per integrali di terza specie: Teorema d'Abel. — Di una funzione razionale (dei punti della curva) $\varphi(xy)$ si conoscano ora gli zeri e i poli:

$$\begin{array}{ll} Z_1 Z_2 \ldots Z_n & \text{siano gli zeri} \\ P_1 P_2 \ldots P_n & \text{siano i poli.} \end{array}$$

Supponiamo, naturalmente, questi punti distinti e in posizione generica. Si consideri la funzione:

$$\psi = \log \varphi = \int \frac{\varphi'}{\varphi} dx.$$

Come già nel caso ellittico si verifica subito che l'integrando $\frac{\varphi'}{\varphi}$ ha come poli tutti i $2n$ punti $P_1 \ldots P_n Z_1 \ldots Z_n$, e precisamente:

$$\begin{array}{llll} \text{nei punti} & P_1 P_2 \ldots P_n & \text{ha residuo} & -1, \\ \text{nei punti} & Z_1 Z_2 \ldots Z_n & \text{ha residuo} & 1. \end{array}$$

Pertanto la funzione ψ appare come un integrale di terza specie che ha come punti singolari i punti P_r e Z_r, con periodi logaritmici $-2\pi i$ e $2\pi i$.

Ciò posto, si considerino gli n integrali elementari di terza specie

$$w_1 w_2 \ldots w_n$$

aventi come coppie di punti singolari

$$Z_1 P_1, \quad Z_2 P_2, \quad \ldots Z_n P_n:$$

(Z_r primo punto singolare con periodo logaritmico $2\pi i$ e P_r secondo punto singolare con periodo $-2\pi i$).

La differenza

$$\psi - (w_1 + w_2 \dots + w_n)$$

risulta priva di singolarità ed è dunque un integrale di prima specie

$$\psi - (w_1 + w_2 \ \dots \ + w_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \ \dots \ + \lambda_p u_p + c$$

cioè:

$$\psi = w_1 + w_2 + \ \dots \ + w_p + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \ \dots \ + \lambda_p u_p + c;$$

di qui, essendo

$$\psi = \log \varphi, \quad \text{cioè} \quad \varphi = e^{\psi}$$

si ottiene ***l'espressione della funzione razionale*** φ ***per mezzo degli integrali di terza specie elementari aventi come singolarità logaritmiche i suoi poli e zeri:***

$$\varphi = ke^{\alpha},$$

dove

$$\alpha = w_1 + w_2 + \dots + w_p + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \dots + \lambda_p u_p \quad \text{e} \quad k = e^c.$$

Ora, essendo φ funzione razionale, e quindi monodroma, dovranno essere nulli i suoi periodi lungo i cicli A_r e B_r e quindi, ove si percorra uno di questi, dovrà α aumentare di un multiplo (intero) di $2\pi i$ cioè di $2k_r\pi i$; e poichè percorrendo A_r l'esponente α aumenta di λ_r, potremo scrivere:

$$\lambda_r = h_r 2\pi i$$

con h_r intero positivo, negativo, o nullo.

Percorrendo il ciclo B_r, l'integrale w_s aumenta del periodo

$$\theta_{sr} = 2\pi i \{ u_r(Z_s) - u_r(P_s) \}$$

e l'integrale u_t aumenta del periodo:

$$\tau_{tr}$$

quindi l'esponente α aumenta di

$$2\pi i \left\{ \sum_s u_r(Z_s) - \sum_s u_r(P_s) + \sum_t h_t \tau_{tr} \right\}$$

$$s = 1, 2 \dots n, \qquad r = 1, 2 \dots p.$$

Dovrà dunque essere

$$(1)\qquad \sum_s u_r(Z_s) = \sum_s u_r(P_s) - \sum_t h_t \tau_{tr} + k_r \cdot 1$$

con k_r numero intero (positivo negativo o nullo). Abbiamo scritto $k_r \cdot 1$ anzichè brevemente k_r per mettere in evidenza il periodo 1 relativo ad A_r, al pari dei periodi τ_{tr}.

Le (1) dànno p condizioni (non sempre indipendenti) cui soddisfano i $2n$ punti $Z_1 Z_2 \dots Z_n$ $P_1 P_2 \dots P_n$, per essere zeri e poli di una medesima funzione razionale φ: le quali, condizioni, oltre che necessarie sono evidentemente anche sufficienti. In parole le condizioni stesse si sogliono esprimere dicendo che: *le somme degli integrali abeliani di prima specie calcolati negli zeri e nei poli di una funzione razionale sono congrue rispetto ai periodi.* E brevemente si suole scrivere:

$$(1')\qquad \sum_s u_r(Z_s) \equiv \sum_s u_r(P_s) \qquad \text{mod. } \tau_{tr},\ 1$$

$$r = 1,\ 2 \dots p.$$

Queste sono le *condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza di due gruppi di punti sopra la curva.*

Alle relazioni precedenti si può dare una forma più determinata. Supponiamo di lasciar fermi i punti Z e di muovere, con continuità, i punti P e corrispondentemente i valori degli integrali $u_r(P_s)$: siccome i numeri h e k sono numeri interi, così non possono variare per continuità, ma devono restare costanti. Si conclude che: quando un gruppo di n punti, $P_1 P_2 \dots P_n$, varia entro una serie lineare, restano costanti le p somme relative ciascuna a un integrale abeliano di prima specie calcolato negli n punti del gruppo variabile, e viceversa questa è anche condizione sufficiente perchè un gruppo di n punti varii entro una serie lineare.

Questo teorema costituisce la parte più notevole del *Teorema d'Abel* che abbiamo già illustrato nel caso $p = 1$ (cfr. § 12), e che ora ricordiamo brevemente.

Si consideri sulla curva $f(xy) = 0$, un g_n^1 i cui gruppi G_n siano di livello per una certa funzione t, ai valori della quale rispondono biunivocamente.

Assunto un qualunque integrale abeliano:

$$I = \int \Phi(xy)\,dx,$$

si consideri la somma dei suoi valori nei punti, $P_1 P_2 \ldots P_n$, del G_n:

$$I = I(P_1) + I(P_2) \ldots + I(P_n):$$

sarà I funzione del parametro t definiente il G_n:

$$I(t) = \int \Phi(P_1)dx + \int \Phi(P_2)dx + \ldots + \int \Phi(P_n)dx$$
$$= \int \Big[\Phi(P_1) + \Phi(P_2) + \ldots + \Phi(P_n)\Big] dx.$$

Ma la somma entro parentesi risulta funzione simmetrica degli n punti del G_n, e quindi razionale in t, e poichè x è funzione razionale di t (ma non viceversa) sarà:

$$dx = \Psi(t)dt$$

con Ψ razionale.

In definitiva $I(t)$ risulta l'integrale di una funzione razionale di t, e quindi sussiste il

Teorema d'Abel. — La somma dei valori che un integrale abeliano assume nei punti di un gruppo di una g_n^1 è funzione razionale-logaritmica del parametro da cui dipende il gruppo [1].

In particolare qualora l'integrale in questione sia un integrale di prima specie, che non ha punti di infinito, la suddetta funzione razionale-logaritmica si riduce ad una costante.

La considerazione contemporanea dei p integrali abeliani, permette di invertire il teorema, dando ad esso il suo maggior significato.

26. **Nota storica.** — La classificazione degli integrali abeliani, legati ad una relazione algebrica $f(xy) = 0$, e in particolare la determinazione precisa degli integrali (di prima specie) ovunque finiti sopra la superficie (riemanniana) che rappresenta univocamente le coppie di soluzioni (xy) della f, appartiene a B. Riemann: *Theorie der Abel'schen Functionen*, « Journal für Math. », Bd. 54 (1857), cfr. « Ges. Math. Werke », 1. ed. (1876) VI, pg. 81-135.

[1] Veramente il teorema d'Abel (1826) si riferisce al caso più generale, in cui il gruppo G_n dipende razionalmente non soltanto da uno ma da più parametri $t_1 t_2 \ldots t_r$ in guisa che il gruppo G_n descriva una γ_n^r i cui elementi sono funzioni razionali del gruppo degli r valori $t_1 t_2 \ldots t_r$.

Abel [1] in rapporto al teorema che porta il suo nome aveva già istituito una ricerca preliminare. Infatti, avendo egli riconosciuto (per esprimerci col linguaggio geometrico posteriormente usato da Clebsch) che « la somma dei valori di un integrale nei punti del gruppo variabile di una g_n^1 riesce funzione algebrico-logaritmica del parametro », si propose ulteriormente la questione di ricercare per quali forme dell'integrando (funzione razionale di $x\ y$) la somma indicata si riduce ad una semplice costante. Si ottengono così, non soltanto gli integrali di prima specie, ma anche integrali di terza specie che diventano infiniti di segno opposto sui due rami della curva f passanti pei punti doppi di questa a distanza finita (interpretazione geometrica di Sylow) ecc.

Quindi Abel trova che il numero degli integrali soddisfacenti alla proprietà indicata risulta maggiore o eguale (e non sempre eguale) a quel carattere che Riemann chiamerà « numero della classe » e che, secondo Clebsch, dicesi oggi il genere p della f: frattanto però il numero p veniva definito, per Abel, come minimo numero degli integrali per mezzo di cui si lasciano esprimere tutte le somme d'integrali appartenenti ad f (a meno di funzioni algebrico-logaritmiche).

Riemann ha dimostrato che vi sono precisamente p integrali (di prima specie) ovunque finiti sopra la superficie rappresentativa di f, essendo $2p+1$ l'ordine di connessione di codesta superficie, e d'altra parte ha riconosciuto in p il carattere già introdotto da Abel; di più egli ha assegnato anche la forma degli integrandi di prima specie, definendo così quei polinomi che (in rapporto all'interpretazione geometrica di Clebsch) danno le *curve aggiunte alla curva piana* f.

Infine, conviene rilevare che, in un frammento di lezione risalente al 1862, Riemann considera espressamente la serie (canonica) invariante g_{2p-2}, costruendo una curva piana normale che ha per sezione una g_{2p-2}^2 contenuta in codesta g_{2p-2}^{p-1} di f. Cfr. Nachlass in « Werke », XXX, pg. 456-72.

[1] *Mémoire sur une propriété générale...* presentata all'Accademia di Parigi il 30 ottobre 1826, edito in: *Mémoires des savants étrangers*, VII, 1841. Cfr. « Oeuvres complètes », par Sylow et Lie, I, pagg. 145-251.

§ 27. **Gli integrali abeliani e le corrispondenze fra i gruppi di p punti.** — Il teorema d'Abel ci mostra che, preso un generico gruppo di p punti $A_1 A_2 \dots A_p$, non esiste alcun altro gruppo, ugualmente di p punti, che dia luogo ai medesimi valori per le somme di tutti i p integrali abeliani di prima specie, in quanto un tale gruppo risulterebbe equivalente al gruppo dei punti $A_1 A_2 \dots A_p$, che così sarebbe speciale, appartenendo ad una g_p^1 (almeno).

Indichiamo con (A) il gruppo dei p punti $A_1 A_2 \dots A_p$ e con $u_r(A)$ la somma dei valori che l'integrale u_r ha nei detti punti:

$$u_r(A) = u_r(A_1) + u_r(A_2) \dots + u_r(A_p).$$

Presi ora p valori generici arbitrari

$$k_1 \; k_2 \dots k_p$$

le p equazioni

$$(1) \qquad u_r(A) = k_r \qquad r = 1, 2 \dots p$$

non possono dunque definire più di un gruppo (A). Poichè il gruppo (A) dipende da p parametri, è presumibile che il sistema (1) ammetta soluzione. Il precisare la esistenza del gruppo (A) soddisfacente alle equazioni (1) e ottenerne una costruzione effettiva costituisce il « problema di inversione » la cui soluzione è lo scopo del nostro capitolo terzo; qui supsupponiamo provvisoriamente la esistenza del gruppo (A) per mostrare come il teorema d'Abel conduca naturalmente alla teoria delle corrispondenze fra i gruppi di p punti, che tuttavia svolgeremo con procedimento geometrico rigoroso. Anzi indicheremo come da questa teoria geometrica si possa ottenere una definizione sintetica degli integrali abeliani, nonchè i teoremi principali che ad essi si collegano, compreso il teorema d'inversione.

Si considerino due gruppi (A) e (A') legati dalle p relazioni:

$$(2) \qquad u_r(A) + u_r(A') = k_r \qquad r = 1, 2 \dots p$$

o dalle

$$(3) \qquad u_r(A') = u_r(A) + k_r.$$

Tanto le (2) che le (3) definiscono una corrispondenza biunivoca tra i gruppi (A) e i gruppi (A'): la corrispondenza definita dalla (2) dicesi *trasformazione di seconda specie*, mentre quella definita dalla (3) dicesi trasformazione di *prima specie.*

Dalle equazioni conseguono subito alcune proprietà notevoli, le quali indicano la via da seguirsi per costruire la trattazione geometrica della relativa teoria.

Una trasformazione di seconda specie data dalla (2) è involutoria, e i gruppi coniugati, sommati insieme, variano in una medesima g^p_{2p}.

Il prodotto di due trasformazioni di seconda specie dà una trasformazione di prima specie.

Le trasformazioni di prima specie formano un gruppo continuo abeliano di operazioni permutabili, quelle di prima e seconda specie, insieme, un gruppo misto.

Dati due gruppi generici (A) e (A') esistono due sole trasformazioni, una di prima e una di seconda specie che portino il gruppo (A) nel gruppo (A').

Ma veniamo alla trattazione geometrica della nostra teoria [1], che ha stretta analogia con quella svolta, per il caso $p=1$, nel § 27, del Libro V, con riferimento ad una cubica piana.

Sopra la curva f si fissi una g^{2p}_{3p} (completa); essa sarà segata da un certo sistema lineare di curve ψ.

Sopra la curva f dovremo considerare dei gruppi di p punti. Indicheremo con (A), (B)... gruppi siffatti e con A_1, $A_2 \dots A_p$, B_1, $B_2 \dots B_p$ i punti che li costituiscono. Ciò posto chiameremo *allineati* tre gruppi $(A)(B)(C)$ quando, insieme presi, costituiscano un gruppo della g^{2p}_{3p}. Ciò per analogia col caso della cubica: il seguito darà ragione della opportunità di questa frase.

È ovvio che: presi ad arbitrio due gruppi (A) e (B) esiste un unico gruppo (C) allineato con essi.

Ogni gruppo (A) definisce una corrispondenza (algebrica) biunivoca e simmetrica fra i gruppi (B) e (B') allineati con (A): indichiamo con I_a questa involuzione e diciamo suo *centro* (A).

[1] La dimostrazione geometrica delle proprietà fondamentali delle corrispondenze per i gruppi di p punti è dovuta al CASTELNUOVO; (« Rendiconti Istit. Lombardo », 15 dic. 1892); la teoria qui svolta che permette di dedurre la proprietà degli integrali abeliani di prima specie è di O. CHISINI. (« Rendiconti Ist. Lombardo », 1929).

Si noti che la I_a è effettivamente biunivoca solo per i gruppi generici. Ma se (B') è un gruppo speciale, d'indice di specialità i, allora la serie lineare $|\,g_{3p}^{2p} - (A) - (B)\,|$ è una g_p^i, e la I_a porta (B) in uno qualsiasi dei gruppi di questa serie. Eccezioni di questo tipo si presentano normalmente nelle trasformazioni degli enti algebrici: nel seguito converrà riferirsi, anche senza ripeterlo continuamente in forma esplicita, a gruppi generici.

Due gruppi (B) e (B'), comunque scelti, definiscono *una* involuzione in cui essi sono coniugati.

Il prodotto di due involuzioni I_a e I_b è una trasformazione biunivoca fra i gruppi di p punti della curva f: chiamiamo questa ***trasformazione*** di ***prima specie*** [1], e la indichiamo con π

$$\pi = I_b\, I_a.$$

Premesse queste ovvie osservazioni dimostriamo il

TEOREMA 1. — ***Esiste una e una sola trasformazione di prima specie che porti un gruppo assegnato*** (A) ***in un gruppo assegnato*** (A').

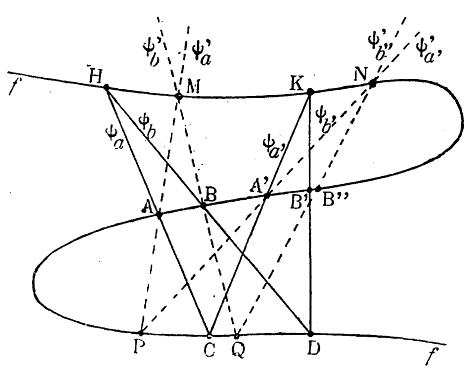
L'esistenza si prova subito. Preso un gruppo arbitrario (C) siano (H) e (K) i due gruppi allineati con (A) e (C) e con (A') e (C).

La

$$\pi = I_k\, I_h$$

porta (A) in (A').

Vediamo l'unicità di tale π. Supponiamo che π porti un



[1] Il CASTELNUOVO nel citato lavoro chiama questa trasformazione di *seconda specie*.

generico gruppo (B) in un gruppo (B'), che sarà ugualmente generico. Facciamo vedere che ogni altra trasformazione (di prima specie) $\pi' = I_n\, I_m$ che porti ugualmente (A) in (A') porta (B) in un gruppo (B'') coincidente con (B').

Sia (D) il gruppo allineato con (B) e (H) e con (B') e (K); (P) il gruppo allineato con (A) e (M) e con (A') e (N); (Q) il gruppo allineato con (B) e (M) e con (B'') e (N). Qui la figura mostra *schematicamente* la posizione relativa dei gruppi indicati: questi sono rappresentati quali punti e le ψ (seganti la g_{3p}^{2p}) che li contengono, quali rette.

Indichiamo con

$$\psi_a \quad \psi_b \quad \psi_{a'} \quad \psi_{b'} \quad \psi'_a \quad \psi'_b \quad \psi'_{a'} \quad \psi'_{b''}$$

le curve ψ contenenti i gruppi sottoindicati

$$\begin{array}{ll} \psi_a \ (H)(A)(C); & \psi_{a'} \ (K)(A')(C) \\ \psi_b \ (H)(B)(D); & \psi_{b'} \ (K)(B')(D) \\ \psi'_a \ (M)(A)(P); & \psi'_{a'} \ (N)(A')(P) \\ \psi'_b \ (M)(B)(Q); & \psi'_{b''} (N)(B'')(Q) \end{array}$$

e con gli stessi simboli indichiamo i primi membri delle loro equazioni. Se fosse $(B'') \neq (B')$ questi due gruppi apparterebbero ad una g_p^1 segata su f dal fascio

$$\lambda(\psi_a \cdot \psi_{b'} \cdot \psi'_{a'} \cdot \psi'_b) + \mu(\psi_{a'} \cdot \psi_b \cdot \psi'_a \cdot \psi'_{b''}) = 0;$$

cosa assurda essendo (B') gruppo generico (*non speciale*).

Si noti che la dimostrazione svolta prova la *unicità* della π che porta (A) in (A') non solo al variare di uno dei fattori I_n o I_m che appare arbitrario, ma *anche al variare della g_{3p}^{2p} fondamentale*, alla quale sono legate tutte le costruzioni che definiscono la π.

Conviene qui osservare esplicitamente che qualora (B') fosse gruppo speciale, d'indice di specialità i, la π trasformerebbe (B) in tutta la g_p^i definita dal (B').

TEOREMA 2. — *Le trasformazioni di prima specie, π, formano un gruppo continuo ∞^p abeliano* (cioè di operazioni permutabili).

Infatti

a) Le π formano un gruppo. Ciò segue dal fatto che in ciascuna π è arbitraria la scelta di una delle due involuzioni che definiscono, come loro prodotto, la π. Date dunque due trasformazioni π_1 e π_2 scriveremo:

$$\pi_1 = I_b I_a, \qquad \pi_2 = I_c I_b$$

e quindi

$$\pi_2 \pi_1 = I_c I_a$$

è ancora una π.

b) Che il gruppo sia continuo ed ∞^p risulta dal fatto che una π è definita dal gruppo di p punti (A') che essa associa ad un (A) assegnato, il quale (A') varia con continuità in funzione di p parametri.

c) Per riconoscere che le π sono permutabili si osservi che una involuzione, I_a, trasforma ogni π nella sua inversa. Scriviamo infatti:

$$\pi = I_a I_b$$

(ricordando che in ogni π è arbitrario un fattore), sicchè risulta:

$$I_a \pi I_a = I_b I_a = \pi^{-1}$$

Pertanto il prodotto di due I, cioè ogni altra π, lascerà invariata la π considerata.

Inoltre, come appare subito dalle considerazioni precedenti, le trasformazioni π e I insieme prese danno luogo ad un gruppo misto.

Nota. — Indichiamo ora brevemente come dalla teoria geometrica delle trasformazioni di prima specie si giunga alla ***definizione geometrica degli integrali abeliani***, al teorema d'inversione e al teorema d'Abel, rimandando per i particolari alle due Note di O. Chisini in cui ciò è svolto diffusamente [1]; ci basta aver trattata la cosa con ampiezza per il caso ellittico (§ 14).

Per questa teoria è fondamentale ottenere l'espressione analitica delle trasformazioni di prima specie infinitesime che valgono a generare l'intero gruppo continuo. A ciò si arriva stabilendo anzitutto il seguente lemma, analogo a quello incontrato per il caso del genere $p = 1$.

[1] *Sulla trasformazione di prima specie dei gruppi di p punti.* (« Rend Ist. Lombardo », 1929).

[2] *Gli integrali abeliani di prima specie dal punto di vista geometrico* (« Rend. Ist. Lombardo », 1930).

Lemma. — Si consideri sopra una curva f una g^1_m variabile, segata da un fascio (variabile) di curve ψ. Si considerino due gruppi G_m e G'_m infinitamente vicini della g^1_m, e siano A e C due punti di G_m e A' e C' i punti di G'_m ad essi infinitamente vicini. Si indichino con dx e $d\xi$ gli incrementi della x relativi al passaggio da A ad A' e da C a C'. Supponendo che la g^1_m vari in dipendenza della posizione del punto A, il rapporto $\rho = \frac{d\xi}{dx}$ risulta una funzione delle coordinate di A. Sono zeri di ρ i punti impropri di f, contati due volte, i punti A per cui la g^1_m acquisti come punto fisso C (venendo a cadere su f in C uno dei punti base del fascio delle ψ seganti la g^1_m generalmente esterno ad f) e i punti A che siano doppi per un gruppo della g^1_m, senza coincidere con C; invece i poli di ρ sono dati dai punti A che siano di contatto per tangenti parallele all'asse y, o definiscano un G_m contenente C. Nel punto C il rapporto ρ ha il valore $\rho = -1$.

Ciò posto consideriamo una particolare π infinitesima, la quale sia il prodotto di due involuzioni I aventi come centri due gruppi (C) e (C') così costituiti

$$(C) = C_1 + C_2 + \dots + C_{p-1} + C_p$$
$$(C') = C_1 + C_2 + \dots + C_{p-1} + C'_p$$

essendo $C_1 C_2 \dots C_p$ punti generici e C'_p un punto infinitamente vicino a C_p.

Consideriamo un gruppo generico

$$(A) = A_1 + A_2 + \dots + A_p;$$

esso verrà trasformato dalla π in un gruppo

$$(A') = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_p$$

di punti infinitamente vicini ai precedenti.

Si vede facilmente che i due gruppi di $p+1$ punti

$$(A) + C_p, \qquad (A') + C'_p$$

appartengono ad una medesima g^1_{p+1}.

Supponiamo ora di lasciar fermi i punti $A_2 A_3 \dots A_p$ e di variare il punto A_1 le cui coordinate indichiamo con x_1 e y_1.

Per ciascuna posizione A_1 la π infinitesima darà alla corrispondente ascissa x_1 un incremento dx_1 che dipende da A_1 e dalla differenza $d\xi$ delle ascisse di C_p e di C'_p.

Si valuta il rapporto

$$\rho = \frac{d\xi}{dx_1}$$

in base al Lemma precedente notando che la g^1_{p+1} definita da $(A) + C_p$ ha C_p come punto fisso quando e solo quando (A) sia un gruppo speciale, che risulta costituito di p punti appartenenti ad una medesima aggiunta $\varphi_1(xy) = 0$, d'ordine $n - 3$, e notando inoltre che $A_2 A_3 \ldots A_p$ non possono mai cadere in C_p (essendo per ipotesi fissi). Si conclude che è

$$\rho = \frac{d\xi}{dx_1} = \frac{\varphi_1(x_1 y_1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y_1}} \tag{1}$$

dove il polinomio aggiunto, d'ordine $n - 3$, $\varphi_1(xy) = 0$ è definito dalla condizione di annullarsi nei punti $A_2 A_3 \ldots A_p$ e di essere nel punto C_p uguale a $-\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Più in generale, facendo variare oltre A_1 gli altri punti $A_2 \ldots A_p$, risulta il

Teorema. — Si applichi la trasformazione infinitesima π a un gruppo generico (A) di p punti $A_1 A_2 \ldots A_p$ di coordinate $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $\ldots x_p y_p$. Preso un qualunque polinomio φ, aggiunto d'ordine $n - 3$ ad f, si ha, per qualunque gruppo (A),

$$\sum_i \frac{\varphi(x_i y_i)}{\dfrac{\partial f(x_i y_i)}{\partial y_i}} dx_i = d\xi \cdot k \qquad (i = 1, 2 \ldots p) \tag{2}$$

dove dx_i indica l'incremento dell'ascissa di A_i per effetto della π, e k una costante che è uguale al valore di

$$-\frac{\varphi(xy)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

calcolato nel punto C_p.

Il teorema precedente fornisce p relazioni essenzialmente distinte, analoghe alla (2), ove si considerino i p polinomi aggiunti d'ordine $n - 3$ linearmente indipendenti; esso dunque definisce il modo di variare del gruppo (A) per effetto della trasformazione infinitesima π, costituendo così la rappresenzione analitica di questa.

Ora il gruppo di punti C_p definisce p trasformazioni infinitesime π essenzialmente distinte.

Precisamente indichiamo con π_r^ε la trasformazione prodotto delle due I aventi per centro rispettivamente il gruppo (C) e il (C) stesso nel quale sia variata la posizione di C_r dando alla relativa ascissa ξ_r l'incremento (infinitesimo come ε)

$$d\xi_r = -\varepsilon f'_y(C_r).$$

Ogni trasformazione di prima specie π, anche finita, potrà considerarsi come il prodotto di convenienti potenze delle π_r ora definite, e quindi potremo scrivere

$$\pi = \pi_1^{\rho_1} \pi_2^{\rho_2} \dots \pi_p^{\rho_p}.$$

Importa dare l'espressione analitica della π, riconoscendo il significato geometrico degli esponenti $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p$.

A tale scopo indichiamo con $\varphi_r(xy)$ il polinomio aggiunto d'ordine $n - 3$ soggetto alla condizione di avere il valore 1 in C_r e di annullarsi negli altri punti di (C).

Applicando il teorema precedente risulta che la π_r elevata a un certo esponente ρ_r trasforma un gruppo (A) in un gruppo (A') tale che

$$\sum \int_{A_i}^{A'_i} \frac{\varphi_r(A_i)}{f'_y(A_i)} dx_i = \rho_r \qquad (i = 1, 2, \dots p) \tag{3}$$

$$\sum_i \int_{A_i}^{A'_i} \frac{\varphi_s(A_i)}{f'_y(A_i)} dx_i = 0. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \dots p \\ s \neq r \end{pmatrix} \tag{3'}$$

Indichiamo ora con u_r l'integrale abeliano di prima specie indefinito

$$u_r = \int \frac{\varphi_r(xy)}{f'_y(xy)} dx. \qquad [f(xy) = 0]$$

Risulta allora che la

$$\pi = \pi_1^{\rho_1} \pi_2^{\rho_2} \dots \pi_p^{\rho_p} \tag{4}$$

applicata ad un gruppo (A) lo trasforma in un gruppo (A') per modo che ciascun esponente ρ_r rappresenta la differenza della somma degli integrali u_r calcolati nei punti di (A') e nei punti di (A):

$$(5) \qquad \rho_r = \sum_i u_r(A'_i) - \sum_i u_r(A_i). \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \dots p \\ r = 1, 2 \dots p \end{pmatrix}$$

Concludiamo che le p relazioni (5) definiscono il gruppo (A') trasformato di (A) mediante la trasformazione π data dalla (4), cioè costituiscono la rappresentazione analitica della π stessa.

Naturalmente le uguaglianze precedenti, ove non si fissino in qualche modo i cammini di integrazione, vanno sostituite con delle congruenze rispetto ai periodi degli integrali abeliani u_r che appaiono anche periodi delle π_r.

Per arrivare al teorema d'inversione si fissi sulla riemanniana di f un punto O, origine per il calcolo degli integrali u_r: questo punto, contato p volte, costituisce un gruppo di p punti $(O) = pO$. Preso ora un qualunque gruppo di p punti $(A) = A_1 + A_2 \dots + A_p$, questo definisce una trasformazione di prima specie, π, che porta (O) in (A):

$$\pi = \pi_1^{\rho_1} \pi_2^{\rho_2} \dots \pi_p^{\rho_p}.$$

Poniamo

$$(6) \qquad u_r(A) = u_r(A_1) + u_r(A_2) \dots + u_r(A_p);$$

la formula (5) dà

$$(7) \qquad u_r \equiv \rho_r$$

cioè: le p somme dei p integrali abeliani di prima specie nei punti di un gruppo (A) sono (o sono congrue a) i p esponenti delle $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_p$ il cui prodotto π porta (O) in (A).

Se ora supponiamo arbitrariamente dati i valori *generici*

$$u_1 u_2 \dots u_p$$

somme degli integrali abeliani $u_1 u_2 \dots u_p$ calcolati nei punti di un incognito gruppo (A), questo gruppo risulta univocamente definito, come il trasformato di (O) mediante la

$$\pi \equiv \pi_1^{\rho_1} \pi_2^{\rho_2} \dots \pi_p^{\rho_p}$$

con $\rho_r = u_r$, cioè abbiamo il

TEOREMA D'INVERSIONE. — I valori delle somme $u_1 u_2 \dots u_p$ degli integrali abeliani di prima specie nei punti di un gruppo *generico* (A) di p punti definiscono univocamente il gruppo stesso.

Dalla definizione geometrica degli integrali abeliani segue anche con tutta facilità il

TEOREMA D'ABEL. — Se un gruppo G di m punti varia in una serie lineare g_m^s per esso si hanno le p relazioni caratteristiche

$$u_r(G) \equiv k_r \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2 \dots p \\ k_r = \text{costante} \end{pmatrix}$$

Il teorema si dimostra per gradi, generalizzando successivamente la forma del numero m, che si assume prima $m = 2p$, poi $m = \nu p$, e quindi affatto generale.

CAPITOLO III

Il problema d'inversione e le funzioni abeliane

28. **Il problema d'inversione.** — Nel caso delle curve di genere $p = 1$, l'integrale di prima specie s'inverte univocamente e conduce così alla *uniformizzazione* della curva, cioè: le coordinate del punto variabile di essa vengono espresse come *funzioni monodrome* (o uniformi) *doppiamente periodiche di un parametro*,

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi_1(u) \\ y = \varphi_2(u), \end{cases}$$

ossia come funzioni *ellittiche* di questo.

È possibile estendere il teorema alle curve di genere $p > 1$? La risposta dipende dal senso in cui si cerca la generalizzazione.

Nel senso più immediato, si ha una risposta negativa: Non è possibile invertire un integrale abeliano

$$u = \int \Phi(x\, y) dx$$

appartenente alla curva $f(xy) = 0$ di genere $p > 1$, mediante una funzione monodroma.

Per riconoscere tale impossibilità basta osservare che, ove l'inversione fosse possibile, dovrebbe ottenersi una funzione monodroma con $2p$ periodi. Ma è facile dimostrare che, se una funzione monodroma ammette almeno tre periodi (che non si riducano a due essenzialmente distinti), essa ammette di conseguenza anche dei periodi infinitesimi (cioè piccoli quanto si vuole) che si formano per combinazione lineare di quelli, così come abbiam visto esservi periodi infinitesimi se vi sono due periodi distinti il cui rapporto sia reale ed incommensurabile (cfr. § 9, pagg. 54-55).

Anche in altro modo possiamo stabilire che il punto $P = (xy)$ di una curva $f(xy) = 0$ di genere $p > 1$ non può resultare funzione analitica univoca dell'integrale

$$u = \int \Phi(xy) dx$$

dove Φ designa una funzione razionale di x e y. Infatti assumendo come ipotesi l'inversione univoca dell'integrale, ed analizzando gli zeri e i poli di Φ, si dedurrà che il genere di f deve essere $p \leq 1$.

È anzitutto chiaro che la f può supporsi dotata di sole singolarità elementari e disposta in modo generico rispetto agli assi: in caso diverso la f potrebbe venir sostituita da una sua trasformata birazionale, per la quale varrebbe ancora una rappresentazione parametrica del tipo (1).

Ciò posto si vede che la Φ non può annullarsi in un punto di f che sia al finito e la cui ascissa non sia di diramazione per la y. Infatti, in tale caso, indicando con α l'ascissa di questo zero di Φ e con r il relativo ordine, sarebbe, nell'intorno di α,

$$\Phi = a_r (x - \alpha)^r + a_{r+1} (x - \alpha)^{r+1} + \dots$$

e quindi, integrando

$$u = \frac{a_r}{r+1} (x - \alpha)^{r+1} + \dots + k$$

sicchè, invertendo la serie nell'intorno di $u = k$, la $x - \alpha$, cioè la x, risulterebbe funzione ad $r+1$ valori (di $u - k$) contro l'ipotesi che x sia funzione uniforme della u.

Similmente la Φ non può neppure annullarsi in un punto, al finito, la cui ascissa sia di diramazione per la y.

Indichiamo con α l'ascissa di un tale punto, che sarà di diramazione semplice; avremo dunque, nell'intorno di α,

$$y = a_0 + a_1 (x - \alpha)^{\frac{1}{2}} + a_2 (x - \alpha)^{\frac{2}{2}} + \dots$$

e, se Φ ha quivi uno zero d'ordine r,

$$\Phi = b_1 (x - \alpha)^{\frac{r}{2}} + b_2 (x - \alpha)^{\frac{r+1}{2}} + \dots$$

sicchè, integrando,

$$u = \frac{b_1}{\frac{r+2}{2}} (x-\alpha)^{\frac{r+2}{2}} + \ldots + k.$$

Pertanto, invertendo la serie nell'intorno di $u = k$, la x risulterebbe funzione a $r+2$ valori.

Più precisamente si vede che la condizione che x sia monodroma, porta che a un tale punto di diramazione corrisponda, per Φ, un polo d'ordine 1 almeno.

Posto infatti che nel punto considerato Φ abbia un polo d'ordine r $(r \geq 0)$ sarà

$$\Phi = b_1 (x-\alpha)^{\frac{-r}{2}} + l_2 (x-\alpha)^{\frac{-r+1}{2}} + \ldots$$

e, integrando,

$$u = \frac{b_1}{\frac{-r+2}{2}} (x-\alpha)^{\frac{-r+2}{2}} + \ldots + k.$$

Pertanto, invertendo la serie nell'intorno di $u = k$, la x risulta funzione univoca solo se è

$$\frac{-r+2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{-r+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

cioè per $r = 1$ oppure $r = 3$.

Infine nei punti impropri di f, la Φ non può avere uno zero d'ordine $r > 2$.

Infatti posto che sia, nell'intorno di $x = \infty$,

$$\Phi = a_1 x^{-r} + a_2 x^{-r-1} + \ldots$$

integrando risulta

$$u = \frac{a_1}{-r+1} x^{-r+1} + \ldots + k$$

sicchè x risulta funzione a $r-1$ valori nell'intorno di $u = k$, cioè non monodroma se $r > 2$.

Ciò posto, indicando con n l'ordine di f, con p il suo genere e con m la sua classe, si ha che i punti di diramazione della y sono

$$m = 2n + 2p - 2$$

quindi i poli di Φ sono

$$2n + 2p - 2 + \delta \qquad \text{con } \delta \geq 0$$

mentre gli zeri sono

$$2n - h \qquad \text{con } h \geq 0.$$

Segue, dovendo il numero dei poli uguagliare quello degli zeri

$$2n + 2p - 2 + \delta = 2n - h$$

$$2p = 2 - (\delta + h)$$

$$p = 1 - \left(\frac{\delta + h}{2}\right)$$

cioè

$$p \leq 1.$$

Pertanto resta dimostrato che l'integrale abeliano u può invertirsi solo per le curve razionali od ellittiche.

Il resultato negativo che si è ottenuto può anche esprimersi come segue: qualora, in rapporto ad una curva di genere $p > 1$, si inverta l'integrale u nell'intorno di un punto, la funzione inversa estesa a tutto il piano complesso, riesce necessariamente polidroma. In effetto essa resulta *infinitiforme*. Lo studio di tali funzioni è stato iniziato, per il genere $p = 2$, dal CASORATI: cfr. *Teoria delle funzioni*, 1868.

Frattanto, la constatata impossibilità d'invertire gli integrali abeliani di genere $p > 1$ con funzioni monodrome, ha condotto JACOBI a porre il problema generale d'inversione in senso affatto diverso: in luogo d'invertire *un* integrale come funzione di *una* variabile, cioè del punto della curva, si considereranno p integrali (e converrà prendere i p integrali di prima specie) o meglio le somme di essi nei p punti d'un gruppo sopra la curva, domandando di esprimere come funzioni di questi p parametri le coordinate del gruppo stesso.

Nell'ordine della nostra esposizione, il teorema d'ABEL, nella sua parte più significativa illustrata nel § 26, ci insegna che un gruppo G di p punti della curva $f(xy) = 0$, è univocamente definito dalle p somme dei valori che i p integrali abeliani di prima specie hanno nei punti del gruppo: infatti ove esistesse un secondo gruppo, G', cui competano i medesimi valori per le dette somme, i due gruppi G e G' risulterebbero equivalenti, appartenendo ad una g_p^1, cioè sarebbero due gruppi speciali.

Si cerca allora di esprimere le funzioni simmetriche relative ai p punti di un gruppo G mediante le somme degli integrali abeliani di prima specie calcolati nei punti del G.

Precisamente:

Indichiamo con $P_1 P_2 \dots P_p$ i p punti del gruppo G; poniamo

$$\begin{aligned} u_1(G) &= u_1(P_1) + u_1(P_2) \; \dots \; + u_1(P_p) \\ u_2(G) &= u_2(P_1) + u_2(P_2) \; \dots \; + u_2(P_p) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_p(G) &= u_p(P_1) + u_p(P_2) \; \dots \; + u_p(P_p) \end{aligned}$$

dove $u_1 \, u_2 \dots u_p$ sono i p integrali normali di prima specie.

Alla curva piana $f(x\,y) = 0$ sostituiamo una sua trasformata iperspaziale, F, sulla quale gli iperpiani seghino una g_{3p}^{2p}: la F è dunque una curva d'ordine $2p$ immersa in un S_p.

Esiste un *iperpiano* τ, *tangente alla curva* F *in ciascuno dei* p *punti* di un G arbitrario: questo iperpiano ha un'equazione del tipo

$$\psi_0 y_0 + \psi_1 y_1 + \dots + \psi_{2p} y_{2p} = 0$$

dove

$$y_0 \, y_1 \cdots y_{2p}$$

sono le coordinate (omogenee) del punto variabile sull'iperpiano tangente τ, e i *coefficienti*

$$\psi_0 \, \psi_1 \cdots \psi_{2p}$$

sono *funzioni simmetriche dei punti del gruppo* G, che si possono esprimere mediante i p parametri

$$u_1(G) \;\; u_2(G) \dots u_p(G).$$

Il *calcolo effettivo* di queste funzioni ψ *risolve il problema di inversione.*

Precisamente le ψ risulteranno espresse mediante le così dette *funzioni theta* di Jacobi, trascendenti a p variabili, di cui, nei paragrafi seguenti, dovremo esporre le proprietà fondamentali.

Nota Storica. — L'impossibilità di invertire un integrale algebrico con una funzione monodroma, già per il caso del genere $p = 2$, è stata avvertita da Abel, che rilevò appunto come l'esistenza di quattro periodi distinti portasse di conseguenza una funzione polidroma ad infiniti rami. La difficoltà dell'inversione diretta, così messa in luce, ha lungamente affaticato JACOBI, che finalmente « in hac quasi desperatione » ha pensato alla possibilità offerta dal teorema d'ABEL, ove si passi dalle funzioni di una variabile a quelle di più variabili. Così JACOBI scoprì la possibilità di invertire gli integrali abeliani del genere due mercè funzioni quattro volte periodiche di due variabili: le sue memorie su tale argomento sono pubblicate nel « Journal für Math. » di Crelle degli anni 1832 e 1834: cfr. Werke ed. Weierstrass, II pg. 7 e 25.

In tal guisa dunque era posto il problema generale della inversione, la cui risoluzione effettiva, prima per il caso iperellittico e poi pel caso delle curve di genere p qualsiasi, viene raggiunta, attraverso gli studi di GÖPEL e ROSENHAIM e poi di WEIERSTRASS (1849, 1853, 1856), da B. RIEMANN, che è il costruttore della teoria generale delle funzioni *theta*, di cui daremo lo sviluppo nei capitoli seguenti: cfr. RIEMANN: *Theorie der Abel'schen Functionen*, « Journ. f. Math. » Bd. 54, 1857; Werke I ed. VI. pg. 81-135).

Conviene aggiungere quanto segue.

L'inversione degli integrali abeliani di genere $p > 1$, mediante funzioni $2p$ volte periodiche di p variabili, nel senso indicato da JACOBI, non è la sola estensione possibile del problema che dà origine alle funzioni ellittiche. Un'altra estensione si ha nelle ricerche di KLEIN, POINCARÉ ecc. che risolvono il problema di *uniformizzare una curva algebrica* quasiasi, per mezzo di *funzioni automorfe*, cioè invarianti rispetto ad un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari. A tale proposito ci limitiamo a rimandare, per le informazioni letterarie, al *Referat über automorphe Functionen und Uniformisirung*, nel Bd. 21 dell'« Jahresbericht der deutschen math. Vereinigung », 1912 (pg. 157-193).

29. La funzione *theta* a p argomenti. — Sia data una matrice quadra, di p^2 numeri (in generali complessi):

$$(1) \qquad \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & o_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{matrix} \right.$$

la quale tabella soddisfi alle due condizioni seguenti:

anzitutto sia simmetrica rispetto alla sua diagonale principale, cioè sia

$$(2) \qquad a_{rs} = a_{sr},$$

per modo che la matrice stessa contenga solo $\frac{p(p+1)}{2}$ termini essenzialmente arbitrari;

in secondo luogo, indicata con a'_{rs} la parte reale del termine a_{rs}, la forma quadratica $\Sigma a'_{rs}\, x_r x_s$ nelle p variabili reali $x_1 x_2 \ldots x_p$ risulti una forma definita negativa, avendosi dunque, per $x_1 x_2 \ldots x_p$ non contemporaneamente nulle:

$$(3) \qquad \Sigma a'_{rs} x_r x_s < 0 .$$

Segue di qui che gli elementi di una linea, ad esempio la prima, non possono essere tutti immaginari puri: infatti ove fossero nulli tutti gli a'_{1s}, la forma quadratica si annullerebbe ponendo $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \ldots x_p = 0$.

A queste condizioni soddisfa la matrice dei periodi, indicati appunto con a_{rs}, degli integrali abeliani di prima specie normali u_r che hanno uguale a πi il periodo relativo al ciclo A_r (cfr. pagg. 125 e 130).

Si assumano ora p variabili complesse

$$u_1\, u_2 \ldots u_p$$

(le vedremo poi legate agli integrali abeliani di prima specie e perciò sono indicate ora con lo stesso nome): in base alla matrice (1) si forma una funzione analitica delle p variabili $u_1 \ldots u_p$ nel modo che segue.

Si consideri un gruppo di p *numeri interi*, comunque positivi, negativi o nulli, che indichiamo con

$$n_1\, n_2 \ldots n_p$$

e si formino le due espressioni

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi(n_1\, n_2\, \ldots\, n_p) = \Sigma a_{rs}\, n_r\, n_s \\ \psi(n_1\, n_2\, \ldots\, n_p) = 2\Sigma n_r\, u_r \end{cases}$$

La φ è una funzione quadratica dei numeri n_r, somma di p^2 elementi; la ψ è una funzione lineare sia rispetto ai numeri n_r che rispetto alle variabili u_r, ed è somma di p termini.

Ciò posto l'esponenziale

$$e^{\varphi+\psi}$$

risulterà una funzione di $u_1 u_2 \dots u_p$ dipendente dalla scelta dei p numeri $n_1 n_2 \dots n_p$ che entrano a formare φ e ψ.

Facciamo ora variare questo gruppo di p numeri $n_1 n_2 \dots n_p$ in tutti i modi possibili, assegnando cioè ai numeri interi n_r qualunque valore compreso tra $-\infty$ e $+\infty$, e sommiamo tutti gli esponenziali corrispondenti; *formiamo in tal modo la cosidetta serie theta, cioè la serie p-pla*:

$$\theta(u_1 u_2 \dots u_p) = \sum_{n_1 n_2 \dots n_p} e^{\varphi(n_1 n_2 \dots n_p) + \psi(n_1 n_2 \dots n_p)} \tag{5}$$

$$n_r = -\infty \dots +\infty; \qquad r = 1, 2 \dots p.$$

Ammettendo, per il momento, la convergenza della serie (5), questa ci dà una funzione delle p variabili $u_1 u_2 \dots u_p$ dipendente dal quadro dei numeri complessi a_{rs}: le variabili $u_1 u_2 \dots u_p$ si chiamano gli *argomenti* della funzione θ, i numeri a_{rs} i *moduli* della funzione stessa. Si suol scrivere, per mettere in evidenza gli argomenti:

$$\theta(u_1 \,|\, u_2 \,|\, \dots u_p)$$

o anche, come si è fatto in (5), $\theta(u_1 u_2 \dots u_p)$, o, brevemente

$$\theta((u)).$$

Si noti che a rappresentare la stessa funzione (5) la lettera greca *theta* può essere scritta indifferentemente nelle due forme θ o ϑ, e ciò secondo il gusto degli autori o le opportunità tipografiche.

Perchè lo sviluppo (5) rappresenti effettivamente una funzione, è necessario che sia *soddisfatta* la condizione di *convergenza*, ciò che risulta dal

Teorema. — *La serie multipla theta è assolutamente convergente* (per qualunque gruppo di valori finiti assegnati agli argomenti $u_1 u_2 \dots u_p$) *quando i moduli a_{rs} soddisfino alle condizioni indicate, di dare una matrice simmetrica, e di essere tali che la forma quadratica*

$$\Sigma a'_{rs} x_r x_s$$

sia una forma definita negativa.

Indichiamo, infatti, con

$$M(n_1 n_2 \dots n_p)$$

il valore assoluto di

$$e^{\varphi(n_1 n_2 \ldots n_p) + \psi(n_1 n_2 \ldots n_p)};$$

dobbiamo dimostrare che la serie multipla, a termini positivi

$$\sum_{n_1 n_2 \ldots n_p} M(n_1 n_2 \ldots n_p) \tag{6}$$

converge qualunque sia il gruppo di valori finiti attribuiti alle variabili $u_1 u_2 \ldots u_p$.

Mettendo in evidenza le parti reali e le parti immaginarie dei moduli, poniamo

$$a_{rs} = a'_{rs} + i a''_{rs};$$

risulterà

$$\varphi(n_1 n_2 \ldots n_p) = \Sigma a_{rs} n_r n_s = \Sigma a'_{rs} n_r n_s + i \Sigma a''_{rs} n_r n_s$$

quindi il valore assoluto di e^φ varrà

$$\left| e^{\varphi(n_1 n_2 \ldots n_p)} \right| = e^{\Sigma a'_{rs} n_r n_s}$$

in quanto il valore assoluto di

$$e^{i \Sigma a''_{rs} n_r n_s}$$

vale 1, come sempre accade per le potenze di e a esponente puramente immaginario.

Ci occorre ora calcolare un valore maggiorante per

$$\left| e^{\varphi(n_1 n_2 \ldots n_p)} \right|$$

cioè per

$$e^{\Sigma a'_{rs} n_r n_s}$$

A tale scopo osserviamo che, essendo la forma

$$\Sigma a'_{rs} x_r x_s$$

una forma definita negativa, essa conterrà tutti i termini quadrati, cioè sarà

$$a'_{rr} \neq 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots p)$$

ciò perchè se una variabile figurasse solo al primo grado, si potrebbe assegnare alla forma quadratica un qualsiasi valore arbitrario, anche positivo, risolvendo una equazione lineare (non può accadere che la variabile stessa non figuri affatto nella forma quadratica, perchè questa, come abbiamo già notato, non sarebbe più una forma definita negativa).

Scriviamo la forma mettendo in evidenza una variabile x_h

(7) $$\sum a'_{rs} x_r x_s = x_h^2 \cdot \sum a'_{rs} \frac{x_r}{x_h} \cdot \frac{x_s}{x_h}$$

e poichè la forma è definita negativa sarà

(8) $$\sum a'_{rs} \frac{x_r}{x_h} \frac{x_s}{x_h} < - N_h$$

indicando con N_h un numero positivo, diverso da zero, che dipende dall'indice h della variabile x_h considerata, che abbiano portata a denominatore per trasformare la forma quadratica omogenea in un polinomio non omogeneo il cui valore assoluto, non annullantesi, ha un minimo.

Sostituendo le variabili x con i numeri interi n risulta, per le (7) e (8)

$$\Sigma a'_{rs} n_r n_s < - n_h^2 N_h.$$

Indicando ora con N il minimo dei p numeri positivi N_h $(h = 1, 2 \ldots p)$ la disuguaglianza precedente porta alle

(9) $$\Sigma a'_{rs} n_r n_s < - n_h^2 N$$

e quindi

(10) $$| e^{\varphi(n_1 n_2 \ldots n_p)} | < e^{-n_h^2 N}.$$

Analogamente occorre calcolare un valore maggiorante per il valore assoluto

$$| e^{\psi(n_1 n_2 \ldots n_p)} |.$$

Poichè

$$\psi(n_1 n_2 \ldots n_p) = 2 \Sigma n_r u_r,$$

indicando con $\bar{u}$ la massima delle parti reali delle u_r e con $\bar{n}$ il massimo valore assoluto delle $n_1 n_2 \ldots n_p$, la parte reale di $\psi(n_1 n_2 \ldots n_p)$ sarà minore di $2p\bar{n}\bar{u}$, e quindi

(11) $$| e^{\psi(n_1 n_2 \ldots n_p)} < e^{2p\bar{n}\bar{u}}.$$

Risulta dunque

(12) $$M(n_1 n_2 \ldots n_p) < e^{-n_h^2 N + 2p\bar{n}\bar{u}}$$

Ciò posto vediamo la convergenza della serie a termini positivi

(6) $$\sum_{n_1 n_2 \ldots n_p} M(n_1 n_2 \ldots n_p).$$

A tale scopo indichiamo con R_n la somma di quei termini della (6) in cui uno dei termini $n_1 n_2 \ldots n_p$ abbia il valore $-n$ o il valore $+n$ (n numero intero) e gli altri abbiano tutti valori compresi tra $-n$ e $+n$, per modo che n è il massimo valore assoluto degli indici n_r relativi ai termini sommati. Osserviamo che facendo variare n da 0 a $+\infty$, le somme R_n vengono a contenere tutti i termini della serie (6).

Ora ogni somma R_n contiene un numero di termini non superiore a

$$(2n+1)^p$$

(sarebbero tanti se tutti i numeri $n_1 n_2 \ldots n_p$ potessero variare da $-n$ a $+n$ e non ci fosse il vincolo che uno almeno di essi sia appunto o $-n$ o $+n$); consegue per la disuguaglianza (12), nella quale si assume come n_h l'n ora considerato:

$$R_n < (2n+1)^p e^{-n^2 N + 2np\bar{u}}.$$

Posto ora

$$S_n = (2n+1)^p e^{-n^2 N + 2np\bar{u}}$$

la convergenza della serie (6) risulterà dimostrata appena si riconosca quella della serie semplice

$$\Sigma S_n,$$

e questa segue dal criterio del rapporto.

È infatti

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{(2n+1)^p e^{-n^2 N + 2np\bar{u}}}{(2n-1)^p e^{-(n-1)^2 N + 2(n-1)p\bar{u}}} = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^p e^{-(2n-1)N + 2p\bar{u}}$$

sicchè il rapporto $\frac{S_n}{S_{n-1}}$ tende a zero col tendere di n all'infinito.

30. Proprietà delle funzioni *theta*. — La *funzione theta*

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_p)$$

soddisfa ad alcune *relazioni notevoli.*

1) La funzione θ *è funzione pari,* cioè non cambia di valore cambiando segno contemporaneamente a tutti i suoi argomenti:

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_p) = \theta(-u_1 \mid -u_2 \mid \ldots \mid -u_p). \tag{1}$$

Infatti è

$$\theta = \Sigma e^{\varphi + \psi}$$

con

$$\varphi = \Sigma a_{rs} n_r n_s$$
$$\psi = 2\Sigma n_r u_r$$

sicchè cambiar segno agli argomenti $u_1 u_2 \dots u_p$ equivale a cambiar segno a tutti i numeri n_r, cioè a scambiare fra di loro i termini della serie multipla che fornisce la θ.

2) La *funzione* θ non cambia il suo valore *qualora si aumenti di* πi *uno qualunque dei suoi argomenti*, cioè

$$\theta(u_1 + \pi i \mid u_2 \mid \dots \mid u_p) = \theta(u_1 \mid u_2 \dots \mid u_p) \tag{2}$$

e simili.

Infatti un tale aumento porta ad aumentare ciascun ψ di un multiplo di $2\pi i$, e quindi lascia inalterato ciascun e^{ψ} e conseguentemente la serie θ.

3) *Se si aumentano*

$$u_1 \; u_2 \dots u_p$$

rispettivamente dei termini della prima colonna

$$a_{11} \; a_{21} \dots a_{p1},$$

la θ *viene moltiplicata per*

$$e^{-a_{11} - 2u_1},$$

o, più in generale, se si aumentano gli argomenti $u_1 u_2 \dots u_p$ rispettivamente di

$$a_{1s} \; a_{2s} \dots a_{ps},$$

la θ viene moltiplicata per

$$e^{-a_{ss} - 2u_s}:$$

cioè

$$\theta(u_1 + a_{1s} \mid u_2 + a_{2s} \mid \dots \mid u_p + a_{ps}) = e^{-a_{ss} - 2u_s} \theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_p). \tag{3}$$

Dimostriamo l'enunciato nel suo caso esemplificativo caratteristico $s = 1$.

Perciò cominciamo ad osservare che

$$\varphi(n_1 + 1, n_2 \dots n_p) = \varphi(n_1 n_2 \dots n_p) + \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n_1^2}$$

cioè

$$\begin{aligned} &\varphi(n_1 + 1, \; n_2 \dots n_p) = \\ &= \varphi(n_1 n_2 \dots n_p) + 2(a_{11} n_1 + a_{21} n_2 \dots + a_{p1} n_p) + a_{11} \end{aligned} \tag{4}$$

e

$$\psi(n_1 + 1, n_2 \dots n_p) = \psi(n_1 n_2 \dots n_p) + \frac{\partial\psi}{\partial n_1}$$

cioè

(5) $$\psi(n_1 + 1, n_2 \dots n_p) = \psi(n_1 n_2 \dots n_p) + 2u_1.$$

Segue dalle (4) e (5) che se si cambia, nello sviluppo di θ dato dalla (5) del paragrafo precedente, ciascun numero n_1 nel successivo $n_1 + 1$, i termini della serie multipla vengono moltiplicati per il fattore

$$e^{2(a_{11}n_1 + a_{21}n_2 \dots + a_{p1}n_p) + a_{11} + 2u_1}$$

variabile da termine a termine, e tuttavia con ciò non si altera il valore della serie stessa.

Sostituendo invece ad $u_1 u_2 \dots u_p$

$$u_1 + a_{11}, \quad u_2 + a_{21} \dots u_p + a_{p1}$$

ciascun termine viene moltiplicato per il fattore variabile

$$e^{2(a_{11}n_1 + a_{21}n_2 \dots + a_{p1}n_p)}.$$

Segue che è

$$\theta(u_1 + a_{11} \mid u_2 + a_{21} \mid \dots \mid u_p + a_{p1})\, e^{a_{11} + 2u_1} = \theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_p)$$

cioè la relazione (3) nel caso $s = 1$ in cui ci siamo posti.

Il fatto che l'aumento dei periodi subìto dagli argomenti di una θ moltiplichi questa per un esponenziale, che non è mai nullo, significa che la θ, pur non essendo essa esattamente periodica, ha i propri *zeri distribuiti periodicamente*, cioè

$$\theta(u_1 + a_{1s} \mid u_2 + a_{2s} \mid \dots \mid u_p + a_{ps})$$

è nulla quando e solo quando lo sia

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_p).$$

Le stesse proprietà inerenti alla funzione θ delle variabili $u_1 u_2 \dots u_p$ si hanno quando le variabili stesse siano aumentate ciascuna di una costante addittiva, cioè quando si assumano come parametri

$$u_1 + c_1, \quad u_2 + c_2, \quad \dots \quad u_p + c_p$$

con $c_1 c_2 \dots c_p$ costanti; e ancora si potrà considerare la θ moltiplicata per un'altra costante k, cioè in generale potrà assumersi la funzione $\bar{\theta}$ data da

$$\bar{\theta} = k\,\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots \mid u_p + c_p).$$

Avvertenza. — Ad evitare possibili errori conviene notare esplicitamente che quando si diminuiscano gli argomenti

$$u_1\, u_2 \dots u_p$$

dei moduli di (periodicità)

$$a_{1s}\, a_{2s} \dots a_{ps}$$

la funzione θ viene divisa per

$$e^{a_{ss} - 2u_s}$$

(cioè moltiplicata per $e^{-a_{ss}+2u_s}$), e non divisa per $e^{-a_{ss} \quad 2u_s}$ come sembrerebbe a prima vista.

Infatti si ha

$$\theta(u_1 - a_{1s} + a_{1s} \mid u_2 - a_{2s} + a_{2s} \mid \dots \mid u_p - a_{ps} + a_{ps}) =$$
$$= \theta(u_1 - a_{1s} \mid u_2 - a_{2s} \mid \dots \mid u_p - a_{ps})\, e^{-a_{ss}-2(u_s - a_{ss})}$$

cioè

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_p) = \theta(u_1 - a_{1s} \mid u_2 - a_{2s} \mid \dots \mid u_p - a_{ps}) e^{a_{ss}-2u_s}.$$

Similmente accade che quando si aumentino gli argomenti del doppio dei moduli, cioè si passi da

$$u_1,\ u_2 \dots u_p \qquad \text{a} \qquad u_1 + 2a_{1s},\quad u_2 + 2a_{2s},\ \dots\quad u_p + 2a_{ps}$$

la θ viene moltiplicata per

$$e^{-4a_{ss}-4u_s}$$

e non per $e^{2(-a_{ss}-2u_s)}$ come potrebbe sembrare.

E ciò si verifica sommando successivamente due volte i moduli $a_{1s}\, a_{2s} \dots a_{ps}$.

È notevole che le proprietà 2) e 3) sopra enunciate caratterizzano la funzione θ, in quanto vale il

Teorema. — *Ogni funzione analitica di* p *variabili*

$$f(u_1 u_2 \dots u_p)$$

che sia regolare per tutti i valori finiti delle p *variabili e sod-*

disfi alle relazioni funzionali

$$(2)\qquad \begin{cases} f(u_1+\pi i,\ u_2 \dots u_p)=f(u_1,\ u_2 \dots u_p) \\ f(u_1,\ u_2+\pi i,\ u_3 \dots u_p)=f(u_1,\ u_2 \dots u_p) \end{cases}$$

e simili; e alle

$$(3)\qquad f(u_1+a_{1s},\ u_2+a_{2s}, \dots u_p+a_{ps})=f(u_1,\ u_2, \dots u_p)e^{-a_{ss}-2u_s}$$

per s = 1, 2 ... p, *coincide, all'infuori di una costante moltiplicativa, con la serie theta di cui abbiamo dato lo sviluppo.*

La dimostrazione si ottiene facilmente in base al

Lemma. — *Ogni funzione* (analitica e regolare)

$$f(u_1 u_2 \dots u_p)$$

che *ammetta i periodi* πi cioè soddisfaccia alle relazioni (2), *è sviluppabile*, e in modo unico, *in* una *serie multipla*

$$(6)\qquad \Sigma A_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_p} e^{2(\nu_1 u_1+\nu_2 u_2 \dots +\nu_p u_p)}$$

dove $\nu_1\nu_2 \dots \nu_p$ indicano numeri interi e $A_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_p}$ coefficienti numerici dipendenti appunto da questi interi.

Infatti poniamo

$$\begin{array}{lll} 2u_1=\log z_1 & \text{cioè} & z_1=e^{2u_1} \\ 2u_2=\log z_2 & \text{cioè} & z_2=e^{2u_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ 2u_p=\log z_p & \text{cioè} & z_p=e^{2u_p} \end{array}$$

Con questa posizione la f diviene una funzione regolare di $z_1 z_2 \dots z_p$ e quindi sviluppabile con la serie, multipla, di potenze:

$$f=\Sigma A_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_p} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \dots z_p^{\nu_p}$$

il quale sviluppo è unico. Ritornando a porre e^{2u_s} anzichè z_s si perviene al lemma, cioè all'esistenza e all'unicità dello sviluppo

$$(6)\qquad f=\Sigma A_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_p} e^{2(\nu_1 u_1+\nu_2 u_2 \dots +\nu_p u_p)}.$$

Ciò posto consideriamo una funzione f soddisfacente alle condizioni 2) e 3), e per essa assumiamo lo sviluppo (6).

Le relazioni (3) ci dànno

$$\Sigma A_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_p} e^{2(\nu_1 u_1+\nu_2 u_2 \dots \nu_p u_p)} e^{-a_{ss}-2u_s} =$$
$$= \Sigma A_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_p} e^{2(\nu_1 u_1+\nu_1 a_{1s}+\nu_2 u_2+\nu_2 a_{2s}+ \dots +\nu_p u_p+\nu_p a_{ps})}$$

cioè

$$\Sigma A_{\nu_1\nu_2\dots\nu_p} e^{2(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \dots \nu_p u_p)} =$$

$$= \Sigma A_{\nu_1\nu_2\dots\nu_p} e^{(a_{ss}+2\nu_1 a_{1s}+2\nu_2 a_{2s} \dots + 2\nu_p a_{ps})} e^{2\{\nu_1 u_1 + \dots + (\nu_s+1)u_s + \dots + \nu_p u_p\}}.$$

Consideriamo in questi due sviluppi il coefficiente di

$$e^{2\{\nu_1 u_1 + \dots (\nu_s+1)u_s + \dots + \nu_p u_p\}};$$

nel primo esso è

$$A_{\nu_1 \dots \nu_s+1 \dots \nu_p}$$

nel secondo invece è

$$A_{\nu_1 \dots \nu_s \dots \nu_p} \cdot e^{a_{ss}+2\nu_1 a_{1s} + \dots + 2\nu_p a_{ps}}.$$

Si conclude così l'uguaglianza:

$$(7) \qquad A_{\nu_1 \dots \nu_s+1 \dots \nu_p} = A_{\nu_1 \dots \nu_s \dots \nu_p} \cdot e^{a_{ss}+2\nu_1 a_{1s} + \dots + 2\nu_p a_{ps}}.$$

Dando ad s i valori 1, $2 \dots p$, la relazione ricorrente (7) permette di dedurre tutti i coefficienti A del primo di essi $A_{00\dots0}$ mediante equazioni lineari omogenee.

Segue che, preso ad arbitrio $A_{00\dots0}$, tutti gli altri coefficienti $A_{\nu_1\nu_2\dots\nu_p}$ sono da questo determinati in modo univoco, e che qualora si moltiplichi $A_{00\dots0}$ per un fattore di proporzionalità k, altrettanto accade per tutti gli altri coefficienti, e quindi per la funzione f rappresentata dalla (6). Questa dunque risulta definita dalle relazioni (2) e (3) a meno di un fattore k.

Nota. — Affinchè abbia senso parlare delle proprietà di periodicità della serie *theta*, e, più in generale, affinchè tutta la teoria che svolgeremo non possa apparire illusoria, è necessario eliminare un dubbio critico, riconoscendo che una funzione θ non può mai riuscire identicamente nulla, cosa che in verità si presenterebbe qualora il coefficiente $A_{00\dots0}$ sopra considerato diventasse zero per una particolare scelta della tabella dei periodi a_{rs}.

A tale scopo cominciamo a dimostrare che non può essere identicamente nulla la θ generica. Si consideri infatti la particolare tabella dei periodi ridotta ad aver tutti -1 sulla diagonale principale e zero nelle altre caselle:

$$a_{rs} = -1 \quad \text{per} \quad r = s, \qquad a_{rs} = 0 \quad \text{per} \quad r \neq s.$$

Per questa particolare θ risulta, evidentemente, $A_{00\ldots 0} = \theta(00\ldots 0)$ una sommatoria di termini del tipo e^{-n^2} e così essenzialmente positiva. Non essendo dunque nulla questa θ particolare non può neppure esser nulla la θ generica.

Per dimostrare poi che non può essere nulla (identicamente) nessuna altra θ, dobbiamo premettere alcune relazioni differenziali cui soddisfa una θ.

Riprendendo le formule (4) del paragrafo precedente,

$$\begin{cases} \varphi(n_1 n_2 \ldots n_p) = \Sigma a_{rs} n_r n_s \\ \psi(n_1 n_2 \ldots n_p) = 2\Sigma n_r u_r \end{cases}$$

risulta, per $r \neq s$,

$$\frac{\partial^2 e^{\psi+\varphi}}{\partial u_r \partial u_s} = e^{\varphi+\psi} \cdot 4 n_r n_s$$

$$\frac{\partial e^{\varphi+\psi}}{\partial a_{rs}} = e^{\varphi+\psi} \cdot 2 n_r n_s$$

e quindi, sempre per $r \neq s$,

$$\frac{\partial^2 e^{\varphi+\psi}}{\partial u_r \partial u_s} = 2 \frac{\partial e^{\varphi+\psi}}{\partial a_{rs}};$$

invece, per $r = s$, si ha ancora

$$\frac{\partial^2 e^{\varphi+\psi}}{\partial u_r^2} = e^{\varphi+\psi} \cdot 4 n_r^2$$

mentre

$$\frac{\partial e^{\varphi+\psi}}{\partial a_{rr}} = e^{\varphi+\psi} \cdot n_r^2.$$

Di qui, in base alla relazione (5) del paragrafo precedente che dà lo sviluppo della θ:

$$\theta((u)) = \Sigma e^{\varphi+\psi}$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_r \partial u_s} = 2 \frac{\partial \theta}{\partial a_{rs}}; \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_r^2} = 4 \frac{\partial \theta}{\partial a_{rr}} \tag{19}$$

Le relazioni differenziali ora scritte dicono che se una θ è identicamente nulla, altrettanto accade delle sue derivate rispetto ai parametri (periodi) a_{rs}, che sostanzialmente coincidono con le derivate seconde rispetto alle variabili u. Si conclude che se una particolare θ è identicamente nulla, lo sono parimenti le θ ad essa infinitamente vicine (che risultano dando incrementi infinitesimi ai periodi a_{rs}) e quindi lo è ogni altra θ cui si perviene per variazione continua dei periodi a_{rs}.

30. Nota sulle funzioni theta con caratteristica. — Consideriamo ora il caso che gli argomenti $u_1 u_2 \ldots u_p$ che entrano nella funzione theta sieno espressi sotto forma di somme di due termini:

$$u_1 + c_1, \quad u_2 + c_2, \quad \ldots u_p + c_p$$

e che ancora la θ stessa sia moltiplicata per una costante k, cioè consideriamo la nuova funzione

$$\bar{\theta} = k\,\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \ldots u_p + c_p). \tag{1}$$

Naturalmente la introduzione di questi nuovi parametri k, c_1, $c_2 \ldots c_p$ dà qualcosa di notevole quando ad essi si attribuiscano valori particolari: ciò che ci porterà alle cosidette *caratteristiche.*

Riprendiamo la espressione analitica della theta:

$$\left\{\begin{aligned} &\theta(u_1 \mid u_2 \mid \ldots u_p) = \Sigma e^{\varphi+\psi} \\ &\varphi = \Sigma a_{rs} n_r n_s \\ &\psi = 2\Sigma n_r u_r. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

e sostituiamo in questa espressione della θ

$$\begin{matrix} n_r & \text{con} & n_r + g_r \\ u_r & \text{con} & u_r + h_r \pi i \end{matrix} \qquad r = 1,\ 2 \ldots p$$

dove g_r e h_r indicano *numeri reali*; la nuova funzione che così risulta si indica con

$$\theta \begin{bmatrix} h_1 h_2 \ldots h_p \\ g_1 g_2 \cdots g_p \end{bmatrix} (u_1 \mid u_2 \mid \ldots u_p)$$

e *chiamasi* θ *con caratteristica*, in quanto la *matrice dei* 2p *numeri*

$$\begin{bmatrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \ldots h_p \end{bmatrix}$$

dicesi appunto la sua *caratteristica.*

Occorre riconoscere che la sostituzione indicata equivale a moltiplicare la $\theta((u))$ per un esponenziale e ad aggiungere agli argomenti u_r certe costanti c_r; naturalmente la suddetta funzione esponenziale e le costanti c_r dipendono dai numeri g e h che costituiscono la caratteristica.

Precisamente risulta essere

$$(3)\quad \theta\begin{bmatrix} g_1 g_2 \dots g_p \\ h_1 h_2 \dots h_p \end{bmatrix}(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p) = ke^{\gamma}\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots u_p + c_p)$$

con

$$(4)\quad \begin{cases} k = e^{\Sigma a_{rs} g_r g_s + 2\Sigma g_r h_r \pi i} \\ \gamma = 2\Sigma g_r u_r \\ c_r = \sum_s a_{rs} g_s + h_r \pi i \end{cases}$$

Infatti è

$$\Sigma a_{rs}(n_r + g_r)(n_s + g_s) = \Sigma a_{rs} n_r n_s + 2\Sigma a_{rs} n_r g_s + \Sigma a_{rs} g_r g_s$$

ed è

$$2\Sigma(n_r + g_r)(u_r + h_r \pi i) =$$
$$= 2\Sigma n_r u_r + 2\Sigma g_r u_r + 2\Sigma n_r h_r \pi i + 2\Sigma g_r h_r \pi i.$$

Pertanto la trasformazione indicata dalla caratteristica $\begin{bmatrix} g_1 g_2 \dots g_p \\ h_1 h_2 \dots h_p \end{bmatrix}$ vale a moltiplicare ciascun termine della serie multipla che dà l'espressione di θ (ciascun termine riuscendo definito da una scelta dei numeri interi $n_1 n_2 \dots n_p$) per un moltiplicatore del tipo

$$e^{\lambda}$$

dove il λ varia da termine a termine della serie multipla, ed è espresso da

$$\lambda = 2\Sigma a_{rs} n_r g_s + \Sigma a_{rs} g_r g_s + 2\Sigma g_r u_r + 2\Sigma n_r h_r \pi i + 2\Sigma g_r h_r \pi i.$$

Qui si noti che dei 5 addendi che entrano a formare λ, i 3 addendi

$$\Sigma a_{rs} g_r g_s, \quad 2\Sigma g_r h_r \pi i, \quad 2\Sigma g_r u_r$$

sono i medesimi per tutti gli elementi della sommatoria multipla, non contenendo i numeri $n_1 n_2 \dots n_p$, variabili da termine a termine, mentre gli altri due addendi, insieme riuniti, dànno

$$2\Sigma n_r(a_{rs} g_s + h_r \pi i),$$

e questo valore, mettendo in evidenza gli indici variabili, può scriversi

$$2\sum_r n_r \left\{ \sum_s a_{rs} g_s + h_r \pi i \right\}.$$

Similmente se si passa dalla

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p)$$

alla

$$\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots u_p + c_p),$$

ciascun termine della serie θ viene moltiplicato per un moltiplicatore del tipo

$$e^{\mu}$$

dove μ varia da termine a termine, ed è espresso da

$$\mu = 2\Sigma n_r c_r.$$

Segue dunque che, ponendo

$$(4) \qquad \begin{cases} c_r = \sum_s a_{rs} g_s + h_r \pi i \\ k = e^{\Sigma a_{rs} g_r g_s + 2\Sigma g_r h_r \pi i} \\ \gamma = 2\Sigma g_r u_r, \end{cases}$$

risulta appunto la relazione (3) che si voleva stabilire.

Ora è importante osservare che, come vedremo fra poco, la natura funzionale di una θ con caratteristica non risulta alterata se si varia di una unità uno qualunque dei $2p$ numeri della sua caratteristica, in quanto ciò non modifica affatto la θ o la moltiplica per una costante numerica. Pertanto ciascun g_r e ciascun h_r potrà sempre supporsi compreso fra 0 e 1, cioè potranno sempre supporsi verificate le $2p$ disuguaglianze

$$0 \leq g_r < 1, \quad 0 \leq h_r < 1 \qquad r = 1, 2, \dots p.$$

Verifichiamo la cosa, mostrando precisamente che ove si aumenti di una unità un g_r la θ resta inalterata, mentre viene moltiplicata per il fattore numerico $e^{2g_r \pi i}$ ove si aumenti di una unità h_r. Infatti:

Aumentando di una unità g_r:
l'esponente di k risulta aumentato di

$$a_{rr} + 2\sum_s a_{rs} g_s + 2h_r \pi i;$$

(l'esponente) γ risulta aumentato di

$$2u_r;$$

ogni termine addittivo c_s risulta aumentato del periodo

$$a_{sr}$$

e quindi la $\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots u_p + c_p)$ risulta moltiplicata per

$$e^{-a_{rr} - 2(u_r + c_r)}.$$

In definitiva la θ con caratteristica:

$$\theta\begin{bmatrix} g_1 g_2 \dots g_p \\ h_1 h_2 \dots h_p \end{bmatrix}(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p)$$

risulta moltiplicata per e^{ν} dove l'esponente ν è nullo valendo

$$\nu = a_{rr} + 2\sum_s a_{rs} g_s + 2h_r \pi i + 2u_r - a_{rr} - 2u_r - 2c_r$$

ed è appunto

$$\nu = 0 \qquad \text{in quanto} \qquad c_r = \Sigma a_{rs} g_s + h_r \pi i.$$

Similmente aumentando di una unità h_r:
l'esponente di k risulta aumentato di

$$2g_r \pi i;$$

(l'esponente) γ non muta;
ciascun termine additivo c_s viene aumentato del periodo

$$\pi i$$

e quindi la

$$\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots u_p + c_p)$$

risulta inalterata.

In definitiva la θ con caratteristica viene moltiplicata, al pari del coefficiente numerico k, per

$$e^{2g_r \pi i}.$$

La *caratteristica* di una θ i cui *numeri* g_r e h_r *soddisfino* le *disuguaglianze*

$$0 \leq g_r < 1, \quad 0 \leq h_r < 1 \qquad [r = 1, 2 \dots p]$$

dicesi *normale*, e similmente dicesi *normale* la funzione θ corrispondente.

Per semplicità di scrittura la θ che ha per argomenti $u_1 u_2 \dots u_p$ e per caratteristica

$$\begin{bmatrix} g_1 g_2 \dots g_p \\ h_1 h_2 \dots h_p \end{bmatrix}$$

si scriverà brevemente col simbolo

$$\theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(u\right).$$

Dopo di ciò passiamo a riconoscere le proprietà di ***periodicità*** delle θ ***con caratteristica***, tenendo presente la tabella dei periodi della θ semplice.

Se si aumenta u_r di πi, lasciando inalterate le altre u:

k resta inalterato,

γ viene aumentato di $2g_r\pi i$,

$u_r + c_r$ aumenta di πi, mentre ogni altro argomento $u_s + c_s$ resta inalterato, sicchè resta inalterata la $\theta(u_1 + c_1 | u_2 + c_2 | \dots u_p + c_p)$; in definitiva dunque:

$$\theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1 | \dots | u_r + \pi i | \dots u_p) = e^{2g_r\pi i}\, \theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1 | \dots | u_r | \dots u_p). \tag{5}$$

Se invece si aumenta ciascuna variabile u_r del corrispondente periodo a_{rs} contenuto nella colonna s^{ma} della tabella:

k resta inalterato,

γ viene aumentato di $2\Sigma g_r a_{rs}$,

ogni argomento $u_r + c_r$ viene aumentato di a_{rs} sicchè la $\theta(u_1 + c_1 | u_2 + c_2 | \dots u_p + c_p)$ viene moltiplicata per

$$e^{-a_{ss} - 2(u_s + c_s)};$$

complessivamente la θ con caratteristica risulta moltiplicata per

$$e^{\nu} \quad \text{con} \quad \nu = 2\Sigma g_r a_{rs} - a_{ss} - 2u_s - 2c_s$$

e poichè

$$c_s = \Sigma a_{rs} g_s + h_s \pi i$$

segue

$$\nu = - a_{ss} - 2u_s - 2h_s\pi i.$$

In definitiva dunque

$$\theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1 + a_{1s} | u_2 + a_{2s} | \dots | u_p + a_{ps}) = e^{-a_{ss} - 2h_s\pi i - 2u_s}\, \theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1 | u_2 | \dots | u_p). \tag{6}$$

Hanno speciale importanza le caratteristiche per le quali i numeri g e h sono *numeri razionali*, in particolare frazioni con *denominatore* 2. Tali *caratteristiche* si chiameranno *bipartite;* così le θ corrispondenti si chiameranno a caratteristica bipartite o, più semplicemente, esse stesse bipartite.

Per $p = 1$ si hanno 4 caratteristiche *normali* bipartite:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

In generale per p qualunque si hanno 2^{2p} caratteristiche normali bipartite. Ciascuna di esse si può scrivere nella forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{2} & \frac{\lambda_2}{2} & \cdots & \frac{\lambda_p}{2} \\ \\ \frac{\mu_1}{2} & \frac{\mu_2}{2} & \cdots & \frac{\mu_p}{2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

dove $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \; \mu_1 \mu_2 \dots \mu_p$ sono numeri interi che possono aver uno dei due valori 0 e 1.

La θ corrispondente alla caratteristica (7) si suole indicare brevemente con

$$\theta_{\lambda\mu}.$$

Per le θ bipartite valgono alcuni notevoli teoremi.

TEOREMA 1. — *Una funzione theta bipartita è pari o dispari; precisamente è pari se*

$$\Sigma \lambda_r \mu_r \equiv 0 \qquad \text{mod. } 2$$

è invece dispari se

$$\Sigma \lambda_r \mu_r \equiv 1 \qquad \text{mod. } 2$$

cioè ha la stessa parità della somma $\Sigma \lambda_r \mu_r$.

Per dimostrare questa proposizione cominciamo con l'osservare che la nostra θ non cambia qualora si cambi segno ai numeri λ: infatti in tal caso se $\lambda_r = 0$ il corrispondente g_r è esso pure nullo e non risulta alterato, se invece $\lambda_r = 1$, il corrispondente g_r, che ha il valore $\frac{1}{2}$, risulta diminuito di 1, e ciò (come abbiamo visto a pag. 172) non modifica il valore della θ.

Ciò posto sopra la θ (con caratteristica) si eseguiscano le seguenti alterazioni:

si cambi segno agli argomenti u;

si cambi segno ai λ, cioè ai g;

si tolga poi da ciascun termine addittivo c_r la quantità (variabile con l'indice r) $2h_r\pi i = \mu_r\pi i$ passando così da

$$c_r = \Sigma a_{rs}g_s + h_r\pi i$$

a

$$c' = -\Sigma a_{rs}g_s - h_r\pi i = -c_r.$$

Con ciò, nell'espressione di θ

$$(8)\quad \theta\begin{bmatrix} g_1 g_2 \dots g_p \\ h_1 h_2 \dots h_p \end{bmatrix}(u_1 \mid u_2 \dots \mid u_p) = ke^{\gamma}\,\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots u_p + c_p),$$

dove, ricordiamo,

$$k = e^{\Sigma a_{rs}g_r g_s + 2\Sigma g_r h_r \pi i}$$

$$\gamma = 2\Sigma g_r u_r,$$

accade che:

l'esponente di k viene diminuito di

$$4\Sigma g_r h_r \pi i = \Sigma\lambda_r\mu_r\pi i,$$

γ resta inalterato,

ciascun $u_r + c_r$ cambia segno; e perciò la

$$\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots \mid u_p + c_p)$$

resta inalterata, in quanto la θ è funzione pari.

In definitiva dunque la nostra θ con caratteristica viene moltiplicata per

$$e^{\Sigma\lambda_r\mu_r\pi i}$$

che risulta $+1$ oppure -1 secondo la parità di $\Sigma\lambda_r\mu_r$.

D'altra parte, delle tre alterazioni eseguite sulla θ solo il cambiamento del segno degli argomenti u modifica il valore della θ; onde segue l'enunciato.

In relazione a questo teorema, una caratteristica bipartita si dirà *pari* o *dispari* secondo la parità di $\Sigma\lambda_r\mu_r$.

Come corollario del teorema precedente risulta:

Teorema 2. — *Una theta bipartita dispari* $\theta_{\lambda\mu}(u)$, si annulla per $u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0$.

Infatti cambiando segno agli argomenti $u_r = 0$ la $\theta_{\lambda\mu}(u)$ non resta alterata, pur cambiando di segno.

Si ponga ora

$$(9) \qquad c_r = \frac{1}{2}(\mu_r \pi i + \sum_s \lambda_s a_{rs}) \qquad [r = 1, 2 \dots p].$$

Per *questi* gruppi di numeri c_r, dipendenti dei valori λ e μ, sussiste il

TEOREMA 3. — *Le due funzioni*

$$\theta_{\lambda\mu}(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p)$$

e

$$\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots u_p + c_p)$$

hanno i medesimi zeri.

La dimostrazione del teorema si ottiene riconoscendo che

$$(10) \quad \theta_{\lambda\mu}(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p) = k\,\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots \mid u_p + c_p)\,e^{\Sigma\lambda_r u_r}.$$

Questa relazione non è altro, infatti, che la formula (8)

$$\theta\begin{bmatrix} g_1 g_2 \dots g_p \\ h_1 h_2 \dots h_p \end{bmatrix}(u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_p) = k e^{\gamma}\theta(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots \mid u_p + c_p)$$

dove

$$c_r = \sum_s a_{rs} g_s + h_r \pi i = \frac{1}{2}(\mu_r \pi i + \sum_s a_{rs}\lambda_s)$$

e

$$\gamma = 2\Sigma g_r u_r = \Sigma \lambda_r u_r.$$

Lo stesso teorema può anche enunciarsi dicendo che: Le due funzioni

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p)$$

e

$$\theta_{\lambda\mu}(u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2 \mid \dots u_p + c_p)$$

hanno gli stessi zeri.

Infatti basta notare che

$$2c_r = \mu_r \pi i + \Sigma \lambda_s a_{rs}$$

risulta una somma di periodi delle θ, e quindi

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p)$$

e

$$\theta(u_1 + 2c_1 \mid u_2 + 2c_2 \mid \dots \mid u_p + 2c_p)$$

hanno i medesimi zeri, sicchè dal primo enunciato si passa al secondo sostituendo gli argomenti u_r con $u_r + c_r$.

I numeri $c_1 c_2 \dots c_p$ espressi dalle (9), e così legati agli interi λ e μ, costituiscono un *gruppo di semiperiodi*, che diremo *pari* o *dispari* secondo la parità della relativa caratteristica.

Il teorema precedente conduce, come immediata conseguenza, a una proposizione assai notevole quantunque semplicissima, data dal

TEOREMA 4. — *La funzione theta*

$$\theta(u_1 \mid u_2 \mid \dots u_p),$$

si annulla dando agli argomenti i valori $c_1 c_2 \dots c_p$ *di un gruppo dispari di semiperiodi.*

Infatti per ogni $\theta_{\lambda\mu}$ dispari è

$$\theta_{\lambda\mu}(0 \mid 0 \mid \dots 0) = 0$$

e quindi

$$\theta(c_1 \mid c_2 \mid \dots c_p) = 0.$$

31. Gli zeri della funzione theta. — Sia data una curva algebrica $f(xy) = 0$, di genere p. Consideriamo i p integrali abeliani di prima specie normali legati alla curva stessa:

$$u_s = \int \frac{\varphi_{n-3}^{(s)}}{f_y'} dx \qquad [s = 1, 2 \dots p].$$

Fissato un punto $O = (x_0 y_0)$ quale origine dei cammini di integrazione, e tagliata la riemanniana di f lungo le $2p$ retrosezioni A_r e B_r $(r = 1, 2 \dots p)$, il valore di ogni integrale u_s risulta funzione univoca del secondo estremo, X, del cammino di integrazione: scriveremo dunque

$$(1) \qquad u_s(X) = \int_O^X \frac{\varphi_{n-3}^{(s)}}{f_y'} dx \qquad [s = 1, 2 \dots p].$$

Per rendere più visibile il cammino di integrazione conviene supporre la riemanniana di f data dal solito poligono a $4p$ lati: a questo modello ci riferiremo sempre nel seguito.

Degli integrali u_s consideriamo la tabella dei periodi

$$\begin{matrix} \pi i & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp}. \end{matrix}$$

In base a questa matrice di moduli costruiamo una funzione θ a p argomenti:

$$\theta(u_1, u_2 \dots u_p).$$

Attribuiamo agli argomenti $u_1 u_2 \dots u_p$ i valori

$$u_1(X) \quad u_2(X) \dots u_p(X)$$

che i nominati integrali abeliani hanno in un punto X della (riemanniana R della) curva $f(xy)=0$: *con ciò la* θ *risulta funzione del punto* X, e la indicheremo appunto con

$$\theta(X)$$

avendosi, per definizione,

$$(2) \qquad \theta(X) = \theta \left\{ \int_O^X \frac{\varphi_{n-3}^{(1)}}{f_y'} dx \,\middle|\, \int_O^X \frac{\varphi_{n-3}^{(2)}}{f_y'} dx \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \int_O^X \frac{\varphi_{n-3}^{(p)}}{f_y'} dx \right\}.$$

Prese poi p costanti arbitrarie

$$c_1 \; c_2 \dots c_p$$

possiamo formare la

$$\theta \{ u_1(X) + c_1 \mid u_2(X) + c_2 \mid \dots u_p(X) + c_p \}$$

che indichiamo brevemente con

$$\theta(X + c),$$

avendosi dunque, per definizione

$$(3) \quad \theta(X+c) = \theta \left\{ \int_O^X \frac{\varphi_{n-3}^{(1)}}{f_y'} dx + c_1 \,\middle|\, \int_O^X \frac{\varphi_{n-3}^{(2)}}{f_y'} dx + c_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \int_O^X \frac{\varphi_{n-3}^{(p)}}{f_y'} dx + c_p \right\}$$

Per la funzione $\theta(X+c)$ vogliamo determinare anzitutto il numero degli zeri, cioè il numero dei punti X della curva f per cui risulta

$$(4) \qquad \theta(X+c) = 0$$

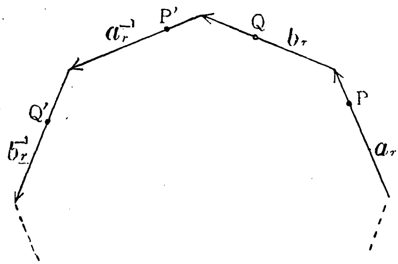
e successivamente una relazione fra le costanti $c_1 \, c_2 \dots c_p$ che entrano a formare le variabili di $\theta(X+c)$ e i valori che gli integrali di prima specie hanno nei sunnominati zeri di θ.

Poniamo dunque brevemente

$$\theta = \theta(X+c)$$

e calcoliamo l'indicatore logaritmico di CAUCHY

$$\int_\gamma d \log \theta \tag{5}$$



essendo, al solito, γ il contorno del poligono R, riemanniana della curva f.

Per il calcolo dell'integrale (5) si osservi che nei punti corrispondenti P e P' di a_r e a_r^{-1} i valori di u_s, e così quelli di $u_s + c_s$, differiscono di a_{sr}, periodo di u_s relativo a b_r:

$$u_s(P') + c_s = u_s(P) + a_{sr} + c_s; \tag{6}$$

similmente i valori di $u_s + c_s$ nei punti corrispondenti Q e Q' di b_r e b_r^{-1} differiscono del periodo relativo ad a_r^{-1} cioè

$$\tag{6'} \left\{ \begin{aligned} u_s(Q') + c_s &= u_s(Q) + c_s && \text{per } s \neq r \\ u_s(Q') + c_s &= u_s(Q) + c_s - \pi i && \text{per } s = r. \end{aligned} \right.$$

Tenuto conto delle proprietà di periodicità delle θ segue immediatamente

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} \theta(P' + c) &= \theta(P + c)e^{-a_{rr} - 2u_r(P) - 2c_r} \\ \theta(Q' + c) &= \theta(Q + c) \end{aligned} \right.$$

e quindi

$$\tag{7'} \left\{ \begin{aligned} \log \theta(P' + c) &= \log \theta(P + c) - a_{rr} - 2u_r(P) - 2c_r \\ \log \theta(Q' + c) &= \log \theta(Q + c). \end{aligned} \right.$$

Pertanto

$$\int_{a_r} d \log \theta(X + c) + \int_{a_r^{-1}} d \log \theta(X + c) = \int_{a_r} d\{2u_r(X)\} = 2\pi i$$

$$\int_{b_r} d \log \theta(X + c) + \int_{b_r^{-1}} d \log \theta(X + c) = 0.$$

Si conclude che, essendo

$$\int_\gamma = \sum \left\{ \int_{a_r} + \int_{a_r^{-1}} + \int_{b_r} + \int_{b_r^{-1}} \right\}$$

risulta

$$(8) \qquad \int_\gamma d \log \theta(X+c) = p \cdot 2\pi i.$$

Poichè $\theta(X+c)$ non ammette alcun punto singolare entro R, l'indicatore logaritmico (5), diviso per $2\pi i$, dà il numero degli zeri di θ. Si conclude il

TEOREMA. — *La funzione* $\theta(u_1+c_1 \mid u_2+c_2 \mid \ldots \mid u_p+c_p)$, concepita come funzione del punto X nel quale sono calcolati i valori $u_1 u_2 \ldots u_p$, *ammette, sulla riemanniana di* f, p *punti di zero*, quali si siano le costanti $c_1 c_2 \ldots c_p$ che figurano negli argomenti di θ.

Naturalmente si suppone che $\theta(x+c)$ non sia identicamente nulla al variare di X sulla curva f, e che le retrosezioni, cioè i lati a_r, b_r, a_r^{-1}, b_r^{-1}, non contengano alcuno zero di θ. Tratteremo più avanti il caso delle θ identicamente nulle.

Per determinare la relazione, che abbiamo in vista, fra le costanti $c_1 c_2 \ldots c_p$ e i valori degli integrali di prima specie negli zeri, $O_1 O_2 \ldots O_p$, della funzione $\theta(X+c)$, dobbiamo calcolare il valore dell'integrale

$$(9) \qquad \int_\gamma u_s \cdot d \log \theta(X+c) \qquad [s=1, 2 \ldots p].$$

Osserviamo che l'integrando risulta uguale a

$$u_s \frac{\theta'_x(X+c)}{\theta(X+c)},$$

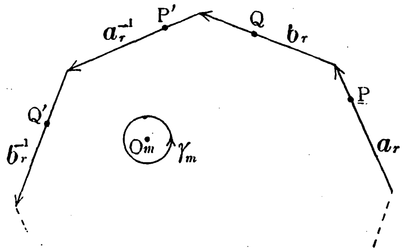
indicandosi con $\theta'_x(X+c)$ la derivata di $\theta(X+c)$ per rapporto alla ascissa x del punto X. Segue che l'integrando è regolare in tutti i punti della riemanniana R ad esclusione degli zeri di $\theta(X+c)$. In ciascuno di essi il rapporto $\dfrac{\theta'_x(X+c)}{\theta(X+c)}$ ha il residuo 1, sicchè l'integrando avrà come residuo in ciascun punto O_m $(m=1, 2 \ldots p)$ il valore $u_s(O_m)$ assunto da u_s nel punto O_m.

Contorniamo dunque ciascun punto O_m con un cerchio infinitesimo γ_m. Risulterà

$$(10) \qquad \int_\gamma u_s\, d \log \theta(X+c) = \sum_m \int_{\gamma_m} u_s\, d \log \theta(X+c) = 2\pi i \sum_m u_s(O_m).$$

D'altra parte calcoleremo, al solito, l'integrale (9) decomponendo γ nella somma di coppie di lati corrispondenti $a_r\, a_r^{-1}\; b_r\, b_r^{-1}$.

Riferendoci alle formule (7′) risulta anzitutto:



$$\int_{a_r} u_s\, d\log\theta(X+c) + \int_{a_r^{-1}} u_s\, d\log\theta(X+c) =$$

$$(11)\qquad = \int_{a_r} u_s\, d\log\theta(X+c) - (u_s + a_{sr})(d\log\theta(X+c) - 2du_r)$$

$$= \int_{a_r} - a_{sr}\, d\log\theta(X+c) + 2a_{sr}\, du_r + 2u_s\, du_r .$$

Ma:

$$(12)\qquad \int_{a_r} d\log\theta(X+c) = 0$$

in quanto nei due estremi di a_r i due valori di $\log\theta$ coincidono, come mostra la seconda delle (7′);

$$(12')\qquad \int_{a_r} du_r = \pi i\,;$$

$$(12'')\qquad \int_{a_r} u_s\, du_r = \text{ a un certo numero } h_{sr}$$

che dipende dai due indici s e r.

Risulta così

$$(13)\quad \int_{a_r} u_s\, d\log\theta(X+c) + \int_{a_r^{-1}} u_s\, d\log\theta(X+c) = 2a_{sr}\pi i + 2h_{sr}.$$

Calcoliamo poi

$$\int_{b_r} u_s d\log\theta(X+c) + \int_{b_r^{-1}} u_s d\log\theta(X+c).$$

Qui occorre distinguere i due casi $r = s$ e $r \neq s$. Anzitutto è, per $r = s$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{b_s} u_s\, d \log \theta(X + c) + \int_{b_s^{-1}} u_s\, d \log \theta(X + c) = \\
(14) \qquad &= \int_{b_s} u_s\, d \log \theta(X + c) - (u_s - \pi i)\, d \log \theta(X + c) = \\
&= \pi i \int_{b_s} d \log \theta(X + c).
\end{aligned}
$$

Ora l'integrale

$$\int_{b_s} d \log \theta(X + c)$$

è uguale alla differenza dei valori assunti da $\log \theta(X + c)$ nei due punti, diciamo B_s e B'_s, estremi inferiore e superiore di b_s: risulta dunque, per la prima delle (7')

$$(14') \qquad \int_{b_s} d \log \theta(X + c) \doteq - a_{ss} - 2u_s(B_s) - 2c_s$$

e quindi, indicato con h_s il valore numerico $u_s(B_s)$

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad &\int_{b_s} u_s\, d \log \theta(X + c) + \int_{b_s^{-1}} u_s d \log \theta(X + c) = \\
&= - \pi i(a_{ss} + 2h_s + 2c_s).
\end{aligned}
$$

Inoltre per $r \neq s$ è

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad &\int_{b_r} u_s\, d \log \theta(X + c) + \int_{b_r^{-1}} u_s\, d \log \theta(X + c) = \\
&= \int_{b_r} u_s\, d \log \theta(X + c) - u_s\, d \log \theta(X + c) = 0.
\end{aligned}
$$

In definitiva dunque

$$(17) \quad \int_{\gamma} u_s d \log \theta(X + c) = \sum_r (2a_{sr}\pi i + 2h_{sr}) - \pi i(a_{ss} + 2h_s + 2c_s).$$

Osserviamo che il valore

$$\sum_r (2a_{sr}\pi i + 2h_{sr}) - \pi i(a_{ss} + 2h_s)$$

è un certo numero che dipende solo dall'indice s (e dalla scelta primitiva delle retrosezioni) e non dalle costanti $c_1\, c_2 \ldots c_p$. Indichiamo tale valore con $2\pi i k_s$:

$$(18) \qquad \sum_r (2a_{sr}\pi i + 2h_{sr}) - \pi i(a_{ss} + 2h_s) = 2\pi i k_s.$$

Tenuto conto della (10) risulta

$$2\pi i \sum_m u_s(O_m) = 2\pi i k_s - 2\pi i c_s$$

da cui, dividendo per $2\pi i$

$$(19) \qquad \sum_m u_s(O_m) = k_s - c_s \qquad\qquad s = 1,\ 2 \ldots p.$$

Le p *relazioni* (19) *sono per noi fondamentali:* esse *valgono a legare gli zeri*, $O_1 O_2 \ldots O_p$, *della* $\theta(X + c)$ *alle* p *costanti* $c_1\, c_2 \ldots c_p$: qui i valori di $k_1\, k_2 \ldots k_p$, è bene ricordarlo, non dipendono, in alcun modo, dalle costanti $c_1\, c_2 \ldots c_p$ che entrano a formare i p argomenti $u_1 + c_1$, $u_2 + c_2 \ldots u_p + c_p$ di $\theta(X + c)$.

32. **Una prima risoluzione del problema di inversione.** — Come abbiamo notato (pag. 156) un gruppo di p punti risulta univocamente definito appena siano date le somme degli integrali abeliani calcolati nei punti stessi, le quali somme — in base ad un semplice computo di costanti — appaiono come arbitrarie. Le considerazioni sviluppate nei paragrafi precedenti ci permettono ora di risolvere il problema di inversione, cioè di determinare un gruppo di p punti quando siano date, in modo qualunque, le somme degli integrali abeliani. Precisamente, siano dati p valori

$$(1) \qquad \bar{u}_1\, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p;$$

si vuole determinare un gruppo di p punti $X_1 X_2 \ldots X_p$, appartenenti alla curva f, per cui vengano soddisfatte le p relazioni:

$$(2) \qquad \sum_s u_r(X_s) = \bar{u}_r. \qquad\qquad (r = 1,\ 2 \ldots p).$$

A tale scopo si calcolino anzitutto le p costanti $k_1 k_2 \dots k_p$ di cui al paragrafo precedente (formula 18) e si assumano i numeri $c_1 c_2 \dots c_p$ dati da

$$c_r = k_r - \bar{u}_r \qquad (r = 1, 2 \dots p). \tag{3}$$

I punti richiesti sono allora le radici dell'equazione

$$\theta(X + c) = 0. \tag{4}$$

Infatti la $\theta(X+c)$ si annulla in certi p punti $X_1 X_2 \dots X_p$ soddisfacenti le relazioni (19) del paragrafo precedente, cioè tali che

$$\sum_s u_r(X_s) = k_r - c_r$$

e quindi essendo $c_r = k_r - \bar{u}_r$ risulta

$$\sum_s u_r(X_s) = \bar{u}_r.$$

La risoluzione del problema è ottenuta qui sotto *due condizioni*

a) anzitutto che i numeri $c_1 c_2 \dots c_p$ non rendano la $\theta(X+c)$ identicamente nulla;

b) che il gruppo dei p punti $X_1 \dots X_p$ sia non speciale, chè altrimenti esisterebbero infiniti altri gruppi soddisfacenti le relazioni (2).

Ora accade che le due suddette condizioni coincidano. Dobbiamo pertanto analizzare queste circostanze.

Per le considerazioni che seguono è opportuno introdurre una conveniente notazione.

Dati n punti $A_1 A_2 \dots A_n$ indichiamo brevemente con

$$u_r(A_1 + A_2 \dots + A_n)$$

la somma

$$u_r(A_1) + u_r(A_2) \dots + u_r(A_n)$$

cioè per definizione

$$u_r(\Sigma A_s) = \Sigma u_r(A_s). \tag{5}$$

Quindi, indicando con G il gruppo dei punti A_s,

$$G = A_1 + A_2 \dots + A_n,$$

scriveremo

$$u_r(G) \quad \text{anzichè} \quad u_r(A_1 + A_2 \dots + A_n);$$

dunque

$$u_r(G) = \sum_s u_r(A_s).$$

Così pure, avendosi due gruppi di punti

$$G = A_1 + A_2 \dots + A_n, \quad H = B_1 + B_2 \dots + B_m$$

scriveremo

$$(6)\quad \begin{cases} u_r(G - H) = u_r(A_1 + A_2 \dots + A_n - B_1 - B_2 \dots - B_m) = \\ \qquad = \sum_{s=1}^{s=n} u_r(A_s) - \sum_{h=1}^{h=m} u_r(B_h). \end{cases}$$

In modo conseguente indicheremo con

$$\theta(A_1 + A_2 \dots + A_n + c)$$

il valore della funzione θ calcolato dando ai parametri i valori

$$\bar{u}_r = u_r(A_1 + A_2 \dots + A_n) + c_r \qquad [r = 1, 2 \dots p]$$

e con

$$\theta(X + A_1 + A_2 \dots + A_n - B_1 - B_2 \dots - B_m + c)$$

la θ calcolata dando ai parametri i valori

$$(7)\quad \bar{u}_r = u_r(X + A_1 + A_2 \dots + A_n - B_1 - B_2 \dots - B_m) + c_r$$

cioè

$$(8)\quad \theta(X + A_1 + A_2 \dots + A_n - B_1 - B_2 \dots - B_m + c) = \theta(\bar{u} + c)$$

dove i parametri $\bar{u}_1 \dots \bar{u}_p$ sono dati dalla (6); similmente, indicando con G un gruppo di punti, avremo

$$(9)\quad \theta(X - G + c) = \theta(\bar{u} + c)$$

con

$$(10)\quad \bar{u}_r = u_r(X - G).$$

Ciò posto stabiliamo il

LEMMA. — *Fissate, comunque* p *costanti arbitrarie* $c_1 c_2 \dots c_p$, *la funzione*

$$\theta(X_1 + X_2 \dots + X_p + c)$$

non può essere identicamente nulla al variare dei p *punti* $X_1 X_2 \dots X_p$.

Per dimostrare il lemma consideriamo un gruppo G di p punti $X_1 \dots X_p$ che sia non speciale, e siano $x_1 x_2 \dots x_p$ le relative ascisse. Avremo, indicando, al solito, con $\varphi^{(r)}$ il polinomio aggiunto d'ordine $n-3$ relativo all'integrale abeliano u_r

$$du_r(X_s) = \frac{\varphi^{(r)}(X_s)}{f_{y'}(X_s)}\,dx_s.$$

Indichiamo con h_{rs} il valore

$$h_{rs} = \frac{\varphi^{(r)}(X_s)}{f'_y(X_s)} \tag{11}$$

e osserviamo che il determinante dei numeri h_{rs} è diverso da zero

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p1} & \dots & h_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Infatti, qualora fosse $\Delta = 0$, si potrebbero determinare p valori $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p$ tali che

$$\sum_r \lambda_r h_{rs} = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, \ 2 \dots p \\ s = 1, \ 2 \dots p \end{pmatrix}.$$

Sarebbero allora soddisfatte le p relazioni

$$\sum_r \lambda_r \frac{\varphi^{(r)}(X_s)}{f'_y(X_s)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, \ 2 \dots p \\ s = 1, \ 2 \dots p \end{pmatrix}$$

cioè anche le

$$\sum_r \lambda_r \varphi^{(r)}(X_s) = 0$$

le quali esprimono l'esistenza di una curva aggiunta d'ordine $n-3$

$$\lambda_1 \varphi^{(1)} + \lambda_2 \varphi^{(2)} + \dots + \lambda_p \varphi^{(p)} = 0$$

passante contemporaneamente per i p punti $X_1 \dots X_p$, contro l'ipotesi che essi formino un gruppo non speciale (cfr. pag. 136).

Consideriamo ora i differenziali dei parametri $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_p$ che entrano a formare la $\theta(X_1 \dots + X_p + c)$: risulta

$$d\bar{u}_r = \sum_s h_{rs}\, dx_s \tag{12}$$

e potremo dare a $dx_1\, dx_2 \dots dx_p$ valori tali che i $d\bar{u}_r$ acquistino valori (infinitesimi) prefissati risolvendo il sistema (12) che, rispetto le incognite dx_s è un sistema lineare normale a determinante diverso da zero.

Ciò significa che alla totalità dei gruppi di punti della curva f, prossimi al gruppo di punti $X_1 X_2 \ldots X_p$, totalità costituente una varietà p-dimensionale, corrisponde una varietà ugualmente p-dimensionale, di valori $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$; e poichè la $\theta(u_1, u_2 \ldots u_p)$ non è identicamente nulla, consegue l'esistenza di un gruppo di p punti, $\bar{X}_1 \bar{X}_2 \ldots \bar{X}_p$, per cui

$$\theta(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 \ldots + \bar{X}_p + c) \neq 0 .$$

Possiamo ora pervenire al risultato principale di questa analisi enunciando e dimostrando il

Teorema (*di Riemann*). — *Se in relazione a* p *costanti assegnate* $c_1\, c_2 \ldots c_p$, *risulta identicamente*

$$\theta(X + c) = 0$$

ed è i *il primo intero per cui*

$$(13) \qquad \theta(X + A_1 + A_2 \ldots + A_i - B_1 - B_2 \ldots - B_i + c)$$

non sia identicamente nulla, rispetto ad X, *per ogni scelta dei punti* A *e* B, *allora la condizione*

$$(14) \qquad \Sigma\, u_r(X_s) = k_r - c_r \qquad \begin{pmatrix} s = 1,\ 2 \ldots p \\ r = 1,\ 2 \ldots p \end{pmatrix}$$

definisce una serie lineare g_p^i *completa, di punti* X, *la quale è speciale di indice* i.

La dimostrazione si svolge in due parti che appaiono come una la inversa dell'altra. Pongasi anzitutto che sia i il minimo intero per cui la (13) non sia identicamente nulla, e dimostriamo che la (14) è soddisfatta dai gruppi di una serie di dimensione i almeno.

Consideriamo l'equazione, non identicamente soddisfatta in X

$$(13') \qquad \theta(X + A_1 + A_2 \ldots + A_i - B_1 - B_2 \ldots - B_i + c) = 0$$

avendo assunto i punti A e B in modo generico.

Osserviamo che fra le radici della (13') si hanno i punti $B_1 B_2 \ldots B_i$. Verifichiamo la cosa, ad esempio, per B_i. È

$$\theta(B_i + A_1 + A_2 \ldots + A_i - B_1 - B_2 \ldots - B_i + c) =$$
$$= \theta(A_i + A_1 + A_2 \ldots + A_{i-1} - B_1 - B_2 \ldots - B_{i-1} + c)$$

(in quanto si eliminano B_i e $-B_i$).

Ma l'equazione

$$\theta(X + A_1 + A_2 \dots + A_{i-1} - B_1 - B_2 \dots - B_{i-1} + c) = 0$$

è, per ipotesi identicamente soddisfatta, quindi, ponendo $X = A_i$, risulta appunto

$$\theta(A_i + A_1 + A_2 \dots + A_{i-1} - B_1 - B_2 \dots - B_{i-1} + c) = 0$$

onde segue che B_i è radice della (13').

Dunque possiamo indicare le radici della (13') con

$$B_1 B_2 \dots B_i X_{i+1} X_{i+2} \dots X_p .$$

Per la (19) del paragrafo precedente risulta

$$u_r(B_1 + B_2 \dots + B_i + X_{i+1} + X_{i+2} \dots + X_p) =$$
$$= k_r - u_r(A_1 + A_2 \dots + A_i) + u_r(B_1 + B_2 \dots + B_i) - c_r$$

e quindi

$$(15)\quad u_r(A_1 + A_2 \dots + A_i + X_{i+1} + X_{i+2} \dots + X_p) = k_r - c_r$$

e ciò per $r = 1, 2 \dots p$.

Le (15) significano che i punti

$$A_1 A_2 \dots A_i X_{i+1} \dots X_p$$

appartengono tutti ad una medesima serie lineare, ed essendo $A_1 A_2 \dots A_i$ punti generici arbitrari, questa ha la dimensione i almeno.

Il riconoscimento che la serie completa $|g_p|$ cui appartengono gli ∞^i gruppi trovati $(A_1 A_2 \dots A_i X_{i+1} \dots X_p)$, che soddisfano le condizioni (14) definitrici della $|g_p|$ stessa, ha precisamente la dimensione i, costituisce la seconda parte della nostra dimostrazione e si svolge invertendo l'ordine delle deduzioni precedenti.

Indichiamo con ρ la dimensione della serie completa $|g_p^\rho|$ dei gruppi di p punti soddisfacenti le relazioni (14). Osserviamo che la

$$(16)\qquad \theta(X + A_1 + A_2 \dots + A_\rho - B_1 - B_2 \dots - B_\rho + c)$$

non può essere identicamente nulla, altrimenti la serie suddetta avrebbe dimensione maggiore di ρ; e dimostriamo che invece è identicamente nulla la

(17) $\theta(X + A_1 + A_2 \ldots + A_{\rho-1} - B_1 - B_2 - B_{\rho-1} + c)$

cioè che essa si annulla per X coincidente con un generico punto A_ρ.

Presi dunque i generici punti $A_1 A_2 \ldots A_\rho$ si consideri il gruppo della g_p^ρ da essi definito: sia questo

$$A_1 A_2 \ldots A_\rho X_{\rho+1} \ldots X_p \,.$$

Si prendano ora ρ punti generici $B_1 B_2 \ldots B_\rho$ tali che il gruppo

$$B_1 B_2 \ldots B_\rho X_{\rho+1} \ldots X_p$$

sia non speciale.

Per ipotesi è

$$u_r(A_1 + A_2 \ldots + A_\rho) + u_r(X_{\rho+1} + \ldots + X_p) = k_r - c_r$$

e quindi anche

$$u_r(B_1 + B_2 \ldots + B_\rho + X_{\rho+1} \ldots + X_p) =$$
$$= k_r - u_r(A_1 + A_2 \ldots + A_\rho) + u_r(B_1 + B_2 \ldots + B_\rho) - c_r$$

ciò significa che l'equazione

$$\theta(X + A_1 + A_2 \ldots + A_\rho - B_1 - B_2 \ldots - B_\rho + c) = 0$$

è soddisfatta dai punti

$$B_1 B_2 \ldots B_\rho X_{\rho+1} \ldots X_p$$

e solo da questi (l'equazione non è identicamente soddisfatta e il gruppo di tali punti è non speciale).

Sarà dunque, in particolare

$$\theta(B_\rho + A_1 + A_2 \ldots + A_\rho - B_1 - B_2 \ldots - B_\rho + c) = 0\,.$$

cioè

$$\theta(A_\rho + A_1 + A_2 \ldots + A_{\rho-1} - B_1 - B_2 \ldots - B_{\rho-1} + c) = 0$$

e questo, essendo A_ρ un generico punto, significa che la

$$\theta(X + A_1 + A_2 \ldots + A_{\rho-1} - B_1 - B_2 \ldots - B_{\rho-1} + c) = 0$$

è identicamente soddisfatta.

Dunque la dimensione della nostra $|g_p|$ coincide appunto col minimo numero, l'abbiamo chiamato i, che rende identicamente nulla la (13).

In seguito all'analisi ora condotta a termine possiamo enunciare i teoremi seguenti, che raccolgono il risultato espresso dalla (19) del paragrafo precedente e lo completano.

Teorema 1. — *Dato un generico gruppo* G *di* p *punti, condizione* (*necessaria e sufficiente*) *perchè un punto* X *appartenga al* G *è che sia*

$$\theta(X - G + k) = 0$$

indicandosi genericamente con k i numeri $k_1 k_2 \dots k_p$ espressi dalla formula (18) del paragrafo precedente.

Teorema 2. — *Condizione perchè un gruppo* G *di* p *punti sia speciale è che sia identicamente soddisfatta la equazione*

$$\theta(X - G + k) = 0.$$

Teorema 3. — *Condizione perchè un gruppo* G *di* p *punti sia speciale d'indice* i *è che presi comunque due gruppi* H_{i-1} e H'_{i-1} *di* i — 1 *punti l'equazione*

$$\theta(X + H_{i-1} - H'_{i-1} - G + k) = 0$$

sia identicamente soddisfatta, e non lo sia la

$$\theta(X + H_i - H'_i - G + k)$$

dove H_i e H'_i *siano due gruppi generici di* i *punti.*

La dimostrazione del teorema 1 segue dalla (19) del paragrafo 31 osservando che

$$u_r(G) = k_r - (-u_r(G) + k_r).$$

Similmente la dimostrazione del teorema 2 segue osservando che le c_r relative alla $\theta(X - G + k)$ sono

$$c_r = k_r - u_r(G)$$

e quindi

$$k_r - c_r = u_r(G).$$

La stessa osservazione vale a giustificare il teorema 3.

Il *problema di inversione risulta ora risolto in tutta la sua generalità*, sia pure in questa forma di ricerca di zeri di una funzione.

Siano dati dunque p numeri del tutto arbitrari $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_p$, e si cerchino i gruppi G di p punti per cui

$$u_r(G) = \bar{u}_r.$$

Si calcolino, come nel caso generico, i valori

$$c_r = k_r - \bar{u}_r$$

e si formi la equazione

$$\theta(X + c_r) = 0.$$

Ove questa non sia identicamente soddisfatta le sue radici dànno, come sappiamo, il gruppo G richiesto. Sia invece questa identicamente soddisfatta, e sia i il primo intero per cui

$$\theta(X + H_i - H'_i + c_r) = 0$$

non è identicamente soddisfatta; allora le radici di questa ultima diverse dallo H'_i sommate allo H_i dànno il gruppo G richiesto, in cui entrano come elementi arbitrari gli i punti del gruppo H_i. La dimostrazione di questo fatto è contenuta nella formula (15) dove

$$A_1 + A_2 \ldots + A_i = H_i \quad \text{e} \quad B_1 + B_2 \ldots + B_i = H'_i.$$

33. **Risoluzione effettiva del problema d'inversione: le funzioni simmetriche dei gruppi di p punti espresse mediante funzioni abeliane.** — Abbiamo visto che dati ad arbitrio p numeri (in generale complessi) $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$, cioè i valori delle somme degli integrali normali di prima specie appartenenti alla curva fondamentale f, questi definiscono un gruppo G, o una serie g_p^i di gruppi G, di punti di f, per cui sono soddisfatte le p relazioni

$$u_r(G) = \bar{u}_r \qquad (r = 1,\ 2 \ldots p).$$

Pertanto possiamo considerare i numeri suddetti come le p *coordinate del gruppo G*, con l'avvertenza che tutti i gruppi di una medesima g_p^i (speciale) hanno le medesime coordinate. Il problema di inversione si presenta ora nella forma: *costruire un gruppo* G *di cui siano date le coordinate.*

Per risolvere il problema nella forma geometrica più significativa, assumiamo come curva immagine della curva piana fondamentale $f(x\, y) = 0$, una sua trasformata birazionale iperspaziale, F, sulla quale gli iperpiani seghino una g_{3p}^{2p}: la F sarà dunque una curva d'ordine $3p$ appartenente ad uno spazio S_{2p}. Preso un qualsiasi punto X della curva F, definiamo come $u_r(X)$ il valore che l'integrale abeliano u_r ha nel punto di f corrispondente ad X; similmente dicasi per $u_r(G)$, dove G sia un gruppo della F.

Pongasi ora, per semplicità, che la g_{3p}^{2p} segata sulla F dagli iperpiani, sia definita dalle p relazioni

$$(1) \qquad u_r(P_1) + u_r(P_2) \dots + u_r(P_{3p}) = 0 \qquad (r = 1, 2 \dots p)$$

dove $P_1 P_2 \dots P_{3p}$ sono i punti di un gruppo generico della serie, e il segno $=$ rappresenta una uguaglianza effettiva se si suppongono scelti convenientemente i cammini di integrazione per il calcolo degli integrali abeliani normali u_r, o invece rappresenta una congruenza rispetto ai periodi degli integrali stessi, quando si vogliano lasciare del tutto indeterminati i suddetti cammini d'integrazione.

Questa ipotesi, comoda ma non necessaria, può del resto, esser effettivamente sempre ammessa: basta infatti costruire la curva F in relazione ad una g_{3p}^{2p} definita su f da un suo punto O contato $3p$ volte (cfr. L. V, § 4, vol. III, pag. 32) e assumere poi questo punto O come origine per i cammini di integrazione degli integrali abeliani.

Sulla curva F prendiamo $2p+1$ punti generici $V_0 V_1 \dots V_{2p}$ e assumiamo questi come vertici della piramide fondamentale delle coordinate omogenee $y_0 y_1 \dots y_{2p}$, riuscendo V_0 opposto all'iperpiano $y_0 = 0$, ecc.

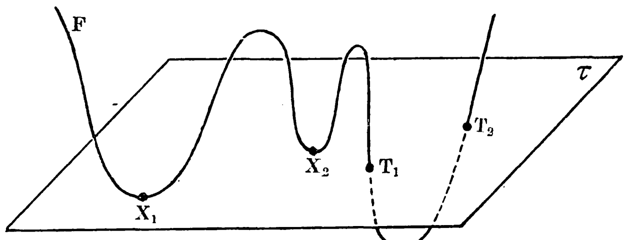
Indichiamo ora con G un gruppo di p punti $X_1\ X_2 \dots X_p$:

$$(2) \qquad G = X_1 + X_2 \dots + X_p$$

e con Γ il gruppo tangenziale di G, cioè il gruppo

$$\Gamma = T_1 + T_2 \dots + T_p$$

costituito dai punti T ulteriori intersezioni di F con l'iperpiano τ tangente ad F sui punti del G. La relazione geome-



trica fra i punti X e T è indicata dalla seguente figura *schematica* relativa al caso $p=2$, dove tuttavia è rappresentato come un piano dello spazio ordinario l'iperpiano tridimensionale, τ, appartenente ad un S_4.

Le coordinate dei due gruppi G e Γ sono, evidentemente, legate dalle relazioni

$$2u_r(G) + u_r(\Gamma) = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots p) \tag{4}$$

cioè

$$u_r(\Gamma) = -2u_r(G). \tag{4'}$$

Ciò posto dimostriamo il

Teorema. — *L'iperpiano τ, tangente alla* F *nei punti di un gruppo generico* G, *ha l'equazione*

$$\psi_0 y_0 + \psi_1 y_1 + \ldots + \psi_{2p} y_{2p} = 0 \tag{5}$$

dove ciascun coefficiente ψ è espresso da

$$\psi_s = \theta^2(V_s - G + k)\ \theta(V_s - \Gamma + k) \qquad (s = 1, 2 \ldots p) \tag{6}$$

dove k indica sinteticamente le p costanti $k_1 k_2 \ldots k_p$ date dalla (18) del § 31 e già spesso incontrate.

Prima di venire alla dimostrazione del teorema si noti che nella formazione del coefficiente ψ_s entrano esclusivamente come variabili le coordinate, arbitrarie, del gruppo G. Infatti indichiamo con

$$v_{1s}\ v_{2s} \ldots v_{ps}$$

i valori che gli integrali $u_1 u_2 \ldots u_p$ hanno nel vertice V_s, e con

$$\bar{u}_1\ \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$$

le coordinate del gruppo G, sicchè quelle di Γ sono

$$-2\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2 \ldots - 2\bar{u}_p .$$

Risulta allora, scrivendo per disteso

$$\theta(V_s - G + k) = \theta(v_{1s} - \bar{u}_1 + k_1 \,|\, v_{2s} - \bar{u}_2 + k_2 \,|\ldots|\, v_{ps} - \bar{u}_p + k_p) \tag{7}$$

e

$$\theta(V_s - \Gamma + k) = \theta(v_{1s} + 2\bar{u}_1 + k_1 \,|\, v_{2s} + 2\bar{u}_2 + k_2 \,|\ldots|\, v_{ps} + 2\bar{u}_p + k_p). \tag{7'}$$

Per la dimostrazione del teorema occorre riconoscere anzitutto come vari ciascun ψ_s quando varia il gruppo G, cioè quando variano le sue coordinate $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$, ritornando il G alla posizione iniziale. A tale scopo si consideri, per semplicità, variabile un solo punto del G. Quando questo punto percorre un ciclo riemanniano A_h, l'argomento

$$v_{rs} = \bar{u}_r + k_r \qquad (r = 1, 2 \ldots p)$$

che entra nella formazione della

$$\theta(V_s - G + k)$$

resta inalterato, per $h \neq r$, o diminuisce di πi, per $h = r$; in ogni caso non muta il valore di $\theta(V_s - G + k)$. Inoltre quando il detto punto percorre un ciclo riemanniano B_h ($h = 1, 2 \ldots p$) il suddetto argomento diminuisce di a_{rh} sicchè (cfr. l'avvertenza del § 29, pag. 166) la

$$\theta(V_s - G + k)$$

viene moltiplicata per

$$e^{-a_{hh} + 2(v_{hs} - \bar{u}_h + k_h)}.$$

Similmente in relazione alla

$$\theta(V_s - \Gamma + k)$$

il relativo argomento

$$v_{rs} + 2\bar{u}_r + k_r$$

resta inalterato o aumenta di $2\pi i$ per i cicli A_h, mentre viene aumentato di $2a_{rh}$ per il ciclo B_h, sicchè la $\theta(V_s - \Gamma + k)$ resta inalterata per i cicli A_h e viene moltiplicata per

$$e^{-4a_{hh} - 4(v_{hs} + 2\bar{u}_h + k_h)}$$

per i cicli B_h.

In definitiva

$$\psi_s = \theta^2(V_s - G + k)\ \theta(V_s - \Gamma + k)$$

resta inalterata per ogni ciclo A_h, mentre viene moltiplicata per $e^{-6a_{hh} - 12\bar{u}_h}$ per i cicli B_h.

Poichè in questo moltiplicatore non entra l'indice s di ψ_s consegue, intanto, che il rapporto di due coefficienti ψ non varia quando un punto del G descriva un qualunque cammino chiuso sulla curva F (cioè sulla sua riemanniana).

Lo stesso risultato vale, evidentemente, anche quando il gruppo G vari ritornando in se stesso, giacchè allora i suoi punti descrivono, complessivamente, una combinazione lineare dei cicli A_h e B_h. Così intanto resta stabilito che il *rapporto di due ψ dà una funzione $2p$-volte periodica.*

In secondo luogo ricerchiamo gli zeri di ψ_s. A tale scopo osserviamo che per il teorema 1 del paragrafo precedente,

$$\theta(X - G + k)$$

si annulla nei punti X che appartengono al gruppo G; e similmente

$$\theta(X - \Gamma + k)$$

si annulla per i punti X che appartengono al gruppo Γ. Ciò significa che, al variare di G

$$\theta(V_s - G + k)$$

si annulla quando il G venga a contenere V_s, e similmente

$$\theta(V_s - \Gamma + k)$$

si annulla quando Γ contenga V_s; in altre parole il coefficiente

$$\psi_s = \theta^2(V_s - G + k)\ \theta(V_s - \Gamma + k)$$

si annulla quando e solo quando l'iperpiano τ, p-tangente alla F nei punti del G, viene a passare per V_s, e si annulla del prim'ordine se vi passa senza essere tangente (V_s appartenendo a Γ) mentre si annulla del secondo ordine se vi passa riuscendo tangente (V_s appartenendo a G).

Si consideri ora che l'iperpiano τ ha certo un'equazione del tipo

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{2p} y_{2p} = 0 \tag{8}$$

dove $\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2p}$ sono funzioni univoche del gruppo G, che al pari di $\psi_0 \psi_1 \dots \psi_{2p}$ si annullano quando l'iperpiano τ viene a passare per un vertice della piramide fondamentale delle coordinate: precisamente α_s si annulla del prim'ordine quando τ passa per V_s senza esservi tangente, e del second'ordine quando vi passa toccandovi la F.

Segue di qui che i rapporti

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_{2p}} : \frac{\psi_s}{\psi_{2p}}$$

non diventano mai zero nè infinito, al variare del G, e quindi sono delle costanti, che conviene scrivere nella forma $\dfrac{\lambda_s}{\lambda_{2p}}$:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_{2p}} = \frac{\lambda_s}{\lambda_{2p}} \cdot \frac{\psi_s}{\psi_{2p}}.$$

(Se si vuole rendere più determinato questo ragionamento si può far variare, del G, un sol punto alla volta, per modo da considerare solo funzioni di una variabile).

Si ha dunque che per l'iperpiano τ l'equazione (8) coincide con la

$$\lambda_0 \psi_0 y_0 + \lambda_1 \psi_1 y_1 \dots \lambda_{2p} \psi_{2p} y_{2p} = 0 \tag{9}$$

la quale equazione sarebbe la (5) che vogliamo dimostrare, ove fosse $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots \lambda_{2p} = 1$. Ma a ciò si arriva facilmente con una opportuna scelta dell'iperpiano unità, come segue.

Si fissi un gruppo, $\bar{G}$, della F, e si consideri il relativo iperpiano p-tangente $\bar{\tau}$.

Scegliamo ora l'iperpiano unità per modo che questo iperpiano $\bar{\tau}$ abbia l'equazione

$$\bar{\psi}_0 y_0 + \bar{\psi}_1 y_1 + \dots + \bar{\psi}_{2p} y_{2p} = 0$$

essendo $\bar{\psi}_s$ il valore della funzione ψ_s calcolata per il gruppo $\bar{G}$. Con ciò, evidentemente, nell'equazione (9) i parametri moltiplicatori λ devono assumere valori uguali, e così riducibili tutti ad 1. Sicchè, per l'iperpiano τ, resta stabilita la equazione (5), che è quanto volevamo dimostrare.

Il teorema precedente dà la risoluzione geometrica del problema di inversione: infatti esso fornisce l'equazione dell'iperpiano τ *p-tangente alla curva* F *nei punti del gruppo* G *di cui siano dati ad arbitrio le coordinate generiche*

$$\bar{u}_1 = u_1(G), \quad \bar{u}_2 = u_2(G) \ \dots \ \bar{u}_p = u_p(G);$$

e dall'equazione dell'iperpiano τ, tenuto conto delle equazioni della F, si deducono in forma razionale le funzioni simmetriche elementari delle coordinate dei singoli punti del G.

NOTA. — In quanto precede è stato considerato il caso che le coordinate $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_p$ date ad arbitrio per definire il G siano generiche, per modo che le

$$\theta(V_s - G + k) \qquad \text{e} \qquad \theta(V_s - \Gamma + k)$$

non risultino nulle per una generica scelta dei punti V_s quali vertici della piramide fondamentale di riferimento; e in tal caso i coefficienti

$$\psi_0 \ \psi_1 \dots \psi_{2p}$$

dell'equazione dell'iperpiano τ non sono contemporaneamente nulli.

Ma può accadere che i valori di $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$ siano scelti in modo da annullare contemporaneamente tutte le ψ_s e ciò per qualunque posizione attribuita (sulla curva F) ai vertici V_s: ciò accade quando $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$ definiscono non un solo G ma una intera g_p^i speciale, nel qual caso risulta

$$\theta(V_s - G + k) = 0$$

in quanto la $\theta(X - G + k)$ è identicamente nulla al variare di X (cfr. § 32, pag. 191). Similmente tutte le ψ_s si annullano quando le coordinate $-2\bar{u}_1 \;\; -2\bar{u}_2 \ldots -2\bar{u}_p$ definiscono non un solo Γ ma una intera serie speciale di gruppi analoghi di p punti: e quando siano nulli tutti i coefficienti ψ_s l'equazione dello iperpiano τ svanisce identicamente, per modo che la risoluzione ottenuta è solo apparente.

Ma è facile accomodare le cose anche per questo caso eccezionale.

Anzitutto si osservi che l'equazione (5) dell'iperpiano τ può svanire identicamente, solo nei due casi considerati; e poichè la detta equazione (5) definisce l'iperpiano τ come tangente ad F nei punti di un gruppo G di coordinate $\bar{u}_r$ e passante ulteriormente per i punti di un gruppo Γ di coordinate $-2\bar{u}_r$, è naturale che, quando il gruppo G o il gruppo Γ non siano determinati dalle loro coordinate, allora l'iperpiano τ risulti esso pure indeterminato.

Qui si noti che mentre il G è definito dalle coordinate $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$ date a priori, il Γ dipende invece (oltre che dalle coordinate di G) dalla g_{3p}^{2p} *scelta da noi* per ottenere la curva iperspaziale F. Si può dunque supporre sempre che il Γ non sia un gruppo speciale.

Pongasi dunque che le p coordinate $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$ non definiscano un G ma una intera serie g_p^i d'indice i di specialità, mentre le coordinate $-2\bar{u}_1 \;\; -2\bar{u}_2 \ldots -2\bar{u}_p$ definiscano un solo Γ. Date ad arbitrio le $\bar{u}_r$, l'indice di specialità della g_p^i risulta, in base al Teorema 3 del § 32 (pag. 191), dall'esame dell'annullamento identico della equazione

$$\theta(X + H - H' - \bar{u} + k) = 0$$

variando il numero dei punti che appartengono ai due gruppi H e H'.

L'iperpiano τ di equazione

$$(9') \qquad \psi_0 y_0 + \psi_1 y_1 + \dots \psi_{2p} \psi_{2p} = 0$$

y_{2p}

dove si prenda

$$(10) \quad \psi_s = \theta^2 (V_s + H_i - H_i' - \bar{u} + k)\ \theta(V_s - 2H_i + 2H_i' + 2\bar{u} + k)$$

risulta p-tangente alla curva F nei punti di un G'_p composto di H_i' e di un G'_{p-i}, contenente $p - i$ punti, che insieme con H_i dà il G di coordinate $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_p$ contenente H_i:

$$G = H_i + G'_{p-i}.$$

Ciò posto, nel caso eccezionale ora considerato, un G definito delle coordinate $\bar{u}_r$ e contenente un gruppo arbitrario H_i di i punti si ottiene come segue:

Assunto ad arbitrio un generico H_i', si scrive l'equazione dell'iperpiano (9') dove i coefficienti ψ_s sono dati dalla (10). Dal gruppo G_p' di contatto di questo iperpiano con la F si può staccare razionalmente il gruppo H'_i che è noto in quanto è assunto a priori; pertanto si potranno costruire, in base ai coefficienti ψ_s, le funzioni simmetriche elementari delle coordinate dei punti del G'_{p-i}; e così anche quelle relative al $G = H_i + G'_{p-i}$, essendo noto, perchè assunto a priori, il gruppo H_i.

34. **Bisezione delle serie lineari sopra una curva.** — Fra le applicazioni del teorema d'inversione alla teoria geometrica delle curve algebriche si deve segnalare la soluzione, data da Clebsch, del problema di bisezione o divisione delle serie lineari. (Cfr. Libro V, § 35, vol. III, pag. 392-95).

Per semplicità ci riferiremo sempre al caso della bisezione.

Il problema di bisecare una serie lineare g_{2n}^{2n-p} dove, s'intende, $n \geq p$, si risolve subito in base al teorema d'Abel, usufruendo della inversione solo per giustificare l'esistenza di una serie g_n^{n-p}, tale che le somme degli integrali abeliani di prima specie nei punti d'un gruppo assumano valori arbitrariamente assegnati.

Si voglia che la serie g_n^{n-p} sia la metà di una data g_n^{2n-p}: sommando gli integrali abeliani di prima specie u_r della curva, nei punti $X_1 \dots X_{2n}$ d'un gruppo della g_{2n}^{2n-p} si avranno le p congruenze rispetto ai periodi:

$$u_r(X_1) + \dots + u_r(X_{2n}) \equiv k_r \qquad (r = 1, \dots p);$$

e allora le somme analoghe pei punti $Y_1 \dots Y_n$ d'un gruppo della g_n^{n-p} saranno tali che

$$2u_r(Y_1) + \dots + 2u_r(Y_n) \equiv k_r$$

cioè, designando i periodi degli integrali colla matrice

$$\begin{array}{c|cccc} u_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1,2p} \\ u_2 & \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2,2p} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p & \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{p,2p}, \end{array}$$

si avrà

$$u_r(Y_1) + \dots + u_r(Y_n) = \frac{k_r}{2} + \frac{\lambda_1 \omega_{r1} \dots + \lambda_{2p}\omega_{r,2p}}{2},$$

dove i coefficienti λ sono interi arbitrari.

Risulta di qui che *le serie g_n, metà della g_{2n}^{2n-p}*, saranno tante quanti sono i valori incongrui (s' intende rispetto ai moduli ω) dei p gruppi di semiperiodi

$$\frac{\lambda_1 \omega_{r1} + \dots + \lambda_{2p}\omega_{r,2p}}{2}$$

e quindi che esse *sono in numero di* 2^{2p}, d'accordo con ciò che si è trovato nel Libro V, cap. III, § 35, (vol. III, pag. 392).

Per esempio sia data una *quartica piana di genere due*, con un punto doppio O; si propone di bisecare la g_4^2 segata dalle rette, cioè di trovare le 16 *rette bitangenti*.

Si può supporre che per il gruppo di quattro punti allineati $X_1 \dots X_4$, sia

$$\begin{cases} u_1(X_1) + \dots u_1(X_4) \equiv 0 \\ u_2(X_1) + \dots u_2(X_4) \equiv 0, \end{cases}$$

e quindi le coppie di punti di contatto delle bitangenti verranno date da

$$\begin{cases} u_1(Y_1) + u_1(Y_2) \equiv \dfrac{\lambda_1\omega_{11} + \lambda_2\omega_{12} + \lambda_3\omega_{13} + \lambda_4\omega_{14}}{2} \\ u_2(Y_1) + u_2(Y_2) \equiv \dfrac{\lambda_1\omega_{21} + \lambda_2\omega_{22} + \lambda_3\omega_{23} + \lambda_4\omega_{24}}{2}, \end{cases}$$

e perciò corrisponderanno alle 16 coppie incongrue di semiperiodi:

$$\left\{\begin{array}{l}
(0\ 0),\quad \left(\frac{\omega_{11}}{2}\ \frac{\omega_{21}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{12}}{2}\ \frac{\omega_{22}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{13}}{2}\ \frac{\omega_{23}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{24}}{2}\right),\\
\left(\frac{\omega_{11}+\omega_{12}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{22}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{11}+\omega_{13}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{23}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{11}+\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{24}}{2}\right),\\
\left(\frac{\omega_{12}+\omega_{13}}{2}\ \frac{\omega_{22}+\omega_{23}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{12}+\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{22}+\omega_{24}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{13}+\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{23}+\omega_{24}}{2}\right),\\
\left(\frac{\omega_{11}+\omega_{12}+\omega_{13}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{22}+\omega_{23}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{11}+\omega_{12}+\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{22}+\omega_{24}}{2}\right),\\
\left(\frac{\omega_{11}+\omega_{13}+\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{23}+\omega_{24}}{2}\right),\quad \left(\frac{\omega_{12}+\omega_{13}+\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{22}+\omega_{23}+\omega_{24}}{2}\right),\\
\left(\frac{\omega_{11}+\omega_{12}+\omega_{13}+\omega_{14}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{22}+\omega_{23}+\omega_{24}}{2}\right).
\end{array}\right.$$

La tabella delle 16 coppie di valori incongrui dei semiperiodi si ottiene in una forma più visibile, quando ci si riferisca ad una tabella normale di periodi

$$\begin{array}{cccc}
\pi i & 0 & a_{11} & a_{12}\\
0 & \pi i & a_{21} & a_{22}
\end{array}$$

e si indichi una coppia di semiperiodi con

$$s_1 = \frac{1}{2}(\mu_1 \pi i + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12})$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(\mu_2 \pi i + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22})$$

dove i numeri λ, μ hanno i valori 0 e 1. Con ciò una coppia di semiperiodi è data dai 4 valori di $\lambda_1\, \lambda_2\, \mu_1\, \mu_2$ e le 16 coppie incongrue di semiperiodi verranno ora rappresentate semplicemente dalle 16 possibili tabelle di numeri

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{bmatrix}$$

che sono precisamente le

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

Vedremo fra poco il vantaggio di questa notazione direttamente legata alla teoria delle caratteristiche.

La risoluzione del problema offre, non soltanto il numero delle bitangenti della quartica, ma anche alcune relazioni notevoli della configurazione formata dai loro punti di contatto.

Se si prendono 3 bitangenti qualsiansi, p. es. quelle i cui punti di contatto rispondono a

$$\left(\frac{\omega_{11}}{2}\ \frac{\omega_{21}}{2}\right) \quad \left(\frac{\omega_{12}}{2}\ \frac{\omega_{22}}{2}\right) \quad \left(\frac{\omega_{13}}{2}\ \frac{\omega_{23}}{2}\right),$$

i sei punti di contatto appartengono ad un gruppo della serie completa g_8^6 doppia della g_4^2 segata dalle rette, avendo rispetto ad essa una coppia residua che è

$$\left(\frac{\omega_{11}+\omega_{12}+\omega_{13}}{2}\ \frac{\omega_{21}+\omega_{22}+\omega_{23}}{2}\right).$$

Ora la g_8^6 anzidetta (che contiene la g_8^5 non completa segata dalle coniche) si lascia segare sulla quartica dalle cubiche passanti pel punto doppio O e per due punti allineati con O, quindi avremo:

I 6 punti di contatto di 3 bitangenti della quartica C_4 *col punto doppio* O, *stanno sopra una cubica* K_3, *passante per* O *e per due punti di* C_4 *allineati con* O, *la quale sega* C_4 *nei punti di contatto d'una quarta bitangente.*

Così dunque *le* 16 *coppie di punti di contatto delle bitangenti di* C_4, *stanno, a* 4 *a* 4, *sopra* $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 140$ *cubiche* K_3.

Osservazione. — Fra queste cubiche ve ne sono di spezzate, in rette per O e in coniche contenenti 4 coppie di punti di contatto di bitangenti.

L'esistenza di siffatte coniche risulta, per noi, dalla trattazione geometrica del Libro II, §§ 27-27, (vol. I, pag. 302).

Invero le coppie di punti di contatto di due bitangenti danno su C_4 una g_4^1 formata dalle quaterne di contatto di ∞^1 coniche, le quali costituiscono una serie ∞^1 d'indice 2 di cui C_4 è l'inviluppo. Ed entro la serie di coniche vi sono 6 coniche spezzate, cioè — oltre quella da cui siamo partiti — altre 5 coniche spezzate in due bitangenti: le due quaterne di punti di contatto di due coppie di bitangenti appartenenti alla stessa serie ∞^1 di coniche stanno sopra una conica. In tal guisa si trovano:

$$\frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 6} = 20$$

serie ∞^1 di coniche di cui C_4 è l'inviluppo, e quindi

$$20 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{4} = 75$$

coniche contenenti ciascuna le coppie di punti di contatto di 4 bitangenti di C_4.

Ma queste coniche non si distinguono dalle cubiche K_3 (secanti la serie *completa*) per una proprietà intrinseca relativa alla geometria sopra C_4, bensì per una proprietà estrinseca di carattere proiettivo.

In modo perfettamente analogo a quello tenuto innanzi si risolve il problema di bisecare la serie g_8^5 segata dalle coniche sopra una quartica generale di genere $p = 3$, e quindi di determinare le serie ∞^1 di coniche di cui la quartica può essere considerata come inviluppo. Qui sono date 6 terne di periodi da bisecare e quindi i semiperiodi assumono $2^6 = 64$ valori incongrui: a cui corrispondono, oltre la serie delle rette (doppie), altre 63 serie ∞^1 di coniche quadritangenti alla quartica, come già si è trovato geometricamente nel Libro II, (l. c.).

Ma se, in luogo di cercare le coniche quadritangenti alla quartica, si cerchino le rette bitangenti, la soluzione del problema non procede più così semplice. Perchè invero si tratta qui di risolvere un sistema di *tre* equazioni fra *due* incognite (somme degli integrali abeliani in due punti della curva):

$$\begin{cases} 2u_1(X_1) + 2u_1(X_2) \equiv h_1 \\ 2u_2(X_1) + 2u_2(X_2) \equiv h_2 \\ 2u_3(X_1) + 2u_3(X_2) \equiv h_3 \end{cases} \qquad \text{(mod. periodi).}$$

Un sistema di equazioni siffatto a priori dovrebbe tenersi per incompatibile; ma, nel caso nostro, la compatibilità risulta da ciò che alle costanti $h_1\, h_2\, h_3$ risponde non già una g_4^1 bensì la g_4^2 canonica. Vedremo fra poco come si traduce analiticamente tale condizione.

Il problema qui proposto porta in generale (per le curve di genere p) a bisecare la serie canonica g_{2p-2}^{p-1}, cioè a cercare i gruppi canonici costituiti da G_{p-1} contati due volte.

Poichè, come abbiamo accennato, il problema della divisione della serie canonica si presenta alquanto complesso, cominceremo a considerare il caso $p=2$, in cui si tratta di determinare i punti doppi di una g_2^1 che, sopra una curva del genere due, sappiamo già essere in numero di *sei*.

Ora per risolvere il problema occorre premettere un lemma relativo al valore che hanno le somme degli integrali abeliani nei punti di un gruppo della serie canonica; e naturalmente, anche per questo ci riferiremo dapprima al caso $p=2$.

Sia dunque, sopra una curva f di genere $p=2$, la g_2^1 canonica, e indichiamo con X_1 e X_2 una sua coppia generica di punti: avremo

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1(X_1) + u_1(X_2) = \gamma_1 \\ u_2(X_1) + u_2(X_2) = \gamma_2 \end{cases}$$

dove γ_1 e γ_2 sono certe costanti che appunto ci interessa determinare.

Sulla stessa curva f l'appartenenza di un punto X a un gruppo G (di due punti) è data dalla relazione (§ 32, pag. 191)

$$(2) \qquad \theta(X - G + k) = 0$$

che, per disteso, si scrive

$$(2') \qquad \theta\,\{\, u_1(X) - u_1(G) + k_1,\, u_2(X) - u_2(G) + k_2 \,\} = 0$$

indicandosi con $u_1(G)$ e $u_2(G)$ le somme che gli integrali u_1 e u_2 hanno nei due punti del G.

Naturalmente si intende che tanto nelle formule (1) che nelle formule (2) o (2′) gli integrali abeliani u_1 e u_2 siano calcolati a partire da una medesima origine, diciamo O, avendosi dunque

$$u_1 = \int_O^X \Phi_1(xy)\,dx, \qquad u_2 = \int_O^X \Phi_2(xy)\,dx$$

dove Φ_1 e Φ_2 sono i due integrandi normali di prima specie.

Fissato dunque il punto O della curva $f(x\,y) = 0$ come origine per il computo dei valori degli integrali, le costanti $\gamma_1 \gamma_2 k_1 k_2$ sono ben definite: precisamente definite a meno di multipli di periodi se si opera sulla riemanniana della f non tagliata lungo le retrosezioni, definite invece completamente se si opera sulla riemanniana tagliata lungo le retrosezioni o sul poligono a $4p = 8$ lati, immagine della riemanniana stessa.

Premesse tutte queste considerazioni necessarie per dare un senso preciso al nostro problema, dobbiamo riconoscere il

TEOREMA: *Le costanti* $\gamma_1 \gamma_2 k_1 k_2$ *che figurano nelle formule* (1) *e* (2′) *sono legate dalle relazioni*

$$\gamma_1 = 2k_1$$
$$\gamma_2 = 2k_2,$$

che scriveremo *sinteticamente*

$$\gamma = 2k.$$

Infatti, sappiamo che l'equazione (avente per incognita il punto X)

$$\theta(X - \gamma + k) = 0$$

è identicamente soddisfatta, in quanto γ_1 e γ_2 definiscono la g_2^1 canonica; e l'equazione

$$\theta(X + A - B - \gamma + k) = 0$$

dove A e B sono due punti qualunque, è soddisfatta dal punto B e dal punto A' coniugato di A nella g_2^1 canonica (paragrafo 32, pag. 188 e seg.). Quindi sarà:

$$\theta(A' + A - B - \gamma + k) = 0. \tag{3}$$

Ma poichè

$$u_1(A+A')=\gamma_1, \qquad u_2(A+A')=\gamma_2,$$

la (3) può scriversi

$$\theta(-B+k)=0,$$

cioè, essendo θ funzione pari,

$$\theta(B-k)=0$$

o anche

(4) $$\theta(B-2k+k)=0:$$

la quale equazione (4) è soddisfatta da qualunque posizione del punto B.

Ciò significa che le costanti

$$c_1=2k_1, \qquad c_2=2k_2$$

rendono identicamente soddisfatta la equazione

$$\theta(X-c+k)=0$$

cioè definiscono la serie canonica (Teorema 2, § 32, pag. 191); onde appunto risulta ciò che volevamo dimostrare:

$$2k_1=\gamma_1$$
$$2k_2=\gamma_2$$

uguaglianze che vanno intese *a meno di multipli di periodi.*

Stabilito così il teorema, si consideri un punto D che sia doppio per la g_2^1 canonica; esso deve soddisfare le relazioni

$$2u_1(D)=\gamma_1$$
$$2u_2(D)=\gamma_2$$

cioè

$$u_1(D)=\frac{\gamma_1}{2}+\sigma_1$$

$$u_2(D)=\frac{\gamma_2}{2}+\sigma_2$$

dove σ_1 e σ_2 designano una coppia di semiperiodi (vedremo presto non qualunque). Se al punto D aggiungiamo il punto O, origine dei cammini d'integrazione, per cui

$$u_1(O)=u_2(O)=0,$$

otteniamo una coppia di punti $\Gamma = D + O$ per cui è ancora

$$u_1(\Gamma) = \frac{\gamma_1}{2} + \sigma_1$$

$$u_2(\Gamma) = \frac{\gamma_2}{2} + \sigma_2$$

sicchè i due punti D e O risultano le radici dell'equazione

(5) $$\theta\left(X - \frac{\gamma}{2} - \sigma + k\right) = 0.$$

Ma poichè

$$2k = \gamma,$$

le differenze

$$k_1 - \frac{\gamma_1}{2}, \qquad k_2 - \frac{\gamma_2}{2}$$

costituiscono una coppia di semiperiodi; quindi anche

$$-\frac{\gamma_1}{2} - \sigma_1 + k_1, \qquad \frac{-\gamma_2}{2} - \sigma_2 + k_2$$

sono una coppia di semiperiodi; indicheremo questa coppia con

$$s_1 \quad \text{e} \quad s_2,$$

e, complessivamente, con s.

Si conclude che il punto doppio D è dato dalla radice, diversa da $X = O$, dell'equazione:

(6) $$\theta(X + s) = 0$$

dove s indica una coppia di semiperiodi soggetti alla *condizione* — necessaria e sufficiente — che sia

$$\theta(O + s) = 0$$

cioè

(7) $$\theta(s) = 0.$$

Ora, riferendoci alla matrice normale dei periodi

$$\begin{matrix} \pi i & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pi i & a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

poniamo

$$s_1 = \frac{1}{2}(\mu_1 \pi i + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12})$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(\mu_2 \pi i + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22})$$

dove i numeri interi μ e λ hanno solo i valori 0 e 1.

Qui ricordiamo (§ 30, pag. 177) che risulta

$$\theta(s) = 0$$

quando si annulli, per $u_1 = u_2 = 0$ la corrispondente θ con caratteristica, cioè quando sia

$$\theta_{\lambda\mu}(0) = 0;$$

la qual cosa accade precisamente quando i 4 numeri $\lambda\mu$ danno una caratteristica *dispari.*

Resta da escludere che si possano prendere numeri λ e μ relativi a una caratteristica pari, ciò che si ottiene facilmente anche senza analizzare se una $\theta_{\lambda\mu}$ di caratteristica pari possa annullarsi per $u_1 = u_2 = 0$.

Ricordiamo che

$$\theta_{\lambda\mu}(u) \quad \text{e} \quad \theta(u + s)$$

hanno i medesimi zeri, sicchè l'equazione (6) può scriversi

$$\theta_{\lambda\mu}(X) = 0. \tag{8}$$

Ora, poichè la θ a caratteristica pari è una funzione pari, qualora la (8) fosse soddisfatta da $X = O$, questa sarebbe una radice doppia, e così l'unica soluzione, e mancherebbe quindi il punto D, doppio per la g_2^1 canonica, che insieme ad O dà la coppia delle radici della (6) o della (8).

Si conclude: *i punti doppi della* g_2^1 *canonica sono dati dalle radici,* diverse da O, *delle varie equazioni*

$$\theta_{\lambda\mu}(X) = 0$$

dove $\theta_{\lambda\mu}$ è una *theta a caratteristica dispari,* o, ciò che è lo stesso, sono date delle radici, diverse da O, dell'equazione

$$\theta(X + s) = 0,$$

dove s indica una coppia di semiperiodi dispari.

Ricordando che la parità della coppia di semiperiodi (o della $\theta_{\lambda\mu}$) è quella della somma

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2,$$

si deduce che esistono 6 punti doppi per la g_2^1 canonica, corrispondenti ai seguenti valori per λ e μ

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Dal caso $p=2$ si passa con facilità al *caso generale*, appena si sia estesa a questo la relazione

$$\gamma = 2k.$$

Si considerino dunque: la equazione, nel punto incognito X,

$$(9)\qquad \theta(X - G + k) = 0$$

che dà come radici i punti di un gruppo G di p punti, e le relazioni

$$(10)\qquad u_r(\Gamma) = \gamma_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots p)$$

che definiscono i gruppi Γ di $2p-2$ punti variabili nella serie canonica g_{2p-2}^{p-1}; qui gli integrali si intendono calcolati tutti a partire da una medesima origine O, collocata in un punto generico della curva. Si ha, come nel caso $p=2$, il

TEOREMA. — *Fra le costanti* k_r *e* γ_r *che entrano nelle formule* (9) *e* (10) *intercede in generale la relazione*

$$\gamma_r = 2k_r.$$

Per dimostrare il teorema si fissi un gruppo generico G_{p-2} di $p-2$ punti $P_1 P_2 \ldots P_{p-2}$; questo avrà come residuo, rispetto alla g_{2p-2}^{p-1} canonica, una g_p^1 speciale. Indichiamo con δ_r la somma che l'integrale u_r ha nei punti del G_{p-2}; con ciò i gruppi G appartenenti alla suddetta g_p^1 soddisfanno le p relazioni

$$u_r(G) = \gamma_r - \delta_r \qquad (r=1, 2 \ldots p).$$

Segue che l'equazione (avente per incognita il punto X)

$$\theta(X - \gamma + \delta + k) = 0 .$$

è identicamente soddisfatta. Si consideri poi un gruppo $G = A_1 + A_2 \ldots + A_p$ della suddetta g_p^1, e un punto B, gruppo e punto assunti in posizione generica. L'equazione in X

$$\theta(X + A_1 - B - \gamma + \delta + k) = 0$$

ha per radici, oltre che B, ciascun punto A_s del G che sia diverso da A_1, cioè:

$$\theta(A_s + A_1 - B - \gamma + \delta + k) = 0,$$

ossia, essendo la θ funzione pari,

$$\theta(B - A_s - A_1 + \gamma - \delta - k) = 0.$$

Poichè in questa relazione B è un punto qualunque, risulta che la equazione in X

$$\theta(X - A_s - A_1 + \gamma - \delta - k) = 0$$

è identicamente soddisfatta, cioè le costanti

$$c_r = u_r(A_s) + u_r(A_1) - \gamma_r + \delta_r + 2k_r$$

definiscono una serie speciale.

Ora la equazione

$$\theta(X + A_1 - B - c + k) = 0$$

è soddisfatta dal punto A_s, in quanto

$$\begin{aligned}\theta(A_s + A_1 - B - c + k) &= \theta(A_s + A_1 - B - A_s - A_1 + \gamma - \delta - 2k + k) \\ &= \theta(-B + \gamma - \delta - k) = \theta(B - \gamma + \delta + k)\end{aligned}$$

e sappiamo che $\theta(X - \gamma + \delta + k) = 0$ per qualunque X, e così anche per $X = B$. Segue di qui che le costanti c_r definiscono una g_p^1 di cui un gruppo contiene A_1 e A_s e altri $p-2$ punti tali che la somma dei loro integrali abeliani u_r vale

$$c_r - u_r(A_1) - u_r(A_s) = -\gamma_r + \delta_r + 2k_r.$$

In quanto tale somma non dipende dall'indice s, i suddetti punti risultano fissi: indichiamoli provvisoriamente con $F_1 F_2 \dots F_{p-2}$. Ciò significa che il gruppo Γ della serie canonica che contiene

$$F_1 F_2 \dots F_{p-2}$$

contiene anche A_s, qualunque sia l'indice s, cioè i punti

$$F_1 F_2 \dots F_{p-2} A_1 \dots A_p$$

costituiscono un gruppo della serie canonica, e pertanto i punti F coincidono coi punti P considerati innanzi. Si conclude che

$$-\gamma_r + \delta_r + 2k_r = \delta_r$$

cioè

$$2k_r = \gamma_r .$$

Ottenuto questo risultato, si prosegue come nel caso $p = 2$.

La bisezione della serie canonica porta alla ricerca dei gruppi di $p-1$ punti che contati due volte costituiscono un gruppo della serie stessa. Uno di questi gruppi è dato dalle radici X, diverse dal punto O, dell'equazione

$$\theta_{\lambda\mu}(X) = 0$$

dove $\theta_{\lambda\mu}$ è una θ a caratteristica dispari, oppure è dato dalle radici (ancora diverse da $X = O$) della

$$\theta(X + s) = 0$$

dove s indica un gruppo di semiperiodi dispari. Come nel caso $p = 2$, si esclude che si debbano considerare θ con caratteristica pari, anche senza analizzare se una θ pari possa annullarsi per $u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0$. Infatti in tale ipotesi la θ pari avrebbe in O uno zero doppio, sicchè O dovrebbe far parte dei $p-1$ punti che costituiscono un gruppo metà della serie canonica, mentre O è un punto generico.

Dunque, per ***bisecare la serie canonica***, siamo condotti a ***determinare*** in generale ***le caratteristiche dispari***, cioè i gruppi di $2p$ numeri

$$\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \end{matrix}$$

aventi il valore 0 e 1, tali che

$$\Sigma\, \lambda_r \mu_r \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Aggiungiamo la osservazione esplicita che quando sia $\gamma_r = 0$, cioè la serie canonica sia definita dalle p relazioni

$$u_r(\Gamma_{2p-2}) = 0$$

allora i gruppi G di $p-1$ punti, che contati due volte danno un Γ_{2p-2} canonico, soddisfano alle p relazioni

$$u_r(G) = \sigma_r.$$

dove le

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\mu_r \pi i + \sum_s \lambda_r a_{rs})$$

rappresentano un gruppo dispari di semiperiodi.

Per completare dal punto di vista numerativo questi risultati, occorre fornire il *computo delle caratteristiche dispari* (e conseguentemente delle pari).

Indichiamo con

$$P(p) \quad \text{e} \quad D(p)$$

il numero delle caratteristiche, rispettivamente pari e dispari, relative al genere p; si ha, evidentemente:

$$P(p) + D(p) = 2^{2p}$$

$$P(p) = P(p-1)\cdot 3 + D(p-1), \quad D(p) = D(p-1)\cdot 3 + P(p-1)$$

Queste formule, e in particolare le ultime due, che sono ricorrenti, valgono a determinare i valori di $P(p)$ e $D(p)$, dato che è:

$$P(1) = 3, \qquad D(1) = 1;$$

precisamente si trova

$$P(p) = 2^{p-1}(2^p + 1); \qquad D(p) = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

risultato che si dimostra subito verificando le suddette relazioni ricorrenti.

Riesce utile applicare i risultati conseguiti all'esempio del genere $p = 3$, riferendosi alla quartica piana generale, su cui le rette segano la g_4^2 canonica. La bisezione di questa porta evidentemente alle coppie di punti di contatto delle bitangenti, di cui ora si ritrovano per altra via il numero e le proprietà di configurazione.

Secondo le formule precedenti, le caratteristiche dispari per il caso $p = 3$ sono $4\cdot 7 = 28$, onde risultano 28 bitangenti. Scriviamo ora la tabella delle 28 caratteristiche dispari, dividendola in due, secondochè esse provengono da caratteristiche dispari (18) o da caratteristiche pari (10) del genere 2:

$$\left\{\begin{matrix}
\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}
\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}
\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} & &
\end{matrix}\right.$$

Ora ciascuna di queste 28 caratteristiche corrisponde ad una terna di semiperiodi, che danno le somme degli integrali $u_1 u_2 u_3$ nei punti di contatto di una bitangente; ciò quando si supponga la g_4^2 canonica definita dalle 3 relazioni

$$u_r(\Gamma_4) \equiv 0.$$

Notiamo ora che se si sommano due di queste caratteristiche dispari (s'intende termine a termine) si ottiene ancora una caratteristica bipartita, ma in generale non più dispari; anzi, come è facile a riconoscersi, qualunque caratteristica, pari o dispari, può ottenersi in tal modo. Ma ciò che più importa è che ogni caratteristica si ottiene in 6 modi diversi come somma di due caratteristiche dispari.

Infatti le caratteristiche bipartite sono in tutto 64, cioè 63 quando si escluda la $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ che è solo impropriamente bipartita; esse sono più delle coppie estratte dalle 28 dispari: onde vi sarà almeno una somma ottenibile in più modi. Indichiamo dunque con $C_1\ C_2$ e $C'_1\ C'_2$ due coppie di caratteristiche che hanno la stessa somma

$$C_1 + C_2 = C'_1 + C'_2$$

allora se si considera una qualunque altra coppia di caratteristiche (dispari) D_1 e D_2 si ha

$$D_1 + D_2 = (D_1 + C_1 - C'_1) + (D_2 + C'_2 - C_2)$$

cioè ad ogni modo diverso di ottenere la somma $C_1 + C_2$ corrisponde un modo diverso di ottenere la somma $D_1 + D_2$, onde segue che tutte le somme si ottengono in un medesimo numero x di modi. Questo numero x si calcola subito. I diversi modi di sommare due caratteristiche dispari sono

$$\frac{28 \cdot 27}{2}$$

onde risulta

$$x = \frac{28 \cdot 27}{2} : 63 = 6.$$

Le proprietà che abbiamo indicate del gruppo delle 28 caratteristiche dispari danno le proprietà di configurazione delle 28 tangenti doppie della quartica. Infatti sommando insieme i semiperiodi relativi a due bitangenti si ottiene ancora un semiperiodo, e risulta in tal modo definita una g_4^1 che ha lo stesso doppio della serie canonica, cioè una serie di quaterne di punti di contatto di un sistema di coniche bitangenti. Si ottengono in tal modo i 63 sistemi di coniche bitangenti, ciascuno dei quali contiene 6 coppie di tangenti doppie della quartica. Più precisamente ciascuna delle suddette g_4^1 è segata dalle coniche che passano per i punti di contatto di una coppia di bitangenti; ciò si ha osservando che se la quaterna di contatto di una tale coppia di bitangenti dà luogo alle somme degli integrali

$$u_r(G_4) = \sigma_r \qquad (\sigma_r = \text{semiperiodo})$$

le ulteriori intersezioni con le coniche passanti per essi danno luogo alle medesime somme ($\sigma_r = -\sigma_r$); in quanto la g_8^5 segata dalle coniche, come doppio della serie canonica, è data da

$$u_r(G_8) = 0.$$

Resta così stabilita la proprietà fondamentale della configurazione delle tangenti doppie: « per i quattro punti di contatto di due bitangenti ad una quartica di genere 3 passano 5 coniche ognuna delle quali sega la quartica nei quattro punti di contatto di altre due bitangenti ». Si trovano quindi 315 coniche contenenti ciascuna 8 punti di contatto di 4 bitangenti. (Cfr. Libro II, § 27, vol. I, pag. 312).

35. Le funzioni abeliane più generali. La risoluzione del problema d'inversione, che abbiamo ottenuta nel paragrafo 33, conduce a considerare, come coordinate dei gruppi di p punti di una curva di genere p, dei quozienti di funzioni ψ, e quindi di θ, che sono funzioni $2p$ volte periodiche di p argomenti:

$$u_1, u_2 \dots u_p.$$

Alla costruzione di tali funzioni — che portano in generale il nome di *abeliane* — conducono le serie θ anche indipendentemente dalla considerazione delle curve di genere p e degli integrali connessi; le espressioni dei quozienti di ψ o di θ incontrate innanzi porgono infatti delle funzioni $2p$ volte periodiche rispetto alla tabella di periodi

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{cccccccc} \pi i & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{array}\right.$$

E anche in altri modi è facile formare quozienti di θ che riescano funzioni $2p$ *volte periodiche*, ammettendo i $2p$ *sistemi di periodi simultanei* indicati nelle verticali della nostra tabella, cosicchè restino invariate quando si aumentano simultaneamente gli argomenti u dei p valori indicati nella s-*ma* verticale. Per esempio, per $p = 2$, basta prendere

$$(2) \qquad f(u_1, u_2) = \frac{\theta(u_1 + c_1, u_2 + c_2)\, \theta(u_1 + c_1', u_2 + c_2')}{\theta(u_1 + d_1, u_2 + d_2)\, \theta(u_1 + d_1', u_2 + d_2')}$$

con

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_1' - d_1 - d_1' \equiv 0 \\ c_2 + c_2' - d_2 - d_2' \equiv 0 \end{array}\right. \qquad \text{mod. } \pi i$$

Infatti la f così definita ammette, anzitutto, i periodi corrispondenti alle prime 2 verticali, che sono periodi delle θ, poi anche i sistemi di periodi $a_{11}\ a_{21}$, e $a_{12}\ a_{22}$; poichè accrescendosi, per esempio, u_1 e u_2, di $a_{11}\ a_{21}$ rispettivamente, i fattori esponenziali che vengono fuori dal numeratore e dal denominatore si eliminano.

Qui, per il rigore, è opportuno notare che la $f(u_1\, u_2)$ ora costruita ha la periodicità indicata come effettiva, cioè non accade che essa si riduca ad una costante, e nemmeno ad una funzione di una sola variabile, ad esempio della sola u_1.

Si riconosce infatti che la f, per valori generici delle costanti c e d, non è una costante, osservando che si possono variare le c_1, c_1', c_2, c_2', lasciando tuttavia ferme le d_1, d_1', d_2, d_2', (e, s'intende, restando inalterate le relative relazioni): in tal modo si spostano gli zeri del numeratore (uno dei quali anzi può esser portato in una posizione qualunque) e non quelli del denominatore, mentre, qualora f si riducesse ad una costante, numeratore e denominatore dovrebbero avere gli stessi zeri.

Similmente, ripetendo lo stesso ragionamento, si prova che la f non può neppure ridursi funzione di una sola variabile, ad esempio di u_1, cioè non può essere $f(\bar{u}_1\, u_2)$ una costante.

Ora conviene osservare che le funzioni abeliane che si possono costruire in corrispondenza ad una tabella di periodi come la (1), sono più generali di quelle che provengono dall'inversione degli integrali abeliani connessi ad una curva di genere p, almeno per $p > 3$.

Infatti la costruzione delle θ relative ad una siffatta tabella è sottoposta soltanto alle condizioni:

1) di simmetria:

$$a_{rs} = a_{sr};$$

2) di convergenza delle serie θ,

che si traduce nell'essere definita negativa la forma quadratica $\Sigma\, a'_{rs}\, x_r x_s$, che ha come coefficienti le parti reali delle a_{rs}.

Cosicchè, entro i limiti della diseguaglianza portati da questa seconda condizione, si hanno in generale

$$p^2 - \frac{1}{2}\, p\,(p-1) = \frac{1}{2}\, p\,(p+1)$$

costanti arbitrarie a_{rs}. Invece i moduli di una curva di genere p portano che gli integrali connessi dipendano solo da $3p-3$ costanti arbitrarie (cfr. Libro V, § 33, vol. 3°, pag. 359).

Segue di qui che: *i periodi a_{rs} degli integrali normali di prima specie annessi ad una curva di genere $p > 3$ soddisfano* a $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ *relazioni*, essendo

$$\frac{1}{2}p(p+1)-(3p-3)=\frac{1}{2}(p-2)(p-3).$$

Per $p=4$ vi è *una* relazione, che è stata effettivamente scritta da SCHOTTKY [1] (1888).

Studieremo ora le funzioni abeliane generali di genere p, indicandone alcune proprietà fondamentali, e riferendoci per semplicità, nelle dimostrazioni, al caso $p=2$.

Consideriamo lo *spazio reale* S_{2p}, a $2p$ dimensioni i cui punti abbiano come coordinate cartesiane le parti reali e i coefficienti delle immaginarie delle variabili $u_1 u_2 \dots u_p$. In questo spazio ciascuna colonna della tabella dei periodi risulta rappresentata da un punto P_i $(i=1, 2 \dots 2p)$. Ad esempio, nel caso $p=2$, riferendoci ad una *tabella normale di periodi* quale è la (1) si hanno i 4 punti $P_1 P_2 P_3 P_4$ rispettivamente di coordinate

$$\begin{array}{lllll} P_1 \equiv 0 & 0 & \pi & 0 \\ P_2 \equiv 0 & 0 & 0 & \pi \\ P_3 \equiv a'_{11} & a'_{21} & a''_{11} & a''_{21} \\ P_4 \equiv a'_{12} & a'_{22} & a''_{12} & a''_{22} \end{array}$$

dove si sono distinte le parti reali e le immaginarie delle a_{rs} scrivendo $a_{rs}=a'_{rs}+ia''_{rs}$.

Nel suddetto S_{2p} i periodi, cioè i punti P rappresentativi delle relative colonne, insieme con l'origine delle coordinate, definiscono un *parallelotopo* o *prismatoide dei periodi*; questo è un solido, delimitato da $4p$ faccie iperpiane, che costituiscono $2p$ coppie di *faccie opposte*: una di queste faccie contiene l'origine e altri $2p-1$ punti P, e la relativa faccia opposta è la parallela ad essa passante per il residuo punto P.

Questo prismatoide ha il *volume essenzialmente diverso da zero*. Per esempio, per $p=2$, il nostro prismatoide è un solido a 4 dimensioni il cui volume è

$$V=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{11} & a'_{12} \\ 0 & 0 & a'_{21} & a'_{22} \\ \pi & 0 & a''_{11} & a''_{12} \\ 0 & \pi & a''_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}.$$

[1] « Crelle's Yournal », 102.

Questo volume risulta essenzialmente diverso da zero (e se si vuole *positivo*) essendo dato da

$$V = \pi^2 \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

cioè (a meno del fattore π^2) dal discriminante della forma quadratica definita

$$a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + a'_{22}x_2^2 .$$

Appunto la condizione $V \neq 0$ porta che i vertici del prismatoide siano indipendenti.

Ciò posto, in rapporto ad una qualsiasi tabella di periodi (1), e supposte sempre le condizioni di convergenza delle θ, valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA I. — *In rapporto alla tabella* (1) *si possono costruire* p *funzioni abeliane di* p *variabili, funzionalmente indipendenti, cioè tali che lo jacobiano*

$$\frac{\partial(f_1 f_2 \dots f_p)}{\partial(u_1 u_2 \dots u_p)} \neq 0 .$$

Riferiamoci all'ipotesi $p = 2$. Supponiamo di avere costruito, come si è insegnato innanzi, una funzione $f(u_1 u_2)$ delle due variabili indipendenti $u_1\, u_2$, che ammetta i detti periodi.

Osserviamo che, se $f(u_1, u_2)$ è una funzione con tali periodi, anche la

$$\varphi(u_1 u_2) = f(u_1 + k_1,\ u_2 + k_2)$$

ammette i medesimi periodi. Si tratta di mostrare che, per valori generici delle costanti k_1 e k_2, le due funzioni f e φ sono indipendenti. E la dimostrazione si ottiene riducendo all'assurdo l'ipotesi che lo jacobiano si annulli, cioè che sia identicamente (per valori qualsiansi delle costanti k_1, k_2, k'_1, k'_2):

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u_2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{k_1 k_2} & \left(\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{k_1' k_2'} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\right)_{k_1 k_2} & \left(\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\right)_{k_1' k_2'} \end{vmatrix} = 0 .$$

Invero, se sussiste una tale identità, dovrà essere

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)_{k_1 k_2} : \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{k_1 k_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)_{k_1' k_2'} : \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{k_1' k_2'}$$

ossia identicamente (rispetto ad $u_1\, u_2$)

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = k \frac{\partial f}{\partial u_1} \qquad \text{con } k \text{ cost.};$$

ma di qui segue

$$f(u_1 u_2) = f(U)$$

con

$$U = u_1 + k u_2$$

e pertanto la f si ridurrebbe a *funzione* di *una sola variabile*, anzichè essere funzione di due variabili *indipendenti!*

La conclusione cui siamo giunti appare subito come inverosimile, ma occorre dimostrarne rigorosamente l'assurdità. A tale scopo si cominci con l'osservare che la f può essere considerata come funzione di un punto di coordinate $u_1\, u_2$ variabile in un piano; nel caso che la f si riducesse funzione di $u_1 + k u_2$, essa apparirebbe costante su ciascuna retta del fascio

$$u_1 + k u_2 = U$$

(U variabile da retta a retta). In particolare su rette di questo fascio dovrebbero annullarsi le θ che figurano al numeratore e al denominatore della espressione (2) di f; d'altra parte l'orientamento di una eventuale retta di zeri per la

$$\theta(u_1 + c_1,\ u_2 + c_2)$$

non si altera variando c_1 e c_2, onde segue che l'orientamento del fascio suddetto non può dipendere dalle costanti c e d che appaiono nella formula (2) che fornisce f.

Ciò posto, una trasformazione di coordinate che muti le rette $u_1 + k u_2 = U$ in parallele all'asse u_2, ad esempio la rotazione d'assi

$$v_1 = u_1 + k u_2$$
$$v_2 = -k u_1 + u_2$$

trasformerebbe f in una funzione della sola v_1, cosa che si riconosce assurda (per valori generici delle costanti c e d)

con lo stesso ragionamento con cui innanzi abbiamo escluso che la f sia funzione della sola u_1.

Teorema II. — *Se* $f_1, f_2 \dots f_k$ *sono* p *funzioni indipendenti coi periodi* (1), *le* p *equazioni*

$$f_1(u) = x_1, \quad f_2(u) = x_2 \;\dots\; f_p(u) = x_p,$$

ammettono, per un sistema generico di valori $x_1\, x_2 \dots x_p$, *un numero finito di soluzioni entro il prismatoide dei periodi, e questo numero* m *è lo stesso per tutti i sistemi non singolari di valori delle* x.

Ci riferiamo ancora al caso $p = 2$.

Se le due equazioni

$$\varphi_1(u_1 u_2) = f_1(u_1 u_2) - x_1 = 0, \qquad \varphi_2(u_1 u_2) = f_2(u_1 u_2) - x_2 = 0,$$

ammettono infiniti punti-soluzioni entro il prismatoide suddetto, vi sarà — nello stesso solido finito — un qualche punto limite di questi, O, a cui si avvicineranno infiniti punti di zero delle φ_1 e φ_2:

$$O_1 = (u_1'\, u_2'), \quad O_2 = (u_1''\, u_2'') \dots;$$

e si potrà supporre che almeno u_1 assuma in codesti punti una infinità di valori diversi:

$$u_1', \quad u_1'' \dots$$

Richiamiamo ora un noto teorema (il *Vorbereitungsatz*) di Weierstrass [1]: nell'intorno del punto O, che è regolare per ciascuna delle due funzioni $\varphi_1(u_1\, u_2)$ e $\varphi_2(u_1\, u_2)$, le due equazioni $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = 0$ (non identicamente nulle per un valore costante di u_2) sono algebroidi, cioè si possono ridurre alla forma

$$D_1\, \alpha_1(u_1 \mid u_2) = 0 \quad \text{o} \quad \alpha_1(u_1 \mid u_2) = 0$$
$$D_2\, \alpha_2(u_1 \mid u_2) = 0 \quad \text{o} \quad \alpha_2(u_1 \mid u_2) = 0,$$

dove α_1 e α_2 sono funzioni *algebriche* in u_2 e regolari in u_1, D_1 e D_2 funzioni che *non si annullano* all'intorno di O. Allora,

[1] Cfr. p. es. Bianchi. *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, § 74, pag. 200. Pisa, Spoerri 1901.

se si elimina u_2 fra le due equazioni $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$, si potrà scrivere l'equazione resultante regolare in u_1:

$$R(u_1) = 0,$$

la quale non può essere soddisfatta identicamente se α_1 e α_2 sono indipendenti (come accade per valori generici delle $x_1\, x_2$). Pertanto la

$$R(u_1) = 0$$

dovrebbe ammettere infinite soluzioni

$$u_1'\; u_1'' \ldots$$

tendenti al punto limite O, che resulterebbe quindi un punto singolare di R. Questa contraddizione, dimostra che, per valori generici di x_1 e x_2, le due equazioni

$$f_1(u_1\, u_2) = x_1, \quad f_2(u_1\, u_2) = x_2,$$

ammettono certo un numero finito di soluzioni entro il prismatoide dei periodi. È quindi facile vedere che questo numero m, non può variare col variare di x_1 e x_2: chè se una nuova soluzione sorga in dipendenza d'un punto entrante per una faccia nel detto prismatoide, nel tempo stesso un altro punto-soluzione uscirà per la faccia opposta, e viceversa.

Così resta stabilito il Teorema.

36. **Varietà abeliane.** — Secondo il Teorema II del paragrafo precedente, assunte p funzioni $2p$ volte periodiche indipendenti delle p variabili u, con un dato sistema di periodi,

$$x_1 = f_1, \quad x_2 = f_2 \ldots x_p = f_p,$$

c'è un numero finito m di *punti* (U) entro il prismatoide dei periodi, per cui le f assumono valori assegnati $x_1\, x_2 \ldots x_p$. Segue da ciò che una $(p+1)$-*ma* funzione x_{p+1} cogli stessi periodi resulta funzione algebrica delle $x_1\, x_2 \ldots x_p$, ossia:

Fra p + 1 ***funzioni*** 2p ***volte periodiche delle*** p ***variabili*** u, ***con un dato sistema di periodi, intercede una relazione algebrica***

$$V(x_1\, x_2 \ldots x_p\, x_{p+1}) = 0.$$

Si può sempre scegliere la x_{p+1} in modo che non riprenda lo stesso valore in due punti (U) dove le $x_1\, x_2 \ldots x_p$ assumono gli stessi valori. Invero pongasi che le f_i, per $i=1,2 \dots p$, assumano gli stessi valori nei due punti $(0\,0 \dots 0)$ e $(a_1 a_2 \dots a_p)$:

$$f_i(0 \dots 0) = f_i(a_1 \dots a_p) \qquad (i=1, \dots p);$$

allora, se sia anche

$$f_{p+1}(0 \dots 0) = f_{p+1}(a_1 \dots a_p),$$

si sostituisca alla $f_{p+1}(u)$ la

$$\varphi_{p+1}(u_i) = f_{p+1}(u_i + h_i);$$

si avrà, in generale,

$$\varphi_{p+1}(0 \dots 0) \neq \varphi_{p+1}(a_1 \dots a_p).$$

Perchè se fosse, per valori qualsiansi delle h_i,

$$\varphi_{p+1}(0 \dots 0) = \varphi_{p+1}(a_1 \dots a_p),$$

dovrebbe essere

$$f_{p+1}(h_i) = f_{p+1}(h_i + a_i),$$

cioè le a_i sarebbero *periodi* delle f_{p+1}, cosicchè se il punto (a_i) cade dentro il prismatoide dei periodi delle f, questi periodi non sarebbero più *primitivi*.

In virtù dell'osservazione precedente:

Si possono scegliere p + 1 *funzioni* 2p *volte periodiche*, $x_1 x_2 \dots x_{p+1}$, *delle variabili* $u_1 u_2 \dots u_p$, *per modo che la varietà algebrica*

$$V(x_1 x_2 \; \dots \; x_{p+1}) = 0,$$

resulti rappresentata biunivocamente sul prismatoide dei periodi.

Una siffatta varietà V viene designata di solito col nome di *varietà abeliana.*

La varietà abeliana V, *a* p *dimensioni, ammette un gruppo misto* ∞^p *di trasformazioni birazionali in sè stessa, composto delle due schiere di trasformazioni:*

$$\begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} u'_i \equiv \quad u_i + k_i \\ u'_i \equiv - u_i + k_i \end{array} \right. \quad \text{mod. periodi.} \\ (2) & \end{array}$$

Le trasformazioni di *prima specie* (1), formano da sole un *gruppo continuo*, mentre quelle di *seconda specie* (2), porgono ∞^p *trasformazioni involutorie* che, moltiplicate a due a due, generano le (1).

Per $p = 1$, la varietà abeliana V si riduce ad una *curva ellittica* che, mercè la sua rappresentazione parametrica con funzioni ellittiche, viene rappresentata biunivocamente nel piano della variabile complessa, sopra il parallelogramma dei periodi (cfr. § 9). Le trasformazioni (1) e (2) ricadono nelle trasformazioni di prima e seconda specie della curva in sè, definite nel Libro V, Cap. III, § 27 (Vol. III, pag. 256).

Per $p = 2$, la tabella dei periodi

$$\begin{cases} \pi i & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pi i & a_{21} & a_{22} \end{cases}$$

corrisponde sempre ad una *curva* C *di genere due* che appunto dipende da 3 moduli (cfr. pag. 216), e quindi la ***superficie*** abeliana $V = F$ (che assume il nome di superficie ***iperellittica*** propria) viene ad essere la *superficie* di JACOBI i cui punti — funzioni delle somme dei due integrali abeliani nelle coppie di punti di C — rispondono alle coppie di punti della C stessa.

Analogamente si dica per $p = 3$.

Ma per $p > 3$, la *varietà di Jacobi*, rappresentativa dei gruppi di p punti d'una curva C_p di genere p, è soltanto un *caso particolare* della varietà abeliana V a p dimensioni (cfr. pag. 216).

Nel caso particolare in cui la varietà V rappresenti i gruppi G_p di p punti di una curva di genere p, il gruppo misto delle trasformazioni di V, si può costruire come segue.

Anzitutto le trasformazioni di seconda specie si definiscono facendo corrispondere due gruppi di p punti, G_p e G'_p, della C_p, quando sono residui l'uno dell'altro rispetto ad una medesima g^p_{2p}. Queste trasformazioni involutorie generano per moltiplicazione il gruppo continuo delle trasformazioni di prima specie. La teoria geometrica delle trasformazioni della varietà di JACOBI così sviluppata da G. CASTELNUOVO è stata da noi esposta nel § 27, dove si è fatto vedere come gli integrali abeliani e il teorema stesso d'inversione possano dedursi dalla teoria sintetica di queste trasformazioni.

NOTA. Qual'è il significato dei p argomenti delle funzioni $2p$ volte periodiche in ordine alla varietà abeliana che da esse viene parametricamente rappresentata?

Sia
$$V(x_1 x_2 \dots x_{p+1}) = 0$$
la varietà rappresentata parametricamente dalle $p+1$ funzioni $2p$ volte periodiche:
$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1 u_2 \dots u_p) \\ x_2 = f_2(u_1 u_2 \dots u_p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{p+1} = f_{p+1}(u_1 u_2 \dots u_p). \end{cases}$$

Ad ogni punto $X = (x_1 x_2 \dots x_{p+1})$ di V risponde un gruppo di valori $(u_1 u_2 \dots u_p)$ sempre finiti, determinato a meno di costanti addittive (multiple dei periodi). Quindi le u_i sono ovunque funzioni regolari del punto X, cioè funzioni regolari delle variabili indipendenti $x_1\, x_2 \dots x_p$, salvo punti critici (algebrici); perciò le derivate
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_r},$$
le quali dipendono univocamente da $x_1\, x_2 \dots x_p\, x_{p+1}$, resultano funzioni dotate soltanto di poli, ossia funzioni algebriche delle $x_1\, x_2 \dots x_p$, e funzioni razionali di $x_1\, x_2 \dots x_p\, x_{p+1}$, sopra V.

Pertanto si avrà
$$u_i = \int (P_{1i} dx_1 + \dots + P_{pi} dx_p),$$
le P designando funzioni razionali del punto X di V, soddisfacenti alle condizioni affinchè
$$P_{1i} dx_1 + \dots + P_{pi} dx_p$$
sia un differenziale esatto. E gl'integrali u_i si mantengono *ovunque finiti* sopra V.

Concludiamo così che:

Gli argomenti delle funzioni 2p *volte periodiche rappresentanti parametricamente la varietà abeliana, sono integrali di differenziali algebrici di prima specie* (cioè sempre finiti) *appartenenti alla varietà.*

Nel caso che la varietà V sia la varietà jacobiana dei gruppi di p punti di una curva C, del genere p, la varietà V conterrà un sistema ∞^{p-1} di curve identiche alla C, che rispondono alle serie di gruppi di p punti di C, con $p-1$ punti fissi; allora le u_i, che sono integrali di prima specie sopra V, subordinano degli integrali abeliani di prima specie (indipendenti) su ciascuna di tali curve. Si ritorna così alla interpretazione delle u_i, come integrali della curva C, da cui ha preso le mosse il problema d'inversione; invero le u_i, definite come somme dei valori degli integrali di C in p punti della curva, si riducono semplicemente agli integrali di essa, quando si considerino gruppi di p punti con $p-1$ punti fissi.

Osservazione. Ritornando alla varietà abeliana V più generale, si può dimostrare che alla varietà stessa non appartengono altri integrali algebrici di differenziali totali di prima specie, corrispondenti alla medesima tabella di periodi, all'infuori di $u_1\, u_2 \ldots u_p$ e delle loro combinazioni lineari.

Infatti, se v è un integrale siffatto, sottraendo da v una combinazione lineare $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$, si otterrà un integrale privo di periodi e ovunque finito sopra V, che dovrà ridursi ad una costante.

Anzi si può dire di più che, essendo i *periodi* anzidetti *primitivi*, non è *nemmeno* possibile trovare un *altro integrale di prima specie* pertinente alla varietà, *con periodi qualsiansi*; poichè combinandolo linearmente con $u_1\, u_2 \ldots u_p$, si costruirebbe un nuovo integrale di prima specie avente periodi infinitesimi, ciò che condurrebbe ad un assurdo. (Cfr. per il caso ellittico § 9, pagg. 54-55).

37. Riduzione a forma normale dei periodi delle funzioni abeliane. — In ciò che precede siamo partiti da una tabella di periodi normali:

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \pi i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{array} \right.$$

dove $a_{rs} = a_{sr}$, ed inoltre è soddisfatta la diseguaglianza fondamentale che assicura la convergenza delle serie θ; ma i teoremi stabiliti sulle funzioni $2p$ volte periodiche si estendono al caso di una tabella di periodi qualsiansi, purchè sieno soddisfatte soltanto le condizioni per l'esistenza delle corrispondenti funzioni: l'ipotesi di una tabella di periodi normali permetteva appunto di costruire le funzioni domandate mediante quozienti di θ.

Dunque, per una tabella di periodi qualsiansi, *se esiste* una funzione $2p$ volte periodica, si potranno associare ad essa altre p funzioni abeliane coi medesimi periodi, per modo che un'altra qualunque funzione abeliana cogli stessi periodi debba esprimersi come funzione razionale delle $p+1$ suddette. Le indicate $p+1$ funzioni abeliane rappresenteranno così i punti di una varietà algebrica a p dimensioni $V=V_p$: varietà abeliana che possiede un gruppo misto di trasformazioni birazionali in sè, composto di ∞^p involuzioni (trasformazioni di seconda specie) e di ∞^p trasformazioni di prima specie formanti un gruppo continuo.

Ora vogliamo accennare brevemente a quale tipo normale possano, in ogni caso, ricondursi i periodi di un sistema qualsiasi di funzioni abeliane di p argomenti $u_1\, u_2 \dots u_p$.

Ordunque assumiamo una tabella di periodi

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{p,2p} \end{array}\right.$$

con la condizione a priori che essi siano ***indipendenti***, nel senso che qui viene precisato. Consideriamo lo S_{2p} rappresentativo delle parti reali e delle parti immaginarie degli argomenti $u_1\, u_2 \dots u_p$: in questo S_{2p} vi sono $2p$ punti $P_1\, P_2 \dots P_{2p}$ corrispondenti alle colonne della matrice: ponendo

$$\omega_{rs} = \omega'_{rs} + i\omega''_{rs}$$

il punto P_n ha le coordinate

$$\omega'_{1n}\, \omega'_{2n} \dots \omega'_{pn}\, \omega''_{1n}\, \omega''_{2n} \dots \omega''_{pn}\,.$$

La nostra condizione di indipendenza consiste in ciò che i punti $P_1\, P_2 \dots P_{2p}$ dello S_{2p} non appartengano ad un iperpiano S_{2p-1} passante per l'origine $O\equiv(0\,0\dots0)$, per modo che i $2p+1$ punti $O\,P_1\,P_2 \dots P_{2p}$ definiscano un effettivo prismatoide a volume non nullo.

Il significato di tale condizione rispetto alla teoria che qui stiamo disegnando è il seguente: se si assumono periodi non indipendenti si cade in funzioni con un numero minore di periodi ovvero con periodi infinitesimi (cfr. il caso ellittico).

Dunque, assunta una tabella (1) di periodi indipendenti, supponiamo che ad essa corrisponda un sistema di funzioni $2p$ volte periodiche di p variabili: l'ipotesi d'esistenza di tali funzioni si traduce in relazioni di uguaglianza e disuguaglianza che debbono essere soddisfatte dai periodi proposti, in forza delle quali si riesce appunto a ridurre i nostri periodi ad un tipo normale.

Il teorema fondamentale che domina questa teoria è stato enunciato da RIEMANN e dimostrato da PICARD e POINCARÉ (¹).

Esso dice che:

I 2p *periodi appartenenti ad un sistema di funzioni* 2p *volte periodiche di* p *argomenti soddisfano, in ogni caso, alle stesse relazioni (di eguaglianza e diseguaglianza) stabilite da Riemann per i periodi degli integrali abeliani di una curva di genere* p, come viene precisato più oltre.

Per semplicità di discorso ci riferiremo di solito al caso $p=2$, enunciando poi le conclusioni più generali per p qualunque.

Consideriamo dunque una tabella di periodi indipendenti

$$\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \end{matrix}$$

alla quale supponiamo corrispondere una funzione 4 volte periodica

$$f_1(u_1\, u_2).$$

Come nel § 35 possiamo costruire altre due funzioni

$$f_2(u_1\, u_2) \qquad f_3(u_1\, u_2)$$

coi medesimi periodi.

Allora ponendo

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = f_1(u_1\, u_2) \\ x_2 = f_2(u_1\, u_2) \\ x_3 = f_3(u_1\, u_2), \end{cases}$$

(¹) « Comptes rendus », 3 dec. 1883. Cfr.: E. PICARD: *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques.* Parigi, Gauthier-Villars, 1931 (pag. 46).

si avrà fra x_1, x_2 e x_3 una relazione algebrica

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = 0 \tag{3}$$

rappresentante una superficie algebrica abeliana.

Supporremo che a un punto di questa superficie corrisponda una sola coppia di valori u_1 e u_2.

Consideriamo sulla superficie (3) una curva algebrica, per esempio la sezione col piano

$$x_3 = c \text{ (cost.)},$$

la quale viene rappresentata da

$$F(x_1\, x_2\, c) = 0, \tag{4}$$

o parametricamente dalle due prime equazioni (2) quando fra i parametri passi la relazione

$$f_3(u_1\, u_2) = c.$$

Ad ogni punto $(x_1\, x_2)$ della curva (4) corrisponde un valore di u_1 (e analogamente di u_2) determinato a meno di periodi. È quindi facile verificare che u_1 è un integrale abeliano (ovunque finito e perciò di prima specie) sopra la curva suddetta, la sua derivata resultando funzione algebrica di x_1. Infatti, differenziando le (2) ove sia posto $x_3 = c$, viene

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} du_2$$

$$dx_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2$$

$$0 = \frac{\partial f_3}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} du_2,$$

dove i coefficienti di du_1 e du_2 sono funzioni abeliane cogli stessi periodi delle f_1, f_2, f_3 (cioè delle x_1, x_2, x_3), e perciò funzioni razionali di x_1, x_2 ($x_3 = c$). E di qui si ricava appunto

$$du_1 = R(x_1\, x_2)\, dx_1,$$

con R simbolo di funzione razionale, ossia

$$u_1 = \int R(x_1\, x_2)\, dx_1.$$

Enunciamo in generale (per $p \geq 2$):

I. *Se una curva algebrica* C *è contenuta nella varietà abeliana* V_p, *i* p *valori dei parametri* $u_1\, u_2 \dots u_p$, *considerati come funzioni del punto di* C, *danno* p *integrali abeliani di prima specie sopra la curva.*

In generale (cioè esclusa una scelta particolare della C) questi p integrali risultano linearmente indipendenti, e così il genere di C risulta maggiore o eguale a p.

Ritorniamo all'ipotesi $p = 2$, e sia $q \geq 2$ il genere della curva C. Sulla corrispondente superficie di Riemann tracciamo i $2q$ cicli fondamentali A e B: i due integrali u_1 e u_2 avranno in relazione ad essi i periodi Ω_{1i} e Ω_{2i}:

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{llllll} \Omega_{11} & \Omega_{12} \dots & \Omega_{1q} & \Omega_{1,q+1} & \dots & \Omega_{1,2q} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \dots & \Omega_{2q} & \Omega_{2,q+1} & \dots & \Omega_{2,2q}, \end{array} \right.$$

fra i quali intercede la *relazione d'eguaglianza di Riemann* (cfr. § 21, pag. 129):

$$\Sigma_i (\Omega_{1i}\, \Omega_{2,q+i} - \Omega_{1,q+i}\, \Omega_{2i}) = 0. \tag{5}$$

Ma, d'altra parte, quando il punto $(x_1\, x_2\, c)$ descrive un ciclo A o B, che è anche un ciclo sopra la varietà abeliana (3), i parametri u_1 e u_2 si accrescono di combinazioni lineari a cofficienti interi dei periodi (*primitivi*) ω; sieno:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{i_1}\omega_{11} + m_{i_2}\omega_{12} + m_{i_3}\omega_{13} + m_{i_4}\omega_{14}, \\ m_{i_1}\omega_{21} + m_{i_2}\omega_{22} + m_{i_3}\omega_{23} + m_{i_4}\omega_{24} \end{array} \right.$$

queste combinazioni. Avremo dunque

$$\Omega_{1i} = m_{i_1}\omega_{11} + m_{i_2}\omega_{12} + m_{i_3}\omega_{13} + m_{i_4}\omega_{14}$$
$$\Omega_{2i} = m_{i_1}\omega_{21} + m_{i_2}\omega_{22} + m_{i_3}\omega_{23} + m_{i_4}\omega_{24},$$

e la relazione (5) darà

$$\Sigma c_{rs}\, \omega_{1r}\, \omega_{2s} = 0, \qquad [r, s = 1 \dots 4] \tag{6}$$

dove

$$c_{rs} = \Sigma\, (m_{ir}\, m_{q+i,s} - m_{q+i,r}\, m_{i,s}), \qquad [i = 1, 2 \dots q]$$
$$c_{rs} = -c_{sr}.$$

I coefficienti c_{rs} apparirebbero a priori dipendere dalla scelta dei due integrali u_1 e u_2; ma poichè sono interi (come gli m) non possono variare con continuità insieme ad u_1 e u_2, e perciò restan fissi.

Contemporaneamente, le parti reali e i coefficienti dell'immaginarie, dei periodi Ω (diciamo Ω' e Ω'') soddisfano alla *diseguaglianza di Riemann* (cfr. pag. 124, formula 3)

$$\Sigma_i(\Omega'_{1i}\Omega''_{2,q+i}-\Omega'_{1,q+i}\Omega''_{2i})>0,$$

che si traduce nella

$$\sum_1^4 c_{rs}\,\omega'_{1r}\,\omega''_{2s}>0. \tag{7}$$

Enunciamo, in generale, per p qualunque:

II. *I periodi* ω_{hk} ($h=1,2\dots p$; $k=1,2\dots 2p$) *d'una funzione abeliana di* p *variabili* $u_1\,u_2\dots u_p$, *sono soggetti alle condizioni seguenti:*

1) *Esiste una forma bilineare alternata*

$$\sum_1^{2p} c_{rs}\,x_r\,y_s \qquad \begin{pmatrix} c_{rs}=-c_{sr} \\ c_{rr}=0 \end{pmatrix}$$

che si annulla quando al posto delle $x_1\,x_2\dots x_p$ *e delle* $y_1\,y_2\dots y_p$, *si pongono rispettivamente i periodi relativi a due qualsiansi variabili* u_i, u_j:

$$\omega_{i1}\quad\omega_{i2}\;\dots\;\omega_{i,2p};\qquad \omega_{j1}\quad\omega_{j2}\;\dots\;\omega_{j,2p};$$

2) *La forma stessa riesce definita positiva (non mai nulla) quando al posto delle* $x_1\,x_2\dots x_p$ *e delle* $y_1\,y_2\dots y_p$, *si pongono rispettivamente le parti reali e i coefficienti della immaginaria dei periodi d'una qualsiasi combinazione lineare*

$$\lambda_1\,u_1+\lambda_2\,u_2+\;\dots\;+\lambda_p\,u_p.$$

Ad un sistema di periodi primitivi pertinenti a funzioni abeliane di p variabili $u_1\,u_2\dots u_p$:

$$\begin{array}{c|cccccc}
u_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & \dots\;\omega_{1p} & \omega_{1,p+1} & \dots & \omega_{1,2p} \\
u_2 & \omega_{21} & \omega_{22} & \dots\;\omega_{2p} & \omega_{2,p+1} & \dots & \omega_{2,2p} \\
\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
u_p & \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots\;\omega_{pp} & \omega_{p,p+1} & \dots & \omega_{p,2p},
\end{array}$$

si può sostituire un nuovo sistema di periodi primitivi *equivalenti*, eseguendo sulle $2p$ lettere di ciascuna orizzontale una sostituzione lineare a coefficienti interi *unimodulare*, per modo che inversamente i nuovi periodi risultino combinazioni lineari a coefficienti interi dei primi: ciò porta a trasformare linearmente la forma

$$\sum_{1}^{2p} c_{rs}\, x_r\, y_s\,, \tag{7}$$

colla medesima sostituzione unimodulare a coefficienti interi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i' = n_{i_1} x_1 + n_{i2}\, x_2 + \ldots + n_{ip}\, x_p\,, \\ y_i' = n_{i_2}\, y_1 + n_{i_2}\, y_2 + \ldots + n_{ip}\, y_p\,. \end{array} \right.$$

Ora Frobenius ha dimostrato che ogni forma bilineare (7) (supposto, come è lecito, che i suoi coefficienti non abbiano fattori interi comuni) può ricondursi, con una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi, ad una *forma canonica*

$$\sum_{1}^{p} {}_{i}\, c_i\,(x_i y_{p+i} - x_{p+i}\, y_i), \tag{8}$$

cioè ad un tipo per cui riescono nulli tutti i coefficienti c_{rs} salvo p tra essi:

$c_{i,\,p+i}$ che indichiamo brevemente con c_i,

e dove i c_i sono interi positivi formanti una successione

$$c_1\, c_2\, \ldots\, c_p$$

che comincia con

$$c_1 = 1,$$

e in cui *ciascun termine* c_i *è divisibile per il precedente* (¹).

Dopo ciò è anche lecito eseguire una sostituzione lineare (a determinante non nullo) sulle variabili $u_1\, u_2 \ldots u_p$, per mezzo della quale riusciremo ad annullare tutti i periodi che figurano nel quadrato a sinistra della tabella, salvo quelli che stanno sulla diagonale, i quali diverranno eguali a: $c_1 c_2 \ldots c_p$.

Infatti, riprendendo l'ipotesi $p = 2$, pongasi

$$v_1 = \lambda_1\, u_2 + \lambda_2\, u_2 \qquad v_2 = \mu_1\, u_1 + \mu_2\, u_2\,,$$

(determinante della sostituzione diverso da zero). Con ciò le

(¹) Per $p = 2$ la riduzione è spiegata in Picard, op. cit., pagg. 52 e seg.

due funzioni abeliane

$$f_1(u_1\, u_2) \qquad f_2(u_1\, u_2),$$

coi periodi

$$\left\{\begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \end{matrix}\right.$$

si cambieranno in due funzioni abeliane

$$\varphi_1(v_1\, v_2) \qquad \varphi_2(v_1\, v_2)$$

coi periodi

$$\left\{\begin{matrix} \lambda_1\omega_{11}+\lambda_2\omega_{21} & \lambda_1\omega_{12}+\lambda_2\omega_{22} & \lambda_1\omega_{13}+\lambda_2\omega_{23} & \lambda_1\omega_{14}+\lambda_2\omega_{24} \\ \mu_1\omega_{11}+\mu_2\omega_{21} & \mu_1\omega_{12}+\mu_2\omega_{22} & \mu_1\omega_{13}+\mu_2\omega_{23} & \mu_1\omega_{14}+\mu_2\omega_{24}, \end{matrix}\right.$$

i quali verificheranno ancora le condizioni sopra enunciate relative alla forma bilineare (8). Ora si possono scegliere $\lambda_1 \lambda_2$ e $\mu_1 \mu_2$ in guisa che riescano:

$$\lambda_1\omega_{12}+\lambda_2\omega_{22}=0, \qquad \mu_1\omega_{11}+\mu_2\omega_{21}=0,$$
$$\lambda_1\omega_{11}+\lambda_2\omega_{21}=\Omega_1 \neq 0, \qquad \mu_1\omega_{12}+\mu_2\omega_{22}=\Omega_2\neq 0;$$

perchè, se si trovasse per es. anche $\Omega_1=0$, la forma (8) non sarebbe più una forma definita quando al posto della x e della y si ponessero le parti reali e i coefficienti delle immaginarie dei periodi di v_1, riuscendo, per $i=1, 2 \ldots p$, nulli tanto x_i che y_i.

Dunque avremo per φ_1 e φ_2 la tabella di periodi:

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} \Omega_1 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \Omega_2 & a_{21} & a_{22}, \end{matrix}\right.$$

e l'eguaglianza fondamentale ottenuta annullando la (8) dà pei nuovi periodi

(9) $$c_1\,\Omega_1\,a_{21} - c_2\,\Omega_2\,a_{12}=0.$$

Siccome la sostituzione precedentemente usata sulle $u_1\, u_2$ lasciava ancora arbitrario un fattore (non nullo) di $\lambda_1\, \lambda_2$, e un fattore di $\mu_1\, \mu_2$, possiamo approfittarne per rendere

$$\Omega_1=\frac{\pi i}{c_1}=\pi i \qquad (c_1=1)$$

$$\Omega_2=\frac{\pi i}{c_2},$$

ed allora la nostra tabella di periodi si riduce alla forma normale

$$\begin{cases} \pi i & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \dfrac{\pi i}{c_2} & a_{21} & a_{22} \end{cases}$$

e la relazione (9) diviene

$$a_{12} = a_{21}.$$

La diseguaglianza fondamentale di RIEMANN esprime allora che il determinante delle parti reali della a_{rs} è il discriminante d'una forma quadratica essenzialmente negativa.

In generale

Una qualsiasi funzione abeliana di p *argomenti per una conveniente scelta dei periodi primitivi e con una conveniente sostituzione lineare sulle variabili, può trasformarsi in guisa da possedere periodi normali del tipo*

$$(10)\qquad \begin{cases} \pi i & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & \dfrac{\pi i}{c_2} & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{\pi i}{c_p} & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp}, \end{cases}$$

dove $c_2\, c_3 \dots c_p$ sono numeri interi positivi ciascuno divisibile dai precedenti, dove

$$a_{rs} = a_{sr},$$

e dove le parti reali delle a_{rs} costituiscono il discriminante d'una forma quadratica negativa.

La varietà abeliana relativa all'anzidetta tabella dei periodi, W_p, stà in una semplice relazione colla varietà abeliana, V_p, relativa ai periodi

$$(11)\qquad \begin{cases} \pi i & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp}. \end{cases}$$

Infatti i periodi (11) sono anche periodi, non primitivi, per le funzioni abeliane relative ai periodi (10); cosicchè queste funzioni riprendono tutte gli stessi valori in un numero finito di punti entro il prismatoide dei periodi corrispondente a V_p, cioè precisamente nei punti

$$(u_r) \quad \left(u_r + \frac{\pi i}{e_r}\right) \ldots$$

Dunque *la varietà abeliana* W_p *corrispondente ai periodi* (10), *rappresenta un' involuzione sopra la varietà* V_p *coi periodi* (11).

Perciò la W_p ammette una rappresentazione parametrica con funzioni razionali dei punti di V_p. Ciò significa che *tutte le funzioni abeliane* 2p *volte periodiche di* p *variabili si possono esprimere con quozienti di funzioni* θ.

38. **Integrali con periodi riducibili.** — Già nello studio degli integrali abeliani appartenenti ad una curva algebrica di genere p, si presenta il caso in cui i $2p$ periodi d'un integrale si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti interi di un numero minore di periodi; si parla allora di *integrali con periodi riducibili* o, più brevemente, d'*integrali riducibili.* Ad un caso particolarmente interessante di riducibilità si è condotti dal considerare le *curve* f di genere p *contenenti un' involuzione irrazionale* γ_n^1 di genere q $(< p)$, cioè le curve $f(xy) = 0$ che ammettono una trasformata razionale

$$F(X\,Y) = 0$$

rispondente alla $f(xy)$ in una corrispondenza $[n, 1]$ non razionalmente invertibile $(n > 1)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} X = X(xy) \\ Y = Y(xy) \end{cases}$$

con X e Y simboli di funzioni razionali.

Ogni funzione razionale

$$\Phi(X\,Y)$$

dei punti della curva F è pure funzione razionale dei punti di f, e quindi un integrale abeliano relativo ad F dà anche un integrale abeliano relativo ad f. Precisamente l'integrale

$$(2) \qquad \int \Phi(X\,Y)\,dx$$

si trasforma, per le formule (1), in un integrale

$$\int \varphi(x\,y)dx, \tag{3}$$

dove $\varphi(x\,y)$ si lascia calcolare facilmente.

È anche chiaro che un integrale abeliano *di prima specie* si trasforma in un integrale di *prima specie*.

Ora i q integrali (3) (di prima specie) così ottenuti possiederanno dei periodi combinazioni lineari dei periodi primitivi appartenenti ai p integrali indipendenti della f; ma codesti periodi si esprimeranno anche come combinazioni lineari dei periodi appartenenti ai q integrali indipendenti della curva F, e perciò daranno q *integrali riducibili a* $2q$ *periodi.*

Il caso più semplice è quello in cui la curva f contenga un'involuzione γ_n^1 di genere 1, cioè ellittica. Si ottiene allora un integrale abeliano riducibile a due periodi, ossia riducibile ad ellittico. Viceversa è agevole dimostrare che l'*esistenza di un integrale abeliano di prima specie riducibile ad ellittico è condizione, non solo necessaria, ma altresì sufficiente perchè la curva* f *possegga un' involuzione ellittica.*

Infatti, se alla curva f appartiene un integrale u con due periodi ω e ω', le funzioni ellittiche

$$\wp(u \mid \omega,\ \omega') \qquad \wp'(u \mid \omega,\ \omega')$$

le quali hanno soltanto dei poli per u finito, risulteranno funzioni univocamente determinate dei punti di f, dotate soltanto di poli, e perciò funzioni razionali; così dunque la curva f, ammetterà come trasformata razionale la cubica ellittica

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad \{x = \wp(u) \ \ y = \wp'(u)\},$$

e perciò conterrà un'involuzione ellittica. c. d. d.

Non si creda però che questo teorema possa estendersi al caso di integrali riducibili con più di due periodi: già l'esistenza di due integrali riducibili a quattro periodi costituisce, per la curva f, un caso più generale in confronto al possesso di un'involuzione di genere due. L'estensione del teorema pei sistemi di q integrali riducibili con $2q$ periodi, per $q > 1$, conduce ad una proprietà delle varietà di Jacobi corrispondente alla curva, e in generale delle varietà abeliane.

Gli integrali abeliani riducibili hanno formato oggetto di numerose ricerche, di PICARD, POINCARÈ, KOVALEWSKI ecc. Citiamo alcuni dei resultati più notevoli conseguiti in questo campo di studi.

PICARD ha rilevato che se una curva di genere due possiede un integrale riducibile ad ellittico, ne possiede sempre un secondo; se vi sono più di due integrali riducibili ve n'è infiniti. Questi teoremi rispondono alle proprietà delle involuzioni ellittiche sopra una curva, che abbiamo incontrato geometricamente nel libro V, § 41. (Vol. III, pag. 476 e segg.).

POINCARÈ ha esteso il primo teorema sopra enunciato di PICARD, dimostrando che se una curva di genere p possiede q $(q < p)$ integrali riducibili a $2q$ periodi, essa possiede di conseguenza anche $p - q$ integrali riducibili a $2(p - q)$ periodi.

Questo teorema esprime non tanto una proprietà analitica degli integrali, quanto una proprietà aritmetica dei sistemi di periodi, e perciò vale egualmente per gli integrali pertinenti ad una curva e per gl'integrali che appartengono ad una varietà abeliana più generale.

Invero sia dato un sistema di p funzioni $2p$ volte periodiche di p argomenti u, con $2p$ periodi: questi formeranno la matrice

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \cdot\,\cdot \\ u_p \end{array} \left(\begin{array}{cccc} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \ldots & \omega_{p,2p}, \end{array} \right.$$

soddisfacendo alle solite condizioni d'esistenza.

Ora se nel sistema lineare ∞^p delle u vi sono ∞^q integrali riducibili con $2q$ periodi, dovranno sussistere certe relazioni fondamentali, che possiamo scrivere supponendo, per semplicità, che proprio i primi q integrali $u_1\, u_2 \ldots u_q$, sieno q integrali (linearmente) indipendenti riducibili, ed ammettano i periodi primitivi:

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \cdot\,\cdot \\ u_p \end{array} \left(\begin{array}{cccc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \ldots & \Omega_{1,2q} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \ldots & \Omega_{2,2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ \Omega_{q1} & \Omega_{q2} & \ldots & \Omega_{q,2q}. \end{array} \right.$$

Ciò significa che le Ω si esprimono per le ω come combinazioni lineari a coefficienti interi h_{rs}:

$$(1)\quad \begin{cases} \Omega_{11} = h_{11}\omega_{11} + h_{12}\omega_{12} + \dots + h_{1,2p}\omega_{1,2p} \\ \Omega_{21} = h_{11}\omega_{21} + h_{12}\omega_{22} + \dots + h_{1,2p}\omega_{2,2p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_{q1} = h_{11}\omega_{q1} + h_{12}\omega_{q2} + \dots + h_{1,2p}\omega_{q,2p}, \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(2q)\quad \begin{cases} \Omega_{1,2q} = h_{2q,1}\omega_{11} + h_{2q,2}\,\omega_{12} + \dots + h_{2q,2p}\omega_{1,2p} \\ \Omega_{2,2q} = h_{2q,1}\omega_{21} + h_{2q,2}\,\omega_{22} + \dots + h_{2q,2p}\omega_{2,2p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_{q,2q} = h_{2q,1}\omega_{q1} + h_{2q,2}\omega_{q2} + \dots + h_{2q,2p}\omega_{q,2p}. \end{cases}$$

L'esistenza di questi $2q$ gruppi di relazioni a coefficienti interi, che importano certe *relazioni aritmetiche fra i periodi* ω, caratterizza le *matrici di periodi riducibili*, cui risponde un sistema regolare ∞^q di integrali riducibili con $2q$ periodi.

TEOREMA DI PICARD-POINCARÈ. — *Se ad una varietà abeliana di* p *dimensioni* V (in rapporto a cui si hanno p integrali linearmente indipendenti di differenziali totali di prima specie, che sono gli argomenti delle p funzioni $2p$ volte periodiche porgenti la rappresentazione parametrica di V) *appartengono* q < p *integrali riducibili con* 2q *periodi, ad essa apparterrà anche un secondo sistema di* p — q *integrali riducibili con* 2(p — q) *periodi.*

In particolare se fra gl'integrali abeliani di prima specie d'una curva di genere p, *ve ne sono* q < p *riducibili con* 2q *periodi, e linearmente indipendenti, alla curva apparterrà anche un secondo sistema d'integrali riducibili, definito da* p — q *integrali con* 2(p — q) *periodi.*

La dimostrazione di questo importante teorema si dà ora, nella maniera più elementare e più precisa secondo G. SCORZA [1],

[1] Cfr. le Note di G. SCORZA sugli integrali riducibili nei « Rendiconti dei Lincei », 1915-16 e poi le Memorie del medesimo autore nei « Rendiconti del Circolo matematico » di Palermo, 1916-21.

La dimostrazione originale di POINCARÈ — come SCORZA ha avvertito — lascia una lacuna; per es., riferendosi al caso $p = 2$, suppone che accanto alla relazione di RIEMANN i periodi non soddisfino ad una seconda relazione analoga, mentre invece esiste una relazione siffatta quando c'è un integrale riducibile.

che con idee semplici ed originali ha rinnovato tutta la teoria aritmetica delle funzioni abeliane.

Riferiamoci, per semplicità di discorso, al caso $p = 2$.

Abbiamo dunque una tabella di periodi:

$$\omega \equiv \begin{Vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \end{Vmatrix}$$

e la relazione di Riemann-Weierstrass dice che esiste una forma bilineare a coefficienti interi

$$(1) \qquad \Sigma c_{rs} x_r y_s = c_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + c_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2) +$$
$$+ c_{14}(x_1 y_4 - x_4 y_1) + c_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + c_{24}(x_2 y_4 - x_4 y_2) + c_{34}(x_3 y_4 - x_4 y_3),$$

la quale si annulla quando al posto delle x ed y si pongono rispettivamente le ω della prima e della seconda riga.

Rappresentiamo la nostra tabella di periodi in uno spazio proiettivo S_3 prendendo in questo due punti

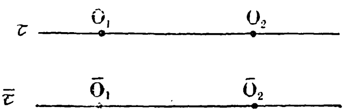
$$O_1 = (\omega_{11}\omega_{12}\omega_{13}\omega_{14}) \qquad \text{e} \qquad O_2 = (\omega_{21}\omega_{22}\omega_{23}\omega_{24})$$

e i punti immaginari coniugati

$$\overline{O}_1 \qquad \text{e} \qquad \overline{O}_2 .$$

Congiungendo i due primi punti avremo una retta τ immagine della matrice ω; sia $\overline{\tau}$ la retta coniugata.

La diseguaglianza di Riemann dice che le due rette sono sghembe, e perciò immaginarie di seconda specie; altrimenti i quattro punti $O_1\, O_2\, \overline{O}_1\, \overline{O}_2$ giacerebbero in un piano e quindi sarebbe nullo il determinante formato colle $\omega_{1j}\; \omega_{2j}\; \overline{\omega}_{1j}\; \overline{\omega}_{2j}$, il quale a meno di un fattore numerico coincide col determi-



nante formato dalle parti reali e dai coefficienti delle immaginarie dei periodi, il quale dà il volume del prismatoide dei periodi (cfr. § 37).

Scriviamo questa diseguaglianza di Riemann. Ponendo

$$\omega_h = \alpha_h + i\beta_h \qquad (i = \sqrt{-1})$$

sarà

$$(2) \qquad \Sigma\, c_{rs} \alpha_r \beta_s > 0.$$

Ora l'equazione

$$\Sigma\, c_{rs}\, x_r\, y_s = 0 \tag{1}$$

rappresenta un complesso lineare di rette, che — stante la (2) — può asserirsi non degenere, che contiene la retta τ e per conseguenza (dato che i coefficienti c_{rs} sono interi e quindi reali) anche la coniugata $\bar{\tau}$. Il significato della diseguaglianza (2), secondo un'osservazione dovuta a ROSATI, è che nessuna delle rette reali appoggiate a τ e $\bar{\tau}$ appartiene al complesso lineare (1). Infatti, se si prende un punto qualsiasi su τ e il coniugato sopra $\bar{\tau}$, la retta che li congiunge ha le coordinate proporzionali alle quantità $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, $\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1$, $\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1$, e quindi non appartiene al complesso, perchè altrimenti sarebbe

$$\Sigma\, c_{rs}\alpha_r\, \beta_s = 0\,.$$

Ciò premesso, si supponga che alla matrice ω appartenga un integrale riducibile ad ellittico. Si può supporre addirittura che la prima linea della matrice corrisponda a questo integrale riducibile, e perciò che sussistano le relazioni a coefficienti interi

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= h_{11}\,\Omega_1 + h_{12}\,\Omega_2\\
\omega_{12} &= h_{21}\,\Omega_1 + h_{22}\,\Omega_2\\
\omega_{13} &= h_{31}\,\Omega_1 + h_{32}\,\Omega_2\\
\omega_{14} &= h_{41}\,\Omega_1 + h_{42}\,\Omega_2
\end{aligned}$$

dove Ω_1 e Ω_2 rappresentano i periodi ridotti.

Si ha quindi una retta razionale congiungente i due punti $(h_{11}\ h_{21}\ h_{31}\ h_{41})$ e $(h_{12}\ h_{22}\ h_{32}\ h_{42})$, che contiene il punto $O_1 = (\omega_{11}\ \omega_{12}\ \omega_{13}\ \omega_{14})$ e perciò anche il suo coniugato $\bar{O}_1$.

Dunque: l'esistenza di un integrale riducibile a due periodi per la tabella (ω), porta che esiste una retta razionale incidente alle τ e $\bar{\tau}$.

Viceversa: se esiste una retta razionale appoggiata alle τ e $\bar{\tau}$, questa contiene (risp. sopra di esse) due punti di coordinate intere $(h_{11}\ h_{21}\ h_{31}\ h_{41})$ e $(h_{12}\ h_{22}\ h_{32}\ h_{42})$, e ciò porta che i punti d'appoggio su τ e $\bar{\tau}$ danno i periodi d'un integrale riducibile ad ellittico.

Questa osservazione permette di stabilire subito il teorema di PICARD.

Infatti: se c'è una retta razionale incidente alle τ e $\bar{\tau}$

anche la retta polare di essa rispetto al complesso (1) risulta razionale ed incidente alle τ e $\bar{\tau}$. E si noti che, per l'osservazione di ROSATI, la retta polare non può coincidere colla data.

La stessa dimostrazione si estende facilmente al caso $p > 2$. Invero per p qualunque, essendo data la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\|$$

si ricorrerà alla rappresentazione in uno spazio S_{2p-1}: i p punti $(\omega_{1k})\,(\omega_{2k}) \dots (\omega_{pk})$ e i loro coniugati daranno in questo, invece delle due rette τ e $\bar{\tau}$, due spazi sghembi S_{p-1}, che designeremo ancora con τ e $\bar{\tau}$.

La relazione di Riemann

$$\Sigma\, c_{rs}\, x_r\, y_s = 0 \tag{1}$$

darà ancora, nello S_{2p-1}, un sistema nullo non degenere, a cui corrisponderà un *complesso* di ∞^{4p-5} *rette unite* (dicesi unita una retta quando è contenuta nell' iperpiano polare d'ogni suo punto).

Qui, prendendo per le x e le y le ω di due righe qualunque della matrice, la (1) dà $\frac{p(p-1)}{2}$ relazioni, tutte cogli stessi coefficienti c: ciò significa che tutte le rette degli spazi τ e $\bar{\tau}$ appartengono al complesso anzidetto.

Ora un sistema regolare ∞^q di integrali riducibili corrisponderà ad un S_{2q-1} razionale incidente secondo un S_{q-1} ai due S_{p-1} considerati τ e $\bar{\tau}$.

Se c'è un tale S_{2q-1} anche lo $S_{2(p-q)-1}$ razionale, polare di esso, riesce incidente a τ e $\bar{\tau}$.

E così riesce dimostrato, in generale, il teorema di POINCARÈ.

NOTA. — Quale proprietà algebrico-geometrica risponde per una varietà abeliana a p dimensioni, V_p, all'esistenza di un sistema di q integrali riducibili (indipendenti) con $2q$ periodi? È facile riconoscere che questa *riducibilità significa che il gruppo continuo* ∞^p *delle trasformazioni (permutabili) di prima specie di* V_p, *è algebricamente imprimitivo*, cioè contiene un *sot-*

togruppo algebrico ∞^q *di dimensione* q, rappresentato da un sistema ∞^{p-q} di varietà algebriche abeliane V_q, le quali vengono scambiate fra loro dalle ∞^p trasformazioni di V_p.

Per dimostrare l'asserto, si supponga che fra i p integrali corrispondenti alle linee orizzontali della matrice dei periodi ω, i primi q, cioè $u_1 u_2 \dots u_q$, sieno riducibili, per modo che ammettano $2q$ sistemi di periodi Ω, combinazioni lineari a coefficienti interi delle ω (formule di pag. 237). Allora, ponendo

$$u_1 = \text{cost}, \qquad u_2 = \text{cost} \ \dots \ u_q = \text{cost},$$

si definisce sopra V_p una varietà V_q, suscettibile di variare (colle indicate costanti-parametri) in una serie ∞^{p-q}. E la detta V_q, ammettendo una rappresentazione parametrica con funzione $2q$ volte periodiche relative ai periodi Ω, sarà una varietà abeliana ecc. c. d. d.

È chiaro anche che, viceversa: se il gruppo ∞^p delle trasformazioni (permutabili) di prima specie della varietà abeliana V_p, ammette un sottogruppo algebrico ∞^q, fra gli integrali della varietà ve ne sono q riducibili con $2q$ periodi.

Data questa interpretazione geometrica della riducibilità degli integrali abeliani (sia particolari appartenenti ad una curva, sia generali), il *teorema di* Picard-Poincarè dice che:

Se per la varietà abeliana V_p, *il gruppo* ∞^p *delle trasformazioni di prima specie possiede un sottogruppo algebrico* ∞^q ($q < p$) *di trasformazioni di prima specie, esso possiede di conseguenza anche un secondo sottogruppo algebrico* ∞^{p-q}.

Sotto questo aspetto la dimostrazione del teorema si trova nella Nota di C. Castelnuovo: *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (« Rendic. Lincei », 4 giugno 1905).

Il concetto di tale dimostrazione è assai semplice. Riferendoci, per esempio, al caso $p = 2$, si ha una superficie abeliana F, contenente un fascio (ellittico) di curve ellittiche C. Pongasi che queste C vengano realizzate proiettivamente con curve di un certo ordine n, normali in uno S_{n-1}; allora basterà cercare il luogo dei punti stazionari (contatti n-punti cogli iperpiani tangenti) di tali curve, per ottenere una curva ellittica K, la quale verrà mutata in sè da ∞^1 trasformazioni di prima specie di F, formanti entro il gruppo ∞^2 un secondo sottogruppo algebrico ∞^1 [1].

39. Superficie iperellittiche. — Studiamo più particolarmente le varietà abeliane, e le involuzioni sopra di esse, nel caso del genere $p=2$: si ha allora una famiglia di superficie che ammettono una rappresentazione parametrica per mezzo di funzioni doppiamente periodiche di due variabili indipendenti, le quali prendono il nome di *superficie iperellittiche.*

Per quanto si è detto nel § 36, tutte queste superficie si possono costruire partendo dalla superficie abeliana i cui punti rispondono biunivocamente ai punti $(u\,v)$ del prismatoide dei periodi normali:

$$\begin{array}{c|cccc} u & \pi i & 0 & a_{11} & a_{12} \\ v & 0 & \pi i & a_{21} & a_{22} \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \\ v & 0 & 1 & \tau_{21} & \tau_{22}, \end{array}$$

od anche, seguendo la notazione più usata per questo caso,

$$\begin{array}{c|cccc|} u & 1 & 0 & g & h \\ v & 0 & 1 & h & g' \end{array}$$

colla solita disuguaglianza fondamentale.

Questa superficie che (colle sue involuzioni) dà tutte le superficie iperellettiche, è la *superficie di Jacobi* F, rappresentativa della *varietà delle coppie di una curva del genere* $p=2$, e riesce così definita a meno di una trasformazione birazionale.

Si può costruire un modello di F partendo dalla curva di ordine 6 e di genere 2

$$f(\xi\eta)=\eta^2-f_6(\xi)=0;$$

si porrà

$$x=\xi_1+\xi_2,\quad y=\xi_1\xi_2,\quad z=\eta_1+\eta_2 \tag{1}$$

e si elimineranno poi le ξ e le η fra le (1) e le

$$f(\xi_1\eta_1)=0,\quad f(\xi_2\eta_2)=0. \tag{2}$$

[1] Cfr. il ragionamento analogo sopra le superficie ellittiche di genere zero, nella nota di F. ENRIQUES: *Sulle superficie di genere zero.* (« Rendic. Circolo Mat. » di Palermo, 5 Marzo 1905).

Naturalmente si può far ricorso ad una qualunque altra terna di funzioni simmetriche delle coppie di punti della f.

È anche facile costruire geometricamente una F. La costruzione più semplice si ottiene partendo da una curva del sesto ordine C_6 del genere 2 normale in S_4 e segando con un S_3 la varietà V delle sue corde. (Si noti che la varietà delle corde di C_6 è l'ente duale delle varietà degli S_3 bitangenti alla stessa C_6, sulla cui considerazione — nel caso generale — abbiamo fondata la risoluzione del problema d'inversione).

Si vede facilmente che

1) La varietà V è una V_8 dell'ottavo ordine e quindi anche la sua sezione iperpiana F appare una superficie F_8, d'ordine 8.

Infatti ogni retta dello S_4 si appoggia ad 8 corde di C_6, che rispondono agli 8 punti doppi della proiezione piana di C_6 fatta da quella retta.

2) La F_8 contiene le 15 rette che congiungono a due a due i 6 punti tráccie di C_6 sullo S_3, ed inoltre la cubica gobba per i detti 6 punti, che è traccia della rigata R delle corde congiungenti i punti coniugati nella g_2^1 canonica appartenente a C_6. Che in effetto codesta rigata R sia del 3° ordine risulta da ciò che essa deve essere (razionale) *normale* in S_4 come è normale la C_6, altrimenti si potrebbe considerare come proiezione d'una rigata dello stesso ordine di S_5 sulla quale si troverebbe una curva d'ordine 6 avente come proiezione la nostra C_6 di S_4.

Il grado della suddetta rigata si calcola anche direttamente tagliandola con un S_2: questo definisce un fascio di S_3 che segano sulla C_6 una g_6^1; sopra una curva di genere due una g_6^1 e una g_2^1 hanno tre coppie di punti a comune (cfr. vol. III, pag. 74) come del resto risulta subito osservando che questi rispondono agli ulteriori tre punti doppi di una curva piana d'ordine 8 e genere 2 dotata di un punto doppio e di un punto sestuplo, centri dei fasci seganti la g_6^1 e la g_2^1.

3) La F possiede come punti quadrupli i 6 punti traccie di C_6 sullo S_3. Infatti la C_6 è curva quadrupla per la varietà V_8 delle corde di C_6, perchè una retta incidente a C_6 incontra ulteriormente $8-4=4$ corde della C_6 stessa, le quali corde corrispondono a 4 punti doppi della quintica piana che si ottiene come proiezione della C_6 da quella retta.

4) La F_8 possiede inoltre una curva doppia del 7° ordine

passante semplicemente per i punti quadrupli traccie di C_6. Questa proprietà significa che la superficie φ, luogo dei punti per cui passano due corde di C_6, è d'ordine 7 e contiene la C_6 come curva semplice.

Per dimostrarlo si osservi che se per un punto P passano due corde, a e b, di C_6, il piano α contenente a e b è sostegno d'un fascio di iperpiani che segano ulteriormente la C_6 secondo la g_2^1 canonica. Segue che le quaterne di punti d'appoggio di coppie di corde coplanari, appartengono alla g_4^2 residua della g_2^1 canonica. Ogni siffatta quaterna $H_1\, H_2\, H_3\, H_4$ dà luogo a tre punti $P_1\, P_2\, P_3$, diagonali del quadrangolo $H_1\, H_2\, H_3\, H_4$, che descrivono la superficie φ. Uno di questi punti cade in un punto O di C_6 quando in O coincidono due punti H di un gruppo della suddetta g_4^2: pertanto vi è una sola coppia di corde coplanari passanti per O, quelle che congiungono O con gli altri due punti della quaterna della g_4^2 contenente O contato due volte. Segue che ciascun piano α (contenente due corde) sega la superficie φ in 7 punti semplici: $H_1\, H_2\, H_3\, H_4 \quad P_1\, P_2\, P_3$, onde φ risulta d'ordine 7.

Riassumendo:

La superficie di JACOBI *intersezione d'un* S_3 *colla varietà delle corde della sestica di genere due normale in* S_4 *è una superficie d'ordine* 8, *dotata di una curva doppia d'ordine* 7 *che passa per* 6 *punti, i quali sono quadrupli per la superficie; e contiene le* 15 *rette congiungenti a due a due i detti* 6 *punti, e la cubica gobba da essi determinata.*

Uno studio ulteriore della superficie mostrerebbe che la sua curva doppia appartiene ad *una* superficie del 4° ordine avente come doppi i suoi 6 punti quadrupli, e secante ulteriormente la superficie nelle 15 rette e nella cubica gobba sopra nominate.

La superficie di JACOBI F possiede un gruppo misto composto di:

1) ∞^2 trasformazioni birazionali permutabili di prima specie

$$\left.\begin{aligned} u' &\equiv u + \text{cost.} \\ v' &\equiv v + \text{cost.} \end{aligned}\right\} \text{ mod. periodi}$$

formanti un gruppo continuo che opera in modo assolutamente transitivo sui punti della superficie, la corrispondenza di due punti determinando *una* trasformazione: [1]

2) e ∞^2 trasformazioni involutorie di seconda specie

$$u' \equiv -u + \text{cost.}$$
$$v' \equiv -v + \text{cost.},$$

che operano del pari sui punti di F in modo transitivo, sicchè esiste *una* involuzione della serie in cui sono coniugati due punti $(u\,v)$ e $(u'\,v')$.

Qui si noti che tutti i gruppi della g^1_2 canonica appartenente alla C_6 corrispondono ad una sola coppia di valori u e v: pertanto la ricordata cubica gobba appartenente alla F_8 appare come una curva *eccezionale*, che ciascuna trasformazione della superficie porta in un unico punto.

Abbiamo pur detto che la seconda serie di trasformazioni viene definita sopra la curva di genere due quando si associano le coppie di punti residue rispetto ad una serie lineare g^2_4.

Fra le trasformazioni di prima specie ve ne sono delle cicliche d'ordine δ qualsiasi, e in particolare delle involutorie ($\delta = 2$), che si riducono al tipo:

$$\begin{cases} u' \equiv u \\ v' \equiv v + \dfrac{1}{\delta}. \end{cases}$$

La superficie F_δ che rappresenta i gruppi d'una siffatta involuzione I_δ ammette una rappresentazione parametrica mediante funzioni quattro volte periodiche di due variabili u e v, coi periodi primitivi

$$\begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \dfrac{1}{\delta} & h' & g, \end{cases}$$

e vi è corrispondenza biunivoca fra i punti del nuovo prismatoide dei periodi e i punti della superficie. Questa si dice una superficie iperellittica (propria o di rango 1) di ***divisore*** δ ed

[1] Come viceversa, un tale gruppo ∞^2 di trasformazioni permutabili caratterizzi le superficie iperellittiche proprie (incluse le degenerazioni) ha dimostrato E. PICARD (v. § 42).

ammette sempre il gruppo misto ∞^2 delle trasformazioni di prima e seconda specie.

Ma conviene anche considerare le superficie iperellittiche i cui punti rispondono ad un gruppo di $r > 1$ punti del corrispondente prismatoide dei periodi primitivi: le quali si dicono superficie iperellittiche di *rango* r.

Esse rispondono ad involuzioni I_r non trasformate in sè dalle trasformazioni di prima specie, sopra la superficie F_δ o ad involuzioni $I_{r\delta}$ sulla superficie di JACOBI. Limitiamoci a dire qualcosa delle superficie di rango $r > 1$, per $\delta = 1$. A prescindere dalle superficie iperellittiche degenerescenti (che si ottengono dalle involuzioni razionali, definite da una qualsiasi rete di curve) la superficie di JACOBI *generale* F contiene soltanto involuzioni d'ordine $r = 2$, sicchè si hanno soltanto superficie iperellittiche di rango $r = 2$, corrispondenti alle involuzioni di seconda specie che appartengono alla F.

Queste superficie sono definite a meno di una trasformazione birazionale, e come modello della classe si può assumere una ben nota superficie del 4° ordine, già incontrata da KUMMER nello studio dello spazio rigato, e di cui KLEIN ha scoperto la rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche.

Di questa superficie e della sua rappresentazione iperellittica vogliamo dare qualche notizia, aggiungendo poi qualche indicazione bibliografica sui lavori di KLEIN, CAYLEY ecc. fino a HUMBERT, che hanno costruito la classica teoria. Per quel che concerne la determinazione delle *superficie iperellittiche di rango maggiore di* 2, con *periodi singolari*, basterà rimandare alle memorie di: ENRIQUES e SEVERI: *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* Acta mathematica, 32, 1908; BAGNERA e DE FRANCHIS: *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche* Mem. Soc. It. di Scienze (dei XL), 1909.

40. Superficie di Kummer. — Diciamo superficie di KUMMER la *superficie del* 4° *ordine dotata di* 16 *punti doppi*. L'esistenza effettiva di una tale superficie resulta senz'altro dalla possibilità di scriverne l'equazione, che daremo più avanti, e sarà supposta nel seguito. La superficie di KUMMER si può quindi definire come superficie del 4° ordine che possiede il *massimo numero di punti doppi isolati*, senza possedere linee doppie. Ciò resulta dalla proprietà di F di essere *superficie di* 4^a *classe.* Infatti la classe di una superficie F si determina cercando il numero dei piani tangenti per una retta a, e quindi intersecando F colla curva comune alle polari di due punti di a (cfr. L. III, § 19, vol. II, pag. 152). Nel nostro caso queste polari sono superficie cubiche, passanti pei 16 punti di F, e perciò la curva suddetta interseca F, fuori dei punti doppi, in

$$3 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 16 = 4$$

punti, che sono i punti di contatto dei piani tangenti per a. È ovvio che, se la F potesse possedere più che 16, cioè 17 punti doppi, la sua classe scenderebbe a 2, che è assurdo, perchè le superficie di 2^a classe sono anche d'ordine 2.

Il cono circoscritto alla F da uno dei suoi punti doppi, O, è un cono del 6° ordine (avendosi 6 tangenti per O ad una quartica, di genere due, sezione d'un piano per O), che possiede 15 generatrici doppie, proiettanti i rimanenti 15 punti doppi, e perciò si spezza in sei piani: ciascuno di questi resulta tangente ad F secondo una conica, e contiene, oltre O, altri 5 punti doppi di F per modo che tali piani sono in numero di

$$\frac{6 \cdot 16}{6} = 16.$$

Dunque: *I 16 punti doppi di* F *si distribuiscono, a 6 a 6, sopra 16 piani tangenti lungo coniche. I 6 piani che passano per un punto doppio toccano il cono di second'ordine osculatore in esso alla* F. I 16 piani tangenti doppi si tagliano fra loro in $8 \cdot 15$ rette che sono le congiungenti dei 16 punti doppi.

Resulta da ciò che il piano tangente ad F in un punto semplice, P, sega la F secondo una quartica di genere due, che non può mai acquistare altri punti doppi, perchè possiede sempre 16 tangenti doppie distinte, sezioni dei 16 piani tangenti doppi (cfr. vol. I, § 21). Se ora si considerano i tre birapporti indipendenti formati dalle sei tangenti alla quartica condotte da P, che costituiscono gli invarianti assoluti della quartica, si vede che questi debbono restare costanti al variare del punto P su F. Infatti se si fa variare P sopra una curva (p. es. sezione piana di F) che non passi per alcun punto doppio di F, quei birapporti non possono mai diventare 0 o ∞, ed essendo funzioni algebriche del punto rimangono costanti. Dunque:

Le sezioni piane tangenti della superficie di KUMMER *sono quartiche di genere due birazionalmente identiche.*

Al sistema ∞^2 di queste quartiche appartengono le coniche doppie sezioni dei 16 piani tangenti doppi, su ciascuna delle quali si hanno come punti di diramazione i 6 punti doppi.

Le proprietà più salienti della superficie di KUMMER, F, sono in relazione alla circostanza che la F è *superficie singolare del complesso di rette di* 2° *grado*. Daremo su ciò brevi spiegazioni.

Dicesi *complesso di rette di* 2° *grado* il sistema ∞^3 delle rette — rappresentate dalle coordinate plueckeriane p_{ik} (cfr. Libro I, § 19, vol. I, pag. 120) — che soddisfano ad un'equazione di 2° grado:

$$\sum a_{iklm} \, p_{ik} \, p_{lm} = 0 \, .$$

Le rette del complesso che passano per un punto O generano un cono quadrico, che è il *cono complesso* di vertice O; e dualmente le rette del complesso appartenenti ad un piano o inviluppano la *conica complesso* di questo piano. Si dice *singolare* un *punto* per cui il cono-complesso si spezza in due piani (fasci) e un *piano* la cui conica-complesso si spezza in due punti (fasci). *Superficie singolare* è il luogo dei punti singolari; di cui si dimostra poi che è anche inviluppo dei piani singolari.

Per riconoscere nel modo più semplice le proprietà del complesso di 2° grado e della sua superficie singolare, conviene ricordare che lo spazio rigato, tenuto conto della relazione quadratica che lega le coordinate di rette (Libro I, § 19), si può considerare come una quadrica Q, in uno spazio lineare S_5 a 5 dimensioni. Quando si adotti questa rappresentazione kleineiana, il complesso di 2° grado appare come una varietà del 4° ordine $C_4 = C$, intersezione di Q con un'altra quadrica V, e quindi con un fascio di quadriche. La quadrica Q contiene due sistemi ∞^3 di piani, α e β, rappresentanti rispettivamente le stelle di rette e i piani rigati, che soddisfano alle seguenti proprietà:

a) due piani α dello stesso sistema hanno a comune un punto;

b) due piani α, β di sistema diverso *non* hanno generalmente *punti comuni*; e qualora siano incidenti si segano secondo *una retta*;

c) per ogni retta di Q passano due piani, *uno* appartenente alla serie α, e *uno* alla β.

La superficie singolare-luogo del complesso C viene rappresentata dalla serie dei piani α tangenti a V e perciò seganti C_4 in coppie di rette; la superficie singolare-inviluppo dalla serie dei piani β, che toccano similmente V. Preso un punto qualsiasi O di Q, c'è un cono sezione dello S_4 tangente a Q in O, che contiene ∞^1 piani α e ∞^1 piani β: in ciascuna serie di piani, α e β, si trovano 4 piani tangenti a C_4; infatti, segando la figura iperspaziale con un S_3, avremo una superficie del 2° ordine C — sezione del cono tangente a Q in O — e su questa una quartica ellittica (di prima specie) traccia di C_4: i piani α e β tangenti a C_4 corrispondono alle generatrici di φ che toccano la detta curva. Si sa che i punti di contatto, per ciascuna serie di generatrici (bisecanti la curva), sono 4 e formano eguali birapporti. Da ciò si ricava il teorema:

Sopra ogni retta dello spazio ordinario vi sono 4 punti singolari per un complesso di 2° grado; e parimente per ogni retta passano 4 piani singolari: *i quattro punti singolari sopra una retta e i quattro piani singolari per essa formano eguali birapporti.*

Di qui segue che una retta tangente alla ***superficie singolare luogo***, riesce anche tangente alla ***superficie singolare inviluppo***, e perciò che le due superficie singolari sono la *medesima superficie, di 4° ordine e di 4ª classe, concepita una volta come luogo dei suoi punti e una volta come inviluppo dei suoi piani tangenti.*

Questa superficie singolare possiederà come punti doppi i punti il cui cono complesso si riduce ad un fascio contato due volte, e analogamente come piani tangenti doppi quelli per cui la conica complesso si riduce ad un fascio contato due volte; è facile riconoscere *a priori* (e risulterà confermato dalla rappresentazione seguente) che il numero di tali punti e piani singolari è finito e quindi eguale a 16.

La superficie singolare F *del complesso di 2° grado è una superficie di Kummer, d'ordine e di classe* 4, *con* 16 *punti doppi e* 16 *piani tangenti doppi.*

TEOREMA DI KLEIN. — *La superficie di Kummer F si può considerare come immagine di una involuzione del 2° ordine appartenente alla superficie di Jacobi rappresentativa delle corde (o delle coppie di punti) di una curva del genere due, involuzione generata su questa da una trasformazione di 2ª specie: i 16 punti doppi corrispondono alle 16 coppie di corde coniugate coincidenti.*

Per ottenere questa rappresentazione di F si noti che ad ogni punto di F corrispondono due fasci di rette del complesso C, costituenti insieme il cono-complesso del punto, i quali hanno come immagini sulla quadrica Q due rette di C_4 giacenti in uno stesso piano α: basterà dimostrare che tali coppie di rette, a_1 e a_2, corrispondono appunto alle coppie di corde d'una curva di genere due, per modo che le coppie dei punti d'appoggio sieno residue rispetto ad una g_4^2.

Per ciò si proietti la varietà del 4° ordine C_4 da una sua retta, p, sopra un S_3. In tal guisa il complesso $C_4 = C$ viene rappresentato biunivocamente sullo S_3, poichè i piani per p segano in un sol punto variabile tanto lo S_3, quanto la varietà C_4, intersezione delle due quadriche Q e V, le quali riescono tagliate dai detti piani secondo due rette che hanno un sol punto in comune.

In questa rappresentazione le immagini delle sezioni iperpiane di C_4 (cioè delle congruenze del 2° ordine sezioni di C coi complessi lineari) sono *superficie cubiche passanti per una curva quintica* K_5 *del genere* 2: le coppie di rette a_1 a_2, sono proiettate in corde a'_1 a'_2 di K_5, appartenenti a piani che passano per un punto fisso della K_5 stessa, cioè per il punto P traccia sopra lo S_3 del piano α di Q che contiene p, ed i piani per P segano appunto sulla K_5 la g_4^2 rispetto alla quale sono residue le coppie di punti di appoggio delle corde a'_1 e a'_2. Inoltre per P passano 16 piani bitangenti alla K_5 (che danno le 16 bitangenti della quartica proiezione di K_5 su di un piano): ad essi rispondono i 16 punti doppi della superficie F.

Vogliamo ora presentare la superficie di KUMMER dal punto di vista analitico.

Per ottenere l'equazione della superficie singolare d'un complesso quadratico, cominciamo a scrivere l'equazione di questo in una forma canonica in cui spariscono i termini rettangolari che non contengono una delle tre variabili, p_{12} p_{13} p_{14}, aventi il primo indice uguale ad 1:

$$\Sigma a_{ik} p_{ik}^2 + 2b_2 p_{12} p_{34} + 2b_3 p_{13} p_{42} + 2b_4 p_{14} p_{23} = 0$$

(nella scrittura usata per i termini rettangolari, in cui è fisso l'indice 1, si noti la permutazione circolare dei residui tre indici 2, 3, 4).

A tale forma canonica ci si riduce come segue. Si assuma anzitutto come piramide fondamentale per le 6 coordinate omogenee $z_1\, z_2 \ldots z_6$, cui sono riferiti i punti dello S_5 contenente la quadrica Q, un esaedro autoconiugato tanto rispetto alla quadrica Q, rappresentativa dello spazio S_3 rigato, quanto rispetto alla quadrica V, rappresentativa dell'equazione del nostro complesso. Scegliendo opportunamente il punto unità, le equazioni delle quadriche Q e V diventano

$$\begin{cases} \sum_1^6 z_i^2 = 0 \\ \sum_1^6 k_i z_i^2 = 0; \end{cases}$$

allora le tre coppie di iperpiani

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = z_4 = 0, \quad z_5 = z_6 = 0,$$

definiscono nello spazio ordinario S_3 tre congruenze lineari di rette, ciascuna dotata di due direttrici rettilinee, per modo che le tre coppie di direttrici sono fra loro incidenti, costituendo gli spigoli opposti d'un tetraedro.

Precisamente, ricordando che due rette del nostro S_3 sono incidenti quando i loro punti rappresentativi nello S_5 sono coniugati rispetto alla quadrica Q (cfr. vol. I, pag. 120, libr. 1°, § 19), le rette della congruenza $z_1 = z_2 = 0$ sono incidenti alle due rette rappresentate dai punti comuni alla Q e ai quattro iperpiani

$$z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = 0, \quad z_6 = 0.$$

Similmente si trovano le altre due coppie di direttrici relative alle altre due congruenze $z_3 = z_4 = 0$, e $z_5 = z_6 = 0$, e poichè le direttrici di ciascuna congruenza appartengono visibilmente alle altre due, segue la relazione di mutua incidenza, che fa delle 6 rette gli spigoli opposti di un medesimo tetraedro. Rispetto a questo tetraedro preso come fondamentale per le coordinate nello S_3, l'equazione del complesso assume la forma canonica sopra indicata.

Infatti la congruenza delle rette incidenti agli spigoli opposti $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$, risulta ora data dalle due equazioni lineari

$$p_{12} = p_{34} = 0$$

e poichè essa deve coincidere con la congruenza sopra considerata

$$z_1 = z_2 = 0$$

risultano z_1 e z_2 combinazioni lineari di p_{12} e p_{34}, cioè

$$z_1 = \lambda_1 p_{12} + \mu_1 p_{34}, \qquad z_2 = \lambda_2 p_{13} + \mu_2 p_{34}$$

Similmente risulta

$$z_3 = \lambda_3 p_{14} + \mu_3 p_{23}, \qquad z_4 = \lambda_4 p_{14} + \mu_4 p_{23}$$
$$z_5 = \lambda_5 p_{13} + \mu_5 p_{24}, \qquad z_5 = \lambda_6 p_{13} + \mu_6 p_{24}$$

onde l'equazione del complesso

$$\Sigma k_i z_i^2 = 0$$

trasformata nelle p_{ik} assume appunto la forma canonica indicata.

E si noti che la eseguita riduzione a forma canonica dipende essenzialmente dalla partizione dei 6 iperpiani $z_i = 0$ in tre coppie, la quale partizione può evidentemente farsi in 15 modi diversi.

Ora nell'equazione canonica del nostro complesso, al posto delle coordinate plueckeriane p_{ik} poniamo le loro espressioni per le coordinate di punti

$$p_{ik} = (x_i y_k - x_k y_i),$$

si avrà l'equazione

$$\Sigma a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)^2 +$$
$$+ 2b_2(x_1 y_2 - x_2 y_1)(x_3 y_4 - x_4 y_3) + 2b_3(x_1 y_3 - x_3 y_1)(x_4 y_2 - x_2 y_4) +$$
$$+ 2b_4(x_1 y_4 - x_4 y_1)(x_2 y_3 - x_3 y_2) = 0.$$

Ordiniamo questa equazione mettendo in evidenza le y_i, e scrivendo sotto l'indicazione sintetica di T_1 il complesso dei termini contenenti la y_1, che non ci interessano, in quanto dovremo poi porre $y_1 = 0$. Con ciò l'equazione suddetta appare

$$\begin{gathered} T_1 + (a_{12}x_1^2 + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2)y_2^2 + (a_{13}x_1^2 + a_{23}x_2^2 + a_{34}x_4^2)y_3^2 + \\ + (a_{14}x_1^2 + a_{24}x_2^2 + a_{34}x_4^2)y_4^2 - \\ - 2\{a_{23}x_2x_3 + (b_2 - b_3)x_1x_4\}y_2y_3 - 2\{a_{24}x_2x_4 + (b_3 - b_4)x_1x_3\}y_2y_4 - \\ - 2\{a_{34}x_3x_4 + (b_4 - b_2)x_1x_2\} = 0. \end{gathered}$$

Questa equazione — tenute fisse le x — rappresenta il cono-complesso del punto (x). Facendo in questa $y_1 = 0$, si ottiene la conica sezione col piano $y_1 = 0$, la quale sezione è degenere (in due rette) quando il vertice del cono appartenga al piano $y_1 = 0$, o quando il cono stesso sia degenere in due piani, cioè quando il punto (x) appartenga alla superficie singolare F del nostro complesso. L'equazione di questa F si otterrà dunque annullando il discriminante della forma quadratica ora scritta, da cui si sia tolto T_1, che appunto svanisce facendo $y_1 = 0$. Precisamente, annullando il detto discriminante, ove si ponga, per semplicità di scrittura

$$b_2 - b_3 = c_{14}, \quad b_2 - b_4 = c_{13}, \quad b_4 - b_2 = c_{12}$$

$$[c_{12} + c_{13} + c_{14} = 0]$$

si ottiene l'equazione

$$\begin{vmatrix} (a_{12}x_1^2 + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2) & (-a_{23}x_2x_3 - c_{14}x_1x_4) & (-a_{24}x_2x_4 - c_{13}x_1x_3) \\ (-a_{23}x_2x_3 - c_{14}x_1x_4) & (a_{13}x_1^2 + a_{23}x_2^2 + a_{34}x_4^2) & (-a_{34}x_3x_4 - c_{12}x_1x_2) \\ (-a_{24}x_2x_4 - c_{13}x_1x_3) & (-a_{34}x_3x_4 - c_{12}x_1x_2) & (a_{14}x_1^2 + a_{24}x_2^2 + a_{34}x_3^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Occorre sviluppare questo determinante per riconoscere anzitutto come esso sia divisibile per x_1^2, onde si stacca il piano $x_1 = 0$ contato due volte e resta una superficie del quart'ordine, la nostra F, di cui dedurremo poi l'equazione in una forma semplice.

A tale scopo cominciamo col ricordare che un determinante simmetrico del (terz'ordine) del tipo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

vale

$$a_1 a_2 a_3 + 2b_1 b_2 b_3 - a_1 b_1^2 - a_2 b_2^2 - a_3 b_3^2$$

sicchè l'equazione precedente si scrive

$$\begin{aligned}&(a_{12}x_1^2 + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2)(a_{13}x_1^2 + a_{23}x_2^2 + a_{34}x_4^2)(a_{14}x_1^2 + a_{24}x_2^2 + a_{34}x_3^2) - \\ &- 2(a_{34}x_3x_4 + c_{12}x_1x_2)(a_{24}x_2x_4 + c_{13}x_1x_3)(a_{23}x_2x_3 + c_{14}x_1x_4) - \\ &- (a_{12}x_1^2 + a_{23}x_3^2 + a_{24}x_4^2)(a_{34}x_3x_4 + c_{12}x_1x_2)^2 - \\ &- (a_{13}x_1^2 + a_{23}x_2^2 + a_{34}x_4^2)(a_{24}x_2x_4 + c_{13}x_1x_3)^2 - \\ &- (a_{14}x_1^2 + a_{24}x_2^2 + a_{34}x_3^2)(a_{23}x_2x_3 + c_{14}x_1x_4)^2 = 0.\end{aligned}$$

A questo punto lo sviluppo dei calcoli si presenta come assai complicato, ma se ne viene a capo con relativa facilità tenendo conto delle simmetrie formali, per cui se manca un termine mancano anche i termini analoghi, e ricordando che la somma dei coefficienti c_{12} c_{13} c_{14} è nulla. Precisamente si comincia col notare che mancano i termini che non contengano x_1^2, onde è possibile la divisione per x_1^2. Eseguita questa (cioè astrazion fatta dal fattore x_1^2 per i termini che lo contengono) si vede che le x figurano solo al quadrato meno che in un unico termine, che contiene il prodotto $x_1 x_2 x_3 x_4$ di tutte e quattro le x, sicchè l'equazione risulta del tipo

$$\begin{aligned}&A_1 x_1^4 + A_2 x_2^4 + A_3 x_3^4 + A_4 x_4^4 + \\ &+ B_{12}x_1^2x_2^2 + B_{13}x_1^2x_3^2 + B_{14}x_1^2x_4^2 + \\ &+ B_{23}x_2^2x_3^2 + B_{24}x_2^2x_4^2 + B_{34}x_3^2x_4^2 + \\ &+ C x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.\end{aligned}$$

Ora importano in particolare i coefficienti delle quattro quarte potenze che risultano

$$A_1 = a_{12}a_{13}a_{14}, \quad A_2 = a_{12}a_{23}a_{24}, \quad A_3 = a_{13}a_{23}a_{34}, \quad A_4 = a_{14}a_{24}a_{34}$$

onde viene naturale eseguire la trasformazione

$$\begin{aligned}X_1 &= \sqrt[4]{a_{12}a_{13}a_{14}} \cdot x_1, \quad & X_2 &= \sqrt[4]{a_{12}a_{23}a_{24}} \cdot x_2, \\ X_3 &= \sqrt[4]{a_{13}a_{23}a_{34}} \cdot x_3, \quad & X_4 &= \sqrt[4]{a_{14}a_{24}a_{34}} \cdot x_4\end{aligned}$$

che rende uguali ad 1 i coefficienti delle quarte potenze. Accade che con questa trasformazione diventano anche uguali le coppie di coefficienti di

$$X_1^2 X_2^2 \quad \text{e} \quad X_3^2 X_4^2; \qquad X_1^2 X_3^2 \quad \text{e} \quad X_2^2 X_4^2; \qquad X_1^2 X_4^2 \quad \text{e} \quad X_2^2 X_3^2$$

sicchè in definitiva si ha l'*equazione della superficie singolare del complesso quadratico* sotto la forma classica:

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4 + \lambda_2(X_1^2 X_2^2 + X_3^2 X_4^2) +$$
$$+ \lambda_3(X_1^2 X_3^2 + X_2^2 X_4^2) + \lambda_4(X_1^2 X_4^2 + X_2^2 X_3^2) + \mu(X_1 X_2 X_3 X_4) = 0.$$

dove

$$\lambda_2 = \frac{a_{13}a_{24} + a_{23}a_{14} - c_{12}^2}{\sqrt{a_{13}a_{24}a_{23}a_{14}}}$$

$$\lambda_3 = \frac{a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23} - c_{13}^2}{\sqrt{a_{12}a_{34}a_{14}a_{23}}}$$

$$\lambda_4 = \frac{a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} - c_{14}^2}{\sqrt{a_{12}a_{34}a_{24}a_{13}}}$$

$$\mu = \frac{-2(c_{12}c_{13}c_{14} + a_{12}a_{34}c_{12} + a_{13}a_{24}c_{13} + a_{14}a_{23}c_{14})}{\sqrt{a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34}}}.$$

Qui si noti che i quattro parametri $\lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \mu$ che figurano nella equazione della superficie F non possono essere qualunque, ma sono legati da una relazione. Infatti per valori generici dei detti parametri l'equazione rappresenta una superficie che non ha punti doppi, cosa immediata a verificarsi, ad esempio dando il valore 0 a tutti i parametri.

La relazione accennata si potrebbe trovare scrivendo che la F possiede un certo punto doppio di coordinate $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, cioè che queste coordinate annullano le quattro derivate parziali del polinomio F. Si ottiene così un sistema di quattro equazioni cubiche ed omogenee nelle $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, e lineari non omogenee nelle $\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4\,\mu$. Eliminando $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ si avrebbe l'accennata relazione fra $\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4\,\mu$. Inoltre le quattro equazioni suddette permettono di esprimere $\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4\,\mu$ in funzione di $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, onde si perviene ad un'equazione di F che mette in evidenza le *coor-*

dinate dei 16 *punti doppi:*

$$(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2)\cdot\{X_1^4+X_2^4+X_3^4+X_4^4\}-$$
$$-(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2)\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)-2(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)\}\cdot$$
$$\cdot\{X_1^2X_2^2+X_3^2X_4^2\}$$
$$-(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)(\alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2)\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)-2(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2)\}\cdot$$
$$\cdot\{X_1^2X_3^2+X_2^2X_4^2\}$$
$$-(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2)\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)-2(\alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2)\}\cdot$$
$$\cdot\{X_1^2X_4^2+X_2^2X_3^2\}$$
$$+2\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)\cdot$$
$$\cdot\{X_1X_2X_3X_4\}$$
$$=0.$$

Si verifica facilmente, anche se con calcoli lunghi, che effettivamente la F così scritta ha come doppio il punto $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$, in quanto ne annulla le derivate parziali. Quindi il gruppo dei 16 punti doppi è dato dalla tabella seguente:

$$\begin{array}{llll}
(\alpha,\beta,\gamma,\delta), & (\alpha,-\beta,-\gamma,\delta), & (\beta,\alpha,-\delta,-\gamma), & (\delta,-\gamma,\beta,-\alpha)\\
(\beta,-\alpha,-\delta,\gamma), & (\beta,\alpha,\delta,\gamma), & (\beta,-\alpha,\delta,-\gamma), & (\gamma,-\delta,-\alpha,\beta).\\
(\alpha,-\beta,\gamma,-\delta), & (\alpha,\beta,-\gamma,\delta), & (\gamma,-\delta,\alpha,-\beta), & (\delta,\gamma,\beta,\alpha)\\
(\gamma,\delta,\alpha,\beta), & (\delta,\gamma,-\beta,-\alpha), & (\delta,-\gamma,-\beta,\alpha), & (\delta,\gamma,-\alpha,-\beta).
\end{array}$$

Che questi siano i 16 punti doppi della F risulta dal fatto che l'equazione di F rimane invariata quando si cambi il segno ad una coppia di coordinate o si permutino le coordinate stesse secondo le tre sostituzioni

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \qquad (x_1x_3)(x_2x_4) \qquad (x_1x_4)(x_2x_3).$$

L'equazione della superficie singolare del complesso quadratico dipende, come abbiamo detto, da tre costanti essenziali, che sono invarianti assoluti della superficie. A priori anche la superficie del 4° ordine con 16 punti doppi deve possedere

$$34-16-15=3$$

invarianti assoluti, e del resto è facile riconoscere che la sua equazione può sempre ricondursi alla forma canonica data per la suddetta superficie singolare. Ciò significa che la superficie di KUMMER più generale è superficie singolare per un complesso quadratico.

Ma i complessi quadratici (ossia le varietà C intersezioni di due quadriche dello S_5) dipendono da 19 costanti arbitrarie e possiedono quindi

$$19 - 15 = 4$$

invarianti assoluti. Perciò una stessa ***superficie di*** KUMMER deve resultare ***singolare per*** ∞^1 ***complessi quadratici.***

Invero è facile riconoscere, con KLEIN, che ad un complesso di 2° grado è associata una serie ∞^1 di complessi analoghi (*confocali*) che posseggono la stessa superficie singolare. Infatti, assumendo come immagine del complesso C la varietà C_4 di S_5 intersezione di due quadriche Q e V, resta definita in S_5 la *schiera* delle quadriche-inviluppo determinata da Q e V, ente duale del fascio, che è la serie delle quadriche possedenti i medesimi iperpiani tangenti. Ora ad un punto della superficie singolare di C risponde un piano α di Q che sega V, e quindi C_4, in una coppia di rette incrociantisi in un punto P; e l'iperpiano S_4 tangente a V in P, per il fatto di contenere un piano, riesce di conseguenza tangente anche a Q e quindi iperpiano tangente comune a tutte le quadriche della nostra schiera: segue che le varietà del 4° ordine sezioni delle quadriche della schiera con Q, danno altrettanti complessi di 2° grado colla medesima superficie singolare. Questa serie di complessi di 2° grado confocali riesce una serie d'indice 4, cioè vi sono 4 complessi della serie che contengono una retta arbitraria.

41. Rappresentazione della superficie di Kummer mediante funzioni iperellitiche. — Abbiamo considerato la superficie di KUMMER sotto l'aspetto algebrico-geometrico, rilevandone le più elementari proprietà. Si è pure riconosciuto che essa può essere rappresentata sulla varietà delle coppie di punti di una curva di genere due, in tal guisa che i punti della superficie rispondano ciascuno a due coppie di punti della curva coniugate (ossia residue l'una dell'altra) rispetto ad una g^2_4; e nel seguito gioverà assumere come g^2_4 *fondamentale* quella (composta) che costituisce ***il doppio della*** g^1_2: gioverà supporre questa serie definita (secondo il teorema d'ABEL) da $u \equiv 0$ $v \equiv 0$ (u e v somme dei valori degli integrali abeliani di prima specie).

La superficie di Kummer figura come una superficie iperellittica di rango $r=2$, cioè può essere rappresentata parametricamente esprimendo le coordinate dei suoi punti come funzioni abeliane del genere due, ossia iperellittiche, di due variabili indipendenti. Pertanto, a partire dalla curva di genere due e dalle funzioni iperellittiche che le appartengono, dovrà essere possibile di ricostruire la nostra superficie e ritrovarne le proprietà. Di ciò vogliamo dare un rapido cenno.

Partiamo da una curva di genere due, C, e sia φ la superficie di Jacobi che ne rappresenta la varietà delle coppie di punti: non importa nemmeno pensare ad un modello proiettivamente determinato, come per esempio, quello incontrato nel § 39; basta qui considerare la φ come definita intrinsecamente, a meno di una trasformazione birazionale.

Sopra φ troviamo un sistema ∞^1 di curve K (identiche a C) che rappresentano le serie di coppie di punti di C con un punto fisso: questo sistema non è lineare ma d'indice 2, poichè vi sono due K passanti per un punto P di φ (P rappresenta una coppia di punti, P_1 e P_2, di C, che appartiene a due serie diverse di coppie di punti con un punto fisso). Inoltre le K si segano a due a due in un punto variabile (su φ) e segano, ciascuna in un punto, la curva eccezionale immagine della g^1_2 di C, la quale già rilevammo comportarsi come un punto rispetto alle trasformazioni della superficie di Jacobi φ. Pertanto, se si trasformano le curve K colle trasformazioni birazionali (di prima o di seconda specie) di φ, si otterranno ∞^2 sistemi ∞^1 di curve, ciascuno d'indice 2, segantisi a due a due in un punto variabile e in un punto base fisso (che nasce dalla curva eccezionale predetta). Insomma tutte queste curve comporranno un sistema ∞^2 di curve, del *grado due*, cioè secantisi a due a due in *due* punti. Le curve di tale più ampio sistema, saranno ancora designate come curve K, in un senso più esteso.

Ora le curve K, sopra la superficie di Jacobi φ, le vogliamo rappresentare mediante le funzioni θ.

A tale scopo ricordiamo che sopra una curva C la condizione di appartenenza di un punto P, in cui gli integrali abeliani abbiano i valori $\bar{u}$ e $\bar{v}$, ad una coppia G, per cui le somme degli integrali siano u e v, data simbolicamente da

$$\theta(P-G+k)=0$$

(cfr. § 32, pag. 191), equazione che si può scrivere più distesamente nella forma

$$(1) \qquad \theta(\bar{u} - u + k_1,\ \bar{v} - v + k_2) = 0$$

dove k_1 e k_2 sono due costanti di cui qui non ci interessa il valore numerico. La (1), in cui si considerino variabili u e v, rappresenta dunque la serie delle coppie di punti di C aventi come fisso P, cioè rappresenta la equazione trascendente della curva K appartenente alla superficie di Jacobi φ.

Inoltre la curva K' trasformata della precedente K mediante la trasformazione di seconda specie

$$u = -u', \quad v = -v'$$

(cioè anche coniugata di K rispetto alla g_2^1 canonica) verrà data dall'equazione

$$\theta(\bar{u} + u + k_1,\ \bar{v} + v + k_2)$$

o anche — per la parità della funzione θ — dalla

$$(2) \qquad \theta(-\bar{u} - u - k_1,\ -\bar{v} - v - k_2) = 0.$$

Anche una K più generale, trasformata della (1) mediante una trasformazione di prima o di seconda specie

$$u = \pm u' + a, \qquad v = \pm v' + b$$

verrà rappresentata dalla

$$(3) \qquad \theta(\bar{u} \mp u - a + k_1,\ \bar{v} \mp v - b + k_2) = 0$$

e la sua coniugata nella g_2^1 verrà data dalla

$$\theta(\bar{u} \pm u - a + k_1,\ \bar{v} \pm v - b + k_2) = 0$$

o anche — per la parità della funzione θ — dalla

$$(4) \qquad \theta(-\bar{u} \mp u + a - k_1,\ -\bar{v} \mp v + b - k_2) = 0.$$

Se consideriamo poi una coppia di curve K coniugate fra loro rispetto alla g_2^1, esse verranno rappresentate complessivamente annullando il prodotto di due θ del tipo (3) e (4), cioè annullando una funzione ψ del tipo

$$(5)\qquad \psi(u,\ v) =$$
$$\theta(\bar{u} \mp u - a + k_1,\ \bar{v} \mp v - b + k_2) \cdot \theta(-\bar{u} \mp u + a - k_1,\ \bar{v} \mp v + b - k_2);$$

si noti che questa ψ, ove si aumentino le variabili u e v di una delle quattro coppie di periodi normali, resta inalterata o viene moltiplicata per $e^{-2a_{11}+4u}$ o per $e^{-2a_{22}+4v}$, in ogni caso per un fattore che è indipendente dalla particolare scelta della coppia di curve K considerate.

Prendiamo ora quattro di queste ψ linearmente indipendenti e poniamole proporzionali alle coordinate omogenee di un punto $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ dello spazio S_3, il che significa porre le coordinate non omogenee

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \qquad y = \frac{x_2}{x_4}, \qquad z = \frac{x_3}{x_4},$$

eguali ai quozienti delle dette ψ. Poichè tali quozienti risultano funzioni quadruplamente periodiche delle variabili u e v, essi costituiscono tre funzioni abeliane fra le quali intercederà un'equazione algebrica: la quale dà una superficie F, i cui punti sono funzioni razionali delle coppie di punti di C.

Ora è facile vedere che:

1° alle sezioni piane di F corrispondono sopra la superficie φ le curve L di un sistema lineare, contenente le coppie di curve K coniugate, di cui si è detto innanzi;

2° ma, mentre ad un punto di φ corrisponde un punto di F, viceversa ad un punto di F rispondono due punti (coniugati) di φ, cioè i punti $(u,\ v)$ e $(-u,\ -v)$;

3° e perciò, il sistema delle curve L essendo di *grado* 8 (due L secandosi in quattro coppie di punti coniugati), il sistema delle sezioni piane di L resulta del grado 4, cioè la superficie F è del 4° ordine.

Si può anche riconoscere, non solo che la F possiede 16 punti doppi conici e 16 piani tangenti lungo coniche, sì anche che i 16 punti e i 16 piani singolari formano una configurazione che possiede le proprietà già dimostrate per via geometrica della configurazione di KUMMER; le quali verranno in tal guisa riconosciute sotto il nuovo aspetto.

All'uopo basterà un rapido cenno del modo come si può trovare la proprietà elementare di codesta configurazione: per ogni punto singolare passano sei piani tangenti singolari (e quindi anche, dualmente, ogni piano singolare contiene sei punti singolari, situati sopra la conica di contatto del piano).

Anzitutto, come resulta da ciò che si è notato nel § 34 (pag. 201) i 16 punti doppi di F sono dati dai 16 valori dei semiperiodi degli integrali abeliani di prima specie appartenenti a C, i quali definiscono le coppie di punti di C autoconiugate rispetto alla g_4^2 fondamentale doppia della g_2^1: $u \equiv 0$, $v \equiv 0$. In secondo luogo si otterrà un piano tangente ad F lungo una conica, cioè una sezione piana tangente (del genere due) che si riduce ad una conica doppia (con sei punti diramazione), quando si consideri su C una serie di coppie di punti con un punto fisso (ovvero una serie trasformata di una siffatta mediante una corrispondenza di seconda specie fra coppie di punti) la quale sia autoconiugata rispetto alla g_2^1 (o g_4^2) fondamentale. Certo dunque si avrà un piano singolare di F, colla relativa conica di contatto, quando si assuma sopra la curva C la serie delle coppie di punti che hanno come punto fisso uno dei sei punti doppi della g_2^1.

Ora i sei punti doppi della g_2^1 su C vengono dati da sei semiperiodi $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_6$, da cui si ottengono (sommandone le coppie) tutti i 16 semiperiodi degli integrali abeliani di prima specie della C. Ed è lecito supporre che uno qualunque dei 16 punti doppi di F, diciamo O, risponda al semiperiodo nullo ($2\sigma_1 \equiv 2\sigma_2 \equiv \dots \equiv 0$), mentre gli altri 15 risponderanno alle 15 somme $\sigma_r + \sigma_s$ ($r \neq s$). Appare quindi che O appartiene a sei coniche di contatto di piani singolari di F, i quali rispondono alle sei serie autoconiugate delle coppie di punti di C che hanno come punto fisso uno dei sei punti doppi della g_2^1. c. d. d.

42. **Nota bibliografica.** — L'assetto classico della teoria degli integrali e delle funzioni abeliane si vede nelle esposizioni di

B. Riemann: *Vorlesungen über die allgemeine Theorie der algebraischer Differentialen.* Gottinga, 1892-93, nuova ed. 1.

K. Weierstrass: *Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Transzendenten,* per cura di Hettner e Knoblauch, in « Math. Werke », 4, (1902).

Le applicazioni geometriche sono svolte, per la prima volta da A. CLEBSCH, come si vede nelle *Vorlesungen* di CLEBSCH-LINDEMANN. Lipsia, 1876, trad. franc., t. III.

Le prime proprietà degli integrali abeliani, ad esclusione del teorema d'inversione, si trovano esposte in molti trattati di Analisi; e in rapporto alla geometria sopra le curve, hanno ricevuto un'esposizione nell'ultima parte delle *Lezioni di geometria algebrica* di F. SEVERI. Padova, 1908, trad. ted. 1921.

La teoria delle funzioni abeliane che nascono dal problema d'inversione, dopo i classici lavori anzidetti di RIEMANN e WEIERSTRASS, ha avuto importanti sviluppi e complementi nella scuola francese (POINCARÈ, PICARD, ecc.) a cui si riferiscono varie citazioni del testo. Più precise informazioni storiche e indicazioni bibliografiche si troveranno nell'articolo di

A. KRAZER e W. WIRTINGER: *Abel'sche Functionen und allgemeine Thetafunctionen,* in « Enc. d. Math. Wiss. », II, B, 7. Lipsia, 1921 e in alcuni dei trattati seguenti che offrono le più moderne e migliori esposizioni della teoria:

A. KRAZER: *Lehrbuch der Thetafunctionen.* (Lipsia, 1903).

H. F. BAKER: *An Introduction to the Theory of Multiply Periodic Functions.* Cambridge, 1907;

Abel's Theorem and the allied Theory including the Theory of Theta Functions. Cambridge, 1897.

A. R. FORSYTH: *Lectures introductory to the Theory of Functions of two Variabless.* Cambridge, 1914.

Oltre a questi trattati vogliamo anche ricordare il corso delle lezioni, tenute all'Università di Roma, nell'anno 1920-21, dal prof. G. CASTELNUOVO, di cui abbiamo avuto gentile comunicazione.

I lavori originali sugli integrali abeliani riducibili, a cui si è accennato nel testo, sono:

E. PICARD: « Bull. de la Soc. Math. de France », 1883, H. POINCARÈ: ibidem, 1884, « American Journ. », 1886.

E accanto alle note citate di G. SCORZA, convien ricordare la Nota di C. ROSATI: « Atti Acc. di Torino ». 1915

Le superficie iperellittiche (proprie) sono state studiate nei classici lavori di E. PICARD sulla teoria delle superficie (Cfr. « Journal de Math. », 1885, 86, 88), e vengon da lui caratterizzate in relazione al gruppo ∞^2 delle loro trasformazioni in sè stesse. ENRIQUES ne ha dedotto più tardi (1905) la caratterizzazione mediante i numeri invarianti (genere numerico $p_a = -1$, genere geometrico $p_g = 1$, quadrigenere $P_4 = 1$). Dalla teoria di PICARD muove l'ampio studio delle superficie iperellittiche di

G. HUMBERT: *Théorie des surfaces hyperellyptiques*, « Journal de Math. », t. IX, 1893.

che comprende anche le superficie iperellittiche di rango due e principalmente la superficie di KUMMER.

La superficie di KUMMER è così detta dal nome del suo scopritore E. KUMMER, che la incontrò come superficie focale di una congruenza di rette del secondo ordine nel 1964 (« Berliner Monhatsberichte, pagg. 246, 495: cfr. « Berliner Akad. Abhandlungen », 1866, pag. 1); essa fu riconosciuta come superficie singolare per il complesso di rette di secondo grado (anzi per una serie ∞^1 di complessi confocali) da F. KLEIN (« Math. Annalen », II).

Diverse forme della sua equazione si trovano in A. CAYLEY: « Journal de Crelle », LXXIII, 292: (cfr. « Opere », VII, 126); in G. DARBOUX: « Comptes rendus », 1881, XCII, 1493; in ROHN: « Math. Annalen », XXIX, 1986, e in E. PASCAL: « Annali di Mat. », XVIII e XIX.

La rappresentazione delle coordinate dei punti della superficie di KUMMER mediante funzioni iperellittiche di due parametri, fu scoperta da F. KLEIN, e studiata poi da CAYLEY: « Crelle », LXXXIII; BORCHARDT: (idem); WEBER: (idem), LXXXIV; ROHN: « Math, Annalen », XV, XVIII; REICHARDT: « Leopold. Akad. », 1887), ecc.; più tardi, nel senso della geometria sopra le superficie, da HUMBERT: l. c., 1893.

Sotto l'aspetto geometrico la configurazione dei 16 punti e dei 16 piani singolari della superficie è stata studiata in diversi lavori: da E. CAPORALI: « Rendic. Lincei », 1878; SCHROETER: « Crelle », 100, e R. DE PAOLIS, in rapporto colle trasformazioni quadratiche [1, 2] dello spazio « Lincei », 1880, ecc.

Una buona esposizione d'insieme delle proprietà della superficie si ha infine nel trattato di

R. W. H. T. HUDSON: « Kummer's quartic Surface ». Cambridge, 1905.

La superficie di KUMMER non è la sola superficie del quarto ordine che possa ritenersi come iperellittica di rango due. Vi sono altre superficie di questa famiglia, che si ottengono come trasformate della superficie di Kummer e possono costruirsi direttamente a partire da sistemi lineari appartenenti ad un'involuzione di seconda specie e dotati di punti base, sopra la superficie di Jacobi. L'analisi di tutti i casi possibili si trova in Humbert (*l. c.*).

Fra la superficie di quarto ordine che così s'incontrano conviene menzionare la *superficie di* Weddle, che è il *luogo dei vertici dei coni proiettanti sei punti fondamentali*, cioè la *jacobiana* del sisistema ∞^3 delle quadriche per codesti punti. Contiene 6 punti doppi e 25 rette, ossia le 15 congiungenti a due a due i sei punti e le 10 intersezioni dei piani determinati dalle loro terne; inoltre contiene anche la cubica gobba per i sei punti.

Questa superficie è stata scoperta da

Weddle: « Journal of Cambridge », 1850,

ed è stata studiata poi da Cayley: « Comptes rendus », 1861; Darboux: « Bullettin des sciences math. », I; Hierholzer: « Math. Annalen. », 2, 4; Hunyady: « Crelle », 92; Gaspary: « Comptes rendus », 1891; Schottky: « Crelle », 105.

In particolare la trasformazione quadratica che fa passare dalla superficie di Weddle a quella di Kummer è segnalata da Darboux: (*l. c.*) e viene studiata da Reye: « Crelle », 86 e da De Paolis: (*l. c.*); cfr. Hudson (*op. cit.*).

INDICI

INDICE ANALITICO

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

INDICE DEI CAPITOLI

LIBRO SESTO

Funzioni ellittiche e abeliane.

CAPITOLO I

Integrali e funzioni ellittiche.

CAPITOLO II

Integrali abeliani.

CAPITOLO III

Il problema d' inversione e le funzioni abeliane.