Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo

Bollati Boringhieri, Torino, 1996. ([670 lettere del periodo 1982-1914])

L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

RIPOSTE ARMONIE

Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo

a cura di

Umberto Bottazzini, Alberto Conte, Paola Gario

BOLLATI BORINGHIERI

Prima edizione giugno 1996

© 1996 Bollati Boringhieri editore s.r.l., Torino, corso Vittorio Emanuele 86
I diritti di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati
Stampato in Italia dalla Stampatre di Torino
ISBN 88-339-0989-1

Questo volume è pubblicato con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche

INDICE

Introduzione VII

Cronologia XXI

Nota al testo XXIX

Riposte armonie

Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo 3

Appendice 649

Lettere di Léon Autonne a Guido Castelnuovo, 651
Lettera di Eugenio Bertini a Guido Castelnuovo, 653
Lettere di Georges Humbert a Guido Castelnuovo, 654
Lettere di Max Noether a Guido Castelnuovo, 656
Lettere di Emile Picard a Guido Castelnuovo, 659
Lettere di Corrado Segre a Guido Castelnuovo, 669

Bibliografia 679

Pubblicazioni di Guido Castelnuovo, 681
Pubblicazioni di Federigo Enriques, 683
Scritti di altri autori citati nella corrispondenza, 689

Indice dei nomi 707

Elenco cronologico delle lettere 715

RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo Emma Castelnuovo che, mettendoci a disposizione il carteggio da lei conservato nell'archivio del padre, ha reso possibile la pubblicazione di questo volume. Federico e Lorenzo Enriques, oltre a fornirci tutta l'assistenza e le informazioni richieste loro, hanno garantito l'autorizzazione della famiglia alla pubblicazione delle lettere del nonno.

Desideriamo inoltre ringraziare Pietro Nastasi per l'aiuto prestatoci nella ricerca documentaria e Wolfgang Woess, Niels Jahnke e Amy Dahan-Dalmedico per la revisione della trascrizione delle lettere in tedesco e in francese riportate in Appendice.

Giovanni Niccoli ha curato la redazione del volume con competenza esemplare svolgendo un'opera di controllo e di stimolo che è andata ben al di là dei normali compiti di un redattore. Gliene siamo profondamente grati. Un grazie anche a Marco Viotti per l'accurata composizione tipografica.

Il volume non avrebbe mai visto la luce senza l'aiuto di Giulio Bollati che, con la consueta intelligenza, comprese immediatamente l'importanza per la cultura italiana della sua pubblicazione. È per noi motivo di enorme rimpianto che la sua prematura scomparsa gli abbia impedito di vedere realizzata l'opera.

Paola Gario desidera rivolgere un ringraziamento particolare a Emma Castelnuovo per la fiducia che le ha voluto accordare, per la disponibilità e la sua affettuosa amicizia.

Il coordinamento, il controllo testuale e la verifica dell'apparato delle note sono dovuti a Paola Gario. Di ciò gli altri due curatori, consapevoli del gravoso impegno che l'effettuarli ha comportato, le sono profondamente grati.

INTRODUZIONE

Le 668 lettere (o cartoline postali) scritte da Federigo Enriques a Guido Castelnuovo fra il 6 novembre 1892 e il 2 dicembre 1906 (oltre a due lettere isolate, rispettivamente del 25 maggio 1908 e del 24 agosto 1914) conservate da Emma Castelnuovo nell'archivio del padre, vengono pubblicate in questo volume per la prima volta, rendendo così disponibile una documentazione di eccezionale importanza per la storia della scuola italiana di geometria algebrica e più in generale della matematica italiana dell'ultimo secolo che era rimasta finora completamente inaccessibile anche agli studiosi. La loro esistenza era tuttavia nota, in quanto ne avevano fatto cenno sia Castelnuovo nelle *Note aggiuntive* inserite nel volume delle sue *Memorie scelte* pubblicato nel 1937, sia Enriques là dove aveva scritto, ricordando la collaborazione scientifica con l'amico, che «i problemi della geometria algebrica formarono per lunghi anni argomento di una corrispondenza epistolare quasi quotidiana e di lunghe conversazioni quando gli amici potevano ritrovarsi. Allora lavoravano, di solito, passeggiando; e non era la strada che li affaticava di più».[1] Restava tuttavia il dubbio che esse fossero andate perdute, come è purtroppo presumibile sia accaduto per le lettere di risposta di Castelnuovo a Enriques, delle quali non è stato possibile ritrovare traccia nonostante il prezioso aiuto fornitoci dai nipoti Lorenzo e Federico Enriques.

Il giovane appena ventunenne che il 6 novembre 1892 si rivolgeva rispettosamente al professor Castelnuovo (che, comunque, di anni ne aveva appena ventisette) si era laureato a Pisa l'anno precedente e intendeva ora perfezionarsi a Torino con Corrado Segre, che della scuola italiana di geome-

[1] Citato in L. Campedelli, *Necrologio di Guido Castelnuovo*, «Boll. UMI», (3), 7 (1952), 241-46.

tria algebrica era l'esponente più autorevole. Enriques ottenne invece un posto di perfezionamento a Roma presso Luigi Cremona, che di tale scuola era stato il fondatore. Qui incontrò in Castelnuovo quello che sarebbe rimasto per tutta la vita non soltanto l'amico e il collaboratore più fidato, ma anche la guida sicura cui ricorrere per ottenere l'indicazione della via da seguire per superare le difficoltà che continuamente si presentavano nella creazione della teoria delle superficie algebriche.

Commemorando l'amico di fronte all'Accademia dei Lincei cinquantacinque anni dopo, Castelnuovo ricorderà come Enriques si rivelò subito un «mediocre lettore». Resosi conto che «nella pagina che aveva sotto gli occhi egli non vedeva ciò che era scritto, ma quel che la sua mente vi proiettava», Castelnuovo decise di adottare il metodo della conversazione:

> Cominciarono allora quelle interminabili passeggiate per le vie di Roma, durante le quali la geometria algebrica fu il tema preferito dei nostri discorsi. Assimilate in breve tempo le conquiste della scuola italiana nel campo delle curve algebriche, l'Enriques si accinse arditamente a trattare la geometria sopra una superficie algebrica. Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo a una critica severa. Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l'indirizzo italiano.[2]

Le lettere che i due geometri si scambiarono a partire dal mese di giugno del 1893, costituiscono la naturale continuazione di quelle conversazioni.

Accingendosi allo studio delle superficie algebriche, Enriques e Castelnuovo si inoltravano su un terreno irto di insidie e largamente inesplorato. Il lavoro più importante cui fare riferimento era una memoria di Max Noether[3] pubblicata nei «Mathematische Annalen» del 1875. Vi era poi una grande memoria di Emile Picard[4] apparsa nel 1889 nel «Journal» di Liouville e i primi lavori dello stesso Castelnuovo. In quell'articolo Noether considerava superficie di ordine n immerse in $\mathbf{P}^3$ e dotate di sole singolarità ordinarie, definiva il sistema canonico $|K|$ di una superficie S come il sistema tagliato su S dalle superficie aggiunte di ordine $n-4$ e introduceva i principali caratteri invariantivi della superficie, il *Flächengeschlecht* (che poi sarà detto genere geometrico, p_g) definito come il massimo numero delle curve canoniche linearmente indipendenti, e il genere lineare (*Curvengeschlecht*) $p^{(1)}$ dato dal genere delle curve del sistema canonico. Inoltre, utilizzando le cosiddette formule di postulazione, Noether otteneva quello che poi si dirà

[2] Castelnuovo, *Commemorazione del Socio Federigo Enriques*, «Rend. Acc. Lincei», (8), 2 (1948); cfr. Enriques 1956-66, I, IX.

[3] Noether 1875.

[4] Picard 1889.

il genere *numerico* (o *aritmetico*) p_a della superficie e ne dimostrava l'invarianza per trasformazioni birazionali. All'approccio geometrico di Noether si affiancava quello trascendente di Picard, che in quella sua memoria sviluppava la teoria degli integrali semplici associati a una superficie algebrica e la teoria delle superficie con infinite trasformazioni birazionali in se stesse.

Partendo dal lavoro di Noether, nel 1891 Castelnuovo aveva studiato alcuni particolari tipi di superficie e costruito il primo esempio di superficie algebrica non rigata per la quale $p_g \neq p_a$.[5] In due fondamentali memorie[6] pubblicate rispettivamente nel 1893 e nel 1896 Enriques gettò invece le basi per una teoria organica delle superficie attraverso la definizione dei concetti basilari e la dimostrazione dei teoremi generali, ponendo così le premesse per la classificazione. I principali risultati contenuti nelle due memorie sono i seguenti:

1) un'accurata descrizione dei sistemi lineari $|C|$ di curve su una superficie e delle loro principali proprietà;

2) la definizione del sistema aggiunto $|C'|$ a un sistema lineare $|C|$;

3) la definizione del sistema canonico $|K| = |C' - C|$;

4) la dimostrazione della formula di aggiunzione e la soluzione di numerosi casi del cosiddetto problema di Riemann-Roch, che consiste nel calcolo della dimensione dei sistemi lineari di curve su una superficie;

5) la ridefinizione dei caratteri invariantivi di una superficie e la definizione dei *plurigeneri* P_n, che sono rispettivamente uguali al numero delle curve linearmente indipendenti del sistema n-canonico $|nK|$.

Questi temi saranno poi ripresi e completati in una memoria[7] scritta con Castelnuovo e pubblicata nel 1901. Questi, dal canto suo, dimostra nel 1896 il teorema di Riemann-Roch, che estende quello classico per le curve e, con la determinazione del criterio di razionalità, porta il suo più importante contributo alla teoria delle superficie.[8]

La caratterizzazione delle superficie razionali era un problema che si era già presentato a Noether e Alfred Clebsch. L'analogia con ciò che accade per le curve, che sono razionali se e soltanto se hanno genere zero, aveva fatto congetturare che fossero razionali tutte e sole quelle superficie che hanno nulli sia il genere aritmetico sia il genere geometrico. Da questa corrispondenza risulta che nel luglio 1894 Castelnuovo era convinto di essere riuscito a dimostrare la verità di tale congettura. Avuta notizia delle diffi-

[5] Castelnuovo 1891a.
[6] Enriques 1893f e 1896d.
[7] Enriques-Castelnuovo 1901.
[8] Castelnuovo 1896a.

coltà incontrate dall'amico nella dimostrazione, Enriques gli suggerisce l'esistenza di un controesempio.[9] Si tratta della famosa sestica di $\mathbf{P}^3$ che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. Successivamente Castelnuovo dimostrò che una superficie S è razionale se e solo se $p_a = P_2 = 0$. La sestica di Enriques ha $p_a = p_g = 0$, ma $P_2 = 1$. Nel 1907 Enriques dimostrerà[10] che ogni superficie avente questi caratteri numerici è birazionalmente equivalente alla sestica passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. Oggi questa classe di superficie porta il nome del suo scopritore.

Le immagini cui Enriques e Castelnuovo ricorrono per descrivere il loro lavoro sono prese a prestito dalle scienze naturali:

> Il lettore [...] può averne tratto l'impressione che l'autore [...] si sia lasciato guidare dal sentimento di curiosità del naturalista che raccoglie in un museo i più diversi tipi di animali o di piante o di minerali.[11]

> Stabiliti questi risultati fondamentali [...] l'Enriques può formulare un piano sistematico di ricerche che egli svolgerà poi fino agli ultimi anni. Il piano consiste nel caratterizzare le proprietà delle superficie in relazione ai valori dei generi, cominciando con le superficie che hanno i generi più bassi. L'analogia porterebbe a pensare alla classificazione che fanno i naturalisti degli animali e delle piante, partendo dagli organismi più semplici. Ma perché l'analogia tornasse, bisognerebbe immaginare un naturalista che, chiuso nel suo studio, indagasse, dal punto di vista teorico, quali tipi di organismi siano compatibili con le leggi della morfologia e della fisiologia, e poi ricercasse quali tra questi si incontrano effettivamente in natura.[12]

Ed è proprio con questo spirito che, in oltre trenta lavori compresi tra il 1896 e il 1914, Enriques, con il contributo di Castelnuovo, conduce a termine l'opera di classificazione delle superficie algebriche. È un'opera monumentale, nella quale non si sa se ammirare di più i tesori di scienza geometrica che vi sono profusi o i colpi di genio che, con un'unica ardita generalizzazione, consentono di eliminare in un sol colpo miriadi di casi particolari. Man mano che procede, il naturalista acquista una conoscenza sempre più approfondita delle «specie» che sta studiando, una conoscenza che gli consente di predirne con sicurezza il comportamento in qualsiasi situazione e di giungere così al risultato cercato.

Fra le «specie» più restie a svelare il proprio comportamento vi sono le superficie cosiddette *irregolari*, cioè quelle i cui due generi sono diversi o, in altri termini, la cui irregolarità $q = p_g - p_a$ è positiva. Già Noether

[9] Cfr. p. 125, c.p. 111 (22.7.1894).
[10] Enriques 1907a.
[11] Enriques, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna 1949, 427.
[12] Castelnuovo, *Commemorazione* cit., x-xi.

aveva tentato di esorcizzarne l'esistenza ipotizzando che le uniche superficie irregolari esistenti fossero le rigate irrazionali. Ma le cose erano ben più complicate di quanto supponesse l'illustre geometra tedesco. Come ricorderà più tardi Castelnuovo:

Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per così dire, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni d'ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà colla costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica.[13]

Questo passo, che bene illustra lo spirito da pionieri con cui Enriques e Castelnuovo si avventurano nel mondo delle superficie, mette altresì in luce la difficoltà, che sarebbe rimasta insuperata anche in seguito, che si incontra nel trattare le superficie irregolari con i metodi della geometria algebrica italiana. In realtà, l'approccio più corretto per la trattazione del concetto di irregolarità sarebbe stato fornito dai metodi topologico-trascendenti della scuola francese. Fin dal 1896 Castelnuovo aveva collegato[14] il concetto di irregolarità a una proprietà della serie caratteristica dei sistemi lineari di curve sulla superficie, dimostrando che, se $q \neq 0$, questa serie è incompleta per i sistemi lineari di curve che sono «abbastanza grandi» (ad esempio, per quelli che contengono il sistema canonico). Enriques aveva dimostrato[15] nel 1899 che l'esistenza su una superficie di sistemi continui non lineari di curve implicava $q \neq 0$ e aveva poi completato un precedente risultato di Georges Humbert[16] del 1893 provando che tali sistemi esistono se e solo se la superficie possiede degli integrali semplici di prima specie non nulli.[17] Rimaneva quindi aperto il problema di invertire il teorema di Enriques, cioè di provare che $q \neq 0$ implica l'esistenza di una famiglia di dimensione q (e non maggiore) di sistemi continui non lineari di curve sulla superficie.

[13] Castelnuovo, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici (Bologna 3-10 settembre 1928)*, vol. 1, Zanichelli, Bologna 1928, 194.
[14] Castelnuovo 1896a.
[15] Enriques 1899b.
[16] Humbert 1893b.
[17] Enriques 1901a.

Una dimostrazione algebrico-geometrica di questo teorema (detto *teorema fondamentale delle superficie irregolari*) fu proposta da Enriques[18] nel dicembre 1904 servendosi di una ingegnosa tecnica di degenerazione di curve sulla superficie, chiamata *principio di spezzamento*. Basandosi su di esso Castelnuovo[19] e Francesco Severi[20] dimostrarono indipendentemente che q coincide con il massimo numero di integrali semplici di prima specie linearmente indipendenti della superfcie e con la metà del massimo numero di quelli di seconda specie (che coincide con il suo primo numero di Betti). La dimostrazione di Castelnuovo introduceva una varietà abeliana q-dimensionale, che Castelnuovo stesso chiamò *varietà di Picard* della superficie, i cui punti rappresentano i sistemi continui non lineari di curve esistenti sulla superficie. Una dimostrazione trascendente del teorema fondamentale fu data da Henri Poincaré[21] nel 1910. Nel 1921 Severi[22] si rese conto che la dimostrazione data da Enriques era sbagliata e ne propose una diversa, risultata però anch'essa non corretta. E i successivi tentativi della scuola italiana di trovare una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema fondamentale si rivelarono infruttuosi. La prima trattazione algebrico-geometrica rigorosa del problema sarà fatta molti anni dopo da David Mumford[23] che dovrà fare ricorso a tutta la potenza delle nuove tecniche di coomologia degli schemi introdotte pochi anni prima da Alexandre Grothendieck.

Con il 1914 il lavoro di classificazione, già delineato nei suoi aspetti principali prima della fine del secolo, può essere considerato come essenzialmente portato a termine, ed Enriques potrà esporlo in due note lincee dello stesso anno.[24] L'idea che sta alla base della classificazione consiste nel dividere le superficie in classi di equivalenza birazionale, a seconda dei valori assunti dai loro invarianti birazionali, in particolare dai plurigeneri e dal genere aritmetico. Dal punto di vista proiettivo, ciò equivale a classificare le superficie a seconda del comportamento dei loro modelli canonici o pluricanonici. In realtà, il solo valore del P_{12} è sufficiente a dividere tutte le superficie in quattro classi:

[18] Enriques 1905a.

[19] Castelnuovo 1905b.

[20] Severi 1905c.

[21] H. Poincaré, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, «Ann. Ec. Norm. Sup.», (3), 27 (1910), 55-108 (= *Œuvres*, VI, 88-139).

[22] F. Severi, *Sulla teoria degli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica. Nota I*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 30 (1921), 163-67 (= *Opere matematiche*, III, 21-25).

[23] D. Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Princeton University Press, Princeton 1960.

[24] Enriques 1914a.

A) $P_{12} = 0$. Queste superficie hanno tutti i plurigeneri nulli e sono razionali se $q = 0$ e riferibili a rigate irrazionali se $q \neq 0$.[25]

B) $P_{12} = 1$. Queste superficie hanno tutti i plurigeneri uguali a 0 o a 1. Esse si suddividono in quattro sottoclassi: a) superficie regolari con $p_g = 0$ e $P_2 = 1$ (sono le già citate *superficie di Enriques*, classificate completamente nel 1907);[26] b) superficie regolari con tutti i plurigeneri uguali a 1 (dette oggi superficie $K3$), caratterizzate da Enriques nel 1896[27] come superficie regolari a curve sezioni canoniche e nel 1908[28] dalle condizioni $p_a = P_4 = 1$; Enriques ne calcolerà anche il numero dei moduli (19) e proverà[29] che, per ogni valore intero $\pi \geq 3$, si può costruire in $\mathbf{P}^\pi$ una famiglia di tali superficie di grado $2\pi - 2$ dipendente da 19 moduli; c) superficie irregolari con tutti i plurigeneri uguali a 1, che vengono caratterizzate come superficie *abeliane*; d) superficie irregolari con $p_g = 0$ e $P_2 = 1$, dette superficie *iperellittiche*. Queste ultime due classi di superficie furono classificate da Enriques e Severi[30] e da Giuseppe Bagnera e Michele De Franchis[31] in due importanti memorie che ottennero entrambe il Prix Bordin dell'Accademia delle Scienze di Parigi (rispettivamente per il 1907 e il 1909).

C) $P_{12} > 1$ e genere lineare $p^{(1)} = 1$. Si tratta delle cosiddette superficie *ellittiche*, i cui modelli pluricanonici sono punti o curve e che sono caratterizzate come superficie che contengono un fascio di curve di genere 1. La loro classificazione fu completata da Enriques negli anni che vanno dal 1898 al 1914[32] e successivamente semplificata e raffinata in numerosi lavori suoi e dei suoi allievi.[33]

D) $P_{12} > 1$ e $p^{(1)} > 1$. Sono le superficie per le quali un qualche modello pluricanonico è una superficie e che sono note oggi come superficie *di tipo generale*. Il loro studio fu iniziato da Castelnuovo nell'articolo del 1891[34] e fu proseguito da Enriques e dai suoi allievi nel successivo mezzo secolo.

[25] Enriques 1896d; Castelnuovo 1896b.
[26] Enriques 1907a.
[27] Enriques 1896e.
[28] Enriques 1908b.
[29] Enriques 1909a.
[30] Enriques-Severi 1909b.
[31] G. Bagnera e M. De Franchis, *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irregulières de genre zero*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 30 (1910), 185-238 (= De Franchis, *Opere*, 458-511).
[32] Enriques 1898b, 1906a, 1907d, 1912a, 1914a.
[33] La sua forma finale può essere letta in Enriques, *Le superficie algebriche* cit. Questo volume rappresenta la summa dei risultati ottenuti da Enriques e dalla sua scuola in oltre cinquant'anni di ricerche sulle superficie algebriche.
[34] Castelnuovo 1891a.

Questa stessa classificazione venne resa accessibile all'intera comunità matematica internazionale con l'ampio articolo dell'*Encyklopädie*,[35] pubblicato nello stesso 1914 e significativamente scritto a quattro mani quasi a suggellare gli oltre vent'anni di ricerche comuni che avevano consentito di erigere quell'opera monumentale, che conclude la collaborazione scientifica fra Enriques e Castelnuovo.

Di questa collaborazione, probabilmente senza uguali per ampiezza, intensità e spontaneità nella storia della matematica, il carteggio costituisce una chiave interpretativa di incomparabile valore e insieme una testimonianza anch'essa unica nella sua capacità di documentarla. È come se fossimo ammessi a partecipare anche noi alle passeggiate dei due amici nella Roma umbertina di fine secolo e ad ascoltare la loro fitta conversazione su una qualche classe di superficie. O come se potessimo finalmente aprire le famose «vetrine» in cui venivano idealmente allineati i modelli di superficie, per scoprirne dopo un secolo il contenuto e comprendere i rispettivi ruoli avuti dai costruttori.

Enriques è un genio matematico creativo di straordinaria potenza, capace di intuire con folgorante rapidità le proprietà più complesse degli oggetti geometrici a partire da pochi e oscuri indizi. Procede per *trial and error*, spesso cambiando opinione nel corso di una stessa lettera e pervenendo di solito al risultato per approssimazioni successive. Quasi sempre intuisce l'esito finale della ricerca molto prima di riuscire a darne una dimostrazione completa. Tipico a questo proposito è il caso della sestica che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro la cui esistenza viene ipotizzata nel 1894, la cui proprietà fondamentale viene intuita nel 1898 ma la cui dimostrazione è completata soltanto nel 1907.

La perdita delle lettere di Castelnuovo non consente di individuare con altrettanta certezza il ruolo da lui svolto. Le poche rimaste, e soprattutto il tono delle risposte di Enriques, ne fanno però risaltare la figura paterna (anche se aveva soltanto sei anni più di Enriques): quella di un padre comprensivo e giusto, ma severo, che non si lascia sfuggire nessuna delle imprecisioni in cui (spesso) incorre il figlio e che non manca di fargliele rilevare, soddisfatto solo quando le ritiene eliminate completamente. È un ruolo, quello di Castelnuovo, meno brillante, ma del pari essenziale, poiché le sue critiche, alle quali quasi sempre Enriques risponde con pronte autocritiche accompagnate invariabilmente da una soluzione alternativa, costituiscono gli argini entro i quali viene incanalata la torrenziale creatività del-

[35] Enriques-Castelnuovo 1914.

l'amico e senza i quali essa si sarebbe probabilmente dispersa in mille rivoli. A volte però i ruoli si invertono: è il caso ad esempio delle ricerche, mai pubblicate, di Castelnuovo sulla razionalità della ipersuperficie cubica non singolare di $\mathbf{P}^4$, la cui esistenza è stata rivelata dal carteggio e nei confronti delle quali Enriques assume, per una volta, il ruolo di critico, in verità assai più comprensivo e meno esigente.

Gli interlocutori scientifici che animano il carteggio sono numerosi, sia italiani che stranieri. Fra i primi, sullo sfondo e con un ruolo essenzialmente istituzionale, appare la figura di Cremona, il padre della geometria algebrica italiana fin dal lontano 1860, quando era stato chiamato a ricoprire a Bologna la prima cattedra di Geometria superiore istituita in un'università italiana. E insieme a lui compaiono le figure di Giuseppe Veronese e di Eugenio Bertini, rispettivi maestri di Castelnuovo ed Enriques. Con il primo Enriques avrà dei dissapori le cui ragioni sono documentate da questa corrispondenza. Assai più incisiva è invece la presenza di Segre al quale Castelnuovo si era legato d'amicizia nei quattro anni trascorsi a Torino, fra il 1887 e il 1891, come assistente di Enrico D'Ovidio. Ancora cinquant'anni dopo, ne ricorderà «la figura dolce e pensosa», «i consigli e gli incoraggiamenti» di cui gli «fu largo» e invierà «un mesto e riconoscente saluto alla memoria dell'amico carissimo, del maestro incomparabile, che con l'esempio» gli «insegnò la devozione alla scienza ed alla scuola».[36] L'incontro di Enriques con Segre fu invece più problematico. Segre aveva un carattere austero ed esigeva precisione e rigore in tutti coloro che gli sottoponevano un manoscritto per la pubblicazione. Queste qualità facevano difetto a Enriques, e le lettere scritte durante i mesi trascorsi a Torino fra la fine del 1893 e gli inizi del 1894, testimoniano degli sforzi per corrispondere alle richieste del maestro e del senso di vergogna che lo invadeva quando si rivelavano inadeguati a soddisfarle. I buoni uffici di Castelnuovo varranno comunque a rendere meno difficili i rapporti tra i due, anche se permarrà in Enriques un senso di imbarazzata deferenza nei confronti di Segre.

La mancata collaborazione di Segre con Enriques e Castelnuovo nella costruzione della teoria delle superficie algebriche è stata variamente interpretata. Da parte sua, Castelnuovo, commemorando l'amico,[37] osservava come la sua avversione per i «ragionamenti complicati», per i «procedimenti arditi ai quali talora si è costretti a ricorrere nella fase della scoperta»

[36] Castelnuovo 1937, x.

[37] Castelnuovo, *Commemorazione del Socio Corrado Segre*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 33 (2° sem.), 1924, 353-59.

lo avessero forse trattenuto «dal troppo inoltrarsi nelle regioni che aveva incominciato ad esplorare». Questa corrispondenza mostra che l'occasione per Segre di inserirsi attivamente nelle ricerche dei due si presentò alla fine del 1894 quando Enriques e Castelnuovo gli sottoposero il problema delle singolarità delle superficie algebriche e gli chiesero di dare una dimostrazione del teorema di risoluzione. Segre si impegnò nella ricerca, prima personalmente e poi, non riuscendo a completare la dimostrazione,[38] attraverso il suo allievo Beppo Levi.[39] Le inattese difficoltà incontrate da Segre si protrassero per alcuni anni, ciò che forse gli impedì di partecipare più direttamente ai rapidi sviluppi che la teoria stava conoscendo nelle mani di Enriques e Castelnuovo.

Distesi e cordiali appaiono i rapporti con Gino Fano, che era stato allievo di Segre e assistente di Castelnuovo e che, a partire dall'inizio del Novecento, si accrediterà come il migliore specialista di varietà algebriche tridimensionali e i cui lavori in questo campo influenzarono alcune ricerche di Enriques.[40] Fano collaborò con Enriques in un importante lavoro[41] sui gruppi di trasformazioni cremoniane di $\mathbf{P}^3$. Sfumata è invece la presenza di Severi. Poco dopo essersi laureato a Torino con Segre nel 1900, Severi aveva trascorso l'anno accademico 1902-03 a Bologna come assistente di Enriques, dando così inizio a una collaborazione scientifica che culminerà nel 1907 nell'importante memoria sulle superficie iperellittiche coronata dal Prix Bordin. Dalla corrisponenza non traspare dunque alcun indizio dei contrasti che separeranno in seguito Enriques e Severi. Quanto a Bagnera e De Franchis, i riferimenti sono sempre contenuti nell'ambito di un sostanziale riconoscimento del valore dei loro contributi e non affiorano tracce delle difficoltà che insorgeranno nei loro rapporti con Enriques e Severi in occasione della competizione per il Prix Bordin.

In ogni caso, il carteggio fornisce una messe enorme di informazioni sulle ricerche di geometria algebrica condotte nel nostro paese, che delineano un panorama spesso originale non soltanto delle ricerche di Castelnuovo, Enriques e Severi ma anche, sia pure in maniera indiretta, di quelle degli altri geometri italiani attivi in quel periodo. E se i giudizi sui contemporanei sono quasi sempre equanimi e privi di astio o invidia, emerge comun-

[38] Segre 1897a.

[39] B. Levi 1897b.

[40] Enriques, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 21 (1° sem.), 1912, 14-17 (= *Memorie*, III, 149-52) e *Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili*, «Ann. Mat. pura appl.», 20 (1913), 109-11 (= *Memorie*, III, 169-71).

[41] Enriques-Fano 1897.

que chiara l'orgogliosa consapevolezza dell'originalità e del superiore valore dei risultati conseguiti nelle proprie ricerche.

Altrettanto interessanti sono le informazioni inedite concernenti i rapporti con i matematici di altri paesi. In Germania, nonostante fosse stata la patria dei primi studi sulle superficie algebriche, Enriques e Castelnuovo non trovano effettivi interlocutori scientifici. Noether, che ha ormai abbandonato da tempo il terreno della ricerca originale, è trattato con la deferenza che si deve a colui che è stato la fonte di ispirazione della scuola italiana, e insieme la consapevolezza che i suoi lavori appartengono al passato. Più significativo è invece il rapporto con Felix Klein, che Enriques incontra nella primavera del 1899, in occasione di un viaggio del matematico tedesco in Italia. Come Klein, anche Enriques era interessato al problema dei fondamenti della geometria proiettiva, che si affaccia nei primi anni di questa corrispondenza sotto la spinta di esigenze didattiche. La conoscenza diretta di Klein, da cui egli rimase affascinato, ebbe anche una sicura influenza sulla scelta di Enriques di rivolgere la propria attenzione alle questioni che riguardano le matematiche elementari.[42]

Singolare risulta poi il rapporto con David Hilbert, il quale aveva dimostrato alcuni importanti teoremi di carattere algebrico (teorema della base, *Nullstellensatz*), che oggi rivestono un ruolo fondamentale nella geometria algebrica. I tentativi di utilizzarli da parte di Enriques e Castelnuovo non sortirono risultati.[43] D'altro lato Hilbert non aveva sicuramente colto l'importanza dei risultati della scuola italiana, tanto è vero che, nella sua celebre conferenza tenuta al secondo Congresso Internazionale dei Matematici (Parigi 1900), fra i problemi aperti da lui citati come i principali da risolvere nel secolo che si stava aprendo, ne compaiono soltanto due che interessano la geometria algebrica (il quindicesimo, *Fondazione rigorosa del calcolo numerico di Schubert*, e il sedicesimo, *Problema della topologia delle curve e delle superficie algebriche*, che riguardano questioni molto lontane da quelle che venivano studiate dai due geometri italiani). Enriques tenterà di fargli cambiare idea in una conversazione diretta avvenuta a Gottinga nel 1903:

> Hilbert ignorava completamente le nostre cose ed ha cominciato col dirmi che la Geometria algebrica non lo interessava punto; ma si è completamente ricreduto ed ha preso nota di molte delle questioni più importanti per noi insolute, ha capito e apprezzato pienamente lo spirito e la determinatezza delle nostre ricerche.[44]

[42] Enriques 1900c.
[43] Cfr. p. 453, let. 485 (30.3.1900) e p. 454, let. 486 (2.4.1900).
[44] Cfr. p. 537, let. 571 (24.10.1903).

Come che sia, l'incontro fra l'approccio alla geometria algebrica basato sull'algebra commutativa e quello algebrico-geometrico della scuola italiana non avvenne, e bisognerà attendere gli anni trenta, con i lavori di Bartel Leenert Van der Waerden e di Oscar Zariski (che era stato allievo di Castelnuovo a Roma prima di trasferirsi negli Stati Uniti), per vedere le prime applicazioni significative dell'algebra commutativa allo studio delle proprietà fondamentali delle varietà algebriche. Si inaugurava così un filone di ricerca che avrebbe condotto, nel secondo dopoguerra, ai lavori di Jean-Pierre Serre sulla coomologia dei fasci coerenti e soprattutto alla teoria degli schemi di Grothendieck.

Molto più intensi furono invece i rapporti con la scuola francese, che deteneva il primato delle ricerche basate sui metodi analitico-trascendenti. Da questo punto di vista, la corrispondenza fornisce informazioni preziose che valgono a smentire una tesi storiografica, accreditata soprattutto da Jean Dieudonné,[45] secondo la quale vi furono soltanto marginali influenze reciproche fra le due scuole. In realtà, frequenti furono i contatti e la convergenza di interessi con Léon Autonne, Georges Humbert e Paul Painlevé, in particolare per quanto riguarda la teoria delle superficie abeliane e iperellittiche. Ma è soprattutto la figura di Emile Picard che emerge come il vero interlocutore privilegiato in Francia. Enriques e Castelnuovo, ai quali si unirà all'inizio del secolo Severi, sono fortemente interessati alla sua teoria degli integrali semplici di prima e seconda specie sopra una superficie e tentano di comprenderne i risultati per includerli nel contesto delle loro ricerche. Questi sforzi saranno coronati dai lavori del 1905 che abbiamo ricordato in precedenza. Picard, d'altro lato, si rende rapidamente conto che le tecniche usate dai due geometri italiani, più delle proprie, sono in grado di fornire risultati molto più profondi e completi e non cessa, con invariabile cortesia e affabilità, di richiedere informazioni sulle loro ricerche e di elogiarne i successi conseguiti. Questo atteggiamento culminerà nella proposta di pubblicare, in appendice al secondo volume del proprio trattato[46] sulla teoria delle funzioni algebriche di due variabili indipendenti, una nota dei due geometri italiani[47] in cui sono riassunti i loro risultati più recenti nell'ambito della teoria delle superficie algebriche e della loro classificazione. Molto più sporadici sono invece i rapporti con Poincaré, apparentemente poco interessato a ciò che in questo campo avveniva al di là delle Alpi.[48]

[45] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, vol. 1, Presses Universitaires de France, Paris 1974.

[46] Picard-Simart 1897-1906.

[47] Enriques-Castelnuovo 1906b.

[48] Si veda tuttavia l'interessantissima lettera dell'11 marzo 1902 (n. 527, p. 492) in

Nella corrispondenza non si parla però soltanto di geometria. Oltre alle vicende familiari, alle quali sono dedicati sintetici accenni, è la vita accademica che occupa un posto di rilievo nelle lettere che si scambiano i due amici. Le procedure previste dalla Legge Casati, che allora regolava la vita dell'università italiana per quanto riguarda incarichi, concorsi, chiamate, ordinariati, promozioni, erano assai più complesse e centralizzate di quelle attuali e danno luogo a frequenti scambi di informazioni e punti di vista che forniscono un'immagine precisa del panorama istituzionale (cattedre, concorsi, premi, scuole ecc.) della geometria italiana a cavallo del secolo, compresi i giudizi e le personali simpatie (o antipatie) di Enriques (e talvolta anche di Castelnuovo e di Segre) nei confronti degli altri matematici del tempo. È evidente che, in maniera più o meno consapevole e intenzionale, si stanno ponendo le basi scientifiche e accademiche di una scuola, che avrebbe dominato la matematica italiana per oltre mezzo secolo.

La prima testimonianza dell'Enriques filosofo è affidata alle tre lettere che nel maggio 1896 rivelano all'incredulo interlocutore l'improvviso manifestarsi di quella «infezione filosofica»[49] che Enriques stesso dirà poi di aver contratto nel periodo liceale. Solo a partire dal 1905 Enriques farà qualche raro cenno alla fondazione della «Rivista di scienza» e alla pubblicazione del volume *Problemi della scienza*,[50] anche se temi di natura filosofica dovevano averlo occupato intensamente già da diversi anni.

Anche queste ultime considerazioni sul contenuto di questa corrispondenza ci consentono di concludere che essa è tutta finalizzata alla creazione della teoria delle superficie algebriche e si interrompe nel momento in cui questo obiettivo è stato sostanzialmente raggiunto. Il rapporto epistolare costituiva certo una componente fondamentale per l'attività creativa di entrambi i geometri. Forse l'abbandono da parte di Castelnuovo dell'attività di ricerca nel campo della geometria algebrica, sempre apparso inspiegabile, trova una parziale ragion d'essere proprio nel venir meno di questo rapporto, quasi che per il matematico veneziano fosse ormai diventato impossibile concepire la ricerca geometrica al di fuori del ruolo di guida critica che aveva esercitato nei confronti di Enriques per quasi quindici anni. Al tempo stesso cominciano ad affacciarsi in Castelnuovo nuovi interessi scientifici che finiranno per distoglierlo dal campo della geometria. Anche se Enriques continuerà ad affinare la classificazione delle superficie algebri-

cui Enriques riferisce di una conversazione avuta con Poincaré avente come oggetto la possibilità di dimostrare la non-razionalità dell'ipersuperficie cubica di $\mathbf{P}^4$ utilizzando degli invarianti topologici.

[49] L. Lombardo Radice, *Ritorno di Enriques*, in Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna 1982 (rist.), III.

[50] Enriques 1906c.

che sino all'estremo limite della sua vita, ci pare comunque che si possa affermare che anche per lui l'interruzione della corrispondenza con Castelnuovo segni il termine del periodo di maggior originalità creativa.

Nel pubblicare questo carteggio che riveste così numerosi motivi di interesse, il nostro intento è stato anzitutto quello di mettere a disposizione dei documenti, prima ancora che fornire una nostra interpretazione. L'apparato critico di note, indici e riferimenti bibliografici di cui lo abbiamo corredato, ha quindi un carattere fattuale e documentario ed è stato costruito con criteri il più possibile oggettivi. Invece di presentare le nostre congetture, abbiamo preferito rinviare, ogni volta che era possibile, agli articoli originali pubblicati da Enriques e Castelnuovo e dagli altri matematici citati. D'altra parte, talmente ricco è il contenuto matematico delle lettere che una loro analisi critica da questo punto di vista richiederà sicuramente lunghe e pazienti ricerche, alle quali ci auguriamo molti studiosi vorranno dedicarsi in futuro. Abbiamo comunque costruito l'insieme delle note usando un sistema di riferimenti incrociati che attraversano tutto il carteggio al fine di mettere in luce la dinamica delle ricerche di Enriques e Castelnuovo nel corso del tempo e di chiarire al lettore la trama della corrispondenza, la cui complessità è messa in evidenza dai numerosi temi di ricerca che vengono spesso enunciati in maniera incidentale per essere poi ripresi a distanza di tempo (a volte anni), oppure lasciati definitivamente cadere. E la pratica di entrambi di richiedere all'altro la restituzione di proprie lettere per vedere come era stato affrontato un particolare argomento conferma l'importanza che esse rivestivano agli occhi degli stessi autori e il ruolo di memoria storica delle proprie ricerche che essi vi attribuivano.

A conclusione del volume in cui aveva riassunto i risultati sulle superficie algebriche ottenuti nel corso di tutta la propria vita, e che fu pubblicato postumo nel 1949, Enriques scriveva:

> Cinquan'anni or sono s'iniziava in Italia lo studio di queste teorie, appena abbozzate dal genio di un precursore (Max Noether); allora, scherzando sulle difficoltà e le eccezioni che si incontravano da ogni parte, si soleva dire che, mentre le curve algebriche (già composte in una teoria armonica) sono create da Dio, le superficie invece sono opera del Demonio. Ora si palesa invece che piacque a Dio di creare per le superficie un ordine di armonie più riposte ove rifulge una meravigliosa bellezza.[51]

La via, spesso tortuosa e piena di ostacoli, che ha condotto alla scoperta delle armonie di cui parla Enriques ci viene ora rivelata in tutti i suoi particolari dalla stessa voce di coloro che l'hanno percorsa.

[51] Enriques, *Le superficie algebriche* cit., 464.

CRONOLOGIA

1865 Guido Castelnuovo nasce a Venezia il 14 agosto da Enrico ed Emma Levi.

1871 Federigo Enriques nasce a Livorno il 5 gennaio da Giacomo e Matilde Coriat.

1876 Caduta della destra e insediamento della sinistra con il governo di Agostino De Pretis.

1878 Il 9 gennaio muore il re Vittorio Emanuele II.
Il 7 febbraio muore il papa Pio IX.

1879 È approvata la legge che istituisce l'obbligo dell'istruzione elementare.

1884 Il 2 marzo Giovanni Battista Guccia fonda il Circolo Matematico di Palermo.

1885 Ha inizio la politica coloniale italiana con l'occupazione di Massaua.

1886 Castelnuovo si laurea in Matematica all'Università di Padova.
Nell'autunno ottiene un posto di perfezionamento all'Università di Roma dove segue le lezioni di Luigi Cremona.

1887 Da novembre Castelnuovo è assistente di Enrico D'Ovidio all'Università di Torino. Inizia la sua collaborazione scientifica con Corrado Segre.

1889 Pubblicazione delle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* di Castelnuovo.

1891 Pubblicazione delle *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie algebrica* di Castelnuovo.
Nell'estate Enriques, allievo della Scuola Normale Superiore di Pisa, si laurea in Matematica.

Il 1° novembre, in seguito a concorso, Castelnuovo è nominato professore straordinario di Geometria analitica e proiettiva all'Università di Roma.

1891-92 Enriques usufruisce di un posto di perfezionamento presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

1892 Nell'autunno Enriques ottiene un posto di perfezionamento all'Università di Roma. Ha inizio la sua collaborazione scientifica con Castelnuovo.

1893 Pubblicazione della memoria di Enriques *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* e della memoria di Castelnuovo *Sulla razionalità delle involuzioni piane*.
Nel mese di novembre Enriques si stabilisce a Torino per studiare con Segre.

1894 Il 20 gennaio Enriques viene incaricato dell'insegnamento di Geometria proiettiva e descrittiva con disegno all'Università di Bologna.

1894-95 Appaiono le litografie delle *Conferenze di geometria* di Enriques.

1895 Il 15 ottobre viene fondata la Mathesis, associazione per gli studi fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie.
Viene conferita a Castelnuovo la Medaglia d'Oro della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).

1896 Dopo la battaglia di Adua (1° marzo), la conseguente crisi del governo Crispi si conclude con l'insediamento del gabinetto presieduto da Antonio di Rudinì.
Nel luglio Castelnuovo sposa Elbina Enriques, sorella di Federigo.
Pubblicazione degli articoli: *Sulle superficie di genere zero* e *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* di Castelnuovo, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* di Enriques e *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* di Enriques e Castelnuovo.
Viene conferita a Enriques la Medaglia d'Oro della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).

1897 Il 1° gennaio, in seguito a concorso, Enriques è nominato professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Bologna.
Dal 9 all'11 agosto si tiene a Zurigo il primo Congresso Internazionale dei Matematici.
Il 24 giugno nasce Mario, primogenito di Castelnuovo.

Nell'autunno Enriques sposa Luisa Coen.
Castelnuovo pubblica l'articolo *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate su una superficie algebrica*.
Appare il primo volume del trattato *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Emile Picard e Georges Simart.
Nel dicembre appare la prima edizione a stampa delle *Lezioni di geometria proiettiva* di Enriques.

1898 6-7 maggio: rivolta a Milano e repressione da parte del generale Bava Beccaris.
Il 26 maggio Castelnuovo è promosso professore ordinario di Geometria analitica e proiettiva all'Università di Roma.

1899 Il 15 luglio nasce Maria, secondogenita di Castelnuovo.

1900 Il 29 luglio il re Umberto I è assassinato dall'anarchico Gaetano Bresci.
Dal 6 al 12 agosto si tiene a Parigi il secondo Congresso Internazionale dei Matematici.
Il 9 maggio nasce Alma, primogenita di Enriques.
Il 1° novembre Enriques è promosso professore ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Bologna.
Prima edizione delle *Questioni riguardanti la geometria elementare*, a cura di Enriques.
Appare il primo fascicolo del secondo volume del trattato *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Picard e Simart.

1901 Il 15 luglio Castelnuovo è nominato socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei.
Pubblicazione della memoria *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* di Enriques e Castelnuovo.

1902 Prima edizione a stampa delle *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* di Castelnuovo.
Il 2 agosto nasce Adriana, secondogenita di Enriques.

1903 Insediamento il 3 novembre del primo di una serie di governi presieduti da Giovanni Giolitti.
Il 27 settembre nasce Gino, terzogenito di Castelnuovo.
Prima edizione degli *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori* di Enriques, scritto in collaborazione con Ugo Amaldi.

1904 Dall'8 al 13 agosto si tiene a Heidelberg il terzo Congresso Internazionale dei Matematici.
Appare il secondo fascicolo del secondo volume del trattato *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Picard e Simart.

1905 Il 24 gennaio nasce Giovanni, terzogenito di Enriques.
A Castelnuovo (*ex aequo* con Cesare Arzelà) è conferito il Premio Reale dell'Accademia dei Lincei.
Pubblicazione degli articoli: *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* e *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sé stesse* di Enriques e *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* di Castelnuovo.

1906 Il 15 luglio Enriques è nominato socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei.
In settembre si tiene a Milano il primo Congresso della Società Filosofica Italiana fondata e presieduta da Enriques.
Prima edizione dei *Problemi della scienza* di Enriques.
In appendice al trattato *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Picard e Simart viene pubblicato l'articolo di Enriques e Castelnuovo *Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques*.

1907 Conferimento a Enriques e a Francesco Severi del Prix Bordin dell'Académie des Sciences di Parigi per la loro memoria sulla classificazione delle superficie iperellittiche.
Pubblicazione dell'articolo di Enriques *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*.
Pubblicazione nell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* dell'articolo *Prinzipien der Geometrie* di Enriques.
Enriques fonda la «Rivista di Scienza» (che nel 1910 prenderà il nome «Scientia») di cui è condirettore insieme a Eugenio Rignano.
A Enriques (*ex aequo* con Tullio Levi-Civita) è conferito il Premio Reale dell'Accademia dei Lincei.

1908 Dal 6 all'11 aprile si tiene a Roma il quarto Congresso Internazionale dei Matematici.
Il 21 aprile nasce Gina, quartogenita di Castelnuovo.
Pubblicazione nell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* dell'articolo *Grundeigenschaften der algebraischen Flächen* di Enriques e Castelnuovo.

1909-10 Negli «Acta Mathematica» viene pubblicato il *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* di Enriques e Severi, premiato col Prix Bordin.

1911 Nell'aprile si tiene a Bologna il quarto Congresso Internazionale di Filosofia organizzato da Enriques.
Castelnuovo viene eletto presidente della Mathesis.

1912 Pubblicazione di *Scienza e razionalismo* di Enriques e del primo volume delle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, edito da Enriques.

1913 Si tengono le prime elezioni a suffragio universale maschile.
Il 12 dicembre nasce Emma, quintogenita di Castelnuovo.

1914 Pubblicazione nell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* dell'articolo *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus* di Enriques e Castelnuovo.
Pubblicazione del secondo volume delle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, edito da Enriques, e delle due note lincee *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ di Enriques.

1915 Il 24 maggio l'Italia dichiara guerra all'Austria-Ungheria.
Pubblicazione del primo volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* di Enriques, scritto in collaborazione con Oscar Chisini.

1918 4 novembre: fine della guerra con la vittoria sull'Austria-Ungheria.
Il 4 aprile Castelnuovo è nominato socio nazionale dell'Accademia dei Lincei.
Enriques viene eletto presidente della Mathesis.
Prima edizione del trattato *Calcolo delle probabilità* di Castelnuovo.
Pubblicazione del secondo volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* di Enriques e Chisini.

1919 Costituzione dei Fasci di combattimento da parte di Benito Mussolini.

1921 Enriques assume la direzione della nuova serie del «Periodico di Matematiche».
In ottobre, su invito di Enriques, Albert Einstein tiene a Bologna una serie di conferenze sulla relatività.

1922 28 ottobre: marcia su Roma e avvento del partito fascista al potere.
Nel dicembre viene costituita a Bologna l'Unione Matematica Italiana di cui Salvatore Pincherle è il primo presidente.
Il 1° gennaio Enriques è comandato all'Università di Roma per l'insegnamento delle Matematiche complementari. Nella stessa data anche Severi ottiene il trasferimento all'Università di Roma sulla cattedra di Analisi algebrica.
Enriques pubblica il volume *Per la storia della logica*.

1923 Riforma dell'istruzione media e universitaria promossa da Giovanni Gentile.
Nel novembre viene istituito il Consiglio Nazionale delle Ricerche di cui Vito Volterra è il primo presidente.
Il 16 ottobre Enriques ottiene il definitivo trasferimento all'Università di Roma sulla cattedra di Geometria superiore.
Castelnuovo pubblica il volume *Spazio e tempo secondo le vedute di Albert Einstein*.

1924 A seguito dell'assassinio di Giacomo Matteotti (10 giugno) l'opposizione abbandona la Camera dando vita al cosiddetto Aventino.
Pubblicazione del terzo volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* di Enriques e Chisini.

1925 Il 3 gennaio Mussolini annuncia alla Camera l'instaurazione della dittatura.
Il 22 agosto Enriques è nominato socio nazionale dell'Accademia dei Lincei.
Seconda edizione, in due volumi, del trattato *Calcolo delle probabilità* (vol. 1) di Castelnuovo.
Pubblicazione di *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna* (libri I-IV), editi da Enriques.

1926 Nel gennaio viene istituita la Reale Accademia d'Italia.

1928 Pubblicazione del *Calcolo delle probabilità* (vol. 2) di Castelnuovo.
Al Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna Castelnuovo tiene la conferenza *La geometria algebrica e la scuola italiana*.

1930 Pubblicazione di *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna* (libri V-IX), editi da Enriques.
Appaiono i primi articoli di Enriques nell'*Enciclopedia Italiana*.

1932 Edizione litografata delle *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* di Enriques, raccolte da Luigi Campedelli.
Pubblicazione di *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna* (libro X) editi da Enriques e della *Storia del pensiero scientifico* di Enriques e Giorgio De Santillana.

1934 Pubblicazione del quarto volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* di Enriques e Chisini.

1935 Nel febbraio viene approvato il nuovo statuto dell'Accademia dei Lincei.
Pubblicazione di *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna* (libri XI-XIII), editi da Enriques.
Castelnuovo si ritira dall'insegnamento per raggiunti limiti d'età.

1935-36 Guerra di Etiopia.

1937 Pubblicazione del *Compendio del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni* di Enriques e De Santillana.
Pubblicazione del volume *Memorie scelte* in occasione del giubileo scientifico di Castelnuovo.

1938 Nel luglio viene pubblicato il *Manifesto della razza* cui fanno seguito in settembre e novembre le leggi razziali. Vengono banditi dalle scuole e dalle università i professori ebrei e i testi di autori ebrei. Enriques viene espulso dall'Università e Severi si trasferisce sulla sua cattedra.
Pubblicazione delle lezioni di Enriques *Le matematiche nella storia e nella cultura* a cura di Attilio Frajese.

1939 Nel giugno avviene la fusione dell'Accademia dei Lincei con la Reale Accademia d'Italia.
Severi fonda l'Istituto Nazionale di Alta Matematica.
Sotto il solo nome di Fabio Conforto appare il volume *Le superficie razionali* scritto da Enriques in collaborazione con l'allievo.

1940 10 giugno: l'Italia entra in guerra a fianco della Germania.

1943 25 luglio: crollo del regime fascista, subentra il governo del maresciallo Pietro Badoglio.
13 ottobre: il governo Badoglio dichiara guerra alla Germania.
16 ottobre: retata degli ebrei a Roma.

1944 4 giugno: liberazione di Roma.
5-7 novembre: riunione della Commissione di Anziani Lincei, tra i quali Castelnuovo, per la ricostituzione dell'Accademia, secondo le regole precedenti il 1935.
In dicembre viene soppressa la Reale Accademia d'Italia.
Castelnuovo è nominato commissario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

1945 25 aprile: il Comitato di Liberazione Nazionale dell'Alta Italia dichiara di assumere tutti i poteri civili e militari.
29 aprile: capitolazione delle truppe tedesche in Italia.

1946 Enriques muore a Roma il 14 giugno.
13 dicembre: Castelnuovo è nominato presidente dell'Accademia dei Lincei.

1949 Castelnuovo è nominato senatore a vita per altissimi meriti nel campo scientifico.
Edizione postuma a cura di Castelnuovo del trattato *Le superficie algebriche* di Enriques.

1952 Castelnuovo muore a Roma il 27 aprile.

1956-66 Pubblicazione in tre volumi delle *Memorie scelte di geometria* di Enriques.

NOTA AL TESTO

I primi contatti con Emma Castelnuovo sono stati avviati nel 1990 da Paola Gario nell'ambito di alcune ricerche di carattere storico sulla scuola di geometria algebrica italiana, tra le cui finalità era il reperimento di fonti documentarie sconosciute o inadeguatamente valorizzate. A partire da quella data, Emma Castelnuovo ha messo a disposizione l'intera corrispondenza[1] di suo padre dando il consenso a progetti che ne prevedessero la pubblicazione.

Il fondo consiste di oltre 1300 missive, la maggior parte delle quali si colloca in un arco temporale compreso tra il 1886 e il1906, mentre più rare sono le lettere degli anni successivi. Tutto il materiale è in buono stato di conservazione ed è ora ordinato per corrispondente e data. Fatta eccezione per un certo numero di missive di carattere strettamente personale, le lettere sono perlopiù di matematici italiani e stranieri[2] e concernono quasi esclusivamente l'attività scientifica e accademica di Castelnuovo, mentre non vi sono cenni significativi alla situazione politica e sociale del paese.

In particolare la corrispondenza di Enriques con Castelnuovo consta di 670 lettere,[3] scaglionate tra il 1892 e il 1914, ma per la maggior parte (655) concentrate nel periodo 1893-1905. Il carteggio si apre con una missiva del 6 novembre 1892 in cui Enriques comunica l'esito positivo del concorso

[1] Una copia fotostatica della corrispondenza è conservata da Paola Gario, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi, via Saldini 50, 20133 Milano.

[2] Spiccano, per l'entità e l'importanza della documentazione conservata, i nomi di Eugenio Bertini (185 lettere), Luigi Cremona (21), Gino Fano (60), Corrado Segre (273), Giuseppe Veronese (30) e, tra i corrispondenti stranieri, Max Noether (18) e i matematici francesi Georges Humbert (2), Emile Picard (11) e Léon Autonne (3).

[3] In una prima fase della ricerca ne erano state ritrovate circa 400, perlopiù antecedenti il 1900. Una esplorazione successiva nell'archivio Castelnuovo ha portato alla luce le restanti.

per un posto di perfezionamento e informa di essere stato destinato a Roma. Dopo una lettera dello stesso mese, in cui egli annuncia la sua partenza per Roma, la corrispondenza si interrompe sino al marzo 1893, allorché il tono appare ormai familiare, per poi riprendere nel giugno. A partire da questo mese il flusso epistolare diviene costante e, come si può vedere dall'Elenco cronologico posto al fondo del volume, ha in vari periodi un ritmo addirittura giornaliero.

La corrispondenza può essere considerata pressoché completa. La perdita di alcune missive e, in un paio di casi, di allegati è talora evidente dal contesto, ma si tratta di lacune di modesta entità che non interrompono la continuità della documentazione. Grave è invece la dispersione delle responsive di Castelnuovo; le uniche otto superstiti, conservate dallo stesso Castelnuovo, sono state inserite nel carteggio secondo l'ordine cronologico.

Le lettere di Enriques, conservate senza busta, si presentavano ripiegate e raccolte in sei buste recanti le seguenti annotazioni di pugno di Guido Castelnuovo:

Enriques. Sino a ottobre 93
Enriques. Anno nov. 93-94
Enriques giugno 94-giugno 95
Ghigo ottobre 95-giugno 96
Lettere Ghigo 1896-1898
Lettere Ghigo. Novembre 1904-Febbraio 1905

e in tre buste con le annotazioni di Emma Castelnuovo:

Enriques
Enriques 1905, 6, 12, 19
Enriques 1906

La corrispondenza relativa ai primi anni era abbastanza ordinata, meno quella degli anni successivi. In particolare, la busta *Enriques* raccoglieva lettere di quasi tutti gli anni, oltre alle lettere dello stesso Castelnuovo. A volte si è reso necessario ricomporre una singola missiva da fogli che si trovavano dispersi in buste diverse: cfr. nn. 287, 318, 404, 421, 422, 463, 469, 477, 484, 631. Non è stato invece possibile completare le lettere 228, 347, 460, oltre a un frammento di Castelnuovo del 1895.

Le missive di Enriques sono tutte autografe, vergate con inchiostro nero, su carta comune non intestata, in genere di piccolo formato (talora fogli rigati o quadrettati e, in alcuni anni, anche fogli listati a lutto). I pochissimi casi di lettere scritte su carta intestata (sempre d'albergo) sono stati

segnalati in nota, riportando l'indirizzo nel testo, insieme alla data, come se fosse autografo.

La grafia di Enriques, alquanto disordinata e irregolare, con una caratteristica tendenza ad alzarsi e abbassarsi sul rigo, presenta spesso correzioni e cancellature e nulla concede alle esigenze dell'estetica. In compenso non pone particolari problemi di decifrazione, salvo che per le espressioni matematiche e in alcune cartoline postali, in cui la scrittura si fa più minuta dato il loro piccolo formato (cm 9 × 14). In sostanza, le difficoltà maggiori sono date dalla scarsa differenziazione tra minuscole e maiuscole, quando si tratta della lettera iniziale di una parola non posta in apertura di frase, e dall'incerta evidenziazione dei capoversi. Quanto poi alle scritture matematiche, le difficoltà dipendono soprattutto dalla grafia non sempre precisa dei numeri (ad esempio non vi è distinzione grafica tra « ′ » e « 1 »), dall'allineamento e dalla spaziatura irregolari delle varie parti di una formula, tali a volte da renderle di non immediata interpretazione, e dalla punteggiatura molto scarsa.

Tutti questi problemi sono stati risolti mediante ripetute collazioni con gli originali, e talora in base ai riscontri forniti dal carteggio o dai lavori a stampa. Lezioni dubbie o non decifrabili, nonché cancellature, correzioni, lapsus calami e altre peculiarità grafiche, sono state segnalate in nota quando rilevanti per la comprensione del testo. Curioso, ad esempio, il caso di un lapsus calami ripetuto più volte nelle lettere del 1905, quando Enriques e Castelnuovo erano già da molti anni in rapporto non solo di amicizia cordiale ma anche di parentela: vale a dire il ritorno alla firma ufficiale con nome e cognome («F Enriques» o «F E»), poi cancellata e sostituita con il consueto e familiare «Ghigo».

Le lettere, come si è detto, sono state conservate senza la loro busta. Ciò ha reso più complesso inquadrare cronologicamente le missive prive di data, quando questa non è stata aggiunta da Castelnuovo, di solito a penna con inchiostro blu o a matita, presumibilmente in base al timbro postale. Quest'ultimo ha consentito di risolvere anche gli occasionali problemi di datazione relativi alle cartoline postali (i casi dubbi sono stati segnalati in nota).

La presente edizione si fonda su una trascrizione degli originali eseguita sulla base di fotocopie e di nuovo collazionata con gli autografi.

La corrispondenza è pubblicata nella sua interezza con l'unica eccezione di una lettera di carattere strettamente confidenziale in cui Enriques annunciava il suo fidanzamento. Minime anche le omissioni nel corpo delle singole lettere: in sostanza, pochi passi di semplici saluti e auguri a familiari.

Di tali omissioni, segnalate nel testo con l'inserzione di una serie di tre punti racchiusi tra parentesi quadre, si è indicata in nota l'entità.

A parte la correzione di pochi errori materiali, troppo evidenti per aver bisogno di essere rilevati, le lettere sono riprodotte conformemente agli originali, secondo un criterio conservativo coerente ma non rigido – un criterio, cioè, inteso a conciliare le esigenze del rigore filologico con quelle di una piana fruibilità del materiale.

Si sono rispettate tutte le caratteristiche grafiche del testo: variazioni nell'uso delle maiuscole e delle minuscole o nella grafia di una stessa parola (principi/principii/principî; sopratutto/soprattutto); usi tipici dell'epoca o dello scrivente in vocaboli e locuzioni particolari (in quantoché, ossennò, qualchecosa, salvoché); oscillazioni nella grafia di alcuni cognomi (Noether/Nöther, Rajna/Raina; ma si è fatta eccezione per Levi-Civita e Mittag-Leffler, che sono stati sempre trascritti in questo modo anche quando nell'originale non compare il trattino). In particolare si noti che per il plurale di «superficie» si è conservata l'oscillazione tra l'iniziale «superfici» e il successivo (e poi non più modificato) «superficie», adottato da Enriques su segnalazione di Corrado Segre (cfr. let. 6, 21.6.1893). Rispettata anche la punteggiatura assai sobria e oscillante, tranne in pochi luoghi in cui si trattava di senso non dubbio, ma non immediato.

Si è normalizzato invece l'uso degli accenti e si è provveduto a ristabilirli nei rari casi in cui erano stati dimenticati. Per converso, in conformità all'uso di Enriques nelle opere a stampa, essi sono stati eliminati nei monosillabi «fa», «no», «qua», «qui», «so», «sta», «sto», «va» ecc., oltre che nell'avverbio «insieme», mentre «mò» e «pò» sono stati corretti in «mo'» e «po'» e «qual'è» in «qual è», sempre sull'esempio delle scelte compiute da Enriques nei testi più sorvegliati.

Infine le sottolineature di pugno dello scrivente sono state evidenziate col corsivo.

Per rendere più spedita la lettura, si sono sciolte le numerose abbreviazioni che, secondo la consuetudine epistolografica del tempo, costellano il testo delle lettere. Tali supplementi, come ogni altro intervento dei curatori, sono stati racchiusi tra parentesi quadre. Si è fatta però eccezione per alcune scritture abbreviate di uso frequentissimo e di non ambigua interpretazione, sostituite tacitamente con le corrispondenti scritture estese: «mnscr» svolto in «manoscritto(i)»; «$\int^c$», «$\int^i$», «$\iint$», «lo $\int^c$» svolti in «integrale(i)», «integrale doppio», «l'integrale»; «∞tà», «∞mente», «∞simo(i)», «all'∞» svolti in «infinità», «infinitamente», «infinitesimo(i)», «all'infinito». Il simbolo ∞ è stato peraltro conservato quando ha valore di aggettivo numerale e quando compare nell'espressione «∞ vicini»; in quest'ultimo

caso però se ne è fornito il corrispettivo verbale («infinitamente vicini») tra parentesi quadre. Analogo trattamento è stato riservato al simbolo =, reso all'occorrenza con «uguale», «stesso» (e anche in questo caso l'equivalente è dato tra parentesi quadre).

Le abbreviazioni sono state invece mantenute se sottintendono una intenzionalità specifica o compaiono nelle formule di saluto («aff.mo» per «affezionatissimo»), nonché in alcuni altri casi particolari in cui sono comuni anche nell'uso corrente. Ad esempio sono state conservate le scritture sintetiche: cap., c.d.d., ecc., pg., prof., P.S., sen., sig., sig.na, sig.ra, vol. (nell'originale quasi sempre prive del punto). E inoltre la serie: «1°», «1ª», «1ᶜ» ecc., salvo quando il mantenimento dell'abbreviazione avrebbe ostacolato l'immediatezza della lettura (ad esempio quando «1ª» viene usato con valore di avverbio di tempo: «come 1ª ti dicevo»).

Le date delle lettere sono indicate negli originali in forma assai variabile, perlopiù sommaria, spesso totalmente numerica; rara la precisazione del luogo, che però, quando è presente, è spesso accompagnata dall'indirizzo. Il modello prevalente è quello sintetico in cifre, con l'abbreviazione dell'anno: «21/3/99» oppure, caso meno frequente, «12/IV/99»; non mancano però esempi di date complete di ogni elemento (luogo compreso), con l'indicazione del mese espressa in lettere (sempre con l'iniziale maiuscola), talora in forma estesa, più spesso abbreviata («Gen.», «Feb.» ecc., ma anche, in un caso, «8bre»). Quanto alla collocazione, essa è assai oscillante: ora in testa, ora in calce, ora (soprattutto nelle lettere del 1905) tra la formula di saluto o di congedo e la firma.

Per ragioni di chiarezza grafica, è parso opportuno normalizzare queste oscillazioni in base a un modello di formulazione e di impaginazione standard. Si è così provveduto a integrare, nelle cartoline postali (in base al timbro), l'indicazione del luogo di provenienza; a esprimere in lettere e per esteso le indicazioni numeriche del mese o a sciogliere quelle fornite in lettere ma in forma abbreviata; a restituire l'indicazione intera dell'anno nei casi, frequentissimi, di abbreviazione alle ultime due o (più di rado) tre cifre; e a collocare la data così ottenuta, insieme ad ogni altra eventuale precisazione (giorno della settimana, ora, indirizzo ecc.), in testa alla missiva, con allineamento a destra, indipendentemente dalla posizione in cui essa figura nell'originale. Infine si ricordi che nelle indicazioni del mese l'iniziale maiuscola è sempre e solo dell'originale, mentre la minuscola contraddistingue i casi di svolgimento di un'indicazione espressa nell'autografo in cifre. In questi ultimi casi si è altresì adottata la forma corrente «dicembre», conservando la variante antiquata «Dec(embre)», caratteristica di Enriques, nelle indicazioni espresse in lettere.

L'ordine di successione dei vari componenti della data e la punteggia-

tura sono di norma conformi agli autografi. Tutte le integrazioni di elementi mancanti o di abbreviazioni sono racchiuse tra parentesi quadre.

Analogo trattamento grafico è stato riservato alle formule di congedo e ai poscritti: le une, mantenute identiche all'originale, di cui conservano le abbreviazioni e la punteggiatura (spesso variabile anche in formule di identico tenore), sono impaginate con i saluti a sinistra e la firma a destra; gli altri, contrassegnati con la sigla [P.S.] quando questa non compaia nell'originale, risultano collocati sempre al fondo della lettera, dopo la firma.

Sono stati eliminati sistematicamente i salti di riga e i tratti di penna che negli autografi talvolta separano due capoversi per scandire il passaggio da un argomento all'altro (soprattutto dalle questioni matematiche o accademiche alle vicende familiari). Sono stati invece rispettati, per quanto possibile, i capoversi originali, la cui indicazione da parte dello scrivente, come si è accennato, non è sempre inequivocabile.

Le postille marginali che compaiono talvolta nelle lettere sono state inserite nel testo, tra doppie parentesi tonde, quando facilmente integrabili; sono state invece poste in calce, con asterischi di richiamo, quando per il loro carattere di digressioni o simili non si sarebbero prestate a essere sussunte nella continuità del testo base.

Il sistema di scrittura matematica ricalca, come è ovvio, quello adottato da Enriques e che in parte si riscontra anche negli articoli a stampa. A questi, ad esempio, ci si è uniformati nel mantenere notazioni come $f(x\ y\ z)$, $F(x\ y\ z)$ ecc. in luogo di quelle oggi più diffuse $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ ecc. A fini di chiarezza, si è provveduto però a normalizzarne l'uso in base alle convenzioni grafiche e tipografiche correnti stampando in carattere corsivo tutti i simboli alfabetici indicanti variabili, costanti, insiemi, spazi ecc., anche quando non evidenziati nell'originale mediante sottolineatura. Per il resto sono state fedelmente rispettate tutte le variazioni di scrittura e l'uso oscillante delle notazioni, quali ad esempio $[m\ n]$, $[m, n]$, $[m.\ n]$, $(m\ n)$, utilizzate da Enriques per denotare le trasformazioni $[m, n]$. Nell'espressioni matematiche ci si è rigorosamente attenuti alla sobrietà di punteggiatura del testo autografo, anche quando la prassi corrente avrebbe richiesto segni di interpunzione: ad esempio «$1 \ldots n$», «$1, \ldots n$» invece della scrittura usuale «$1, \ldots, n$». Per esigenze di chiarezza si è però adottata la scrittura «n-esimo», «r-esimo» ecc. in luogo di «n^o», «r^o» ecc., e «2-plo», «n-plo», «k-plo» ecc. in luogo di «2plo», «$n$plo», «$k$plo» ecc. Infine, salvo rare eccezioni, anche le formule matematiche sono state impaginate su riga a sé o nel testo in conformità al modello originale, di cui riproducono anomalie e incoerenze: ciò per dar conto anche graficamente del procedere non sempre rettilineo di un ragionamento in via di elaborazione.

Per quel che riguarda il corredo critico, si noti quanto segue.

Le lettere di Enriques sono contrassegnate da un numero arabo progressivo lungo tutta la corrispondenza, posto in alto a sinistra e seguito dalla sigla [c. p.] quando il documento in questione è una cartolina postale. Le lettere di Castelnuovo invece non sono state numerate, mentre sono numerate a parte quelle raccolte in Appendice.

Per non appesantire eccessivamente il testo, si è accompagnata la trascrizione delle lettere con un apparato di note limitato agli aspetti informativi essenziali: si chiariscono precedenti e circostanze delle lettere o il significato di singoli passi; si segnalano eventuali perdite di missive; si forniscono, quando necessario alla comprensione del testo, cenni biografici sui personaggi menzionati, precisandone la relazione con Enriques all'epoca della lettera; si dà conto di questioni testuali di qualche rilievo (presenza nell'originale di lacune, cancellature e correzioni, problemi di decifrazione, casi di ricomposizione dubbia di lettere ecc.); si identificano i lavori (a stampa o manoscritti) cui si allude nel testo in forma sommaria; si traccia una rete di riferimenti incrociati all'interno dell'intera corrispondenza. In particolare si ricordi che, quando un argomento è trattato in un gruppo di lettere consecutive, la nota esplicativa è stata posta nella prima lettera del gruppo e non è stata ripetuta nelle successive.

Una Bibliografia alla fine del volume raccoglie i dati completi delle opere e degli articoli di Enriques, Castelnuovo e altri autori citati nelle note con la sola indicazione del cognome e dell'anno di pubblicazione. Nel caso di scritti comparsi su periodici e poi raccolti in volume, i rinvii di pagina sono a quest'ultima edizione.

Infine si è posta in Appendice, con funzione documentaria e senza ulteriori note esplicative, una serie di lettere indirizzate a Castelnuovo da vari matematici italiani e stranieri, alle quali si fa allusione nella corrispondenza (si veda in particolare il carteggio completo di Autonne, Humbert e Picard).

Abbreviazioni e segni convenzionali utilizzati

c. p.	cartolina postale
let.	lettera
s. d.	senza data
[...]	omissioni editoriali di un tratto di testo
[ ]	inserzioni editoriali e integrazione di una o più lettere in parole che compaiono nell'originale in forma abbreviata
[−]	parola illeggibile nell'originale
[+]	lacuna nell'originale presumibilmente di una parola
[+ + +]	lacuna indeterminata nell'originale

RIPOSTE ARMONIE

Çinquant'anni or sono (...) si soleva dire che, mentre le curve algebriche (già composte in una teoria armonica) sono create da Dio, le superficie invece sono opera del Demonio. Ora si palesa invece che piacque a Dio di creare per le superficie un ordine di armonie più riposte ove rifulge una meravigliosa bellezza.

F. Enriques, *Le superficie algebriche*, Bologna 1949, p. 464

La via delle superficie come quella dei cieli, è seminata di spine.

Enriques a Castelnuovo, 20 ottobre 1894

1.

6 Novembre [18]92

Carissimo Professore

Quando ci vedemmo a Firenze (or son pochi giorni) Ella mi espresse il desiderio gentile di essere informato del resultato del mio concorso pel posto di perfez[ionamen]to. Sono lieto di poterle dire ora che tale posto mi è stato conferito.

Come Le avevo detto io chiesi di essere destinato a Torino, ma pare che il consiglio sup[eriore] abbia disposto invece ch'io vada a Roma.[1] Mentre sono dolente di non poter passare l'anno venturo col prof. Segre, sono sicuro di poter avere in Lei un'ottima guida e confido nella di Lei gentilezza per ottenere da Lei quegli utili consigli che il prof. Segre era gentilmente disposto a darmi. Per questa ragione, non potendo andare a Torino, la destinazione che (secondo almeno ciò che mi si è detto) mi è stata data, mi riesce gradita più di ogni altra.

Intanto per non perdere il piacere di far la conoscenza del prof. Segre mi reco domani a Torino, e passerò ivi qualche settimana. Se Le occorre qualche cosa in quella città mi scriva pure (fermo in posta), ch'io sarò ben lieto se mi si presenterà l'occasione di esserle utile. Così non farei che contraccambiare, in scarsa misura, tutte le gentilezze da Lei usatemi e di cui (creda pure) Le sono gratissimo.

Saluti dal Suo Dev.mo

F Enriques

[1] Come ricordava Castelnuovo nella sua commemorazione dell'amico, Enriques, «un giovane non ancora ventiduenne, che si era laureato a Pisa l'anno precedente», «nel novembre del 1892 venne a Roma per seguire il corso di Luigi Cremona, come studente di perfezionamento» (in Enriques 1956-66, I, IX).

2.

9 Novembre [18]92
Torino - Via Ormea 12

Carissimo Professore

Non so proprio come rispondere alla Sua lettera infinitamente gentile ed esprimerle tutta la mia gratitudine. Io accolgo di cuore le Sue cortesi offerte, perché venendo a Roma, confido (come Le dissi) specialmente nel prezioso consiglio e nella guida di Lei, giacché in Lei si trovano appunto riunite quelle doti che mi muovevano a ricercare l'ottimo prof. Segre, la gioventù ed il merito; quest'ultima qualità (me lo lasci dire senza offesa alla Sua modestia) di gran lunga maggiore.

A Torino ho trovato il prof. Segre (cui avevo già scritto prima per accertarmi che fosse qua), del quale ho fatto quindi la desiderata conoscenza: non Le dico quanto egli sia stato buono e gentile per me, giacché a Lei la gentilezza del Suo affezionatissimo amico è ben nota, e per la stessa ragione non Le dirò neppure con quanto affetto mi abbia parlato di Lei.

Ho veduto un momento ieri sera il Chini e il Campetti ed ho fatto loro i Suoi saluti, oggi poi li vedrò con più comodo al Bergia.

Avanti di venire a Roma glie lo scriverò come appunto Ella mi dice.

Le rinnovo vivi ringraziamenti e spero presto di poterla rivedere e godere la Sua ottima compagnia, che il Segre, ed a ragione, mi invidia.

Disponga di me liberamente se in qualche cosa possa esserle utile.

Mi tratterrò qua probabilmente alcune settimane, cioè fin verso la fine del mese. Spero di vedere presto anche il prof. D'Ovidio che fui a cercare ieri, ma inutilmente.

Saluti affettuosi

dal Suo Dev.mo
F Enriques

3.

Firenze 25 Novembre [18]92

Carissimo Professore

Come Le avevo promesso, Le faccio noto che arriverò a Roma Domenica mattina alle 7,25 salvo casi imprevisti. Nella mattina mi prenderò la libertà di venire a casa Sua (Via Palermo 8) e da Lei spero anche di avere alcune indicazioni utili per fissare la mia residenza.
Ella scuserà il disturbo.

Intanto La saluto sperando di rivederla presto.

Suo Dev.mo
Federigo Enriques

4. [c. p.]

Venerdì [31 marzo 1893]
Firenze - P^a Cavour 10

Carissimo

Ti mando, come eravamo rimasti d'accordo, gli ultimi fogli del mio lavoro:[1] ho tardato un po' perché mi sono preso qualche giorno di svago qui a Firenze.

Ho veduto la memoria di Picard, dove il teorema dato per le superfici con ∞^2 trasformazioni in sé[2] non è così completo come quello che mi sembra si possa stabilire. Se le trasformazioni non sono permutabili vi è una rete di curve raz[ionali] o ellit[tiche] e ciò deve portare la razionalità della sup[erficie]. Ma se le trasf[ormazioni] son perm[utabili] Picard stabilisce soltanto che le coordinate sono funz[ioni] 4 v[olte] periodiche ecc., e quindi potrebbe anche essere il genere $= 1$. Ora è precisamente in questo caso che mi pare aver stabilito con maggiore semplicità che negli altri (pei quali sono ancora incerto) la razionalità delle sup[erficie]. Mi riserbo però a parlartene a Roma dopo averci pensato meglio.

Oggi a[lle] otto vado a Pisa e arriverò a Roma Domenica. Ci vedremo a Firenze?

Intanto ricevi gli affettuosi saluti

del tuo
F Enriques

[1] Enriques 1893a, presentato da Luigi Cremona all'Accademia dei Lincei il 21 maggio 1893.
[2] Picard 1889, cap. 3, § 3.

5.

Domenica 18 giugno [18]93

Carissimo Guido

Non ho veramente grandi novità da raccontarti, ma voglio nondimeno mandarti un saluto.

Non ho trovato qui Bigiavi il quale è in campagna e così mi troverò in una grande solitudine durante il mio soggiorno a Firenze. Non c'era bisogno di questo perché io rammaricassi la tua compagnia, quella compagnia d'un amico che godevo come un bene che si possiede e di cui non ci si accorge per l'abitudine.

Hai cominciato gli esami? e quando credi che sarai libero?

Il Bertini non mi ha ancora risposto: nemmeno ho ricevuto gli estratti della mia nota[1] dall'Acc[ademia] dei Lincei.

Avevo cominciato a pensare alla superficie di genere 0 con soli punti multipli. Mi si è presentata una difficoltà imprevista: quando sopra una superficie F_n si ha un sistema segato da F_m, si può dire che il sistema aggiunto a questo sia segato dalle F_{m+n-4} che hanno come $(i+j-2)$-plo un p[un]to i-plo per F_n, j-plo per F_m? Difatti il Noether[2] dimostra soltanto che le F_{m+n-4} che si comportano in quel modo rispetto alle curve sezioni, segano la $g^{\pi-1}_{2(\pi-1)}$ completa: è dunque lecito dubitare che colle F_{m+n-4} a cui si impone come $(i+j-2)$-plo un p[un]to i-plo, j-plo risp[ettivamente] si ottenga soltanto una *parte* del sistema aggiunto. Un esempio mi sembra giustificare questo dubbio. Si prenda la F_5 con 4 p[un]ti 3-pli: le quadriche pei p[un]ti 3-pli danno sezioni di genere 8, ed invece le F_3 con quei 4 p[un]ti come 2-pli sono $\infty^{19-16} = \infty^3$.

Così stando le cose vedi bene che non vi è per ora speranza di poter compiere la dimostrazione della razionalità delle sup[erficie] di gen[ere] 0 con soli p[un]ti multipli nel modo che io l'avevo disegnata.

È singolare però che l'inconveniente sopra osservato non si presenta più se il genere è >0. Per esempio nel caso del genere 1 ho pensato che forse si potrebbe trar profitto da quelle superficie con soli p[un]ti multipli per costruire superficie negli spazi superiori irreducibili fra loro (sebbene particolari).

Addio, affettuosi saluti

dal tuo amico
Federigo Enriques

PS. Rammentami anche a Luzzatti e Ancona: scrivo a Reina che suppongo tornato a Roma.

I tuoi Zii sono a Castello; vidi qua tuo Zio alla Banca e gli feci l'ambasciata di tuo Zio di Roma, non potei fargliela la sera stessa del mio arrivo sebbene fossi andato a casa sua, perché appunto egli era a Castello.

Di nuovo affettuosi saluti.

Se ti dicessi che mi sono dimenticato il tuo indirizzo? (Via Principe Amedeo N° ?)

[1] Enriques 1893a.
[2] Noether 1875.

6.

Mercoledì [21 giugno [18]93][1]

Carissimo

Mi dispiace del disturbo che hai in famiglia e spero si tratti di cosa passeggera: anche egoisticamente mi rincresce di perdere la tua compagnia che

mi riprometteva almeno per una mezza giornata; se però tu passi di qua anche per poche ore e me lo avvisi troverò modo di vederti almeno un momento alla stazione se tu vai direttamente a Castello.

Dopo averti scritto mi accorsi anch'io che il mio esempio era sbagliato: avevo fatto il conto così «la sezione d'una quadrica con una F_5 (generale) è di genere 20 (∞^{19} F_3 aggiunte), vi sono 4 p[un]ti 3-pli che diminuiscono il gen[ere] di 12: insomma non avevo tenuto conto di quante F_3 passano pei p[un]ti sezione colla C».

Ciò posto la questione si riduce a questa: il sistema segato da tutte le superficie di dato ordine con date molteplicità nei p[un]ti multipli isolati d'una superficie è normale? Mi pare di potere stabilire di sì, ma vi è una difficoltà curiosa, cioè la dimostrazione non va più quando quelle superficie mancano, eppure si deve vedere che allora il sistema prec[eden]te (di cui esse segherebbero l'aggiunto) è di curve razionali. Nonostante spero di vincere queste difficoltà e di condurre in porto la cosa; ho fatto parecchi esempii di F_5 e si viene al resultato, anzi se si aggiunge un p[un]to multiplo di più sicché il genere sia negativo si trasforma la F_5 in una rigata; anche questo sarebbe interessante se si potesse vedere in generale per le F_n con soli p[un]ti multipli (di cui un gruppo darebbero il gen[ere] 0). Lo studio delle sup[erficie] con soli p[un]ti 3-pli è troppo limitato perché un p[un]to 3-plo (in data posizione) porta 10 condizioni per una superficie, e quindi se l'ordine è assai grande una sup[erficie] di gen[ere] 0 non può aver solo p[un]ti 3-pli.

Ciò che mi dici sulla sup[erficie] di Enneper[2] mi sembra una ricerca interessante; ti ricordi che se n'è parlato un'altra volta. È strano che per una sup[erficie] tanto studiata non si sia fatta una ricerca che sembra la 1ª da farsi per essa.

Ho ricevuto una lunga lettera da Segre: pare che il mio lavoro[3] non gli sia dispiaciuto, ma mi fa molte vive raccomandazioni riguardo alle correzioni da fare; però le poche osservazioni che egli mi ha segnato mi sembrano di poca entità ed alcune anzi provenienti da poca chiarezza d'esposizione. Egli non ha trovato nulla del genere di quello che io gli ho comunicato nei giorni passati. Mi appunta anche che il plurale di superficie è superfi*cie*!

Dal Bertini ho ricevuto una gentilissima cartolina: ha cominciato a vedere il mio lavoro[4] e per ora lo trova chiaro; mi dice che se avrò pronto un lavoretto prima del 20 Luglio glie lo dia per l'Ist[ituto] Lomb[ardo] (io gli avevo accennato alle ricerche sulle sup[erficie] di gen[ere] 0 con p[un]ti multipli).

Avrai ricevuto la mia 1ª nota.[5]

Ti vorrei chiedere un favore. Ho lasciato in casa tua (dalla padrona) un girello d'argento (porta tovagliolo) colle mie cifre (FE): potresti domandarne alla padrona e se mai portarmelo se vieni o altrimenti spedirmelo?

Grazie anticipate.

Addio un'affettuosa stretta di mano

dal tuo amico
Federigo Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Cfr. Enneper 1864.

[3] Il lavoro in questione è una prima versione di Enriques 1893f.

[4] Enriques 1893g: questo articolo costituì la tesi per l'abilitazione all'insegnamento che Enriques conseguì nel luglio 1893. Cfr. anche la lettera di Eugenio Bertini a Castelnuovo del 14 luglio 1893, riportata in Appendice (p. 653).

[5] Enriques 1893a.

7.

[23 giugno [18]93][1]

Carissimo Guido

Non mi riesce di vedere che le sup[erficie] aggiunte (lin[earmente] ind[ipendenti]) all'intersezione $C_{m\cdot n}$ di F_m, F_n (con soli p[un]ti multipli) sono $\pi + p_m + p_n$ (dove p_m, p_n sono i gen[eri] numerici di F_m, F_n risp[ettivamente]). A parte che il conto non mi torna (il che attribuisco a mio errore) c'è la difficoltà della valutazione di π, poiché gli incontri delle F_{m+n-4} colla $C_{m\cdot n}$ sono $2(\pi - 1)$ soltanto se non vi è alcuna retta comune alle F_{m+n-4} e alla F_n (o F_m). Escludere questo caso è mandar via la maggior parte delle sup[erficie] di gen[ere] 0 con p[un]ti multipli (e forse tutte); così per esempio tutte quelle di 5° e 6° ordine. Però ho pensato che mi conviene di più trattare collo stesso metodo le sup[erficie] di gen[ere] 0 che hanno un p[un]to 3-plo *toglibile*, cioè si ottengono da una sup[erficie] di gen[ere] 1 coll'aggiunta di un p[un]to 3-plo. Ho così a fare con una classe di superficie molto più vasta e pervengo al resultato più semplicemente ed elegantemente. Infatti considero i successivi sistemi aggiunti di quello delle sezioni piane prescindendo dal punto 3-plo: da un certo punto in poi ciascuno dei sistemi aggiunti successivi coincide col precedente; allora se si tien conto del punto 3-plo si vede che gli aggiunti vanno calando di dimensione.

Come applicazione potrei trattare la razionalità delle F_5 con sing[olarità] ord[inarie]; oltre a quelle razionali a sezioni di gen[ere] 0, 1, 2, 3, 4 che si possono considerare note, si trovano quella con 4 p[un]ti 3-pli, e quella con 2 p[un]ti 3-pli e retta 2-pla (omesso il caso evidente del p[un]to

4-plo): anche i casi particolari in cui il genere è < 0 conducono alla trasformazione della sup[erficie] in una rigata.

Non ti pare preferibile la trattazione delle sup[erficie] dei gen[ere] 0 con un p[un]to 3-plo a quella delle sup[erficie] con soli p[un]ti multipli? Lo scopo di esporre il metodo è ugualmente raggiunto.

Grazie per il girello.

In questo momento ricevo una cartolina dal Bertini. Siccome nonostante gli sforzi fatti pare ch'io non abbia ancora raggiunto tutta la chiarezza desiderabile, così egli mi prega di andare a Pisa per fornirgli alcune spiegazioni. Tu scrivimi ugualmente quando vieni, spero di non perdere l'occasione di vederti, tanto più che non so ancora quando andrò a Pisa né quanto occorrerà che mi ci trattenga.

Cordiali saluti

dal tuo aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

8.

Giovedì [6 luglio [18]93][1]

Carissimo Guido

Non ti ho più scritto perché immerso nella revisione della mia memoria sulle superficie,[2] ufficio, come sai, così penoso per me. Ho terminato la 1ª parte della revisione, cioè il trovare gli errori, e non mi manca ora che ripararvi. Le piccole imperfezioni sono numerose, ma di cose grosse non sono venute fuori che due lacune, senza influenza però nel lavoro. Nel teor[ema] di Clifford,[3] quando voglio estenderlo togliendo la restrizione che la serie caratteristica del sist[ema] sia completa trovo $\pi - 1 - n + r = p + \omega$ e la dimostrazione che $\omega \geq 0$ è sbagliata; questo segue solo se $r > \frac{p^{(1)} - 1}{2}$ con un altro ragionamento un po' più complicato. In fondo la razionalità delle involuz[ioni] di gen[ere] num[erico] 0 cade, o almeno cade la dimostrazione per una inesplicabile lacuna: io affermo (senz'altro) che se pel sist[ema] aggiunto a C il passaggio per un p[un]to trae il passaggio per altri le curve C sono iperellittiche; ciò non è vero, quindi segue soltanto che le dette involuz[ioni] sono razionali o rappresentabili sul piano doppio. Cosa dici è meglio tagliare in quel punto? La stessa difficoltà si presenta nel lavoretto progettato sulle sup[erficie] di gen[ere] 0 con p[un]to 3-plo, ma forse là è più facile superarla. Le altre imperfezioni trovate nel mio lavoro sono cose da poco: speriamo non me ne sieno sfuggite!

Lunedì a Pisa ho fatto alla Sc[uola] Normale la lezione per conseguire il diploma d'abilitazione, sugli irrazionali. Gli scolari (Bert[ini], Bianc[hi], Volt[erra], Dini) mi sembra abbiano capito assai bene benché un po' disattenti, ma si trattava di una scolaresca superiore all'ordinaria!

Bert[ini] ha fatto del mio lavoro una relazione assai benevola;[4] non lo pubblicherò negli Ann[ali] della Sc[uola] N[ormale] perché dopo avermi votato la stampa mi han detto che mancano i fondi; l'ho mandato a Guccia pel Circolo raccomandato da Bert[ini].

Dopo la lezione sono stato invitato a far colazione alla Sc[uola] coi prof[essor]i, e quindi ho avuto una lunga discussione con Volt[erra] e Bianchi circa l'utilità della Geometria (Bert[ini] non vi era). L'ambiente non era troppo favorevole specialmente Volt[erra], mentre Bianchi è diventato molto più proclive ad ammetterne l'importanza.

Ti mando la mia 2ª nota[5] di cui ho ricevuto ora gli estratti e ti stringo affettuosamente la mano.

Tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Enriques 1893f.
[3] Cfr. Clifford 1878.
[4] Cfr. p. 8, nota 4 a let. 6 (21.6.1893); Enriques 1893g.
[5] Enriques 1893b.

9.

[9 luglio [18]93][1]

Carissimo

Come ti ho scritto ho mandato a Guccia il mio lavoro[2] sulle sup[erficie] con ∞ trasf[ormazioni] pr[oiettive] in sé pregandolo di effettuare presto la pubblicazione perché mi occorre il lavoro per riconcorrere al posto di perfezionamento, cioè per il 15 Agosto (o almeno per un'epoca non molto lontana). Il G[uccia] mi risponde che vi sono molti lavori che hanno la precedenza sul mio, sicché del mio comincerebbe la stampa dopo il 15 Agosto ed io non avrei gli estratti che a Settembre (capisco verso la fine). Per tutto questo mi toccherebbe inoltre sottostare ad una spesa non indifferente perché il mio lavoro eccederebbe le 16 p[a]g[ine] di stampa (sono una sessantina di colonne). Ho pensato quindi di rivolgermi a te e di domandarti se sarebbe possibile ottenere in breve tempo la pubblicazione della memoria nell'istituto veneto e se ti sarebbe facile occupartene. Quanto al giudizio del lavoro lo darebbe Bertini.

Scusa dunque il disturbo che ti do; se tu riesci ad illuminarmi su ciò che ti ho chiesto (io non ho idea degli usi dell'ist[ituto] ven[eto]) mi farai proprio un vero piacere, e (perdona l'indiscretezza) ti sarei grato se tu potessi procurarmi l'informazione con sollecitudine, perché in caso contrario rimanderei al Circolo il lavoro in modo da non perdere il turno. Grazie anticipate.

Sono appunto disposto come tu mi consigli ad abbandonare la questione delle involuzioni di gen[ere] num[erico] 0 nella mia memoria:[3] ma occorre che poi io superi la difficoltà cui ti ho accennato, dimostrando (ciò che deve esser possibile) che i piani doppi di genere 0 son razionali.

Per le superficie con p[un]to 3-plo a partire dal sistema ∞^{π} di genere π e grado $2(\pi - 1)$ si hanno i valori dei caratteri dei successivi sistemi aggiunti; poiché π si può apporre grande a piacere (raddoppiando il 1° sistema ecc.) si perviene ad un sistema di curve razionali o ellittiche grande a piacere, ad es[empio] di dimensione ≥ 4. Ciò senza preoccuparsi se il passaggio d'una curva per un p[un]to trae il passaggio per un altro. Se il sistema ultimo è irreduttibile (e perciò basta non si spezzi nelle curve d'un fascio) imponendo un p[un]to 2-plo si ha un fascio di curve raz[ionali] o spezzate e si deve condurre a termine la discussione. La difficoltà sta nel possibile spezzamento nelle curve d'un fascio dell'ultimo sistema: se il prec[eden]te sistema è *semplice* le curve sono razionali, ma il male accade se nel prec[eden]te sistema il passaggio per 1 p[un]to trae il passaggio per un altro; le curve del fascio sono allora ellittiche.

Quanto a ciò che mi scrivi intorno alle superficie con un sistema almeno ∞^3 per cui $D > 2\pi - 2$ credo anch'io che esse debbano rientrare nel mio metodo (forse te ne parlai anche in passato), però mi rimaneva un dubbio su ciò che tu me ne scrivi, che vien distrutto da una lettura più attenta della tua lettera.

Perché credi che qua non si presenti l'inconveniente che uno dei successivi sistemi aggiunti non sia semplice?

Ho scritto nuovamente gran parte del 2° cap[itolo] della mia memoria sulle superficie per renderlo più chiaro; voglio tender così a distruggere l'impressione di cui parlava il S[egre] che fa dubitare continuamente che manchino tutte le restrizioni occorrenti.[4] Così farò larghe modificazioni di esposizione anche nel 3° cap[itolo].[5]

Sai tu qual è l'indirizzo di Ascione? Mi è stato domandato dal Ciani.

Io pure ho corretto le bozze della mia 3ª nota.[6] Sai che è una strana coincidenza davvero quella dell'Humbert![7]

Ho piacere dell'ultimatum che hai mandato al S[egre], esso corrisponde anche ad un desiderio ripetutomi ultimamente dal Bertini, e che ormai è necessario vi decidiate a mandare ad effetto.[8]

Se hai occasione di scrivere a tuo cugino pregalo che mi rimandi qua il biglietto ammalato[9] ed intanto salutalo affettuosamente.

E chiudo questa lettera senza capo né coda in cui comincio dal chiederti un favore e finisco chiedendotene un altro. Aspetto la tua risposta per decidere il da farsi sul mio lavoro: se a Venezia non han difficoltà ad accettarlo sono pronto a mandarlo.

Grazie di tutto e cordiali saluti dal

tuo aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Enriques 1893g.
[3] Enriques 1893f.
[4] In una lettera del 27 maggio Corrado Segre aveva invitato Castelnuovo a raccomandare «caldamente» a Enriques un maggior rigore. «Già ho trovato in qualche punto delle asserzioni gratuite di cui non sono persuaso», continuava Segre. «Pesi bene ciò che scrive: e se incontra qualche intoppo non ci passi sopra. Meglio ritardare la stampa del lavoro piuttosto che scemare l'importanza di questo con dimostrazioni incomplete o proposizioni sbagliate». (In P. Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie nella corrispondenza di C. Segre a G. Castelnuovo*, «Arch. Hist. Ex. Sci.», 43 [1991], 145-88, cfr. 155). Nella lettera del 21 giugno 1893 (n. 6, p. 7) Enriques accenna alle «vive raccomandazioni» di Segre «riguardo alle correzioni da fare». Ancora il 25 giugno, nella relazione di presentazione della memoria di Enriques all'Accademia delle Scienze di Torino, Segre (1893) aveva lamentato la necessità di colmare varie lacune, a suo parere presenti nel lavoro e dovute alla novità e alla originalità dei risultati di Enriques.
[5] Cfr. Enriques 1893f, cap. 2 «Il sistema canonico» e cap. 3 «Il sistema aggiunto».
[6] Enriques 1893c.
[7] Enriques si riferisce al fatto che il teorema che è l'oggetto principale della memoria Castelnuovo 1893b, presentata all'Accademia delle Scienze di Torino l'11 giugno, fu enunciato il giorno successivo anche da Humbert (1893a) e dimostrato successivamente in Humbert 1894a. «La curiosa coincidenza apparirà meno strana - affermava allora Castelnuovo (1893b, 116, nota **) - quando si pensi che il citato teorema riempie una lacuna che esisteva nella teoria delle involuzioni sopra una curva». A questo proposito si veda anche Humbert 1894b, 189, nota 1.
[8] Come appare da alcune lettere di Corrado Segre ed Eugenio Bertini a Castelnuovo, questi aveva sollecitato Segre a pubblicare le lezioni del «Corso di geometria sopra una curva» tenuto a Torino negli anni 1890-91 e 1892-93. Il contenuto di quel corso sta alla base dell'articolo Segre 1894, in cui sono esposti anche i contributi di Castelnuovo. Nello stesso anno, su invito di Segre, anche Bertini (1894) pubblicò in un articolo i risultati presentati nel suo corso.
[9] Così nell'originale.

10.

Martedì [11 luglio [18]93][1]

Carissimo

Ti ringrazio moltissimo della gentile sollecitudine ed accetto volentieri l'offerta: ti spedisco dunque la memoria[2] insieme ad un sunto (tratto dal-

l'introduzione), mi sottometto naturalmente alla spesa occorrente, ciò che ero già disposto a fare col Circolo. Se si potrà ottenere la pronta pubblicazione del lavoro mi avrai fatto un vero piacere, ti sarò ad ogni modo gratissimo.

Non ho più pensato ai piani doppi di genere 0 (che credo di riuscire a rappresentare almeno nel caso mio), perché attratto sempre più dalla mia memoria[3] di Torino cui da vari giorni dedico tutte le mie ore. Mi sembra di avere superato (almeno in parte) una difficoltà di cui più volte ti accennai: potrei prescindere dal teorema di Zeuthen e Noether sulla invariantività del genere numerico[4] (che è stabilito solo per trasformazioni che non producono singolarità straordinarie), e quindi non occorrerebbe più di limitarsi ai sistemi $|C|$ che fatti segare dai piani danno singolarità ordinarie sulla F (restrizione così incomoda!); basterebbe sapere che la sup[erficie] si può trasformare in una F_n con singolarità ordinarie (che può supporsi senza curve eccezionali) tale che per essa il genere geometrico $p = p_1$ (genere numerico). Allora segue che le ψ_{n-4+r} aggiunte ad F_n segano un sistema di tal dimensione (data dalle formule di postulazione) che il sistema aggiunto ad $|rC|$ da esse segato determina la serie canonica completa sulla curva di $|rC|$.

È questo il punto di partenza: esista sulla sup[erficie] un sistema puro tale che sulla curva dello r-plo (r qualunque) l'aggiunto seghi la serie completa: se $|C'|$ è il sistema canonico, poiché la F non ha curve eccezionali (ossia $|C|$ ed $|rC|$ è puro) l'aggiunto ad $|rC|$ è $|rC + C'|$.

Ciò posto sulla F si abbia un sistema puro $|C_1|$ (cioè senza punti base su F): per r assai grande $|rC|$ contiene $|C_1|$ che ha come residuo rispetto ad esso il sistema puro $|C_2|$, sicché $|rC| = |C_1 + C_2|$. Sia π_1 il gen[ere] di $|C_1|$ π_2 quello di $|C_2|$, C_1 C_2 abbian D punti comuni: π (gen[ere] di $|rC|$) è dato da $\pi = \pi_1 + \pi_2 + D - 1$.

Il sistema $|C_1 + C_2 + C'|$ per ipotesi ha la dimensione $p + \pi - 1$; esso sega su C_2 una serie g di grado $D + 2(\pi_2 - 1)$ quindi di dimensione $D + \pi_2 - 2 - \omega_2$; il sistema aggiunto a $|C_1|$ $\{|C_1 + C'|\}$ sia di dimensione $p + \pi_1 - 1 - \omega_1$: per un gruppo della g passano $\infty^{p+\pi_1-\omega_1}$ curve di $|C_1 + C_2 + C'|$, quindi la dimensione di $|C_1 + C_2 + C'|$ è

$$p + \pi - 1 = D + \pi_2 - 2 - \omega_2 + p + \pi_1 - \omega_1;$$

poiché $\pi = \pi_1 + \pi_2 + D - 1$ si ha $\omega_1 = \omega_2 = 0$: dunque l'aggiunto a $|C_1|$ ha la dimensione $p + \pi_1 - 1$. c.d.d.

Si estenderebbe poi la cosa ai sistemi impuri.

Pare che non basti che l'aggiunto a $|C|$ di genere π sia $\infty^{p+\pi-1}$ occorre l'analoga proprietà per $|rC|$; questa dipende dall'esser $p = p_1$ se $|C|$ è segato da piani e la F ha sing[olarità] ord[inarie].

La cosa mi sembra avere un certo interesse, specialmente perché toglie una restrizione che non è accertabile quando si considera il residuo d'una curva rispetto ad un sistema. La dimostrazione così facile (spero giusta) è stata oggetto di tante inutili ricerche da parte mia!

Addio; affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Enriques 1893g.
[3] Enriques 1893f.
[4] Cfr. Zeuthen 1871b; Noether 1875.

11.

[15 luglio [18]93][1]

Carissimo

Mille grazie. Se credi di citare tu il lavoro di Veronese sopra alcune notevoli configurazioni ecc. mi farai piacere (io lo ho lasciato a Firenze, essendo venuto ora a *Livorno - Via dei Prati 4*); ma non so in cosa entri col mio lavoro; (se no aggiungerò la citazione sulle bozze).[2]

Ciò che mi scrivi è interessante: tu sei penetrato più addentro di me nello spirito del metodo. Però non sarà mica facile dimostrare che per k assai grande la differenza $\delta(kC)$ fra $p + \pi_k - 1$ e la dim[ensione] effettiva dell'aggiunto a $|kC|$ diventa costante? Ed è proprio questa parte della tua lettera a cui attribuirei maggiore importanza, il resultato è vero perché il carattere δ della sup[erficie] così ottenuto è appunto la differenza $p - p_1$ fra il gen[ere] geom[etrico] e il num[erico], ma si tratterebbe di vederlo senza le formule di postulazione.

Quanto al resto che mi scrivi la restrizione di avere un sistema $|C|$ (di gen[ere] π) a serie caratteristica completa e di cui l'aggiunto è $\infty^{p+\pi-1}$ include probabilmente troppo, perché la completezza di quella serie porta in sostanza ad una restrizione ulteriore per la sup[erficie]: ma non ho capito bene tutto.

Fra le applicazioni del mio metodo ne ho fatta un'altra interessante: «ogni sistema impuro si deduce coll'aggiunta di punti base da uno puro o da uno con soli punti base *semplici* che coincide col residuo del canonico». I punti base semplici si staccano necessariamente sulla curva generica dalla serie residua di quella segata dal sistema canonico.

Tornando alla (1ª) questione prec[eden]te, la difficoltà cui t'accennavo si riduce a questa «il sistema aggiunto di $|rC|$ (per r grande) sega la serie completa sulla C»; ma bada che l'aggiunto ad rC può sospettarsi (a priori)

che non sia tutto segato dalle aggiunte ψ_{n-4+r}, però basterebbe sapere che queste segano la serie completa sulla C (sezione piana d'ordine n). Basterebbe perciò sapere che per una curva piana la minima serie somma della canonica* e di quella segata da tutte le curve d'ord[ine] r (per r grande) è completa.

Tante cose affettuose

dal tuo aff.mo
F Enriques

* Veramente comparirebbe la serie segata dalla C_{n-4} (agg[iunte]) ma per r grande mi pare che le ψ_{n-4+r} comprendano in sé tutte le ψ_{n-3}.

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] In effetti, in Enriques 1893g, 1591, nota 1 è citato l'articolo Veronese 1880-81.

12. [c.p.]

15 Luglio [18]93
Livorno - Via dei Prati 28

Carissimo

Acconsento volentieri a ciò che mi scrivi; dopo datemi le bozze[1] spero mi tirino un paio di estratti ciò che non dovrebbe portare alcuna difficoltà all'Istituto; così non aspetterei a Novembre ad avere il lavoro. Ti ringrazio molto di ciò che hai fatto per me, e scusa la seccatura avuta.

A quel che ti ho scritto stamani ho da aggiungere che ripensando alla 2ª parte della tua lettera la trovo anche più interessante di quel che a prima vista mi parve. Però come fai a provare che il sistema agg[iunto] di $|3C|$ è come per quello di $|2C| \quad \delta(3C) = 0$? non bisognerebbe sapere che anche $|2C|$ ha la serie caratteristica completa?

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] Si tratta delle bozze di Enriques 1893g.

13.

[21 luglio [18]93][1]

Carissimo Guido

Grazie della tua lettera cui ho tardato a rispondere per sbrigare finalmente la mia memoria[2] di Torino.

Per conciliare un po' tutto ho esposto soltanto (fra le questioni di cui abbiamo parlato) ciò che è relativo al caso delle superficie di genere geom[etrico] $p = p_1$ numerico (cioè la condizione $\delta(2C) = 0$, e $\delta(C) = 0$ colla serie caratteristica di $|C|$ completa). Ciò tanto più che non si riesce proprio a stabilire che il massimo K di $\delta(rC)$ è $= p - p_1$ ma solo $\leq p - p_1$. Le 2 condizioni che permettono di concludere $K = 0$ si fondano in sostanza sopra uno stesso ragionamento, quello che tu mi hai comunicato traendolo dalle tue postulazioni (dammi il titolo del lavoro perché possa citarlo: se preferisci posso mettere in nota quei lemmi col tuo nome).[3] Si deduce poi (per $K = 0$) il Restsatz ecc. La mia memoria mi sembra così notevolmente migliorata. Il 2° caso (quello in cui $\delta(C) = 0$ e $|C|$ ha la g_D^{r-1}caratt[eristica] completa) lo ho esposto in uno speciale punto in fine al cap[itolo], facendo notare che esso riesce utile più tardi quando occorre la restrizione della completezza della serie $g_{p^{(1)}-1}^{p-1}$) caratt[eristica] del sist[ema] canonico. Del resto le formule di postulazione non figurano più ormai che come cosa non necessaria.

L'istituto Veneto è proprio a Venezia? all'ultimo momento mi viene il dubbio che sia a Padova.

Se vuoi spedirmi la memoria di Veronese di cui mi hai parlato,[4] mi farai piacere perché mi riuscirebbe difficile farmela venire da Firenze.

Scusa la lettera un po' inconcludente (dopo il ritardo); ma sono un po' stanco e mi sono fatto un capone. Fra qualche giorno ti scriverò più a lungo parlandoti delle sup[erficie] di gen[ere] 0 con p[un]to 3-plo di cui l'altro giorno all'Ardenza[5] credo aver trovato la rappresentazione.

Affettuosissimi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Enriques 1893f.
[3] Si veda in particolare il lemma citato in Enriques 1893f, cap. 3 «Sistema aggiunto», § 2. Il lavoro di Castelnuovo in questione è Castelnuovo 1893a.
[4] Cfr. p. 14, let. 11 (15.7.1893) e la memoria di Giuseppe Veronese ivi citata in nota 2.
[5] Si tratta della zona balneare di Livorno.

14.

[24 luglio [18]93][1]

Carissimo

Ho ricevuto la memoria di Veronese insieme alla tua,[2] e te ne ringrazio.

La sig.ra Sforni Levi sta Lungo Mare 24 bis e parte di qua il 29 del mese.

Capisco che non debbo essermi spiegato chiaro nell'ultima lettera: nella redazione del lavoro[3] di Torino ho tenuto distinta la trattazione del caso $\delta(C) = \delta(2C) = 0$, da quello in cui $\delta(C) = 0$ e la serie caratt[eristica] di $|C|$ è completa. Il 1° caso (per cui basta sapere soltanto $\delta(2C) = 0$ giacché $\delta(C) \leq \delta(2C)$) è quello che serve di base alla restrizione imposta alle superficie; per esso adopero il tuo lemma[4] che la minima serie somma di quella segata dalle C_{n-2+r} $(r \geq 0)$ aggiunte a C_n e di quella segata dalle rette è completa. Soltanto in fondo al cap[itolo] in apposito § [paragrafo] intitolato «Osservazioni»[5] torno sopra alla questione trattando il 2° caso; il quale offre specialmente interesse in vista della restrizione del succes[sivo] cap[itolo][6] (la serie caratt[eristica] del sist[ema] can[onico] completa che non mi pare segua dalla precedente).

Passando ad altro ti dirò come faccio a rappresentare le superficie F di genere 0 con p[un]to 3-plo.

Sulla F (partendo dal sistema delle sezioni piane e prendendo i successivi sistemi aggiunti salvo rispetto al p[un]to 3-plo) arrivo ad avere un sistema ∞^{π} di gen[ere] π e grado $2\pi - 2$, (ossia una F' di S_{π} con p[un]to 3-plo): posso supporre la dimensione π del sistema grande ad arbitrio (raddoppiando ecc. il 1° sistema). Prendiamo le curve del sistema pel p[un]to 3-plo O che sono $\infty^{\pi-1}$: il sist[ema] aggiunto è dato dalle curve del sistema stesso, che hanno in O una molteplicità superiore (cioè un p[un]to 2-plo) ecc.: così i successivi sist[emi] aggiunti vanno decrescendo e la differenza fra le dimensioni (o i generi) di 2 consecutivi cresce sempre. Si giunge infine ad un sistema di genere 0, 1: nel 1° caso la sup[erficie] è razionale. Nel 2° il sist[ema] di gen[ere] 1 può supporsi di dimensione grande ad arbitrio: se non è spezzato basta che la dimensione sia ≥ 4 per concludere la razionalità (considerando le curve con un p[un]to 2-plo, quantunque su questa dimostrazione ((già vista insieme)) non tutto mi riesce ancora chiarissimo). Sia invece il sistema in questione spezzato nelle curve d'un fascio. Allora nella serie canonica della curva del penultimo sistema il passaggio per un p[un]to trae quello per un altro, e perciò su una curva del fascio il prec[eden]te sistema sega una g_2^1: in quel sistema (Γ) la dimensione $r > \pi$ (gen[ere]); sia $\pi' \geq 1$ il gen[ere] delle curve del fascio; vi è un sist[ema] ∞^{r-2} appartenente a (Γ) da cui si è staccata una curva del fascio, di gen[ere] π'', e

$$\pi' + \pi'' + 1 = \pi, \qquad \pi'' \leq \pi - 2;$$

sicché si giunge ad un sist[ema] (∞^1 almeno) di gen[ere] 0.

Così in ogni caso la sup[erficie] F resulterebbe razionale.

Ho letto la 1ª parte del tuo lavoro[7] (la dimostrazione analitica). A parte l'interesse della cosa di cui già abbiamo discorso, ti faccio i miei complimenti per la chiarezza dell'esposizione, la quale è riuscita facile a me!

Affettuosi saluti dal tuo

aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Veronese 1880-81; Castelnuovo 1893b.
[3] Enriques 1893f.
[4] Cfr. Enriques 1893f, cap. 3, § 2.
[5] Cfr. *ibid.*, § 7.
[6] Cfr. Enriques 1893f, cap. 4 «Sistemi puri. Estensione del teorema di Riemann-Roch».
[7] Castelnuovo 1893b; cfr. anche p. 12, nota 7 a let. 9 (9.7.1893).

15.

[27 luglio [18]93][1]

Carissimo Guido

Ho ricevuto ieri la tua Nota[2] (di cui ti ringrazio), ed avevo già notato la curiosa aggiunta della parola «punti» la quale non poteva essere opera che di una intelligenza matematica.

Quanto alle questioni di cui mi parli, sebbene trovi giuste alcune delle tue osservazioni, non credo che le superficie con p[un]to 3-plo mi daranno molto da sudare. Non vi ho più pensato da una settimana e la tua lettera me le richiama oggi alla mente. Anzitutto è vero che quando l'ultimo aggiunto è spezzato il mio metodo di riduzione non conduce alla conclusione ch'io erroneamente ne traevo. Ma invece se l'ultimo aggiunto non è spezzato mi sembra ancora che esso possa supporsi ampio a piacere contrariamente a ciò che tu mi dici. Ecco la dimostrazione.

La sup[erficie] con p[un]to 3-plo è (come possiamo supporla già ridotta) a sezione di genere π, in S_π, di grado $2\pi - 2$ e col p[un]to 3-plo O: il k-esimo sistema aggiunto è segato dalle curve del sistema ∞^π (sezioni iperpianali) che in O hanno un p[un]to 3-plo: se fra queste curve del k-esimo aggiunto si vogliono quelle del $(k+1)$-esimo aggiunto, si deve imporre ad esse in O una maggiore molteplicità, *staccando* il p[un]to O; ciò porta $3k+1$ (?) condizioni, in modo che la dimensione del k-esimo aggiunto e quella del $(k+1)$-esimo differiscono di δ_k dove δ_k cresce con k. Ora si raddoppi il 1° sistema ∞^π; se prima il k-esimo era l'ultimo aggiunto, ora il k-esimo aggiunto è la somma di quello di prima e del sistema ∞^π; e perciò l'ultimo aggiunto sarà lo s-esimo con $s > k$: così seguitando (raddoppiando il 1° ecc.) si ha che l'ultimo aggiunto è il t-esimo dove t è grande ad arbi-

trio: se esso è di genere 1 si deve considerare = 0 la dimensione del $(t+1)$-esimo e però quella del t-esimo è grande ad arbitrio (al crescer di t).

Ed ora ecco altre considerazioni che si riferiscono al problema di cui si tratta. Ridotta la sup[erficie] come prima, il k-esimo aggiunto $|C_k|$ (di gen[ere] π_k, grado D_k, dim[ensione] r_k) contiene il $(k+1)$-esimo (ottenuto staccando O): ora in O le C_k hanno la molteplicità $3k$, e però una $C_{k+1} + O$ sega la C_k in

$$D_k = 2\pi_k - 2 + 3k$$

punti. (Pare quindi che per $k > 0$ non possa mai resultare $D_k = 0$, essendo $\pi_k > 0$). Ora si ha

$$r_k = \pi_{k-1} - 1,$$

ed anche

$$\pi_{k-1} = \underset{\text{gen di } C_k}{\pi_k} + \underset{\text{gen di } O}{1} + 3k - 1 = \pi_k + 3k$$

sicché

$$r_k - 1 = \pi_k + 3k - 2;$$

onde $D_k - (r_k - 1) = \pi_k$, e poiché $D_k > 2\pi_k - 2$, segue «*la serie caratteristica di* $|C_k|$ *è completa non speciale*» cioè appunto quel che tu mi domandavi.[3]

Supponiamo che in $|C_k|$ il passaggio per 1 p[un]to tragga quello per un altro: allora le C_k son iperellittiche e la serie caratteristica è di grado $D_k = 2\pi_k$ (tu lo vedrai in modo analogo ad un tuo teorema pel piano) il che è assurdo se $k \geq 1$. Quindi $|C_k|$ è *semplice*, ed allora la deduzione della razionalità della sup[erficie] non deve presentare ulteriori difficoltà.

Del resto le proprietà dei sistemi $|C_k|$ debbono verificarsi nella rappresentazione piana dove s'incontrano i tuoi sistemi ∞^π di sovrabbondanza 1 ed i loro successivi aggiunti.

Dimmi se i cenni qui brevemente esposti ti sembrano giusti; io non vi ho riflettuto ancora abbastanza.

Scusa le frequenti cassature.

Ancona non va più a C[h]icago?

Cordiali saluti dal tuo

aff.mo
F Enriques

Non hai mica furia che ti rimandi la Memoria di Veronese?[4]

P.S. Non mi sembra facile (e mi parrebbe interessante) estendere le considerazioni relative al sistema aggiunto di cui abbiamo parlato, al caso in cui il gen[ere] p della sup[erficie] = 0.

Il caso che tu mi comunichi in cui riesci alla costruzione d'un sistema $\infty^{\pi-1}$ *pseudo*aggiunto è già notevole, ma io non credo affatto indifferente la questione se esso sia proprio aggiunto o no: secondo me essa dovrebbe fornire la chiave del problema della razionalità.

Di nuovo affettuosi saluti.

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Enriques allude probabilmente all'articolo Castelnuovo 1893a, che fu presentato al Circolo Matematico di Palermo nelle adunanze dell'11 e 25 giugno 1893.

[3] Seguono nell'originale quindici righe cancellate.

[4] Veronese 1880-81.

16.

[5 agosto [18]93][1]

Carissimo Guido

Ho tardato a risponderti per ripensare alla curiosa contraddizione fra il ragionamento da cui sembrava dedursi che l'ultimo sistema aggiunto potesse supporsi comunque ampio ed il fatto che se esso è ellittico la sua dimensione deve essere ≤ 9. La conclusione che l'ultimo sistema aggiunto potesse sempre supporsi razionale mi sembrava azzardata ed è falsa: vi sono dei casi cui l'ultimo sistema aggiunto è ellittico ∞^9 e comunque si raddoppi il 1° sistema esso (naturalmente) non muta. La questione pare stia tutta nel modo di comportarsi delle curve dei successivi aggiunti nel punto 3-plo della superficie, il quale da un certo punto in poi non è più quello ch'io credevo.

Ecco ora il modo che mi sembra più semplice per esaurire il caso in cui l'ultimo sistema aggiunto è ellittico.

Questo ultimo sistema sia il k-esimo $|C_k|$ di gen[ere] π_k, grado D_k, dimensione r_k, e una C_k abbia s_k punti infinitamente vicini al punto 3-plo O: si può vedere anzitutto che non è $s_k = 0$, e quindi $s_k \geq 2$ (essendo il p[un]to O una curva ellittica).

Vi è una curva aggiunta a $|C_k|$ che non sega C_k e con O dà una C_k, quindi

$$D_k = s_k:$$

d'altra parte

$$r_k = \pi_{k-1} - 1.$$

Ora una C_{k-1} si compone di C_k e di O; mi sembra che non vi sia più

alcun inconveniente nell'applicare la formula di Noether[2] che dà

$$\pi_{k-1} = 1 + D_k,$$

da cui $r_k = D_k$.

Ora $r_k \geq 2$: se $r_k > 2$ la sup[erficie] è razionale; così se $r_k = 2$ (per un tuo teorema non essendo essa riferibile al caso cubico).

Desidero vivamente la conferma dell'importante notizia relativa alle involuzioni piane,[3] e mi interesseranno molto i dettagli che vorrai favorirmi in proposito.

Il Bertini mi ha scritto di essere molto interessato alle tue postulazioni. Rispondendo ad una lettera in cui gli parlavo delle mie «superficie», egli mi domanda come si farà a porre il concetto di sup[erficie] aggiunta ad una F con singolarità straordinarie. Io ho ribaltato tutto addosso alle curve canoniche che permettono di costruire le ψ_{n-4} aggiunte e ne determinano il modo di comportarsi: ho dovuto però accorgermi che la mia dimostrazione dell'invariantività del sistema canonico ammette tacitamente il supposto che non vi sieno p[un]ti multipli infinitamente vicini ad un p[un]to multiplo, sicché mi occorrerà porre la restrizione che la superficie possa trasformarsi in una soddisfacente alla detta condizione; l'invariantività viene poi fissata per tutti i casi.

Eliminando tale restrizione entrerei in un ginepraio di considerazioni infinitesimali ((sebbene in sostanza il mio ragionamento andrebbe ancora)). Del resto il Noether senza porre alcuna limitazione ragiona sempre come se le singolarità fossero ordinarie (guarda la definizione di aggiunte - Math[ematische] Ann[alen] 8).[4]

Affettuosi saluti

dal tuo aff.mo
Federigo Enriques

[P.S.] Non ho ricevuto alcune bozze[5] dall'istituto veneto. Come farà a darmi una parte delle 2^c bozze pel 15?[6]

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo con un punto interrogativo per quanto riguarda il giorno.

[2] Si tratta della formula di Noether riguardante il genere di una curva riducibile: cfr. Noether 1886a.

[3] Le ricerche di Castelnuovo sulla razionalità delle involuzioni piane furono pubblicate in Castelnuovo 1893c e 1894a.

[4] Cfr. Noether 1875.

[5] Si tratta delle bozze di Enriques 1893g.

[6] Cfr. p. 10, let. 9 (9.7.1893).

17.

[19 agosto [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Cosa avrai detto del mio prolungato silenzio?

Scusami perché in questi giorni ho avuto delle distrazioni, e ricevi un tardo ma vivo mirallegro per la conferma del bel resultato intorno alle involuzioni piane.

In questi giorni non mi sono occupato di studi, a dir il vero le superficie di genere 0 con p[un]to 3-plo mi sono venute un po' a noia. Le lascio in disparte per ora per occuparmi di un'altra questione; cioè la determinazione della massima dimensione d'un sistema lineare di dato genere sopra una superficie; questione di cui abbiamo altre volte discorso e che mi sembra ammettere la seg[uente] risposta:[2]

Se sopra una superficie vi è un sistema lineare di genere p e dimensione $r \geq 3p + 5$ la sup[erficie] è riferibile ad una rigata di genere p o è razionale $(r = 3p + 5)$, $(p > 1)$.

Il concetto della dimostrazione parte dal medesimo principio che ti ha servito nel piano[3] ma intervengono poi altre considerazioni (corollari del tuo e del mio teorema sulla linearità dei sistemi appartenenti ad una superficie).

Mancano ancora alcuni punti da appurare, ma ritengo il resultato sia vero.

Da Venezia ho ricevuto oggi le bozze della mia memoria:[4] le manderò ora a Roma chiedendone altre all'Istituto per correggerle.

Sei andato poi sulle Alpi?

Penso che ad ogni modo ti respingeranno da casa la mia lettera. Scusa la mia pigrizia e

credimi tuo aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Le ricerche su questo argomento furono pubblicate nell'articolo Enriques 1894e, la cui redazione definitiva avvenne nel gennaio 1894.

[3] Cfr. Castelnuovo 1890b.

[4] Enriques 1893g.

18.

Lunedì [28 agosto [18]93][1]

Carissimo

Grazie della tua lettera dalla quale ho acquistato un'idea abbastanza chiara delle tue ricerche.[2] Esse mi hanno molto interessato e contengono due resultati essenzialmente notevoli, cioè la costruzione di quella superficie

F riferita in quel modo alla involuzione (che è un bel concetto), e la costruzione dei successivi sistemi aggiunti sulla F senza ricorrere alle formule di postulazione (di cui mi avevi già parlato). Insomma riuscirà proprio un bel lavoro di cui mi congratulo teco sinceramente: convengo con te nell'opinione che i tipi delle I_n sian complicatissimi per n grande, e (come già sai) mi piace anche più che la questione della razionalità sia risoluta indipendentemente.

Le mie ricerche sono state interrotte dalla venuta delle bozze delle mie 2 memorie da Torino e da Venezia.[3] Ho cominciato a rivedere quelle di Torino; ho voluto riguardare il lavoro passo passo e veramente son contento di non aver trovato nuove correzioni da farvi tranne piccole inezie; è sperabile che il lavoro esca ora completamente emendato. Sbrigatomi di questa seccatura riprenderò la questione di cui ti parlai e che credo di aver risolto; siccome vi sono nella dimostrazione dei passaggi un po' minuti (e forse si potrà semplificare) redigerò il lavoretto per accertarmi che tutto stia bene; si tratterà d'una breve notina.[4] Essa dovrebbe in sostanza colmare una lacuna che si trova nella mia memoria sulle superficie riguardo ai sistemi completi,[5] sebbene in fatto là mi occorresse soltanto il caso delle superficie di genere > 0.

Ecco ora un breve accenno alla dimostrazione di cui tratto.

Impongo un p[un]to 2-plo al sistema $|C|$ di dimensione $r \geq 3p + 5$ (p = gen[ere di] C) se il nuovo sistema $|C'|$ è irreduttibile il suo genere $p' \leq p - 1$, la dim[ensione] $r' \geq r - 3$, sicché si ha un nuovo sistema che soddisfa alla disug[uaglianza] $r' \geq 3p' + 5$. Se $|C'|$ si spezza, ogni C' è connessa sicché il suo genere è $\geq$ della somma dei generi delle componenti: se dunque da C' si stacca solo una parte fissa di gen[ere] $> \sigma$ o intersecata in 2 p[un]ti (o più) dalle rimanenti curve, prescindendo dalla parte fissa si ha ancora un sistema soddisfacente alla precedente disuguaglianza. Restano da esaminare 2 casi a cui si perviene successivamente:

$1°$ da $|C'|$ si staccano una o più curve fisse razionali; allora considerando una C' ottenuta imponendo un altro p[un]to 2-plo si vede che le curve razionali (∞^1 o ∞^2) che si ottengono sulla superficie sono tali che due s'incontrano in un punto o non s'incontrano; nel $1°$ caso sono ∞^2; quindi o la sup[erficie] è razionale o contiene un fascio irraz[ionale] di gen[ere] π. In questa seconda ipotesi $p = \pi$, perché altrimenti le C incontrano in 2 p[un]ti almeno le curve del fascio; imponendo p[un]ti 2-pli quando il processo ha fine si trovano curve razionali che debbono appartenere al fascio; tali curve vengono connesse mediante una componente fissa che le incontra in un sol p[un]to sicché la superficie è riferibile ad una rigata: su di essa vi sono delle curve C spezzate in una direttrice e in più generatrici sicché C è pure una direttrice e $p = \pi$.

2° caso Si perviene ad un sistema $|C'|$ spezzato in s curve variabili d'un fascio razionali connesse mediante una curva fissa: se questa le incontra ciascuna in più d'un punto, si ha il genere p della curva composta C dato da $p \geq s$ mentre la dimensione di $|C'|$ è $r' \geq r - 3$, $r' \leq s$, sicché $r \leq p + 3$ contro il supposto: dunque le curve C incontrano in un sol p[un]to le curve del fascio e la superficie è riferibile a una rigata di genere p.

Questo è in breve il processo nell'esposizione del quale non so se avrò conciliato la brevità colla chiarezza. Uso continuamente la formula di Noether pel genere delle curve composte[6] sotto forma di disuguaglianza.

Del Segre non ho più avuto notizia. È ritornato a Torino?

Volterra è stato come te nel Tirolo nei giorni passati, precisamente a Cortina d'Ampezzo (presso Toblac) con Padova; li hai incontrati?

Tanti saluti affettuosi dal

tuo aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. p. 21, nota 3 a let. 16 (5.8.1893).
[3] Si tratta delle bozze degli articoli Enriques 1893f e 1893g, rispettivamente.
[4] Cfr. Enriques 1894e.
[5] Cfr. Enriques 1893f, cap. 1, § 2.
[6] Cfr. Noether 1886a.

19.

[8 settembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Mentre da Torino mi pervengono con rara celerità le 2[e] bozze della mia memoria,[2] di cui mi preparavo a mandare una copia al concorso pel posto all'interno, da Roma mi respingono le bozze dell'Istituto Veneto[3] mandate il 19 scorso, e mi scrivono che tutti i titoli dovevano essere presentati colla domanda entro il 15 Agosto. Nota ch'io avevo posto nell'istanza i titoli dei due lavori di cui presentavo un sunto manoscritto (molto breve) da sostituirsi colle bozze.

Questo fatto mi fa perdere quel poco di speranza che potevo avere nell'esito del concorso, giacché so che concorrono due giovani di Pisa già laureati da uno o due anni e con qualche lavoro. Ora vorrei sapere da te se il Cerruti ti disse come cosa certa che avrebbe fatto parte della commissione e se in tal caso ti parrebbe cosa conveniente informarlo dell'accaduto e mandare a lui i lavori.

Fra una quindicina di giorni si chiude il concorso di Torino[4] e del progetto di prendervi parte è probabile non ne faccia di nulla, non avendo il coraggio di scrivere al Segre cui potrebbe sembrare troppo presuntuoso.

Sono piuttosto stanco e senza ragione: l'estate mi dà un po' addosso. Ora sarebbe il momento di agire e di occuparmi per trovare una sistemazione per l'anno prossimo. Non sai nulla se il Fano va via?[5]

Le ricerche di cui ti ho scritto nell'ultima lettera (che spero avrai ricevuto al tuo ritorno a Venezia) non hanno avuto svolgimento ulteriore, ed ho intenzione di riordinarle presto. Ti sembrano giuste?

Un affettuoso saluto

dal tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Enriques 1893f.

[3] Enriques aveva allegato le bozze dell'articolo Enriques 1893g alla domanda per il concorso a un posto di perfezionamento: cfr. p. 10, let. 9 (9.7.1893).

[4] Il concorso per una cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Torino fu espletato nell'ottobre 1893. La commissione esaminatrice era composta da Ferdinando Aschieri, Eugenio Bertini, Enrico D'Ovidio, Corrado Segre e Giuseppe Veronese. Vincitore risultò Luigi Berzolari. Alfonso Del Re e Mario Pieri risultarono secondi *ex aequo*. Enriques partecipò a questo concorso classificandosi terzo insieme a Edgardo Ciani.

[5] Gino Fano si laureò nel 1892 con una tesi assegnatagli da Corrado Segre e trascorse l'anno accademico 1892-93 a Torino come assistente di D'Ovidio. Nel successivo anno accademico usufruì di un posto di perfezionamento a Gottinga presso Felix Klein.

20.

22 [settembre [18]93][1]
Firenze - Via Nicolò Machiavelli

Carissimo Castelnuovo

Sono stato esitante fino all'ultimo ed aspettavo a scriverti di essermi deciso: come mi succede spesso, nel dubbio mi sono attenuto al partito più audace; ho concorso. Sempre però mi dà noia il pensiero che a qualcuno possa sembrare il mio un atto di presunzione, ma se io potessi ottenere l'eleggibilità (e mi contenterei di averla anche meschina) mi pare che una tale accusa cadrebbe.

Non scrivo la cosa a Segre né a Bertini temendo che in questo momento questo sembrasse loro poco delicato; non vorrei però che essi credessero ad una mancanza di riguardo da parte mia per non averli consultati prima, ed a cose finite mi propongo di esprimer loro i sentimenti che mi hanno animato. Forse tu avendo occasione di scrivere ad essi potresti parlargliene, ma della convenienza di questo tu sei miglior giudice.[2]

Senza complimenti, ricordando un'antica gentile offerta, e fidando che neppur tu farai complimenti (se occupato), ti mando il mio lavoretto[3] «Sulla massima dimensione ecc.» di cui ti parlai. La redazione che mi sono studiato di rendere precisa mi ha costato assai fatica: non vedo modi di fare a meno della formula del genere delle curve spezzate che serve di base a tutto il ragionamento; ma credo di adoperarla con sufficienti cautele, come spero sembri anche a te.

Ti ripeto di non far complimenti a questo proposito, ed anche di scusarmi se così spesso mi rivolgo per una cosa o per l'altra alla tua gentilezza, ciò che mi sembrerebbe soverchiamente indiscreto se non fossi sicuro della tua amicizia.

Da varii giorni mi sono nuovamente rivolto alla questione dei sistemi lineari di superficie razionali e delle varietà rappresentate. Il resultato dei miei studi è a questo proposito negativo: cioè le superficie d'ordine $r(n-4)+n$ che si comportano ecc. ecc. rispetto alle superficie d'ordine n non segano in generale *tutto* il sistema r-esimo aggiunto di quello caratteristico sopra una sup[erficie] raz[ionale] del sistema; basta l'esempio delle sup[erficie] d'ord[ine] n con un punto $(n-1)$-plo. Forse esisterà nondimeno (come nel prec[eden]te es[empio]) un sistema di sup[erficie] seganti il detto r-esimo aggiunto, ma non vedo la possibilità di costruirlo.

Mi sono rivolto perciò ad uno scopo più modesto nella speranza però di ottenere qui un resultato più completo, cioè la riduzione a tipi dei sistemi di superficie (semplici) segantisi due a due in curve razionali o iperellittiche (di genere $p>1$).[4] La 1ª questione sebbene facile mi sembra interessante; i tipi sarebbero:

1) Sistema di sup[erficie] d'ord[ine] n con retta $(n-1)$-pla (e forse altri p[un]ti base).

2) Sistema delle quadriche tangenti in un punto (e forse con altri p[un]ti base).

3) Sistema delle quadriche per una conica.

Il metodo consiste nel considerare la varietà rappresentata che sarebbe (salvo errore) una quadrica, o una ∞^1 di piani, o un cono proiettante una sup[erficie] di Veronese (e sue proiezioni).

Più bella è la 2ª questione.

Se le sup[erficie] del sistema sono raz[ionali] sulla varietà rappresentata v'è un fascio di quadriche che può rappresentarsi mediante un fascio di piani in S_3, (da cui il tipo «sup[erficie] d'ord[ine] n con retta $(n$-2)-pla ecc.»). Interessante è decidere che in ogni caso le sup[erficie] del sistema sono raz[ionali], ciò che mi sembra di avere ottenuto completando il tuo

teorema, cioè mostrando che «Una sup[erficie] F a sezioni iperellittiche ($p>1$) è razionale o rigata».[5]

Ti espongo in breve la dimostrazione (a cui ancora debbo ripensare) parendomi che essa debba interessarti.

Come sai il punto sta nel mostrare che sulla F i coniugati di un punto A (sulle sezioni) non descrivono tutta la F ma una linea. Sia B un coniugato di A in un piano. Le coppie di punti coniugati sulle sezioni piane per AB sono ∞^2 rappresentate dai p[un]ti d'una sup[erficie] sulle S_6 generato dalle coppie di p[un]ti di S_3. Su tale sup[erficie] vi è un fascio di curve corrispondenti alle sezioni piane della F per AB. Alla coppia AB corrisponde un p[un]to; esso non può essere comune a due curve del fascio se non è comune a tutte. Ma se AB è una coppia di p[un]ti coniugati sopra una sola sezione per AB, tenendo fisso A e variando B sulla F la F è raz[ionale] perché vien riferita alla stella dei piani per A.

Da questo teorema seguirebbe quindi «una varietà a sezioni piane iperellittiche ($p>1$) è una ∞^1 di piani o contiene un fascio di quadriche ed è raz[ionale]»: analogamente per varietà a più dimensioni.

Molto più difficile mi pare la riduzione a tipi dei sistemi di sup[erficie] segantisi due a due in curve ellittiche[6] anche prescindendo da quello (eventuale) rappresentativo della S_3^3 di S_4. Solo so questo che ogni varietà a sez[ioni] ellittiche è proiezione d'una d'ord[ine] n in S_{n+1} ($n \leq 9$) e quindi è raz[ionale]; ma mi par difficile la riduzione all'ordine minimo dei sistemi rappresentativi.

Relativamente al perfez[ionamen]to[7] nulla ho saputo e nulla potrò sapere probabilmente fino al 15 Ottobre. Potrò fare dei tentativi per sapere qualcosa se Volterra od altri si recherà prima a Roma. È troppo naturale che non convenga scrivere al Cerruti avendogli tu parlato prima della cosa. Sono incerto se trovar modo di parlarne a Cremona quando si adunerà il Consiglio.

Affettuosi saluti

dal tuo
Federigo Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] A questo proposito si veda la lettera di Corrado Segre a Castelnuovo del 20 settembre 1893 riportata in Appendice (p. 670).

[3] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894e; cfr. p. 22, nota 2 a let. 17 (19.8.1893).

[4] I risultati delle ricerche qui accennate furono pubblicati in Enriques 1893d: si veda in particolare la nota 4 di quell'articolo per i casi $p=0$ e $p=1$.

[5] In Castelnuovo 1890a questo teorema è dimostrato per le superficie regolari.

[6] I risultati di queste ricerche furono pubblicati in Enriques 1894b e 1894c.

[7] Cfr. p. 10, let. 9 (9.7.1893).

21. [c.p.]

[Firenze, 24 settembre 1893]

Carissimo

Grazie di tutto.

Mi sono accorto anch'io che il ragionamento relativo alle sup[erficie] a sez[ioni] iperellittiche (cui ti dissi dovevo ripensare) non è soddisfacente: ma mi sembra che il resultato persista; invero se i p[un]ti coniugati d'un p[un]to non descrivessero una conica i p[un]ti della sup[erficie] verrebbero riferiti ai gruppi d'una involuzione nella stella dei piani per un p[un]to della sup[erficie] e quindi la sup[erficie] sarebbe razionale.

Si tratterebbe di fare forse la 1ª applicazione del tuo teorema sulla raz[ionalità] delle involuz[ioni].[1] A proposito del quale non mi dici quale impressione ne ebbe il S[egre] che pure a quel resultato teneva molto.[2]

Arrivederci per ora.

Tuo aff.mo
Federigo Enriques

[1] Cfr. p. 21, nota 3 a let. 16 (5.8.1893).

[2] A questo proposito si vedano le lettere di Corrado Segre a Castelnuovo del 4 e 17 agosto e 26 settembre 1893 riportate in Appendice (pp. 669-71).

22. [c.p.]

[Firenze] 3 Ottobre [18]93 sera

Carissimo

Ho molto piacere che il tuo lavoro[1] venga pubblicato nei Math[ematische] Ann[alen]. Aspetto con desiderio la tua venuta a Firenze e spero che ti tratterrai un po', sicché potremo stare qualche giorno insieme. Avvisami dunque del giorno in cui arriverai.

Come saprai il Volt[erra] è stato invitato (fino dal Giugno) a prendere la cattedra del Siac[ci] a Torino:[2] ora pare sia deciso ad accettare: sarà un grande acquisto per Torino e una gran perdita per Pisa, non facilmente rimediabile.

Ti ho mandato la mia memoria[3] di Torino di cui stamani ho ricevuto gli estratti.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[P.S.] Pare che Chini vada a Venezia dove ha ottenuto un posto: che ne sarà del posto all'Acc[ademia]?

[1] Castelnuovo 1894a.

[2] Nel 1892 Francesco Siacci, ordinario di Meccanica superiore all'Università di Torino, si era trasferito all'Università di Napoli. L'anno seguente sulla cattedra di Siacci fu chiamato Vito Volterra, che rimase a Torino fino al 1900.

[3] Enriques 1893f.

23. [c.p.]

[Firenze, 13 ottobre 1893]

Carissimo

Ho avuto piacere della tua cartolina.

Ho ripreso a studiare la questione della massima dimensione di un sistema di genere p su una sup[erficie],[1] con speranza di condurre in porto la cosa per un'altra via. La formula che dà il genere d'una curva spezzata occorrerebbe solo in un punto. Ti darò maggiori dettagli quando avrò fissato meglio il disegno del lavoro.

Tuo aff.mo
F E.

[P.S.] Il Volt[erra] ha definitivamente accettato Torino.

[1] Cfr. p. 22, nota 2 a let. 17 (19.8.1893).

24. [c.p.]

[Firenze] Martedì 17 ottobre [18]93

Carissimo

Ho ricevuto stamani la tua cartolina: ti ringrazio della buona notizia.[1] Spero non vi saranno difficoltà da parte del Consiglio Sup[eriore] di cui aspetto con ansietà le decisioni specialmente riguardo alla sede. L'opportunità di fare un passo diretto in questo momento (rivolgendomi al Cr[emona])* mi pare discutibile: il Cr[emona] potrebbe urtarsi. Mi auguro di potere venire nuovamente vicino a te: i pochi momenti passati insieme l'altro giorno mi hanno destato più vivo il ricordo delle belle giornate trascorse insieme a Roma. Nella speranza di rivederti presto ti saluto con maggiore affetto.

Tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] T'invierò possibilmente domani il manoscritto[2] di cui parlammo.

* ciò che m'era venuto in mente.

[1] La notizia potrebbe riguardare l'esito del concorso per un posto di perfezionamento presso l'Università di Roma: cfr. p. 10, let. 9 (9.7.1893). Contrariamente a quanto sembra lasciar credere questo passo, Enriques non ebbe la riconferma del posto per l'anno 1893-94.

[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1893d.

25. [c.p.]

[Firenze] Mercoledì 18 ottobre [18]93

Carissimo

Grazie delle notizie che mi dai relative al concorso di Torino.[1]

Il Volt[erra] (il quale contraccambia i tuoi saluti) desidererebbe sapere per chi altro la commissione propone il perfez[ionamen]to; in specie se si tratta del Dr Tedone di cui egli ha parlato in passato col C[remona]. Potresti tu domandare al C[remona] quando lo vedi?

Se il K[antor] farà quello che promette sarà un vantaggio anche per te che potrai più liberamente non curartene e metter fuori ciò che certamente sarebbe utile tu facessi conoscere.[2]

Saluti affettuosi.

F Enriques

[1] Cfr. p. 25, nota 4 a let. 19 (8.9.1893).

[2] Tra Seligmann Kantor e Castelnuovo vi furono negli anni 1892-95 dei dissapori originati dalla questione della priorità sull'uso dei successivi sistemi aggiunti che Kantor rivendicava a sé. Su questa vicenda si vedano le precisazioni di Castelnuovo in Castelnuovo 1894a, 275, nota **.

26.

[23 ottobre [18]93][1]

Carissimo

Ti ringrazio molto della premura che hai messo nel rivedere il mio manoscritto[2] e dell'accurato esame che ne hai fatto: sono contento che non sieno apparsi errori ed inesattezze nella redazione.

Quanto alle osservazioni che mi fai, per le prime non ho che da tenerne conto senz'altro: invece qualche cosa ho da aggiungere riguardo le ultime due.

Se a pg. 8 ho impiegato tre buone colonne per costruire il sistema delle varietà aggiunte alla data V (le cui sezioni piane sono iperellittiche e le iperpiane sup[erficie] raz[ionali]) non è stato per dimostrare l'esistenza di ∞^1 quadriche luogo ciascuna dei coniugati d'un punto sulla V, ma per stabilire che esse formano un fascio: questa circostanza mi sembra indispensabile e non segue senz'altro dalla costruzione della quadrica luogo dei coniugati d'un punto, e la stessa questione si presenta già nel caso analogo delle superficie. Ma mi viene ora in mente una più semplice dimostrazione del fatto che quelle quadriche formano un fascio. «Sulla quadrica corrispondente ad O si prenda il p[un]to O', basta vedere che la quadrica corrispondente ad O' coincide con quella corrispondente ad O: ora OO' sono coniugati su tutte le sezioni piane per OO', in particolare sopra le

sup[erficie] sez[ioni] iperpiane d'un fascio; le ∞^1 coniche per OO' su questi iperpiani generano una quadrica che è insieme la corrispondente di O e di O'». Adotterò dunque la tua modificazione con questa aggiunta.[3]

In fine quando si tratta di rappresentare su S_3 la V che contiene un fascio di quadriche segate ciascuna in un punto della curva K non si può, mi pare, servirsi in tutti i casi della proiezione della quadrica sul piano corrispondente: potrebbe avvenire che nello S_3 d'una quadrica vi fossero ancora altre quadriche ed allora la rappresentazione della V ottenuta in tal modo non riuscirebbe più univoca: è per questo che ho ricorso ad un ragionamento un po' più complicato, e che cercherò di esprimere più chiaramente.

Corretto il lavoro, ciò che non esigerà più molto tempo, te lo rimanderò, accettando volentieri la tua offerta di presentarlo al Cr[emona] pei Lincei.

Ho in mente alcune ricerche sulle curve con trasformazioni in sé: ti comunico con riserva il seg[uente] resultato. «Se una varietà algebrica ∞^n ($n \geq 1$) ammette un gruppo finito di trasformaz[ioni] permutabili in sé, il gruppo è il gruppo delle potenze d'una trasformaz[ione]»: questo teorema darebbe lume sulla natura delle equazioni abeliane da cui può dipendere la rappresentazione parametrica d'una varietà. Ma a fine di potermi occupare seriamente di tali ricerche ho bisogno di conoscere prima ciò che si è fatto sull'argomento (specie i lavori di Hurwitz) ciò che è impossibile in una città priva di Math[ematische] Ann[alen]. Perciò aspetterò ormai ad occuparmi della cosa a quando sarò sistemato.

Di questa sistemazione aspetto di giorno in giorno notizia: è facile che tu possa sapere le decisioni del Consiglio Sup[eriore] in proposito.[4] Almanaccando su ciò che sarà, mi pare probabilissimo che il Consiglio (ove mi assegni il perfez[ionamento]) mi proponga come sede di studi Roma (ove è il Cr[emona]), ed insieme per non costringermi a tornare in una città dove ho già studiato mi dia la scelta di un'altra città (come era sempre usato) per esempio di Torino. Tu comprendi come questo caso sarebbe per me molto spiacevole ponendomi in una condizione difficile verso il Segre, il quale dopo il desiderio più volte manifestatogli l'anno scorso di andare con lui, dopo lo scambio di gentilezze seguite in quell'occasione, potrebbe essere male impressionato da una mia diversa scelta in questo anno. Se però se ne presenterà il caso io spero di fargli comprendere come le condizioni sieno mutate; come di fronte alla gratitudine e agli obblighi che ho verso di lui sono tenuto da non minore gratitudine (nonché dall'affetto) verso di te, ed infine egli non potrebbe aversi a male della mia scelta giustificata anche dall'avere già in corso con te lavori avviati (sup[erficie]

a sez[ioni] iperellit[tiche] e sist[emi] di massima dimensione su una sup[erficie]).[5] Ma tutto questo è ancora prematuro e mi auguro di non trovarmi nel caso di questa scelta penosa; mi auguro cioè che il Consiglio Sup[eriore] dica di nuovo Roma senz'altro.

Ad ovviare il pericolo di una destinazione diversa molto sarebbe stata opportuna una parola detta al Cr[emona]: ma da un lato tu per delicati riguardi mi dici di non potere influire, dall'altro lato questo riuscirebbe anche a me malagevole; il Cr[emona] potrebbe pensare che sotto pretesto della scelta della sede io volessi fargli una raccomandazione in mio favore pendente il giudizio (o la conferma di quello della Commissione) al Consiglio, e vedi che questo potrebbe dargli ombra.

Ti raccomando di non dimenticare la preghiera che ti ho rivolta a nome del Volt[erra], di cercare qualche notizia relativa all'altro posto di perfez[ionamento]* (specie riguardo al Tedone o al Bonaventura); ed in ogni caso mi farai grande piacere appena potrai dirmi qualche cosa delle decisioni del Consiglio forse quest'ora già maturate o in via di maturare.

Senza ripetere scuse o ringraziamenti che troppo spesso ricorrono nelle mie lettere, ti saluto affettuosamente.

Aff.mo
F Enriques

[P.S.] Ricordami ai comuni amici.

* Se ti secca domandare al C[remona] scrivimelo che il Volt[erra] glie ne domanderà direttamente.

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1893d. Cfr. p. 29, P.S. a c.p. 24 (17.10.1893).
[3] Cfr. Enriques 1893d, 27-28.
[4] Cfr. p. 29, nota 1 a c.p. 24 (17.10.1893).
[5] Cfr. Enriques 1893d e 1894e, rispettivamente.

27. [c.p.]

[Firenze, 26[1] ottobre 1893]

Carissimo

Due righe in fretta per accompagnarti il mio manoscritto[2] riguardo al quale siamo già d'accordo, e rispondere alla tua di ieri.

Tu non sei il miglior giudice quando la modestia ti fa velo: ora però è inutile discutere su questo, visto che sarebbe una discussione platonica. È il caso di aspettare le decisioni del Cons[iglio] che a quest'ora avrà forse

già deliberato. Ti ringrazio ad ogni modo della sincera amicizia che traspira nelle tue parole. Sono impaziente di sapere il resultato finale.

Addio

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Come ti trovi nella nuova casa?

[1] Così secondo il timbro postale; 30 è la data riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Probabilmente il manoscritto di Enriques 1893d.

28.

[4 novembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio della tua lettera gentile.

Per quanto conosci del mio carattere ti sarai accorto ch'io non sono solito rammaricare troppo i fatti compiuti. Così mi sono già rassegnato a non avere per quest'anno il posto di perfez[ionamen]to su cui credevo di poter quasi contare.

Quanto a collocazione s'io potessi ottenere quella d'assistente credo sarebbe un meglio di guisa che mi rimarrebbe soltanto il dispiacere di essere lontano da te; dispiacere che per riguardo all'affetto e all'amicizia tua difficilmente può essere compensato. Ma poiché non è ora più il caso di pensare a ciò che non posso avere, penso invece al nuovo collocamento che mi si affaccia come possibile e sono molto grato al Segre del pensiero avuto, qualunque sia l'esito. Ho creduto anche opportuno di scrivere al S[egre] e d'informarlo di tutto per quanto tu mi dica di averlo già fatto: non gli ho parlato naturalmente delle sue intenzioni di cui tu mi avverti in confidenza,[2] ma soltanto gli ho espresso il mio desiderio di provvedermi (ove fosse possibile) un collocamento a Torino ch'io accetterei con grande piacere.

Quanto all'esser riunito nuovamente con te spero non me ne mancherà l'occasione nel seguito, ed intanto, ovunque io vada, faccio sempre assegnamento sulla tua buona amicizia: la quale tanto più cara mi sembra ora per il non desiderato distacco.

Sto redigendo il lavoretto[3] «sulla massima dimensione ecc.» la cui trattazione appare ora notevolmente più semplice. Te ne fornirò presto maggiori dettagli. Intanto vorrei sapere (e tu forse lo sai) se il Del Pezzo abbia mai dimostrato che «una superficie di S_n $(n > 3)$ segata secondo una curva da ogni piano tangente è rigata»[4] ciò che mi pare di avere stabilito.

Sul detto lemma e sull'altro che «per una sup[erficie] non rigata e non di Veronese in S_n $(n \geq 5)$ la sezione d'un iperpiano tangente generico è

irreduttibile» si fonda l'applicazione del processo che tu conosci. Proietto una sup[erficie] in modo semplice o multiplo successivamente dai piani tangenti fino a giungere ad una rigata o ad una sup[erficie] raz[ionale] (di Veron[ese]). Risalendo escludo coll'uso della formula del genere d'una curva spezzata la possibilità di proiezioni multiple (essendo $r \geq 3p + 5$), e coll'uso del tuo teorema sulle involuzioni[5] dimostro che una rigata irraz[ionale] è proiezione d'una rigata.

Affettuosi saluti

dal tuo
F.E.

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] In una lettera del 27 ottobre 1893 Corrado Segre aveva espresso a Castelnuovo l'intenzione di proporre Enriques per un posto di assistente a Torino. Le ragioni per le quali non fu possibile attuare questo proposito sono esposte in questa corrispondenza e nelle lettere di Segre a Castelnuovo del 23 e 27 ottobre e del 2 e 5 novembre 1893, riportate in Appendice (pp. 671-73).

[3] Enriques 1894e.

[4] In Enriques 1894e l'enunciato di tale proposizione è attribuito a Pasquale Del Pezzo senza alcuna indicazione bibliografica.

[5] Cfr. p. 21, nota 3 a let. 16 (5.8.1893).

29. [c.p.]

[Firenze] Domenica [5 novembre 1893]

Carissimo Castelnuovo

Ricevo dal S[egre] la notizia che le sue pratiche non hanno approdato a nulla, sicché pare non vi sia più speranza ch'io possa avere il collocamento. Prima di rassegnarmi tento ancora di scavare qualche altra cosa: perciò domani vado a Pisa a parlare col Bert[ini] e col Bi[anchi].

Il Bonaventura che ha avuto il perfez[ionamen]to si recherà a Roma per destinazione del Cons[iglio] Sup[eriore].

Il Montesano andando a Napoli non vi sarà cambiamento di aiuti a Bologna?

Ti saluto affettuosamente.

Tuo
F Enriques

[P.S.] Ti ho inviato il mio lavoro[1] dell'Istituto Veneto.

[1] Enriques 1893g.

30.

[7 novembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Ricevo la tua lettera e la tua nota,[2] di cui ti ringrazio.

Ieri ti avevo scritto da Pisa una cartolina che per sbaglio non ho impostato nella quale ti esponevo idee che s'incontrano colle tue: ho sentito che è vacante il posto ad un Ginnasio di Roma e te ne domandavo notizia; occuperei volentieri (provvisoriamente) un tal posto che mi riavvicinerebbe a te. L'unico resultato positivo della mia gita a Pisa è stato che il Bert[ini] ha scritto a Pincherle (come appunto tu oggi mi suggerisci); anche il Volt[erra] gli ha scritto allo stesso proposito. A Pisa speravo qualche altra cosa, cioè di poter ottenere un nuovo posto di perfez[ionamen]to Lavagna[3] (come ebbi il 1° anno), ma ho dovuto rinunziarvi sebbene il Bianchi e il Bert[ini] che (mi si mostrarono ambedue molto benevoli) fossero disposti in mio favore; invero il Dini vuol preferire per massima i nuovi laureati, e facendo egli parte della commissione amministratrice di quei posti ed il Bert[ini] e il Bi[anchi] della commissione esaminatrice, mi sarebbe avvenuto come pei posti all'interno.

Sono grato al Cr[emona] e al Cer[ruti] delle loro buone intenzioni e tu, vedendoli, potrai ringraziarli e salutarli a mio nome.

Dal S[egre] attendo notizie più precise sebbene abbia capito non esservi più speranza d'un buon esito; anche a lui ho domandato di qualche scuola secondaria a Torino. Essendogli molto grato di quel che ha tentato e pensato per me, ho creduto dovere d'amicizia e di franchezza esporgli apertamente come nel caso avessi avuto il perfez[ionamen]to e la scelta della sede sarei andato a Roma. Trattandosi di cosa svanita, ed esprimendogli io sinceramente il rammarico che in ogni caso avrei avuto di perdere la sua vicinanza, rammarico che solamente dalla tua compagnia e dal tuo affetto poteva esser compensato, io penso che non solo egli non dovrebbe aversene a male (e di questo anzi sono sicuro) ma dovrebbe anche apprezzare i sentimenti gentili verso di lui che hanno prodotto una così franca e spontanea confessione. Non ho dimenticato di dirgli i tuoi amichevoli, modesti, consigli in senso opposto. Insomma ho la coscienza di aver parlato a lui come ad un amico che stimo, e se per disgrazia fossi riuscito invece a dispiacergli non potrei rimproverarmi se non forse di non aver saputo esprimere convenientemente i miei sentimenti. Non mi pare il caso che tu ne parli con lui, almeno ora per lettera e ti terrò informato della sua risposta che ho fiducia sia benevola. D'altronde se io gli ho fatto una confessione che potevo risparmiarmi con mio probabile vantaggio, è perché a me pareva male di

usufruire del bene che l'opera sua poteva procurarmi, ed in certo modo nascondergli quasi qualche cosa: tu intendi insomma che il motivo fu delicato.

Ti saluto affettuosamente e ti scriverò appena saprò qualcosa sia o no favorevole.

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Probabilmente Castelnuovo 1893c.
[3] Al nome del matematico pisano Giovanni Battista Lavagna era intitolato il posto di perfezionamento presso la Scuola Normale Superiore.

31. [c.p.]

[Firenze, 8 novembre 1893]

Carissimo Castelnuovo

Il S[egre] mi risponde in termini molto *affettuosi*: ne sono proprio contento.

Egli mi segnala la lettura di una nota di Humbert[1] (28 Agosto [18]93) (Comptes rendus) che contiene infatti un bellissimo teorema. Ma ciò che più mi ha fatto impressione è il corollario:

Ogni superficie contenente una serie di curve razionali, senza punti doppi mobili, d'indice > 0 è razionale.

Invero di qua si trae la razionalità delle involuzioni piane: basta per questo considerare il sistema delle curve che sopra una sup[erficie] F riferita ai gruppi dell'involuz[ione] piana corrispondono alle rette d'un fascio del piano.

Il teorema di Humbert mi sembra anche più generale. Appura la cosa e specialmente riguarda la dimostrazione ch'io non ho capito. In ogni caso la priorità nella questione delle involuzioni è sempre tua[2] perché Humbert non ne parla e la deduzione accennata sopra (basata sopra un tuo ragionamento) non è evidente.

Cordiali saluti

dal tuo aff.mo
F Enriques

[1] Humbert 1893b.
[2] Il primo articolo di Castelnuovo riguardante la razionalità delle involuzioni piane (Castelnuovo 1893c) fu presentato all'Accademia dei Lincei il 27 agosto 1893, con un giorno d'anticipo rispetto alla memoria di Humbert in questione.

32. [c.p.]

[Firenze, 9 novembre 1893]

Carissimo

È la 1ª volta che ho piacere accorgendomi di avere errato. La lettura della nota di Humbert[1] mi aveva fatto tale impressione che nella fretta ho dimenticato la condizione che le curve razionali del sistema non abbiano p[un]ti doppi mobili ciò che non è vero nel caso in questione. Tu te ne sarai già accorto, ed io ne sono lietissimo. Quel ragionamento serve solo a stabilire uno dei tuoi teoremi cioè l'esistenza d'un sistema di curve di dimensione > del genere. Spero mediante il teor[ema] di H[umbert] di studiare le sup[erficie] con ∞ trasf[ormazioni] in sé.

Riguardo al mio collocamento nulla di nuovo.

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Humbert 1893b.

33.

[11 novembre [18]93][1]

Carissimo

Il prof. Pincherle scrive al Volt[erra] che non vi sono posti di assistente a Bologna. All'insegnamento della Geom[etria] pr[oiettiva] e descr[ittiva] non è stato ancora provvisto,[2] ed egli mi propone di propormi alla Facoltà come incaricato avvertendo trattarsi di cosa provvisoria (pel corrente anno): non sa però se la facoltà possa avere un altro candidato in *pectore*. Il Volt[erra] mi aggiunge credere che il prof. Razzaboni di là (direttore delle scuole tecniche) abbia tenuto altra volta un incarico nell'Università di Bologna, questi potrebbe essere il candidato in pectore che potrebbe avere l'appoggio di altri prof[essori] della facoltà. Io ho risposto subito al Volt[erra] accettando l'eventuale ufficio, non senza trepidanza però. La condizione che l'incarico sia soltanto provvisorio lungi dal darmi noia, l'avrei posta io se non fossi stato prevenuto, e tu indovini il perché. Io non mi faccio illusioni sull'esito d'un possibile concorso fra un anno, ma ciò che dopo un anno non costerà sacrificio del mio amor proprio lo costerebbe in seguito perdurando un tale incarico.

Sono molto trepidante come ti dicevo: la responsabilità di dovere (in caso favorevole) preparare due corsi, mi si affaccia intera, e non mi nascondo neppure che ciò mi danneggerà per il lavoro a cui dovrò sobbarcarmi, togliendomi in gran parte il tempo per le occupazioni scientifiche. Tuttavia non

ho il coraggio di rifiutare una così bella proposta, troppo superiore a ciò che potessi aspirare, ed il Volt[erra] ha finito di vincere ogni mia perplessità. È però tanto il timore che m'incute l'ipotesi favorevole che quasi avrei piacere se la facoltà non ne facesse niente se altre considerazioni non prendessero il sopravvento.

Il Volt[erra] si propone di raccomandarmi anche ad Arzelà e ad altri prof[essor]i della facoltà per trionfare di ogni ostacolo.

Se la cosa avesse effetto io ricorrerei, come sempre, a te per aiuto; specialmente per la preparazione del corso di Descr[ittiva]. Tu saresti ora in condizioni migliori per consigliarmi avendo dovuto occuparti ora per quel corso.

Caro Castelnuovo, la comunicazione di Volt[erra] mi ha messo proprio la rivoluzione nell'animo: una folla di speranze, di timori, di titubanze: nel desiderio d'una cosa lontana si vede soltanto il lato bello, ma quando si è più vicini a raggiungerla si prova spesso una impressione di sgomento. Tale è la mia condizione.

Ti terrò informato di quel che succederà. Dimmi anche tu la tua opinione sebbene ormai per parte mia abbia già accettato. Ho fatto male? Tu seguiteresti ad aiutarmi e consigliarmi anche da lontano, non è vero?

Cordiali saluti.

Tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] In questo momento ricevo da Bert[ini] la comunicazione già avuta da Volt[erra].

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] La cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Bologna divenne vacante nel 1893 a seguito del trasferimento a Napoli di Domenico Montesano, che ne era stato titolare dal 1888.

34. [c.p.]

[Firenze, 14 novembre 1893]

Carissimo

Ti ringrazio dei tuoi incoraggiamenti e consigli. Passato il 1° momento quasi di sgomento, avrei ora un gran desiderio che la proposta di P[incherl]e andasse ad effetto. Ma a quanto mi scrive Bert[ini] la fac[ol]tà dovrà prima decidere se chiamare un ordinario.

Sto redigendo faticosamente il mio lavoretto[1] «sulla massima dimensione ecc.». Quante difficoltà per essere rigorosi!: ad es[empio] per una

sup[erficie] di S_r ($r > 4$) un piano tangente generico può segare in altri p[un]ti in numero finito la sup[erficie]? Io credo che il metodo di proiez[ione] delle sup[erficie] sia stato ben di rado applicato con rigore. Nondimeno spero riuscire.

Addio cordiali saluti dal tuo aff.mo

F Enriques

[1] Enriques 1894e.

35. [c.p.]

[Firenze] Domenica[1] sera [20 novembre 1893]

Carissimo

Torno ora da Bologna e trovo la tua cartolina cui rispondo subito.

Sono andato a Bologna per consiglio del Volt[erra] onde parlare della cosa con Arz[elà] e P[incherl]e. Tra i diversi pareri ha trionfato quello di chiamare prof[essor]e il Pieri:[2] se fosse stato deciso di aprire il concorso tutti erano concordi di darmi l'incarico. Io ho piacere della cosa pel Pieri quantunque per me sia un danno: ma in fondo per la ragione che già ti dissi, non mi dispiace troppo di essere esonerato da un ufficio troppo alto per me. Spero avere il posto del P[ier]i a Tor[ino] e perciò scrivo a S[egre]. Anzi avrei idea di non aspettare una decisione ufficiale e di recarmi presto a Tor[ino]: ciò potrebbe agevolare l'esito delle pratiche e mi darebbe intanto occasione di stare col S[egre].

Ti avviserò di ogni ulteriore decisione e risponderò alle tue domande matem[atiche] inviandoti quanto prima il manoscritto.[3] In massima ogni difficoltà pare superata.

Addio aff.mo

F Enriques

[1] Dal timbro postale risulta la data del giorno successivo, lunedì 20 novembre.

[2] Mario Pieri era risultato secondo classificato al concorso di Torino: cfr. p. 25, nota 4 a let. 19 (8.9.1893).

[3] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894e.

36.

[20 novembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Mi prendo la libertà d'inviarti il manoscritto del mio lavoretto[2] «sulla massima dimensione ecc.». Ne sono contento perché sono riuscito ad evitare completamente l'uso della formula che dà il genere delle curve spez-

zate. È stato però un piccolo «tour de force». Spero non essere caduto in errori avendo curato il rigore con scrupolo; soltanto in fondo pel caso particolare dei sistemi non semplici di curve ellittiche, vi è nella mia dimostrazione una piccola lacuna che non mi è venuto fatto di colmare (la vedrai segnata nel manoscritto) ma è ad ogni modo cosa non importante, e forse il dubbio potrà anche eliminarsi facilmente.

A parte questa piccolezza (perché si potrebbe far di meno di quel resultato) ti ripeto mi sembra che tutto vada bene, ma ti sarei molto grato se anche tu volessi acquistarne la convinzione, trattandosi di questioni assai delicate. Vedrai che ho dato la dimostrazione del fatto che l'unica sup[erficie] di S_5 con ∞^2 sezioni tangenti spezzate è di Veronese, mentre ho dovuto tener conto della possibilità che per una non rigata di S_5 il piano t[an]g[ente] seghi in p[un]ti isolati la sup[erficie] (senza di questo avrei semplificato molto facendo a meno del tuo teorema sulle involuzioni irrazionali).[3]

Mi piace il resultato che mi annunzi sulla razionalità delle sup[erficie] a sezioni ellittiche che non hanno le ∞^2 sezioni tangenti spezzate[4] e ti sarò grato se vorrai comunicarmene la dimostrazione.

Alcuni altri dettagli sull'affare di Bologna di cui ti scrissi in fretta ieri sera.

La facoltà era divisa. Arzelà voleva ad ogni costo il concorso (per massima), invece Righi che ha avuto il Pieri come scolaro all'Ist[ituto] tecnico, appoggiava la nomina, secondato (sebbene meno saldamente) dal Pincherle (in confidenza, pare che il Del Re faccia una gran paura!). Arzelà aveva scritto al Volt[erra] istigandomi a domandare l'incarico ufficialmente, onde Volt[erra] mi consigliò ad andare a Bol[ogna] per parlare con lui. Non ho poi fatto niente, anche per riguardo al Pieri e perché ad Arzelà parve conveniente differire, limitandomi a parlare con Arzelà, Pinch[erle] e Righi. Per l'influenza del Righi sui naturalisti è stata approvata la chiamata del P[ier]i nonostante l'opposizione (per massima) di Arz[elà]. Il P[ier]i era appoggiato da una lettera di D'Ovidio.

Il lato comico. Dopo la decisione il preside della fac[oltà] ha detto che aveva visto a Roma D'O[vidio] e che questi gli aveva raccomandato non nominassero mai un 2° del concorso di Tor[ino],[5] senza nuovo concorso!

Ho avuto da Arz[elà] e Pinch[erle] un'accoglienza molto gentile: ho conosciuto la famiglia del P[incherle] ed ho avuto con lui lunghe conversazioni matematiche. Ambedue mi hanno assicurato che aggiungeranno nella proposta al Ministro, l'invito a darmi l'incarico ove eventualmente il P[ier]i non fosse nominato.

Così mi ritengo sicuro d'una collocazione per quest'anno. Sarebbe una bella cosa se io potessi riunire i due posti che il P[ier]i lascerà vacanti.[6]

Per ottenere qualche cosa all'Acc[ademia] Milit[are] sono disposto a partire presto, forse domani l'altro sera, se avrò ricevuto risposta dal S[egre].

Per me un tale collocamento a Tor[ino] in luogo di quello troppo alto di Bol[ogna] non dispiace: mi dispiace invece (per essere sincero) che venga a coprirsi così una nuova cattedra e quindi si affretti il momento della chiusura che potrebbe lasciarmi al di fuori. Arz[elà] voleva ancora ch'io facessi domanda dell'incarico al Ministro per oppormi alla nomina del P[ier]i, ma naturalmente io ho rifiutato, ché ciò sarebbe stato brutto verso il P[ier]i e verso me stesso, ed anche Arz[elà] se ne è convinto.

Inutile ti raccomandi la segretezza su tante cose confidenziali che ti ho raccontato.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Enriques 1894e.
[3] Cfr. Castelnuovo 1893b.
[4] Cfr. Castelnuovo 1894c.
[5] L'allusione è a Mario Pieri.
[6] Pieri era assistente all'Università di Torino e insegnava Geometria proiettiva all'Accademia Militare.

37.

[22 novembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Aspetto ancora per prendere una decisione la risposta di S[egre], che tarda non so perché: forse egli non avrà potuto parlare subito col Berz[olari] il quale (come ho saputo ieri) è a Torino. Però credo che il ministro tirerà via riguardo alla nomina del P[ier]i senza consultare il Cons[iglio] Sup[eriore] come è intendimento della fac[ol]tà. Ad ogni modo la risposta del ministro si farà aspettare: qualora dovessi andare a Bol[ogna] si tratterebbe ormai d'una cosa per il Gennaio: nel dubbio circa il mio collocamento avrei dunque il vantaggio di stare intanto a Torino, dove d'altra parte cercherei di ottenere un impegno dall'Accad[emia] Militare (anche per cosa provvisoria) pel caso della partenza del P[ier]i. Un collocamento all'Accad[emia] mi piacerebbe assai vista la difficoltà del momento; se infatti P[ier]i andrà a Bol[ogna] e l'altro[2] a Roma se s'aprirà il concorso per la descrittiva, cosa rimarrà? In tale eventualità tu vedi come io dovrei pensare non più soltanto a studiare ma anche a farmi una posizione un po' più durevole, per

8 o 10 anni. Certo sarebbe per me un gran dispiacere il rinunziare al collocamento che tu gentilmente mi offri a Roma come tuo aiuto, per il prossimo anno: tu sai che dicendoti questo non lo faccio per complimento; è insieme il piacere della tua amicizia, e l'utilità scientifica che mi seducono; ma quando le probabilità d'una cattedra dovessero ridursi alla speranza per un tempo remoto, un assetto più stabile mi diverrebbe necessario, ed a questo l'Accad[emia] Mil[itare] ottempererebbe nel miglior modo, giacché riunendo un posto d'assistente all'U[niversi]tà guadagnerei quasi £ 3000, senza precludermi la via dello studio.

Del resto su di ciò avremo in caso il tempo di riparlare, e tu stesso potrai parlarmene francamente consigliandomi senza falsi scrupoli, come si parla ad un amico che è certo esser consigliato per il proprio bene.

Ieri sono stato a Pisa: per un errore del Consiglio di leva ho corso il rischio di esser sottoposto ad una nuova visita militare, ma tutto è stato appianato. Ho visto Bert[ini] che ha saputo soltanto da me la notizia relativa al P[ier]i; a lui (per quanto mi è parso) la cosa sembra naturale. Non così a Volt[erra] e Bianchi, i quali in questo caso sono forse un po' parziali desiderando per me l'incarico.

Nel manoscritto[3] che ti ho inviato ove dimostro che una sup[erficie] ($r \geq 3p + 5$) non può essere proiettata da un p[ia]no t[an]g[ente] in modo multiplo, sopra una rigata razionale, sono incorso nel solito errore staccando dal sistema delle sez[ioni] successive generatrici (pare impossibile!). Me ne sono accorto ripensandoci. La cosa si rimedia così (da sostituirsi al passo errato):

«Sulla rigata $F^{(k)}$ dico che la curva di diramazione della corrispondenza $[1\ m]$ con $F^{(k-1)}$ non sega le generatrici z. Supponiamo il contrario. Vi è in S_{r_k} un iperpiano contenente $\left[\frac{r_k}{2}\right]$ generatrici della $F^{(k)}$ onde intanto la curva di diramaz[ione] è d'ordine $\geq \left[\frac{r_k}{2}\right] \geq \frac{r_k}{2} - 1$: ma ad una generatrice corrispondono sulla $F^{(k-1)}$ $\frac{m}{\delta}$ curve in corrispondenza δ-voca (che danno un fascio), sicché sulla generatrice vi sono $2\frac{m}{\delta}(\delta - 1)$ p[un]ti di diramazione e segue $\delta > 1$: allora l'ord[ine] della curva di diramaz[ione] è $> 2\frac{m}{\delta}(\delta - 1)\frac{r_k}{2}$: ma questo ord[ine] vale $2(m + p_{k-1} - 2)$, e $\frac{\delta - 1}{\delta} \geq$ $\geq \frac{1}{2}$ sicché

$$m + p_{k-1} - 2 \geq \frac{m}{2}\left(\frac{r_k}{2} - 1\right)$$

ossia

$$m\left(\frac{r_k - 6}{4}\right) \leq p_{k-1} - 2,$$

e perché $m \geq 2$

$$\frac{r_k - 6}{2} \leq p_{k-1} - 2$$

$$r_k \leq 2p_{k-1} + 2:$$

ma $r_{k-1} = r_k + 3$ onde $r_{k-1} \leq 2\,p_{k-1} + 5$ il che è assurdo».

Analogamente mi pare possa correggersi un altro punto ove è applicato lo stesso procedimento, collo stesso errore.

La piccola lacuna che come ti dicevo nella passata lettera,[4] è rimasta alla fine del lavoro, mi pare possa colmarsi così:

«Si tratta di dimostrare che se una rigata ellittica F' è riferita in corrispondenza [1 m] con $m > 1$ ad una sup[erficie] F, in modo che alle sezioni del cono corrispondano curve C ellittiche, alle generatrici del cono corrispondono gruppi di m curve semplici su F. Facciamo segare sulla sup[erficie] F le C (di $|C|$) dagli iperp[iani] per un punto O e indichiamo con K le curve (irriduttibili) corrisp[ondenti] alle rette di F': esse sono piane. Proiettando la F dal p[un]to O si ha la rappres[entazione] su F', e nasce su F' una curva di diramaz[ione] d'ord[ine] > 0 (il che è impossibile) se le K non sono curve d'or[dine] n con O $(n-1)$-plo. In tal caso le K su F corrispondono semplicemente alle generatrici di F', e la F è riferibile ad una rigata ellittica; di cui le C sono direttrici».[5]

Ti scriverò subito appena prendo una decisione. Affettuosi saluti

dal tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Scuse per l'errore incorso.

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Enriques si riferisce probabilmente ad Alfonso Del Re; cfr. p. 25, nota 4 a let. 19 (8.9.1893).

[3] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894e.

[4] Cfr. p. 40, let. 36 (20.11.1893).

[5] Da «Proiettando» a «direttrici» il testo della lettera nell'originale è tormentato da molte correzioni.

38. [c.p.]

[Firenze, 23 novembre 1893]

Carissimo

Due righe per avvertirti che parto stasera per Tor[ino]. Il S[egre] mi scrive che se il P[ier]i partirà il Berz[olari] mi proporrà per suo aiuto. Circa alla nomina del P[ier]i egli non sa nulla di più, ma io parto ugualmente per le ragioni che ti dissi. Ti darò di là il mio indirizzo, intanto puoi scrivermi fermo in posta.

Credo di esser pervenuto al seg[uente] teor[ema]: «Se una curva può rappresentarsi parametricamente colle eq[uazioni] $x = \varphi_1(X\ t)$, $y = \varphi_2(X\ t)$, dove φ_1 e φ_2 son funz[ioni] raz[ionali] ed X è irraz[ionale] legato a t da un'eq[uazione] $f(X\ t) = 0$ di grado n in X (irraz[ionale] di grado n), la curva contiene una g_n^1 (data dai gruppi X) o è riferibile a una curva d'ord[ine] n».[1] La cosa mi sembrerebbe avere un certo interesse.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] Cfr. Enriques 1896a, che sarà presentato per la pubblicazione nell'agosto 1895.

39. [c.p.]

[Torino, 24 novembre 1893]

Carissimo Castelnuovo

Due righe da Torino per darti il mio indirizzo (Corso Duca di Genova 10, 2° p[ia]no). Sono giunto qui stamani.

Ho visto il S[egre] ed il Berz[olari] che mi è riuscito assai simpatico. Ho parlato anche col P[ier]i, ma per l'Acc[ademia] Mil[itare] pare vi sia poca speranza. Invece il Berz[olari] mi ha confermato a voce ciò che il S[egre] mi scrisse cioè che mi prenderebbe per aiuto ove il P[ier]i andasse via.

Saluti affettuosi

dal tuo
F Enriques

40. [c.p.]

[Torino, 26 novembre 1893]

Carissimo

Grazie della tua buona risposta (ricevuta ieri). Però a quanto mi dice il P[ier]i ed il S[egre] ottenere un posto all'Acc[ademia] Mil[itare] non sarà facile; né io lo rammaricherò molto, contento in fondo (quando non mi

s'imponga il dovere d'assicurarmi una posizione più stabile) di rinunziare ad un maggior lucro per tornare ad accarezzare gli antichi progetti.

Aspetto con interesse ciò che mi comunicherai intorno al manoscritto[1] che ti ho mandato, di cui mi fai cenno nella cartolina.

Il P[ier]i ed io vorremmo saper qualcosa intorno alla risoluzione del ministro per l'affare Bologna,[2] anzi credo che il P[ier]i abbia intenzione di scriverti in proposito. Hai tu mezzi di essere informato? Forse Pittarelli sarebbe al caso.

Il P[ier]i ti saluta.

Una affettuosa stretta di mano dal tuo F Enriques

[1] L'allusione è al manoscritto di Enriques 1894e.
[2] Cfr. p. 39, c.p. 35 (20.11.1893).

41.

30 Nov[embre 18]93

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto ieri la lettera e il manoscritto.[1] Ti ringrazio proprio di cuore della cura con cui hai voluto rivederlo; è una delle tante gentilezze che tu mi usi continuamente senza che mi si presenti mai l'occasione di offrirtene il contraccambio.

Ciò che tu mi scrivi è interessante, ma mi occorre di pesarlo meglio. Però spero di introdurre una semplificazione anche maggiore, cioè fondere i 2 casi in cui la rigata $F^{(k)}$ proiezione di $F^{(k-1)}$ è irraz[ionale] o raz[ionale] e trattare tutto col metodo adottato nel 2° caso, cioè col ragionamento che ti scrissi come correzione di quello del manoscritto. Il caso che l'iperpiano di $\left|\frac{r_k}{2}\right|$ generatrici contenga una parte (direttrice) della curva di diramazione, se non mi inganno, non altera che lievissimamente il ragionamento in discorso.

Quanto al 2° lemma «Per una sup[erficie] di S_5, non rigata, la sez[ione] iperp[iana] t[an]g[ente] si spezza solo se la sup[erficie] è di Veronese» la semplificazione che mi suggerisci in margine al manoscritto (che è in sostanza il 1° ragionamento con cui pervenni al teorema), non mi sembra del tutto rigorosa: invero si sa che un S_3 generico per un p[ia]no t[an]g[ente] non sega la sup[erficie] in punti fuori del p[ia]no, ma per trarre la conclusione enunciata occorrerebbe ancora di escludere che il p[ia]no t[an]g[ente] seghi altrove la sup[erficie].

Della nota di Kronecker mi ha parlato anche il S[egre], ma non vi è

nulla di preciso: l'enunciato che tu ed il S[egre] gli attribuite si rileva appena dalle parole di ringraziamento di Cr[emona].[2]

Avendo pensato anche tu a queste questioni ti sarai accorto di quanta delicatezza esse sieno e però mi scuserai delle imperfezioni in cui sono caduto.

A proposito di errori (pur troppo!!) ti dirò che confrontando il 3° vol[ume] ora apparso dell'opera di Lie[3] ho riconosciuto una omis[sione] nell'ultimo § [paragrafo] della mia memoria[4] dell'Istituto Veneto (sfuggito anche all'esame minuto che del lavoro fece Bert[ini] insieme con me): fra le sup[erficie] con più che ∞^2 trasf[ormazioni] pr[oiettive] in sé non è ivi annoverata la rigata cubica con la diret[trice] ∞ [infinitamente] vic[ina] alla retta doppia (che ne ha ∞^3). Avevo una gran paura di confessare la cosa al S[egre], ma egli mi si è mostrato assai indulgente: ora però mi toccherà scrivere al Bert[ini], ma aspetto di aver redatto una notizia di rettifica.[5]

Non so se sarò a Firenze pel 20 Dec[embre]. I miei movimenti sono collegati alle risoluzioni del ministro riguardo al P[ier]i.[6] Io sono venuto qui aspettando la partenza del P[ier]i, mentre la cosa va in lungo: se il P[ier]i parte non verrò via probabilmente per Natale; ma se invece dovessi andare a Bologna verrei allora a Fir[enze]. Anzi se dovessi stare a Bol[ogna] probabilmente cercherei il modo di passare con te qualcheduna delle vacanze dell'anno, giacché là mi troverei scientificamente isolato. Anche qui sento molto la tua mancanza e non soltanto come amico. Il S[egre] lo vedo spesso (anzi egli mi ha indicato molto gentilmente le sue ore di uscita onde possa trovarlo), ma per poco tempo, giacché egli è molto occupato.

Presto ti parlerò un po' più diffusamente delle ricerche che sto facendo sulla rappresentazione parametrica delle curve (di cui ti feci cenno).[7] Tu pure tienimi al corrente di ciò che vai pensando.

Una affettuosa stretta di mano

dal tuo
F Enriques

[P.S.] Ho ricevuto e corretto le bozze della mia nota lincea:[8] vedrai che ho semplificato anche quella trasformaz[ione] di varietà secondo tu mi dicesti.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894e.

[2] Enriques si riferisce all'enunciato di un teorema che Leopold Kronecker comunicò verbalmente all'Accademia dei Lincei nella seduta del 2 maggio 1886. Dal rendiconto della seduta risulta solo il titolo della nota presentata e un cenno di ringraziamento da parte di Luigi Cremona: cfr. Kronecker 1886.

Castelnuovo diede una dimostrazione del teorema, oggi noto come teorema di Kronecker-Castelnuovo, in Castelnuovo 1894b; cfr. l'introduzione all'articolo per le notizie storiche riportate al riguardo.

Una precisazione ulteriore si trova in Enriques 1895d, 174, nota 8: «La dimostrazione che il Kronecker diede di questo teorema non fu pubblicata; l'illustre geometra si riserbava

di ritoccarla quando la morte lo colse. Una dimostrazione del teorema fondata probabilmente su concetti diversi fu data dal sig. Castelnuovo [...]. Questi anzi mi prega di aggiungere alle notizie che egli diede sul teorema di Kronecker quella qui contenuta che egli deve alla cortesia del prof. G. Loria».

[3] Lie 1888-93, III.

[4] Enriques 1893g.

[5] Cfr. Enriques 1894a.

[6] Cfr. p. 39, c.p. 35 (20.11.1893).

[7] Cfr. p. 44, c.p. 38 (23.11.1893).

[8] Enriques 1893c.

42.

Martedì [5 dicembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Sono immerso in nuove difficoltà a proposito del solito problema della massima dimensione ecc.[2] Il fatto che staccando $\left[\frac{r_k}{2}\right]$ generatrici dalle sezioni iperpianali di una rigata $F^{(k)}$ di S_{r_k} possa aversi come curva direttrice una parte della curva di diramazione, porta conseguenze molto più gravi di quel che in principio mi parve. Mi pare infatti che esso infirmi irremissibilmente il ragionamento che ti scrissi tendente a mostrare che proiettando una $F^{(k-1)}$ di $S_{r_{k-1}}$ $(r_{k-1} \geq 11)$ da un p[ia]no t[an]g[ente] generico non può aversi una rigata raz[ionale] (pr[oiezione] multipla). Non presentandosi altra via sarò forse costretto a ricorrere qui alla formula del genere delle curve spezzate. In questo caso ciò sarebbe rigoroso se si dimostra che la $F^{(k)}$ non è un cono, giacché allora staccando una C di $F^{(k-1)}$ corrispondente ad una generatrice di $F^{(k)}$ (imponendo 1 p[un]to 2-plo) la curva spezzata ha i p[un]ti di connessione variabili ed allora la formula di Noether[3] può certo applicarsi legittimamente. Per mostrare che la $F^{(k)}$ non è un cono farei così. «Suppongasi che lo sia. Una generatrice di $F^{(k)}$ dà una C di $F^{(k-1)}$ che presenta 1 condiz[ione] agli iperpiani pel p[ia]no t[an]g[ente] di proiezione, onde ogni p[ia]no t[an]g[ente] incontra il 1° in un p[un]to. Tutti i p[ia]ni t[an]g[enti] si incontrano quindi 2 a 2, e non passando per un p[un]to si perviene a vedere che appart[engono] ad un S_5 il che è assurdo».

Forse dovendo usare questo procedimento converrebbe applicarlo anche all'altro caso in cui $F^{(k)}$ è rigata irraz[ionale], per non distinguere i 2 casi senza bisogno. Ma ciò che è peggio si è che pei sistemi non semplici ove si ricorre alle rigate multiple ci s'imbatte nella stessa difficoltà e qui l'uso della formula di Noether non è legittimato con = [uguale] sicurezza perché non può escludersi che la rigata multipla sia un cono. Mi vedrei dunque

costretto, nella peggiore ipotesi, ad usare quel ragionamento non del tutto rigoroso (sebbene soddisfacente) avvertendolo. Così non avrebbe effetto che sulla 2ª parte del lavoro.

Cosa ne pensi?

Credo che sia difficile scavare una questione più intricata per minutezza della mia.

Ti dissi che ti avrei parlato delle mie ricerche sulla rappresentazione parametrica delle curve. La mia attenzione ne è stata momentaneamente distolta. Però ho avuto anche lì una bella sorpresa (per quanto non fossi alieno dal prevederlo). Il problema di determinare le curve costruibili colla riga e col compasso, che si riduce alla determinazione delle equazioni risolubili per radicali quadratici (ch'io avevo risoluto), si trova già risoluto (sotto questa 2ª forma) nel Petersen,[4] in modo che il resultato principale cui sono pervenuto dopo lunghi sforzi non è nuovo! Come vedi in questi ultimi tempi non sono troppo fortunato.

E tu che stai facendo?

Il P[ier]i non ha saputo ancora nulla.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. Enriques 1894e.
[3] Cfr. p. 21, nota 2 a let. 16 (5.8.1893).
[4] Petersen 1887.

43.

Sabato [9 dicembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

La risposta che mi dai non mi pare che elimini la difficoltà ch'io trovavo nell'usare il noto ragionamento per stabilire che una rigata razionale F' non può esser proiezione multipla d'una F a sez[ioni] di gen[ere] p (>1) in S_r $(r \geq 3p+5)$, da un p[ia]no t[an]g[ente]. La difficoltà per me sta qui «si può supporre che la curva di diramazione della corrispondenza tra F' ed F si riduca tutta ad una curva direttrice della rigata contata più volte». Tu ammetti invece che fuori delle intersezioni della parte direttrice vi sieno sopra ogni generatrice $2(\pi + m - 1) - 1$ coincidenze.

Può darsi che il dubbio sopra esposto si possa eliminare, ma mi pare che non possa escludersi in modo evidente: se poi si eliminasse allora anch'io posseggo un ragionamento per giungere al resultato, un po' diverso dal tuo e che (se non m'inganno) serve anche se F' è rigata irrazionale.

Il S[egre] mi ha comunicato la tua dimostrazione del teor[ema] di Kr[onecker].[2] Quantunque vi sia da farvi qualche obiezione (come te ne sei accorto tu pure), quel ragionamento mi è piaciuto molto, e (se non erro) l'ultima parte di esso serve con lievi modificazioni per stabilire il resultato.

Osservo anzitutto ((penso al duale)) che in un p[ia]no t[an]g[ente] alla F ove sono m (>1) curve C componenti la sezione, 2 sole C possono e debbono aver comune il punto di contatto, le altre s'incontrano solo (forse) nei p[un]ti multipli, onde 2 C si distinguono dalle altre e generano 2 sistemi Σ Σ' (∞^2 ciascuno) che forse coincidono (e risulta poi che ciò avviene in fatto). La coincidenza di Σ Σ' è dimostrata se si stabilisce che una curva di Σ incontra in *un* punto una di Σ': infatti in tal caso coincidono i sistemi ∞^1 di curve di Σ e di Σ' ottenuti imponendo un punto base. Ora il tuo ragionamento dei tangenziali stabilisce appunto che in un p[ia]no t[an]g[ente] le 2 C nel p[un]to di contatto si segano *soltanto* in esso, e quindi dimostra il teor[ema]: non vi è bisogno infatti per quel ragionamento che le 2 C generino uno stesso sistema.

Il teor[ema] sulle sup[erficie] a sezioni ellittiche[3] e la dimostrazione che ne dai mi ha molto interessato. La questione per le varietà è assai più facile: io l'avevo già risoluta (col metodo che adopravo prima nella mia nota lincea)[4] nelle ipotesi delle sezioni iperpianali raz[ionali]: il tuo teor[ema] permette di asserire che così si ottengono tutte le varietà raz[ionali] a sezioni ellittiche (escl[usa] forse la var[ietà] cub[ica]). Però la difficoltà (e la noia) sta nel trovare i sistemi rappresentativi, ciò che mi ha arrestato.

Ora sono attratto da altre questioni. Dallo studio della rappresentazione parametrica delle curve sono passato a quello strettamente affine delle involuzioni irrazionali sopra una curva. Due concetti mi sembrano fecondi in tale ordine di ricerche; cioè gli integrali abeliani (in ispecie il teor[ema] di Hurwitz[5] che non so se sia proprio suo), e la teoria dei gruppi. Il 2° concetto stabilisce proprietà relative ai punti di coincidenza: p[er] e[sempio] si ha subito che se su una curva vi è una involuzione senza coincidenze la curva (e l'involuzione) è ellittica: se vi è una sola coincidenza (multipla) la curva possiede una trasf[ormazione] ciclica in sé ecc.

Degli integrali abeliani (che ho recentemente studiato) mi servo per cercare il massimo numero di inv[oluzioni] irraz[ionali] che può stare sopra una curva (con qualche restrizione perché una inv[oluzione] ellittica ne porta ∞ composte). Che sopra una curva vi sia soltanto un num[ero] finito di inv[oluzioni] di gen[ere] >1 (e mai una infinità di inv[oluzioni] ellittiche) si trova implicitamente dimostrato da Painlevé (Annales de l'École Normale - 1891 - 2° cap.).[6] Guarda questa memoria (che il S[egre] mi ha indicato) e che ti interesserà per il legame di quelle ricerche colle tue[7] e

non solo per ciò che ti ho detto. Vi è in quel lavoro un ragionamento che (se non erro) conduce facilmente al tuo teorema delle inv[oluzioni] (Lincei [18]91):[8] solo egli se ne serve male e ne deduce che se sopra una C_p vi è una γ^1_m di gen[ere] π è $2m(\pi-1)=2(p-1)$! Ha dimenticato la formula di Zeuthen.[9] Sebbene di questa formula spropositata egli si serva poi, non mi pare che i suoi resultati (almeno i principali) ne sieno scossi.

Sono poi notevoli in quel lavoro (che pure dà così bei resultati) alcune ingenuità: per esempio un teor[ema] che tradotto geom[etricamente] significa «sopra una C_p vi sono ∞ serie lineari g^1_m».

Le mie ricerche non si fonderanno del resto (almeno per ora) sulle cose del Painlevé sebbene vi abbiano relazione.

Per comprendere il legame fra la teoria abeliana e la teoria geom[etrica] ho dovuto faticare molto: quando redigerò il lavoro che sto pensando (di cui ti darò dettagli) cercherò di tradurre vari resultati analitici, e credo con ciò di far cosa utile risparmiando la fatica ad altri.

Il lavoro[10] sulla mass[ima] dim[ensione] sarebbe pronto ove mi decidessi a colmare la nota lacuna coll'uso della formula di Noether[11] (del gen[ere] curv[e] spez[zate]). Debbo farlo?

Il Volt[erra] è venuto qui definitivamente:[12] è per me un gran piacere (se dovrò trattenermi qui) giacché mi trovavo un po' isolato: egli viene a mangiare con me e parliamo spesso di mat[ematica]. Egli vede tutto dal lato fisico. La sua compagnia è per me molto piacevole ed utile.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. p. 46, nota 2 a let. 41 (30.11.1893).
[3] Cfr. Castelnuovo 1894c.
[4] Enriques 1893d.
[5] Cfr. Hurwitz 1887.
[6] Painlevé 1891.
[7] Cfr. Castelnuovo 1893b; a questo proposito si veda anche p. 12, nota 7 a let. 9 (9.7.1893).
[8] Cfr. Castelnuovo 1891d, 76.
[9] Si tratta della formula che lega i caratteri di due curve algebriche in corrispondenza (m, n): cfr. Zeuthen 1871a.
[10] Enriques 1894e.
[11] Cfr. p. 21, nota 2 a let. 16 (5.8.1893).
[12] Cfr. p. 28, nota 2 a c.p. 22 (3.10.1893).

44.

Martedì sera [12 dicembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Ciò che mi scrivi intorno alle coincidenze d'una g_n^1 non mi persuade interamente: un p[un]to in cui coincidano i punti d'un gruppo mi pare debba contarsi come $\frac{n(n-1)}{2}$ coincidenze anziché come n-1; anzi mi interesserebbe di esser sicuro intorno ad un tal fatto. Io direi che una coincidenza n-pla ne assorbe $\frac{n(n-1)}{2}$ perché ivi sono tante le coppie di p[un]ti coincidenti.

Il S[egre] mi ha mostrato la tua 2ª dimostrazione del teor[ema] di Kr[onecker][2] dopo ch'io ti scrissi, ed io pure osservai che ci eravamo incontrati in vari punti. Solo non capisco perché sostituisci un ragionamento più complicato a quello antico che ti portava a concludere che le intersezioni delle C_1, C_2 in un p[ia]no t[an]g[ente] sono nei tangenziali del p[un]to di contatto O rispetto alle 2 curve e però non esistono (fuori di O) altrimenti le C_1, C_2 si toccherebbero in O ed il p[ia]no sarebbe ivi bit[an]g[ente]. Quel ragionamento non mi pare supponga che C_1, C_2 appartengano ad = [stesso] sistema. Quanto al fatto (di cui ti occorre il duale) che una sup[erficie] irredut[tibile] non può avere ogni p[un]to come 2-plo, mi pare possa stabilirsi così.

Se il teor[ema] è falso si avrà una sup[erficie] irred[uttibile] $f(x\ y\ z) = 0$ tale che pei suoi p[un]ti è $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (non ovunque ossennò f è una cost[ante]). Fissati y, z, l'eq[uazione] in x $f(x\ y\ z) = 0$ è irredut[tibile] (salvo speciali valori di y, z): questa eq[uazione] di gr[ado] m (in x) ha le stesse rad[ici] della deriv[ata], cioè ha rad[ici] multiple quindi è riduttibile (assurdo).

Come fai a pervenire ai resultati che mi enunci sui sistemi rappres[entativi] delle varietà a sez[ioni] ellittiche? Quando ci pensai non vidi che vie assai lunghe e non facili per risolvere la questione. Perché chiami ultimo caso quello delle V^n d'ordine 6? Il valore massimo dell'ord[ine] non è 9? Questa questione è per me interessante e ci penserò volentieri se vedrò una via *simpatica* per trattarla.

Non posso darti esatti particolari sul mio lavoro in gestazione sulle involuzioni irrazionali (ti dissi che dalle questioni parametriche ero passato particolarmente a queste): te ne dirò tuttavia qualchecosa con riserva.

Sopra una C_p di gen[ere] g_p vi sieno delle inv[oluzioni] irraz[ionali] $\gamma_{m_1}^{\pi_1} \dots \gamma_{m_r}^{\pi_r}$ di gen[ere] $\pi_1 \dots \pi_r$, due a due non contenute in una inv[o-

luzione] irraz[ionale]: si stabilirebbe che i π_1 integrali che secondo Hurwitz[3] vengono forniti dalla 1ª (gli integrali lin[earmente] ind[ipendenti] della C_{π_1}), quelli della 2ª ecc., danno $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r$ integrali lin[earmente] ind[ipendenti] di C_p, sicché $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r \leq p$. Una inv[oluzione] γ_m^π su C_p si consideri come una corrisp[ondenza] [1 m] tra C_π, C_p o fra le sup[erficie] di Riemann S_π, S_p. Si ha allora da considerare il gruppo (di monodromia) formato dalle sost[ituzioni] che si producono sugli m p[un]ti d'un gr[uppo] di γ_m^π quando il p[un]to di S_π gira attorno ai p[un]ti di diramaz[ione]. Si stabilirebbe così che se γ_m^π non ha p[un]ti di coincidenza è $p = \pi = 1$. Più in generale se un'inv[oluzione] ha gruppo intransitivo si compone dei gruppi d'un'inv[oluzione] ellittica su C_p e viceversa ecc.

Seguirebbe che un'inv[oluzione] ellittica *semplice* (non composta dei gruppi d'un'altra) ed un'altra inv[oluzione] qualunque non sono contenute in una stessa inv[oluzione] a meno che la 2ª contenga la 1ª. In particolare il num[ero] delle inv[oluzioni] ellittiche semplici è $\leq p$.

Se 2 inv[oluzioni] non sono composte con una stessa la condizione perché sieno contenute in una stessa è che le trasformaz[ioni] $(m-1, m-1)$, $(n-1, n-1)$ da esse individuate sulla C_p, sieno permutabili. Di qui (sotto la prec[edente] restrizione) si avrebbe: «Se sono date r inv[oluzioni] e si possono ordinare in modo che due consecutive sieno contenute in una inv[oluzione], vi è un'inv[oluzione] che le contiene tutte». Onde le inv[oluzioni] irraz[ionali] di gen[ere] > 1 si dividono in gr[uppi] di inv[oluzioni] contenute in una stessa, e sono in num[ero] finito, di cui forse potrò assegnare un limite superiore.

Ho enunciato alcune di queste cose al Volt[erra] sotto forma di teoremi di riducibilità degli integrali abeliani (argomento assai studiato analiticamente) e mi pare non gli sieno dispiaciuti. Allo studio della rappres[entazione] parametrica propriamente detta (riducibilità dei gruppi delle inv[oluzioni]) tornerò poi.

In questi studi trovo una gran difficoltà ed ho paura di sbagliare anche più che in altri, a cagione della poca pratica analitica. Ma mi convinco sempre più quanto male sia non averne.

Ho mandato l'altro giorno al Bonaventura un biglietto di presentazione per te, desiderando egli conoscerti. Il ministro ha fatto a lui il tiro che il Cons[iglio] Sup[eriore] ha fatto a me,[4] e me ne è dispiaciuto per lui che ormai contava sul perfez[ionamen]to.

Nessuna notizia del P[ier]i:[5] al ministero aspettano per decidere la soluzione della crisi.[6] Ciò mi secca, desiderando ormai di fissarmi stabilmente qua o a Bol[ogna].

Il Bert[ini] mi aveva proposto di andare assistente dell'Aschieri a Pavia (in confidenza), ma non ho creduto mi convenisse accettare trattandosi di un assegno precario di 600 lire!

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[P.S.] Saluti dal Volt[erra].

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. p. 46, nota 2 a let. 41 (30.11.1893).
[3] Cfr. Hurwitz 1887 sullo studio delle corrispondenze algebriche fra due curve mediante gli integrali abeliani.
[4] Cfr. p. 29, nota 1 a c.p. 24 (17.10.1893).
[5] Cfr. p. 39, nota 2 a c.p. 35 (20.11.1893).
[6] Caduto il governo Giolitti il 28 novembre 1893, la crisi politica si risolse il 15 dicembre con la costituzione del terzo governo Crispi.

45.

Venerdì [15 dicembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

È chiaro che io erravo supponendo che una coincidenza n-pla d'una g_n^1 sopra una curva possa assorbire più di $n-1$ coincidenze. La possibile presenza di 2 coincidenze n-ple infinitamente vicine non dovrebbe alterare il ragionamento che mi occorre, onde dopo aver ripescato tutto con calma spero condurre a termine la redazione del mio lavoro.[2]

Quanto alle varietà V^n di S_{n+1} capisco anch'io che la questione non offrirà difficoltà troppo serie e ci ripenserò quando avrò tempo. (Il cono che proietta da O in S_{10} una sup[erficie] a sez[ioni] ellittiche di S_9 dà una V^n dove $n = 9$).

Eccoti un cenno della dimostrazione relativa al 1° teor[ema] sulle involuzioni irrazionali.

L'involuzione γ_m^π su C_p nasce da una corrispondenza [1 m] tra C_π C_p. Un integrale di 1ª specie di C_π è pure un integrale (sottintendi sempre di 1ª specie) su C_p (teor[ema] d'Hurwitz).[3] Nei p[un]ti d'un gruppo della γ_m l'integrale ha il valore che ha nel p[un]to corrispondente di C_π, onde quei p[un]ti sono p[un]ti di livello (p[un]ti di valore congruo) per l'integrale. Viceversa un integrale di C_p che ha come p[un]ti di livello quelli d'ogni gruppo della γ_m è un integrale di C_π. Invero se $x_1\ x_2 \dots x_m$ sono gli m p[un]ti d'un gruppo di γ_m, I l'integrale si ha

$$I(x_1) \equiv \dots \equiv I(x_m),$$
$$mI(x_1) \equiv I(x_1) + \dots + I(x_m);$$

differenziando

$$m\,dI(x_1) = \sum_1^m{}_k\, dI(x_k):$$

la $\Sigma\, dI(x_k)$ è funz[ione] simmetrica degli m p[un]ti del gruppo onde è funz[ione] algebr[ica] univoca del corrispondente p[un]to y della C_π, sicché $I(x_1)$ ha il differenziale algebrico univoco sulla sup[erficie] di Riemann di C_π, ed è finito e continuo ovunque onde è un integrale di 1ª specie su C_π.

Ciò posto si abbiano su C_p 2 inv[oluzioni] $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$, $\gamma_{m_2}^{\pi_2}$. Se i π_1 integrali che appartengono alla 1ª (alla C_{π_1}) non sono tutti linearm[ente] ind[ipendenti] dai π_2 della 2ª, vi è un integrale non cost[ante] appartenente ad ambedue che ha come p[un]ti di livello quelli d'un gruppo di $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$ e quelli d'un gruppo di $\gamma_{m_2}^{\pi_2}$. Prendiamo un gruppo di $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$ e costruiamo per ogni suo p[un]to il gruppo da esso individuato di $\gamma_{m_2}^{\pi_2}$: per ogni p[un]to d'un tal gruppo costruiamo il gruppo di $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$ ecc. Il nostro integrale (non cost[ante]) ha lo stesso valore in ciascuno dei p[un]ti così costruiti; ma esso non può avere ∞ p[un]ti di livello perché essi avrebbero dei p[un]ti limiti di singolarità essenziale per l'integrale, onde l'operaz[ione] prec[edente] non conduce a ∞ p[un]ti; ciò vuol dire che la costruzione riporta sui punti già costruiti dopo un numero finito di volte (e si potrebbe precisare): il gruppo dei p[un]ti è individuato ugualmente partendo da un gruppo di $\gamma_{m_2}^{\pi_2}$ in esso contenuto, o da uno di $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$: al variare di esso descrive un'involuzione contenente le 2 di cui i p[un]ti d'un gruppo sono di livello per l'integrale (l'involuz[ione] è algebrica perché si costruisce algebricamente). Se i gruppi dell'inv[oluzione] si fan corrispondere ai p[un]ti della curva C il nostro integrale appartiene alla C. Così si stabilisce che:

«Se fra gli integrali della $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$ ve n'è π (>0) che appartengono alla $\gamma_{m_2}^{\pi_2}$, le $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$, $\gamma_{m_2}^{\pi_2}$ sono contenute in una γ_m^{π}. È vero il teor[ema] inverso.

La questione è più difficile quando si hanno più di 2 inv[oluzioni], ma mi pare d'averla risoluta anche in quel caso. Ti darò dettagli se t'interessano. Dimmi intanto se ti va la dimostrazione che ti ho scritto sopra. Quantunque abbia ora imparato i fondamenti della teoria degli integrali abeliani, sono sempre sopra un terreno mal fido, su cui spero di fortificarmi sempre più. Le cose che si vedono colla teoria dei gruppi (meno utile in queste questioni), mi offrono meno difficoltà.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Enriques 1894e.
[3] Cfr. Hurwitz 1887.

46. [c.p.]

[Torino, 16 dicembre 1893]

Carissimo

Grazie dei nuovi resultati molto interessanti che mi fornisci sulle varietà a curve sezioni ellittiche. Capisco che escludi solo i coni non compresi nel tuo metodo. Quei resultati mi invogliano a studiar la questione, ma occorre prima ch'io rediga gli altri lavori in corso (mass[ima] dim[ensione][1] e involuz[ioni] irraz[ionali]). Intanto non mi è impedito di pensarvi di tanto in tanto; salvo che la questione piaccia a te e, avendo già cominciato, tu desideri di occupartene.[2]

La V^8 rappresentata dalle ∞^9 quadriche mi si era presentata anche a me, ma penso possa esservi un'altra V^8 a sup[erficie] sezioni rappres[entate] sul piano dalle cubiche per un p[un]to. Non vedo che una tale V^8 sia necessariamente una proiezione della V^9, come non vedo che una V^7 lo sia sempre di V^8.

Per le varietà a $r > 3$ dim[ensioni] a sez[ioni] ell[ittiche] (esclusi i coni) pare anche a me che esse si particolarizzino enormemente al crescere dello spazio ambiente ed intravedo pure un resultato del genere, di quello che tu fai seguire da un ? [punto interrogativo]. Occorrerà studiare prima le var[ietà] cub[iche] di S_n contenenti S_{n-2}.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[P.S.] Saluti dal Volt[erra].

[1] Enriques 1894e.

[2] Le ricerche di Enriques in questo campo furono pubblicate in Enriques 1894b, 1894c e 1895d. L'articolo del 1895 costituisce una sintesi di risultati precedenti, compresi quelli esposti in Enriques 1893d e in Castelnuovo 1894c e 1894d, con qualche estensione al caso delle varietà di dimensione 3 di $\mathbb{P}^4$.

47.

18 Dec[embre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Scusa se torno ancora a parlarti della questione della massima dim[ensione],[2] che ti avrà annoiato abbastanza (è venuta a noia anche a me).

La sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] p F di S_r ($r \geq 3p + 5$) venga proiettata nella rigata F' di $S_{r'}$ a sez[ioni] di gen[ere] p' da un p[ia]no t[an]g[ente].

Vi sono ∞ iperpiani che contengono $\left(\frac{r'}{2}\right)$ $\left| < \frac{r}{2} \right|$ generatrici di F': sopra una generatrice se la sua immagine C si spezza in v rappresentate in modo n-plo di gen[ere] π, si hanno $v\,2(n+\pi-1)$ coincidenze, onde l'iperpiano sega la curva di diramazione in $\left|\frac{r'}{2}\right| v\,2(n+\pi-1)$ p[un]ti, oppure se contiene una parte che può assorbire al più $v(n-1) < v(n+\pi-1)$ coincidenze, onde la curva di diramaz[ione] ha l'ordine $\geq \left|\frac{r'}{2}\right| v(n+\pi-1)$. Perciò si ha

$$2p-2 \geq vn(2p'-2) + \left|\frac{r'}{2}\right| v(n+\pi-1).$$

Questa disuguaglianza contraddice all'ipotesi $r \geq 3p+5$ (essendo $r = r'+3$) se $v(n+\pi-1) > 1$. Ma se $v(n+\pi-1) \leq 1$ si ha, o $n=1$ e la F è rigata, oppure $\pi = 0$ $n=2$ $(v=1)$. Allora le curve C danno un fascio di curve raz[ionali] sulla F; se $p'=0$ cioè la F' è raz[ionale] è pure raz[ionale] la F ed allora la questione si esaurisce. Non così se $p' > 0$.

Col prec[edente] ragionamento sostituisco il ragionamento un po' più lungo che mi suggerivi pel caso delle rigate raz[ionali] F'. Ma esso non è applicabile (come speravo, ed accadrebbe senza la possibile curva di diramaz[ione] multipla) quando $p' > 0$.

Perciò ho rimesso allo studio il ragionamento che mi proponesti quando mi rimandasti il manoscritto; ragionamento che mi pareva dovesse esser ben pesato, entrando in maggiori dettagli. Sorvolo sui primi casi il cui resultato è certo giusto ed assodato (nonostante qualche lieve obiezione al procedimento), e giungo all'ultimo caso che è il più importante.

La sup[erficie] F proiettata da ogni p[ia]no t[an]g[ente] in una rigata irraz[ionale]: sulla F vi è un fascio irraz[ionale] di curve piane (e pel rag[ionamento] prec[eden]te si vedrebbe, coniche) corrisp[ondenti] alle generatrici della rigata. Qui, se non erro, il tuo ragionamento cade in difetto se i piani delle C passano per una retta: si può effettivamente pensare un tal caso ed allora la F appartiene ad uno spazio di dimensioni grandi quanto si vuole ed è proiettata in un cono 2-plo da ogni p[ia]no t[an]g[ente]. In una lettera ch'io ti scrissi[3] io escludevo che una F essendo $r \geq 3p+5$ potesse esser proiettata in un cono, ma quel ragionamento deve essere sbagliato ed io non lo ricordo (ti dispiacerebbe ricercarlo e se va bene comunicarmelo?). Ciò posto se non si elimina un tal dubbio non si può nemmeno applicare la formula del genere delle curve spezzate. Non è solo questione di dimostraz[ione] io dubito che esistano sup[erficie] con un fascio di coniche a sez[ioni] di gen[ere] p in S_r con $r > 3p+5$.

Cosa rimarrebbe dunque del mio lavoro?

Rimarrebbe il teor[ema]: La mass[ima] dim[ensione] d'un sist[ema] è $3p + 5$ se non vi è un fascio irraz[ionale] di curve, e se è raggiunta (escl[uso] il detto caso) la sup[erficie] è razionale.

Io dovrò probabilmente adattarmi a questo. Rispetto alla completezza dei sistemi la cosa va ancora assai bene. Essa perde tutto nel lato proiettivo.

Ti mando la mia nota lincea.[4]

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[P.S.] Mi dispiace di non poterti vedere a Firenze, ma nell'incertezza della mia destinazione[5] non posso andarvi, perché potrei trovarmi poi al caso di dover tornare qui a prendere la mia roba per portarla a Bol[ogna]. Quanto mi secca questa aspettativa!

[1] L'indicazione dell'anno è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. Enriques 1894e.
[3] Cfr. p. 47, let. 42 (5.12.1893) e p. 48, let. 43 (9.12.1893).
[4] Enriques 1893c.
[5] Enriques si trovava a Torino, ancora in attesa delle decisioni del ministro riguardo alla chiamata di Mario Pieri sulla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Bologna. Cfr. p. 39, c.p. 35 (20.11.1893); p. 39, let. 36 (20.11.1893); p. 44, c.p. 38 (23.11.1893).

48.

Giovedì [21 dicembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Grazie del ragionamento molto semplice che mi suggerisci per superare una difficoltà ch'io non avrei mai superata una volta incamminato per quella via. Ne sono molto contento perché avendo ripesato tutto mi pare che non incontrerò oramai più ostacoli al definitivo compimento del mio lavoro:[2] non manca che scriverlo, e lo scriverò di nuovo per curare meglio la forma della redazione.

Se mi permetti, invece di stabilire il lemma che gli iperpiani t[an]g[enti] ad una sup[erficie] non di Veronese segano un sistema lineare irreduttibile, citerei il teor[ema] di Kronecker dicendo che tu ne darai la dimostrazione[3] (la quale uscirà contemporaneamente al mio lavoro, press'a poco, e mi dirai dove). Infatti quel lemma diventa inutile dopo il tuo teor[ema], oltreché vi sono nella sua dimostrazione dei punti un po' delicati.

A proposito del tuo teor[ema] (scusa se non ho cominciato con questo), la recente tua dimostraz[ione] è piaciuta anche al S[egre]. Soltanto egli vor-

rebbe che tu facessi rilevare (questione di poche parole) come il ragionamento non cadrebbe in difetto anche supponendo che contemporaneamente tutti i punti M_1, M_2 ... al limite cadano in O, anziché uno solo.

Posto il 1° lemma ed enunciato il 2°, io passerei a considerare la successione delle sup[erficie] $F, F^1 \ldots F^{(k)}$, dove la $F^{(k-1)}$ non è rigata per ipotesi. Distinguo soltanto i due casi che $F^{(k)}$ appartenga ad S_{r_k} con $r_k > 6$, o dove $r_k \leq 6$ $(= 6 \text{ o } = 5)$. (1° caso). Suppongo in generale $F^{(k)}$ proiezione m-pla di $F^{(k-1)}$ $(m \geq 1)$; applico il ragionamento che ti scrissi (va bene?) per dimostrare che (perché $F^{(k-1)}$ non è rigata) vi è su $F^{(k-1)}$ un sistema di curve razionali C $(\pi = 0)$ riferite in modo semplice o 2-plo $(\delta = 1, \delta = 2)$ alle rette di $F^{(k)}$ (e se $\delta = 2$, $m = 2$); il 2° caso viene escluso dal tuo ragionamento. Rimane $\delta = 1$ (onde $\pi = 0$): la $F^{(k-1)}$ è raz[ionale] se il fascio è raz[ionale]; ma allora $p_{k-1} - 1 = 0$ $p_{k-1} = 1$ ed $r_{k-1} > 9$, assurdo. Invece se il fascio è irraz[ionale] esso è fisso al variare del p[ia]no t[an]g[ente] (che non passa per p[un]ti fissi non essendo $F^{(k-1)}$ un cono), ed ogni curva essendo proiettata semplicemente in una retta da ogni p[ia]no t[an]g[ente] è una retta; $F^{(k-1)}$ è rigata, assurdo.

Così si trattano insieme i due casi in cui $F^{(k)}$ è rigata raz[ionale] o irraz[ionale]. Ti persuade? Invece il 2° caso si esaurisce notando che allora $p_k = 0$ e le successive proiez[ioni] sono semplici onde F è raz[ionale] ed $r = 3p + 5$ (come nel manoscritto). Anche il caso dei sistemi multipli viene esaurito completamente.

Il Volt[erra] parte oggi per Firenze e così io rimarrò più solo in questi giorni. Infatti egli è per me una gran compagnia: mentre si mangia e la sera.

Le mie ricerche sulle involuzioni si sono in parte dirette a scopo analitico. Ho trovato alcuni teor[emi] sulla riducibilità degli integrali iperellittici, ma temo sieno noti perché vi è una memoria di Goursat[4] sull'argomento che debbo ancora studiare.

Però voglio ora smettere di andare avanti e raccogliere il già fatto: accumulando troppo materiale si ha poi la noia di ordinarlo come mi successe per la memoria di Tor[ino]:[5] per ora ho invece appena il materiale di un paio di note. Mi spinge alla nominata decisione anche il timore di esser costretto ad interrompere lo studio se andassi a Bol[ogna].

Cordiali saluti

dal tuo aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. Enriques 1894e.
[3] Cfr. p. 46, nota 2 a let. 41 (30.11.1893).
[4] Goursat 1885.
[5] Enriques 1893f.

49.

Lunedì [25 dicembre [18]93][1]

Carissimo Castelnuovo

Da casa mi scrivono che ti hanno veduto con molto piacere, ed io ti sono grato della gentilezza che hai avuto.

Ho redatto il lavoro[2] «Sulla massima dimensione». Mi sono scostato solamente in un punto dai tuoi consigli cioè riguardo ai 2 lemmi. Del 1° ho conservato la mia dimostrazione che è semplice e si estenderebbe con qualche restrizione anche alle sup[erficie] non alg[ebriche] (anche giacché per dimostrarlo non basta l'applicazione pura e semplice del teor[ema] di Kr[onecker]).[3] Del 2° lemma ho adoperato il teor[ema] di Kr[onecker] perché pensandoci bene la mia dimostraz[ione] presentava qualcuno dei punti delicati della tua 1ª, ed io non volevo allungarla di troppo. Nel resto mi sembra aver raggiunto una sufficiente unità.

Ora (scusami) ti rimando il lavoro ed ecco il perché. Ho chiesto al S[egre] di presentarlo qui all'Accad[emia] ed egli lo farebbe volentieri, però essendo stanco non può leggerlo accuratamente come gli occorrerebbe; perciò il S[egre] stesso mi ha suggerito di sottoporti la definitiva redazione del lavoro e se tu l'approvi egli presenterà la mia nota all'Accad[emia].[4] Scusa la seccatura, ma per te che ormai conosci la cosa si tratterà solo di dare una scorsa.

Sto ancora studiando i molteplici lavori sulla riducibilità degli integrali abeliani che si collegano alla questione delle involuz[ioni] irraz[ionali]. Perciò non ho ancora ripesato bene ciò che avevo fatto. Lo farò appena mi sarò accertato di ciò che è noto, cioè spero presto. Ti darò allora più dettagli sulle mie ricerche ed anche su ingenuità trovate nei lavori che sto leggendo.

Cordiali saluti

aff.mo

F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Enriques 1894e.

[3] Cfr. p. 46, nota 2 a let. 41 (30.11.1893).

[4] L'articolo Enriques 1894e fu presentato da Corrado Segre all'Accademia delle Scienze di Torino nell'adunanza del 28 gennaio 1894. In proposito si veda anche la lettera di Segre a Castelnuovo del 25 dicembre 1893 riportata in Appendice (pp. 674-75).

50.

29 Dec[embre] 1893

Carissimo Castelnuovo

Grazie delle osservazioni con cui accompagni il mio manoscritto.[1] Mi dispiace dell'appunto che fai al mio lavoro non per la cosa in sé che (se

non m'inganno) non ha alcuna conseguenza, ma perché avendo messo ogni cura nel redigerlo credevo che il lavoro fosse riuscito immune da ogni difetto.

Quanto al consiglio che mi dai di premettere un 3° lemma onde alleggerire la discussione lo seguirò volentieri perché anche a me sembra che questo conferisca alla semplicità. Dopo fatte queste modificazioni ti rimanderò il manoscritto a Roma.

In questi giorni ho ripreso ad esaminare e a pesare i resultati delle mie ricerche sulle involuzioni irraz[ionali]. Disgraziatamente mi sono accorto d'una lacuna nel ragionamento che serve a fissare un punto fondamentale, e così secondo ogni probabilità non riuscirò a nulla! Resterebbero in piedi pochi teor[emi] (ad es[empio] quello di cui ti scrissi la dimostrazione),[2] ma di cui non posso più dare le applicazioni (in ispecie quella secondo cui sotto certe restrizioni date $\gamma_{m_1}^{\pi_1}$ ... su C_p, è $\pi_1 + \pi_2 + \ldots \leq p$), mancandomi il massimo del grado d'una involuzione ellittica (che m'occorreva): solo pervengo al resultato che se vi sono più di p inv[oluzioni] ellittiche ve n'è ∞ ed altre cose simili le quali però sono già note (secondo un teor[ema] di Poincaré).[3] Sulle briciole che rimangono di tutto il mio studio, mi riserbo a lavorare in seguito. Intanto passo ad altro.

Ho cominciato a pensare alle varietà V^n di S_{n+1}: ho rappresentato i coni e ho fatto qualche altra piccolezza. Il metodo per rappresentare i coni è estendibile a tutti i coni raz[ionali] ∞^3 (se non erro), e conduce ad un sistema rappresentativo di monoidi d'ord[ine] n col cono t[an]g[ente] fisso nel p[un]to $(n-1)$-plo ed altre particolarità.

Per studiare insieme la V^7 e la V^8, ho in mente di costruire (il che mi sembra possibile mediante gli sp[azi] bit[an]g[enti]) un sistema omaloidico di sup[erficie] di Ver[onese] su di esse: ne dovrebbe seguire che tutte le V^7 e V^8 sono date dai sistemi di quadriche.

Quanto alle var[ietà] a curve sez[ioni] ellittiche a più di 3 dim[ensioni] (se non dico uno sproposito) esse dovrebbero essere (eccetto i coni) var[ietà] cub[iche] o intersez[ione] di 2 quadr[iche]. Invero ad es[empio] una varietà cub[ica] (proiez[ione] da 2 p[un]ti) di una V^5 (a 4 dim[ensioni]) conterrebbe 2 S_3, e questi in S_5 necessariamente si segano. Ma ho bisogno di ripensare a questo.[4]

Le cose del lavoro che hai in esame si applicano probabilmente senza difficoltà allo studio dei sistemi di sup[erficie] in S_3 che hanno la massima dim[ensione] risp[etto] al gen[ere] delle sezioni variabili: credo di averli determinati.

Non mi dici nulla del fidanzamento di Ancona, colla sig.na Laura Cavalieri di Ferrara. È proprio vero? Posso fargli le mie congratulazioni? A proposito di Ancona, com'è andato il concorso di Milano?

Cordiali saluti dal tuo aff.mo F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894e.
[2] Cfr. p. 51, let. 44 (12.12.1893) e p. 53, let. 45 (15.12.1893).
[3] Cfr. Poincaré 1884a, 1884b e 1886b, per quanto riguarda gli studi sulla riducibilità degli integrali abeliani.
[4] Cfr. p. 55, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).

51.

1° Gennaio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Prima d'inviarti il manoscritto[1] ti espongo brevemente il modo con cui esso verrà redatto (la redazione è già avanti) affinché tu possa darne un 1° giudizio approssimato ed ove non ti piaccia io possa tener conto delle tue osservazioni.

Naturalmente ho voluto raccontare al S[egre] la cosa: gli ho detto che tu mi avevi rimandato il manoscritto proponendomi una ragionevole modificazione nell'ordine della redazione, e mi avevi anche fatto notare un lieve errore di calcolo senza conseguenza sui resultati. L'errore era realmente lieve? Io ne ero sinceramente persuaso dopo un 1° esame della cosa e ad ogni modo chi non è disposto ad attenuare i propri errori? Certo questo mi ha fatto un gran dispiacere, non tanto perché io avevo assicurato il S[egre] e te di aver posto ogni cura nella redazione del lavoro e di esser sicuro interamente di ogni minuzia, quanto perché mi accorgo disgraziatamente che nonostante tutti i miei sforzi (di cui tu sei stato testimone) il mio sostanziale difetto permane ancora e quando meno ci penso ricasco ancora nell'errore. Io ho tentato fino ad ora di persuadere il S[egre] (e vi sono in parte riuscito) che la cattiva opinione che egli conservava di me su questo rapporto non è ora più giusta, e lo ho fatto non con secondi fini ma perché io stesso ne ero assai persuaso, e perché quell'anatema nel giudizio d'un uomo rigoroso come il S[egre] mi pesava e mi pesa. Ma ora (anche dopo l'insuccesso delle mie ricerche sulle involuzioni) cosa dovrò pensare di me stesso?

Se vi è una cosa che mi commuova e mi sproni a correggermi del mio difetto (oltre al sentimento della necessità) più che il rigore (pur tanto benevolo) del S[egre] è la tua longanimità. Tu più spesso d'ogni altro testimone dei miei errori non me ne hai mai rivolto un rimprovero acerbo, non mi hai mai mostrato impazienza! Ed io te ne sono grato di cuore; tu mi compatisci e mi correggi ad un tempo; la tua parola mi rianima sempre perché altrimenti io mi sentirei preso spesso da un grande scoraggiamento.

Ecco ora il nuovo piano del lavoro.

Dopo i primi 2 lemmi (a proposito del tuo teor[ema] di Kr[onecker][2] hai guardato se vi sia nulla di simile nei lavori di Halphen o Picard[3] sulla sup[erficie] a sezioni raz[ionali]?) enuncio il 3° lemma così: Se sopra una sup[erficie] F vi è un sist[ema] ∞^r di gen[ere] p rappresentativo di una rigata m-pla F' ed è insieme $r > p + 8$ ed $r > 2p + 3$, allora alle rette di F' corrisp[ondono] m curve C su F ecc.

Il calcolo condotto come prima mi dava nella negativa dell'enunciato ($\delta > 1$) $r \leq 2p + 7$ o $2p + 8$ per $m > 2$, mentre per $m = 2$ ($\delta = 2$) si perviene a stabilire $N \geq v + (r - 1 - v)\frac{m}{\delta}(\delta - 1) \geq r - 1$, (e se la curva di diramaz[ione] è irredut[tibile] $N \geq r$), onde $2p - 2 + 2m \geq r - 1$ che per $m = 2$ dà $r \leq 2p + 3$. Ma il limite $2p + 7$ non mi basta per gli scopi successivi, giacché io ho bisogno d'un tal limite che per $p = 2$ sia *superato* da $3p + 5$. Ho dovuto perciò impiantare il calcolo sopra altre basi che del resto sono più semplici di quel che sarebbe diventata l'antica dimostraz[ione] colle occorrenti modificazioni.

Considero gli iperpiani per $\left[\frac{r-4}{2}\right] \geq \frac{r-5}{2}$ rette di F'; sono almeno ∞^4 e però han comune un S_{r-5} al più: vi sono 2 ipotesi, vi è una parte d'ordine $v \leq r - 5$ della curva di dir[amazione] appartenente a quegli iperpiani o no. Se no ho

$$2p - 2 + 2m \geq N \geq 2\left\{\frac{r-5}{2}\,\frac{m}{\delta}\,(\delta + \chi - 1)\right\}$$

cioè

$$2p - 2 \geq m\left\{(r-5)\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) - 2\right\}$$

che se $m > 2$ è minimo per $m = 3$, $\delta = 3$, o $m = 4$, $\delta = 2$ e dà (se non è $r < 9$)

$$r \leq p + 8.$$

Resta il caso $m = 2$, pel quale bisogna ricorrere al fatto che $N \geq r - 1$ (anche se la curva di diramaz[ione] è spez[zata] in una d'ord[ine] v e in una d'ord[ine] $\geq r - 1 - v$); allora $2p - 2 + 2m \geq r - 1$, per $m = 2$ $r \leq 2p + 3$.

L'ipotesi che vi sia una parte della curva di dir[amazione] appartenente agli ip[erpiani] per $\left[\frac{r-4}{2}\right]$ rette di F' (d'ord[ine] $v \leq r - 5$) dà per il noto ragionamento

$$2p - 2 + 2m \geq v + (r - 1 - v)\frac{m}{\delta}(\delta + \chi - 1):$$

in ogni caso ($m \geq \delta \geq 1$), $\dfrac{\delta + \chi + 1}{\delta} \geq \dfrac{1}{2}$, $v < r - 1$, si ha

$$2p - 2 \geq v + (r - 5 - v)\frac{m}{2}$$

e poiché $v \leq r - 5$ il minimo del 2° membro è per $m = 2$ e dà

$$r \leq 2p + 3.$$

Come vedi la dimostraz[ione] non è elegante, ma girata la cosa in tutti i modi questa mi pare la più semplice delle dimostraz[ioni] che mi conducono allo scopo.

Dopo il 3° lemma seguendo il tuo consiglio di abolire gl'indici, passo ad esporre il processo di riduzione per cui da una sup[erficie] non rigata a sez[ioni] di gen[ere] p in S_r dove $r \geq 3p + 5$, si passa ad una F' di gen[ere] $<$ [minore]. Occorre stabilire che questa è non rigata se non è $r' \leq 6$. Esaurisco prima i casi $p = 1$, $p = 2$. Poi applicando il 3° lemma mostro che se $p > 2$ alle generatrici della supposta rigata F' corrispondono m curve C ecc.: ne segue che la F è rigata. Il caso $r' \leq 6$ lo tratto come prima.

Così si va in fondo per le sup[erficie].

Pei sist[emi] non semplici vorrei sostituire il ragionamento ed il teor[ema] che davo col seg[uente] (estensione del teor[ema] di S[egre]):[4]

Se sopra una sup[erficie] non riferibile a una rigata di gen[ere] p, un sistema di gen[ere] p e dim[ensione] $r >$ insieme di $p + 8$ e di $2p + 3$ (o quel che verrà) è semplice.

Come vedi rimane per $p = 1$ il dubbio che esista un sist[ema] non sempl[ice] ∞^9 di curve ellittiche sopra una non rigata, non raz[ionale]: ma ciò non m'importa, e d'altronde ho tentato invano di escluderlo.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

PS. È vero il fidanzamento di Ancona?[5]

Ho veduto ora il P[ier]i il quale mi dice aver avuto comunicazione che il Ministro non accetta la proposta della fac[ol]tà di Bol[ogna].[6]

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894e.

[2] Cfr. p. 46, nota 2 a let. 41 (30.11.1893).

[3] Come si chiarirà in una lettera successiva del 6 gennaio 1894 (n. 53, p. 66), i lavori cui Enriques si riferisce sono di Emile Picard: cfr. Picard 1887, i cui risultati erano già stati esposti in parte in Picard 1878.

[4] Cfr. Segre 1887, 105.

[5] Cfr. p. 60, let. 50 (29.12.1893).

[6] Cfr. p. 39, nota 2 a c.p. 35 (20.11.1893).

52.

4 Gennaio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Come vedi non ho la stoffa per diventare un ministro di stato, giacché una distrazione del genere di quella che ho commessa potrebbe in tal caso portare serie conseguenze. Nel caso mio non ne ha fortunatamente. Tu avrai ricevuto un po' più tardi la mia lettera, che la Zia ti ha respinto da Firenze, ed hai fatto benissimo a considerare quegli auguri come un rinnovamento di quelli che già ti feci con tutto il cuore.

Ti invio ormai addirittura il manoscritto del noto lavoro che ho redatto pensando e ripensando, e che se sta bene potrebbe forse essere presentato all'Accad[emia] Domenica 15 del mese.[1]

A nessuno qui è sfuggita l'enormità che tu mi segnali nella compilazione della lista del *Circolo*. Il S[egre], che è un uomo superiore, ha riso di questo dispettuccio, mentre, è sperabile, esso si ritorga solo a vergogna di chi lo ha immaginato e non a danno del Circolo. Solamente per questa occasione mi è dispiaciuto di non far parte del Circolo. Ho scritto oggi al Ciani pregandolo di far propaganda (anche per Veronese). Bada di non cadere in equivoco rispetto al Bianchi il quale è entrato recentemente al Circolo (votato per acclamazione), e sebbene respinga la candidatura alla direzione, conviene venga eletto con votazione compatta.

Qui si parla da qualche giorno della cosa, ma tanto il P[ier]i che il V[olterra] ecc. se ne sono accorti subito ognuno da sé. La cosa salta agli occhi.[2]

Ti ho detto come il P[ier]i non venga nominato a Bol[ogna]: lo conferma una lettera del prof. Pincherle al P[ier]i in cui dice che la fac[ol]tà chiederà il concorso e provvederà quest'anno con un incarico. Credo che mi ricercheranno, essendo quasi impegnati, ed io per ora non ho fatto alcun passo.

Riguardo alle mie ricerche sulle involuzioni irraz[ionali] ben poco di nuovo rimane in piedi. Cioè (se non erro): il teor[ema] sull'indip[endenza] degli integrali ecc. che ti scrissi,[3] senza notevoli applicazioni, ed un teor[ema] sulla rappresentaz[ione] parametrica con una applicazioncella alla riducibilità degli integrali iperellittici. Ecco di che si tratta (ti accennai a questo, tempo fa):[4]

Se x, y (coor[dinate] dei p[unt]i d'una curva) son funz[ioni] di t e d'un irraz[ionale] di grado n (ad es[empio] d'una $\sqrt{\ }$) la curva contiene in generale una g_n^1, talvolta una serie ∞^1 di grado n (raz[ionale]) non involutoria: dimostro che una tal serie è contenuta in una g_n^r, $r > 1$.

Il teor[ema] si estende così: Una serie di grado n ∞^r raz[ionale] e non involutoria è contenuta in una g_n^{r+s} $s > 0$.

Un'estensione si ha anche per le sup[erficie].

Nel ragionamento mi sono incontrato in un punto con alcune considerazioni del S[egre]:[5] credo che egli faccia osservare un caso partic[olare] del teor[ema] (per le curve iperellittiche) come conseguenza di una modificaz[ione] del suo ragionamento.

L'applic[azione] del teor[ema] alla riducibilità degli integrali iperel[littici] mi darebbe occasione di tradurre geometric[amente] in nota alcuni resultati sulle inv[oluzioni] irraz[ionali].

L'applicaz[ione] nasce dal fatto che un'inv[oluzione] ellittica su una curva ip[erellittica] è mutata in sé dall'involuz[ione] della g_2^1; quindi la riducibilità ad ellittici degli integrali iperellittici d'una curva $y^2 = f(x)$ si effettua con una sostituz[ione] della forma $x = \varphi(X)$ (φ funz[ione] raz[ionale]) non $x = \varphi(X, \sqrt{f(\varphi(X))})$. Le sost[ituzioni] della detta forma da me studiate riguardo alla detta riduz[ione] sono state considerate da Goursat.[6]

Non credere che la determinaz[ione] del massimo $3p + 6$ per la dim[ensione] dei sistemi di sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] p sia immediata. Non vedo ancora che il limite possa ridursi esclusi i sistemi di monoidi, ma mi sarà facile decidere la questione. Sulle var[ietà] a sez[ioni] ellittiche la via che ti accennai[7] per le V^7, V^8 credo debba condurre al resultato, ma non ci ho ancora potuto ripensare con calma.

Se andrò a Bol[ogna] potrò al più condurre a termine queste ricerche iniziate.

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

[1] Il «noto lavoro» è Enriques 1894e. Per la sua presentazione all'Accademia delle Scienze di Torino si veda p. 59, nota 4 a let. 49 (25.12.1893).

[2] Enriques si riferisce alle elezioni per il rinnovo del consiglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo per il triennio 1894-96. Come si legge in una lettera di Francesco Gerbaldi a Ernesto Cesàro del 25 gennaio 1894, conservata nel fondo Cesàro presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli, Giovanni Battista Guccia si fece promotore di una lista di candidati allo scopo di escludere dal consiglio Eugenio Bertini, Enrico D'Ovidio e Corrado Segre, che in effetti non furono rieletti. Luigi Bianchi fu invece eletto con 126 voti validi su 139 voti ricevuti: cfr. il rendiconto dell'adunanza del Circolo del 27 gennaio 1894 (in «Rend. Circ. Mat. Palermo», 8 [1894], 166-68). L'iniziativa di Guccia può forse essere spiegata col fatto che Segre aveva presentato un giudizio negativo alla commissione per l'ordinariato di Guccia (ottobre 1893). Tale giudizio fu annullato su ricorso dei candidati: il ministero nominò una nuova commissione, tra i cui membri vi era Luigi Cremona, che espresse invece un giudizio favorevole.

[3] Cfr. p. 51, let. 44 (12.12.1893).

[4] Cfr. p. 44, c.p. 38 (23.11.1893) e l'articolo Enriques 1896a.

[5] Si veda in particolare Segre 1894, 273-74.

[6] Cfr. Goursat 1885.

[7] Cfr. p. 60, let. 50 (29.12.1893).

53.

6 Gennaio [1894][1]

Carissimo Castelnuovo

Io credo che le tue previsioni sieno troppo pessimiste. Qui a Torino i tre avranno quasi tutti i voti, cioè togliendo S[egre] stesso e forse Peano (di cui non so) la votazione riuscirà (a quanto pare) completa. A Pisa ho scritto al Ciani affinché ponga sull'avviso tutti, e credo non vi sia da dubitare intorno ai pochi voti dei soci pisani. Unisci a questi i voti dei padovani (avendo tu scritto a Veronese), di qualche romano e napoletano, e vedi che già siamo avanti. Bisognerebbe poter fare propaganda a Bol[ogna], ma la mia andata là avverrà in ogni caso troppo tardi e non ho assai confidenza con P[incherle] per scrivergliene, ma forse tu potresti far scrivere dal Montesano.

Al Bigiavi scrivo subito; non mi era venuto in mente perché non lo credevo del Circ[olo]; il Bonav[entura] non appartiene al Circ[olo], quindi è inutile scrivergli. Io non posso darmi moto presso persone non di confidenza, non essendo socio. In ogni caso sarebbe arte buona di battaglia, fissare i nomi dei candidati da escludersi altrimenti la vittoria sarà più difficile. Perciò sarebbe opportuno far girare una lista litografata dei candidati d'opposizione. Ma forse è troppo tardi per ciò. In ogni caso tu non dovresti metterti troppo in vista, perché ciò non potesse esser preso a pretesto di malevole insinuazioni per parte di chi è interessato (sapendosi la tua amicizia col S[egre]).

Il Lazzeri lo conosco appena ed il Bassani affatto; sarebbe opportuno avvertirli, e proporrò al P[ieri] di farlo.

In generale c'è una gran tiepidezza, chi vota per noi crede già d'aver fatto tutto, ma il fatto che qui ognuno si sia accorto della cosa da sé, fa bene sperare.

Hai la lista dei soci del Circolo?

Guarda bene su quella prima di far tentativi inutili, che possono riuscire dannosi. La cosa è molto delicata perché in caso di non riuscita occorrerebbe che non trapelasse nulla dei tentativi fatti.

Scrivo anche a Firenze al prof. Grandi.

Avevo in mente che ci fosse una nota di Halphen o Picard sulle sup[erficie] a sezioni raz[ionali]: ho verificato che la nota è di Picard,[2] e non contiene infatti nulla che ti riguardi: io supponevo potesse considerare lo spezzamento delle sez[ioni] t[an]g[enti] ecc.

Tornando all'affare del Circolo, hai fatto male di non avvertirmi prima che non desideravi far saper nulla al S[egre] (ciò che è giustissimo). Parlando col S[egre] mi è venuto fatto di dirgli che tu mi avevi scritto in pro-

posito (senza fargli cenno delle pratiche che andiamo facendo), vedendo che egli mostrava interesse di saper cosa dicevi, gli ho promesso di mostrargli la tua lettera. Cercherò di non mantenere la promessa, la sua curiosità essendo diminuita dopo la lettera che hai scritto a lui.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] L'indicazione dell'anno è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. p. 63, nota 3 a let. 51 (1.1.1894).

54.

9 Gennaio [1894][1]

Carissimo Castelnuovo

Sei molto buono a volerti prendere una parte di colpa nella mia ripetuta sventatezza, della quale io solo sono responsabile, perché a me solo spettava il dovere di pesare ogni cosa.[2] Ma ti confesso che non ho il coraggio di dire la cosa al S[egre] almeno per ora. Cercherò prima di rimediare e ti rimanderò il foglio contenente il lemma (a cui già tutt'oggi mi sono dedicato).

Il ragionamento che mi suggerisci mi pare conduca semplicemente allo scopo: se osservi bene esso è la traduzione rigorosa di quanto io facevo prima col genere d'una curva spezzata, per stabilire che il genere del sistema descresce staccando immagini di generatrici di F'.

Scusami se faccio proprio senza complimenti con te, e non te ne avere a male se credo giusto rimborsarti la spesa dei 3 manoscritti raccomandati che hai avuto occasione di spedirmi in questi ultimi tempi (t'invio £ 2).

Ho parlato giorni sono al Berz[olari] che annuisce a far propaganda presso i suoi amici per l'affare del Circolo: P[ieri] mi disse (pure giorni sono) che avrebbe scritto al Lazzeri e al Rindi. Io ho scritto subito come ti dissi, ma non ho avuto risposta.

Il Pincherle scrive a Bert[ini] che la fac[ol]tà proporrà al prof. Razzaboni di là l'incarico di proiet[tiva] sicura che egli non accetterà, e quindi l'offrirà a me. Si tratta a quanto pare d'un riguardo formale verso R[azzaboni].[3]

Io dovrò dunque probabilmente fare un corso in meno di 4 mesi, e d'altra parte è anche *necessario* che lavori o almeno svolga (con calma) i lavori pensati.

Ti parlai l'altro giorno[4] del teor[ema] secondo cui una serie γ_n^r razionale non involutoria su una curva, è sempre immersa in una g_n^s con $s > r$.

Un teor[ema] analogo vale per le sup[erficie], e conduce ad applicazioni che mi sembrano avere un certo interesse, specialmente combinate al fatto che i sistemi ∞^r $(r>1)$ di indice 2 sono raz[ionali] (pel tuo teor[ema][5] di raz[ionalità] g_n^r). Così sono raz[ionali] le sup[erficie] contenenti un sistema semplice (quindi più che ∞^1) d'indice 2 e grado 2 o 3, o di genere 0, 1, 2 o iperellittiche non riferibili a rigate.

Spero di poter cavar una noticina da questi 2 teor[emi] sulla curva e sup[erficie].

Ho ripensato in questi giorni (nel tempo non dedicato allo studio di proiet[tiva] e descr[ittiva]) alle varietà V^8 di S_9 e V^7 di S_8.[6] Ecco in breve come tratterei la V^8 di S_9.

Sulla V^8 vi sono ∞^4 coniche (∞^1 su ogni iperpiano): considero gl'iperp[iani] t[an]g[enti] lungo una conica che (si ottiene facilmente) sono ∞^2: la sezione è spezzata e (mi pare d'aver visto) non vi è parte fissa se la V^8 non è un cono. Allora le sez[ioni] spezzate della conica si compongono delle coppie di sup[erficie] di Veronese d'un fascio (applico il teor[ema] sui sistemi lineari riduttibili sopra una sup[erficie] sezione). Per una sup[erficie] di Ver[onese] ∞^3 ip[erpiani] seganti la V^8 secondo sup[erficie] di V[eronese]: 2 si segano secondo una conica, quindi il sist[ema] è omaloidico, e riferito al sistema dei p[ia]ni di S_3 dà la rappresentazione di V^8 colle quadriche.

Per la V^7 la cosa è un po' più complicata ma mi pare si debba riuscire con metodo analogo. Vi sono ∞^4 coniche. Per una conica ∞^1 ip[erpiani] t[an]g[enti] lungo la conica. Le sez[ioni] sono spezzate o in una S^2 e una S^5 o in una S^3 e una S^4. Nella 1ª ipotesi per la S^5 ∞^1 iperp[iani], onde v'è un fascio di S^2 su V^8. Ma vi è un altro sistema di coniche fuori delle quadriche S^2, che se V^7 non è un cono è distinto dal 1°. Si trova allora un altro fascio di S^2 a meno che non valga per queste coniche la 2ª ipotesi. Mi sembra aver visto che l'esistenza di 2 fasci di quadr[iche] su V^7 conduce a dim[ostrare] che essa è un cono. La 2ª ipot[esi] condurrebbe alla rappres[entazione] di V^7 colle quadr[iche] per un p[unt]o.

La V^8 (di cui la V^7 è proiez[ione]) è molto elegante; analoga (come si capisce) alla sup[erficie] di V[eronese].

Cordiali saluti e ringraziamenti aff.mo

F Enriques

[1] L'indicazione dell'anno è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Si tratta della revisione del manoscritto di Enriques 1894e.

[3] A seguito del parere negativo del ministero riguardo alla proposta di chiamata di Mario Pieri sulla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Bologna (cfr. p. 39, nota 2 a c. p. 35, 20.11.1893), la Facoltà decise di affidare questo insegnamento, per incarico, a Enriques. Cesare Razzaboni aveva ricoperto questo incarico prima dell'arrivo a Bologna di Domenico Montesano, che ne era stato titolare dal 1888 al 1893.

[4] Cfr. p. 65, let. 52 (4.1.1894) ed Enriques 1896a, 322.
[5] Cfr. Castelnuovo 1893b.
[6] Cfr. p. 60, let. 50 (29.12.1893) e p. 55, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).

55. [c.p.]

[Torino] 10 Gennaio [18]93[1]

Carissimo

T'invio il foglio del lemma. Se non ti persuaderà come è redatto rimetterò la cosa a dopo Carnevale. Intanto sto rifacendo l'introduzione secondo il tuo concetto e facendo qualche altra modificazione derivante dal cambiamento del lemma (che è in senso favorevole). Avrei piacere di potere metter definitivamente da parte il lavoro.[2]

P[incherl]e mi scrive da Bol[ogna] che la fac[oltà] propone l'incarico per me al ministro.

Possibilmente comincerò subito le lezioni per farne qualcheduna prima di Carnevale. Ti avviserò in ogni caso (in tempo per le lettere) della mia partenza di qui.

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

[P.S.] Vedrai che nel lemma per $m = 2$ ho conservato l'antica dimostraz[ione] per evitare alcune consideraz[ioni] nel caso in cui la proiez[ione] di F' da una retta sia multipla.

[Annotazione di Castelnuovo: «proposta d'incarico a Bologna»].

[1] 1894, dal timbro postale.
[2] Cfr. Enriques 1894e.

56. [c.p.]

[Torino, 11 gennaio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ho scritto l'introduz[ione] (secondo il tuo concetto) e ho fatto le piccole modificaz[ioni] occorrenti pel mutamento del lemma. Il teor[ema] se su una sup[erficie] vi è un $|C|\ \infty^r$ di gen[ere] p, ed $r \geq 3p + 5$ la sup[erficie] è riferib[ile] a rigata o raz[ionale], vale ora anche per $p = 1$. Nel caso dei sistemi non semplici basta per questo tornare alla dimostraz[ione] che prima facevo (avendosi il lemma più favorevole), cioè se ha immag[ine] multipla F' non è rigata (altrimenti la cosa va come per $p > 1$) e quindi

a sez[ioni] ellittiche essa non possiede curva di diramaz[ione] (ma al più p[un]ti isolati): essa è raz[ionale] in S_8 o S_9 e però contiene una rete omaloidica di cubiche o 4-tiche [quartiche] K con al più *un* p[un]to base semplice: su una K non vi sono p[un]ti di diramaz[ione] (perché almeno 2 distinti), onde la sua immagine su F è spezzata; assurdo trattandosi d'una rete. Tu hai già visto questo breve ragionamento nella prec[eden]te edizione del lavoro.[1]

Ti scriverò quando avrò fissata la mia partenza.

Ora mi do tutto alla proiettiva. La descrittiva aspetterò a farla dopo una settimana (quindi dopo Carnevale).

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[1] Si tratta di una delle stesure preliminari di Enriques 1894e.

57. [c.p.]

[Torino, 12 gennaio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ho fissato la mia partenza per Domenica mattina alle $8\frac{1}{2}$

Se vuoi scrivermi domani puoi dirigermi le tue lettere «fermo in posta - Bol[ogna]». Appena avrò fissato il mio domicilio ti comunicherò il mio indirizzo. Vado là per sollecitare non avendo ancora ricevuto ulteriore risposta.

Mi è venuta in mente qualche idea sopra un possibile studio dei gruppi di trasf[ormazioni] biraz[ionali] in sé della var[ietà] cub[ica] di S_4: metto da parte queste idee per ora, ma chi sa che per tal via non si pervenga a risolvere la questione della raz[ionalità]?

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[Annotazione di Castelnuovo: «partenza per Bologna»].

58. [c.p.]

Bologna - Mercoledì [17 gennaio 1894]
(ferma in posta)

Carissimo Castelnuovo

Sono a Bol[ogna] sempre in albergo ed in aspettativa. Il Rettore ha telegrafato sollecitando risposta telegrafica dal Ministro.

Temo ci sia poco fondamento di cominciare avanti Carnevale come avrei voluto.

Ti darò notizie se e come mi sarò sistemato.

Intanto ricevi un'affettuosa stretta di mano

dal tuo
F Enriques

59. [c.p.]

[Bologna] Giovedì sera [18 gennaio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Due righe per darti la notizia che il Ministro ha accolto la domanda della fac[ol]tà.

Farò sabato la 1ª lezione.

In fretta una stretta di mano

dal tuo aff.mo
F Enriques

Via della Canapa N° 1, p^no 2.

60.

[Bologna 20 gennaio [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

Il tuo affettuoso augurio ricevuto uscendo dalla lezione mi ha fatto molto piacere, e te ne sono grato.

Ho fatto stamani la 1ª lezione di Pr[oiettiva] e quindi dopo colazione la 2ª (pure di Pr[oiettiva]): per questi giorni profitto infatti delle ore degli esercizi per andare innanzi con orario raddoppiato. Comincerò ormai la Descr[ittiva] dopo le vacanze di Carnevale che qui cominceranno assai presto.

Ti confesso che sono rimasto contento del mio *debutto*. Vi erano stamani circa 70 giovani essendo venuti anche molti del 2° anno, i quali mi hanno accolto con un applauso. Ristabilita subito la calma ho cominciato non senza titubanza colle parole già in precedenza fissate, ché in quel momento non avrei saputo trovarne. Ma subito dopo mi sono sentito padrone dell'uditorio quieto ed attento; la parola mi correva facile alle labbra e guardando gli studenti mi accorgevo di esser capito, ed illustravo le cose dette con considerazioni ed esempi. Così è scorsa l'ora avendo svolto solamente la metà della materia che, secondo una prova fatta ieri, avevo calcolato entrasse di spiegare in un'ora: ho svolto l'altra parte nella 2ª lezione e così ho introdotto gli elementi impropri e le forme fondamentali, ho parlato delle operaz[ioni] fond[amentali] di proiettare e segare.

Ora mi sento molto stanco per aver parlato con animazione. Ho interrogato qualcuno degli studenti nella 2ª lezione (di ore $1\frac{1}{2}$) ed ho avuto risposte soddisfacenti.

Mi propongo in seguito di parlare subito della legge di dualità nello spazio e quindi di dimostrare la dualità nel piano (segando una stella duale), perché non si può fare come faceva qui il Montesano (che del resto svolgeva un bel corso) di dedurre la legge di dualità nel p[ia]no in modo analogo che per S_3, se almeno non si aggiunge il teor[ema] dei triang[oli] omologici alle proposizioni fond[amentali] del p[ia]no. Come es[empio] di dualità stabilirò alcuni teor[emi] ed in particolare quello dei triang[oli] omologici, dei quadrangoli ecc. Passerò quindi a parlare di forme armoniche. Poi dovrò introdurre il post[ulato] della continuità della retta per venire al teor[ema] fond[amentale] della proiettività. Queste considerazioni non sono facili e non le trovo in alcun luogo svolte in modo da persuadermi completamente, ed assai diffuso. Ma ho già pensato la via da seguire; te ne parlerò e ne parlerò anche al S[egre]: anzi credo di poter stabilire il teor[ema] fond[amentale] senza ammettere l'invertibilità della corrispondenza, ciò che naturalmente non farò in lezione perché più complicato.

Addio, cordiali saluti dal

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Ti vedrò a Firenze per Carnevale?

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

61. [c.p.]

[Bologna, 25 gennaio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ricevo la tua cartolina prima di lasciare Bologna per Firenze (Via Machiavelli 7) cominciando oggi le vacanze. Mi dispiace di non vederti: accarezzo un progetto per Pasqua che ti dirò.

Il fiasco nelle elezioni del Circolo[1] mi sorprende perché io m'illudevo che accadesse l'opposto per reazione: in fin dei conti ciò non dovrà tornare doloroso ai non eletti, ché, se non sono sorretti dagli altri nell'adempimento del proprio dovere ne ritrarranno però un conforto maggiore nella loro coscienza: se non erro, questo fatto dovrà accrescere in molti ben pensanti la simpatia ed il rispetto verso i nostri amici.

Sono arrivato nelle mie lezioni alle forme armoniche escl[use]. Ti scriverò più a lungo da Firenze mandandoti le mie lezioni litografate.[2]

Tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Credo che faresti male a fare ripicchi col Circolo: il Circolo ed i suoi soci sono essi soli i danneggiati.

[1] Cfr. p. 65, nota 2 a let. 52 (4.1.1894).
[2] Dei corsi di Geometria proiettiva e Geometria descrittiva che Enriques tenne a Bologna nell'anno accademico 1893-94 furono redatte delle dispense litografate: cfr. Enriques 1893-94a e 1893-94b, rispettivamente.

62.

Firenze - Lunedì [29 gennaio [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

Non attribuire a pigrizia le magre e scarse cartoline succedute alle lunghe lettere. Sono immensamente occupato per la preparazione dei due corsi; dove (specie per la Proiettiva) incontro ad ogni passo delle difficoltà.

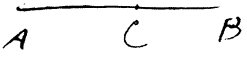
Ho trattato gli elementi impropri, quindi la legge di dualità in S_3, esempi sulle rette incidenti, la legge di dualità in S_2, il teor[ema] dei triang[oli] e quadrang[oli] omologici.

Per la legge di dualità in S_2 mi sono incontrato nella difficoltà derivante dal fatto che non tutti i teor[emi] del p[ia]no (es[empio] quello dei triang[oli] omologici) seguono dalle prop[rietà] fond[amentali] del p[ia]no. Perciò ho dedotto la legge di dualità nel p[ia]no coll'osservazione che si può segare una stella correlativa in S_3. Appena avrò tutte queste lezioni litografate[2] (e purtroppo son litografate assai male) te le manderò.

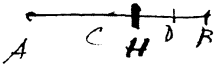
Pei gruppi arm[onici] (che sarà l'argomento della prossima lezione) ho dovuto pensare ad un'esposizione simmetrica per le varie forme di 1ª specie, ciò che non si fa di solito. Ma dopo vengono le difficoltà più gravi, cioè i concetti di gruppi ordinati sulla retta (o forma) e di continuità pel teor[ema] fond[amentale] della proiet[tiva]. Per varie ragioni non mi piace fondarmi sulle considerazioni intuitive di movimento; mi pare che in tal modo resti il dubbio che alla conservaz[ione] dei gr[uppi] arm[onici] ammessa per la corrispondenza si aggiunga la continuità di questa anziché della retta. Ecco uno schizzo della mia trattazione. Ammetto dapprima il post[ulato] che un p[un]to di una retta individua *2 ordini naturali* di p[un]ti (inversi l'un dell'altro) ciascuno dei quali corrisponde al modo intuitivo di ordi-

nare la retta generandola col moto. Ne segue l'esistenza dei segmenti ecc. Quindi enuncio il post[ulato] di Dedekind.

Se un segm[ento] AB è diviso in 2 parti in guisa che ogni p[un]to di AB sia H o K e gli H sieno a sinistra dei K, la divisione è operata mediante un p[un]to C (che è H o K).



Ne deduco il teor[ema] che si può assumere invece come post[ulato] «Se in una corrisp[ondenza] al segm[ento] AB corrisponde CD in esso dove $C \neq A$ e se la corrisp[ondenza] è ordinata (conserva l'ordine ecc.) esiste un 1° p[un]to unito H (che può anche esser B) tale che in AH non vi son p[un]ti uniti».



Di qui segue: vi è almeno una coppia che ne separa arm[onicamente] 2 che non si separano. Segue poi (come in Staudt)[3] il teor[ema] fond[amentale]. Cosa ti pare?

S'intende che per ora non ho affatto in tempo di studiare per conto mio, ma vorrei avvantaggiarmi per poterlo fare tra un paio di mesi.

Sono qui a Firenze da Giovedì sera, dove ho veduto la tua Zia sig.a Levi, ed ho conosciuto anche l'altra tua Zia sig.a Ivo, ambedue in ottima salute.

Mi dispiace di non vederti (se tu facessi una scappata fino a Firenze?): è già un pezzetto che non ci vediamo. Chissà che non possiamo stare insieme un po' più a lungo per Pasqua, ma è troppo presto per far progetti.

Il S[egre] mi ha scritto che avrebbe presentato ieri la mia nota[4] all'Accad[emia]. Egli mi parla delle elezioni del Circolo:[5] naturalmente della cosa per sé stessa egli non se l'è presa. Ti raccomando di nuovo di non far nulla che possa far supporre al Gu[ccia] di aver recato un vero dispiacere: perciò credo anche che faresti bene a profittare di una prossima occasione per dare al Circolo qualcosa di tuo, e questo consiglio lo darei al S[egre] a maggior ragione se avessi abbastanza confidenza con lui. Non si deve poi esagerare l'importanza di una vendetta che sarebbe comica specialmente riguardo agli uomini che vuol colpire, se non fosse un brutto sintomo di demoralizzazione.

Un'affettuosa stretta di mano

dal tuo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Enriques 1893-94a.
[3] Cfr. Staudt 1847.
[4] Enriques 1894e.
[5] Cfr. p. 65, nota 2 a let. 52 (4.1.1894).

63. [c.p.]

Bologna, Sabato 17 Feb[braio 18]94

Carissimo Castelnuovo

Non credere che non ti abbia più scritto per pigrizia. Ho avuto molto da fare per sviluppare le questioni di G[eometria] proiettiva di cui ti parlai. Ho poi adottato in parte il tuo consiglio e quindi mentre passo ai giovani per le litografie la trattazione minuta dei concetti di segmento, senso, ordine d'una forma ecc., mi sono limitato in lezione ad enunciare tali cose ricorrendo ogni volta all'intuizione avvertendo che esse possono dedursi da alcuni dati dell'intuizione ammessi come post[ulati]. Svilupperò invece la dimostrazione del teor[ema] fond[amentale] partendo dal post[ulato] di Dedekind perché ciò non è troppo lungo e mi sembra importante.

Ti mando le dispense delle mie prime lezioni.[1] Ti scriverò presto più a lungo. Sono ancora occupato nella preparazione del corso di Descrittiva in cui sono già innanzi, e non ho quindi trovato il tempo di occuparmi d'altro.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques[2]

[P.S.] E tu cosa fai?

[1] Enriques 1893-94a e 1893-94b.
[2] Nell'originale la firma è sottolineata.

64.

Bologna - 19 Febbraio [18]94

Carissimo Castelnuovo

La tua cartolina (che ho ricevuto stamani insieme alle Note) mi ha fatto piacere perché mostra come i legami fra noi sieno così stretti da doverti sembrare strano ch'io sia stato quindici giorni senza scriverti, ciò che in fatto non era forse avvenuto da che ci conosciamo.

Nella cartolina che ti ho scritto ieri l'altro (che si è incrociata colla tua) mi scusavo appunto di questo ritardo causato dalle molte occupazioni in questi ultimi giorni, specialmente perché nei primi giorni di Carnevale a Firenze mi sono un po' divertito.

Per stabilire completamente le teorie che permettono di giungere al teor[ema] fond[amentale] della proiettività e nello stesso tempo redigere anche le lezioni di Descr[ittiva], ho lavorato nelle sere passate fino alle 12 e al tocco, e sono contento che questo lavoro non mi stanchi come le ricerche originali.

Ora sono piuttosto innanzi nella preparazione dei corsi e quando avrò rivisto le bozze della nota[1] di Tor[ino] (che mi sono capitate sulle spalle) spero di poter dedicare qualche ora del giorno o della sera allo studio delle varietà a sez[ioni] ellittiche:[2] ti scriverò quindi ciò che andrò facendo. Avevo in corso a Tor[ino] un'altra notina cui ti accennai,[3] che riprenderò dopo.

Spero di poter riunire le ricerche fatte pel teor[ema] fond[amentale] di Proiet[tiva] in un lavoretto[4] «Sui fondamenti della G[eometria] proiet-[tiva]» nel quale a differenza delle trattazioni di De Paolis[5] e Pasch[6] potrei stabilire quel teor[ema] senza introdurre il concetto di segmenti uguali e con un ordine d'idee un po' diverso. Ti ho detto già come mi sono regolato rispetto a quelle cose nelle lezioni.

L'altro giorno c'è stata una seduta di fac[ol]tà a cui sono stato invitato, concernente la sessione straordinaria d'esami. Pare che essi saranno fissati nei giorni vicini alle vacanze pasquali in cui qui per consuetudine mancano le lezioni. Ciò mi rincrescerebbe perché perdendo il modo di andare a casa in quei giorni, temo che i miei rinunzierebbero mal volentieri a vedermi, mentre avrei proprio il desiderio di andare con te qualche giorno a Venezia. In ogni caso ci vedremmo a Firenze: ma non ho ancora perduto la speranza di mandare ad effetto il mio disegno.

Informami di ciò che fai: quali sono le questioni secondarie che hai lasciate da parte?

Scusa anche nel seguito l'irregolarità della mia corrispondenza e ricevi un'affettuosa stretta di mano

dal tuo
F Enriques

[1] Enriques 1894e.
[2] Cfr. p. 55, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).
[3] Cfr. p. 67, let. 54 (9.1.1894).
[4] Enriques 1894d.
[5] De Paolis 1881.
[6] Pasch 1882.

65.

[Bologna?][1] 22 Febbraio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio per aver letto le mie litografie[2] e per le osservazioni che mi comunichi.

È vero che il principio di dualità nel piano fatto rigorosamente riesce un po' difficile, ma esso mi dispensa dalle doppie dimostrazioni dei teoremi correlativi ciò che, stante la fretta è utile. D'altronde i consigli dell'esperienza altrui non servono finché non si abbia ottenuto esperienza propria, e se io ho peccato o peccherò di troppa elevatezza del corso, ciò dipende da che non ho ancora un'idea adeguata delle difficoltà che incontrano i giovani. Io me ne accorgo soltanto nella lezione, spiegando, quando ormai è fissato l'ordine delle cose da svolgere e sono scritti gli appunti; ma credo di compensare la difficoltà di alcuni punti con una vibrata insistenza, poiché su quelli appunto mi avviene di animarmi di più nell'esposizione. Quando ti manderò il cap[itolo] IV potrai a maggior ragione farmi l'appunto di troppa elevatezza, ma ti ho già avvertito che in lezione (fino al post[ulato] di Dedekind) mi sono limitato a svolgere quelle cose basandomi solo sull'intuizione, quindi i giovani non hanno avuto da superare rispetto ad esse alcuna difficoltà. Quanto alle cose prese in sé, frutto di lunghi studi (ch'io avevo avviati prima della nota del Fano)[3] spero ti interesseranno. Se le esaminerai paragonandole colla trattazione accennata da Fano, vedrai che ivi manca un postulato (indicato nelle litografie con m, 3°) senza il quale non può stabilirsi che in una quaderna[4] di elementi sono 2 sole le coppie che si separano.[5]

Sull'argomento ho letto anche i lavori di Pasch[6] e De Paolis.[7] Aspetterò a pubblicare il lavoretto[8] sui fondamenti di G[eometria], fin tanto che tu ed il S[egre] non mi abbiate dato il vostro giudizio su quelle cose che ho svolto (forse troppo minutamente) nelle litografie.

Ho già rimandato le bozze di stampa[9] e cominciato ad occuparmi delle V_3^n a sez[ioni] ellittiche.[10] La trattazione riuscirà minuta per essere rigorosa. Alle V^7, V^8, che costituiscono i casi difficili applico il mio metodo degli spazi bit[an]g[enti] di cui ti scrissi:[11] mi sembra con ciò di pervenire meglio al resultato anziché adoperando i teor[emi] sulle V^3 con p[ia]ni proiezioni di V^7 e V^8 come tu mi suggerivi.

Per le V^n a più di 3 dimensioni e sez[ioni] el[littiche] la questione non dovrebbe esser difficile a trattarsi.

Notando che una V_3^7 o V_3^8 non può aver p[un]ti doppi (i coni sono esclusi), segue probabilmente che non esistono V_4^7 e V_4^8 che non sieno così:

ciò dovrebbe seguire dalla considerazione degli sp[azi] t[an]g[genti] a V_4 ..., ma non ho pensato lungamente alla cosa.

Come vedi sono ora in un periodo attivo.

Affettuosi saluti dal tuo F Enriques

[P.S.] Quanto alla definizione di rette prospettive (anche se sezioni d'un fascio di p[ia]ni) mi sembra utile (sebbene non usata): è ad es[empio] un bel teorema quello che due rette proiet[tivamente] sghembe sono sempre prospettive. Del resto ormai la definizione è stata posta così. Soltanto tornando sulla prospettività avvertirò in nota, che spesso si usa il vocabolo «prospettiva» in senso più ristretto.

Chiederò a Pisa la libera docenza in G[eometria] Pr[oiettiva] avendo scritto in proposito ed ottenuto il parere favorevole di Bert[ini] e B[ianch]i.

[1] L'indicazione del luogo è stata riportata sulla lettera, con un punto interrogativo, da Castelnuovo.
[2] Enriques 1893-94a e 1893-94b.
[3] Fano 1892.
[4] Così nell'originale.
[5] Nota a margine di Castelnuovo: «Fano pg. 20 e 21».
[6] Pasch 1882.
[7] De Paolis 1881.
[8] Enriques 1894d.
[9] Si tratta delle bozze di Enriques 1894e.
[10] Cfr. p. *55*, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).
[11] Cfr. p. 68, let. 54 (9.1.1894).

66. [c.p.]

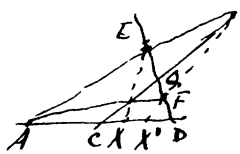
[Bologna] 27 Feb[braio 18]94

Carissimo Castelnuovo

Ti mando alcune altre dispense delle mie lezioni.[1]

Il mio lavoro[2] sulle V a sez[ioni] ellit[tiche] procede molto lentamente stante le occupazioni da cui sono pressato.

Partendo dal post[ulato] di Dedekind sono riuscito (ieri) a dimostrare che in un gr[uppo] armonico i 4 elementi sono distinti. Si tratta di costruire un quadrangolo completo dato il triang[olo] diag[onale] CDQ.



Prendo A su CD ed E, F su QD separanti QD. Costruisco $X\,X'$ come nella fig[ura]: dimostro che cadono in uno stesso segmento CD variando F in QD. La loro corrispondenza (ordinata) discorde ha un p[un]to unito B che risolve il problema (v[edi] dispense).

Nelle mie lezioni il fatto è stato ammesso con un post[ulato] prima di quello di Dedekind. Non ne ho parlato nel cap[itolo] III per non confondere i giovani: è solo dopo che ne occorre l'applicazione. Soltanto il copista mi ha spesso soppresso il «4 elementi». Osserverai come ha riparato a pg. 53.

Affettuosi saluti

Tuo
F Enriques

[1] Enriques 1893-94a e 1893-94b.
[2] Cfr. p. 55, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).

67.

Bologna 8 [marzo [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

Mi pare che tu prenda con troppa filosofia la notizia del S[egre] relativa al dubbio circa la dimostrazione di Noether (Math[ematische] Ann[alen] Bd III):[2] che cosa avverrebbe di tanti teoremi se quel teorema non fosse vero? Occorre dunque che tu ti sacrifichi nell'interesse di tutti ad appurare la cosa, completando la lacuna di quella dimostrazione.

I miei studenti di Descrittiva da oggi si sono presi le vacanze e quelli di Pr[oiettiva] le prenderanno sabato. In previsione di ciò ho fatto oggi (e farò forse Sabato) una 2ª lezione di Pr[oiettiva]. Così giungerò ad esaurire la teoria delle forme di 1ª specie, proprietà metriche incluse.

Nelle osservazioni che mi fai[3] circa le cose relative agli ordinamenti naturali (A) delle forme, non hai notato che parlando di ordinamento naturale (A) io considero A soltanto come 1° elemento e ***non come ultimo***: non esiste un ultimo elemento nei miei ordini naturali.

Del resto la trattazione molto difficile di quell'argomento non è riuscita così chiara come avrei desiderato e come spero di renderla quando dovrò esporla per la pubblicazione. Quanto alle osservazioni didattiche esse sono giuste ed in parte ti ho già dato ragione.

Trovo anche opportuno quel che mi dici riguardo alla definizione di proiettività, ma di certe cose ci si accorge soltanto dopo averle svolte in lezione.

La sessione di esami straordinari non è ancora fissata. Ciò mi contraria perché vorrei poter partire Sabato per Firenze se gli esami cominciassero qui una settimana dopo.

Ad ogni modo se il 17 o 18 sarò a Firenze ti impegno da ora perché tu mi dedichi interamente una giornata, perché dopo tanto tempo ho proprio desiderio di vederti.

Quanto alla mia possibile venuta a Venezia, non ne ho parlato in casa specialmente perché in questi giorni sono stati un po' disturbati per la disgrazia di una Zia di Livorno. Non ti prometto nulla, ma se potessi andare a Firenze ora e dopo dati qui gli esami tu fossi ancora a Venezia chi sa che non possa mandare ad effetto il mio desiderio.

Ad ogni modo ci vedremo prima, spero a Firenze, altrimenti qui se tu passerai di giorno, ed abbiamo tempo di rimanere d'accordo.

Ti avvertirò quando parto di qui.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] L'indicazione del mese e dell'anno è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.

[2] Cfr. Noether 1871c. Questo articolo contiene la dimostrazione del teorema che ogni superficie con un fascio di curve razionali è razionale. Corrado Segre comunicò a Castelnuovo alcune perplessità sulla dimostrazione di Noether: cfr. le lettere del 3 e 4 marzo 1894 in Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie* cit., 155-56.

[3] Le osservazioni riguardano Enriques 1893-94a.

68. [c.p.]

Firenze - Venerdì [16 marzo 1894]

Carissimo Castelnuovo

Sono proprio contento che finalmente ci vedremo: verrò a trovarti Domenica mattina alle $9\frac{1}{2}$ come mi scrivi, ed ormai ti tratterrò con me fino alla mia partenza, cioè alle 3 p[omeridiane]. Vedi che non sono troppo esigente e puoi contentarmi.

Se tu partissi Domenica sera potrei forse ritardare la mia partenza per fare il viaggio insieme: mi occorre però di essere Lunedì mattina a Bol[ogna] per gli esami.

Affettuosi saluti nell'impazienza di stringerti presto la mano.

Tuo
F Enriques

69.

Venerdì [30 marzo [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

Grazie del tuo lavoro,[2] oggi ricevuto, e nuove grazie per tante gentilezze usatemi durante il mio soggiorno a Venezia, il cui ricordo mi fa maggiormente rammaricare la tua compagnia.

Contro le nostre aspettative si presentano dei nuovi sistemi di sup[erficie] ad intersezioni ellittiche:[3] così il sistema delle sup[erficie] cubiche con cubica raz[ionale] base ed un punto doppio su di essa, ed il sistema delle sup[erficie] cubiche con quartica base avente p[un]to 2-plo e p[un]to 2-plo in esso.

La questione di quelle varietà V^n a sez[ioni] ellittiche mi sembra possa trattarsi con metodo uniforme e semplice, proiettando la V^n da una curva raz[ionale] normale d'ordine $n - 3$ (perché pensare a quelle spezzate in rette che compariscono solo per gli ordini inferiori?). Allora fa solo eccezione il caso della V^8 rappresentata dalle quadriche e di quella (cono) rappresentata da sup[erficie] di 4° ord[ine]: del resto non fanno eccezione i coni. Quanto alla nominata V^8 può proiettarsi da una quartica raz[ionale] sopra una quadrica, donde segue la sua rappresentaz[ione] facendo uso di una trasf[ormazione] quadratica: ciò è meno elegante dell'altro metodo degli spazi t[an]g[enti] lungo coniche, ma più uniforme al resto del lavoro. Spero del resto di preparare presto il manoscritto e mandartelo.

Ricordati di dirmi fino a che punto arrivano le dispense delle mie lezioni[4] che ti ho inviato.

Ho risposto a N[oether] salutandolo anche a tuo nome.

Affettuosi saluti

Tuo

F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Si tratta probabilmente di Castelnuovo 1894a.
[3] Cfr. p. *55*, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).
[4] Enriques 1893-94a e 1893-94b.

70.

[1° aprile [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

Ho letto con molto interesse i particolari del tuo lavoro sulle involuzioni:[2] tutto va molto naturalmente; soltanto la dimostrazione della completezza della serie caratteristica di ogni sistema su I è un po' minuta. Ho

ammirato l'arte con cui hai saputo esporre quelle cose, specialmente nell'introduzione, dove dai una giusta idea del lavoro, per quanto mi sembra, accessibile a tutti.

Ho redatto, salvo gli ultimi ritocchi, il lavoro sulle varietà a curve sezioni ellittiche.[3]

Spero ora di pervenire a dimostrare la irrazionalità delle varietà cubiche V^3 di S_4 (senza punti doppi). Ecco come.

Si consideri su V^3 il sistema delle sup[erficie] di gen[ere] 1 segato dalle quadriche, e si facciano segare dagli iperpiani di S_{14}: è razionale la V^{24} di S_{14}?

Se sì, il sistema rappresentativo d'ord[ine] n in S_3 è di sup[erficie] di gen[ere] 1 a sistema caratteristico puro, onde la sup[erficie] d'ord[ine] $n-4$ aggiunta al sistema non sega le sup[erficie] di esso. Ora sembra che una parte d'ordine μ di tale sup[erficie] aggiunta rappresenti un p[un]to multiplo sulla V^{24}. Ci penserò meglio.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Ricevo ora la tua cartolina. Un'applicazione interessante della tua osservaz[ione] sulle sup[erficie] che contengono una serie di curve raz[ionali] è quella di cui ti parlavo:

Le involuzioni sopra una rigata sono raz[ionali] o riferibili a rigate.

Parto oggi (Domenica) per Bologna.

Bello il resultato che mi enunci sulle sup[erficie] con una rete di curve ellittiche.[4]

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Castelnuovo 1894a.
[3] Cfr. p. 55, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).
[4] Enriques allude a risultati che saranno pubblicati in Castelnuovo 1894d.

71.

Bologna - Lunedì 2 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ti ho scritto ieri un po' leggermente non avvertendo una lacuna non facilmente superabile nel ragionamento che ti facevo per l'irrazionalità di V^3. Il sistema di sup[erficie] di gen[ere] 1 ch'io consideravo ha bensì il sistema caratteristico puro ma può essere segato dalla sup[erficie] aggiunta d'ord[ine] $n-4$ secondo curve variabili (spezzate in quelle d'un fascio), allora ad essa corrisponde una curva base del sistema omaloidico sulla V^3 (non un punto).

Il concetto però di quel ragionamento potrebbe riuscire utile, giacché se effettivamente la V^3 non è razionale tranne se ha un punto doppio, questo punto doppio dovrebbe esser ottenuto in tal modo.

Forse può giovare un maggiore studio delle sup[erficie] di gen[ere] 1 sezioni della V^3 con una quadrica.

A proposito di sup[erficie] di gen[ere] 1, mi sono accorto che quelle (d'ordine $2p-2$ a sez[ioni] can[oniche] in S_p) dei primi ordini si ottengono segando una quadrica con una varietà a sez[ioni] ellittiche. Quando si va più su (se pur vi sono) accade un pasticcio indescrivibile: tu del resto potresti prevederlo per analogia a ciò che succede per la curva canonica (e che hai esaminato).

Mi accorgo di aver inteso a rovescio la tua cartolina di ieri (scusami). Il tuo ragionamento si riferisce soltanto al caso di una serie ***razionale*** di curve razionali[1] e quindi non si può trarne la conclusione ch'io volevo. Quanto alle sup[erficie] con una stella di sezioni piane ellittiche, occorrerà che tu aggiunga la condizione di normalità della rete, altrimenti il grado può essere > 2, pur essendo raz[ionale] la superficie (ritengo perciò che tu abbia supposto tale condizione).

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Si veda in particolare la proprietà enunciata in Castelnuovo 1894d, 234.

72.

Bologna - Martedì 3 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Eccoti il manoscritto[1] il quale, nonostante la concisione, supera le dimensioni di una nota lincea, per modo che converrà spezzarlo (se sarà possibile).

Spero che non sieno per scaturire altri tipi oltre quei sistemi di superficie ivi annoverati.

Quanto alla concisione essa non mi sembra a danno della chiarezza, cosa, del resto, che tu giudicherai.

In fine vedrai accennato un teorema sui sistemi lineari di superficie (normalità del sistema caratteristico) che si potrebbe togliere, ma ciò non basterebbe a ridurre il lavoro alle dimensioni canoniche.

In fretta affettuosi saluti e anticipati ringraziamenti.

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894b e 1894c.

73. [c.p.]

[Bologna, 4 aprile 1894]

Carissimo

Molto elegante il tuo procedimento per le sup[erficie] con una rete di curve ellittiche.[1]

Avrai ora già ricevuto la lettera[2] nella quale ti segnalavo la lacuna del mio ragionamento circa la V^3 di S_4. Posso dirti però che se si riesce ad escludere che la sup[erficie] d'ord[ine] $n-4$ aggiunta al noto sist[ema] di sup[erficie] di gen[ere] 1 incontri le sup[erficie] in curve variabili d'un fascio, può vedersi che ad essa (suo pezzo) corrisponde un p[un]to multiplo (2-plo) non semplice per V^3, tenendo conto del fatto che il sist[ema] di sup[erficie] di gen[ere] 1 è doppio d'un altro, altrimenti nascerebbe l'assurdo che un p[un]to semplice di V^3 sarebbe 2-plo per V^{24} (vi sarebbe forse qualche restrizione relativa al caso di p[un]ti semplici infinitamente vic[ini] su V^3 base pel sistema omaloidico).

Ho riletto le note di H[umbert].[3] In quella dell'Agosto [18]93 la serie di curve considerata deve essere *algebrica* ciò che egli suppone senza dire e ne vieta varie applicazioni. Ho trovato la stessa difficoltà che tu accenni nella nota di Giugno.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

P.S. Ho mandato il lavoro richiesto (con altri 2) a P.[4] Della varietà V_r^n a sez[ioni] ell[ittiche] ti parlerò presto.

[1] Cfr. Castelnuovo 1894d.

[2] Cfr. p. 82, let. 71 (2.4.1894).

[3] I due articoli cui Enriques fa cenno nella lettera sono Humbert 1893a e 1893b, presentati il 12 giugno e il 28 agosto 1893, rispettivamente. A questo proposito si veda anche p. 36, c.p. 31 (8.11.1893).

[4] Non ci è stato possibile stabilire con certezza di chi si tratti.

74.

Bologna 5 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ecco alcuni resultatini relativi alle involuzioni sulle rigate F_p di gen[ere] p.

Anzitutto le involuzioni d'ordine $n=2$ su F_p sono riferibili a rigate, perché la trasf[ormazione] univoca inv[olutoria] muta le generatrici nelle curve raz[ionali] d'un fascio, onde se $p>0$ in generatrici.

Per $n = 3$ ad una retta generatrice di F_p corrisponde (in trasf[ormazione] [1 . 2]) una curva iperellittica, se non è spezzata, sulla F_p vi è una serie razionale di coppie di generatrici: pel mio teor[ema] (rappres[entazione] parametrica)[1] le nominate coppie formano una g_2^1 se $p > 0$. Si vede intanto che la F_p è iperellittica: ma (salvo errore) se la g_2^1 di generatrici è fissa si riesce a riferire le sue coppie alle generatrici, onde è assurdo che sia $p > 1$. Così si ha che per $p > 1$ le inv[oluzioni] di ord[ine] 3 su F_p sono riferibili a rigate. Il resultato si estende, sempre per mezzo di quel mio teor[ema]: per $p >$ [maggiore] d'una certa funz[ione] di n, le inv[oluzioni] [di] ord[ine] n sono riferibili a rigate, anzi tali che ai p[un]ti d'una generatrice corrisp[ondono] nella trasf[ormazione] [1. $n - 1$] i p[un]ti di $n - 1$ generatrici; tali inv[oluzioni] possono considerarsi come note (v[ed]i P.S.).

Ho provato ad applicare il tuo ingegnoso procedimento relativo alle sup[erficie] con una rete di sezioni ellittiche,[2] alla V^3 di S_4: si può giovarsi dell'estensione del mio teor[ema] che sopra una sup[erficie] due sistemi lineari di curve aventi comune un fascio son contenuti in un altro (giacché si estenderà facilmente), ma mi pare che non si arrivi a niente (v[ed]i 2° P.S.).

Il Noether (che mi risponde gentilmente impegnandomi il lavoro[3] sui sistemi di sup[erficie] a sez[ioni] iperell[ittiche] per i Math[ematische] Ann[alen] - Estate, e che ti invia saluti) mi dice aver comunicato al S[egre] la rappresentazione della V^3 sulle coppie di inv[oluzioni] di S_3; occorre domandare al S[egre] se gli ha comunicato (come pare) anche la dimostrazione ed in ogni caso io dovrò modificare la nota relativa a questo del manoscritto che tu possiedi.[4] Il N[oether] aggiunge che dopo non ha più pensato alle V^3, ma forse ci penserà questa Estate.

Passando ad un altro soggetto, ecco il resultato ottenuto ***con riserva*** per le varietà a sez[ioni] ellittiche.

Premetto il lemma: La varietà cubica V_5^3 di S_6 contenente due S_4 che hanno comune un solo piano α, possiede su questo una retta 3-pla (almeno). In α si prenda una retta e per essa 2 p[ia]ni risp[ettivamente] ciascuno in un S_4 di V_5^3: lo S_3 dei 2 p[ia]ni sega V_5^3 in un p[ia]no il quale interseca la retta in un p[un]to 3-plo; infatti un tal p[un]to è già doppio ed ha come cono t[an]g[ente] quello dei 2 S_4. Così si giunge al lemma.

Ciò posto si abbia in S_8 una V_5^5 normale a sez[ioni] ellittiche. Dico anzitutto che proiettandola da 2 p[un]ti generici si ottiene una V_5^3 con due S_4 segati in un p[ia]no (non in un S_3). Occorre perciò vedere che 2 S_5 t[an]g[enti] alla V_5^5 (in p[un]ti generici) han comune un piano, non un S_3. Si supponga l'opposto. Allora una sup[erficie] sez[ione] della V_5^5 con un S_5 è tale che i p[ia]ni t[an]g[enti] in 2 p[un]ti di essa s'incontrano in S_5. Che ciò non avvenga per una sup[erficie] raz[ionale] a sezioni ellittiche,

si vede dal fatto che proiettando la sup[erficie] da 2 p[un]ti si ottiene una sup[erficie] cubica con 2 rette che non s'incontrano (v[ed]i rappresentaz[ione] piana).

Dunque la V_5^5 è proiettata da 2 p[un]ti semplici in un cono di 2ª specie V_5^3. Per conseguenza (ciò che non si vede direttamente) una V_4^5 è proiettata da 2 p[un]ti semplici in un cono (di 1ª specie) V_4^3. Ora su V_4^3 le immagini delle sez[ioni] iperplanari sono del 5° ord[ine], onde incontrano in un p[un]to le generatrici: dunque su V_4^5 vi è un sistema del 1° ord[ine] di rette. Le rette di esso passano per un p[un]to, o incontrano una curva p[ia]na per 2 p[un]ti arb[itrari]: quest'ultimo caso è assurdo, perché prendendo 2 di tali p[ia]ni con un p[un]to comune si avrebbe che tutte le rette starebbero in S_4.

Dunque per $n > 3$ non vi sono varietà a sez[ioni] ellittiche V_n (non coni e non contenenti un fascio di S_{n-2}) tranne la var[ietà] cub[ica] e l'intersez[ione] di 2 quadriche.

Resta da spiegare come mai i sist[emi] di varietà cubiche di S_4 con sup[erficie] del 4° ord[ine] base rappresentino coni: ciò dovrebbe seguire dal fatto che una tale sup[erficie] del 4° ord[ine] ha un p[un]to 2-plo che dovrebbe riuscire 2-plo per la var[ietà], avendosi in esso un = [uguale] cono t[an]g[ente]. Ma perché ve ne sono 2 tipi? (sup[erficie] di Ver[onese] e rigata). Ciò si potrebbe spiegare per il fatto che sopra un cono V_4^5 vi sono 2 sist[emi] di coniche proiettanti che darebbero i 2 tipi di rappresentaz[ione]. Ma perché tali spiegazioni non riescono molto chiare occorre appurare il ragionamento prec[eden]te che sarebbe di una grande semplicità.

Ripensando al lavoro che ti ho mandato,[5] mi accorgo che il ragionamento per escludere i sistemi di sup[erficie] cubiche con p[un]to 2-plo biplanare ed un solo p[ia]no t[an]g[ente] fisso non è rigoroso; occorrerà perciò mostrare (com'è accennato in nota ed è facile) che quei sistemi si trasf[ormano] in sistemi di quadriche: vi è insomma da colmare una lacuna che sembra lieve e senza conseguenza.

Come vedi la voglia di lavorare in questo momento non mi manca; il male è che Lunedì ricominceranno le lezioni (non vi è stato fondamento[6] questa settimana) ed allora ricomincerà a mancarmi il tempo.

Ho chiesto al S[egre] le tue lezioni di G[eometria] Analitico-Proiettiva.[7]

Cordiali saluti

dal tuo aff.mo
F Enriques

P.S. Il resultato che andavo cercando per le involuzioni d'ord[ine] n su rigate F_p di genere $p > \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ si stabilisce semplicemente così.

«Alle generatrici di F_p corrispondono (nella trasf[ormazione] $[n-1.\ n-1]$) le curve razionali d'un sistema d'indice $n-1$ (non spezzate in generatrici): allora queste curve segano sopra una generatrice una serie d'indice $n-1$ che ha il genere $p \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Di qui segue ecc».

In particolare se un p[ia]no 2-plo è rappresentativo d'una rigata (non raz[ionale]) questa è iperellittica e la curva di diramaz[ione] si spezza ecc.

I nostri procedimenti per le sup[erficie] a sez[ioni] ip[erellittiche] si estendono al caso che le sez[ioni] contengano una γ_2^1 irraz[ionale]: la sup[erficie] risulta rigata, o contenente un fascio irraz[ionale] di coniche, o razionale. L'ultimo caso deve escludersi e sarebbe interessante il farlo anche pei sistemi di curve piane. Ci ho pensato e mi pare di riuscirci, ma non ho appurato la cosa e te ne parlerò un altro giorno. Il concetto all'ingrosso sarebbe questo. Si hanno più che ∞^2 involuzioni che mutano in sé la sup[erficie]: se vi è un sistema mutato in sé stesso esse appartengono ad un gruppo almeno ∞^3: fatte segare le curve da iperpiani si ha una sup[erficie] mutata in sé da ∞^3 omografie, su cui le asintotiche sono algebriche raz[ionali] ed esse debbono spezzarsi segando le coppie di una γ_2^1 (assurdo): se non vi è un sistema mutato in sé trasformando il primitivo e così via, si ottiene un sistema di genere p e dimensione elevata quanto si vuole onde la sup[erficie] è rigata.

Ciò varrebbe anche se $\gamma_2^1 \equiv g_2^1$ e si avrebbe la dimostrazione senza usare della razionalità delle involuzioni piane (anche per le sup[erficie] a sez[ioni] ellittiche). Ma ci sono asintotiche sulle sup[erficie] d'un iperspazio?

2° P.S. All'ultimo momento mi accorgo di un guaio molto grave che infirma anche il tuo resultato sulle sup[erficie] a sezioni ellittiche, e ciò per colpa mia. Nel teorema «Se due sistemi di ugual genere sopra una sup[erficie] hanno comune una curva dello stesso genere essi sono contenuti in un sistema di ugual genere» (Ricerche[8] pg. 16) occorre che ove la curva comune sia spezzata se ne valuti il genere secondo la formula di Noether,[9] si aggiunga cioè ad ogni sistema la parte fissa nella valutazione del genere, altrimenti il teorema non può applicarsi. Ecco l'esempio che mi fa vedere la cosa. Sul piano considera il sistema delle cubiche per 6 p[un]ti e il sistema delle sestiche con quei 6 p[un]ti 2-pli e 1 p[un]to 3-plo: vedi subito che han comune una rete di genere 1, ma il sistema delle cubiche unitavi la parte fissa è di genere 3 ed il sistema che li contiene entrambi (sestiche con 7 p[un]ti 2-pli) ha il gen[ere] 3. Io dovevo avvertire questo fatto nelle mie «Ricerche» ma mi è sfuggito anzi credevo il contrario; però capisco che l'errore in cui sono caduto non infirmerà i successivi resultati di quel

lavoro circa l'esistenza del sistema completo ecc. Scusami in vista ch'io ne sono più dispiacente di te.

[1] Cfr. p. 44, c.p. 38 (23.11.1893) e p. 64, let. 52. (4.1.1894).
[2] Cfr. Castelnuovo 1894d.
[3] Enriques 1895d.
[4] A questo proposito in Enriques 1894b, 125, nota 2 si legge: «Tale questione rimane tuttora insoluta [la questione della razionalità o meno della ipersuperficie cubica non singolare di P^4]. È però notevole il fatto (che il Sig. Noether ha segnalato al Sig. Segre per $n = 3$) che l'equazione generale del 3° grado in $n + 1$ variabili può risolversi con funzioni razionali di n parametri non invertibili, cioè che si possono far corrispondere biunivocamente i punti di una varietà cubica V_n^3 di S_{n+1} ai gruppi (od anche alle coppie) di una involuzione di S_n».
[5] Il riferimento è ai manoscritti di Enriques 1894b e 1894c.
[6] Così nell'originale.
[7] Dei corsi di Geometria analitica e proiettiva che Castelnuovo tenne all'Università di Roma a partire dall'anno accademico 1891-92 furono prodotte delle dispense litografate, prima della pubblicazione del volume a stampa Castelnuovo 1902.
[8] Enriques 1893f, 47.
[9] Cfr. p. 21, nota 2 a let. 16 (5.8.1893).

75. [c.p.]

[Bologna] 7 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio del sollecito e minuto esame che hai voluto fare del mio manoscritto.[1] Introdurrò nella redazione le modificazioni che mi suggerisci. Spero rinviartelo presto e, se sarà possibile, desidererei spezzarlo in 2 note per i Lincei dove fu già pubblicato il lavoro[2] sui sistemi ad intersez[ioni] ip[erellittiche], tanto più che rispondendo alla cartolina del Cr[emona] gli ho fatto cenno di questo.

Non mi fai cenno di aver ricevuto la mia lettera del 5 in cui ti parlavo di varie cose; in particolare della correzione relativa ai sistemi di sup[erficie] cubiche con p[un]to biplanare ecc.

L'inesattezza contenuta nel 1° cap[itolo] delle mie «Ricerche»[3] che ti ho segnalata, mi fa venire il desiderio di preparare un rifacimento di quel 1° cap[itolo] in forma migliore, con aggiunte relative al caso di curve spezzate. Mi sono dedicato al lavoro prima di ogni altra cosa e vedo che ovunque c'è da lavorare per togliere a quel cap[itolo] una certa aureola di indeterminatezza che non è certo un suo pregio.

Non ho più ripensato alle var[ietà] a sez[ioni] ellit[tiche] dopo quanto ti scrissi.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894b e 1894c.
[2] Enriques 1893d.
[3] Enriques 1893f, cap. 1 «Generalità sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica».

76. [c.p.]

[Bologna] 8 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho scritto di nuovo interamente il lavoro:[1] spero mandartelo domani dopo gli ultimi ritocchi, citazioni ecc.

Ho piacere che tu abbia accomodato la cosa per le sup[erficie] con rete di curve ellittiche[2] (in un modo molto elegante). Quanto al modo di riparare a quel teorema sui sistemi completi (occorre limitare un po' il concetto di sistema completo) te ne parlerò un altro giorno.

Dov'è l'errore nella dimostrazione del fatto che la V^3_5 è un cono di 2ª specie?[3] Io non lo vedo, ma del resto non ci ho ripensato molto.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1894b e 1894c.
[2] Cfr. p. 87, let. 74 (5.4.1894), in particolare 2° P.S.
[3] Cfr. p. 86, let. 74.

77.

Lunedì 9 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Eccoti il manoscritto del lavoro,[1] spezzato in 2 note di mole pressoché uguale. È un po' cresciuto di dimensione perché ho cercato di ottenere la maggior chiarezza, e spero ti sembri redatto in modo soddisfacente.

Nel § 2 (Nota I) troverai più sviluppato il ragionamento per provare che la varietà normale V^n di cui la data è proiezione, è unica; ti persuaderai allora che quella dimostrazione è necessaria.

Nella Nota II (v[ed]i anche la nota a pg. 6) vedrai come si possa effettivamente escludere che la rappresentazione di V^n *ottenuta in quel modo* sia data da sistemi di L con p[un]to biplanare ed un p[ia]no osculatore fisso. Nella nota a pg. 6 è asserito che tali sistemi (effettivamente rappresentativi di V^n) si trasformano quadraticamente in sistemi di quadriche. Basta per ciò adoperare la rete omaloidica delle quadriche t[an]g[enti] al p[ia]no oscu-

latore fisso delle L nel p[un]to biplanare O, e contenenti la retta base del sistema di L fuori di O, contenenti quindi anche una retta base per O del sistema di L.

A pg. 8 (Nota I) manca una citazione: a chi è dovuta la rappresentazione del complesso quadratico? Potresti vederlo nelle memorie di Caporali: credo sia il caso di citare Klein e Caporali.[2] Scusa la seccatura che ti do, perché qui mancano le memorie di Caporali.

In fretta cordiali saluti

dal tuo aff.mo
F Enriques

[1] È il manoscritto di Enriques 1894b e 1894c.

[2] A questo proposito in Enriques 1894b, 128, nota 13 si rinvia all'articolo Caporali 1878 e a Klein 1869, posto in appendice all'articolo Noether 1869a.

78. [c.p.]

[Bologna, 12 aprile 1894]

Carissimo Castelnuovo

Mi convinco che effettivamente il caso del p[un]to 2-plo biplanare non si può mandar via almeno per V^6: forse si riuscirà (anzi, mi pare) per V^7 dove importa di più. Bisognerà quindi ch'io torni a correggere il manoscritto,[1] ma la correzione non mi porterà via molto tempo, basterà sostituire soltanto alcuni fogli.

Quanto al progetto che mi sottoponi di riunire in una nota pei Math[ematische] Ann[alen] le cose fatte sulle sup[erficie] con sist[emi] ∞^2 di curve iperellittiche, credo faresti cosa utile, ma ti confesso schiettamente avrei desiderato di fare io stesso la cosa, ciò che sarebbe capitato a suo posto, nel lavoro promesso al N[oether]:[2] senza di ciò mi pare infatti che quel lavoro perderebbe molto del suo interesse e forse anche dello scopo per cui il N[oether] me lo ha domandato. Perciò unicamente dal punto di vista personale mio avrei avuto piacere se tu pubblicassi prima qui i tuoi resultati recenti,[3] i quali, per quanto riguarda il mio scopo dei sist[emi] lin[eari], non possono però sostituire i metodi antichi se non per via indiretta, ciò che non val la pena. Tu non devi però prender di mira il mio interesse personale, e perciò pensa bene prima di rinunziare al tuo progetto.

Scusa la mia franchezza, cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[P.S.] Sto occupandomi di sist[emi] lineari sulle sup[erficie] (come ti scrissi):[4] ho già scritto una 20ª [ventina] di colonne di generalità senza arrivare a parlare del genere d'un sistema.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894b e 1894c.
[2] Cfr. Enriques 1895d e p. 85, let. 74 (5.4.1894).
[3] Cfr. Castelnuovo 1894d; l'articolo fu presentato il 20 maggio 1894.
[4] Cfr. p. 88, c.p. 75 (7.4.1894).

79.

12 Aprile [18]94 (sera)

Carissimo Castelnuovo

Ho ripensato alla questione di quei sistemi di superficie cubiche. Compariscono effettivamente quelli (con p[un]to biplanare ed un p[ia]no osc[ulatore] fisso) rappresentativi di V^5 e V^6; il 1° dà una V^5 proiezione a quanto pare da un p[un]to della V^6, perché ha come la V^6 una cubica piana base con p[un]to 2-plo più una retta base pel p[un]to 2-plo stesso.

Per $n > 6$ il mio ragionamento circa la irreduttibilità della conica pei $9 - n$ p[un]ti base del sistema rappresentativo è giusto senz'altro, sicché vengono scartati a priori quei tipi di sistemi lineari con p[un]to biplanare ecc., ossia essi sono trasformabili nei dati tipi: e (guarda combinazione) io pensavo precisamente a questi dicendo che con una trasformazione quadratica si riducono a sistemi di quadriche, pensavo cioè che (come qui) dovesse sempre la curva base spezzarsi in una retta esterna e in rette pel p[un]to 2-plo. Le correzioni da farsi si ridurranno dunque a ben poco; anzi, ti prego, affinché io non sia obbligato a riscrivere troppo ove potrei soltanto aggiungere correzioni in margine, di non farmi dei segni troppo sensibili nel manoscritto.[1]

E così spero finalmente condurrò a termine la cosa, chiedendoti scusa per la noia che reca anche a te questo esser caduto due volte in uno stesso errore, laddove si dice che gli asini non sogliano cadervi più d'una.

Ripensando a quel che ti ho scritto stamani, ne ho un po' di rimorso temendo che ciò possa farti dispiacere: spero però che tu vorrai contraccambiarmi parlando con ugual franchezza.

In questi giorni lavoro molto. La sera per i corsi (ma mi consumo il capitale, cioè le lezioni preparate innanzi a quelle che sto facendo), il giorno in gran parte per rimettere a sesto una teoria generale dei sistemi lineari sopra una sup[erficie] (1° cap. - Ricerche)[2] che abbracci tutti i casi di curve spezzate ecc. E c'è da lavorare! Ma più che invadere campi nuovi io spero con questo di porre i fondamenti delle mie «Ricerche» sopra basi soddisfacenti. Mi è avvenuto di rivedere vari punti e dovunque ci sono delle lacune riempite coll'intuizione: per fortuna torna tutto, almeno tutto quello che

ho verificato esclusa la cosa dei sistemi completi dove vi è appunto quella svista[3] (supposto $m \leq i + i'$); ma lì non si può dar la colpa all'intuizione. Per rimediare a quell'errore dico che una curva *appartiene* ad un sistema lineare quando aggiungendovi delle trasformate di suoi p[un]ti semplici ne diviene curva totale: allora si può stabilire che una curva appartiene ad un sistema *completo* di = [ugual] genere, e le conseguenze non mutano.

Inoltre (teorema invano cercato e si capisce ora il perché) «Un sistema normale si deduce da uno completo coll'aggiunta di p[un]ti base semplici».

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894b e 1894c.
[2] Enriques 1893f.
[3] Cfr. p. 87, let. 74 (5.4.1894), in particolare 2° P.S.

80. [c.p.]

[Bologna] 13 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Nello studio dei sistemi lineari di curve sopra una sup[erficie] mi si presenta la seguente questione di geometria sopra una curva:

Dimostrare che in una g^r_n sopra una curva ogni gruppo variabile di n punti non può esser costituito di m punti ciascuno contato $i > 1$ volte ($n = mi$).

Conosci una dimostrazione semplice di questo fatto?

La soluzione della questione non sembra difficile, ma io non vorrei perderci tempo nel caso ove la questione fosse già risoluta (ciò che non mi è noto).

I miei studi procedono e le pagine si succedono alle pagine: la cosa ha un lato doloroso pensando che in fin dei conti tutto questo è per arrivare a cose che già si sanno, ma d'altra parte mi fa pensare che ove avessi voluto procedere così in tutte le mie «Ricerche»[1] fin da principio, quel lavoro sarebbe uscito nella mia tarda vecchiezza, e sarebbe uscito un volume!

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1893f.

81.

[14 aprile [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

Ti sono molto grato di voler compiacere il mio desiderio, sebbene abbia ancora un po' di rimorso di avertelo espresso.[2]

Secondo il mio progetto io riunirei in un 1° cap[itolo] del lavoro pei Math[ematische] Ann[alen], una esposizione completa dei resulati conseguiti sulle sup[erficie] a sezioni iperellittiche, ellittiche e razionali.[3]

Per le sup[erficie] a sezioni iperellittiche di gen[ere] $p > 1$ seguendo il mio metodo mostrerei che sempre il luogo dei coniugati d'un p[un]to è una conica o una retta, onde la classificazione proiettiva delle sup[erficie] a sez[ioni] ip[erellittiche] che serve di poi.

I casi $p = 0$, $p = 1$ discendono dal tuo teor[ema] di Kronecker.[4] Premesso l'enunciato di questo teor[ema] segue subito la classificazione delle sup[erficie], a sez[ioni] raz[ionali] (data da Picard e Guccia[5] usando della rappresentaz[ione] di quelle sup[erficie], possibile secondo Noether):[6] per $p = 1$ segue pure (col tuo metodo) la costruzione della sup[erficie] normale F^n di cui la data F è proiez[ione]: ricordata l'esistenza su F^n di curve normali C (che si deduce in un modo qualunque) si ha per proiezione la rappres[entazione] di F^n sul piano (Del Pezzo,[7] Guccia).

Qui torna bene (se tu lo permetti) di esporre in un apposito (breve) §° [paragrafo] (invece che in nota) i recenti resultati che tu hai ulteriormente conseguiti[8] per le sup[erficie] con rete di curve ip[erellittiche] o ellit[tiche], tanto più che il metodo si riattacca ancora (come il mio pel caso delle sup[erficie] a sez[ioni] ip[erpiane] di gen[ere] $p > 1$) all'applicazione del tuo teor[ema] sulle involuzioni.[9]

In un 2° cap[itolo] darei la classificaz[ione] dei sistemi lineari di sup[erficie] a intersez[ioni] iperellittiche. In un 3° la trattazione dei casi partic[olari] $p = 0$, $p = 1$, limitando molto l'esposizione di quest'ultimo caso (troppo lungo in confronto al resto del lavoro), cioè dando diffusamente il metodo e rimandando alla seconda nota lincea[10] per la discussione minuta dei casi particolari.

Questo (se avrò la tua approvazione) è il progetto del lavoro, nel quale, senza occupare troppo spazio, verrebbe ad essere contenuta un'esposizione si può dire completa di un argomento ben chiuso in sé stesso, in modo da essere accessibile a qualunque lettore.

Ho ricevuto il manoscritto[11] ed ho cominciato a riguardarlo con *calma* lasciando da parte ogni altra cosa.

Ecco le modificazioni che ho pensato introdurre:

1°) togliere l'accenno della dimostraz[ione] relativa alla rappresentaz[ione] di V^4 sulle coppie d'una involuz[ione] di S_3 dicendo solo che il fatto è stato segnalato dal N[oether] (questo cambiamento dipende dal fatto che il S[egre], il quale prima mi disse che il N[oether] non gli aveva fatto cenno di dimostrazione, mi ha poi mandato la lettera del N[oether] stesso dove è contenuta in sostanza la 1ª delle mie dimostrazioni).[12]

2°) specificare la natura della curva base K che *determina da sola il sistema* delle L (primi tipi) dicendo che essa può degenerare conservandosi costante il genere virtuale, ed escludendo le degenerazioni in cui una componente si riduce ad un punto per le quali la K non determina più il sistema delle L (così infatti nascono alcuni degli altri tipi con p[un]to base 2-plo che è meglio tenere distinti; come nel manoscritto che hai visto).

3°) se la quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema di L si spezza, si ha $n \leq 6$ e ad un p[ia]no componente (perché immagine d'un p[un]to 2-plo di V^n) appartiene una cubica base (per le L) facente parte di K. Oltre alle 2 ipotesi considerate siamo condotti alla seg[uente]: la K si compone d'una cubica piana, o di questa e d'una retta ($n = 6$, $n = 5$):

$n = 6$) la cubica p[ia]na ha p[un]to 2-plo nel p[un]to base 2-plo O, e di più le L hanno in O un (altro) p[ia]no osculatore: (la cubica può spezzarsi);

$n = 5$) I) la cubica p[ia]na (spezzata o no) ha p[un]to 2-plo nel p[un]to O: per O vi è una retta nel p[ian]o osculatore fisso. II) la cubica p[ia]na si compone di 3 rette per O nel p[ia]no osculatore: la K contiene un'altra retta fuori di O ed il sistema delle L si trasforma in un sistema di quadriche; però credo che questo caso non possa nascere (ma ci penserò bene).

Saluti affettuosissimi e nuovi ringraziamenti

tuo

F Enriques

[P.S.] Ci hai tu la memoria di Noether[13] sulle curve riduttibili? La ho cercata senza trovarla, occorrendomi confrontarla sicché vorrei sapere di non averla persa. Ma se l'hai e ti fa comodo tienla pure, perché qui posso vederla negli «Acta Matematica».

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Cfr. p. 90, c.p. 78 (12.4.1894).
[3] Cfr. Enriques 1895d e p. 55, nota 2 a c.p. 46 (16.12.1893).
[4] Cfr. p. 46, nota 2 a let. 41 (30.11.1893).
[5] Cfr. gli articoli di Picard citati a p. 63, nota 3 a let. 51 (1.1.1894) e Guccia 1886.
[6] Cfr. Noether 1871c.
[7] Cfr. Del Pezzo 1887.
[8] Cfr. Castelnuovo 1894d.
[9] Cfr. Castelnuovo 1893c e 1894a.

[10] Enriques 1894c.
[11] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894b e 1894c.
[12] Cfr. p. 85, let. 74 (5.4.1894) e nota 4.
[13] Noether 1886a.

82. [c.p.]

[Bologna, 16 aprile 1894]

Carissimo Castelnuovo

Cercando l'irreducibilità dei miei sistemi[1] mi sono accorto che la V^5 (non cono) può sempre rappresentarsi col sistema delle sup[erficie] cub[iche] L determinate da una quartica base di 2ª specie (che può degenerare) o con un sistema di quadriche. Infatti negli altri casi le L hanno un p[un]to 2-plo e per esso una quartica avente almeno una intersez[ione] variab[ile] coi piani per O. Ora per un p[un]to della quartica si consideri una retta generica: questa è immagine d'una conica su V^5 per la quale non passano quadriche (tranne una eccez[ione]) e dalla quale proiettando V^5 si ha quindi la nominata rappresentanz[ione] senza p[un]ti doppi base per le L.

Ti persuade? Ci ripenserò.

Gli altri sistemi sembrano irreducibili.

Quanto alla questione di cui ti domandai[2] sulle g_n^r l'idea di considerare una g_n^r immersa semplicizza molto il procedimento ch'io avevo immaginato: la cosa del resto non mi pareva a *priori* da ritenersi evidente in un lavoro dove voglio dimostrare tutte le cose evidenti.

Saluti

Aff.mo
FE

[1] Cfr. Enriques 1894c.
[2] Cfr. p. 92, c.p. 80 (13.4.1894).

83. [c.p.]

[Bologna] 20 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Da qualche giorno non mi sono fatto più vivo; ciò dipende dal tempo che debbo perdere per metter su una «teoria delle coniche». Ma appena gettate le basi di questa originale ricerca spero poter riprendere le altre cose lasciate in parte interrotte.

Ho redatto di nuovo tutta la 2ª nota,[1] ma voglio ancora rivederla prima di mandartela. Le V^5 esclusi i coni danno un solo tipo come ti

scrissi; in ogni sistema rappres[entativo] si trova una conica non contenuta nell'immagine di una quadrica, da cui proiettando ecc.

Ciò agevolerà come vedi lo studio delle var[ietà] a più di 3 dim[ensioni] a sez[ioni] ellit[tiche] pare che ne esisteranno d'ord[ine] 5 di 2 tipi e non più su.

Anch'io ho avuto la memoria del S[egre][2] cui ho dato solo una scorsa: mi ha fatto però molto buona impressione (come del resto c'era da aspettarsi).

In fretta affettuosi saluti e scuse per il silenzio improvviso dei giorni passati.

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1894c.
[2] Segre 1894.

84.

21 Aprile 1894

Carissimo Castelnuovo

Siamo al 21 Aprile ed il 30 si chiude il concorso del perfez[ionamen]to all'estero. Ove io debba rimanere fuori qui a Bologna io spero di venire con te a Roma, gratissimo della tua offerta: ma indipendentemente dalla tua volontà e dalla mia, potrebbero nascere circostanze imprevedute che impedissero la realizzazione di tale disegno; non credi che mi converrebbe assicurarmi per ogni caso anche da un'altra parte concorrendo a quel posto? Ti domando questo consiglio anche perché non so bene quando ti occorra di provvedere al tuo assistentato, e ti faccio riflettere che possono darsi vari casi in cui la questione di Bologna rimanga insoluta fino a Novembre, epoca a cui forse tu non potresti rimandare la tua decisione. Come ti dissi la fac[ol]tà qua ha chiesto il concorso, ma occorre il parere del Cons[iglio] Sup[eriore]. Nonostante questo probabilmente il concorso non si aprirà, (per economia), quando pure non succeda di peggio se va avanti il progetto Baccelli.[1] Vedi dunque che l'incertezza regna sovrana. Ma poiché tu disponi di un elemento di più per la risoluzione del problema, aspetto il tuo consiglio in proposito.

Ieri sera mi tornava in mente la questione della razionalità della sup[erficie] di gen[ere] 0. Mi vennero fatte queste riflessioni cui non posso ora pensare, ma che ti accenno. Sopra una sup[erficie] esista un sistema $|C|$ di grado n e gen[ere] π dove $n > 2\pi - 2$: allora $|2C|$ soddisfa all'analoga disuguaglianza. Se $|2^r C|$ ha la serie caratt[eristica] completa lo stesso accade per $|2^{r-1} C|$.

Probabilmente basta che $|2C|$ e quindi $|C|$ abbia la serie carat[teristica] completa perché lo stesso accada per $|2^rC|$. Comunque per r grande quanto si vuole (quindi sempre), $|2^rC|$ abbia la serie carat[teristica] completa. Se la sup[erficie] deve essere raz[ionale] $|C|$ (e $|2^rC|$) non ha curve fond[amentali] di gen[ere] > 0, onde lo pseudoaggiunto è l'aggiunto. Supponiamolo. Ogni sistema $|K|$ è residuo di una curva risp[etto] a $|2^rC|$ (r assai grande): su questa curva $|2^rC|$ sega una serie non speciale, onde (facendo il calcolo) il residuo $|K|$ ove abbia la serie carat[teristica] non spec[iale] ha la serie carat[teristica] completa. In particolare sembra che questa proprietà competa ai successivi aggiunti di $|C|$ (costruibili col tuo metodo), e di cui le dimensioni discendono.

Vedi il profitto che se ne trae per la raz[ionalità] delle sup[erficie]: il fatto della completezza della serie carat[teristica] di un sistema sotto certe restrizioni è invariantivo al variare del sistema; c'è d'incomodo il supporre $n > 2\pi - 2$, ché del resto la non specialità della ser[ie] carat[teristica] unita alla compl[etezza] è la vera definiz[ione] delle sup[erficie] regolari di gen[ere] 0. Ciò che tu hai dimostrato suppone la completezza per *ogni* sistema, pare basti ammetterla per $|2C|$. Il procedimento (analogo a quello adoprato nelle mie «Ricerche» cap. III)[2] mi pare possa avere qualche importanza.

Ma non posso pensarci ora.

In fretta tuo aff.mo

affettuosi saluti F Enriques

[1] Si tratta del disegno di legge «Stato di previsione della spesa del Ministero della Istruzione Pubblica per l'esercizio 1894-95» presentato da Guido Baccelli, che fu titolare del dicastero dal 15 dicembre 1893 al 9 marzo 1896.

[2] Enriques 1893f, cap. 3 «Il sistema aggiunto».

85. [c.p.]

[Bologna] 24 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

La tua gentile risposta della quale ti sono molto grato (pur rammaricando l'incomodo che ti reca la cosa per causa mia) mi dispenserebbe dal cercare altro, siccome però «melius est abundare quam deficere» per ogni lontana imprevedibile evenienza concorro all'estero seguendo il tuo consiglio.

Non capisco la tua obiezione al mio ragionamento; se $|2^rC|$ ha grado $n > 2\pi - 2$, onde la serie caratt[eristica] non speciale, parmi che sopra ogni curva parziale di $|2^rC|$, $|2^rC|$ segherà a fortiori una serie non speciale: ciò dovrebbe vedersi esaminando la serie canonica sopra una curva spezzata.

Non ricordavo bene l'enunciato del tuo teor[ema][1] ma dopo averti scritto mi venne in mente che esso potesse contenere qualcosa d'analogo: però non mi hai mai detto come ci pervieni, cioè perché la serie carat[teristica] dell'agg[iunto] è completa.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[P.S.] Ho gettato le basi d'una teoria delle coniche: da oggi sono tornato a occuparmi dei miei sistemi, rileggendo un manoscritto[2] si trova sempre da ridire; forse lo riscriverò in parte.

[1] Cfr. Castelnuovo 1891a, nota 1.

[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1894c.

86.

Bologna 25 Aprile 1894 (Mercoledì)

Carissimo Castelnuovo

Eccoti finalmente il manoscritto. Fra ieri e oggi ho scritto di nuovo quasi tutta la 2ª nota[1] perché la forma che le avevo dato non mi piaceva: così ho avuto occasione di rivederla minutamente, e spero (sarebbe tempo!) che sia soddisfacente.

Vedrai introdotte nella 2ª nota le modificazioni di cui ti parlai,[2] specie la riducibilità dei sistemi rappresentativi di V^5. Vi è una sola V^5, esclusi i coni, essa è rappresentata dalle sup[erficie] cub[iche] L per una quartica di *2ª specie* (questo nome abbrevia tutto); gli altri casi si riconducono a questo ove però la quartica è spezzata, ma le L non han p[un]ti 2-pli.

Vedi il profitto che si può trarne per la varietà a più dim[ensioni] a sez[ioni] ellittiche. Per le V^5 basta esaminare i due sistemi di varietà cubiche passanti per una sup[erficie] (o varietà) a sezioni raz[ionali] del 4° ordine: pare vengano due tipi e non coni, nemmeno crescendo la dimensione. Sembra poi facile vedere che la V_n^6 sono coni per $n > 3$, o per lo meno lo saranno certo per n assai elevato. Con ciò la questione si presenta in breve esauribile.

Per oggi addio in fretta. Affettuosissimi saluti

tuo

F Enriques

[1] Si tratta di una nuova redazione di Enriques 1894c.

[2] Cfr. p. 95, c.p. 82 (16.4.1894) e p. 95, c.p. 83 (20.4.1894).

87. [c.p.]

[Bologna] 27 Aprile [18]94

Carissimo Castelnuovo

Se ho capito bene l'ultimo § [paragrafo] della tua «Geometria sulle curve ecc.»[1] contiene il teor[ema]:

La C_p di ord[ine] $2p-2$ in S_{p-1} è curva base di $\binom{p-2}{2}$ quadriche indip[endenti], le quali o la determinano completamente, oppure si segano secondo una rigata raz[ionale] normale che contiene C_p: in questo 2° caso C_p contiene una g_3^1 (è proprio certo quest'ultimo fatto? non lo vedo).

Vorrei farne un'applicaz[ione] alle sup[erficie] di gen[ere] 1 in S_p (a sez[ioni] di genere p). Una tale sup[erficie] o è intersez[ione] d'una quadrica con una varietà a sez[ioni] ellittiche (e ciò se tutte le quadriche per essa la determinano), oppure appartiene ad una varietà contenente ∞^1 piani (lascio da parte la var[ietà] di Ver[onese]).

In questo 2° caso un p[ia]no della var[ietà] contiene una curva parziale della sup[erficie], onde proiettando da essa la sup[erficie] si abbassa lo spazio che la contiene (e pare essa rimanga *pura*). Ciò darebbe il modo di ridurre tutte le sup[erficie] di gen[ere] 1 a quelle che si hanno segando una quadrica con una varietà a sez[ioni] ellittiche. Ma occorre ripensarci.

Quella tua cosa sulla g_3^1 non la capisco: sulla sup[erficie] di gen[ere] 1 vi sarebbe un fascio di cubiche appena $p>10$; ma ciò non è; basta trasf[ormare] la sup[erficie] di 4° ord[ine] portandola, per esempio in S_{19}.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Castelnuovo 1889b, § 30.

88.

30 Aprile 1894

Carissimo Castelnuovo

Ti mando il foglio che per isbaglio avevo qui trattenuto (almeno credo che sia lui).

Che su V^n si possa scegliere una C irreduttibile mi pareva d'averlo detto, dove scelgo la C sopra una sez[ione] iperplanare generica, e ad ogni modo segue da quella scelta.

Il ragionamento con cui si riducono ad uno solo i sistemi rappresentativi della V^5, ti lascia dei dubbi? Esso comprende il caso del sistema con cubica piana base e retta base. La trasformazione diretta si eseguirebbe nello

spazio S_3 prendendo il sistema omaloidico di sup[erficie] cubiche L passanti per una delle coniche di cui ivi si parla: non sembra facile però lo eseguirla, mentre l'altro ragionamento è così semplice. Più agevole è controllare come rientrino in quel tipo i sistemi di quadriche.

Non capisco bene quale sia il ragionamento che mi accenni di pg. 11. Forse si tratta là della riduttibilità della quadrica residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L? ed in questo caso perché non ti persuade? Rileggendo le tue lettere di giorni fa, non vi trovo la soluzione del dubbio.

Per concludere rimetto pienamente in te la scelta sul da farsi: cioè se ti pare che ciò che hai rilevato di scorretto sia cosa di poco, tale da non potere suscitare complicazioni; o se invece credi meglio ch'io debba far la revisione di nuovo sul manoscritto; se infine preferisci di accennarmi di nuovo quel punto scorretto o rimandarmi quel solo foglio. In ogni caso torno a ringraziarti e a scusarmi della noia che ti ho procurata con questo lavoro.

Quanto alle sup[erficie] di gen[ere] 1, ripensandoci io mi ero accorto che il ragionamento con cui volevo provare che una F_{2p-2} di S_p determinata dalle quadr[iche] che vi passano sta su una var[ietà] a sez[ioni] ellit[tiche], non andava. Eppure io credo che il fatto sia vero ((a meno di qualche restrizione)), e condurrebbe ad un piccolo numero di F irriducibili: precisamente delle F generate in tal modo se ne ha soltanto per $p \leq 6$: appena $p > 6$ la var[ietà] a sez[ioni] ellittiche contiene sup[erficie] sez[ioni] iperplanari spezzate che segano un sistema di minor dimensione su F.

Viste le difficoltà che s'incontrano per le sup[erficie] di gen[ere] 1, io avevo pensato di rivolgermi a quelle (di gen[ere] 1) rappresentabili sul p[ia]no 2-plo. Ve ne sono di varie specie, sezioni di coni (varietà) a sez[ioni] ellittiche con quadriche, e vorrei vedere che si ottengono tutti così. In questo caso si può profittare del sistema aggiunto alla curva di diramazione nel p[ia]no 2-plo: si ottiene così un sistema appartenente alla I_2 sulla sup[erficie]: per avere la dimensione del suo aggiunto (sulla sup[erficie]) ricorrerei al tuo teor[ema] di R[iemann] R[och] per le inv[oluzioni] irraz[ionali]:[1] ma non ho condotto in fondo il calcolo e prevedo anche qui delle difficoltà.

Vedo che riguardo all'idea di studiare i p[ia]ni 2-pli ci siamo incontrati;[2] tu però in un caso più generale: hai ottenuto dei resultati? e come fai la discussione? Mi pare che lo studio che ti proponi è quello di tutti i p[ia]ni 2-pli, studio che mi parrebbe molto importante.

Non ho altro di nuovo da raccontarti. Procedo lentamente nella ricostruzione dei fondamenti della geom[etria] sopra una sup[erficie].

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Cfr. Castelnuovo 1891d.

[2] Le ricerche di Enriques in questo campo furono pubblicate in Enriques 1896e, che contiene un'Aggiunta di Castelnuovo.

89.

3 Maggio 1894

Carissimo Castelnuovo

Dai fogli che mi mandi vedo l'appunto[1] che mi fai a pg. 11 precisamente dove dico che la curva proiettata C sopra la sup[erficie] F a sez[ioni] ell[ittiche] viene rappresentata sopra un piano immagine da una conica (pei $9-n$ punti base ecc.) *irreduttibile per* $n>6$ (tale essendo C). Forse non hai badato all'aggiunta di quelle parole «*per* $n>6$» stante le quali la cosa mi pare che vada senza bisogno di ulteriori spiegazioni.

In fondo al foglio che ti mandai l'altro giorno, vi sono alcune righe che ti sembrano oscure e mi proponi di sopprimere. Esse hanno per iscopo di dimostrare che se per la C su V^n non passa un S_{n-2} segante V^n secondo una sup[erficie], il sistema delle L non ha p[un]ti 2-pli base, quindi servono ad escludere certe degenerazioni della curva base di quei sistemi. Esse possono invero essere soppresse, ma forse non sarebbe male invece di renderle più chiare e notare come si possa escludere quel caso. Il ragionamento consiste nell'osservare che un p[ia]no pel p[un]to 2-plo O rappresenta una sup[erficie] d'ordine $<n$ su V^n onde ecc., salvo il caso che O sia 4-plo per la curva base, ma allora $n=5$, e la curva base si compone di 4 rette per O mentre ciò è impossibile.

Pei p[ia]ni 2-pli di gen[ere] 1 il calcolo cui ti accennavo nell'ultima lettera giustifica le mie previsioni, nell'ipotesi che il sistema aggiunto alla curva di diramazione (di gen[ere] $P>2$) sul piano 2-plo rappresenti un sistema *puro* sulla sup[erficie], ma appunto qui si presenta la difficoltà. Occorrerà perciò tentare quei p[ia]ni 2-pli da un altro punto di vista: ho pensato qualcosa e te ne scriverò se ci sarà fondamento.

I p[ia]ni 2-pli riferibili a rigate non raz[ionali] hanno la curva di diramaz[ione] spezzata in curve immagini di generatrici: forse te l'ho già detto un'altra volta; segue da quel che ti scrissi[2] sulle inv[oluzioni] sopra una rigata.

Il S[egre] (colla sua memoria[3] e con una cartolina) ha richiamato la mia attenzione sulla memoria di Kobb:[4] essa contiene in sostanza (se ho ben capito) la trasf[ormazione] di una sup[erficie] in una con sing[olarità] ord[inarie] (o senza sing[olarità] in un iperspazio). Infatti sia F una sup[erficie] con

p[un]to mult[iplo] O. Considero le quadriche per O e faccio segare da p[ia]ni le sezioni d'un sistema ∞^3: O si muta in una curva multipla e in p[un]ti multipli; a ciascuno di questi applico lo stesso processo. Infine ad O si sostituiscono tante curve mult[iple] senza p[un]ti mult[ipli] partic[olari] perché il processo deve finire avendo O un numero finito di intorni (rappresentati da un numero finito di serie). Lo stesso processo pare si applichi alle curve multiple; ma è specialmente dei p[un]ti multipli che a me importa. Mandar via questi vuol dire avere sulla sup[erficie] dei sistemi senza curve fond[amentali] che *danno noia*, pei quali l'aggiunto coincide collo pseudoaggiunto; ed allora non dispero di estendere a tutte le superficie di gen[ere] geom[etrico] 0 il teor[ema] sull'invariantività del gen[ere] numerico posto come nel cap[itolo] III delle mie «Ricerche».[5]

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Le osservazioni di Castelnuovo riguardano il manoscritto di Enriques 1894c.
[2] Cfr. p. 84, let. 74 (5.4.1894).
[3] Segre 1894.
[4] Kobb 1892.
[5] Enriques 1893f, cap. 3, § 2.

90.

5 Maggio 1894

Carissimo Castelnuovo

Se ben ricordo tu mi hai detto un giorno che i piani doppi son determinati dalla curva limite: questo significherebbe che dato un piano 2-plo π con curva limite C, se esiste una trasformazione [1 2] in π avente C come curva limite (di diramaz[ione]) il p[ia]no 2-plo è razionale: va bene?

Si può estendere questa proprietà alle rigate doppie (od anche a tutte le sup[erficie])?

Ecco il profitto che vorrei cavarne.

Sia F una sup[erficie] con un fascio di genere p (≥ 0) di coniche. La rappresento sopra una rigata 2-pla F' di gen[ere] p con curva limite K secante in 2 p[un]ti le generatrici. Sia C_1 una direttrice di F' e C_2 la direttrice luogo dei coniugati armonici dei suoi p[un]ti rispetto alle coppie di p[un]ti di K sopra le generatrici per essi: sia poi C un'altra direttrice di F'. Sopra ogni generatrice di F' voglio riferire proiettivamente i p[un]ti della generatrice e le coppie dell'involuzione che ha per p[un]ti 2-pli quelli di K: posso farlo facendo corrispondere ai 2 p[un]ti di K se stessi contati 2 volte, e

al punto di C la coppia costituita dai p[un]ti di C_1 C_2: nasce così una trasf[ormazione] [1 2] di F' che ha la K come curva limite. Nel caso sussista la proprietà di cui ti ho domandato in principio si dedurrebbe che F è rappresentabile semplicemente su F': se la cosa va soltanto per $p = 0$ si avrebbe soltanto una semplice dimostrazione del teor[ema] di Noether.[1]

Ma ciò che mi mette in sospetto è che la dimostrazione si estenderebbe al caso delle varietà con una rete di coniche in particolare alle V^3. Io del resto non riesco a vedere che una sup[erficie], e neppure un p[ia]no 2-plo sia determinato (nel senso accennato) dalla curva limite.

Ti manderò domani i fogli corretti.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. Noether 1871c.

91.

[8 maggio [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

Quando ti domandai l'altro giorno della rappresentabilità delle sup[erficie] 2-ple con data curva di diramaz[ione], l'una sull'altra, mi si era presentata l'idea che ciò dovesse sempre accadere riguardando la sup[erficie] 2-pla $f(x\ y\ z) = 0$ come il campo di razionalità $x\ y\ z\ \sqrt{\psi(x\ y\ z)}$ dove $\psi = 0$ è la curva di diramaz[ione], ma l'assurdo a cui venivo per le V_3^3 (che avrei rappresentato su S_3 facendo corrispondere le rette d'una stella alle coniche di una rete il che è impossibile) mi fece dubitare della cosa. Soltanto ieri mi accorsi che il punto della questione sta in ciò che ψ può contenere come fattori alcune delle curve fondamentali, e ne leggo oggi la conferma nel S[egre][2] secondo le tue indicazioni. Ma io credo che non debbano trarsi le tue conclusioni pessimiste, anzi ritengo di avere stabilito tenendo conto di quel fatto che «ogni sup[erficie] con un fascio di gen[ere] p di curve raz[ionali] è riferibile ad una involuzione I_2 su una rigata di gen[ere] p, e quindi per $p > 1$ ad una tale rigata». La 1ª parte della cosa si estende e dà per la V_3^3 la nota rappresentaz[ione] su una I_2 di S_3.

Il ragionamento è un po' delicato; spero nondimeno che vada bene. Eccolo.

Consideriamo in S_4 la sup[erficie] F con un fascio di coniche poste ognuna sopra un piano di una data ∞^1 di piani: sia π un piano non incidente a nessuno degli ∞^1 piani. Da ogni p[un]to P di π proietto la conica

di F il cui piano incontra in P π, sopra un S_3: così ho in questo S_3 una rigata 2-pla F'. Vi è una curva di diramazione C su F' che incontra in 2 p[un]ti le generatrici: inoltre su F' vi possono essere delle rette fondamentali g (2 dei p[un]ti fond[amentali] su π) ed inoltre anche delle generatrici di diramaz[ione] g' proiezioni di coniche degeneri in rette 2-ple su F; le generatrici fondamentali si possono togliere supponendo che π non incontri nessuna delle coniche degeneri su F, ma non importa. Aggiungendo al campo di razionalità di F' ($f(x\ y\ z) = 0$) i radicali che portano sui polinomi che danno le equaz[ioni] di C e delle g e g', ossia aggiungendo delle $\sqrt{\psi_1(x\ y\ z)}$, $\sqrt{\psi_2 \ldots}$ al campo $(x\ y\ z)$, si esprime razionalmente il punto di F.

Ora consideriamo la trasformazione 2-pla su F' che ha la C come curva di diramaz[ione]: la costruisco nel modo di cui ti ho già parlato, curando però che ogni retta g o g' sia una retta (fondamentale) di diramaz[ione]. Posso ottenerlo se prendo una direttrice C_1 di F' che passi per i p[un]ti comuni alle g, g' ed a C, onde per quei p[un]ti passerà anche la coniugata armonica C_2 (risp[etto] a C), riferendo quindi una direttrice K alla $C_1 + C_2$: invero sopra una g vi è allora una omografia degenere tra i p[un]ti e le coppie omologhe, onde ad ogni p[un]to corrisponde una coppia costituita da 2 p[un]ti coincidenti. È da notarsi che con ciò si è costruita una F' 2-pla che ha come curva di diramaz[ione] (anche fond[amentale]) la $\psi = 0$, ma può avere ed avrà in generale altre curve fond[amentali] (rette) di diramaz[ione] $\chi = 0$: dunque i p[un]ti della F che si esprimono razionalmente per $x\ y\ z$ $\sqrt{\psi_1(x\ y\ z)}$, $\sqrt{\psi_2 \ldots}$ si esprimono raz[ionalmente] pei p[un]ti della F' semplice (che corrisponde a quella F' 2-pla) ma forse la cosa non è invertibile, perché il campo di raz[ionalità] di F' è $x\ y\ z$ $\sqrt{\psi_1}$ $\sqrt{\psi_2}$ e $\sqrt{\chi}$ (ossia $\sqrt{\psi\chi}$) o $\sqrt{\chi_1}$ $\sqrt{\chi_2}$ ... Per ciò la F viene in tal caso riferita alle coppie d'una involuzione su F' invece che punto per punto alla F'.

Ora una involuz[ione] I_2 su F' se $p > 0$ lascia invariate o accoppia le generatrici; il 2° caso va solo per $p = 1$ e qui resta il dubbio. Per $p > 1$ con una nuova trasf[ormazione] [1 2] la I_2 si rappresenta su F'.

Va bene? Ne avrei molto piacere.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] La data è stata riportata sulla lettera da Castelnuovo.
[2] Segre 1894, § 5.

92. [c.p.]

[Bologna, 11 maggio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ricevuta la tua cartolina sono stato a parlarne con P[incherl]e e, d'accordo con lui, ho deciso di mandar subito la domanda al Ministro perché mi conferisca la libera docenza qui.

Quanto alla dimostrazione di cui ti parlai, essa ha bisogno di essere ritoccata in un punto, ma credo si vada in fondo. La sup[erficie] $x\ y\ z\ \sqrt{\psi}$, è riferibile alla $x\ y\ z\ \sqrt{\chi}$, la quale contiene un fascio di gen[ere] p di curve raz[ionali] ed una involuz[ione] di gen[ere] p di coppie di curve (perché $\chi = 0$ si compone di generatrici di F') onde $p = 1$, oppure $\sqrt{\chi}$ si esprime raz[ionalmente]. Questo il concetto che ti esporrò più dettagliatamente un altro giorno; occorre infatti precisare il modo di ottenere il polinomio ψ rappresentante la curva di diramaz[ione] su F'.

In fretta affettuosi saluti

tuo
F E.

93. [c.p.]

[Bologna] Lunedì [14 maggio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Dopo molto almanaccare mi sono finalmente accorto che il lemma sulle varietà 2-ple ch'io applicavo «Se è raz[ionale] una var[ietà] 2-pla con var[ietà] di diramaz[ione] $F + F'$, la var[ietà] 2-pla che ha per var[ietà] di dir[amazione] F è rappresentabile su quella che ha per var[ietà] di dir[amazione] F'» non sussiste: cadevo nell'errore per analogia coi teoremi sui campi di raz[ionalità] delle equaz[ioni] con una variabile. Cade dunque quanto ti scrissi.

Sono tornato a pensare ai p[ia]ni 2-pli di gen[ere] 1. Sotto *riserva* credo che i casi sieno i seguenti:[1]

1°) sestica C_6 limite (senza o con p[un]ti 2-pli)

2°) C_8 limite, con 2 p[un]ti 3-pli (distinti o coincidenti)

3°) C_8 limite, con p[un]to 4-plo e due punti 2-pli ∞ [infinitamente] vicini.

Questo 3° caso che mi si presenterebbe possibile era inaspettato e non so nemmeno come verificare se esso è in fatto di gen[ere] 1 e costruirne una sup[erficie] rappresentativa.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 101, nota 2 a let. 88 (30.4.1894).

94.

16 Maggio 1894

Carissimo Castelnuovo

Il p[ia]no 2-plo rappresentativo della sup[erficie] di 5° ord[ine] con 3 p[un]ti 3-pli è quello che ha per curva limite una C_8 con 2 p[un]ti 4-pli; dunque rientra nel 2° dei tipi che ti ho enumerato. Si può anche rappresentare sulla sup[erficie] intersezione del cono ellittico di 8° ord[ine] e 2ª specie (a 3 dim[ensioni]) in S_9 con una quadrica.

Le sup[erficie] di gen[ere] 1 riferibili a sup[erficie] del 6° ord[ine] sono tutte, se non erro, riferibili a intersezioni di quadriche colle mie varietà V^n, onde possono considerarsi note.

I miei studi sui p[ia]ni 2-pli procedono in modo soddisfacente. Mi si presenta tutto un programma di studio assai attraente.

1°) Enumerare i p[ia]ni 2-pli rappresentativi di sup[erficie] di 2° genere $p^{(1)} = 1$ (cioè contenenti un fascio di curve ellittiche). La ricerca non sembra difficile e comprende quella dei p[ia]ni 2-pli di genere 2.

2°) Per $p > 2$ (escluso il caso $p^{(1)} = 1$) si presenta un nuovo sussidio nello studio dei p[ia]ni 2-pli: l'uso del sistema canonico (*puro*) rappresentato da un sistema lineare sul p[ia]no 2-plo. Che cos'è questo sistema?

Nei casi più semplici è il 2° aggiunto alla curva di diramazione; ma pare che un p[un]to $(2\rho + 1)$-plo della curva di diramaz[ione] deve qui computarsi come 2ρ-plo, e vi sono poi eccezioni per l'avvicinarsi indefinito di p[un]ti multipli (e per l'esistenza di curve fond[amentali] eccez[ionali]). Il criterio applicato ai p[ia]ni 2-pli con C_6 limite, darebbe che se la C_6 ha 2 p[un]ti 3-pli staccati, il genere è 1; se ∞ [infinitamente] vicini è 0.

3°) Studio delle curve eccezionali del p[ia]no 2-plo. Quando si possono togliere? Cioè quando esiste una rete pura di grado 2 sulla sup[erficie]?

4°) Quand'è che 2 p[ia]ni 2-pli irreducibili per una trasformazione birazionale del p[ia]no sono rappresentabili uno sull'altro ecc.

Vedi che la materia non manca.

Ecco ora un cenno del procedimento che seguo per i p[ia]ni 2-pli di genere 1.[1]

Si trasformi la sup[erficie] di gen[ere] 1 (p[ia]no 2-plo) in una F senza curve eccezionali né p[un]ti multipli di un S_r.

Sulla F vi è una involuzione razionale (di grado 2) I: per brevità chiamo *p[un]ti* della sup[erficie] I le coppie suoi elementi. Ora la I non ha p[un]ti multipli (considerate nello spazio delle coppie di p[un]ti). Dico che ad un sistema puro, (senza punti base) su F, appartenente ad I, corrisponde un sistema senza punti base su I, e viceversa. La proposizione diretta è chiara: per l'inversa occorre eliminare il dubbio che ad un sistema senza p[un]ti

base su I corrisponda su F un sistema con uno (o più) p[un]to base di cui il coniugato descriva una curva; ma la curva così descritta sarebbe eccezionale onde ecc.

Ciò posto si consideri su I un sistema $|C|$ di gen[ere] π, grado D, immagine di un sistema *puro* di F: le curve di esso seghino in δ p[un]ti la curva di diramazione. Si ha allora (indicato con p il genere delle immagini su F)

$$2p - 2 = 4\pi - 4 + \delta$$
$$2p - 2 = 2n$$

donde

$$n = 2\pi - 2 + \frac{\delta}{2}.$$

L'ipotesi $\delta = 0$ andrà esaminata a parte e potrà eliminarsi. Sia $\delta > 0$. Allora $n > 2\pi - 2$. Il sistema aggiunto a $|C|$ soddisfa ad una disuguaglianza analoga: dico che esso è immagine di un sistema puro su F. Infatti questo sistema aggiunto non ha punti base su I.

Considero i successivi aggiunti e arrivo in fondo a sistemi di curve razionali (di dimensione ≥ 1) o ellittiche di dimensione ≥ 2 (non spezzato).

Se ad I appartiene un sistema di curve ellittiche (una rete almeno) immagini d'un sistema puro su F, il p[ia]no 2-plo ha una curva limite C_6 oppure una C_8 con 2 p[un]ti 4-pli.

Esaminiamo il caso d'un sistema di curve raz[ionali] immagini d'un sistema puro. Se il sistema è quello delle rette o delle coniche la curva limite è una C_6. Ogni altro sistema di curve raz[ionali] o dà luogo al caso della C_6 limite, oppure contiene un fascio di rette (immagine d'un fascio puro su F) mentre, tutte le rette del piano danno una rete impura. Perciò sul p[ia]no 2-plo vi sono curve eccezionali date da rette pel centro O del fascio. Allora con una discussione un po' minuta, che forse si potrà semplificare (risalendo anche al prec[eden]te sistema agg[iunto]) si riesce a vedere che la curva limite è una C_8 che ha in O un p[un]to 4-plo e due tangenti su ciascuna delle quali vi sono 2 p[un]ti 2-pli ∞ [infinitamente] vicini ad O (Θ forse un p[un]to 3-plo). E, se non erro, si prova poi che tale p[ia]no 2-plo è di gen[ere] 1 e irreducibile ai prec[eden]ti.

Avrai notato che non faccio uso del genere numerico del p[ia]no 2-plo.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 101, nota 2 a let. 88 (30.4.1894).

95. [c.p.]

[Bologna] Giovedì 17 Maggio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Il 2° aggiunto alla curva di diramaz[ione] d'un p[ia]no 2-plo rappresenta (in generale) non il sistema canonico delle sup[erficie] ma il doppio di tale sistema. Partendo da tale concetto si possono classificare le *sup[erficie]* di cui le curve canoniche sono iperellittiche ($p^{(1)} > 1$).[1] Esse contengono un fascio razionale di curve di genere 2 oppure sono riferibili al p[ia]no 2-plo con C_8 limite (sup[erficie] del 5° ord[ine] con p[un]to 3-plo) o al p[ia]no 2-plo con C_{10} limite (sup[erficie] di 6° ord[ine] con p[un]to 4-plo).

Inversamente tali sup[erficie] hanno le curve canoniche iperellittiche. Il resultato si stabilisce molto semplicemente mediante la riduzione dei sistemi lineari di curve raz[ionali] nel p[ia]no.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] I risultati di queste ricerche furono esposti in Enriques 1896c, presentato per la pubblicazione il 15 marzo 1896.

96.

19 Maggio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho piacere che tu trovi interessanti i resultati che ti ho comunicato.

Ecco come procedo per trovare sul p[ia]no 2-plo il sistema rappresentativo del sistema canonico. Suppongo $p^{(1)} > 1$; ma la cosa si dovrà estendere agli altri casi.

Sul p[ia]no 2-plo vi è un sistema $|C|$ di grado $\frac{p^{(1)} - 1}{2}$ immagine del sistema canonico $|K|$, e però rappresentativo d'un sistema puro. Supponiamo (per fare il caso semplice) che nessun p[un]to del p[ia]no 2-plo sia immagine di una curva non eccezionale della sup[erficie].

Il sistema $|2C|$ 2-plo di $|C|$ è immagine di un sistema $|2K|$ sulla sup[erficie] (non normale) che sega su una K la serie canonica (forse scompleta); ma sopra una C (d'ord[ine] n) una curva aggiunta d'ord[ine] $n - 3$ insieme alla curva di diramaz[ione] M_δ (d'ord[ine] δ) sega un gruppo cui corrisponde un gruppo canonico su K (equivalente al gruppo segato da una $2K$), onde l'immagine di tale aggiunta insieme alla curva di coincidenza appartiene (sulla sup[erficie]) a $|2K|$ (sistema aggiunto di $|K|$). (Nelle mie «Ricerche»[1] è infatti stabilito che $|K|$ non ha curve fond[amentali] di gen[ere] > 0). Dunque nel p[ia]no 2-plo la M_δ aumentata di una C_{n-3}

(agg[iunta] a C) contata 2 v[olte] appartiene al sistema $|2C|$ di cui ciascuna curva d'ord[ine] $2n$ va contata 2 volte. Segue intanto $\delta = 2n + 6$; inoltre ogni p[un]to i-plo per $|C|$ è $(2i + 2)$-plo per M_δ. Questo 2° fatto patisce eccezione ove un p[un]to multiplo di M_δ rappresenti una curva non eccezionale sulla sup[erficie], ciò che avviene se il p[un]to ha molteplicità dispari per M_δ (δ pari); allora M_δ ha in un p[un]to i-plo di $|C|$ un p[un]to di maggiore molteplicità $(2i + 3)$.

Il metodo cui ti ho accennato non si applica più se $p^{(1)} \leq 1$: in tal caso però se la M_δ ha un aggiunto immagine d'un sistema puro $|K|$ sulla sup[erficie] F, il teor[ema] si deduce ancora cercando su F le curve che segano sulla K gruppi residui della serie caratteristica. In particolare se il p[ia]no 2-plo è di genere 1, e la M_δ ha un aggiunto (che ha un grado), questo è di curve ellittiche e rappresenta un sistema puro su F: si ritrovano così i p[ia]ni 2-pli di gen[ere] 1 riducendo il 3° tipo al 1° degli altri 2, ciò che si vede direttamente. Ma non ci si può servire di questo processo più semplice perché esso cade se M_δ non ha un sistema aggiunto.

Per le sup[erficie] a curve canoniche iperellittiche il mio ragionamento è semplicissimo.

Il teor[ema] che dà sul p[ia]no 2-plo l'immagine del sist[ema] can[onico] si applica solo per $p = 3$, $p = 6$ e conduce al p[ia]no 2-plo con C_8 o con C_{10} limite (si può asserire che questi nel caso più generale sieno riferibili alla sup[erficie] del 5° ord[ine] con p[un]to 3-plo e risp[ettivamente] del 6° ord[ine] e p[un]to 4-plo?). Negli altri casi si ha un fascio puro di curve speciali sulla superficie: vi sono delle curve canoniche spezzate in gruppi di curve del fascio; adoprando il genere della curva spezzata si ha che il genere delle curve del fascio non supera 2, quindi è = 2.

Avrei piacere che non s'aprisse quest'anno il concorso purché ciò non preludesse ad una più radicale economia, in cui sopprimendosi le Univ[ersità] minori si venisse a togliere ogni nuovo collocamento.[2]

Sono in fine ai miei corsi. Per le proprietà focali delle coniche seguo quasi testualmente le tue lezioni:[3] però ho creduto conveniente di non separare la trattazione della parabola da quella delle coniche a centro, separazione che a te tornava comoda per la trattazione analitica.

A proposito di cose scolastiche, vi è qui fra i giovani del 2° anno un tuo scolaro di Roma (Severini), giovane assai valente. Egli mi ha parlato con entusiasmo delle tue lezioni.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1893f.

[2] Enriques allude al concorso per la cattedra di Geometria descrittiva e proiettiva presso l'Università di Bologna. Si veda anche p. 97, nota 1 a let. 84 (21.4.1894).

[3] Cfr. p. 88, nota 7 alla let. 74 (5.4.1894).

97. [c.p.]

[Bologna] Mercoledì 23 [maggio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Dalla tua cartolina di ieri avevo già desunto l'impossibilità di rappresentare il p[ia]no 2-plo con C_8 limite sulla F^5 con p[un]to 3-plo, appunto con un conto di costanti. Questo però non mi persuadeva interamente come il secondo metodo, con cui tu vedi la cosa nel quale l'enumerazione delle costanti è fatta in modo completo. Non sarà difficile assegnare una sup[erficie] *tipo* corrispondente al p[ia]no 2-plo ma non è poi essenziale.

Hai veduto la memoria di Kobb?[1] e ti pare che effettivamente, come io penso, se ne tragga la trasf[ormazione] di ogni sup[erficie] in una con sing[olarità] ord[inarie]?

Mi dispiace di non essere più a tempo a fare ciò che mi domandi riguardo alle tue litografie[2] che ho già rimandato al S[egre]. Ma in quel che ho visto non mi è venuto fatto di fare osservazioni tranne forse di parole: però la parte che ho visto si riduce all'ultima sulle coniche. Avrei volentieri scorso il resto se non avessi avuto premura di rimandarle al S[egre].

I miei corsi sono, si può dire, finiti. Non ti ho più mandato la mie litografie[3] aspettando di riunirle tutte insieme cavandole fuori dal grande disordine dove si trovano. Te le manderò a giorni. Sto redigendo i «Fondamenti di G[eometria] Pr[oiettiva]».[4]

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

[1] Kobb 1892; cfr. p. 101, let. 89 (3.5.1894).
[2] Cfr. p. 88, nota 7 a let. 74 (5.4.1894).
[3] Enriques 1893-94a e 1893-94b.
[4] Enriques 1894d.

98. [c.p.]

Bologna 2 Giugno [18]94

Carissimo Castelnuovo

Eccoti le ultime mie disp[ense] di Pr[oiettiva] e Descr[ittiva].[1] Finisco le lezioni domani[2] e vado giù a Firenze (Via Machiavelli); tornerò qua per gli esami. Ti scriverò da Firenze parlandoti di una ricerca pensata: in questi giorni non sono andato avanti sui p[ia]ni 2-pli, ma ho quasi redatto i Fond[amenti] di G[eometria] Pr[oiettiva].[3] Intanto ti chiederei un favore: potresti mandarmi a Firenze la nota dell'Amodeo[4] sui post[ulati] della G[eometria]?

Ti ringrazio anticipatamente e ti saluto in fretta affettuosamente.

Tuo

F Enriques

[1] Enriques 1893-94a e 1893-94b.
[2] Il 3 era domenica.
[3] Enriques 1894d.
[4] Amodeo 1891.

99. [c.p.]

[Firenze] 3 Giugno [18]94

Carissimo Castelnuovo

Grazie delle Note di A[modeo] inviatemi.

Mi farai piacere comunicandomi le tue osservazioni sulle mie lezioni[1] di Pr[oiettiva].

Non trovo difficoltà in ciò che mi scrivi: che lo pseudoaggiunto d'un sistema lineare venga segato dalle ψ_{n-3} pseudoagg[iunte] ecc., e che esso coincida coll'agg[iunto] se le curve fond[amentali] (p[un]ti mult[ipli]) son raz[ionali] è già contenuto nelle mie «Ricerche».[2] Utile può riuscire la costruzione dell'aggiunto nel caso che mi accenni; costruzione che immagino analoga a quella che hai già dato in un caso più ristretto.

La questione cui ti accennavo nell'ultima cartolina (cui non ho ripensato) è la seg[uente]: «Se $f(x\ y\ z) = 0$ è una sup[erficie] raz[ionale]; quali sono gli *irrazionali numerici* da cui dipende essenzialmente la sua rappresentaz[ione]»: in altre parole «quale equazione occorre risolvere per ottenere le funz[ioni] raz[ionali] che esprimono $x\ y\ z$ per 2 par[ametri] u, v».[3]

Per le curve raz[ionali] $f(x\ y) = 0$ la questione analoga è subito risoluta: gli irraz[ionali] sono al più una $\sqrt{\ }$ [radice quadrata]. Invero considera le agg[iunte] d'ord[ine] $n-2$ alla $f(x\ y) = 0$ e fanne segare ∞^2 da rette, ecc. Si arriva a una retta o ad una conica. Il metodo esteso alle sup[erficie] conduce all'esame dei successivi sist[emi] agg[iunti].

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F E

[P.S.] Il Ministro mi manda il decreto di libera docenza a Pisa per la Descrittiva!

[1] Enriques 1893-94a.
[2] Enriques 1893f.
[3] I risultati di queste ricerche saranno pubblicati nella nota Enriques 1895b, presentata all'Accademia dei Lincei il 15 dicembre 1895, e precisati in seguito in Enriques 1897a.

100.

9 Giugno [18]94

Carissimo Castelnuovo

Mi ricordavo che nell'ottobre scorso, prima per lettera, e poi a voce, avevamo parlato dell'estensione del procedimento da te usato per la costruzione del sistema ipoagg[iunto] ad un sistema a serie caratteristica non speciale, allo scopo di trarne appunto il corollario di cui ti ho scritto l'altro giorno: ma mi pareva che non si trattasse precisamente della costruzione che ti ho ultimamente indicata; e che (eliminata la difficoltà delle curve fond[amentali] proprie) tutto andasse liscio così. Invece tu mi fai tornare in mente l'altra obiezione che facevi al procedimento. Mi pare però che essa si elimini nel seguente modo.

Riprendiamo la nostra F (di cui nella lettera prec[eden]te). In un piano generico vi sono $\infty^{p^{(1)}-1}$ curve agg[iunte] d'ord[ine] $n-3$, C_{n-3}, le quali segano sopra una retta r una serie g_{n-3}^{n-3} $\{n-3=p^{(1)}-1-(p-1)\}$; per ogni gruppo di questa serie passano ∞^{p-1} curve C_{n-3}, di cui ∞^{p-2} spezzate nella retta e in una C_{n-4}. Prendiamo un piano particolare per la retta r, la cui sezione con F possiamo supporre non spezzata e di genere $p^{(1)}$ oppure dotata di *un* punto doppio generico per F (e allora di genere $p^{(1)}-1$). In questo piano le C_{n-3} agg[iunte] (salvo nel nuovo p[un]to 2-plo) sono sempre $\infty^{p^{(1)}-1}$ non certo di più (poiché il genere della sezione non può aumentare): queste C_{n-3} segano sulla r una serie g_{n-3}^{n-3} (la stessa di prima), non certo una serie più ristretta: ma se nel piano vi sono più di ∞^{p-2} C_{n-4} agg[iunte] alla sezione (salvo nel p[un]to 2-plo), per ogni gruppo della g_{n-3}^{n-3} passano in quel piano più di ∞^{p-1} C_{n-3} e queste sono allora più di $\infty^{p^{(1)}-1}$, ciò che è assurdo: segue ecc.

Ti persuade?

Sono tornato a Bologna dove mi tratterrò fino ad esami finiti, ossia circa 15 giorni.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Non mi dici nulla intorno al lemma sulla non singolarità del sistema agg[iunto] sopra una sup[erficie] in cui $p_g = p_n$. Lo hai posto nel 2° lavoro?[1]

[1] Le ricerche di Castelnuovo di questo periodo riguardanti la teoria dei sistemi lineari di curve su una superficie algebrica saranno pubblicate in Castelnuovo 1896a, e per quanto riguarda i sistemi lineari di curve su una superficie algebrica di genere geometrico e numerico nullo, in particolare razionale, in Castelnuovo 1896b. Queste memorie portano le date novembre e dicembre 1894, rispettivamente: sebbene i risultati fondamentali fossero a quest'epoca noti a Castelnuovo, la stesura definitiva delle due memorie richiederà parte del 1895, come apparirà nel seguito di questa corrispondenza.

101. [c.p.]

[Firenze] 14 Giugno [18]94

Carissimo Castelnuovo

Vado a Bol[ogna] Domenica per gli esami e spero di esser tornato qui quando tu passerai. Appena libero dagli esami cercherò di porre finalmente in assetto (nel modo che sarà possibile) quei resultati del 1° cap[itolo] delle mie «Ricerche»[1] per non tornare più sul doloroso argomento.

Ho scritto ora al Fano relativamente alle sup[erficie] con trasf[ormazioni] pr[oiettive] in sé, cogliendo l'occasione per parlargli anche dei fondamenti della G[eometria] Pr[oiettiva].[2] Ho finito (si può dire) di redigere questo lavoro.[3]

Ho ricevuto la tua nota lincea,[4] mi dimenticai di ringraziartene l'altro giorno. Ti manderò la mia insieme alla 2ª di cui ho già rivisto le bozze.[5]

La questione di cui ti parlai[6] relativa all'equaz[ione] da cui dipende la rappres[entazione] d'una sup[erficie] raz[ionale] non sarà forse tanto difficile quanto sembra, ridotta la cosa all'ultimo sistema aggiunto; ma conviene per ora tenerla in serbo.

Affettuosi saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1893f, cap. 1 «Generalità sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica».

[2] In Enriques 1895c sono stati pubblicati brani di alcune delle lettere della corrispondenza che Enriques intrattenne allora con Gino Fano sui fondamenti della geometria proiettiva.

[3] Enriques 1894d.

[4] Castelnuovo 1894d.

[5] Enriques 1894b e 1894c.

[6] Cfr. p. 111, c.p. 99 (3.6.1894).

102. [c.p.]

[Firenze] Domenica [giugno [18]94][1]

Carissimo Castelnuovo

La tua cartolina mi fa molto piacere, tanto più che sono un po' scoraggiato per essermi accorto che le cose contenute nel 1° cap[itolo] delle mie «Ricerche»[2] vanno peggio di quel che credevo. È una cosa molto strana che non mi sia mai venuto in mente di applicare quei resultati ai sistemi piani. Già la sup[erficie] di 3° ord[ine] può in 2 modi riguardarsi come proiez[ione] da p[un]ti di 2 sup[erficie] *complete*, la F^9 e la F^8 di 2ª specie. Non è poi vero che il residuo di una curva rispetto ad un sistema compl[eto] sia completo; basta invero staccare da un sistema lineare con p[un]to 2-plo una curva passante pel p[un]to 2-plo.

Dunque? Una vera disgrazia come vedi e non so come farò a ricostruire quella teoria dove bisognerà fondarsi di più sul concetto di sistema normale.

Vorrei poi sapere se il N[oether][3] trasformi *sempre* una sup[erficie] in un'altra senza curve eccez[ionali], oppure soltanto una curva eccez[ionale] in un p[un]to il che è diverso. Nella 1ª ipotesi i resultati per sist[emi] compl[eti] varrebbero (un po' modificati) per le sup[erficie] di gen[ere] > 0.

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Dal timbro postale è stato possibile stabilire soltanto che si tratta di una cartolina del giugno 1894: per esclusione, ci pare che la data dovrebbe essere domenica 17. La lettera presenta varie macchie che in alcuni punti rendono difficoltosa la lettura.
[2] Enriques 1893f.
[3] Cfr. Noether 1875.

103. [c.p.]

Bologna - Martedì [19 giugno 1894]

Carissimo Castelnuovo

Sono cominciati gli esami di Descr[ittiva]: per ora ne abbiamo esaminati 34 con 5 vittime. Nell'insieme fanno assai bene.

Vado pensicchiando sulle cose fondamentali relative ai sist[emi] lin[eari] sulle sup[erficie]. Mi pare di potere stabilire *senza restrizioni* che le sup[erficie] agg[iunte] o pseudoagg[iunte] ad una d'ord[ine] n segano su questa un sist[ema] normale: inoltre che «se $|C| = |C_1| + |C_2|$, il sist[ema] agg[iunto] o pseudoagg[iunto] a $|C_1|$ aumentato di $|C_2|$ è contenuto nell'agg[iunto] (o pseudoagg[iunto]) a $|C|$». Questo teor[ema] dovrebbe permettere di fissare la definizione più generale del genere numerico, estendendo i resultati del cap[itolo] III delle «Ricerche».[1] Nel lavoro che debbo fare[2] vorrei presentare riuniti i principali resultati ottenuti per *tutte* le sup[erficie].

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Enriques 1893f, cap. 3 «Il sistema aggiunto».
[2] Si tratta di Enriques 1896d.

104. [c.p.]

[Bologna] Sabato 24 [giugno 1894][1]

Carissimo Castelnuovo,

Quando sarò tornato a Firenze e mi potrò un po' riposare della grande fatica degli esami ti scriverò relativamente alle questioni che ti accennai sul sistema agg[iunto].

Si sono finiti oggi gli esami di Pr[oiettiv]a: si sono presentati 27, cui 8 rimandati, 4 approvati con 30, 4 con 27 e uno con 28.

Domani torno dunque a Firenze. Sei ipotecato fin d'ora a mio favore almeno per un giorno della tua permanenza a Firenze, dove ti vedrò con molto piacere.

Avevo saputo che si facevano le promozioni a ordinario e... tutto il resto.

Ho ricevuto una risposta del Fano[2] da Göttingen: lo scopo delle sue ricerche è quello di applicare quelle cose geometriche alla teoria delle equaz[ioni] diff[erenziali] lineari.

Cordiali saluti. Aff.mo

F Enriques

[1] La data corretta dovrebbe essere 23 giugno 1894, essendo il 24 domenica.
[2] Cfr. p. 113, c.p. 101 (14.6.1894).

105.

25 Giugno [18]94

Carissimo Castelnuovo

Sono a Firenze libero ormai dagli esami, tranne il caso lontano che debba tornare un giorno a Bologna per una laurea.

Quando verrai?

Eccoti alcuni cenni sulle questioni di Geom[etria] sopra una sup[erficie] di cui ti parlai. Si abbia una sup[erficie] F_n che per semplicità suppongo senza p[un]ti multipli isolati.

Anzitutto dico che le sup[erficie] aggiunte ψ_r (= pseudoagg[iunte]) segano su F_n un sist[ema] normale. Basta mostrare che ogni curva C la quale seghi sulle sez[ioni] piane un gruppo segato da una curva agg[iunta] K_r è la sezione d'una ψ_r. Infatti di qui si desume che il sistema $|C|$ è normale non potendo esser contenuto *totalmente* in altri. Per dimostrare quanto ti ho detto quando $r \geq n$ (per $r < n$ vale la dimostrazione che ho dato per $r = n - 3$) si procede così:

Sia C la curva in questione e si consideri un piano generico per una retta generica a. Sulla a fisso quanti punti è possibile (senza staccarla) per la curva agg[iunta] K del dato ord[ine] nel piano e questi punti fuori di F. Ciò non bastando a fissare una K, per uno O dei punti fissi considero una curva osculatrice alla K (di un certo ord[ine]); essa può determinarsi come sezione del p[ia]no con una sup[erficie] per O. Con ciò (facendo il conto si vede che) si può determinare una K in ciascun piano il cui luogo sega F_n nella *sola* C onde è un'agg[iunta] d'ord[ine] r ecc.

Sia $|K| = |C| + |C'|$ un sistema lin[eare] sopra una sup[erficie] F. Una rete di $|C|$ venga segata su F_n dai p[ia]ni d'una stella per O. Si consideri una sup[erficie] agg[iunta] ad F_n. Di una tal sup[erficie] è sezione una curva del sistema somma di $|C'|$ (p[un]to O) e dell'agg[iunto] χ di $|C|$. Ora tutte le sezioni di tali sup[erficie] su F_n segano il sistema agg[iunto] a quello delle sez[ioni] piane.

Dunque l'agg[iunto] a $|C| + |C'|$ contiene la somma di $|C'|$ e dell'agg[iunto] a $|C|$.

Da questi teoremi col procedimento del cap[itolo] III delle mie «Ricerche»[1] segue l'esistenza dell'agg[iunto] completo ad ogni sist[ema] senza curve fond[amentali] sopra una sup[erficie] non dotata di p[un]ti mult[ipli] isolati su cui le ψ_{n-2} agg[iunte] compongono un sistema colla dimensione voluta.

Ma mi pare possa andarsi più innanzi e dimostrare che:

Per la conclusione prec[eden]te basta che le ψ_{n-r} ($r \leq 3$ o $r > 3$) seghino la serie canonica completa sulle sezioni p[ia]ne e la serie caratt[eristica] sia completa.

Ciò è stato stabilito (coi tuoi metodi) quando esiste il sist[ema] canonico, ma sembra possa stabilirsi in generale. Ne seguirebbe ciò che mi hai enunciato l'altro giorno pel caso della serie caratt[eristica] non spec[iale].

Di queste cose appena abbozzate riparleremo più lungamente fra qualche giorno a voce.

Intanto prendi un affettuoso saluto

dal tuo
F Enriques

[P.S.] Ti mando le mie 2 note.[2]

[1] Enriques 1893f.
[2] Enriques 1894b e 1894c.

106. [c.p.]

[Firenze] Mercoledì [4 luglio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Il teor[ema] che mi comunichi è certo molto importante e sono persuaso che la dimostrazione ingegnosa debba condurre e stabilirlo effettivamente. A me però tutto non riesce chiaro (forse per la concisione).[1]

Insieme sarebbe bello stabilire il teor[ema] inverso «Supposto che $|C|$ abbia la serie caratt[eristica] compl[eta] e che le ψ_{n-3+k} seghino su una C la serie compl[eta], far vedere che lo stesso accade per $\psi_{n-3+k-1}$ e quindi

per le ψ_{n-3}»: poiché la cosa va per k assai alto seguirebbe ecc. Non vedo la dimostraz[ione] dell'enunciato, ma col metodo che tu adoperi si potrebbe forse riuscire.

Sabato vado a (Bologna per) Castiglione dei Pepoli.

Affettuosi saluti

tuo
F E

[1] Seguono nell'originale nove righe cancellate.

107.

[Castiglione dei Pepoli] Venerdì mattina 13 luglio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Devi sapere che in questo paese le lettere si ricevono alle 4 p[omeridiane] e partono alle 9 a[ntimeridiane]. Questo ti spieghi perché non ho potuto risponderti ieri ed ho avuto anche poco tempo per risponderti oggi. Ho fatto alla meglio il sunto delle «Ricerche»[1] e te lo mando: se ti contenti ritengo fino a domani la tua dimostrazione per copiarla.

Il sunto è un po' lungo ma tu penserai ad abbreviarlo. I teor[emi] segnati col + non fanno parte delle «Ricerche» o sono emendamenti dei teor[emi] di quelle. In questi mi sono tenuto al minimo. Oltre a ciò formerà parte del mio lavoro[2] la dimostrazione che «Sopra una sup[erficie] (sia pure di gen[ere] geom[etrico] $\neq$ dal num[erico]) le sup[erficie] agg[iunte] segano un sistema normale». Estensione del Restsatz (togliendo varie restrizioni). Definizione del genere numerico per *tutti* i casi e sua invariantività. Coincidenza colla definizione di Noether-Zeuthen. Se un $|C|$ ha la serie caratt[eristica] compl[eta], e le curve canon[iche] segano su C la serie compl[eta], esiste l'aggiunto.

Cercherò di ridurre la cosa in breve. Se a quell'epoca tu avrai pubblicato il tuo ultimo teor[ema],[3] lo riprodurrò in fine del lavoro a fine di riunire tutti i resultati di natura affatto generale sulle sup[erficie].

Oltre ai lavori che mi nomini sarebbe forse il caso di citare a Picard anche Del Pezzo[4] per le sup[erficie] raz[ionali] a sezioni ellittiche e forse Guccia.

Il Guccia mi scrive una lettera molto gentile invitandomi a farmi socio del Circolo: vuoi tu insieme a lui farmi da padrino? Se sì invia a me un bigliettino per lui, ed io gli scriverò. Il G[uccia] mi ha anche mandato tutti i suoi lavori.

Dal Picard ho ricevuto la memoria grande sulle sup[erficie].[5] È proprio

una persona molto gentile: ho avuto molto piacere di quel che ti ha scritto.[6]

Addio in fretta per impostare.

Ho molte altre cose da dirti

Tuo aff.mo
F Enriques

[*Fogli allegati alla lettera precedente*]

Riassunto delle
«Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche»

I

Si dice sistema lineare ∞^k di curve sopra una superficie F, un sistema di curve su F dipendente razionalmente da k parametri, tale che per k punti di F passi *una* curva del sistema (Cfr. la questione sulla linearità): un sistema lineare ∞^k per $k > 1$ è irreduttibile a meno di componenti fisse, se ogni curva di esso non si compone di un certo numero $\rho > 1$ di curve d'un fascio.

Pei sistemi irreduttibili ∞^r (cui ci riferiamo) si dirà *genere* π il genere della curva generica, *grado* n il numero delle intersezioni variabili di due curve, *dimensione* r il numero dei parametri da cui dipende: stante la irreduttibilità sarà $n > 0$, se $r > 1$; anzi $n \geq r - 1$.

Lo studio d'un sistema $|C|$ che ha i nominati caratteri equivale a quello proiettivo d'una superficie (trasformata della data) d'ordine n, a sezioni iperplanari di genere π in S_r (che può eventualmente esser multipla).

Così come dicesi *normale* una superficie di S_r quando non è proiezione dello stesso ordine di un'altra appartenente ad uno spazio più elevato, si dirà *normale* un sistema $\infty^r |C|$ $(r > 1)$ irreduttibile, non contenuto in un altro più ampio dello stesso grado.

Un sistema lineare irreduttibile di dimensione $r > 1$ sopra una superficie appartiene sempre ad *un* determinato sistema normale dello stesso grado. Altrimenti «Una superficie o è normale o è proiezione di una superficie normale dello stesso ordine proiettivamente determinata».

+ Ogni proiezione di una superficie normale da una curva (che può anche esser composta di punti) è normale.

+ Se $|K|$ è un sistema normale, $|C'|$ è un sistema contenuto parzialmente in esso, tutte le curve di $|C'|$ hanno rispetto a $|K|$ lo stesso sistema normale residuo $|C|$ (supposto irreduttibile di dimensione > 1).

II

Si abbia su F un sistema lineare $|C|\ \infty^r$ $(r > 1)$ irreduttibile di genere π, e non contenente in sé alcun sistema ∞^{r-1} di genere $< \pi$ (cioè non dotato di curve fondamentali *proprie*); se una curva K sega sopra una C generica una serie residua della serie caratteristica (segata sulla C dalle altre curve di $|C|$), essa da sola, o insieme ad altre curve *eccezionali* gode della stessa proprietà rispetto ad ogni altro sistema irr[eduttibile] su F. Se $|C|$ ha curve fond[amentali] occorre che K goda di tale proprietà anche rispetto ai sistemi residui di queste rispetto a $|C|$.

Le curve K compongono un sistema lineare (ove esistano) e le componenti variabili di esse (curve canoniche) sono le sezioni dalla F d'ordine n colle sup[erficie] agg[iunte] ψ_{n-4} all'infuori delle curve singolari ed eccezionali di F.

Poiché (secondo il Noether) F può trasformarsi in guisa che ad una sua curva eccezionale corrisponda un punto semplice, *in generale* F (supposta di gen[ere] > 0) può trasformarsi in una *sup[erficie]* ϕ *senza curve eccezionali* che assumiamo come *tipo*.

Allora dato su ϕ un sistema lineare di curve $|C|$, una curva canonica sega sopra una curva generica C un gruppo che aumentato del gruppo dei punti base di $|C|$ è residuo della serie caratteristica.

$|C|$ su ϕ dicesi *puro* se non ha punti base: la sup[erficie] ottenuta facendo segare dagli iperpiani le curve di $|C|$ è senza curve eccezionali (proiettata da punti esterni in S_3).

+ Un sistema puro normale $|C|$ su ϕ è *completo* in quanto esso non può *appartenere* ad un sistema lineare di ugual genere su ϕ: la superficie trasformata facendo segare le curve di $|C|$ dagli iperpiani d'un S_r non è proiezione da punti (non portanti lo staccarsi di alcuna curva) di una superficie d'uno spazio più elevato a sezioni dello stesso genere.

III

Sopra una sup[erficie] F si consideri un sistema irr[eduttibile] $|C|\ \infty^2$ almeno: se $|C|$ non ha curve fond[amentali] si dirà *aggiunto* a $|C|$ il sistema di tutte le curve K, seganti sopra una C generica un gruppo canonico: le K formano un sistema lineare; se ∞^3 C vengono segate dai piani di S_3 sulla F d'ord[ine] n (non rigata) le K sono sezioni di sup[erficie] agg[iunte] ψ_{n-3}. Se $|C|$ ha curve fond[amentali] (F ha p[un]ti multipli) imponiamo alle K ulteriori condizioni rispetto a queste: se F ha il genere > 0 (come supponiamo) le condizioni sono tali che

il sistema aggiunto a $|C|$ (dotato comunque di p[un]ti base sulla sup[erficie] senza curve eccezionali ϕ trasformata di F) è il sistema normale *somma* di $|C|$, del sistema canonico e dei p[un]ti base di C (sistema *somma* di $|C_1|$ $|C_2|$... è il più ristretto sistema contenente tutti i gruppi di curve C_1 C_2 ...).

La questione da decidere «quand'è che sopra una sup[erficie] di gen[ere] $p > 0$ ogni sistema irr[eduttibile] $|C|$ di genere π (e dim[ensione] ≥ 2) è tale che il suo agg[iunto] sega sopra una curva generica C la serie canonica completa» (ossia tale agg[iunto] è $\infty^{p+\pi-1}$), viene risoluta dal seguente teorema:

Si abbia una sup[erficie] F di gen[ere] $p > 0$, d'ord[ine] n a sezioni di gen[ere] π, senza curve eccez[ionali] in S_3; se le sue sup[erficie] agg[iunte] ψ_{n-2} sono $\infty^{p+2\pi+n-2}$ (quante verrebbero indicate dalle formule di postulazione di Noether[7] supposte valide dalle ψ_{n-4} in su), ogni sistema di gen[ere] ρ ha l'agg[iunto] di dim[ensione] $p + \rho - 1$ e quindi la ϕ ed ogni sua trasformata d'ord[ine] m è tale che le sue sup[erficie] agg[iunte] d'ord[ine] $> m - 4$, segano sopra un piano *tutto* il sistema delle curve agg[iunte] alla sezione piana.

La F ha allora il *genere geometrico* uguale al *numerico* e viceversa.

Altre conseguenze:

Sopra una sup[erficie] ϕ senza curve eccezionali, di gen[ere] geom[etrico] = num[erico] ogni sistema dotato di punti base distinti (con molteplicità arbitrarie) può dedursi coll'imposizione di p[un]ti base da un sistema senza p[un]ti base (puro) o con soli p[un]ti base semplici (questo 2° caso può forse aver luogo eccezionalmente).

Restsatz Sopra una sup[erficie] ϕ di gen[ere] geom[etrico] = num[erico] senza curve eccezionali una curva C appartiene ad *un* sistema completo che vien segato da tutte le sup[erficie] agg[iunte] di arbitrario ordine passanti per una intersezione residua di ϕ con una sup[erficie] agg[iunta] (di quell'ord[ine]) per C.

IV

Sopra una sup[erficie] ϕ di gen[ere] $p > 0$ (geom[etrico] = num[erico]) la serie caratt[eristica] di un sistema puro normale è completa, se tale è quella del sistema canonico (o se il sistema canonico non ha serie caratt[eristica]).

Sulla ϕ di gen[ere] p si abbia un sistema irr[eduttibile] puro normale $|C|$ di dim[ensione] r, gen[ere] π, grado n:

sia $|C|$ non contenuto nel sistema canonico ossia *non speciale*: per un gruppo comune a due curve C passano $2p + \omega$ (lin[earmente] ind[ipendenti]) ($\omega \geq 0$) curve del sistema aggiunto: se $|C|$ è speciale ed è ∞^{i-1} il sistema residuo di $|C|$ rispetto al sist[ema] canonico, ne passano invece $2p + \omega - i$ ($\omega \geq 0$). Si dirà ω la *sovrabbondanza* del sistema $|C|$. Si ha allora

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

($= p + \omega$ se $i = 0$ cioè $|C|$ non speciale).

(Cfr. l'extension du t[h]éor[ème] di R[iemann] R[och] di Noether).[8]

La sovrabbondanza ω ha un altro significato che rende ragione del suo nome. Si faccia segare $|C|$ sulla ϕ mediante sup[erficie] agg[iunte] (secondo il Restatz) calcolata la dimensione *virtuale* ρ di $|C|$ mediante le formule di postulaz[ione] di Noether, si ha

$$r - \rho = \omega - i.$$

La relaz[ione] prec[eden]te s'estende ai sist[emi] impuri.

V

Le curve fondamentali dei sistemi lineari hanno una influenza sulla sovrabbondanza ω. La sovrabbondanza d'un sistema lineare diminuita dell'indice di specialità i è $\geq$ del genere di ogni sua curva fond[amentale]. Seguono alcuni corollari.

Del teor[ema] del prec[eden]te cap[itolo] si fa un'applicazione alle formule di postulaz[ione] che danno le varietà passanti per una sup[erficie] in S_r (pel caso più semplice).

Vi è un numero (massimo) di p[un]ti doppi isolati che una sup[erficie] di gen[ere] > 0 può acquistare in S_3 (carattere invariativo della sup[erficie]).

VI

Superficie in corrispondenza [1 m]: cosa corrisponde al sistema canonico della 1ª (estens[ione] del teor[ema] di Cast[elnuovo]).[9] Cenno sulle involuz[ioni] raz[ionali] sopra una sup[erficie].

[1] Enriques 1893f.

[2] Cfr. Enriques 1896d; il «sunto» qui allegato da Enriques ne costituisce un primo abbozzo.

[3] Cfr. p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).

[4] Cfr. Del Pezzo 1887.
[5] Picard 1889.
[6] In una lettera del 7 luglio 1894 Emile Picard chiese a Castelnuovo notizie sui lavori dei geometri italiani riguardanti la teoria delle superficie algebriche per citarli in un articolo di rassegna dei risultati recenti in matematica: cfr. Picard 1894 e la lettera di Picard riportata in Appendice (p. 659).
[7] Cfr. Noether 1871b.
[8] Cfr. Noether 1886b.
[9] Cfr. Castelnuovo 1891d, § 2.

108.

14 Luglio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Credo di capire la ragione dell'assurdo a cui arrivi applicando il teor[ema] di Noether[1] sulle sup[erficie] agg[iunte] alle curve gobbe. Il sistema segato su una F dalle agg[iunte] ψ_{n-3} può essere riduttibile, avendo le ψ_{n-3} delle ipermolteplicità nei p[un]ti mult[ipli] di F; allora la tua dimostraz[ione] va modificata tenendo conto delle intersezioni ivi assorbite, e non conduce più al resultato. Se dunque non si hanno siffatte ipermolt[eplicità] la cosa mi pare che vada, ed in ciò mi conferma anche l'esame di ciò che accade nel piano.

Sembra dunque che per eliminare l'inconveniente basti ricorrere alle sup[erficie] trasf[ormate] senza p[un]ti mult[ipli] isolati: si noti che allora l'agg[iunto] non ha neppur esso curve fond[amentali]. Si avrebbe così sulle sup[erficie] di gen[ere] geom[etrico] = num[erico] 0 un sistema e tutti i suoi agg[iunti] a serie caratt[eristica] non speciale, e può darsi che ciò sia utile.

La dimostrazione che mi comunichi del teor[ema][2] sulla completezza della serie caratt[eristica] ecc. è molto semplice ed elegante: ne copio un sunto per memoria e ti rimando il foglio.

Ti ho parlato della ricerca delle irrazionalità occorrenti per rappres[entare] sul p[ia]no una sup[erficie] raz[ionale].[3] Queste sono molto semplici ove ci si contenti di rappresentare la sup[erficie] sopra un'involuz[ione] piana: basta (pare) conoscere un p[un]to della sup[erficie]. Segue:

Una varietà contenente un fascio di sup[erficie] raz[ionali] con una unisecante può rappresentarsi sopra un'inv[oluzione] di S_3 (quindi ciò può sempre farsi se vi è una rete di sup[erficie] raz[ionali]).

In particolare $x\ y\ z\ \sqrt{\psi(x\ y\ z)}$ dove ψ è del 4° gr[ado], possono sempre esprimersi raz[ionalmente] per 3 parametri.

Ho fatto tardi anche oggi per impostare.

In fretta affettuosi saluti dal tuo

F Enriques

[1] Cfr. Noether 1875.
[2] Cfr. p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894), in particolare il primo degli articoli ivi citati.
[3] A questo proposito si vedano p. 111, c.p. 99 (3.6.1894) e p. 113, c.p. 101 (14.6.1894).

109. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] Domenica[1] [16 luglio 1894]

Carissimo Castelnuovo

Non ho qui la memoria di N[oether] e quindi non posso fare il calcolo ma capisco che hai trovato la via giusta per decidere la capitale questione della raz[ionalità] delle sup[erficie]: bravo! Ne sono proprio contento.

Non tardare a pubblicare il tuo resultato[2] a fine di non imporre alla ricerca limiti non necessari parti da una sup[erficie] con sing[olarità] qualunque senza p[un]ti mult[ipli]. Ti comunicherò la dimostrazione generale della conservazione del genere numerico così potrai affermare che *tutte* le sup[erficie] di gen[ere] geom[etrico] = num[erico] = 0 sono razionali. E poiché ormai la mia modesta ricerca sulle irraz[ionalità] necessarie a rappres[entare] tali sup[erficie] non ha più ragion d'esistere, puoi notare che anche tale questione viene così risoluta e che per la rappres[entazione] sopra una inv[oluzione] piana basta la conoscenza d'un p[un]to della sup[erficie]. Sto mandando avanti con pazienza il mio lavoro[3] sulle sup[erficie] e spero sottoporlo presto al tuo giudizio.

Ti saluto con più vivo affetto e sincero entusiasmo.

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Dal timbro postale risulta la data del giorno successivo, lunedì 16 luglio.
[2] Cfr. p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).
[3] Enriques 1896d.

110.

17 Luglio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ti mando le form[ule] di post[ulazione] di N[oether].[1]

Non potrai dimostrare che tutto il 2° agg[iunto] al sistema delle sezioni piane di F^n è segato dal sistema delle sup[erficie] $(\phi^{n-4} + \phi^{n-3})$; perché ciò non è vero sempre. Ma trasforma prima la sup[erficie] in una con sola curva doppia e p[un]ti 3-pli (3-pli per essa): allora tutte le sup[erficie] di

arb[itrario] ordine aventi la curva 2-pla come 2-pla segano sulla F'' un sistema normale: segue dal mio Restsatz sotto la nuova forma (più generale) che ora gli do, adoperando la considerazione che ti serve a stabilire la completezza della serie caratt[eristica] d'un sistema di curve piane.

Con ciò sembra anche a me che la questione sia risoluta* e te ne ripeto i più caldi mirallegri.

Quanto a ciò che ti dicevo nella lettera (prec[eden]te all'ultima cartolina)[2] basta fare la seguente osservazione.

Se F è una sup[erficie] raz[ionale], l'ultimo agg[iunto] al sistema delle sez[ioni] piane è un fascio di curve raz[ionali], o un fascio di curve ellittiche, o una rete (almeno) di curve ellittiche. Il fascio proviene (si può supporre) da una rete (almeno) di genere due. Ora per rappresentare sopra una inv[oluzione] una sup[erficie] contenente una rete (almeno) di curve iperellittiche o ellittiche (secondo il tuo metodo o il mio pei sistemi almeno ∞^3 di curve iperell[ittiche]) basta appunto conoscere un p[un]to della sup[erficie]: infatti dato un p[un]to si ha un fascio di curve ip[erellittiche] per esso e una curva razionale C che viene razionalmente rappresentata sul fascio: ogni p[un]to di C dà luogo ad una curva raz[ionale] che viene razionalmente rappresentata sopra il fascio per esso, onde la sup[erficie] viene raz[ionalmente] rappresentata sulla rete (noto il p[un]to O). È chiaro? Se poi sopra una varietà si ha una rete di sup[erficie] raz[ionali] il fascio individuato da un p[un]to ha una unisecante onde ecc.

Ho ricevuto dall'Istituto lombardo le bozze della mia nota[3] «Sui fondamenti della G[eometria] Pr[oiettiva]».

Mi dispiace di non averci pensato prima: potevo forse aiutarti nella relazione per Picard.[4]

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[P.S.] Ti pregherei di indicarmi i n[umer]i delle p[a]g[ine] dello Staudt italiano[5] dove sono le note di Pieri relative al teor[ema] fond[amentale].

* Si trova infatti $\pi'' - \pi' \leq \pi' - \pi - 1$ (salvo errore)

[1] Cfr. Noether 1871b.
[2] Cfr. p. 122, let. 108 (14.7.1894).
[3] Enriques 1894d.
[4] Cfr. p. 122, nota 6 a let. 107 (13.7.1894).
[5] Cfr. la traduzione italiana a cura di Mario Pieri di Staudt 1847.

111. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] 22 Luglio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Mi dispiace delle nuove difficoltà che vai trovando nella questione delle sup[erficie] raz[ionali]. Sarebbe proprio strana l'esistenza di sup[erficie] di gen[ere] 0 aventi delle sup[erficie] ψ_{2n-8} e non delle ψ_{n-4}; tuttavia non mi meraviglierebbe. Guarda un po' se fosse tale una sup[erficie] del 6° ord[ine] avente come doppi i 6 spigoli d'un tetraedo (se esiste)?[1]

Io seguito lentamente a scrivere il lavoro[2] sulle sup[erficie], incontrando sempre numerose difficoltà di dettaglio. Ho furia di finirlo per redigere il lavoro promesso a Noether:[3] te lo manderò allora e lo riprenderò prima di pubblicarlo.

Quanto alle osservaz[ioni] sulle sup[erficie] raz[ionali] potrò farne una notina[4] pei Math[ematische] Ann[alen], ma è meglio che aspetti prima i resultati delle tue ricerche più generali.[5]

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] L'esempio qui suggerito (la «superficie di Enriques») è discusso in Castelnuovo 1896b, 328 e in Enriques 1896d, 294.

[2] Enriques 1896d.

[3] Enriques 1895d; cfr. p. 85, let. 74 (5.4.1894) e p. 90, let. 78 (12.4.1894).

[4] Enriques 1897a; cfr. anche p. 111, nota 3 a c.p. 99 (3.6.1894).

[5] Cfr. Castelnuovo 1896b e p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).

112. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] 28 Luglio [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho piacere che quell'esempio vada bene ma è singolare che si trovi tanta difficoltà a costruire altri esempi, coi quali si dovrebbe provare che esistono superficie di gen[ere] 0 dotate d'un numero grande quanto si vuole di ψ_{2n-8}. Ci ho pensato un po' ma s'incontra la difficoltà di provare l'esistenza di tali ψ_{2n-8}. La proprietà invariantiva delle sezioni di queste si prova come nelle mie «Ricerche»[1] quella delle curve canoniche.

Quelle mie considerazioni sull'irraz[ionalità] da cui dipende la rappres[entazione] d'una sup[erficie] non sono giuste, perché i nostri metodi pei sistemi iperellittici (i quali darebbero la rappresentazione accennata) non valgono cioè forniscono soltanto delle dimostrazioni per assurdo, come notammo.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Enriques 1893f.

113.

1 Agosto [18]94

Carissimo Castelnuovo

Anch'io sono stato leggermente indisposto in questi giorni e sebbene si tratti d'un disturbo da nulla, ciò è stato sufficiente per impedirmi di studiare.

Un p[ia]no 2-plo con curva limite C_{2n} dotata di r p[un]ti $2i_r$-pli è di genere 0 se non vi sono curve C_{n-3} aventi quei p[un]ti come (i_r-1)-pli: basterebbe (ma non è necessario) che esistesse per qualche p[ia]no 2-plo di tal natura una C_{2n-6} con quei p[un]ti $2(i_r-1)$-pli. Ma può darsi che anche senza di ciò la sup[erficie] immagine di genere 0 abbia delle curve invariantive (chiamiamo così per intenderci quelle appartenenti al sist[ema] che dovrebbe esser 2-plo del canonico), giacché non è detto che esse debbano appartenere all'involuzione I_2 sulla sup[erficie].

Se la curva limite del p[ia]no 2-plo ha singolarità più elevate la cosa si complica, ma pare che 2 p[un]ti 3-pli ∞ [infinitamente] vic[ini] impongano il passaggio alle C_{n-3} e il contatto colla t[an]g[ente] alle C_{2n-6} immagini di curve invariantive appartenenti alla I_2.

Ho almanaccato un po' coi p[ia]ni 2-pli e credo d'averne trovato uno che serve d'esempio pel nostro scopo, ma poco interessante perché vi è una C_{2n-6}. La questione interessante è di trovare sup[erficie] di gen[ere] 0 con un numero grande di curve invariantive.

Pare che un tacnodo d'una sup[erficie] F_n imponga il passaggio alle ψ_{n-4} (agg[iunte]) e il contatto col p[ia]no t[an]g[ente] alle ψ_{2n-8}. Si potrebbero allora ottenere degli esempi dalle sup[erficie] dotate di tacnodi. Così pare che esista una F_6 con 10 tacnodi non appartenenti ad una F_2, per la quale vi sarebbero ∞^4 curve invariantive, e così via.

Merita anche di fissare l'attenzione sul fatto molto probabile, che esistono delle sup[erficie] di gen[ere] 1 dotate di infinite curve invariantive: io dubito che su tali sup[erficie] (se esistono) le curve eccezionali sieno razionali (ciò che contraddirebbe al Noether), o almeno la curva canonica sarebbe spezzata in una curva composta (di curve raz[ionali]) avente il genere > 0. La sup[erficie] non dovrebbe quindi potersi trasformare in una senza curve eccezionali; altrimenti la sup[erficie] di gen[ere] 0 suo caso particolare sarebbe razionale.

Tutto quanto ti ho scritto è allo stato di *ipotesi*; bisogna esaminar bene quelle sup[erficie] con tacnodi, giacché sarebbe un bel modo di procurarsi esempi di sup[erficie] di gen[ere] 0 con quante si vogliono curve invariantive. D'altronde noi non possiamo ragionare di sup[erficie] con curve 2-ple perché queste vanno complicandosi troppo rapidamente; invece le sup[erficie] con soli p[un]ti multipli riescono di trattazione più facile.

Le curve invariantive possono forse costituire un elemento molto importante nella teoria delle sup[erficie], avendosi anche in sup[erficie] di gen[ere] < 0.

Affettuosi saluti

tuo aff.mo
F Enriques

114. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] 2 Agosto [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ripensandoci mi pare che tutte le sup[erficie] con soli p[un]ti multipli isolati di gen[ere] 0, posseggono curve invariantive appena che le molteplicità di essi soddisfano ad una disuguaglianza. Così tenendosi alle sup[erficie] di gen[ere] 0 con p[un]ti di molteplicità assai bassa si avrebbero esempi di sup[erficie] di gen[ere] 0 con quante si vogliano curve invariantive. Però la questione di teoria dei numeri a cui conduce la relativa discussione è assai difficile. Guarda di fare anche tu il conto delle costanti; se non si potrà decidere *quali* sieno le sup[erficie] di gen[ere] 0 dotate di curve invariantive (in dato numero) si può probabilmente vedere che ce ne sono al di là di certi limiti.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

115. [c.p.]

Castiglione dei Pepoli 13 Agosto [1894]

Carissimo Castelnuovo

Sono stato qualche giorno fuori di qua, alle Filigare, per trovare il prof. Pincherle; tornato qua trovo la tua lettera. Il nuovo esempio di sup[erficie] di gen[ere] 0 con curve bicanoniche[1] è interessante: rimane però sempre la questione se (come si prevede) esisteranno sup[erficie] di gen[ere] 0 con un numero grande quanto si vuole di curve bicanoniche.

Spero rimetter presto il tempo perduto nei giorni passati, e vorrei pel Settembre quando ti occorre, aver dato l'ultima mano al mio lavoro sulle sup[erficie][2] (nonché a quello per N[oether][3] che è quasi finito di redigere).

Scrivimi l'indirizzo del tuo soggiorno alpino e divertiti.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] Cfr. Castelnuovo 1896b, 330-32.
[2] Enriques 1896d.
[3] Enriques 1895d.

116. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] 18 Agosto [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ciò che mi scrivi è interessante e potrà servire a andare più innanzi in molte questioni relative alle sup[erficie]. Prevedevo che il sistema bicanonico non fosse tutto segato (in generale) dalle ψ_{2n-8}: ciò avrà riscontro nel fatto che il 2° agg[iunto] al sistema delle sezioni piane di F_n non sarà sempre segato tutto dalle ψ_{2n-7}; ma la cosa vale (come ti accennavo) se F_n ha soltanto curva doppia e quindi per la tua dimostrazione[1] relativa alle sup[erficie] di gen[ere] 0 ti converrà preventivamente trasformare la sup[erficie] in una con curva 2-pla soltanto.

Qui i divertimenti si succedono: gite, cavalcate, balli..., ed io rimango stanco in guisa che il mio lavoro[2] pei Math[ematische] Ann[alen] non è ancora finito; lo sarà però tra breve. Per fortuna la stagione è qui vicina al suo termine, sicché potrò presto rimettermi con maggior lena al lavoro[3] sulle sup[erficie] di cui anche il S[egre] mi domanda.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Cfr. p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).
[2] Enriques 1895d.
[3] Enriques 1896d.

117. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] 23 Agosto [18]94

Carissimo Castelnuovo

Finalmente ho ultimato il manoscritto del lavoro[1] pei Math[ematische] Ann[alen]! Te lo mando se vuoi darvi una scorsa. La parte riguardante i tuoi ultimi resultati, l'ho redatta a memoria avendo dimenticato la tua nota[2] a Firenze. Mi dirai se vuoi farvi delle modificazioni.

Scrivimi a lungo di ciò che vai facendo sulle sup[erficie] che molto m'interessa e compatisci la mia pigrizia epistolare degli ultimi tempi: sono sempre in gite; anche ieri tutto il giorno fuori; sono gli ultimi resti della stagione che ci godiamo, giacché in questi giorni molti sono andati via ed altri partono alla fine della settimana.

Io però mi trattengo fino a metà di Settembre almeno: il tempo è bellissimo e non troppo fresco.

Giacché non ti sei trattenuto a S. Martino dovresti venir qua una settimana: non troverai le bellezze alpine, ma un buon soggiorno estivo e... staremo un po' insieme. Se ti persuade il progetto vieni via subito, o avvi-

sami se invece che colla corriera vuoi venire con un legno[3] dal Sasso (stazione dopo Bologna). Che bella cosa se potessimo essere riuniti per qualche giorno!

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Enriques 1895d.
[2] Si tratta probabilmente di Castelnuovo 1894d.
[3] Intendi: una carrozza.

118.

24 Agosto 1894

Carissimo Castelnuovo

Che «due forme di 1ª specie in una di 2ª abbiano un elemento comune» è una conseguenza dei 4 post[ulati] della pg. 4 della mia nota.[1] Dimostro p[er] e[sempio] che due rette in un piano hanno un p[un]to comune. Per ciò basta far passare per ciascuna retta un p[ia]no distinto dal 1°; i due p[ia]ni si segano secondo una retta che incontra il 1° p[ia]no in un punto comune alle 2 rette.

Le cose che mi scrivi sono molto interessanti: come dimostri il teorema proiettivo che presi $\Delta + 1$ piani per una retta a (Δ differenza tra i 2 generi) e su ciascuno una aggiunta d'ordine $n - 3$ alla sezione di F_n, le $\Delta + 1$ aggiunte appartengono ad una $\phi_{n-3+\Delta}$ aggiunta ad F_n di cui a è Δ-pla?

Redigendo prima questo lavoro[2] sulle sup[erficie] con 2 diversi generi potrai metterci come corollario il teorema sulla completezza della serie caratteristica d'un sistema lineare che possiede il sistema aggiunto: questo, se non erro, ti occorre anche per le sup[erficie] di gen[ere] 0: intanto io avrò piacere di questo ritardo non avendo ancora finito la redazione della mia memoria,[3] del cui resultato fondamentale (conservazione in tutti i casi del gen[ere] numerico) è probabile ti convenga servirti.

Oramai spero non trovare altre difficoltà in questo lavoro di cui ho ricominciato ad occuparmi, e se smettono un po' le distrazioni conto di finirlo presto. Ma in ogni caso non ho perso il tempo in tante passeggiate e giornate all'aria aperta, facendo provvista di salute.

Aspetto domani la risposta alla mia ultima cartolina; risposta che mi auguro affermativa e che potrebbe anche consistere nella tua venuta. Che bella cosa sarebbe!

Se anche non ti sei deciso, deciditi. Sono giornate calde ed anche a Venezia la temperatura deve essere molto elevata come mi dicono sia a Bologna.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[1] Enriques 1894d, 143.
[2] Castelnuovo 1896a; cfr. anche p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).
[3] Enriques 1896d.

119. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] Mercoledì 29 Agosto [18]94

Carissimo

Grazie della rapidità con cui hai riveduto il manoscritto[1] che ti rimanderò al più presto.

Mi rincresce che tu non possa venire ora qui, ma non rinunzio al piacere di averti e ti propongo un altro progetto. Invece di andare a Torino in Ottobre potresti andarvi a Settembre passando da Bologna: ti c'entrerebbe allora una scappatina qua dove io mi tratterrò probabilmente tutto il mese venturo.

Il Fano mi scrive a proposito della mia nota[2] dell'Ist[ituto] lomb[ardo] che a lui sembra che la mia dimostrazione del teor[ema] «esiste un gruppo armonico di 4 elementi distinti» valga appena si ammetta che esistono più di 3 elementi in una forma di 1ª specie; ma a me ciò non pare.

Lo stesso Fano mi dice che al Noether interessò il fatto che esistono sup[erficie] di gen[ere] 0 non raz[ionali], come disse a lui stesso ad Erlangen.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1895d.
[2] Enriques 1894d; cfr. anche p. 113, nota 2 a c.p. 101 (14.6.1894).

120. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] 31 Agosto [18]94

Carissimo Castelnuovo

L'osservazione da te fatta nell'ultima cartolina che cioè «le sup[erficie] hanno il gen[ere] num[erico] = geom[etrico] se le agg[iunte] ψ_{n-3} segano la serie completa sopra una sezione piana» mi colpì fin da principio come uno dei punti salienti del tuo resultato, ma forse non te ne parlai perché mi parve cosa evidente. Era naturale del resto che così dovesse sembrare a me avendo pensato appunto a quella questione.

Il Bert[ini] mi scrive da Chiavari ponendo in dubbio che i resultati di Kobb[1] diano la trasformabilità di una sup[erficie] in una con sola curva 2-pla e p[un]ti 3-pli per quanto riguarda il mandar via le curve multiple;

ammette la cosa pei p[un]ti multipli relativamente ai quali gli ho comunicato il ragionamento diffuso. Io però non vedo differenza essenziale tra i due casi. Inoltre egli insiste per la trasf[ormazione] con trasf[ormazioni] Cremoniane. Forse anche questa potrà darsi con trasf[ormazioni] di De Paolis.[2]

Aff.mo
F Enriques

[1] Kobb 1892; cfr. anche p. 101, let. 89 (3.5.1894).
[2] Si tratta di trasformazioni cremoniane monoidali: cfr. De Paolis 1875.

121. [c.p.]

Castiglione [dei Pepoli] 8 Settembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Scusa il mio silenzio motivato da una gita che ho fatto a Livorno dove mi sono trattenuto qualche giorno.

Non capisco bene il nuovo ragionamento con cui si dimostrerebbe (parmi) che *sempre* le sup[erficie] aggiunte ψ_{n-2} segano sopra un piano il sistema completo. Ho introdotto nel manoscritto[1] tutte le modificazioni che mi hai suggerito, tranne la citazione relativa alle sup[erficie] di Veronese (si deve dire di Cayley-Veronese?) di cui anche il Fano mi ha scritto: aspetto a maturarla di sentire in proposito anche il S[egre], e l'introdurrò sulle bozze.[2] Intanto mi pare inutile rimandarti il manoscritto che ho già tardato a mandare al Noether: se vuoi potrò mandarti un giorno le bozze.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Il riferimento è al manoscritto di Enriques 1895d.
[2] Cfr. Enriques 1895d, 183, nota 27.

122.

12 Settembre 1894

Carissimo Castelnuovo

Anch'io ho trovato un intoppo nella questione di stabilire per sup[erficie] con sing[olarità] qualunque (indipendentemente dalle formule di postulaz[ione]) che le agg[iunte] d'ord[ine] assai alto segano sopra un piano il sistema lineare completo, perché tale dimostrazione importa assai pel mio scopo. Credo di esser riuscito alla soluzione del problema nel seguente modo che ti sottopongo.

Consideriamo in un piano generico α una qualunque C_{n-2} agg[iunta] alla sezione di F_n: si prenda in α una retta generica a e su questa si fissino gli $n-2$ punti sezioni di C_{n-2}, si fissino inoltre π rette generiche nello spazio incontranti C_{n-2}. In ogni altro piano per a resta fissata una C_{n-2} che incontra le π rette e passa per gli $n-2$ p[un]ti su a; questa genera al variare del piano per a una ψ_{n-2+b} $(b \geq 0)$ agg[iunta] a F_n. Così si vede che (essendo b un certo numero pur grande ma determinato) le ψ_{n-2+b} agg[iunte] ad F_n segano su α un sistema lineare contenente tutte le curve composte di una C_{n-2} e di una retta contata b volte. Dico che questo sistema è quello completo delle C_{n-2+b} agg[iunte] alla sezione di F_n. Comincio dal notare che il residuo di C_{n-2} rispetto al sistema contenendo tutte le rette b-ple contiene (?) *tutte* le curve d'ordine b. Allora il residuo d'una retta $(b-1)$-pla risp[etto] al sistema contiene tutte le curve composte d'una C_{n-2} e d'una retta e però tutte le C_{n-1} (Ricerche[1] lemma pg. 33-34) e così via.

Ti par giusto questo ragionamento? e, se sta bene, non dovrebbe vedersi la cosa più semplicemente?

Il ragionamento non considera il caso di p[un]ti multipli isolati per F_n, ma questi non danno noia perché impongono un numero di condizioni cost[anti] (risp[etto] ad b) alle ψ_{n-2+b} agg[iunte] ad F_n.

Ho spedito al Noether il lavoro[2] pei Math[ematische] Ann[alen].

Il Fano mi ha comunicato il titolo del lavoro di Cayley[3] dove si trova un cenno della sup[erficie] di Ver[onese].

Lo stesso Fano mi comunica alcune sue osservazioni sui principi della G[eometria] Pr[oiettiva].[4] Trovo interessante quella che il mio post[ulato] VI relativo al carattere proiettivo degli ordini naturali[5] esclude (ove non sia già detto prima) che la retta contenga un numero finito di p[un]ti.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Cfr. Enriques 1893f, 68.
[2] Enriques 1895d.
[3] Cayley 1868a.
[4] Cfr. p. 113, nota 2 a c.p. 101 (14.6.1894).
[5] Cfr. Enriques 1894d, 149.

123. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] Sabato [15 settembre 1894]

Carissimo Castelnuovo

Anch'io sono un po'. sorpreso della tua risposta perché proprio ora ti assalgono gli scrupoli per un ragionamento (relativo alla generazione delle

sup[erficie] agg[iunte]) che abbiamo usato io continuamente nelle «Ricerche»[1] e tu per le sup[erficie] a sezioni ellittiche[2] ecc. Ma anche a me (tentando di spiegare tutto) si era presentata la stessa difficoltà che avevo superato in un altro modo più complicato: perciò anche prima nel mio lavoro[3] (dove occorre sempre) se tu lo permetti, adotterò il ragionamento più semplice che mi suggerisci (citandoti).

Ci metteremo completamente d'accordo e appena potrò ti manderò qualche foglio (sono giusto quelli che ti occorrono, che occorrono ora anche a me). Soltanto compatisci il ritardo perché quelle questioni delicate esigono un esame maturo: invero vorrei ora estendere i miei resultati ai sistemi con curve fond[amentali] qualsiasi (anche infinitamente vicine) e definire per essi il sist[ema] agg[iunto] mediante il mio teor[ema] funzionale. Credo di potervi riuscire. Da quel teor[ema] funzionale segue anche l'invariantività delle curve can[oniche] e bican[oniche] (che direttamente non viene). Anche di questo resteremo d'accordo.

Affettuosi saluti

Tuo
F Enriques

[1] Enriques 1893f.
[2] Cfr. Castelnuovo 1894c.
[3] Enriques 1896d.

124.

21 Settembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

In questi giorni ho faticato molto per estendere la definizione di sistema aggiunto pei sistemi dotati di curve fondamentali infinitamente vicine, ma con poco costrutto; allo scopo si riesce però indirettamente come ora ti dirò.

Ti ho accennato più volte al mio teor[ema] così detto funzionale. Esso consiste in ciò. Se $|C_1|$, $|C_2|$ sono due sistemi (∞^2 almeno) su F, $|K_1|$, $|K_2|$ i risp[ettivi] aggiunti, $|C_2 + K_1|$ o $|C_1 + K_2|$ all'infuori di curve fond[amentali] *improprie* risp[ettivamente] di $|C_1|$, $|C_2|$ sono l'aggiunto a $|C_1 + C_2|$. (Le curve fond[amentali] di $|C|$, le dico *proprie* se staccate dalle C producono un abbassamento nel genere: corrispondono allora a p[un]ti multipli isolati).

Dal nominato teor[ema] segue (all'infuori di componenti fisse)

$$|C_2 + K_1| - |C_1 + C_2| = |K_1 - C_1| = |K_2 - C_2|$$

(invariantività del sistema canonico): moltiplicando per 2 si ha quelle del sistema bicanonico.

Però al teor[ema] funz[ionale] prec[eden]te io pervengo soltanto colla restrizione che $|C_1|$, $|C_2|$ non abbiano curve fond[amentali] proprie, onde i sistemi *ipoaggiunti* si confondono cogli agg[iunti] (adottiamo la parola ipoagg[iunto]?).

Per estenderlo agli altri casi, può farsi così. Sia $|C_1|$ un sistema dotato comunque di curve fond[amentali] fra le sue ipoagg[iunte] ve ne sono alcune che insieme alle C_2 costituiscono curve ipoagg[iunte] o agg[iunte] del sist[ema] $|C_1 + C_2|$ (il quale come $|C_2|$ non ha curve fond[amentali] proprie): se $|C_3|$ è un altro sistema come $|C_2|$ si proverà che le dette curve K_1 hanno la stessa proprietà risp[etto] a $|C_3|$ (e quindi meritano il nome di aggiunte a $|C_1|$), nel modo seguente. Le $K_1 + C_2$ sono ipoagg[iunte] o agg[iunte] a $|C_1 + C_2|$; $K_1 + C_2 + C_3$ sono agg[iunte] a $|C_1 + C_2 + C_3|$; togliamo C_2, resta $K_1 + C_3$ agg[iunta] a $|C_1 + C_3|$. c.d.d.

La conservazione del genere numerico segue poi dal teor[ema] funz[ionale] come nelle Ricerche,[1] proprio collo stesso ragionamento, perché ivi il fatto che sopra una sup[erficie] di gen[ere] > 0 il sist[ema] agg[iunto] a $|C|$ si ottenga sommando $|C|$ al sist[ema] can[onico] (e a p[un]ti base), viene appunto utilizzato nel senso di trarne (implicitamente) quel teor[ema] funz[ionale].

Addio in fretta; saluti affettuosi

dal tuo
F Enriques

[1] Enriques 1893f, 64.

125. [c.p.]

[Castiglione dei Pepoli] 25 Settembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Per le sup[erficie] ipoaggiunte con assegnate molteplicità nei p[un]ti multipli d'una sup[erficie] F io non introduco alcun nome speciale (almeno per ora) giacché non mi occorre che una sola volta di considerarle. Introduco invece altri nomi (per brevità) *ipoaggiunte di rango r* risp[etto] a $|C|$ chiamo le curve segate su F_n dalle ψ_{n-3+r} (essendo ∞^3 C sezioni piane di F_n): *iperirreduttibile* chiamo un sistema ∞^r che non possiede ∞^{r-1} curve spezzate né ha curve fond[amentali] proprie (il tuo teor[ema] fissa la condizione occorrente pei sistemi semplici). Ti persuadono questi nomi? Del resto spero inviarti a giorni una parte del manoscritto[1] che devo però esaminare ancora minutamente.

Il trattato tedesco di G[eometria] Descr[ittiva] di cui parlai con te (e con altri) non è il *Peschka*[2] ma il nome mi sfugge.

Affettuosi saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Presto tornerò a Firenze: te lo avviserò con precisione.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.
[2] Peschka 1883-85.

126. [c.p.]

[Firenze] 3 Ottobre [1894]

Carissimo Castelnuovo

Ho piacere della tua prossima venuta: ci vedremo dunque fra pochi giorni. Ed allora spero anch'io di poterti lasciare il manoscritto del mio lavoro[1] che come «la novella dello stento che dura tanto tempo» non viene mai a termine. Vengono sempre fuori delle questioncelle minute che mi obbligano a ritornare sul già fatto. Del resto mi immagino che anche tu trovi delle difficoltà analoghe per il tuo lavoro.[2] Dove hai intenzione di pubblicarlo? Se tu volessi darlo agli Annali di Mat[ematica] si potrebbe farlo uscire insieme al mio nello stesso fascicolo.

Il trattato di Descr[ittiva] di cui ti domandavo è precisamente il Wiener.[3]

Addio, affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Indicami a suo tempo il giorno preciso del tuo arrivo e nel regolare i tuoi impegni qui guarda di fare in modo da lasciare per me il maggior tempo possibile.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.
[2] Cfr. gli articoli di Castelnuovo citati a p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).
[3] Wiener 1884-87.

127. [c.p.]

[Firenze] 7 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto lettera e manoscritto ed oggi la cartolina: a quel ragionamemto ho rimediato in altro modo.

Ho cominciato a rivedere il tuo manoscritto,[1] un primo esame generale che mi ha fatto acquistare un'idea assai esatta del lavoro; mi riserbo ora a compiere l'esame critico tenendo conto di tutte le minuzie. Il resultato a cui giungi è molto bello ed anche il concetto generale è assai semplice, ma nello sviluppo s'incontrano vari punti, forse irrimediabilmente,

faticosi pel lettore, e capisco quanta fatica debba averti costato la redazione di essi.

La trasformabilità delle sup[erficie] in una con sing[olarità] ord[inarie] (senza sin[olarità] in un iperspazio) occorre anche per la conservazione dei due generi. Cosa contiene la nota di Nöther[2] dei Göttinger Nachrichten sulle sup[erficie] agg[iunte]? La definizione di esse è ancora un punto che mi tiene in dubbio.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] L'ipoaggiunto di rango $r >$ [assai] alto ad una rete C sega su C la serie completa.

[1] Cfr. p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).
[2] Noether 1871a.

128.

8 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ti dicevo ieri che il sistema ipoaggiunto di rango r assai alto ad un sistema non semplice (per esempio una rete) $|C|$ sega su C la serie completa. Ecco come si dimostra.

Sieno $\delta_0\ \delta_1\ \delta_2 \ldots$ i difetti di completezza della serie segata su C dalle curve ipoagg[iunte] di rango 0, 1, 2, ... Allora si ha $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \ldots \leq$ $\leq p_g - p_n$ (diff[erenza] dei gen[eri] della sup[erficie]), perché le ipoaggiunte di rango s a $|C|$ lo sono di rango 0 per $|sC|$. In conseguenza i sistemi lineari successivi ipoagg[iunti] di $|C|$ da un certo punto in poi segano su C la serie completa (senza che possa dirsi esser ciò per $r+1$ se è per r). Ed allora (notato che tali ipoagg[iunti] sono semplici) si può effettivamente applicare il processo di pg. 44 delle «Ricerche»[1] e trarne la deduzione che volevi estendente i tuoi resultati.

Non ti consiglio però a occuparti come il sistema ipoagg[iunto] di rango r alla rete $|C|$ su F venga segato da (particolari) sup[erficie] ipoagg[iunte] ad F ove le C sieno sezioni piane di una stella su F: ciò ti porterebbe a delle restrizioni inutili.

Una osservazioncella permette di dedurre dai tuoi resultati un fatto che da lungo tempo avevamo intuito ma non dimostrato; cioè «Sopra una sup[erficie] F di gen[ere] geom[etrico] = num[erico] ogni fascio è razionale».[2] Anzitutto si osservi che (come su F) anche sopra ogni F' in corrispondenza $[1, m]$ con F (involuz[ione] su F) un sistema normale ha la

serie caratt[eristica] completa: tanto segue (se non erro) colla tua dimostrazione del lavoro[3] dei Math[ematische] Ann[alen]. In conseguenza F' ha il gen[ere] geom[etrico] = num[erico]. Ma se F contenesse un fascio irraz[ionale] sarebbe riferibile ad una rigata irrazionale multipla, onde ecc.

Ho pensato, per perdere meno tempo, di mandarti la 1ª parte del mio lavoro,[4] che però non ti interessa: nondimeno se potrai gettarci un'occhiata in questi giorni sarà tanto di guadagnato. Troverai rifatta con metodi più semplici la teoria dei sistemi normali, e confrontando colle «Ricerche» vedrai che vengono stabiliti dei teoremi più generali (cfr. p[er] e[sempio] il Restsatz): di curve aggiunte nel manoscritto non si parla ancora. Vedi di qui che il lavoro avrà una mole discreta.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Enriques 1893f, 81.
[2] Cfr. Castelnuovo 1896a, 360.
[3] Castelnuovo 1894a.
[4] Enriques 1896d.

129.

16 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Sono stato stamani in biblioteca ed ho letto le note dei Comptes rendus di Picard e Poincaré (1884-86) sugli integrali di diff[erenziali] totali.[1] Nulla di nuovo: però bisogna vedere la memoria di Picard nel Journal de Liouville (84-86)[2] e quella di Noether nei Math[ematische] Ann[alen];[3] nessuno dei due giornali si trova qui.

Quanto alle cose che ti accennavo ieri sera eccole in breve.

Sieno $I_1\ I_2\ \dots\ I_p\ \ p$ integrali di Picard (di 1ª specie) sopra una superficie F: essi sono integrali ab[eliani] sopra ogni curva C di F. Se su una particolare C non sono linearmente indipendenti, un integrale $I = \lambda_1 I_1 + + \dots + \lambda_p I_p$ non identicamente cost[ante], sarà cost[ante] su C. D'altronde dico che le curve I = cost formano un fascio (ma in generale non di curve algebriche): le curve del fascio si ottengono integrando l'equazione

$$P + y'_x Q = 0 \quad \text{derivata di} \quad I = \int P dx + Q dy = \text{cost}, \ y = y(x).$$

Se le I = cost non formassero un fascio, partendo da un p[un]to di F con un valore di I si arriverebbe ad ogni altro p[un]to collo stesso valore, mentre I non è cost[ante] su F. Ora le curve C (I = cost) supposte algebri-

che formano un fascio irraz[ionale]; infatti I viene allora ad essere un integrale abeliano sopra l'ente ∞^1 che ha per elementi le curve C del detto fascio.

Si deduce: Sopra una sup[erficie] con p integrali di Picard, ogni fascio lineare di curve ha il genere $\geq p$. Più in generale ogni fascio di genere π ha il gen[ere] $\geq p - \pi$.

Inversamente si abbia sopra una sup[erficie] un fascio irraz[ionale] di gen[ere] π. Sia I un integrale ab[eliano] dell'ente ∞^1 delle curve del fascio; considerando I come funzione dei p[un]ti della sup[erficie] F (che ha le curve del fascio come curve di val[ore] $I = \text{cost}$), si ha su F un integrale di Picard. Invero sopra le curve $y = \text{cost}$, I è un integrale appartenente all'involuzione segata dal fascio sulla curva, onde (pel teor[ema] di Abel-Hurwitz)[4] è un integrale ab[eliano] della curva; si ha quindi $\frac{\partial I}{\partial x} = P$ dove P è algebrico; parimenti $\frac{\partial I}{\partial y} = Q$, onde $I = \int P dx + Q dy$; inoltre I è ovunque finito e continuo.

Dunque: Sopra una sup[erficie] senza integrali di Picard ogni fascio è lineare.

Si ha anche il seguente resultato: Se sopra una sup[erficie] F a sezioni di genere π, vi sono π integrali di Picard, la F è rigata (occorre forse che le sez[ioni] di F non ammettano trasformazioni in sé).

I π integrali della sez[ione] di F sono gli integrali di Picard: dunque hanno sempre gli stessi periodi e però tutte le sezioni di F sono riferibili punto per punto l'una all'altra. Partendo da un p[un]to di una sezione considerata variabile in un fascio, si ottiene quindi una curva sulla quale i π integrali sono cost[anti]; questa incontra in un p[un]to non solo le sezioni del fascio nominato ma anche quelle di ogni altro fascio, ossia ogni p[ia]no; dunque è una retta.

Ti persuadono questi ragionamenti?

Rammaricando il tuo troppo breve soggiorno qui, ti saluto affettuosamente.

Tuo
F Enriques

[P.S.] Ti pregherei ricordarti del Wiener.[5]

[1] Cfr. Picard 1884a, 1884b, 1885b, 1885c e 1886a; Poincaré 1884c.
[2] Picard 1885a, 1886c.
[3] Noether 1887.
[4] Cfr. Abel 1826; Hurwitz 1887.
[5] Wiener 1884-87; cfr. p. 135, c.p. 126 (3.10.1894).

130. [c.p.]

[Firenze] 17 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Credo di giungere (mediante il teor[ema] funz[ionale])[1] a stabilire il concetto di Curvengeschlecht *virtuale* e la sua invariantività; la cosa è un po' noiosa per causa delle curve eccezionali. Pei sistemi puri (salvo errore di calcolo) avrei che indicando con π il genere, con n il grado, con ρ il genere del sistema aggiunto, $n - 2\pi + \rho$ ha un valore cost[ante] (che è strettamente legato al $p^{(1)}$).

Lo sviluppo della dimostrazione dell'ultimo resultato che ti ho accennato ieri è un po' delicato richiedendo l'inversione degli integrali ab[eliani]: però si potrebbe sostituire quel ragionamento coll'osservazione, che sopra una sup[erficie] non rigata a sez[ioni] di gen[ere] $\pi > 0$, le sezioni t[an]g[enti] hanno il genere $\pi - 1$; se vi sono π integrali di Picard sulla sup[erficie], ogni sez[ione] t[an]g[ente] apparterrebbe ad un fascio irraz[ionale] il che è assurdo.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Cfr. p. 133, let. 124 (21.9.1894).

131. [c.p.]

[Firenze] 18 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Vorrei sapere se sussiste il seguente teorema cui (mi sembra) tu mi accennassi:

Se sopra una curva C di gen[ere] π si considera una serie g contenuta nella canonica (ed ∞^1 o ∞^2 almeno) ed una g' (pure ∞^1 o ∞^2 almeno) scompleta, la $g + rg'$ per r grande è completa.

Se il teor[ema] sussiste ti prego comunicamelo con tutte le restrizioni occorrenti e darmene pure la dimostrazione che metterei in una nota del mio lavoro.[1]

Dimmi anche se (supposto il teor[ema] prec[edente]) dall'esser completa $g + rg'$ segue che è completa $g + (r + 1)g'$, e se ciò vale già per $r = 0$ o occorre $r = 1$.

Cordiali saluti

tuo aff.mo

F Enriques

[1] Enriques 1896d.

132.

20 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto le tue due cartoline e il Wiener[1] di cui ti ringrazio moltissimo.

Da due giorni sto faticando sulla dimostrazione della conservazione del genere numerico e sulla trasformazione di una sup[erficie] in una senza curve eccezionali (per $p > 0$).

La dimostrazione della conservazione del genere numerico che avevo ideata (ed a cui forse dovrò adattarmi) dà la parte essenziale del resultato (quella ad es[empio] che tu adoperi), cioè permette di assegnare un massimo Δ al difetto di completezza delle serie segata dal sistema agg[iunto] a $|C|$ su C, e fa anche vedere che questo massimo viene raggiunto relativamente a $|rC|$ per r assai alto *purché* $|C|$ *sia un sistema non singolare*: mi premerebbe assai di togliere questa restrizione, specie riguardo alla forma proiettiva dell'enunciato della invariantività di p_n, ma trovo serie difficoltà. La ragione di queste sta in ciò: se $|C|$ è non singolare, il residuo di un sistema $|C_1|$ rispetto ad $|rC|$ per r grande è irreduttibile senza punti base sulla sup[erficie] F che ha per sezioni le curve C; invece non accade lo stesso se la F ha dei p[un]ti multipli.

Ho tentato qualche altra via, ed avevo ideato di ricorrere a quel teorema del quale ti ho domandato, ma (come prevedevi) la restrizione che ivi compare non lo rende servibile nel mio caso. Una via di scampo ci sarebbe, ma molto delicata: consisterebbe nell'estendere alle curve riduttibili residue di $|C_1|$ rispetto ad $|rC|$ le considerazioni che si fanno nel caso della irreduttibilità; si dovrebbe riuscire, ma l'esecuzione è molto penosa; nondimeno la sto tentando sebbene per ora non ne venga a capo.

La trasformazione di una sup[erficie] di genere $p_g > 0$ o con $P > 0$ curve bicanoniche, in una senza curve eccezionali (trasformate di p[un]ti), mi riesce soltanto nel caso $p_g = p_n$. È una vera disgrazia sotto molti rapporti; anche a te quel teorema sarebbe occorso nell'ultimo § [paragrafo] del tuo lavoro,[2] anzi non so come farai. Alludo alla dimostrazione che esistono sopra una sup[erficie] dei sistemi lineari per cui il difetto di completezza della serie caratteristica è $p_g - p_n$: la dimostrazione che tu ed io avevamo pensato suppone tacitamente di partire da un sistema puro. Suppone anche un'altra cosa (come tu stesso osservavi) cioè che sia

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

Ma a questo credo si possa rimediare adoperando il $p^{(1)}$ virtuale e il $p^{(2)}$ virtuale. Ho modo di stabilirne il concetto, e di stabilire la relazione che li lega (sebbene non abbia ancora eseguito la cosa), ma soltanto par-

tendo da sistemi puri sulla sup[erficie]: se sulla sup[erficie] non esistono sistemi puri non si vede nulla! Pertanto a quanto io vedo l'ultimo teor[ema] del tuo lavoro lo potresti dare soltanto per le sup[erficie] trasformabili in guisa da non aver curve eccezionali; ma perché questo accada non si ha un criterio tranne pel caso $p_g = p_n$, ed in questo caso quel teor[ema] è illusorio.

La via delle sup[erficie] come quella dei cieli, è seminata di spine.

Sono curioso che tu mi dica come fai relativamente alla difficoltà che ti si presenta e che a quest'ora (se come suppongo, ci hai messo mano) avrai già osservata.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo
F Enriques

[1] Wiener 1884-87; cfr. p. 138, P.S. a let. 129 (16.10.1894).
[2] Castelnuovo 1896a, § 8.

133. [c.p.]

[Firenze] 22 Ottobre [1894]

Carissimo Castelnuovo

Domani vado a Bol[ogna] per gli esami (fermo in posta).

A quelle difficoltà di cui ti accennavo circa p_n credo di rimediare, ma occorre ritoccare i teor[emi] prec[eden]ti per dar loro una maggior generalità togliendo restrizioni inutili. L'estensione alle curve riduttibili di teor[emi] dati per curve irr[iduttibili] è la base della generalità da conseguirsi nella geom[etria] sulle sup[erficie]: è in sostanza questo che occorrerebbe anche a te nella questione dei piani sing[olari], dove il concetto della dimostraz[ione] progettata mi par giusto e preferibile alla continuità. Cerca di adoperarlo rifacendo da te per le curve spezzate o con ipermolteplicità il teor[ema] di R[iemann] R[och]. Esso deve venire.

Quanto al ragionamento che mi comunichi per la dimostraz[ione] del tuo ultimo §° [paragrafo],[1] ci ripenserò con calma: la restrizione che dici tacitamente supposta (nella nota) non vuol dir nulla; una curva eccezionale (trasformata di un punto) avrà certo per trasformata una curva eccez[ionale] o un p[un]to.

Hai ragione, non bisogna preoccuparsi del tempo in cui verranno pubblicati i nostri lavori: per parte mia non ho fretta se non è per causa tua: preferisco limar tutto con pazienza.

Ti ringrazio dell'offerta del trattatello di Descr[ittiva] ma non ho idea di far studi profondi della materia a meno che non si trovi qui una trattazione minuta della pr[oiezione] centrale colle eccezioni.

Aff[ettuosi] saluti F E

[1] Castelnuovo 1896a, § 8.

134. [c.p.]

Bologna 24 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Due righe in fretta per darti il mio indirizzo qui (Albergo dei Tre Re).

Ho cominciato gli esami di Pr[oiettiv]a: pochi presentati, ma esito discreto. Fra questi e gli esami di Descr[ittiv]a ne avrò per la settimana. E mi rimarrà poco tempo e modo di lavorare.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

135. [c.p.]

[Bologna] 27 Ottobre [1894]

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto le tue 2 cartoline la 1ª (per errore) in ritardo. Il teor[ema] funz[ionale][1] si enuncia:

«Sieno $|C|$, $|C_1|$ due sistemi lineari irreduttibili (∞^2 almeno) il 2° contenuto nel 1°, e residuo di una curva C_2 (nella quale si devon includere anche i p[un]ti base per $|C_1|$ e non per $|C|$ o base per $|C|$ con molt[eplicità] $<$ [minore]): allora ogni curva agg[iunta] a $|C_1|$ insieme alle componenti non eccezionali di C_2 e alle componenti eccez[ionali] i-ple di C_2 contate $i-1$ volte, ed insieme ad eventuali curve eccez[ionali] fondamentali per $|C_1|$ (p[un]ti base di $|C|$ sulla sup[erficie] che ha per sez[ioni] le C_1) costituisce un'aggiunta a $|C|$: viceversa tale proprietà è caratteristica per le curve agg[iunte] a $|C_1|$». (Comp[onente] eccez[ionale] i-pla di C_2 è un p[un]to base i-plo per $|C_1|$ sulla sup[erficie] che ha per sez[ioni] le C).

Ti ringrazio di quanto hai fatto col Br[ioschi] relativamente alla pubblicazione dei nostri lavori.[2]

Se dare i tuoi teor[emi] pei sist[emi] non sing[olari] e poi estenderli fosse molto più semplice lo troverei preferibile, perché tanto anche l'altra via non è in fondo indipendente dalle singolarità.

Ho finito gli esami e torno a Fir[enze] passando per Ravenna: sarò a Fir[enze] Lunedì.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Congratulazioni pei successi ciclistici.

[1] Cfr. p. 133, let. 124 (21.9.1894).

[2] Cfr. p. 135, c.p. 126 (3.10.1894); Francesco Brioschi era il direttore degli «Annali di Matematica pura ed applicata».

136. [c.p.]

[Firenze] 30 Ottobre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Sono tornato ieri sera a Firenze e posso ormai rimettermi al lavoro.

Ho ricevuto delle memorie da Pic[ard]. Potrei profittare dell'occasione per ringraziarlo e domandargli qualche schiarimento sui suoi integrali: insieme parlargli dei miei resultati. Che ne dici? Se invece preferisci scrivergli tu relativamente a quelli integrali, dimmelo francamente.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[P.S.] A che punto è la redazione dei tuoi lavori?[1]

Ti spedisco delle note di Am[odeo] che mi avevi prestato[2] e mi erano rimaste.

[1] Castelnuovo 1896a e 1896b.

[2] Cfr. p. 110, c.p. 98 (2.6.1894) e p. 111, c.p. 99 (3.6.1894).

137. [c.p.]

[Firenze] 1 Nov[embre] 1894

Carissimo Castelnuovo

Il ragionamento che fai relativo ad una retta sopra una sup[erficie] non sing[olare] F ($p_g = p_n = 0$) fond[amentale] per il sist[ema] agg[iunto] è giusto, ma probabilmente deve esser considerato come un ragionamento per assurdo, giacché la retta sarà eccezionale: in tal caso l'agg[iunto] al residuo di essa rispetto al sistema delle sez[ioni] di F coinciderebbe col 1°.

Date le restrizioni di cui verrebbero inquinati i resultati fai bene ad adoperare la continuità anziché considerare dapprima i sistemi non sin[golari] per la questione che si presenta nel tuo 1° lavoro.[1] Ma io non son persuaso ancora che non si debba riuscire estendendo quei teor[emi] sulle curve spezzate il che sarebbe molto importante, perché prima o poi ne avremo bisogno.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Castelnuovo 1896a.

138. [c.p.]

Firenze - 3 Novembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho scritto oggi stesso al Pic[ard] trovando modo di dirgli che gli hai mandato la relazione e salutandolo a tuo nome. Gli sottopongo nettamente il problema dell'interpretazione geometrica dei suoi integrali di 1ª specie: significato della curva $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ e (ciò che è più essenziale) che cosa si può dire relativamente alla diminuzione del numero delle ψ_{n-3} aggiunte ad F_n (rispetto a $p + \pi$) quando la F_n possiede degli integrali di diff[erenziali] totali.

Nel mio teor[ema] funz[ionale] non vi è alcuna esclusione per le reti o pei sistemi non semplici: credo che l'enunciato che te ne detti[1] contenga tutte le restrizioni occorrenti. Mi piace la trattazione simultanea dei sistemi semplici o no (nel tuo 2° lavoro)[2] con metodo pienamente invariantivo.

Nel mio lavoro[3] (pel caso $p_g = p_n$) ho idea di dare la definizione del $p^{(1)}$ virtuale: nel tuo caso verrebbe $p^{(1)} = 0$.

Addio, affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Hai ricevuto le note di Am[odeo] che ti ho inviato?[4]

[1] Cfr. p. 142, c.p. 135 (27.10.1894).
[2] Castelnuovo 1896b.
[3] Enriques 1896d.
[4] Cfr. p. 143, c.p. 136 (30.10.1894).

139. [c.p.]

[Firenze] 4 Novembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Per me sup[erficie] non sing[olare] è una sup[erficie] che non ha *affatto* p[un]ti mult[ipli]. Che una proiezione dello stesso ordine d'una tale sup[erficie] abbia solo p[un]ti pluriplanari (è questo, suppongo, cui tu alludi), oltreché come conseguenza immediata delle considerazioni sulle curve spezzate (che, se vuoi, posso enunciare), segue direttamente dall'osservare che un sistema contenuto totalmente in uno[1] $|C|$ ha come curve fond[amentali] soltanto dei complessi di curve fond[amentali] di $|C|$: ora se $|C|$ è non sing[olare] le sue curve fond[amentali] sono i p[un]ti semplici della sup[erficie] che ha per sez[ioni] le C, quindi un sist[ema] contenuto tot[almente] in $|C|$, ha

come curve fond[amentali] (oltre ai p[un]ti semplici) dei gruppi neutri di p[un]ti da cui segue ecc.

Ti prego di salutare il Fano da parte mia e di dirgli che ho mandato al Guccia le bozze della nostra corrispondenza.[2]

Io seguito a lavorare senza incontrare veri ostacoli ma noiose minuzie.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Così nell'originale.

[2] Cfr. p. 113, nota 2 a c.p. 101 (14.6.1894) e l'articolo ivi citato.

140. [c.p.]

[Firenze, 6 novembre 1894]

Carissimo Castelnuovo

Per me la considerazione dei sist[emi] non sing[olari] nel mio senso è essenziale: dopo soltanto riesco ad estendere il teor[ema] che l'ipoagg[iunto] coincide coll'agg[iunto] ai sist[emi] che hanno soltanto curve fondamentali improprie (singolari nel tuo senso). Ma anche qui c'è forse qualche restrizione e il mio terrore deriva dall'eventualità di curve fond[amentali] impr[oprie] infinitamente vicine.

Del resto non vedo dove ti occorra applicare questa proprietà se parti da un sist[ema] non sing[olare] nel mio senso segato su F dagli iperpiani: l'agg[iunto] non avrà p[un]ti base su F e le sue curve fond[amentali] saranno solo riunioni di p[un]ti su F (gruppi neutri); lo stesso accadrà pel 2° agg[iunto] ecc. Dal teor[ema] funz[ionale][1] avrai la nota relazione che dirà come i generi dei successivi agg[iunti] vadano decrescendo: anzi poiché in quel teor[ema] la restrizione di non sing[olarità] non compare in alcun senso si potrebbe addirittura partire da un sistema qualunque? Per che cosa ti occorre che l'ipoagg[iunto] coincida coll'agg[iunto]?

Non vedo bene neppure quella difficoltà di cui mi hai parlato, che (mi pare) cesserebbe se si abbandonasse la non sing[olarità] dei sistemi: l'essenziale mi pare che resti, cioè che un sist[ema] agg[iunto] $|C'|$ a $|C|$ non ha curve eccez[ionali] fond[amentali] per $|C|$ come non fond[amentali].

Affettuosi saluti

tuo

FE

[1] Cfr. p. 142, c.p. 135 (27.10.1894).

141.

8 Novembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

I sistemi non sing[olari] nel tuo senso si possono chiamare (come faccio anch'io nel mio lavoro)[1] «senza curve fond[amentali] proprie». Un p[un]to multiplo O improprio (immagine d'una curva fond[amentale] impropria), cioè un p[un]to che non abbassa il genere delle sezioni piane (o iperplanari) per esso, è certo pluriplanare. Se invero il cono t[an]g[ente] in O contenesse una parte d'ordine > 2, i 2 p[un]ti comuni all'intorno di O e alla sezione per O essendo variabili sarebbero di connessione ed il genere della sezione per O sarebbe $<$ di quello π d'una sezione generica. Quanto alla possibilità che vi sieno dei p[un]ti multipli infinitamente vicini ad O (non sulla curva multipla) e quindi vi sia per O un fascio di sezioni piane di genere $< \pi$, non so cosa pensarne; credo però che questo caso dovrebbe potersi eliminare: in ogni modo la considerazione precedente non ne verrebbe infirmata; quindi se ti basta appunto che O sia pluriplanare (come mi dici) non mi pare ti occorra di esaminare altro.

Mi dici che il caso in cui un sistema dotato di curve fond[amentali] impr[oprie] ammetta un aggiunto che più non soddisfi a tale restrizione ti conduce ad un numero piccolo di tipi, alcuni dei quali di sup[erficie] di gen[ere] geom[etrico] = num[erico] = 0 non razionali: su queste vi sono curve bicanoniche? Se no, il resultato sarebbe molto strano.

Nel caso che a te occorre poiché il sistema agg[iunto] a $|C|$ non ha p[un]ti base non base per $|C|$, il teor[ema] funz[ionale][2] si applica senza pasticci di curve eccezionali: fortunato te! Giacché sono proprio quei pasticci e quelle minuzie che mi hanno impedito fin ora di condurre a termine il § [paragrafo] del mio lavoro relativo al sistema aggiunto. Anche la nomenclatura è imbrogliata.

Ad evitare molti equivoci quando considero una sup[erficie] in senso invariantivo la dirò ente algebrico (sottinteso ∞^2). P[un]ti dell'ente algebrico chiamerò le curve eccezionali. Ragionerò il più delle volte, prescindendo prima da punti, e tenendone conto all'ultimo del ragionamento come di un termine correttivo. Ciò contribuirà alla chiarezza e alla speditezza: altrimenti il lettore perderebbe il concetto dei teor[emi] e delle dimostrazioni attraverso le minuzie.

Non ho ancora ricevuto la risposta aspettata da Pic[ard],[3] che (in caso) ti comunicherò subito.

Sono stato l'altro giorno a Pisa e ho veduto Bert[ini], Bi[anchi], Volt[erra]. Non ho ancora ricevuto alcuna conferma da Bol[ogna].[4]

Affettuosi saluti dal tuo

F Enriques

[1] Enriques 1896d.
[2] Cfr. p. 142, c.p. 135 (27.10.1894).
[3] Cfr. p. 144, c.p. 138 (3.11.1894).
[4] Si tratta della conferma dell'incarico del corso di Geometria proiettiva e descrittiva per l'anno accademico 1894-95.

142. [c.p.]

[Firenze] Domenica [11 novembre 1894]

Carissimo Castelnuovo

Domani o domani l'altro vado a Bol[ogna] (fermo in Posta) sebbene non abbia ancora avuto la conferma ufficiale.

La Fac[ol]tà ha mandato la proposta al Ministro fino dal 31 Ottobre, ed io spero di sollecitare l'adesione, o di ottenere dal Preside il permesso di cominciare intanto le lezioni.

Speravo di poterti mandare a giorni la 2ª parte del mio lavoro ma dovrò tardare causa l'interruzione dovuta al ricominciare dei corsi. Per la trasf[ormazione] d'una sup[erficie] con $p_g = p_a$ (> 0) in una senza curve eccezionali dovrò approfittare dei tuoi teoremi relativi alle sing[olarità] che può avere il sistema agg[iunto] a $|C|$: lascio per ora vuoto quel § [paragrafo].[1]

Dì al Fano che mandandogli le bozze[2] scrissi al Gu[ccia] ciò che egli desiderava (100 estratti) ed il Gu[ccia] ha ricevuto tutto.

Salutalo e prendi per te una stretta di mano

dal tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Nessuna risposta dal Pic[ard].

[1] Enriques 1896d, § 42.
[2] Enriques 1895c.

143. [c.p.]

[Bologna] Mercoledì 14 Nov[embre 18]94

Carissimo Castelnuovo

Sono a Bol[ogna] ed ho preso alloggio in via *Guido Reni* 7.

Non posso ancora cominciare le lezioni mancando la conferma ministeriale dell'incarico ma appena il M[inistro] o Fer[rando][1] sieno a Roma il Pres[ide] di Fac[ol]tà (attualmente Vice-rettore) solleciterà una risposta

telegrafica. Frattanto appena sistemato riprenderò la redazione del mio lavoro, e risponderò alla tua cartolina d'oggi relativamente a ciò che mi occorre per le curve eccez[ionali] delle sup[erficie].

E qui, a perfezionarsi per conto proprio, il Dr Levi-Civita. Mi dici un po' come è andato l'affare del mio perfez[ionamen]to all'estero?[2] Io non ne ho saputo nulla ma mi han detto che il Cons[iglio] Sup[eriore] me lo ha negato per esuberanza di titoli (!?). Se hai occasione di poter sapere qualcosa in proposito mi farai piacere.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] A quest'epoca il ministro dell'Istruzione Pubblica era Guido Baccelli e Giovanni Ferrando era direttore della divisione per l'Istruzione Superiore.

[2] Cfr. p. 96, let. 84 (21.4.1894) e p. 97, c.p. 85 (24.4.1894).

144. [c.p.]

[Bologna] Giovedì [15 novembre 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ho letto stamani la nota di H[umbert].[1] Altro che abilità per non citarci! Il teor[ema] fondamentale che egli dà circa la rappresentazione sul piano delle sezioni d'una sup[erficie] raz[ionale] colle ψ_{n-3+q} è dato da me tale e quale (salvo la forma) a pg. 40 delle «Ricerche»[2] pel caso $q = 0$ (da cui poi si passerebbe senz'altro al caso $q > 0$).

Non sarebbe il caso di scrivergli e domandargli una restituzione di priorità? Giacché egli può non aver osservato quel §° [paragrafo] delle «Ricerche» o avendolo fatto non aver capito che era la stessa cosa che egli ha fatto, ma certo ha avuto l'espressa intenzione di non curarsi dei nostri lavori e non può non aver sospettato che quelle cose fossero state date da noi ((almeno la considerazione del sistema [aggiunto] sulle sup[erficie] raz[ionali] in tante memorie tue)).

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[P.S.] (Ho scritto anche al S[egre] in proposito).

[1] Humbert 1894d, che porta la data 28 luglio 1894.

[2] Enriques 1893f, 76.

145. [c.p.]

[Bologna] Venerdì [16 novembre 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ho idea di premettere al corso di G[eometria] Pr[oiettiva] una specie d'introduzione storica.[1] Per questo ho consultato vari lavori storici, ma trovo una lacuna che qui non posso colmare perché manca il «Barycentrische Calcul» di Möbius.[2] Se non ti costa fatica potresti farmi il piacere di vedere in Bibl[ioteca] come il Möbius definisca la collineazione? cioè, se la definisca analiticamente come trasf[ormazione] data da funz[ioni] lineari di coor[dinate] cartesiane o baricentriche?

Scusa la seccatura e se non trovi subito la cosa senza fatica non te ne occupare perché la cosa ha in fondo per me un interesse limitato.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Cfr. l'introduzione di Enriques 1894-95a.

[2] Möbius 1827.

146. [c.p.]

[Bologna] Sabato 17 Nov[embre 18]94

Carissimo Castelnuovo

Mi dispiace della difficoltà che vai trovando, che però non dovrebbe essere essenziale. Forse converrebbe di non finire l'operazione di aggiunzione arrestandosi al 1° sistema non semplice, e così si dovrebbe eliminare l'inconveniente. Se sulla tua F_n il sistema agg[iunto] vien dato dai coni pel p[un]to $(n-2)$-plo O, il 2° agg[iunto] sarà semplice se le sezioni per O non sono iperellittiche ed invece in questo 2° caso verrà segato da coni d'ord[ine] $n-6$ ecc. Il 3° agg[iunto] poi potrà essere semplice o no, ma in ogni caso proseguendo si dovrebbe riuscire ai tipi noti.

Il bollettino dell'Istr[uzione] contiene la mia conferma[1] uff[iciale]. Comincerò subito le lezioni a settimana nuova. Non dispero di potere prima di allora correggere la parte più essenziale della teoria del sist[ema] agg[iunto] del mio lavoro,[2] e mandartela (mancando solo le ultime cose sul $p^{(1)}$ virtuale ecc.).

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Si tratta della conferma dell'incarico del corso di Geometria descrittiva e proiettiva presso l'Università di Bologna.

[2] Enriques 1896d.

147. [c.p.]

[Bologna] 19 Nov[embre 18]94

Carissimo Castelnuovo

Dalla prefazione dell'Hankel[1] (che già mi sono procurato per consiglio di S[egre]) traggo infatti la maggior parte delle notizie storiche che mi occorrono. Quanto a frazionarle ciò era ed è pure nelle mie intenzioni: farò litografare separatamente l'introduz[ione] storica,[2] ma la svolgerò per parti man mano che si presentano nel testo i concetti relativi.

Domani essendo festa, comincio le lezioni domani l'altro. Correggendo ciò che ho scritto sulle sup[erficie] trovo ancora qualche minuzia, che però non mi dà pensiero. Ciò mi obbliga di tardare, ancora di qualche giorno, l'invio progettato.[3] Nell'insieme però sono assai contento della forma che son riuscito a dare a quei teoremi, che è più semplice di quanto mi immaginavo.

Il Pic[ard] non mi ha mai risposto:[4] non so che pensarne.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Hankel 1875.
[2] Cfr. l'introduzione di Enriques 1894-95a.
[3] Si tratta dell'invio del manoscritto di Enriques 1896d.
[4] Cfr. p. 144, c.p. 138 (3.11.1894).

148. [c.p.]

[Bologna] 20 Nov[embre] 1894

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio molto delle notizie che mi fornisci riguardo a Möbius:[1] le quali sono interessanti. Nella dimostrazione cui accenni si suppone (mi pare) la *continuità* della corrispondenza, altrimenti occorrerebbe il teor[ema] di Staudt (ossia si sarebbe condotti alla questione funzionale di Darboux). In sostanza a Möbius più che a St[audt] mi pare risalga il merito di avere considerato la più generale relazione proiettiva, quindi nell'opera di St[audt] vi sarebbe assai meno di originale di quel che pensavo: a lui invece rimane il merito del metodo puro ma questo ha per me importanza secondaria.

Mi dispiace di non avere il tempo di mostrarti l'introduzione storica alle mie lezioni:[2] essa contiene poche notizie di fatto, ma uno sguardo generale sullo svolgimento dei concetti della G[eometria] Pr[oiettiv]a che spero non ti dispiaccia. Te la manderò appena litografata; ti ho già detto che in lezione ne frazionerò lo sviluppo.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Cfr. p. 149, c.p. 145 (16.11.1894).
[2] Enriques 1894-95a.

149. [c.p.]

[Bologna, 23 novembre 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio della ulteriore comunicazione, ma essa non chiarisce il mio dubbio se cioè il Möbius ammetta la continuità (non solo del piano ma) della corrispondenza: se cioè ammette che ad un p[un]to irraz[ionale] limite di un gruppo di p[un]ti corrisponda il p[un]to irraz[ionale] limite dei corrispondenti, o *se lo dimostra*: questo infatti se non si può dire che abbia fatto St[audt], si ottiene almeno secondo la via di St[audt] come nella mia Nota (o in quella di Darb[oux] Kl[ein],[1] ecc. che però si discostano dalla via di St[audt] e introducono un concetto metrico).

Auguro di cuore pieno successo alle tue pratiche.[2]

Ho piacere che tu abbia superato quella difficoltà.

Grazie delle litografie.

Ho perso tutta la settimana colle lezioni facendone due il giorno di Pr[oiettiv]a: spero poter presto riprendere e completare il poco che mi resta da fare nel lavoro[3] sulle sup[erficie]: non mi lagno del ritardo; tornandoci su, vedrò le cose più chiare.

Alcuni giovani mi chiedono che faccia un corso di G[eometria] Sup[eriore]: non sono alieno dall'idea di contentarli in parte con un seguito di conferenze[4] settimanali che però comincerei solo più tardi (dopo Gennaio). Ti dirò in caso il piano di queste: s'informerebbero ad un principio generale che completa quello di Klein (Programm)[5] per far rientrare in quell'ordine d'idee vari altri tipi di ricerche (p[er] e[sempio] la geom[etria] sull'ente) che ad esso sfuggono, almeno direttamente.

Cordiali saluti tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Saluta il Guc[cia] ch'io pure conoscerei volentieri.

[1] A questo proposito in Enriques 1894d, 142, nota 3 sono citate in particolare le memorie: Darboux 1880 e Klein 1873, 1874.
[2] Enriques si riferisce alle pratiche per l'ordinariato di Castelnuovo.
[3] Enriques 1896d.
[4] Queste conferenze furono poi litografate: cfr. Enriques 1894-95c.
[5] Klein 1872.

150. [c.p.]

[Bologna, 27 novembre 1894]

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio molto dell'ulteriore notizia su Möbius, che risponde appunto al mio dubbio: scusa la ripetuta seccatura che ti ho procurato.

Con oggi termino le doppie lezioni giornaliere di Pr[oiettiv]a fatte per avantaggiare il corso: inoltre ho preparato parecchie lezioni avanti, e così spero di tornare domani alle sup[erficie] e finire al più presto quel lavoro.[1] Avevo già scritto quel corollario del teor[ema] funz[iona]le[2] che anche a me serve per le sup[erficie] senza curve eccez[ionali].

Il Levi-Civita mi ha prestato la Höhere Geometrie del Klein[3] che leggerò o almeno scorrerò con molto interesse. Il L[evi]-C[ivita] è un giovane d'ingegno e molto studioso; anche simpatico personalmente: è per me un piacere di poter fare conversazione matematica con lui sebbene raramente di argomenti geometrici.

Cordiali saluti tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1896d.
[2] Cfr. p. 142, c.p. 135 (27.10.1894).
[3] Le lezioni di geometria superiore che Felix Klein tenne nel 1892 e 1893 furono raccolte da Friedrich Schilling: cfr. Klein 1893.

151.

Bologna 29 Nov[embre] 1894

Carissimo Castelnuovo

Se $|C_1|$, $|C_2|$ sono due sistemi lineari (irredut[tibili] ∞^2 almeno)* sopra un ente algebrico (sup[erficie]): vi saranno in generale dei punti dell'ente base per $|C_2|$ ($A_1^{i_1} \ldots A_k^{i_k}$) e non per $|C_1|$, e dei punti dell'ente $B_1^{\gamma_1} \ldots B_s^{\gamma_s}$) base per $|C_1|$ e non per $|C_2|$: i primi sono i p[un]ti base di $|C_2|$ sulla sup[erficie] immagine dell'ente (semplice o mult[ipla]) che ha per sez[ioni] le C_1 ecc.

Sieno $|K_1|$, $|K_2|$ gli agg[iunti] a $|C_1|$, $|C_2|$ e $|K_{12}|$ l'agg[iunto] a $|C_1 + C_2|$: si ha

$$K_1 + C_2 + A_1 + \ldots + A_k \equiv K_2 + C_1 + B_1 + \ldots + B_s \equiv K_{12}.$$

Questo è l'enunciato generale del teor[ema] funz[ionale].[1]

Il caso più semplice si ha se $|C_1|$ $|C_2|$ hanno gli stessi p[un]ti base sull'ente alg[ebrico]: allora

$$K_1 + C_2 \equiv C_1 + K_2 \equiv K_{12}.$$

Nel tuo caso, (essendo $|C_2| \equiv |K_1|$) mancano i p[un]ti $A_1 \ldots A_k$ ma non forse i p[un]ti $B_1 \ldots B_s$ che hanno per immagini delle rette sulla

* Applicando il teor[ema] solo in un senso basta questa limitazione per $|C_1|$

sup[erficie] che ha per sez[ioni] le C_1: allora è

$$K_1 + C_2 \equiv K_{12} (\equiv K_2 + C_1 + B_1 + \ldots + B_s).$$

Credo che questo risponda alla tua 1ª domanda.

(Sotto altra forma si può dire che per avere $|K_{12}|$ dopo sommati $|K_1|$ e $|C_2|$ bisogna guardare ai p[un]ti base i-pli dell'ente che per $|K_{12}|$ debbono risultare $(i-1)$-pli).

Quanto alla 2ª, vedrai nel mio lavoro[2] che le curve bicanoniche sono segate da ψ_{2n-8} biaggiunte se la F ha solo curva 2-pla, anche se ve n'è una sola. Ciò non segue dal Restsatz ma si ha direttamente.

A proposito, avrò forse posto nel mio lavoro qualcosa che sarà dato anche nel tuo;[3] me lo dirai e potrò toglierlo.

Per la 3ª questione che mi sottoponi, mi pare che debba anche escludersi che la F_{n-2} con O $(n-2)$-plo e ret[ta] mult[ipla] per O abbia dei p[un]ti doppi tacnodali infinitamente vicini ad O; a ciò riuscirai forse facilmente nel tuo caso.

Ieri ho perso la giornata con una questione che può interessare anche a te e mi pare d'aver risoluto affermativamente. Si riteneva sempre che l'ipoagg[iunto] a $|C|$ coincidesse coll'agg[iunto] se $|C|$ ha solo curve fond[amentali] improprie; ma nella dimostrazione si escludevano le curve fond[amentali] ∞ [infinitamente] vic[ine]: credo d'aver stabilito che la cosa vale sempre.

Oggi ho avuto la giornata impiegata con 2 lezioni: domani (giornata libera) andrò avanti, e forse Dom[enica] finirò la parte del sist[ema] agg[iunto] e te la manderò.

Parlerò anche della relazione del teor[ema] di Nöther[4] sulle sup[erficie] agg[iunte] alle curve gobbe col mio teor[ema] funz[ionale]. Per le curve eccez[ionali] ho idea di dare anche una dimostrazione *intuitiva* che si mandano via sulle sup[erficie] di gen[ere] > 0 o con curve bic[anoniche]: quella rigorosa pel caso $p_g = p_n$ la desumerò dal tuo 2° lavoro.

Il Le[vi]-Ci[vita] trovasi a Bol[ogna] per proprio conto venuto a perfezionarsi in analisi presso il P[incherl]e.

Il principio generale di cui ti parlavo, atto a caratterizzare vari tipi di ricerche geom[etriche] che non rientrano immediatamente nell'ordine d'idee di Klein è questo:

Un gruppo di trasf[ormazioni] in un S_n fissa un ordine di proprietà invariantive in quel gruppo: il gruppo risulta poi determinato (inversamente) dalla nozione di tali proprietà: ma se queste proprietà si pongono soltanto in relazione ad enti particolari esse possono essere mantenute comunque le due fig[ure] non sieno uguali in quella Geom[etria] (cioè trasformabili

in una trasf[ormazione] del gruppo). Astraendo dallo spazio e fissando la nozione delle proprietà del gruppo relativamente ad un ente particolare, si ottiene una Geom[etria] di quell'ente.

Un es[empio] ovvio è la Geom[etria] sopra l'ente algebrico. Un altro è dato dalla teoria della applicabilità che è l'uguaglianza metrica di due sup[erficie] prescindendo dallo spazio (loro forma in quello). Un 3° esempio si ha dalla teoria dell'equivalenza: applicato il gruppo dei movimenti alla varietà (∞^∞) dei solidi, l'equivalenza nasce ponendo in relazione la Geom[etria] così posta in quella varietà, al complesso dei solidi infinitesimi.

Vedo che dovrebbe essere possibile una teoria sintetica dei gruppi. Dato un gruppo di trasf[ormazioni] in uno S_n, si può cambiare elemento assumendo come «punto» l'ente di un *corpo* (con riguardo ai sottogruppi eccez[ionali]). Con ciò si ottengono ∞ Geom[etrie] trasformate in varietà a diverso numero di dimensioni. Ognuna di queste Geom[etrie] è una immagine della teoria gruppale (come una C_n di S_r, ossia una g_n^r, dà una immagine d'un ente algebrico). Vi è una Geom[etria] legata invariantivamente alla teoria del gruppo (si direbbe la rappresentazione «canonica» di esso). Si ottiene prendendo come «p[un]ti» di una varietà V le trasformazioni del detto gruppo G. «La Geom[etria] d'una varietà che ha come gruppo principale G è la Geom[etria] di V posta in relazione ad un particolare ente in V».

Facciamone un'applicazione alla questione di Kl[ein] dei gruppi finiti di omografie binarie, che si riducono a quelli dei poliedri regolari. La rappresentazione canonica delle omogr[afie] binarie si ha in S_3, dove nasce un gruppo che muta in sé un fascio di quadriche t[an]g[enti] lungo una conica. Con una trasformazione proiettiva (immaginaria) portando la conica nel cerchio all'infinito delle sfere, si ha il gruppo delle omogr[afie] rappresentato da quello delle rotazioni attorno ad un p[un]to onde ecc.

(Un modo semplice con cui si giunge allo stesso resultato è anche il seg[uente]. Si assuma come immagine della retta una conica; i gruppi in questione sono quelli di omogr[afie] che mutano in sé la conica, ossia sono gruppi di movimenti della Geom[etria] non euclidea, cioè gruppi di rotazioni della stella).

Queste idee che avevo in germe, mi si son venute concrete parlandone col Le[vi]-Ci[vita]. Ti aggiungerò che da quella rappres[entazione] canonica dei gr[uppi] si desumono alcuni teor[emi] di Lie sugli invarianti ed un caso particolare del teor[ema] di Hilbert.[5]

Affettuosi saluti dal tuo

F Enriques

[P.S.] Come vanno le tue pratiche per l'ordinariato?[6]

Pensando a come potrei arrotondare il mio corso di Descr[ittiva] mi è venuto in mente di dare la rappresentaz[ione] ortog[onale] delle sup[erfici]e] *canali* (tubi a circolo generatore di raggio variabile). È facile risolvere su di esse alcuni problemi, e ciò potrebbe darmi materia a suo tempo per un *importante* lavoro ad usum[7] ecc.

[1] Cfr. anche p. 142, c.p. 135 (27.10.1894).
[2] Enriques 1896d.
[3] Cfr. p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).
[4] Cfr. Noether 1875.
[5] Cfr. Hilbert 1890, 474.
[6] Cfr. p. 151, c.p. 149 (23.11.1894).
[7] Enriques allude probabilmente all'opportunità di preparare dei titoli di geometria descrittiva a fini concorsuali.

152.

1 Decembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio moltissimo delle notizie che mi fornisci e dell'interesse che prendi alla mia carriera.

Anche passando sopra alla questione di massima dell'accettare una nomina non giustificata da un concorso (e d'altronde a questo sarei disposto sebbene a malincuore, se è necessario), le cose non andrebbero liscie come credi. Prima di tutto non sta a me il domandare alla Fac[ol]tà di Bol[ogna] una tal cosa, specialmente ricordando il modo come fui chiamato qui: mi fu detto allora che io dovevo considerare l'incarico come precario, non come un impegno a tenermi. Quindi io non potrei fare in questo senso nemmeno un passo indiretto.

In 2° luogo è molto dubbia la decisione che prenderebbe la Fac[ol]tà ove si trattasse di nominare un prof[essor]e: bisogna pensare che essa si è compromessa l'altro anno chiamando il P[ier]i:[1] né mi sorprenderebbe che venisse in campo il progetto di chiamare l'Asch[ieri] da Pavia (il quale pare desiderasse il trasloco).

Certo il momento è grave per me: ma qui a Bol[ogna] non vi è nessuno che possa rendersi conto esatto delle situazioni dei possibili aspiranti ad una cattedra di G[eometria] e quindi riterrei giustizia che la Fac[ol]tà si astenesse sempre dall'iniziativa d'una proposta. E d'altronde ti ripeto né io la chiederei né la riterrei possibile se non intervenisse almeno il fatto della opinione espressa confidenzialmente da qualche persona competente. Ma vedi pure che anche questa è cosa delicata né mi converrebbe sollecitare una tal cosa dal S[egre] o dal Bert[ini] o dal Cr[emona], se pure anche per questa via vi fosse speranza d'un successo.

Conclusione. Io non posso far nulla: né per ora parlerò al P[incherl]e della cosa almeno fino al momento che gli possa dire della cosa di Reina (al quale auguro pieno successo). Posso soltanto desiderare che quando ne capita l'occasione gli amici miei parlino col P[incherl]e o con altri: debbo dunque aspettare con filosofica rassegnazione che giunga (se giungerà) il mio momento.

Il mio lavoro[2] è, nella sua parte essenziale, compiuto: spero mandartene domani il nocciolo (teoria del sist[ema] agg[iunto]) se non perderò troppo tempo nel redigere una lezione sulle cubiche gobbe.

Saluti affettuosi e vivi ringraziamenti

dal tuo
F Enriques

[1] Cfr. p. 39, c.p. 35 (20.11.1893).
[2] Enriques 1896d.

153.

3 Decembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

La giornata di ieri è stata tutta occupata colla teoria delle cubiche gobbe che comincio a spiegare nel corso di Descr[ittiva].

Oggi soltanto ho potuto dare gli ultimi tocchi al manoscritto[1] che ti mando nonostante alcune lacune che vi rimangono ancora: cioè un'*avvertenza* dopo il teor[ema] funz[iona]le[2] che ti manderò; e la fine del § [paragrafo] relativo alle formule di postulazione delle sup[erficie] per le quali debbo consultare il tuo manoscritto:[3] ma ciò non nuoce all'intelligenza del testo. Piuttosto debbo dirti che nella 1ª parte che non ho ancora ritoccata, parlerò di curve e di punti dell'ente algebrico (∞^2): un punto è un punto semplice di una trasformata senza singolarità, e (si ammette) ogni p[un]to semplice d'una superficie (immagine) è un p[un]to dell'ente.

Vedrai quanta chiarezza deriva dall'uso di queste denominazioni. Il contenuto del manoscritto che t'invio è quasi tutto quello che a te occorre: dico «quasi» perché nei pochi fogli che vi aggiungerò ulteriormente parlerò del $p^{(1)}$ virtuale, in modo da dire che per le sup[erficie] raz[ionali] si deve considerare $p^{(1)} = 0$, e da porre la questione inversa annunciando la tua risposta affermativa (se vuoi).

La 1ª parte subirà qualche ritocco ed aggiunta, e per ora non ho bisogno per questo della 2ª: in caso ti domanderei schiarimenti in proposito. Così pure per gli ultimi fogli del lavoro.

Vedi dunque che il lavoro può ormai considerarsi compiuto: la sua mole è passabilmente grossa; mi consolo pensando che molti saranno i fortunati lettori... che non lo leggeranno. Aggiungerò una prefazione e un indice. E faremo anche (se persisti nell'idea) la prefazione comune.

Ricevo ora la tua cartolina e ti ringrazio nuovamente dell'interesse che prendi alla mia carriera.

Qual è l'indirizzo di Brill?

Affettuosissimi saluti dal tuo

F Enriques

[P.S.] Nella revisione del mio lavoro sii spietato.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.
[2] Cfr. p. 152, let. 151 (29.11.1894).
[3] Cfr. p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894) e i lavori di Castelnuovo ivi citati.

154.

[s.d.][1]

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto da Pic[ard] una gentilissima risposta in cui si scusa del ritardo.[2] Egli mi dice che attribuisce interesse al trovare un'interpretazione geom[etrica] dell'esistenza dei suoi integrali di 1ª sp[ecie]. Crede più facile cercare prima il significato delle *espressioni differenziali* di 1ª sp[ecie] (pg. 154 della sua memoria 1889):[3] queste corrispondono all'esistenza di polinomi di dati gradi A, B, C pei quali

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}$$

è div[isibile] per f: forse la diminuzione del numero delle ψ_{n-3} $(p_g - p_n)$ è intimamente legato a queste. Dopo ciò soggiunge:

«J'avais envoyé à M. Castelnuovo une carte pour le remercier de l'analyse si interessante qui'il m'avait envoyé; je crains d'après un mot de votre lettre qui'il ne l'ait pas reçue. Ses travaux et les vôtres m'ont interessé au plus haut point, et j'ai été très heureux d'en avoir un résumé qui m'a été utile pour un article de revue où j'ai eu le plaisir de vous citer».[4]

Mi parla poi dello studio d'un numero ρ da lui considerato[5] «Comptes rendus 13 febbr[aio] 1893» che interessa specialmente per la rappresentazione parametrica delle sup[erficie] con $p_g = 0$ e $p_g = 1$.

Dopo un'altra frase gentile mi dice (in P.S.) «Veuillez, si vous en avez

l'occasion adresser toutes mes amitiés et mes remerciments à M. Castelnuovo. Les énoncés que vous me communiquez sur les intégrales de première espece valent la peine d'être pubbliés; quelques uns ne m'etaient pas inconnus, mais j'avais abbandonné mes recherches dans cette voie. Il y a bien de distinguer d'ailleurs les cas où les intégrales sont distinctes de ceux où il y en a deux ou plusieurs qui sont fonctions les unes des autres».

Appena ricevuta la lettera ti scrivo, non ho quindi avuto il tempo di confrontare la memoria di Pic[ard] e la nota dei Comptes rendus sul numero ρ.

La risposta del Pic[ard] mi fa però l'impressione di essere tale da non far fare un passo avanti alla questione che c'interessava. Nel rispondergli per ringraziarlo gli parlerò delle nuove ricerche sulle sup[erficie] che stiamo facendo: forse anche a te converrebbe di scrivergli direttamente della questione delle sup[erficie] raz[ionali], per evitare la possibilità di qualche incontro (che però mi sembra improbabile) colle sue ricerche sul numero ρ.

In ogni modo abbiam tempo per restar d'accordo, e si può aspettare anche a quando ci vedremo a Firenze.

Affettuosi saluti

dal tuo
F Enriques

[P.S.] È venuta qui la Mamma a farmi una visita; perciò debbo tardare di qualche giorno la lettura del tuo lavoro.[6] Scusami.

[1] Nota di Castelnuovo: «? del 95?».
[2] Cfr. p. 144, c.p. 138 (3.11.94).
[3] Picard 1889.
[4] Cfr. p. 122, nota 6 a let. 107 (13.7.1894) e Picard 1894.
[5] Picard 1893.
[6] Cfr. i lavori di Castelnuovo citati a p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).

155. [c.p.]

[Bologna] 11 Dec[embre 18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho letto il tuo manoscritto[1] e come vuoi posso rimandartelo o dartelo a Firenze. Non ho che poche osservazioni da fare più che altro di forma. In un punto solo, cioè per le sup[erficie] F con p[un]to O $(n-2)$-plo non vedo bene come si rimuova l'obiezione relativa a tacnodi infinitamente vicini ad O, di cui già ti parlai.

Ti ringrazio dell'esame che hai fatto del mio manoscritto,[2] e quante più saranno le critiche tanto meglio riuscirà in fine l'esposizione del lavoro.

Io andrò a Firenze probabilmente Giovedì sera o Ven[erdì] mattina per cui se vuoi scrivermi dopo domani scrivi a Firenze. Qui non c'è modo di prolungare più oltre le lezioni.

Ho risposto al Pic[ard] facendogli cenno del mio nuovo lavoro e incidentalmente del tuo sulle sup[erficie] raz[ionali] aggiungendo «Ma credo che egli si proponga di scrivergliene da sé. Intanto mi prega dei più vivi ringraziamenti ecc.». Gli ho parlato anche del lav[oro] di H[umbert][3] dei Math[ematische] Ann[alen].

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto dei lavori di Castelnuovo citati a p. 112, nota 1 a let. 100 (9.6.1894).
[2] Enriques si riferisce al manoscritto di Enriques 1896d.
[3] Humbert 1894d; cfr. p. 148, c.p. 144 (15.11.1894).

156. [c.p.]

[Firenze] Sabato[1]

Carissimo Castelnuovo

Sono tornato a Firenze ieri sera ed ho trovato qui la tua cartolina. Ti ringrazio nuovamente della revisione del mio lavoro[2] che puoi portarmi quando vieni. Cercherò poi di uniformarmi ai tuoi consigli riguardo alla forma di esso; ma l'argomento stesso è per sua natura di difficile esposizione: quella che tu hai letto è l'ultima edizione d'una serie lunghissima. In questi giorni vorrei finire prima di tutto la redazione di quel lavoro: preparare le lezioni di Descr[ittiva] sulla cubica gobba e le quadriche e di Proiettiva sulle coniche; infine preparare le prime conferenze[3] di G[eometria] Sup[eriore] che inizierò al mio ritorno a Bol[ogna]. Primi argomenti: Iperspazi e loro varie interpretazioni fissando la natura dell'elemento. Applicazioni alla sup[erficie] di Ver[onese], spazio rigato, questione della linearità dei sist[emi] di curve su sup[erficie] alg[ebriche], connessi ed equazioni diff[erenziali] del 1° ord[ine], sistema nullo ed eq[uazione] di Pfaff. Metodo delle proiez[ioni] e sue applicazioni che ti dirò.

Cordiali saluti

Aff.mo
E Enriques

[1] Il timbro di questa cartolina postale non è completamente leggibile: la data dovrebbe essere 15 dicembre 1894.
[2] Enriques 1896d.
[3] Enriques 1894-95c.

157. [c.p.]

Firenze 24 dicembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Alla questione delle curve biaggiunte C_{2n-8} ho ripensato anch'io e mi pare che vada bene il ragionamento che ti facevo qui: vedrò poi quale via sia più semplice da seguire. Ti ringrazio di ciò che mi comunichi intorno alle formule di postulazione, e sono d'accordo con te nel ritenere che non sia un danno una tale ripetizione nei nostri lavori.[1]

Ora sto rivedendo e completando il mio lavoro fin da principio.

L'indirizzo di Pic[ard] ch'io conservo è appunto «Rue de la Sorbonne 2» come ti dicevo: se poi abbia cambiato non so. Se egli (da cui invero non aspetto risposta) o il Noet[her] mi scriveranno ti scriverò subito in proposito. Anche tu tienimi informato della risposta del S[egre].

Ti contraccambio i più affettuosi auguri per te e per la tua famiglia anche a nome dei miei. Ricordami in particolare al tuo Babbo e ricevi una stretta di mano

dal tuo aff.mo
F Enriques

[1] Castelnuovo 1896a; Enriques 1896d.

158. [c.p.]

Firenze 26 dicembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho piacere che il S[egre] abbia ripreso lo studio della questione che ci interessa[1] e si disponga così a contentarci.

Sto lavorando attivamente al lavoro[2] delle sup[erficie] lasciando per ora indietro tutto il resto. Ho cominciato fin da principio; ovunque trovo questioni di nomenclatura da rivedere ciò che mi costringe a perdere assai tempo. In fondo spero che il lavoro ne uscirà assai più chiaro.

Affettuosi saluti dal tuo
F Enriques

[1] Si tratta del problema della risoluzione delle singolarità delle superficie algebriche. In una lettera del 24 dicembre 1894 Corrado Segre scriveva a Castelnuovo: «Ebbi ieri la tua e di Enriques. Vi ho riflettuto; e, come già ne avevo l'intenzione, ho ripreso a pensare all'argomento - che del resto avevo lasciato sospeso da più di un mese! Ecco qua: io spero di potere in questi otto dieci giorni di vacanza che ancora mi rimangono riflettere tanto sui punti più minuti della dimostrazione (che la superficie si può ridurre ad una di S_3 con sola linea doppia ecc.) da acquistare la piena certezza della verità della cosa. Ed allora prenderò, a seconda dei casi, una delle varie risoluzioni che tu saggiamente mi sottoponi: o di darvi da pubblicare un sommario del mio ragionamento, o di pubblicarlo io stesso ecc.

ecc. Insomma in qualche modo spero di soddisfarvi. E se poi (il che spero non accada) incontrassi difficoltà dove non credo di trovarne, t'informerò ugualmente di tutto, affinché voi possiate regolarvi». In Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie* cit., 166.

[2] Enriques 1896d.

159. [c.p.]

[Firenze] 27 dicembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto una cartolina di N[oether]. Dice che, data la lunghezza dei nostri lavori, anche a lui fa più piacere che essi vengano pubblicati negli Ann[ali] di Mat[ematica].[1] Ma gli riuscirà molto gradito il nostro «Bericht»[2] dove desidera che (secondo ciò che gli abbiamo detto) il lettore trovi in breve la parte essenziale del contenuto e dell'andamento dei nostri lavori.

Posso rispondergli che restiamo dunque intesi così e che scriveremo il nostro rapporto in *francese* e glie lo manderemo fra un paio di mesi (dopo iniziata la pubblicazione dei lavori)?

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Castelnuovo 1896a, 1896b; Enriques 1896d. Nel 1895 la Società Italiana delle Scienze assegnò una delle due medaglie d'oro a Castelnuovo. Tra i lavori premiati figurano anche le due memorie sopra indicate. L'articolo di Enriques fu premiato nel 1896 quale migliore memoria dell'anno 1895. Questi articoli, contrariamente a quanto si potrebbe dedurre da questa lettera, furono quindi pubblicati nelle «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)».

[2] Enriques-Castelnuovo 1896.

160. [c.p.]

Firenze 29 dicembre [18]94

Carissimo Castelnuovo

Sto lavorando attivamente al lavoro[1] sulle sup[erficie] e spero che fra 20 o 30 giorni possa esser compiuto del tutto: conterei anzi di compierlo prima se non intervengono ritardi imposti da altre occupazioni. Ho già ritoccata e rifatta in molti punti la 1ª parte. Desidererei anzi, se non t'incomoda che tu rivedessi tutto il manoscritto completo quando sarà pronto.

Il teor[ema] sulle inv[oluzioni][2] è interessante; come lo dimostri?

Ho scritto al N[oether] una cartolina nel senso come siamo rimasti d'accordo. Pare anche a me che pubblicando il Bericht[3] negli Annalen questo potrebbe sostituire la prefazione comune:[4] su questo del resto mi

rimetto in te. In ogni caso è bene che tu vada preparando una tale prefazione che sarà poi il nocciolo del Bericht.

Ti mando le dispense[5] di G[eometria] Pr[oiettiva] del mio corso fino a pg. 72.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1896d.
[2] Cfr. Castelnuovo 1896a, 359.
[3] Enriques-Castelnuovo 1896.
[4] Cfr. p. 157, let. 153 (3.12.1894).
[5] Enriques 1894-95a.

161. [c.p.]

[Firenze] 3 gennaio [18]94[1]

Carissimo Castelnuovo

Ho piacere della proroga accordata dagli Ann[alen][2] che per parte mia ritengo sufficiente.

La 1ª parte del mio lavoro[3] è trasformata e quasi non rimane più niente dell'antica. Portata in principio e rifatta una parte delle considerazioni sulle curve riduttibili: introdotto un §° [paragrafo] sui sist[emi] contenuti parz[ialmente] o tot[almente] in altri in guisa da fissare esplicitamente tutte le convenzioni occorrenti: dopo dato il teor[ema] che un sist[ema] ridutt[ibile] è contenuto in un sist[ema] norm[ale], estendo il concetto e il teor[ema] ai sist[emi] ridut[tibili]. Allora si ha un algoritmo simbolico di somma e di sottraz[ione] da cui segue il Restsatz ecc. Spero che ciò giovi anche alla 2ª parte del lavoro perché si elimineranno tutte le incomode restrizioni di riduttibilità.

Ti consiglierei a non mettere il teor[ema] delle inv[oluzioni] nel tuo lavoro:[4] serbalo a più tardi. Mi pare che con esso possa risolversi la questione di p[ia]ni multipli raz[ionali], vedendo che se uno dei p[ia]ni mult[ipli] con data curva di diramaz[ione] è raz[ionale], tutti lo sono.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] 1895, dal timbro postale.
[2] Il lavoro per il quale Enriques e Castelnuovo avevano ottenuto una proroga dalla redazione dei «Mathematische Annalen», è Enriques-Castelnuovo 1896.
[3] Enriques 1896d.
[4] Cfr. Castelnuovo 1896a, 359.

162. [c.p.]

[Firenze] 4 gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio di quanto hai scritto a Autonne[1] al quale manderò vari dei miei lavori.

La redazione del lavoro sulle sup[erficie][2] mi assorbe ancora tutto il giorno ma dopo domani dovrò sospendere per la preparazione delle lezioni.

Quelle convenzioni preliminari comunque girate costituiranno sempre una cosa insuperabile per il lettore. Eppure non vedo il modo di semplificare! Tanto più perché nella redazione antica introducevo ad ogni passo una diversa convenzione secondo mi occorreva, e bisogna unificare.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] In una lettera del 30 dicembre 1894 Léon Autonne chiese a Castelnuovo di inviargli i suoi scritti sulla teoria delle curve e delle superficie algebriche. Castelnuovo nel rispondergli menzionò anche quelli di Enriques: cfr. le lettere di Autonne riportate in Appendice (pp. 651-52).

[2] Enriques 1896d.

163. [c.p.]

[Firenze] 7 gennaio [18]94[1]

Carissimo Castelnuovo

Ho dovuto sospendere la correzione del lavoro,[2] dove però credo di aver fatto il più, per occuparmi delle lezioni che dovrò fare a Bol[ogna] dove torno domani. Sono proprio affollato d'occupazioni perché per quel lavoro ho trascurato tutto.

Riguardo a quella questione mi sono accorto di aver preso un abbaglio: tuttavia, credo che la questione stessa dovrebbe risolversi usufruendo del tuo teor[ema] sulle sup[erficie] raz[ionali].[3]

Affettuosi saluti in fretta

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Mi son dimenticato l'indirizzo del Fano: mando al tuo indirizzo una cartolina per lui.

[1] 1895, dal timbro postale.

[2] Enriques 1896d.

[3] Cfr. l'affermazione fatta da Enriques in chiusura della c.p. 161 (3.1.1895), p. 162.

164. [c.p.]

[Bologna] 11 gennaio [18]94[1]

Carissimo Castelnuovo

La tua cartolina mi è stata respinta a Firenze essendo giunta prima di me, sicché la ho ricevuta soltanto oggi. Ho molto piacere di ciò che ti ha scritto il N[oether].[2]

Sto lavorando ed ho lavorato nei giorni passati molto attivamente: ho preparato le prime conferenze di G[eometria] Sup[eriore].[3] Vedo che la realizzazione del programma è una utopia per la scarsezza del tempo: se mai (se sarò ancora qui) seguiterò un altr'anno.

Spero fra pochi giorni di tornare al lavoro delle sup[erficie][4] e di compierlo in breve tempo. Ma bisogna che non mi affretti tanto perché mi sento già stanco.

Cordiali saluti

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] 1895, dal timbro postale.

[2] Il 3 gennaio Max Noether aveva scritto a Castelnuovo di essere stupito dalla messe di risultati ottenuti e dalle loro possibili connessioni coi teoremi di Georges Humbert ed esprimeva la speranza che l'annunciato articolo negli «Annali di Matematica» avrebbe fornito nuovi esempi particolari sui quali verificare i teoremi di Castelnuovo e di Humbert. Noether concludeva la sua breve lettera manifestando la convinzione che il futuro avrebbe rivelato la portata di tali ricerche che ora solo pochi matematici sembravano comprendere. La lettera di Noether a Castelnuovo è riportata in Appendice (p. 656).

[3] Enriques 1894-95c.

[4] Enriques 1896d.

165. [c.p.]

[Bologna, 13 gennaio 1895]

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio dell'indirizzo dato ad Autonne (io l'avevo scritto sulla fascia).[1]

Per le conferenze di G[eometria] Sup[eriore][2] ho preparato materia per una 20na [ventina] di giorni sicché ormai non ho più da occuparmi di ciò per ora; ma soltanto delle lezioni del 1° biennio e del lavoro[3] che riprendo oggi stesso.

Con tutto ciò che ho preparato di G[eometria] Sup[eriore] arrivo soltanto all'analisi dei post[ulati] degli iperspazi, donde traggo la persuasione di non arrivare a svolgere che una minima parte di ciò che mi ero proposto. Ho voluto cominciare con riflessioni filosofico-matematiche e collo

sviluppare il concetto della G[cometria] astratta. Farò un'applicazione di questo all'introduzione delle coor[dinate] proiettive di un S_n. Dati i post[ulati] si verifica che i gruppi (omog[enei]) $x_1\ x_2\ \dots\ x_{n+1}$ possono considerarsi come i «punti» di un S_n: basta allora porre l'omografia tra i punti di un dato S_n e quelli dello S_n analitico per avere nel 1° le coordinate. Il metodo è applicabile anche allo S_3. Ti persuade?

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

[1] Cfr. p. 163, c.p. 162 (4.1.1895).
[2] Enriques 1894-95c.
[3] La redazione dell'articolo Enriques 1896d.

166. [c.p.]

[Bologna] 16 Gennaio [18]94[1]

Carissimo Castelnuovo

In seguito ai disordini avvenuti in questi ultimi giorni, di cui avrai letto sui giornali, l'Università è stata chiusa oggi.[2]

È sperabile che gli studi possano ricominciare presto.

Intanto io sono libero di dedicarmi al lavoro[3] delle sup[erficie]. Sto modificando la 2ª parte; anche qui vado rifacendo molto e mutando anche in parte l'ordine.

Vedrò di introdurre a proposito delle sup[erficie] biagg[iunte] quelle considerazioni.

Il S[egre] mi scrisse qualche giorno fa che ti avrebbe mandato una notina contenente la risposta desiderata.[4]

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] 1895, dal timbro postale.
[2] All'origine di questi disordini vi era la richiesta degli studenti di una sessione straordinaria di esami.
[3] Enriques 1896d.
[4] Cfr. p. 160, c.p. 158 (26.12.1894).

167. [c.p.]

[Bologna] 18 Gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho molto piacere di ciò che mi scrivi e ti auguro un pronto successo.[1]

Mandami pure i fogli di cui mi parli. La revisione (o meglio in gran

parte il rifacimento) della 2ª parte del mio lavoro[2] procede un po' lenta, perché spero con una modificazione assai larga di dare a quella teoria un assetto più semplice.

Ho saputo che l'articolo di Pic[ard] è comparso nella Revue générale des Sciences[3] (Décembre), ma non lo ho potuto vedere ed anzi credo che qui non vi sia: non posso assicurarmene perché la biblioteca è chiusa. In ogni modo me lo procurerò. È strano che non ce l'abbia mandato.

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[1] Non ci è stato possibile determinare con precisione a cosa si riferisca Enriques.
[2] Enriques 1896d.
[3] Cfr. Picard 1894 e p. 122, nota 6 a let. 107 (13.7.1894).

168. [c.p.]

[Bologna] 20 Gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto i tuoi fogli: se ti contenti li tengo qualche giorno.

Otterrò delle semplificazioni riducendo la teoria delle curve ipoaggiunte a quel che occorre per le aggiunte.

Domani si riapre l'U[niversità].[1]

Ho potuto vedere l'articolo di Pic[ard]. Dedica a noi l'ultima parte dello scritto che è assai breve. Noi possiamo esserne contenti, ma mi fa l'impressione che egli abbia poco approfondito i lavori italiani, e si sia servito poco della tua relazione. Ad es[empio] dove parla di sup[erficie] con due generi, e dove cita l'H[umbert] per aver osservato un es[empio] di sup[erficie] di gen[eri] 0, -1, che ha $\infty^{\pi-1}$ sup[erficie] ψ_{n-3} (π gen[ere] [delle] sez[ioni] p[ia]ne).[2]

Ho piacere che il Fano si occupi delle sup[erficie] con trasf[ormazioni] p[roiettive] in sé:[3] gli sarò grato se vorrà comunicarmi i resultati che verrà ottenendo.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 165, c.p. 166 (16.1.1895).
[2] Cfr. Picard 1894, 948.
[3] Gino Fano dopo il perfezionamento a Gottinga insegnò dal 1894 al 1899 all'Università di Roma come assistente di Castelnuovo e poi come libero docente. Le sue ricerche sulle equazioni differenziali lineari (cfr. p. 113, c.p. 101, 14.6.1894 e p. 115, c.p. 104, 24.6.1894) lo condussero a studiare i gruppi continui finiti di trasformazioni cremoniane e le superficie e varietà algebriche con gruppi continui di trasformazioni proiettive in sé, incontrandosi dunque con alcune ricerche di Enriques. Cfr. in particolare Fano 1895a-f e le due note 1896a e 1896b presentate nelle adunanze del Circolo di Palermo dell'11 e 25 agosto 1895, rispettivamente.

169. [c.p.]

[Bologna] 23 Gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Non vedo come le semplificazioni che introduco nella teoria delle curve ipoag[giunte] possano interessare il tuo lavoro: se non sbaglio, a te occorre soltanto la parte proiettiva sulle sup[erficie] ipoag[giunte] ed agg[iunte] che resta immutata, e il teor[ema] funz[ionale].[1]

Mi accorgo che il tempo passa, e nonostante che mi dedichi tutto al mio lavoro[2] temo di essere in ritardo di qualche giorno. Me ne dispiace specialmente per te, giacché per gli Annali[3] penso che l'epoca di pubblicazione dei fascicoli non è perfettamente determinata, e ad ogni modo se ne esce uno ogni due mesi, la nostra proroga dovrebbe essere più lunga di un mese. Quando rivedrai il mio manoscritto scritto di nuovo di sana pianta, capirai che il mio ritardo (che spero sarà minimo) non dipende da mala voglia.

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

[1] Cfr. le lettere dell'ottobre e novembre 1894, in particolare quelle del 27 ottobre (n. 135, p. 142) e del 29 novembre (n. 151, p. 152) per l'enunciato del teorema.

[2] Enriques 1896d.

[3] Come si è detto (cfr. p. 161, nota 1 a c.p. 159, 27.12.1894) i lavori di Enriques 1896d e Castelnuovo 1896a e 1896b dovevano inizialmente apparire negli «Annali di Matematica pura ed applicata».

170.

Mercoledì [s.d.][1]

Carissimo Castelnuovo

Chiamo ipoaggiunte ad un sistema lineare $|C|$ (∞^2 almeno) semplice o no, tutte le curve K che segano una C generica in un gruppo canonico. Che le K formino un sistema lineare si dimostra soltanto sotto certe restrizioni per C (che $|C|$ ∞^r non contenga ∞^{r-1} curve spezzate in componenti variabili). In ogni caso fra le K vi sono sempre le *aggiunte* che formano un sistema lineare, e questo sega su C una serie il cui difetto di completezza $\leq p_g - p_n$ (p_g e p_n essendo i 2 generi di F). Ipoaggiunte di rango r a $|C|$ saranno le curve seganti su C un gruppo della serie somma della r-pla di quella caratt[eristica] e di quella canonica (tale è $K + rC$): esse, sono aggiunte (di rango 0) ad $|rC|$, onde come ti accennavo per r alto segano su C la serie completa.

Supponi che ∞^2 curve C sieno segate su F dai piani di una rete; allora le curve K aggiunte a $|C|$ son segate su F da sup[erficie] agg[iunte] aventi in O (i-plo) una molteplicità $i-1$. Per una ipoagg[iunta] si potrà dire la cosa analoga (cioè sarà sezione di una ψ ipoagg[iunta] ad F tranne secondo le rette per O avente O i-plo) purché in un fascio generico di $|C|$ non vi sieno curve spezzate.

Ma partendo dalla considerazione del sistema segato su F dalle ψ_{n-3+r} si vede (collo stesso metodo adoperato pei sistemi semplici) che per r alto le ψ_{n-3+r} segano sopra un piano per O un sistema contentente tutte le curve composte di una C_{n-3} e di una retta r-pla per O, ma come dedurne che questo è il sistema completo delle C_{n-3+r} di quel piano agg[iunto] alla sezione di F?

Ed è a questa difficoltà, se pur si potrà rimediare direttamente, trovo preferibile rispondere coll'altro metodo.

Ho preso e sto prendendo degli appunti sul tuo manoscritto: te ne parlerò a voce: le critiche però si riducono a minuzie.

Mi ricordo che tempo fa trovai la costruzione del sistema aggiunto a $|C|$ (semplice) segante su C la serie can[onica] completa, nell'ipotesi che C avesse la serie caratt[eristica] compl[eta] e su C il sistema canonico segasse la serie completa; ora però non so più ritrovarla. Guarda se ti vien fatto di assegnare siffatta costruzione (che come ti notai in passato) darebbe come corollario del tuo teor[ema] «La condiz[ione] nec[essaria] e suff[iciente] perché una sup[erficie] (a sist[ema] can[onico] semplice) sia regolare è che il sist[ema] canonico abbia la serie caratt[eristica] compl[eta]».

Fissami l'appuntamento per Sabato mattina.

Intanto affettuosi saluti tuo

F Enriques

P.S. Oltre alle curve canoniche e bicanoniche possono esistere sopra una sup[erficie] di gen[ere] geom[etrico] 0 (e probabilmente di gen[ere] num[erico] < 0) altre curve invariantive il cui studio potrebbe presentare interesse. Ecco come si presentano.

Tutti i sistemi $|K|$ aggiunti ai sistemi $|C|$ sopra una sup[erficie] di gen[ere] $p_g > 0$ hanno comune un sistema (il canonico):* ma anche se $p_g = 0$, e cioè $|C|$ non è contenuto in $|K|$, può darsi che tutti i sistemi $|K|$ contengano uno stesso sistema comune: questo si compone in tal caso delle curve d'un fascio, ed esse hanno carattere invariativo per la sup[erficie]. Il caso si presenta sulle rigate, e mi sembra già interessante che l'operazione di aggiunzione conduca anche per queste alle curve invariative: si presenterà in altri casi? Meriterebbe studiare la cosa.

* che è il residuo di $|C|$ rispetto a $|K|$

[1] La datazione di questa lettera è incerta. Lo stesso Castelnuovo vi ha apposto un punto interrogativo. In essa Enriques dà una definizione intrinseca delle curve ipoaggiunte a un sistema lineare di curve su una superficie. La questione è oggetto di alcune lettere del giugno-ottobre 1894: cfr. p. 112, let. 100 (9.6.1894); p. 133, let. 124 (21.9.1894); p. 134, c.p. 125 (25.9.1894); p. 135, c.p. 127 (7.10.1894); p. 136, let. 128 (8.10.1894). Nelle cartoline postali del 20 e 23 gennaio 1895 (n. 168, p. 166, e n. 169, p. 167, rispettivamente) Enriques accenna a «semplificazioni» che avrebbe introdotto nella teoria delle curve ipoaggiunte (che poi si diranno subaggiunte: cfr. p. 198, c.p. 213, 16.6.1895).

171. [c.p.]

[Bologna] 26 Gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Io seguito sempre ad occuparmi delle curve aggiunte: spero domani di condurre a termine questa parte: dopo ciò rivedrò tutto il già scritto e te lo manderò (fra qualche giorno) riserbandomi poi a finire il lavoro[1] che ritengo vada liscio fino in fondo.

Non sarebbe male che tu cominciassi intanto a pensare al nostro «Bericht».[2] Se, come spero, potrò venire un po' con te a Carnevale, lo potremo concretare insieme; ma occorre per ciò una precedente preparazione.

Come vedrai nel mio lavoro ho introdotto l'uso continuo del simbolismo.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Enriques 1896d.
[2] Enriques-Castelnuovo 1896.

172. [c.p.]

Bologna 28 gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Il S[egre] mi scrive che sta redigendo la nota sulle sing[olarità] e che fra 8 o 10 giorni la avrà compiuta. Egli darà a questa nota la forma di lettera da pubblicarsi separatamente nel fascicolo degli Annali perché essa è venuta più lunga di quel che credeva.

Io gli ho scritto che così stando le cose la pubblicazione della sua nota potrà opportunamente precedere nel fasc[icolo] i nostri lavori, tanto più dato il ritardo nella redazione del mio (nuovo incaglio per la preparazione delle lezioni di Descr[ittiva]). Ti persuade?[1]

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] I lavori Enriques 1896d e Castelnuovo 1896a e 1896b dovevano inizialmente essere accompagnati da un articolo di Corrado Segre contenente la dimostrazione della risoluzione delle singolarità per le superficie. Per le difficoltà incontrate nel trattare la questione, l'articolo di Segre apparirà negli «Annali di Matematica pura ed applicata» solo all'inizio del 1897 e conterrà un'analisi delle singolarità delle superficie algebriche ma non la dimostrazione del teorema di risoluzione delle singolarità: cfr. Segre 1897a. A questo proposito si vedano le lettere di Segre a Castelnuovo in Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie* cit.

173. [c.p.]

[Bologna] 30 Gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto ieri la tua cartolina ed oggi una lettera di Fano. Al F[ano] risponderò presto: tu intanto scusami con lui e digli che ho parlato del Cayley e della sup[erficie] di Ver[onese] nella nota dei Math[ematische] Ann[alen].[1] Digli anche che ho molto piacere dei resultati da lui ottenuti.[2]

Per quanto mi dici riguardo alle trasf[ormazioni] bir[azionali] d'una sup[erficie] in sé, forse ti rammenterai che indipendentemente dal sist[ema] can[onico] (che per quelle sup[erficie] non esiste in generale) si costruisce un sist[ema] lin[eare] mutato in sé ove il gruppo che muta in sé la sup[erficie] sia algebrico e la sup[erficie] non possieda integrali di Pic[ard]. Ciò per il teorema di Humbert,[3] col procedimento della mia nota[4] sui gruppi di trasf[ormazioni] cremoniane del piano.

Non mi rispondi a quel che ti dicevo sul cominciare la redazione del «Bericht».[5] Quando ti cominceranno le vacanze[?]

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Cfr. Enriques 1895d, 183, nota 27. Cfr. anche p. 131, c.p. 121 (8.9.1894) e p. 132, let. 122 (12.9.1894).

[2] Cfr. p. 166, nota 3 a c.p. 168 (20.1.1895).

[3] Cfr. Humbert 1893b e 1894c, 195.

[4] Enriques 1893a.

[5] Enriques-Castelnuovo 1896; cfr. p. 169, c.p. 171 (26.1.1895).

174. [c.p.]

[Bologna, 31 gennaio 1895]

Carissimo Castelnuovo

Il ragionamento che mi comunichi è elegante ma mi pare che presenti qualche lacuna.

In 1° luogo io non vedo perché un gruppo di trasf[ormazioni] biraz[ionali] in sé d'una sup[erficie] alg[ebrica] debba essere algebrico o contenuto in un gruppo algebrico,[1] quindi questa sarebbe una restrizione.

In 2° luogo può darsi che il gruppo di proiettività binarie sulle tangenti alla sup[erficie] in un p[un]to fisso (gruppo *aggiunto* secondo una denominazione di Lie estesa dagli S_m alle altre varietà) non sia in isomorfismo [1 m] col dato, cioè che per esempio il gruppo dato sia ∞^4 ed il gruppo aggiunto ∞^1 soltanto (non vedo a priori che si possa escludere questa possibilità): similmente il gruppo potrebbe essere ∞^5 e le trasf[ormazioni] che lascian fermo un p[un]to e una t[an]g[ente] lascian ferma in conseguenza un'altra t[an]g[ente]. Però questo 2° dubbio pensandoci bene si dovrebbe eliminare e resterebbe ad ogni modo il resultato pei gruppi algebrici. Il tuo ragionamento varrebbe poi nel caso d'un gruppo alg[ebrico] ∞^2 ove vi sia una curva alg[ebrica] unita.

Nelle mie conferenze di G[eometria] S[uperiore][2] espressamente limitate per ora, e per me, e perché i giovani sono meno preparati di quel che credevo, non sono ancora giunto a parlare di iperspazi.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] Per gli argomenti qui discussi si veda la breve nota Enriques-Castelnuovo 1895.
[2] Enriques 1894-95c.

175.

31 gennaio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Dopo che ti ho scritto la cartolina rispondente a questioni scientifiche è intervenuto un fatto riguardante una questione personale di cui bisogna che ti scriva subito.

Si tratta di questo.[1] Il Del Re pare che cerchi di essere traslocato qui. Chi me lo ha detto non desidera di essere nominato, potrai però immaginarlo. La fac[oltà], come sai, per due volte ha chiesto il concorso e tanto più ora ch'io tengo l'incarico pel 2° anno non accoglierebbe la proposta di chiamarlo: sono convinto che essa non recederebbe dalla domanda del concorso. Ora si tratta di scongiurare il pericolo di una nomina improvvisa, e di adoprarsi quindi in senso opposto per ottenere l'apertura del concorso. Per questo ho pensato di rivolgermi al Cremona da cui ho avuto varie volte prove di stima: ma invece di farlo direttamente ti pregherei di volertene incaricare tu e di parlargli a nome mio. Potresti dirgli ch'io dubito

che qualcuno cerchi di essere nominato a Bologna: che ciò mi lederebbe immensamente, mentre d'altra parte avrei il più vivo desiderio che si aprisse un concorso e di non dovere seguitare in questa situazione precaria; aggiungi quel che credi più adatto a volgerlo in mio favore: digli anche che ti ho espressamente pregato dell'ambasciata anziché scrivergli direttamente perché con te già si era parlato altre volte della cosa, e di una cosa di questo genere ci si spiega meglio a voce.

Insomma mi raccomando in te, e ti prego del massimo riserbo: non dire nulla a nessuno di quanto ti ho scritto.

Addio in fretta e grazie anticipate

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques si riferisce alla sua posizione accademica a Bologna. Cfr. anche p. 155, let. 152 (1.12.1894). A quest'epoca Enriques ricopriva per incarico la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva lasciata vacante da Domenico Montesano. Dopo alterne vicende, che si chiariranno nel corso della corrispondenza con Castelnuovo del 1895 e 1896, tale cattedra fu messa a concorso ed Enriques nell'ottobre 1896 ne riuscì vincitore.

176. [c.p.]

[Bologna] 1 febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Vedo nella tua cartolina d'oggi che la dimostrazione del fatto che ogni gruppo trascendente di trasf[ormazioni] d'una sup[erficie] in sé è contenuto in un gruppo alg[ebrico]. Mi persuade. E se ne trae che una sup[erficie] senza integrali di Pic[ard] e con un gruppo continuo ∞^r ($r \geq 1$) di trasf[ormazioni] biraz[azionali] in sé è certo razionale. Perché si riconduce ad una sup[erficie] con ∞ trasformazioni proiettive in sé, e questa è raz[ionale] o riferibile a una rigata (o fasc[io] conic[he]) ma in questo 2° caso vi sono integrali di Pic[ard]. La dimostrazione di questo teorema proiettivo è data da me per S_3, ma la dimostrazione si estende subito ad S_n: il caso da me eccepito dei p[unt]i uniti multipli delle omogr[afie] del gruppo viene eliminato dalla semplice osservaz[ione] di Fano. Dopo che il F[ano] avrà pubblicato la sua nota,[1] si potrebbe fare una breve notina[2] collettiva (se vuoi) sull'argomento. Credo che la cosa debba interessare il Pic[ard].

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[P.S.] Non posso ancora fissarti l'epoca della mia venuta collegata a quando si prenderanno le vacanze.

[1] Cfr. p. 166, nota 3 a c.p. 168 (20.1.1895).
[2] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1895.

177. [c.p.]

[Bologna] 2 Febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio prima di tutto di quanto stai facendo per me: è un vero atto di amicizia.[1]

Per quel che riguarda le sup[erficie] con trasf[ormazioni] bir[azionali] in sé, mi pare che il dubbio ch'io ti esponevo possa eliminarsi così. Suppongasi che vi sieno ∞^3 trasf[ormazioni] biraz[azionali] in sé e che quelle (∞^1) che lasciano fermo un p[un]to lascino ferme (sempre) le t[an]g[enti] intorno al p[un]to. Allora se $x\ y$ è il p[un]to, muovendolo sulla sup[erficie] in guisa da assumere la posizione $(x + dx,\ y + dy)$ il detto gruppo ∞^1 che lascia fermo $x\ y$ è identico con quello che lascia fermo $(x + dx\ \ y + dy)$; quindi lascia fermo $(x + 2dx\ \ y + 2dy)$ ecc.: segue che ogni p[un]to della sup[erficie] sta fermo (assurdo). Forse questo ragionamento cui tu pure pensavi permette anche di eliminare a priori l'isomorfismo meriedrico tra il gruppo aggiunto e quello che lascia fermo un p[un]to?

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques allude all'interessamento di Castelnuovo per la sua posizione accademica: cfr. p. 172, nota 1 a let. 175 (31.1.1895).

178.

3 Febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio nuovamente moltissimo di ciò che hai fatto per me. Il caso è più serio di quel che credi perché la Fac[ol]tà non si piegherebbe mai a propormi per lo straordinariato: ho tratto questa convinzione da conversazioni (velate) avute con qualcuno. In questo modo di pensare della Fac[ol]tà mi pare che entri in gran parte un puntiglio di fronte al M[inistr]o, ed anche il giusto desiderio di non accettare una massima e non creare un precedente dannoso. Intanto *l'altro* potrebbe lavorare per vie parlamentari ed ottenere la nomina senz'altro.[1]

In queste condizioni, almeno ora, il presentare una domanda di nomina alla Fac[ol]tà mi esporrebbe ad uno scacco sicuro. Invece la Fac[ol]tà sarebbe probabilmente ben disposta ad appoggiare una mia domanda pel concorso. Ove il Cr[emona] volesse appoggiarmi presso il M[inistr]o potrei così ottenere almeno lo *statu quo* finché non intervenga un cambiamento alla Minerva.[2] Almeno il M[inistr]o potrebbe decidersi a rimettere nella fac[ol]tà la nomina

d'uno straordinario e la fac[ol]tà potrebbe provvedere a questa nomina con un concorso fatto per conto proprio. Questa soluzione non urtando contro la famosa interpretazione della legge Casati (che scrupoli dopo 20 anni!) potrebbe essere accolta dal M[inistr]o e darebbe adito ad una soluzione onorevole, togliendo il M[inistr]o stesso da un imbarazzo.

Io vorrei che tu persuadessi il Cr[emona] che (quantunque a malincuore) seguirei il suo consiglio se credessi che ciò potesse approdare a qualchecosa: avendo la convinzione opposta (almeno per ora) come posso farlo? Guarda dunque se senza dispiacere al Cr[emona] si può persuaderlo che (anche se inutile) mi conviene in questo momento fare io stesso la domanda del concorso; il Cr[emona] potrebbe almeno pregare il M[inistr]o che in ogni caso non si dimenticasse di me nominando altri; e potrebbe forse anche indurlo a rimettere nella fac[ol]tà la nomina come ho detto prima. Nello stato attuale delle cose bisogna che almeno cerchi di mantenere lo statu quo.

Del resto venendo a Roma parlerò io stesso col Cr[emona]. Intanto ti pregherei di rispondergli quanto ti ho detto, ringraziandolo vivamente per parte mia, e facendo in modo che egli non si urtasse della mia domanda pel concorso contro il suo consiglio. Esponigli francamente la situazione.

Scusa se ricorro nuovamente alla tua amicizia.

Per ora non vedo altro da fare. Avrei voluto indurre qualcuno della Fac[ol]tà a consigliarsi con Bert[ini] o con S[egre], ma non ci sono riuscito.

Affettuosissimi saluti

tuo

F Enriques

[P.S.] Per far comprendere meglio al Cr[emona] l'avversione che la fac[ol]tà troverebbe ad una proposta sarebbe forse il caso di ricordargli la proposta fatta inizialmente del P[ier]i,[3] non accolta dal M[inistr]o?

Sono giunto col mio lavoro[4] alle formule di postulaz[ione]; trovo che non mi hai mandato il relativo foglio tra gli altri come credevo. Gli altri tuoi fogli li ho visti ma se non hai fretta li tengo ancora per qualche giorno. Tutto va bene: vi è soltanto l'uso dei simboli su cui dobbiamo metterci d'accordo: pel sist[ema] agg[iunto] a $|C|$ io avevo adottato il $|C_a|$ che è una notazione spiccata. Il $|C'|$ mi capita molte volte a designare un altro sist[ema] e mi genererebbe confusione. Non uso mai la notazione $|C| + |C| = |2C|$ ma $|C + C| = |2C|$. Infine nella definizione delle curve bicanoniche definite come curve di $|C_{2a} - C|$ o di $|2C_a - 2C|$ occorre aggiungere «spogliate di punti componenti fisse».

Il mio lavoro procede ormai più liscio verso la fine.

[1] Enriques allude all'eventualità che Alfonso Del Re potesse richiedere al ministro la nomina sulla cattedra di Bologna. In effetti, secondo l'articolo 69 della Legge Casati, a cui si accenna nei passi successivi della lettera, «il Ministro potrà proporre al Re per la nomina, prescindendo da ogni concorso, le persone che per opere, per iscoperte, o per insegnamenti dati, saranno venute in meritata fama di singolare perizia nelle materie cui dovrebbero professare». Questo articolo verrà ripreso come articolo 20 della Legge 1861 e articolo 24 del Testo Unico approvato con Regio Decreto il 9 agosto 1910. Per il testo della Legge Casati e successive modifiche, cfr. B. Amante, *Il regolamento universitario*, Roma 1912, 169-208.

[2] Così era familiarmente chiamato il Ministero dell'Istruzione Pubblica, dal nome del palazzo dove aveva sede.

[3] Cfr. p. 39, nota 2 a c.p. 35 (20.11.1893).

[4] Enriques 1896d.

179.

4 Febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho parlato coi matematici della Fac[ol]tà: tutti mi consigliano a chiedere il concorso. Con piacere però ho constatato che le disposizioni verso di me sono migliori di quel che credevo; tantoché dopo espletata ogni altra via, se la scelta fosse rimessa dal M[inistr]o alla Fac[ol]tà, o se io stesso mi decidessi allora a chiedere la nomina, troverei, almeno presso qualcuno, accoglienza non ostile.

Una volta persuaso il Cr[emona] della necessità ch'io chieda il concorso, e ottenuto da lui che si conservi almeno lo statu quo, si potrà pensare dopo la risposta del M[inistr]o a risolvere diversamente la questione: preferibilmente ottenendo che almeno il M[inistr]o lasci fare il concorso alla Fac[ol]tà, o promuovendo da questa un esame di titoli per parte di una commissione.

Intanto l'impressione ricavata dagli ultimi colloqui è buona. Il P[incherl]e mi ha detto (te lo ripeto confidenzialmente): «Io sono per il concorso e Lei faccia ora la domanda in questo senso: se al dunque non potrà ottenersi, sono per lo statu quo per ora, e dopo 3 anni d'incarico Lei potrebbe esser fatto straordinario: in ogni caso una domanda sua in questo senso ora potrebbe sembrar prematura, ma una tale domanda dopo espletate le altre vie (e alla fin dell'anno) potrebbe avere l'appoggio mio e credo anche degli altri matematici». Ed Arz[elà] mi ha detto «Io sono sempre stato e sono per il concorso: è anche nel suo interesse perché anche se non riuscirà Lei se ne caverà con onore: se non si potrà ottenerlo io sono per lo statu quo indefinito: se però fossi costretto a scegliere preferirei Lei che ormai ha fatto buona prova».

Questo è il succo dei discorsi tenuti.

Ti terrò informato di quanto accadrà. Io mi propongo intanto di presentare la domanda pel concorso.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

180. [c.p.]

[Bologna] 5 Febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

È proprio vero: l'esempio del gruppo delle omotetie nel piano distrugge il nostro ragionamento: è strano però! Scrivimi come hai pensato di puntellare nonostante ciò la tua dimostrazione.[1]

Quanto alle notazioni del sist[ema] agg[iunto] nei nostri lavori,[2] se saranno diverse pazienza: adotterei la tua se già non avessi usato troppe volte i simboli $|C|$ $|C'|$ ecc. a denotare sistemi diversi e se evitando ciò non dovessi introdurre troppe lettere a denotare i sist[emi] lin[eari]. Ma penso che l'inconveniente pel lettore sarà piccolo.

Avrai ricevuto la mia lettera di ieri che risponde in parte anche alla tua d'oggi. Null'altro di nuovo. Se hai occasione di scrivere al S[egre] e vuoi informarlo della cosa (in confidenza) fai pure.[3]

Affettuosissimi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Scusa tutte le noie che ti ho dato.

[1] Cfr. p. 172, c.p. 176 (1.2.1895).

[2] Cfr. p. 174, P.S. a let. 178 (3.2.1895).

[3] Con ogni evidenza Enriques allude alle vicende legate alla propria posizione accademica: cfr. p. 172, nota 1 a let. 175 (31.1.1895) e p. 175, nota 1 a let. 178 (3.2.1895).

181. [c.p.]

[Bologna] 6 Febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho letto nella tua lettera la dimostrazione di quel fatto, e mi persuade.

Quanto al noto affare, io sono passato qui da tutti: non temo il pericolo di cui mi parli per varie ragioni; prima di tutto perché mancano i posti di O[rdinario].

Affettuosi saluti. tuo

F Enriques

[P.S.] Anche il mio ragionamento sulle sup[erficie] con ∞^1 trasf[ormazioni] in sé pare si estenda a varietà alg[ebriche] più volte infinite, estendendo il teor[ema] di H[umbert].[1]

[1] Cfr. p. 170, c.p. 173 (30.1.1895). Per l'estensione del teorema di Humbert si veda Enriques-Castelnuovo 1906a, 234.

182. [c.p.]

[Bologna] 7 Febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Farò dunque la nota domanda.[1] Ti ringrazio nuovamente di ciò che hai fatto per me.

Macc.[2] sta in via Arienti 28: l'ho ringraziato a nome tuo.

Se leggi quella notina sulle coniche dimmi che te ne pare.

In questi giorni sono stato affollato per le lezioni sicché il mio lavoro[3] non è andato avanti. Per fortuna Sab[ato] siamo lesti o quasi.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Ti terrò informato di quando andrò a Fir[enze] e a suo tempo di quando verrò a Roma.

Come mai il F[ano] si occupa ora della mem[oria] di Pic[ard]?[4] non mi dicesti che si occupava di quelle cose sulle equaz[ioni] diff[erenziali]?[5]

[1] Si tratta della richiesta al ministro di mettere a concorso la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva che Enriques ricopriva per incarico: cfr. in particolare p. 175, let. 179 (4.2.1895).

[2] Si tratta probabilmente di Eugenio Maccaferri, assistente di Enriques.

[3] Enriques 1896d.

[4] Picard 1889.

[5] Cfr. p. 166, nota 3 a c.p. 168 (20.1.1895).

183. [c.p.]

Firenze 13 febbraio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho saputo della chiusura della Università di Roma.[1] Anche tu hai dovuto sospendere le lezioni? E in questo caso cosa farai? Temo che tu mi abbia scritto ieri a Bologna e che la tua cartolina si sia incrociata colla mia venuta qui.

Ho ricevuto dal S[egre] (cui ho raccontato la nota cosa)[2] un'affettuosa

cartolina: egli mi offre di scrivere al P[incherl]e per esporgli il suo pensiero. Accetto molto volentieri, anzi ciò previene il mio desiderio. Giacché, nonostante le buone parole, non so quanto potrei contare sull'appoggio della Fac[ol]tà al momento decisivo.

Cordiali saluti Aff.mo

F Enriques

[1] Cfr. p. 165, c.p. 166 (16.1.1895). A seguito dei disordini studenteschi, alcune università furono chiuse e a Napoli il rettore decise di annullare l'anno accademico. La chiusura dell'Università di Roma, cui si riferisce Enriques, fu causata dalle manifestazioni di protesta degli studenti romani in solidarietà con gli studenti napoletani.

[2] Enriques allude alle proprie vicende accademiche: cfr. in particolare p. 176, c.p. 180 (5.2.1895).

184. [c.p.]

[Firenze] Venerdì [15 febbraio 1895]

Carissimo Castelnuovo

In seguito alle tue cartoline ricevute ieri e oggi mi sono deciso ad anticipare la mia venuta e, salvo casi imprevisti, arriverò a Roma Domenica sera alle 11,50. Conto di andare al Massimo d'Azeglio. Così non fare il complimento di star levato Domenica sera; potremo vederci lì il Lunedì mattina.

Sto scrivendo l'ultimo §° [paragrafo] del mio lavoro:[1] poi mi occorrerà ancora una revisione generale. Porterò con me il manoscritto insieme ai tuoi fogli.

Credo di aver visto che il sistema bicanonico sega sulla curva can[onica] gen[erica] una serie il cui difetto è $p_g - p_a$ (non $<$); vale a dire che il bigenere vale $P = p_a + p^{(1)}$.

Vorrei far seguire il lavoro da una tabella di esempi, specialmente strani. Alcuni ne ho anche dei tuoi: ma intanto tu fammi una raccolta di quelli che possiedi. Sup[erficie] su cui non vale il teor[ema] di Noether $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$, ecc. Esistono sup[erficie] prive di curve bicanoniche ma con curve r-canoniche? Credo che in ogni caso tutti i caratteri a cui esse conducono si esprimeranno per p_g, p_a, $p^{(1)}$; dove il $p^{(1)}$ è quello virtuale ch'io definisco per tutti i casi in cui vi sono curve bi-canoniche (o r-can[oniche]). Prendendo come immag[ine] d'una rigata una rigata non speciale il teor[ema] fond[amentale] dà subito per essa $p_a = -\pi$ (π gen[ere] rig[ata]).

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Ho mandato al Burkhardt.[2]

[1] Enriques 1896d.

[2] Nella lettera non è precisato che cosa.

185.

Giovedì 28 [febbraio[1] 18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho piacere di essere tornato qui essendo quasi tutti i miei influenzati o sulla via di influenzarsi, sebbene si tratti d'un male di nessuna importanza.

Ho fatto i calcoli relativi al $p^{(1)}$ e al $p^{(2)}$; mi è costato un po' di fatica impiantarli, ma finalmente sono venuti e tornan bene come era da aspettarsi. Invece non trovo più il modo di stabilire che le curve bicanoniche sono $p_n + p^{(1)}$ e dubito di avere sbagliato. Poco male!

Pensando durante il viaggio alle equazioni differenziali lineari mi è venuta in mente la questione di trovare tutte quelle d'ordine n integrabili con sole quadrature, o con sole quadrature riducibili ad una equazione di Riccati[2] ecc. Queste questioni che a priori non sembrano aver legame con quelle del Fano[3] possono forse essere legate ad esse a posteriori almeno in molti casi, perché in molti casi si trovano relazioni algebriche fra gli integrali.

La risoluzione delle dette questioni non sembra difficile. Guarda p[er] e[sempio] come si procede nella 1ª questione per $n = 4$.

Cerco i gruppi integrabili di omografie in S_3: questa ricerca equivale all'altra. Ora i gruppi integrabili sono (secondo Lie?) i gruppi ∞^n aventi un sottogruppo eccezionale ∞^{n-1}nel quale è contenuto un sottogruppo eccezionale ∞^{n-2} ecc. ... ∞^1.

Diciamo *completo* un gruppo definito da un certo numero di luoghi uniti (mutati in sé ma non di p[un]ti uniti). Pare che sussista il lemma «Un gruppo integrabile incompleto è sempre contenuto in un gruppo completo pure integrabile».

Partiamo da un gruppo ∞^1 che debba esser l'ultimo sottogruppo d'una catena di sottogruppi eccezionali d'un gruppo integrabile: il gruppo integrabile completo dovrà essere il gruppo completo in cui è contenuto quello ∞^1. Vi è però una difficoltà relativa ai p[un]ti uniti multipli.

Nel caso generale un gruppo ∞^1 di omografie con p[un]ti uniti distinti è contenuto in un gruppo completo (∞^3) d'omografie permutabili (abeliano e quindi integrabile). Se vi è un p[un]to unito doppio si va ad un gruppo ∞^4 (completo) che è integrabile ecc.

In generale (per gli S_n) vi sono nella memoria di Predella[4] gli elementi per esaurire la questione.

Nel mio lavoro dell'Ist[ituto] Ven[eto][5] sono determinati i gruppi (integrabili) che lasciano invariato un sottogruppo ∞^2, ma vi sono delle restrizioni per questi.

Quanto alla 2ª questione dell'equazione di Riccati, si è direttamente condotti a superficie (razionali) mutate in sé e ci si riattacca quindi alle ricerche di Fano.

Quando queste saranno pubblicate spero di esser più libero e di potermi quindi occupare delle questioni dette innanzi, le quali mi sembrano avere un certo interesse.

Il concetto di gruppo *completo* non è nuovo per me e credo che ci si possa limitare per le equazioni differenziali a questi gruppi, ché (sotto qualche restrizione forse) ci si riduce sempre al caso di tali gruppi mediante quadrature.

Anch'io rammarico immensamente le deliziose giornate passate insieme a Napoli.

Ho scritto al S[egre] pregandolo di mandare a te il suo lavoro.[6]

Salutami Fano e Reina, Ancona, Luzzatti e prendi una stretta di mano affettuosa

dal tuo
F Enriques

[P.S.] Ho piacere che tu entri in corrispondenza con H[umbert]. Andrò a Bologna Domenica sera.

[1] L'indicazione del mese è congetturale. Castelnuovo ha apposto sulla lettera in suo luogo un punto interrogativo.

[2] I risultati di queste ricerche furono pubblicati in Enriques 1896b.

[3] Cfr. p. 166, nota 3 a c.p. 168 (20.1.1895).

[4] Predella 1892.

[5] Enriques 1893g e 1894a.

[6] Enriques si riferisce alla nota sulle singolarità, alla quale Segre stava lavorando. Cfr. p. 169, c.p. 172 (28.1.1895).

186. [c.p.]

[Firenze] 3 Marzo [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto la tua cartolina e ti ringrazio della tua premura per la salute dei Miei, i quali uno dopo l'altro si sono presi tutti l'influenza ad eccezione del Babbo e di me; stamani è venuta alla mia sorellina piccina. Per fortuna si tratta soltanto di un paio di giorni di febbre per ciascuno, ma è sempre una gran noia.

Stasera vado a Bologna dove già prevedo di essere affollato di occupazioni, essendo rimasto indietro colle lezioni, e dovendo svolgere la *nuova* e *difficile* teoria della rappresentazione dei poliedri.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

187. [c.p.]

[Bologna] Domenica 9 marzo[1] [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti mando il manoscritto[2] salvo l'ultimo §° [paragrafo] per cui ho bisogno del tuo teor[ema] sulla non singolarità del sistema agg[iunto][3] e salvo l'introduzione che sto facendo. Intanto metto da parte i pochi esempi noti di sup[erficie] con $p_g > p_n$.

Mancano qua e là delle citazioni a piè di p[a]g[ina] alcune delle quali rappresentano dei dubbi, tantoché dove senza fatica ti venga in mente chi vada citato ti sarò grato se vorrai appuntarlo.

Del resto penso che ormai non conviene affrettarsi troppo e che forse in seguito alle tue osservazioni mi converrà modificare nuovamente qualche punto del manoscritto. Tanto il Br[ioschi] non si è ancora fatto vivo e c'è sempre la risorsa di mandare intanto il lavoro di S[egre].[4]

Vedo che anche i francesi si occupano di quella questione sugli integrali che pare dunque non facile anche per loro.[5] Mando a H[umbert] gli ultimi miei lavori (i primi glieli ho mandati già).

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[P.S.] Appena scritta l'introduzione te la manderò.

[1] 10 marzo, dal timbro postale. Il 9 era sabato.

[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.

[3] Cfr. Castelnuovo 1896b, 317-18. Cfr. inoltre p. 146, let. 141 (8.11.1894) per la definizione di «sistema non singolare», ossia sistema «privo di curve fondamentali proprie».

[4] Francesco Brioschi era direttore degli «Annali di Matematica pura ed applicata», dove dovevano apparire i lavori di Enriques, Castelnuovo e Segre; cfr. p. 169, c.p. 172 (28.1.1895). Segre era allora convinto di aver completato la dimostrazione del teorema di risoluzione delle singolarità delle superficie algebriche, come aveva scritto a Castelnuovo in una lettera del 9 febbraio 1895. Cfr. Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie* cit., 167.

[5] A questo proposito si veda la lettera di Georges Humbert a Castelnuovo del 6 marzo 1895 riportata in Appendice (pp. 654-55).

188. [c.p.]

[Bologna] Mercoledì 13 marzo [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho fatto uno schizzo dell'introduz[ione] al mio lavoro[1] sulle sup[erficie] che riesce assai lunga stante la difficoltà di far capire al lettore lo spirito delle questioni di cui si tratta.

Quanto alla questione della trasformabilità d'una sup[erficie] in una senza curve eccez[ionali] (da basarsi su ciò che mi comunichi circa la non sing[olarità] di $|C_a|$ per $p_g = p_n > 0$) penso che anziché dedicargli un ultimo §° [paragrafo], essa possa trovar posto in una nota nel cap[itolo] dei sistemi completi.[2] Ciò mi risparmierebbe anche i dettagli della dimostrazione.

Affettuosissimi saluti

tuo

F Enriques

[1] Enriques 1896d.

[2] Cfr. Enriques 1896d, 305-10: l'appendice di questa memoria contiene i due paragrafi «Superficie senza curve eccezionali» e «Sistemi lineari completi rispetto al genere».

189. [c.p.]

[Bologna] 14 marzo [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho molto piacere di ciò che mi scrivi e me ne congratulo con te.[1] Quanto al dare i tuoi manoscritti[2] alla Soc[ietà] credo anch'io non ti convenga, ma in caso non ti tenere legato per cagion mia.

Quando hai occasione di parlare della cosa col Cr[emona] ringrazialo anche da parte mia per ciò che mi riguarda; e se quest'altro anno non vi sia altri che aspiri a quel premio, ben volentieri potrò concorrere (ad es[empio] coll'attuale lavoro).[3]

I corsi mi assorbono tanto che ancora non ho potuto terminare l'introduzione al mio lavoro.

Credo di averti detto che ho spedito ad H[umbert] i miei ultimi lavori, ma per ora non ho avuto risposta.

Cordiali saluti

tuo aff.mo

F Enriques

[1] Enriques allude alla possibilità che a Castelnuovo venisse conferita una medaglia della Società Italiana delle Scienze (cfr. a questo proposito p. 161, nota 1 a c. p. 159, 27.12.1894). Il contenuto della lettera si chiarisce leggendo quanto Luigi Cremona aveva scritto a Castelnuovo il giorno precedente:

[Roma] 13 marzo 1895

Caro Prof. Castelnuovo

Ci sono due premi (medaglie d'oro del valore di £ 400 l'una) disponibili per parte di questa Società Italiana, a favore delle migliori memorie (o gruppi di memorie) matematiche pubblicate dopo il 1889 o inedite (e in quest'ultimo caso da presentarsi manoscritte e da stamparsi poi nei volumi sociali).

Ella potrebbe aspirare a una di tali medaglie. Ci pensi e si decida presto. Potrebbe p[er] e[sempio] dare alla Società i lavori che mi disse avantieri d'avere pronti e che la Società stamperebbe in breve tempo.
Voglia parlare di ciò anche all'Enriques il quale potrebbe aspirare a medaglie analoghe prossime future - giacché ce n'è una disponibile ogni anno.

Suo aff.
L. Cremona

La seconda medaglia, a cui si accenna nella lettera, fu assegnata a Carlo Somigliana.

[2] Enriques allude ai manoscritti di Castelnuovo 1896a, 1896b.
[3] Enriques 1896d.

190. [c.p.]

[Bologna] 16 marzo [18]95

Carissimo Castelnuovo

Date le insistenze del Cr[emona] e la gentile offerta che egli ti fa, credo tu non possa rifiutargli i tuoi lavori per gli Atti della Società dei XL. In conseguenza per non staccare i nostri lavori[1] darò anch'io il mio manoscritto ai medesimi atti (se il Cr[emona] è disposto ad accettarlo): bisognerebbe anche avvertirne S[egre] se egli pure vuol seguire la nostra sorte.[2]

Le memorie della Società dei XL vengono pubblicate in edizioni molto belle, sicché io non rammarico affatto il cambiamento. Guarda però di parlarne col Br[ioschi][3] affinché non se ne abbia a male.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Castelnuovo 1896a, 1896b ed Enriques 1896d; cfr. p. 161, nota 1 a c.p. 159 (27.12.1894).
[2] Cfr. p. 170, nota 1 a c.p. 172 (28.1.1895).
[3] Cfr. p. 181, nota 4 a c.p. 187 (9.3.1895).

191. [c.p.]

[Bologna, 19 marzo 1895]

Carissimo Castelnuovo

Scusa se tardo a risponderti. Ho ricevuto il manoscritto.[1] Sono a letto con una leggera influenza.

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto dell'articolo Enriques 1896d con le osservazioni di Castelnuovo, come si chiarirà nel seguito.

192. [c.p.]

[Bologna] 22 marzo [18]95

Carissimo Castelnuovo

Due righe per darti mie notizie. Sono sempre a letto sebbene la febbre sia andata sempre decrescendo nei giorni scorsi. Ma oggi soltanto (fin ora almeno) ne sono del tutto libero. Spero che questa seccatura sia presto finita. Intanto mi sento molto debole e credo dovrò aspettare qualche giorno per rimettermi a lavorare.

Mi dispiace di ciò che ti scrive il S[egre], ma spero che tutto si accomodi.[1]

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Enriques si riferisce a una lettera del 18 marzo 1895 in cui Corrado Segre aveva scritto a Castelnuovo: «Riguardo alla mia nota, mi è accaduto, presso al termine della redazione definitiva, di accorgermi di una svista di una certa gravità che avevo commessa! Spero di ripararla: ma con le occupazioni del corso, non potrò farlo tanto presto. Sicché non aspettatemi più voi due!» In Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie* cit., 168.

193. [c.p.]

[Bologna] 27 marzo [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho cominciato a levarmi dopo una settimana di letto, ma sono sempre molto debole. Stante un po' di catarro bronchiale eredità dell'influenza il medico mi proibisce di ricominciare le lezioni e, viste le prossime vacanze, mi consiglia di affrettare la mia andata a Firenze. Rassegnandomi agli ordini del mio *tiranno*, partirò probabilmente domani.

Cordiali saluti tuo aff.mo

F Enriques

194. [c.p.]

[Firenze] 28 marzo [18]95

Carissimo Castelnuovo

Due righe per farti sapere che sono venuto a Firenze. Non sono ancora rimesso del tutto dell'influenza che mi ha lasciato una gran debolezza.

Mi rincresce di non poterti vedere qui se vai direttamente a Padova: potresti invece fermarti qualche giorno al ritorno?

Affettuosi saluti dal tuo

F Enriques

195. [c. p.]

[Firenze] 1 Aprile [1895]

Carissimo Castelnuovo

Non ti meravigliare della mia indolenza: sebbene possa dirmi ormai rimesso dell'influenza, mi è rimasta addosso una gran debolezza, e come conseguenza una noiosissima inerzia. Così non ho ancora ricominciato a far niente. Eppure il lavoro non mi manca.

Ti fermerai a Firenze al tuo ritorno da Venezia?

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

196. [c. p.]

[Firenze] 5 aprile [18]95

Carissimo Castelnuovo

Per quanto mi hai detto questa cartolina ti troverà sempre a Roma. La mia indolenza continua; il residuo dell'influenza si riduce ormai a questo.

Ho ripreso la 1ª parte del mio manoscritto ed ho esaminato le critiche assai minute che mi hai fatto: te ne ringrazio moltissimo, e sto pensando al modo migliore di uniformarmi ai tuoi consigli, ciò che non è sempre facile. Manderò in fondo il §° [paragrafo] dei sist[emi] completi e la parte del Restsatz che vi si collega.[1]

Se ti facesse comodo di avere la mia prefazione (di cui ho preparato uno schizzo) potrei condurre a temine intanto quella.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Ricevo in questo momento una tua cartolina. Mi trattengo qui fino al 22.

[1] Cfr. Enriques 1896d, cap. 2.

197.

9 aprile [18]95

Carissimo Castelnuovo

Come puoi immaginarti anch'io provai fin da principio una certa repugnanza ad adottare una convenzione per la quale non sono equivalenti le due relazioni

$$|C' + C''| = |C|, \quad |C - C'| = |C''|.$$

Ma se mi sono deciso ad adottarla è perché tutto valutato mi pare che questa convenzione presenti minori inconvenienti di quella opposta. Tu vedi ora gli inconvenienti di quella differenza di valore dei due simboli, ma io credo che fattaci l'abitudine ciò non presenti più inconvenienti: d'altronde c'è un modo semplice per evitare ogni confusione ed è di fare uso del simbolo + soltanto e mai del −: ma il simbolo − (lo staccamento di una curva di $|C'|$ da un sistema) occorre in altri punti ed occorre ivi anche di prescindere dai p[un]ti base di $|C'|$ perché si vuole l'irreduttibilità del sistema residuo; bisognerebbe allora inventare un altro simbolo.

Quando riavrò la 2ª parte del manoscritto[1] guarderò meglio in quali punti la convenzione fatta è dannosa e dove il toglierla produrrebbe una complicazione. Nota anche ch'io considero sistemi di curve aventi come componenti fisse dei punti base; la presenza di questi punti fissi diminuisce la molteplicità dei punti base; ma la presenza di p[un]ti fissi non base dovrebbe considerarsi come l'esistenza di punti base di molteplicità negativa.

Ho piacere che tu ti fermi a Firenze al ritorno per Roma.

Quali progetti hai sui nostri teoremi relativi alle sup[erficie] con trasformazioni in sé.[2] Le comunicazioni di Pic[ard][3] di cui mi hai fatto cenno li rende impubblicabili?

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.

[2] Cfr. Castelnuovo-Enriques 1895 e p. 170, c.p. 173 (30.1.1895) e seguenti.

[3] A questo proposito si veda la lettera di Emile Picard a Castelnuovo del 22 marzo 1895 riportata in Appendice (p. 660).

198. [c.p.]

[Firenze] Sabato 13 aprile [18]95

Carissimo Castelnuovo

Mi dispiace della ragione che mette in dubbio la tua fermata qui: spero, ad ogni modo, si tratti di cosa lieve. Aspetto notizia delle tue decisioni definitive.

Quando avrò il manoscritto[1] (2ª parte) esaminerò meglio la questione della nota convenzione, e vedrò di contentarti. Non vi è fretta che tu mi spedisca il manoscritto: puoi tenerlo finché non sei arrivato fino in fondo.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.

199.

[s.d.][1]

Carissimo Castelnuovo

Mi dispiace della causa che ti trattiene a Venezia.

Sono a Firenze, come ti ho scritto ieri. Quando dovrò andare a Bologna non lo so ancora; certo però dopo il 15. Intanto mandami il manoscritto[2] e procurerò di leggerlo prima della tua venuta.

Per semplificare il mio lavoro, ed evitare le critiche minuziose dei cultori di singolarità superiori, ho idea di prendere da Kobb[3] la trasformabilità d'una sup[erficie] in una *senza singolarità* in un iperspazio: tanto mi occorreva di mandar via i p[un]ti multipli isolati. Siccome poi tu mi dici che il S[egre] solleva dubbi sui risultati di Kobb, così ho scritto a lui per domandargli se (forse anche in base agli studi di lui medesimo)[4] si è autorizzati a servirsi di quel resultato. In caso contrario occorrerà che lo assuma come ipotesi restrittiva? Che cosa te ne pare? cioè daresti molta importanza ad evitare la 2ª restrizione (occorre certo la 1ª per p[un]ti mult[ipli] isolati)?

Ed ora guarda un po' se va bene ciò che ti dico.

Sia F una sup[erficie] senza p[un]ti mult[ipli] in S_r, e sia $|C|$ il sistema normale determinato dalle sue sezioni. Sia $|C'|$ un sistema (irreduttibile ∞^2 almeno) su F. Considero $|C + C'|$; in esso un sistema ∞^3 (generico) contenente una rete di curve spezzate in una C' fissa ed in una C e lo faccio segare dai piani di S_3 su F'. La F' ha un p[un]to mult[iplo] O corrispondente a C': per O passano i rette corrispondenti agli i punti base del sistema ∞^3 su C' (posso supporle tutte semplici, o almeno che si raggruppino a k a k in $\frac{i}{k}$ rette k-ple *distinte* di F'?).

Inoltre per O si possono avere (forse) delle altre rette multiple: una a di tali rette rappresenta una curva fondamentale per $|C|$, quindi un p[un]to o gruppo di p[un]ti su F base per $|C + C'|$ e ugualmente per $|C'|$. Ora consideriamo su F un punto base A per $|C'|$ nel quale sono riuniti più p[un]ti base infinitamente vicini: io dico che ad un tal p[un]to corrisponde su F' una retta a multipla (per O) con sopra (forse) dei p[un]ti multipli per F', e che la molteplicità di a è ρ se nel p[un]to A le C' (o le $C + C'$) hanno ρ t[an]g[enti] variabili: dico insomma che se A è più che ρ-plo per le C' ad es[empio] $(\lambda + \rho)$-plo e vi è un p[un]to λ-plo ∞ [infinitamente] vicino ad A per le C', a questo corrisponde un p[un]to multiplo su a: in definitiva quindi la F' viene *a possedere soltanto rette* (*semplici o mult[iple]*) distinte per O. È giusto?

Credo di poter stabilire per ogni sup[erficie] di gen[ere] geom[etrico]

> 0 la trasformabilità in una senza curve eccezionali (trasformate di p[un]ti): come è chiaro il fatto che ognuna delle curve di un gruppo possa trasformarsi in un p[un]to non porta che tutte simultaneamente possan trasformarsi in p[un]ti.

Affettuosi saluti dal tuo
F Enriques

[1] Dal contenuto e dal contesto della corrispondenza la data di questa lettera potrebbe essere 14 aprile 1895.
[2] Enriques si riferisce alla seconda parte del manoscritto di Enriques 1896d.
[3] Cfr. Kobb 1892.
[4] Cfr. in particolare p. 170, nota 1 a c.p. 172 (28.1.1895).

200.

16 aprile [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho piacere che tua Nonna stia meglio, e faccio assegnamento di vederti qui nelle vacanze elettorali.[1]

Ho ricevuto il manoscritto[2] e ti ringrazio dell'esame minuto che ne hai fatto. Debbo ora orizzontarmi di nuovo in tutto quel labirinto per procedere alle opportune correzioni.

Secondo la mia definizione l'ente algebrico relativo ad una rigata non è una curva, come tu mi scrivi: i *punti* dell'ente algebrico sono non solo le *rette* della rigata ma anche tutti i punti di essa. Così nel caso del «piano» sono «punti dell'ente algebrico» tutti i punti del piano e tutte le curve razionali trasformabili in p[un]ti. Il concetto di un tale ente algebrico appare repugnante se si vuol pensare l'ente stesso come «*una* superficie» ma esso deve essere pensato invece come una classe di superficie. Il parlare dell'ente come di una superficie è una finzione, ma finzione legittima quando di ogni punto dell'ente si parli in modo isolato. Questo è il fondamento delle considerazioni su cui si basa il teor[ema] fond[amentale][3] che (come noti tu stesso) vale anche nei casi che vorresti farmi escludere.

L'altro giorno[4] mi è venuto fatto di accorgermi occasionalmente di una proprietà delle omografie con p[un]ti uniti multipli: non so se sia nuova. La proprietà è questa. Se in S_n si ha un omografia con un punto ρ-plo O (per cui non passa una retta di p[un]ti uniti) e si considera lo $S_{\rho-1}$ fondamentale ad esso appartenente (determinato dai ρ p[un]ti uniti infinitamente vicini), vi sono in S_ρ $\infty^{\rho-1}$ curve razionali normali (passanti pei detti ρ p[un]ti) ciascuna mutata in sé dall'omografia.

Da questa circostanza si desume il modo con cui può essere successivamente ampliato un gruppo ∞^1 d'omografie in S_n, costruendo un gruppo

∞^2 che lo contenga eccezionalmente, uno ∞^3 che contenga eccezionalmente quello ∞^2 ecc. Si ottengono così tutti i gruppi ∞^n integrabili. Ciascuno di questi è un sottogruppo di un gruppo integrabile che ha:

1) $r \geq 1$ (e $\leq n+1$) punti uniti fissi $A_1 \dots A_r$

2) per ciascuno A_i di questi un certo S_{r_i} unito ($i \geq 0$) dove sono r_i curve unite passanti per A_i (rette, coniche, ... curve razionali normali). $\left(\sum_1^r r_i = n+1-r\right)$.

Per conseguenza si possono determinare in 1° luogo r integrali moltiplicativi. Noti questi si possono ottenere (in ∞ modi) altri $n-r+1$ integrali costituenti coi primi un sistema fondamentale, ciascuno mediante due quadrature. Invero i punti d'una curva razionale unita per A_i si possono far dipendere razionalmente da un parametro z (funz[ione] di x) che per un giro nel piano complesso di x subisca una sostituzione della forma $\alpha z + \beta$. Allora $z'(x)$ è una funz[ione] moltiplicativa e però $\frac{z'}{z^n} = \varphi(x)$ (φ funz[ione] raz[ionale]) $z = \int e^{\int \varphi dx} dx$.

Cordiali saluti

aff.mo
F. Enriques

[1] Il 16 maggio 1895 si svolsero le elezioni politiche: dopo le elezioni, primo ministro del nuovo governo fu ancora Antonio Starabba di Rudinì.

[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.

[3] Cfr. Enriques 1896d, § 27, 271.

[4] A proposito di quanto segue si veda p. 179, let. 185 (28.2.1895).

201. [c.p.]

[Firenze] 20 aprile [18]95

Carissimo Castelnuovo

Due righe per avvertirti che domani torno a Bologna.

Procedo nella revisione del lavoro.[1] Ho adottato in via di prova il tuo suggerimento circa la nota convenzione:[2] ciò mi costringe a modificare vari punti: in seguito potrò giudicare meglio della convenienza dell'una o dell'altra redazione.

L'esistenza delle $\infty^{\rho-1}$ curve razionali mutate in sé da un'omografia con un p[un]to unito ρ-plo in S_ρ, non è evidente, ma si può stabilire con metodo ricorrente.

Tanti saluti al Fano.

Una stretta di mano

dal tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1896d.

[2] Cfr. p. 185, let. 197 (9.4.1895).

202. [c.p.]

[Bologna] 3 Maggio 1895

Carissimo Castelnuovo

Mi rallegro di cuore con te per la meritata onorificenza che ti è conferita: a quel che mi dici si tratta ancora di cosa che va tenuta segreta, quando sarà resa pubblica?[1]

Trovo giusta anch'io l'osservazione del Cr[emona]: quando hai occasione di vederlo digli pure che ne terrò conto quanto potrò in questo lavoro,[2] e più ancora nel seguito.

Sono occupatissimo per le lezioni che mi tocca condensare per causa delle probabili elezioni.[3]

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[1] L'allusione è al conferimento della medaglia della Società Italiana delle Scienze. Cfr. p. 182, c.p. 189 (14.3.1895). La commissione istituita a tal fine era composta da Francesco Brioschi, Luigi Cremona ed Eugenio Beltrami. La delibera ufficiale porta la data del 16 giugno 1895: cfr. «Mem. Soc. Ital. Sci. XL», 10 (1896), XXII-XXV.

[2] Enriques 1896d.

[3] Cfr. p. 189, nota 1 a let. 200 (16.4.1895).

203. [c.p.]

[Bologna] 7 maggio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Non mi pare il caso di fare due note intorno al teorema delle singolarità: per parte mia potrei riferirmi alla nota che porrai nel tuo lavoro, ma se invece preferisci che essa comparisca nel mio è lo stesso.[1] Potremmo anche tornare al concetto di domandare al S[egre] se egli vuole che essa figuri sotto forma di una breve lettera a noi rivolta.

Ho potuto oggi riprendere il lavoro,[2] interrotto nei giorni passati e spero non sopravvengano altri incagli. Ho dovuto svolgere nel corso di D[escrittiv]a gli elementi della Geom[etria] diff[erenziale] intuitiva (asintotiche, linee di curvatura, geodetiche).

Ti rimanderò a giorni il trattato di D[escrittiv]a.[3]

Aff.mo
F Enriques

[1] Si tratta della nota sul teorema di risoluzione delle singolarità delle superficie algebriche: in Enriques 1896d, 222, nota 10 si rinvia a Castelnuovo 1896a, 339, nota **.

[2] Enriques 1896d.

[3] Potrebbe trattarsi di Wiener 1884-87, che Castelnuovo aveva inviato a Enriques diversi mesi prima. Cfr. p. 140, let. 132 (20.10.1894).

204. [c. p.]

[Bologna, 14 maggio 1895]

Carissimo Castelnuovo

Ti spedisco, con ringraziamenti e scuse, il trattato di G[eometria] Descrittiva. Spero mandarti a giorni il lavoro[1] completo (compresa l'introduzione cui ho un po' pensato) salvo la nota degli esempi di cui potremo parlare a Firenze: e se va, potrai passarlo al Cr[emona].

È partito il Levi-Civita. Prima che partisse gli ho spiegato minutamente il piano delle mie ricerche sulle equazioni differenziali[2] ed egli mi ha fatto notare come un suo teorema agevoli l'intento. La cosa sembra ormai concretata, anche dopo la relazione che egli mi ha dato del lavoro di Vessiot.[3] Ti scriverò presto dettagliatamente.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Enriques 1896d.
[2] Cfr. p. 180, let. 185 (28.2.1895).
[3] Vessiot 1892.

205.

Mercoledì [s.d][1]

Carissimo Castelnuovo

Nel tuo lavoro che stai scrivendo[2] dimostrerai ***in ogni caso*** che sopra una sup[erficie] di generi p_g, p_n, il difetto di completezza della serie caratt[eristica] d'un sistema normale è $\leq p_g - p_n$?

Se questo è si potrà anche assumere come definizione della differenza $p_g - p_n$ il *massimo* difetto di completezza della serie caratt[eristica] dei sistemi normali su F.

Effettivamente che questo massimo sia raggiunto si può provare così.

Consideriamo le sup[erficie] agg[iunte] ad F di ordine tanto alto da segare la serie completa sopra una sezione piana di F: se π, n, r sono i caratteri del sistema $|K|$ da esse segato su F si ha allora

$$\pi - 1 - n + r = p_n.$$

D'altra parte sia δ il difetto di completezza della serie caratt[eristica] di $|K|$, ω il difetto di complet[ezza] della serie segata su una K dal sistema cononico; si avrà (teor[ema] di R[iemann] R[och])

$$\pi - 1 - n + r + \delta = p_g + \omega,$$

da cui

$$\delta = p_g - p_n + \omega, \qquad \delta \geq p_g - p_n.$$

Io credo che debba aversi qui $\omega = 0$ ma non mi riesce di stabilirlo (seguirebbe dal tuo teorema).

Un corollario è il seguente (inverso di un caso particolare del tuo teor[ema]):

Se sopra una sup[erficie] F ogni sistema lineare normale ha la serie caratt[eristica] completa, F ha $p_g = p_n$.

Credo anche un'altra cosa (ma disgraziatamente il ragionamento che la dimostrerebbe presenta una lacuna), cioè che: «Se su F un sistema $|C|$ è contenuto in un altro $|K|$, il difetto di completezza λ della serie caratt[eristica] di $|C|$ è $\leq$ di quello analogo δ per $|K|$».

Sia $|K| = |C + C'|$ segato dagli iperpiani di S_r. Una sez[ione] K ha un difetto di normalità δ: *supponiamo* che questo si mantenga per la curva spezzata $C + C'$, allora se k e k' sono i dif[etti] di norm[alità] di C, C', e θ è la differenza tra la dimensione dello spazio comune a C, C' e quella dello spazio individuato dal gruppo di p[un]ti CC', si ha

$$\delta = k + k' + \theta$$

e proiettando da C'

$$\lambda = k + \theta \leq \delta$$ c.d.d.

Cosa ne dici? e ti pare che quella *supposizione* sia giusta?

Sabato, se non sopravviene nulla di nuovo torno a Firenze: ci sarò pel tuo passaggio che spero vorrai anticipare a fine di stare insieme qualche giorno di più.

Affettuosi saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Castelnuovo segna in luogo della data un punto interrogativo. Dal contenuto della lettera e dal contesto della corrispondenza la data potrebbe essere: mercoledì 15 maggio 1895.

[2] Enriques si riferisce alla stesura dell'articolo Castelnuovo 1896a, in cui il teorema in questione sarà solo enunciato.

206. [c.p.]

[Bologna] Domenica [19 maggio 1895]

Carissimo Castelnuovo

Sono nuovamente occupato colle lezioni fino a Martedì. Mercoledì andrò a Firenze e credo non dovrò tornare che per gli esami. E tu quando verrai a Firenze?

Non ho ancora potuto completare il manoscritto[1] appunto per le occu-

pazioni di cui ti ho parlato. Quanto ai gruppi integrabili d'omografie pare che il Lie[2] li abbia determinati tutti. Se e quanto rimanga di nuovo nelle mie ricerche ti saprò dire quando avrò avuto tempo di esaminare la cosa.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Ti prego di ringraziare il Fano a mio nome per l'invio delle sue note.[3]

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.
[2] Cfr. Lie 1895b.
[3] Cfr. p. 166, nota 3 a c.p. 168 (20.1.1895).

207. [c.p.]

[Firenze] 23 maggio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Sono venuto a Firenze ieri sera ed ho ricevuto stamani la tua cartolina.

Mi dispiacerebbe molto perdere la tua visita di cui già mi facevo un piacere: ma non ci rinunzio ancora. Mi immagino che le vostre vacanze, per quanto brevi, comprenderanno da una Domenica all'altra: in quanto alle litografie che devi preparare,[1] non puoi farlo anche qui?

Guarda dunque se puoi non rimettere la tua venuta e scrivimi in proposito le tue risoluzioni definitive.

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 88, nota 7 a let. 74 (5.4.1894).

208. [c.p.]

[Firenze] 28 maggio [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho rinunziato con dispiacere a vederti ora, rimettendo la cosa alla fine di Giugno, epoca in cui sarò quasi certo a Firenze.

Sono stato ieri ed ieri l'altro a Pisa a compiere il mio dovere di elettore[1] deponendo nell'urna... una scheda bianca. Ho visto Bert[ini], Bi[anchi] e Volt[erra].

Il Bert[ini] si è dimostrato dispiacente che la dimostrazione del S[egre] relativa alle sing[olarità] non riesca completa: dubita possa esservi un caso

d'eccezione al teorema.[2] Ho cercato di convincerlo dell'opposto; ma egli è molto più scettico di me.

Cordiali saluti aff.mo

F Enriques

[1] Cfr. p. 189, nota 1 a let. 200 (16.4.1895).
[2] Cfr. p. 184, c.p. 192 (22.3.1895).

209.

Venerdì 30 maggio [18]95[1]

Carissimo Castelnuovo

Dopo aver finito la revisione del lavoro[2] ho scritto l'introduzione che è venuta terribilmente lunga: sebbene in qualche punto si potrebbe forse scorciare non mi pare che essa potrebbe ridursi fondamentalmente più breve senza perdere lo scopo di far capire al lettore qualche cosa. Te la mando e ne giudicherai.

Ma non ti mando ancora il lavoro (a meno che tu non voglia intanto la 1ª parte) perché mi è venuto in mente di aggiungere un §° [paragrafo] sulle rigate dove si mostrerebbe come il procedimento di costruzione delle superficie aggiunte (ad una d'ord[ine] n) riesca da $n-2$ in su. Si verrebbe così a completare assai bene la teoria delle curve aggiunte: in particolare apparirebbe che mancano sulle rigate curve aggiunte alle sezioni piane, e quindi che il genere numerico di una rigata di genere p è $-p$. Tutto questo esige però che ci si pensi un pochino. Io parto dal fatto che se sopra una rigata vi è un sistema di curve ρ secanti le generatrici ($\rho > 1$), le curve aggiunte sono $(\rho - 2)$ secanti.[3]

Quando riceverai le bozze del tuo 1° lavoro[4] mandamene una copia, e così facciamo anche in seguito per lo scambio delle citazioni.

L'altro giorno a Pisa il Bianchi mi ha parlato di una questione che a lui interessa e di cui discorremmo pure insieme in passato: si tratta della determinazione dei gruppi finiti di omografie nello spazio (nel piano pare la questione sia risoluta da Jordan). Ripensandoci mi è venuto in mente un modo di abbordare la cosa.

Le omografie di S_3 si possono riguardare come trasformazioni proiettive in sé stessa della quadrica di S_5, rappresentativa dello spazio rigato: i gruppi di omografie sono dunque gruppi di movimenti nella Geometria non-euclidea di S_5, od anche gruppi di movimenti nella stella dello S_6 euclideo: segando questa stella con una sfera, si dovrebbero dunque ottenere in corrispondenza ai gruppi finiti di omografie in S_3 i poliedri regolari di S_6; e questi non par difficile costruirli.

Io tornerò a Bologna verso l'8 o il 10 di Giugno: anche i miei esami finiranno in una diecina di giorni, dopo il 15. Ci vedremo dunque il 27 qui.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

PS Tengo sempre gli appunti delle lezioni di S[egre][5] prestatimi dal Fano; ti prego di scusarmi con lui e domandargli se posso ancora tenerli finché non abbia ultimato di redigere le ultime litografie delle mie conferenze[6] di cui il litografo ha sospeso la pubblicazione per ragione d'esami. Salutalo pure a mio nome.

[1] Il 30 maggio 1895 era in realtà giovedì.
[2] Enriques 1896d.
[3] Cfr. Enriques 1896d, § 32.
[4] Castelnuovo 1896a.
[5] I quaderni di appunti delle lezioni di Geometria superiore di Segre sono conservati nella biblioteca «G. Peano» dell'Università di Torino. Un loro elenco e una breve descrizione si trova in A. Terracini, *I quaderni di Corrado Segre*, in *Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, Roma 1951, 252-62.
[6] Enriques 1894-95c.

210.

4 Giugno [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho tardato a rimandarti le bozze[1] per completare il mio manoscritto,[2] perché i §[i] [paragrafi] aggiunti hanno spostato la numerazione. Ora ti mando tutto: mancano del mio manoscritto le ultime p[a]g[ine] (4 o 5) costituenti l'«Appendice» ove si parla di «superficie senza curve eccezionali» e di «sistemi completi».[3] Ma per dare a queste la forma definitiva ho bisogno del tuo 2° lavoro dove tu mi hai detto di porre in una nota il lemma[4] che «sopra una superficie in cui $p_g = p_n$ il sistema aggiunto ad un sistema privo di curve fond[amentali] proprie è pure privo di curve fond[amentali] proprie». Infatti a me preme nell'Appendice di delimitare il caso di trasformabilità d'una sup[erficie] in una senza curve eccezionali, ed accennare le semplificazioni che si hanno in questo caso facendo soltanto un cenno dei sistemi completi.

Del resto per quello che a te può occorrere il contenuto dell'Appendice è indifferente. All'infuori di ciò il manoscritto ha forma definitiva: vi è solo qualche piccolezza da modificare qua e là che mi serbo per le bozze. Se anche a te sembra che tutto vada bene puoi dare il manoscritto al

Cr[emona].[5] Vedrai che ho introdotto in vari punti larghe modificazioni secondo i tuoi consigli.

Ho letto le tue bozze apponendovi le citazioni richieste.

La nota sulle singolarità della superficie sta bene ma mi pare fuor di posto.[6]

Quando riassumi dapprincipio quelle cose sulle sup[erficie] ipoaggiunte e le aggiunte potresti cominciare dal dire (nel testo) che si suppone quella ipotesi (invariantiva) sulle singolarità, ma non limitazioni proiettive.[7] Qui sarebbe il caso di fare spiccare la distinzione tra sup[erficie] ipoagg[iunte] ed agg[iunte] notando come si possono definire queste ultime in *tutti* i casi. A questo proposito deve esistere anche una notina di Noether che si occupa di definire le sup[erficie] agg[iunte] nel caso di sing[olarità] superiori: sai dove si trovi?[8]

In fretta, affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Guarda di farti dare doppia copia delle 2[e] bozze del tuo lavoro: probabilmente mi mancano in qualche punto delle citazioni ad esso relative.

Avendo fatto tardi per impostare riceverai il manoscritto e bozze doman l'altro.

[1] Si tratta delle bozze di Castelnuovo 1896a.

[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896d.

[3] Cfr. p. 182, nota 2 a c.p. 188 (13.3.1895).

[4] Cfr. Castelnuovo 1896b, § 5, 317-18.

[5] Cfr. la lettera di Luigi Cremona riportata a p. 182, nota 1 a c.p. 189 (14.3.1895).

[6] Cfr. Castelnuovo 1896a, 339, nota **.

[7] Cfr. Castelnuovo 1896b, 309, nota **.

[8] I contributi di Max Noether allo studio dei punti singolari delle superficie algebriche si trovano negli articoli: Noether 1871a, 1887, 1888 e 1889; cfr. in particolare Noether 1871a. In questi lavori, tuttavia, Noether considera solo singolarità ordinarie.

211.

6 Giugno [18]95

Carissimo Castelnuovo

La serie caratteristica del sistema canonico non è sempre completa. Anzi son riuscito a colmare la lacuna nella dimostrazione del fatto che «Se la serie caratteristica $g_{p^{(1)}-1}^{p-2}$ del sistema canonico (irreduttibile, semplice) d'una sup[erficie] è completa, la superficie è regolare ($p_g = p_n$)». Prendiamo come immagine della superficie una $F^{p^{(1)}-1}$ proiezione in S_3 (da p[un]ti

esterni) della superficie canonica. Dico che la $F^{p^{(1)}-1}$ non ha punti multipli *isolati* che influiscano nella determinazione delle curve aggiunte alle sezioni piane.

Invero le curve aggiunte di rango r $|C_{ra}|$ su $F^{p^{(1)}-1}$ formano il sistema (normale) determinato dalle sezioni delle sup[erficie] d'ordine $r+1$ il quale proiettivamente considerato non ha punti base su $F^{p^{(1)}-1}$. Consideriamo invece il sistema ipoaggiunto di rango r su $F^{p^{(1)}-1}$: se questo fosse più ampio, se ne dedurrebbe il primo imponendo alle curve di esso di passare un certo numero di volte per punti multipli isolati di $F^{p^{(1)}-1}$, e quindi $|C_{ra}|$ possederebbe dei punti base su $F^{p^{(1)}-1}$.

Segue appunto che $|C_{ra}|$ è insieme il sistema ipoag[giunto] ed agg[iunto] su $F^{p^{(1)}-1}$.

Ciò premesso costruiamo in S_3 una proiezione da punti semplici della superficie canonica $F^{p^{(1)}-p+3}$: si tratta di costruire il sistema ipoaggiunto = [uguale all']aggiunto su di essa, e dimostrare che esso sega la serie completa su una sezione piana della superficie.

La sezione piana della superficie ammette ∞^{p-3} curve aggiunte d'ordine $n-4=p^{(1)}-p-1$ (n = ord[ine] sup[erficie]), e vi è un sistema ∞^{p-1} di φ_{n-4} agg[iunte] che sega tale sistema di curve sul piano.

Le curve agg[iunte] d'ord[ine] $n-3=p^{(1)}-p$ alla sezione piana di F, sono $\infty^{p^{(1)}-1}$: sopra una retta del piano esse segano una serie (per ogni gruppo della quale passano ∞^{p-1} curve siffatte, quindi) avente la dimensione $p^{(1)}-1-(p-1)=p^{(1)}-p$: esse segano dunque sopra una retta la serie completa $g^{p^{(1)}-p}_{p^{(1)}-p}$.

Ciò posto si prenda una retta generica r e in un piano per essa una curva d'ord[ine] $n-3=p^{(1)}-p$ agg[iunta] alla sezione di F: in ogni piano per r si scelga una curva agg[iunta] d'ord[ine] $n-3$ passante per gli stessi punti fissati su r, e toccante inoltre $p-1$ piani scelti per $p-1$ di quei punti $p^{(1)}-p$ punti ($p^{(1)}-p>p-1$). Con ciò si genera una $\varphi_{p^{(1)}-p}=\varphi_{n-3}$ agg[iunta] ad F, giacché mai in un piano per r la curva d'ord[ine] $n-3$ considerata può spezzarsi in r ed in una curva d'ord[ine] $n-4$, se si sono scelti i $p-1$ punti su r in guisa da non appartenere ad una delle ∞^{p-1} φ_{n-4}, il che è possibile.

Segue ecc. Come vedi il procedimento qui usato è simile a quello con cui tu costruisci il sistema agg[iunto] ad un sistema a serie caratt[eristica] compl[eta] e non spec[ializzata]: anzi è una estensione di quello.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

212. [c.p.]

[Bologna, 14 giugno 1895]

Carissimo Castelnuovo

Ho capito l'errore che facevo supponendo che la g^{n-3}_{n-3} non potesse decrescere di dimensione.

Quanto al lemma[1] che il sistema agg[iunto] ad uno $|C|$ senza curve fond[amentali] proprie è pure tale, posso enunciarlo nel mio lavoro[2] come mi proponi.

Guarda se la superficie F^5 con 3 tacnodi non debba per avventura contenere sempre le rette congiungenti i tacnodi due a due.

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 195, let. 210 (4.6.1895) e nota 4.
[2] Enriques 1896d.

213. [c.p.]

[Bologna, 16 giugno 1895]

Carissimo Castelnuovo

Io non trovo che il Cr[emona] abbia torto di preoccuparsi un po' del nostro ibridismo linguistico: è un fatto che il Cr[emona], il Betti e gli altri classici se ne preoccupano di più.

Quanto all'«irreduttibile» e «irreducibile» sono indifferente: vada per la 2ª locuzione.

Non mi piace l'agg[ettivo] «iperpiano» anziché «iperplanare».

Accetto il «subaggiunto» anziché «ipoaggiunto» sebbene con gran noia nella correzione delle bozze.

La *completezza* è ormai un vocabolo necessario: mi piace la locuzione «deficienza» in un luogo di «difetto di completezza» o «scompletezza» che anche il S[egre] aveva criticato.

Sto compiendo l'«Appendice»[1] che ti manderò presto insieme ad una nota «Sulle sup[erficie] a curve canoniche iperellittiche» contenente il resultato che già sai.[2]

Il Cr[emona] ha letto il mio manoscritto e lo approva per la stampa?

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Si tratta dell'Appendice a Enriques 1896d; cfr. p. 182, nota 2 a c.p. 188 (13.3.1895).
[2] Enriques 1896c; cfr. p. 108, c.p. 95 (17.5.1894).

214. [c.p.]

[Bologna, 18 giugno 1895]

Carissimo Castelnuovo

Mi dispiace della difficoltà sorta che ti costringe a limitare la parte essenziale del tuo lavoro al caso $p_g = p_n$. Questo è in ogni modo il caso più importante. Se non sbaglio la disuguaglianza *massimo defic[ienza]* $\leq p_g - p_n$ si desume dall'esempio del sistema aggiunto di rango r a $|C|$ per r assai elevato: questo ti conviene forse di conservarlo.[1] E più tardi, con comodo, potrai occuparti della determinazione di quel massimo; tanto più che converrà esaminare anche il caso di spezzamento del sistema canonico, caso in cui manca il significato di ε.

Appunto per la difficoltà proveniente da tale spezzamento io mi trovo arenato nella ricostruzione del teorema che una sup[erficie] per cui $p_g = p_n = 1$ contiene un sistema ∞^π ecc., ammesso $p^{(1)} = 0$. Volevo porlo nella mia Appendice,[2] ma finirò per lasciar da parte la questione per ora.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] A questo proposito in Castelnuovo 1896a, 338, nota * si legge: «Si può dire di più: $p_g - p_n$ è precisamente il valore massimo raggiunto dalla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare sulla superficie. Esporrò prossimamente la dimostrazione di questo teorema, alla quale pervenni troppo tardi per inserirla qui. (Ottobre 1895)». Per la dimostrazione del teorema cfr. Castelnuovo 1897a.

[2] Si tratta dell'Appendice di Enriques 1896d.

215. [c.p.]

[Bologna, 20 giugno 1895]

Carissimo Castelnuovo

Limitando il tuo teor[ema][1] che dà $p_g = p_n$ al caso d'un sistema $|C|$ senza curve fond[amentali] proprie eviterai il più grande scoglio del tuo lavoro. Ma la restrizione si può poi togliere almeno nel caso di curve fond[amentali] distinte nel seg[uente] modo. Supponi che $|C|$ abbia *una* curva fond[amentale] θ. Staccandola da $|C|$ una volta si ha una diminuzione nel genere di $|C|$ valutabile dati genere e valenza di θ: ma dati questi caratteri si può anche valutare quante intersezioni variabili ha θ colle C_a, e vedere quindi che lo stacco di θ da $|C_a|$ che dà $|C_a - \theta| = |(C - \theta)_a|$ assorbe tante condizioni (al più) che $|(C - \theta)_a|$ sega sulla curva generica di $|C - \theta|$ la serie completa, onde ecc.

Questa via, qui abbozzata, mi sembra debba condurre ad una dimostrazio-

ne generale del tuo teor[ema]: forse occorrerà però una dimensione assai alta del sistema di partenza in confronto al numero delle curve fond[amentali].

Sono assorbito dagli esami. Conto di esser lesto il 26 e di poter venire a Firenze pel 27.

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. Castelnuovo 1896a, § 6, 351-52.

216. [c.p.]

[Bologna] 22 Giugno [18]95

Carissimo Castelnuovo

Fatto un primo tentativo inutile mi proponevo di rivolgermi ad un'altra persona per procurarti le informazioni richieste in quell'affare: dopo la tua cartolina d'oggi, cesso le ricerche.[1]

Sono stanco e annoiato dagli esami. Ho finito quelli di G[eometria] Pr[oiettiva]. Lunedì comincerò quelli di G[eometria] Descr[ittiva].

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] Non ci è stato possibile stabilire a cosa si riferisca Enriques.

217. [c.p.]

[Bologna] 26 giugno [18]95

Carissimo Castelnuovo

Torno a Firenze domani col lampo.[1] Secondo ciò che mi scrivesti tu arriveresti Venerdì 28. Scrivimi a Firenze fissandomi un appuntamento al tuo arrivo.

Cordiali saluti

Aff.mo
F Enriques

[1] Intendi: treno rapido.

Lettera di Castelnuovo a Enriques

Venezia 14 luglio [18]95

Carissimo Enriques

Ho ricevuto anch'io la Nota di Picard[1] ed ho interpretato le ultime parole come un gentile invito diretto a noi perché entriamo nell'argo-

mento.[2] È quindi opportuno che ci mettiamo subito a redigere il nostro lavoro, il quale oramai potrebbe venire inserito nei Rendic[onti] di Palermo.[3] Comunque sia, accetto la tua offerta di scriverlo sia pure a lunghi tratti; io ne curerò la forma definitiva; farei anche di più se quelle altre superficie non mi portassero via tutto il santo giorno. Bada che il Picard stesso tratta in parte la questione dell'algebricità,[4] arrivando (pare) al resultato che è algebrico il più vasto gruppo di trasformazioni permutabili contenente una data trasformazione.

Il ragionamento che tu mi fai pel gruppo ∞^2 non mi riesce ben chiaro. Tu in sostanza fissi nel gruppo una trasformazione e consideri tutte quelle ∞^1 in cui la primitiva può venir trasformata. Queste ∞^1 trasform[azioni] formano una serie (non gruppo in generale) razionale; e di tali serie variando la trasformazione primitiva ne esistono ∞^1; fin qua siamo d'accordo. Ora tu applichi ad un punto della data superficie F le ∞^1 trasformazioni di ciascuna delle ∞^1 serie ed ottieni su F ∞^1 curve razionali, ed anche questo è chiaro. Ma perché ciascuna di tali curve è mutata in sé da ∞^1 trasformazioni del gruppo? ciò non mi par punto chiaro.

Ma forse pel seguito questa osservazione non è necessaria. Infatti si potrebbe ragionare così: fissata l'attenzione sopra una delle serie razionali ∞^1 di trasformazioni, ricordiamo che essa serie muta un punto di F in una curva razionale; ora se quel punto si fa scorrere sopra una curva razionale di F (ce ne possiamo procurare infinite) la curva corrispondente descrive una serie razionale di curve razionali: e tanto basta per stabilire la razionalità di F. Ti pare?

Come ti dicevo son sempre assorbito dai sistemi lineari sulle superficie; ma non trovo nulla di interessante. Forse questa osservazione potrà giovare: per fissare un massimo alla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare $|C|$ di grado n, serie caratteristica che supporremo contenuta in una g_n^s completa, si fissino $n-s$ punti $a_1 \dots a_{n-s}$ tra le intersezioni $a_1 \dots a_n$ di due C: quegli $n-s$ punti non appartengono in generale ad una g_{n-s}^1 sulla C generica del fascio determinato dalle due primitive; ma possono dar luogo ad una g_{n-s}^1 sopra $\delta \leq p_g - p_n$ curve del fascio. Tra queste δ però possono trovarsi $\delta_1 \leq \delta$ curve C per le quali non solo $[a_1 \dots a_{n-s}]$ appartiene ad una g_{n-s}^1 ma anzi $[a_1 \dots a_{n-s+1}]$ appartiene ad una g_{n-s+1}^2; ciò avviene per es[empio] se su quelle δ_1 C la serie completa contenente la serie caratteristica è una g_n^{s+1} anziché g_n^s. *Allora si ha*

$$\textit{def[icienza della] serie caratteristica} \leq \delta - \delta_1 \leq p_g - p_n - \delta_1.$$

Ne viene ad es[empio] che fra i sistemi regolari per cui def[icienza] $= p_g - p_n$ si ha $\delta_1 = 0$. *In un fascio generico contenuto entro un sistema rego-*

lare, la serie caratteristica di ogni curva del fascio ha la stessa deficienza costante; le sezioni piane della superficie sono tutte normali per uno *stesso* spazio; come ti avevo affermato a Firenze senza esser allora ben sicuro.

La questione se la serie caratteristica del sistema canonico sia completa o no è tutt'altro che risoluta; per esser sicuri che in taluni casi, almeno, vale la negativa bisognerebbe determinare un sistema regolare $|C|$ tale che $\delta|C| < p_g - p_n$; od anche più in generale un sistema qualsiasi $|C|$ tale che $\delta|C| <$ def[icienza della] serie caratteristica [di] $|C|$. Ora noi non abbiamo finora esempi di ciò. L'esempio di Napoli[5] $\delta|C| < p_g - p_n$ non basta poiché $|C|$ non era regolare, anzi se ben ricordo: def[icienza della] serie caratteristica [di] $|C| = 0$.

Ho tentato di estendere alle superficie con $p_g > p_n$ alcuni tuoi risultati delle *Ricerche*;[6] ma le cose si complicano ancor più. Per affermare che un sistema $|C|$ è regolare ($\pi - n + \nu - 1 = p_n$) non basta più sapere che la serie segata dal sistema canonico su C è completa (condizione necess[aria] non suff[iciente]), in altre parole non basta sapere che la serie caratteristica ha il minimo indice di specialità possibile ($= p_g$); ma bisogna ancora che la def[icienza della] serie caratteristica sia massima.

Insomma nulla di semplice, nessuna luce che possa illuminare la strada da seguire. Un piccolo resultato, per quel che vale: *Se un sistema regolare sega sopra una curva una serie completa, questa serie è non speciale, e quindi il sistema residuo è esso pure regolare.*

Cordiali saluti dal tuo aff.mo

G. Castelnuovo

[1] La nota Picard 1895, datata 5 giugno, fu presentata all'adunanza del Circolo Matematico di Palermo il 23 giugno 1895.

[2] In conclusione della sua nota Picard osservava infatti che il solo caso in cui lo studio da lui compiuto non era «interamente completo» era quello in cui la superficie ha il genere geometrico al più uguale a uno e al tempo stesso ammette un gruppo di trasformazioni che non permette di passare da un punto qualunque della superficie a un altro. «Quand ces deux conditions se trouvent remplies – concludeva Picard (1895, 255) – j'énonce seulement que l'on peut trouver sur la surface un faisceau de courbes de genre zéro ou un, mais j'ai tout lieu de penser que les travaux récents de M. Castelnuovo et de M. Enriques sur la théorie des surfaces permettront de donner des indications plus précises sur la nature de la surface».

[3] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1895. Contrariamente a quanto scrive Castelnuovo, l'articolo fu pubblicato nei «Comptes Rendus» dell'Académie di Parigi in data 29 luglio 1895.

[4] Cfr. p. 170, c.p. 174 (31.1.1895) e p. 172, c.p. 176 (1.2.1895).

[5] Castelnuovo si riferisce probabilmente a un esempio di cui aveva discusso con Enriques durante il soggiorno a Napoli: cfr. p. 179, let. 185 (28.2.1895).

[6] Enriques 1893f.

Lettera di Castelnuovo a Enriques

Venezia 5 agosto [18]95

Carissimo Enriques

Tante grazie della revisione delle bozze,[1] e delle correzioni introdotte.

Ritenevo anch'io che la mia espressione $n + \pi' - 3\pi + 2$ dovesse coincidere col $p^{(1)} - 1$ virtuale del tuo lavoro,[2] almeno nei casi che il sistema $|C|$ abbia un numero finito di punti base; per ordinare un po' quei pochi risultati fin qui ottenuti, aspetto perciò a vedere il tuo lavoro, o almeno le bozze. Pel piano si ha infatti $p^{(1)} = 0$ e non 1 come ti avevo scritto.

Per le rigate di genere p il massimo dell'espressione $n + \pi' - 3\pi + 2$ (dove si considerano anche i sistemi per cui $n > 2\pi - 2$) è (a quanto pare)

$$-8(p-1)$$

Non ricordavo esattamente ciò che si fosse detto questo Natale a Firenze; ora mi viene in mente che si doveva aver parlato di qualche cosa di simile. Forse però non sono molte le superficie per cui $|C'|$ è contenuto in $|C|$ od $|iC'|$ in $|iC|$. Credo intanto vadano escluse le rigate.

Il sistema $|C - C'|$ se esiste è di genere 1; se adunque esso ha la dimensione > 1, la superficie è razionale o (se è possibile) riferita ad una rigata ellittica.

Se la espressione $n + \pi' - 3\pi + 2$ è negativa per ogni sistema giacente sulla superficie allora tra i generi di tre sistemi successivi aggiunti si ha la relazione

$$\pi - \pi' < \pi' - \pi''$$

dove si può supporre $\pi > \pi'$ e quindi $\pi' > \pi''$. I generi successivi vanno decrescendo, mentre la differenza fra due generi consecutivi va crescendo. Partendo da un sistema abbastanza elevato si potrà dunque far sì che la differenza fra i generi di due sistemi successivi aggiunti sia tanto grande quanto si vuole; e sarà tanto grande quanto si vuole la differenza tra la dimensione di un sistema ed il suo genere, dove il genere può essere scelto in modo $(< -p_n)$ che manchi l'aggiunto successivo. Allora pel tuo teorema[3] sull' $r > 3p + 5$ si concluderà che la superficie è riferibile ad una rigata. Sembra dunque risultare che la condizione necessaria e sufficiente finché una superficie sia rigata è

$$\text{massimo} \quad n + \pi' - 3\pi + 2 < 0$$

(solo per le rigate ellittiche quel massimo è zero).

Se questo ragionamento potesse mettersi in piedi, resterebbero poi solo a studiare le superficie per cui il massimo è zero (che saranno le più diffi-

cili) e quelle per cui il massimo è positivo le quali (secondo che il massimo viene raggiunto per sistemi aventi $\pi' > \pi$ o $\pi > \pi'$) posseggono sistemi pluricanonici o *pluricanonici*.

Ho ricevuto stamane una Nota di Pieri[4] sulle trasformazioni Cremoniane che individuano certi complessi; tra gli altri risultati vi è questo dedotto in modo molto elegante dal teorema sulle involuzioni piane:[5] *è razionale ogni congruenza di secondo ordine di curve razionali che sia priva di linea focale.* Invece tra le congruenze dotate di linee focali ve n'è una non razionale (riferibile alla rigata ellittica) donde segue subito l'esistenza di una involuzione piana d'indice 2 non razionale (contro il teorema di Kantor);[6] sarà il solo caso? Quel teorema sulle congruenze varrà indipendentemente dal genere della curva elemento?

Appena sian terminate e litografate le tue lezioni di Geom[etria] Sup[eriore][7] ti raccomando di inviarmele che desidero molto di leggerle.

Poi sarà tempo di pensare al Bericht.[8] Su vari punti mi son formato già idee più chiare di quelle che avevo in passato; sicché sui vari punti potrò precisare e spiegar meglio qualche passo dei miei ultimi lavori.

Partirò probabilmente venerdì sera o sabato per Faido (Gottardo) dove attualmente c'è mia sorella. Ti scriverò già prima.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo

G. Castelnuovo

[1] Si tratta delle bozze di Castelnuovo 1896a.
[2] Cfr. Enriques 1896d, § 41.
[3] Cfr. Enriques 1894e.
[4] Pieri 1894.
[5] Cfr. Castelnuovo 1894a.
[6] Cfr. la memoria pubblicata in due parti, Kantor 1888 e 1892, che ricevette il premio dell'Accademia delle Scienze di Napoli: la seconda corregge anche alcuni errori contenuti nella prima.
[7] Enriques 1894-95c.
[8] Enriques-Castelnuovo 1896.

Lettera di Castelnuovo a Enriques[1]

[+++] dello spazio $S_{\pi-\varepsilon-\nu-1}$ sulla dimensione dello spazio cui appartiene $G_{2\pi-2-n}$, è in altre parole la deficienza della serie caratteristica di K.

Concludiamo: *Se ω è la deficienza della serie caratteristica del sistema canonico $|K|$ allora $p_g - p_n - \omega$ è la deficienza della serie che sopra una C segano le curve aggiunte C' passanti per un gruppo CK.* Si suppone che $|C|$ sia regolare e che la serie segata da $|C'|$ su C abbia la deficienza $p_g - p_n$.

Si può anche dire che mentre la serie caratteristica di $|C|$ è una $g_n^{\nu-1}$ la serie segata su C dalle $|C'|$ pel gruppo CK è una $g_n^{\nu-1+\omega}$ contenente quella.

Ancora: ω è la differenza tra i numeri delle condizioni che il gruppo CK presenta alla serie completa $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ ed alla serie deficiente $g_{2\pi-2}^{\pi-1-\varepsilon}$ segata da $|C'|$ su C.

Più in generale si dimostra che qualunque sia $|C|$, se $|C'|$ sega su K una serie completa non speciale, ω è la differenza tra il n[umer]o di condizioni presentate da CK a $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ e alla serie $|C'|C$, differenza aumentata della deficienza della serie segata da $|K|$ su C.

La deficienza della serie caratteristica di un qualsiasi sistema lineare $|C|$ è $\leq \omega + \delta|C|$ dove $\delta|C|$ ha il tuo significato.

Ancora (salvo errore): *Se* $|C|$ *è un sistema regolare qualsiasi, si ha*

$$\omega \geq p_g - p_n - \delta|C|;$$

sicché per dimostrare che $\omega > 0$ basterebbe considerare un sistema regolare $|C|$ tale che $\delta|C| < p_g - p_n$.

Il minimo di $\delta|C|$ per i sistemi regolari è $p_g - p_n - \omega$; sarà raggiunto?

Come vedi gli argomenti non mancano ma i pasticci crescono.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo

G. Castelnuovo

[1] Non ci è stato possibile datare con precisione questo frammento, mutilo di otto pagine (il foglio originale superstite reca infatti, nel recto e nel verso, rispettivamente i numeri 9 e 10).

218. [c.p.]

[Firenze] 23 Ott[obre 18]95

Carissimo Castelnuovo

Il Levi-Civita mi scrive di aver esaminato attentamente la nota di P[incherle][1] senza potersi convincere del resultato. Egli completa il ragionamento della 3ª p[a]g[ina] arrivando all'ultima equazione, ma non vede come ne segua il resultato.

Il L[evi]-C[ivita] mi dice di salutarti; egli era stato giorni sono a farti visita a Venezia mentre tu eri qua.

Io sto lavorando al Bericht,[2] e non so ancora quando dovrò partire.

Gradisci i miei più affettuosi saluti e ringraziamenti per la bella visita fattami nei giorni scorsi e credimi

tuo aff.mo

F Enriques

[1] Si tratta forse di Pincherle 1895.

[2] Enriques-Castelnuovo 1896.

219. [c.p.]

[Bologna] Venerdì 25 Ott[obre 18]95

Carissimo Castelnuovo

Due righe per avvertirti che sono venuto a Bol[ogna] per gli esami (Albergo dei Tre Re).

Ho ricevuto stamani la tua cartolina ed anche a nome dei miei ti ringrazio delle cortesi espressioni.

Il Bericht[1] è quasi finito: senza l'interruzione sopraggiunta te lo avrei mandato domani.

Ti scriverò poi di qualchecosa che ho intravisto rispetto al bigenere virtuale.

Cordiali saluti tuo aff.mo

F Enriques

[P.S.] Ti prego di salutarmi Reina e Fano e fare al 1° le mie congratulazioni.[2]

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.

[2] Vincenzo Reina fu nominato professore straordinario di Geodesia e Geometria pratica presso la Scuola di Applicazione di Ingegneria di Roma il 16 ottobre 1895.

220.

28 Ott[obre 18]95

[Bologna] Albergo dei Tre Re

Carissimo Castelnuovo

La mia posizione a Bologna è pericolante:[1] pare infatti che il Del Re non solo si adopri per avere il trasloco, ma abbia delle probabilità d'ottenerlo. Questa è almeno l'opinione ed il timore del P[incherle], non so se fondati o no.

In queste circostanze il P[incherle] ha scritto al Cr[emona] esponendogli la cosa e domandandogli consiglio.

La risposta, non par dubbio, dovrebbe essermi favorevole, non solo a giudicare dalle prove di benevolenza datemi dal Cr[emona] in questi ultimi tempi, ma anche perché il Cr[emona] ha già parlato verbalmente col P[incherle] della cosa nei giorni passati.

Il P[incherle] ha allora esposto al Cr[emona] come alla cattedra di Bol[ogna] vi fossero 2 aspiranti (P[ier]i e D[el] R[e]) oltre me, e gli ha domandato che cosa dovrebbe fare la fac[ol]tà volendo risolvere la questione alla

fine di quest'anno. Il Cr[emona] ha dato il consiglio che la fac[ol]tà proponga me, ritenendo che io vincerei il concorso se si facesse.

Vedi dunque che il Cr[emona] ha esposto il suo giudizio in concreto, cioè entrando nella questione personale.

Se il Cr[emona] scriverà questo al P[incherle] in modo che egli possa mostrare la lettera in fac[ol]tà, ciò potrà essermi utile. Non ritengo però in ogni caso che la fac[ol]tà si deciderebbe nemmeno a discutere ora ciò che alcuni (come il P[incherle]) si propongono di fare a mio riguardo alla fin d'anno (almeno il P[incherle] non accenna affatto a questo).

Eppure l'unico modo di contrabilanciare efficacemente la proposta del D[el] R[e] ove partisse dal Ministero sarebbe quella di contrapporgli un'altra proposta.

La conclusione sarà che il D[el] R[e] riuscirà a farsi nominare ed allora non mi resterà che cercare di avere il suo posto.

Per ora non vedo possibilità di far niente. Non so se sia il caso di parlare al Cr[emona] della cosa o se sia meglio aspettare la sua risposta al P[incherle].

Veramente il P[incherle] stesso mi ha consigliato di aspettare, ma dal modo della risposta del Cr[emona] può dipendere qualchecosa.

Se egli prendesse l'iniziativa d'una proposta al P[incherle] che questi da solo non osa o non vuol fare ora in fac[ol]tà?

Se tu ritieni utile di parlare subito al Cr[emona] della cosa taci delle comunicazioni avute da me col P[incherle] e digli soltanto che sono preoccupato per voci corse. Ma forse è meglio che tu non ne parli ora a meno che egli non entri in proposito. Giudica tu.

Inutile ti raccomandi di non parlare con altri di queste cose.

Ho ricevuto le 2^{c} bozze del mio lavoro sono state rivedute assai minutamente dal Cr[emona] il quale mi ha fatto dei segni di lapis alla dimostrazione del genere della curva spezzata:[2] non so se si riferiscono alla parola *ponte* di connessione che egli non voglia o voglia spiegata, o se trovi oscuro tutto il ragionamento.

Ti accludo il foglio perché tu ne giudichi (ho avuto doppie bozze).

Sono occupato cogli esami.

In fretta affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Enriques si riferisce agli sviluppi delle vicende legate alla sua posizione accademica: cfr. p. 171, let. 175 (31.1.1895) e p. 173, let. 178 (3.2.1895).

[2] Cfr. Enriques 1896d, § 16, 247-49.

221. [c.p.]

[Bologna] 30 Ott[obre 18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto la tua lettera di ieri e la cartolina d'oggi. Non dubitare che t'informerò subito appena sappia qualchecosa; intanto ti ringrazio dell'affettuoso interesse che prendi alle cose mie.

Sono occupato tutto il giorno cogli esami che spero finiranno presto.

Ho ricevuto una gentile cartolina del Reina che ti prego di ringraziare e salutare a mio nome.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

222.

Venerdì sera [1° novembre 1895][1]

Carissimo Castelnuovo

Tornato ora a Firenze apprendo la notizia del terremoto a Roma, ma vedo che fortunatamente non ci sono danni: te la sarai cavata con un po' di spavento.

Il P[incherl]e ha avuto la risposta dal Cr[emona] il quale gli suggerisce nel caso che venga la domanda del D[el] R[e] di proporre (come proposta propria) in Fac[ol]tà una preghiera al Ministro di deferire il giudizio fra i *3* aspiranti alla cattedra ad una commissione (in via privata): il Cr[emona] raccomanda al P[incherl]e di non far parola con ***nessuno*** della sua lettera per ragioni che gli direbbe a voce se lo vedesse.

In fretta cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Come risulta dai giornali, in questa data si registrò qualche lieve scossa di terremoto a Roma. Al fatto accenna Enriques in apertura della lettera.

223.

5 Nov[em]bre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti mando il Bericht[1] per la mia parte completo all'infuori di qualche lieve lacuna che non potrò colmare se non dopo veduto il mio lavoro[2] attualmente sotto stampa. Mi pare in ogni modo che tu possa cominciare la redazione definitiva in francese sospendendo tutt'al più in qualche punto.

Ho ricevuto ieri la tua cartolina (quella che mi hai mandato a Bol[ogna] non mi è stata respinta).

Ciò che ti scrissi relativamente alla proposta che P[incherle] farebbe in Fac[ol]tà della nomina di una commissione si riferisce al caso che venisse in Fac[ol]tà la domanda del D[el] R[e] sia direttamente sia per mezzo del Ministro. Se ciò non accade ed altro non sopravviene il P[incherle] ritiene sia il caso che la Fac[ol]tà mi proponga senz'altro alla fine dell'anno.

Ha informato il S[egre] della cosa.

In questi giorni sono trattenuto a casa da una leggera contusione fattami al ginocchio cadendo su un marciapiede. Perciò credo che non andrò a Bol[ogna] prima della fine della settimana.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.
[2] Enriques 1896d.

224. [c.p.]

[Firenze] 7 Nov[em]bre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Torno a Bologna domani ed all'Albergo dei Tre Re farò ricerca della tua cartolina.

Ho avuto un'affettuosa risposta dal S[egre].

Rimando subito al prof. Cer[ruti] le bozze modificate adottando la parola «ponti».[1] Come avrai visto io facevo una distinzione fra «punti» e «ponti», ma non vi è inconveniente ad adottare la locuzione uniforme.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 207, let. 220 (28.10.1895).

225.

Bologna - 9 Nov[embre 18]95

Carissimo Castelnuovo

Sono arrivato ieri sera a Bol[ogna]. Ho trovato qui la tua cartolina di una settimana fa. D'altra parte ho saputo che il Viv[anti] non andrebbe a Messina, e quindi non è il caso di muovere alcun passo per Pavia.[1]

Il bollettino dell'Istr[uzione] di ieri contiene le conferme degli inc[ari-

chi] di P[incherle] e Arz[elà] ma non la mia. Mi dicono però che ciò non vuol dir nulla perché le conferme vengono alla spicciolata e mi inducono a cominciare ugualmente le lezioni.

Se altro vi sarà ti terrò informato.

Il teor[ema][2] se $|C'|$ sega sulla C di $|C|$ la serie canonica completa la sup[erficie] ha $p_g = p_n$ deve esser vero *sempre* quando per $|C'|$ si prende l'aggiunto e non il subaggiunto. Mi pare che di questa circostanza tu non tenessi conto nella 1ª dimostrazione. Non saprei veramente come introdurla: ma se ti limiti a considerare il sistema subaggiunto il resultato non può più esser vero.

Forse si potrebbe arrivare al teor[ema] così:

Se $|C'|$ sega sulla C la serie can[onica] compl[eta], $|C|$ ha la serie caratt[eristica] compl[eta].[3]

Non mi parrebbe difficile stabilire che in conseguenza $|C + C'|$ gode della proprietà attribuita a $|C|$ dato che

$$|(C + C')'| \equiv |C' + C'|$$

Questo basterebbe pel nostro scopo.

Io sono per ora all'Albergo dei Tre Re, ma ho fissato camera e ci andrò fra pochi giorni. Te ne darò l'indirizzo.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[1] Giulio Vivanti dal 1892 al 1895 fu professore interno alla Scuola Normale dell'Università di Pavia. Nell'autunno del 1895, in seguito a concorso, divenne professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Messina.

[2] Cfr. Castelnuovo 1896a, § 6, 352.

[3] Cfr. Castelnuovo 1896a, § 5, 351.

226.

Bologna - 11 Nov[em]bre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Il mio nuovo indirizzo è «Via Garibaldi N° 5 - 3° p[ia]no».

Ho ricominciato ad occuparmi delle varietà con un fascio di sup[erficie] raz[ionali],[1] delle quali abbiamo parlato un po' nei giorni che hai passato a Firenze.

A questo proposito mi sorge un dubbio relativo ad un principio che avrei occasione frequente di adoperare.

Quando sopra una superficie si può individuare razionalmente *un* sistema lineare $|C|$, si può dire che la sup[erficie] si può trasformare (senza aggiunta di irrazionali numerici) in una sup[erficie] avente per sezioni le curve C?

Così se p[er] e[sempio] una varietà V contiene un fascio di sup[erficie] raz[ionali] F, e su ciascuna riesco a costruire *una* rete omaloidica si può rappresentare ciascuna F su un piano (di una data serie in corrisp[ondenza] col fascio) in guisa che V si muti in una var[ie]tà con un fascio di piani?

Ti sottopongo il dubbio più che altro per uno scrupolo trattandosi di cosa delicata: io sono persuaso che la risposta debba essere affermativa. Forse si potrebbe ragionare così. Dato su F *un* sistema $|C|\ \infty^b$ resta individuata raz[ionalmente] *una* funz[ione] $f(x_1\ x_2\ x_3\ a_1\ \ldots\ a_b)$ dei p[un]ti della sup[erficie], con b parametri; i coefficienti della funz[ione] dipendono solo raz[ionalmente] dal parametro che individua la sup[erficie] nel fascio, quindi ecc.

Ti pare che così si acquisti l'*assoluta certezza* della cosa?

Ammesso il principio di cui sopra, le var[ie]tà con un fascio (supponiamo per brevità raz[ionale]) di sup[erficie] raz[ionali] vengono a rappresentarsi[2]

1) sullo S_3 semplice,

2) o sullo S_3 2-plo con F^{2n} limite dotata di punto $(2n-2)$-plo,

3) o sullo S_3 2-plo con F^{2n} limite dotata di retta (2n-4)-pla,

4) o sullo S_3 2-plo dotato di F^{2n} limite con retta $(2n-6)$-pla e su questa 2 p[un]ti $(2n-3)$-pli ∞ [infinitamente] vicini,

5) o sulla var[ie]tà V^n di S_4 con p[ia]no $(n-3)$-plo.

Il caso 5) non si riduce sempre (a quanto pare) al caso 3): invece si riducono al caso 3) i casi analoghi che comparirebbero, di var[ie]tà con un fascio di sup[erficie] a sezioni ellittiche d'ord[ine] > 3.

Nel caso 3) si può rappresentare le var[ie]tà su una involuzione di S_3 se si conosce una unisecante delle sup[erficie] del fascio: così se invece d'un fascio si ha una congruenza di F.

Si può vedere da esempi che nei casi 2) 3) e 5) non si può sempre rappresentare la var[ie]tà sullo S_3 semplice in guisa che le sup[erficie] raz[ionali] del fascio abbiano per immagini dei piani. Forse si potrà vedere lo stesso pel caso 4). Sotto questo aspetto la classificazione dei fasci di sup[erficie] raz[ionali] riuscirebbe quindi completa.

Affettuosi saluti tuo

F Enriques

[P.S.] Nulla di nuovo.[3]

[1] I risultati enunciati in questa lettera e in lettere successive saranno pubblicati nella nota Enriques 1895b, presentata da Luigi Cremona all'Accademia dei Lincei il 1° dicembre 1895, e precisati e dimostrati in Enriques 1897a.

[2] Cfr. Enriques 1895b, 167.

[3] Enriques allude agli sviluppi delle proprie vicende accademiche.

227.

13 Nov[em]bre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto la tua lettera di ieri e la cartolina d'oggi.

Perché a Palermo non chiamano il D[el] R[e] che il Gu[ccia] ha recentemente raccomandato al P[incherl]e? (bada non fare parola di questa raccomandazione cui il P[incherl]e non risponde facendo conto di non averla ricevuta). Trovo assai strano che si vada a scovare un Tizio qualunque per dargli una cattedra cui ragionevolmente molti altri potrebbero aspirare col sistema dei concorsi.

Io non sarei del tuo avviso riguardo alla soppressione nel Bericht[1] del teor[ema] che *una* curva sopra una sup[erficie] individua un sistema completo. Ma si può spiegare più diffusamente. Per ciò ti posso mandare le bozze del mio lavoro.[2] Il sopprimere quel teor[ema] porterebbe ad inutili restrizioni nel seguito. Se anche per maggior chiarezza si vogliono imporre queste restrizioni, mi pare bene avvertire il lettore che esse sono superflue.

Se anche quel lemma sul fascio di sup[erficie] non reggesse i resultati di cui ti parlai non subirebbero un forte scacco: ti dirò che cosa si verrebbe a perdere.

Quando ho una varietà V con un fascio di sup[erficie] F_n (sez[ioni] iperpiane), il sistema agg[iunto] su una F_n è segato da φ_{n-3} e però si può costruire una (e quante si vogliono) var[ie]tà seganti le F_n secondo curve agg[iunte]: ciò serve alla 1ª trasf[ormazione] della V e così si prosegue.

Ma in questo modo se le F_n sono raz[ionali] si arriva oltre agli S_3 2-pli di cui ti ho parlato, alle var[ie]tà con un fascio di sup[erficie] normali F_m a sez[ioni] ellittiche. Se $m = 3$ non riesco in ogni modo a ridurre la var[ie]tà.

Se $m = 4$ la V si trasf[orma] in una di S_4 con sez[ioni] F_4 dotate di conic[a] 2-pla C: le C formano una fascio raz[ionale] (su una sup[erficie]) e però ammettono una unisecante onde V si riduce a un S_3 2-plo. (Non dà noia il possibile spezzamento delle C).

Se $m = 5$ la V si trasf[orma] in una di S_4 con sez[ioni] F_5 dotate di 3 rette 2-ple e un p[un]to 3-plo: si ha ancora S_3 2-plo.

Se $m = 7, 8, 9$ si ha su ogni F_m *una* rete omaloidica: io dicevo senz'altro che V è raz[ionale] ma parmi non offra difficoltà ad ogni modo il dimostrarlo.

Resta come caso più intrattabile il caso $m = 6$.

Per questo io procedevo così.

Su ogni F_6 vi sono 2 reti omaloidiche di cubiche gobbe: chiamiamo p[un]ti le cub[iche] gob[be]: si ha una V^3 su cui vi è un fascio (forse irraz[ionale]) di sup[erficie] raz[ionali] e su ciascuna *una* rete omaloidica (i p[un]ti

di una F_6 sono le curve della rete): *allora la* V^3 *è riducibile ad una con un fascio di p[ia]ni*: perciò esiste una sup[erficie] sulla nostra prima V che sega ogni F_6 in 2 cub[iche] gob[be] una per ciascun sistema, e però esiste una curva bisec[ante] le F_6. Tanto basta per ridurci al caso $m = 2$ e quindi ad un S_3 2-plo.

Il nostro dubbio infirmando questo ragionamento non si vede più come ridurre il caso $m = 6$.

Io però sono convinto che quel dubbio non è fondato, ma capisco che forse solo da un algebrista si potrebbe avere in ciò la certezza. Ed anche relativamente agli altri casi il lavoro guadagnerebbe in chiarezza e semplicità.

Mi accorgo ora che anche pel caso $m = 9$ non si potrebbe trovare un sostituto.

Passando ad altro ti dirò che ho pensato un po' a fornire mediante i p[ia]ni 2-pli[3] una classe di es[empi] di sup[erficie] con curve bicanoniche e mi pare di essere sulla strada. Il p[ia]no 2-plo con C_8 lim[ite] dotata di 2 coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vic[ini] avrebbe il genere 1 ed ∞^1 curve bicanoniche il che consuona col fatto che è per esso $p^{(1)} = 1$. Andando avanti coll'imporre alla curva lim[ite] analoghe singolarità si dovrebbe riuscire allo scopo. E chi sa non si possa anche avere esempio di sup[erficie] con curve i-canoniche ($i > 2$): ma dubito occorra per questo sostituire ai p[ia]ni 2-pli dei p[ia]ni i-pli.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Ero stato male informato riguardo al Viv[anti][4] ma hai ragione che nel momento attuale il tentare Pavia non sarebbe opportuno. Il D[el] R[e] è sempre qui e mi fa guerra facendo risaltare (a quanto sembra) la sua superiorità didattica.

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.
[2] Enriques 1896d.
[3] Per la classificazione dei piani doppi con $p_g = p_n = 1$ e bigenere 1, cfr. Enriques 1896e.
[4] Cfr. p. 209, let. 225 (9.11.1895) e nota 1.

228.[1]

14 Nov[em]bre [18]95

[+++] pel sistema lineare da costruirsi) il sistema completo $|C|$ cui C appartiene resta determinato, ma può darsi che esso abbia altri punti base oltre i fissati h ed allora questi sono da riguardarsi come componenti fisse di

$|C|$ (non essendo buchi per $|C|$). Si potrebbe dire che resta determinato un sistema *completo* (il più ampio di tutti) che contiene C *totalmente* (in senso proiettivo) ed ha fra i suoi p[un]ti base gli h p[un]ti fissati su C colla molteplicità che essi hanno per C.

Ti pare che così venga chiaro? Se sì, adotta senz'altro questo modo di enunciare il teor[ema] sostituendolo al mio.[2]

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Ti mando una copia delle bozze del mio lavoro[3] (1ª parte).

[1] Lettera incompleta, mutila di quattro pagine, recando il foglio originale superstite, nel recto e nel verso, rispettivamente i numeri 5 e 6.
[2] Si tratta della redazione di Enriques-Castelnuovo 1896.
[3] Enriques 1896d.

229.

16 Nov[em]bre [18]95

Carissimo Castelnuovo,

Non riesco a costruire una varietà secante sulle sup[erficie] del mio fascio le curve della rete omaloidica, e comincio a dubitare che il supposto lemma non sia vero. Bisognerà dunque limitarsi al resultato cui ti accennavo.[1] Si può spinger più oltre la cosa e arrivare soltanto a spazi 2-pli se vi è una curva unisecante le sup[erficie] del fascio. Uno dei 3 tipi di S_3 2-pli che compaiono è in tal caso riferibile ad una involuzione di S_3.

Ho spinto le mie ricerche un po' più avanti pel caso che una var[ie]tà contenga una congruenza o un sist[ema] lin[eare] ∞^3 di sup[erficie] raz[ionali]. (Se si tratta d'una congruenza sotto una restrizione e) se (invece) vi è un sist[ema] ∞^3 a sist[ema] caratteristico irriducibile si riesce sempre a riferire la var[ie]tà ad una involuzione di S_3.

Il piano generale del lavoro[2] è fissato astrazion fatta dalla difficoltà detta in principio che non spero ormai di superare. Ma mi manca una cosa che tocca a te di fornirmi, cioè l'analisi del penultimo sistema aggiunto ad un sistema piano quando l'ultimo si compone (di gruppi di) curve ellittiche d'un fascio. Ti sarei grato se tu mi comunicassi la dimostrazione che questo caso non si presenta tranne che pel sistema di sestiche ecc. Sarebbe forse il caso che tu cogliessi l'occasione per esporre quella dimostrazione già promessa ponendola in una nota del mio lavoro.[3]

In un'altra lettera ti parlerò più diffusamente della disposizione che darei al lavoro.

Per oggi passo ad altre questioni non scientifiche.

Il bollettino di ieri non contiene neppur esso la mia conferma sebbene tutte le altre sieno già uscite la volta passata.[4] Io ho scritto al Richiardi segretario del M[inistr]o per avere informazioni. Non so che pensare. Il D[el] R[e] è sempre qui e pare aspetti il trasloco; alla Fac[ol]tà non è pervenuto nulla. A molti prof[essor]i piovono da varie parti lettere di raccomandazione pel D[el] R[e].

Ti parebbe il caso di rivolgersi al Cr[emona]? di domandare per suo mezzo se la conferma verrà? e se invece si trattasse d'un puro ritardo?

Ti rinnovo le più cordiali congratulazioni per la medaglia che difficilmente potrà essere attribuita ad un lavoro di maggiore importanza.[5] Io ne sono lieto come d'un trionfo mio.

Affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Cfr. p. 212, let. 227 (13.11.1895).

[2] Cfr. p. 211, nota 1 a let. 226 (11.11.1895).

[3] La dimostrazione riguardante il procedimento di aggiunzione nel piano cui si fa cenno nella lettera sarà data da Castelnuovo nell'Aggiunta all'articolo Enriques 1896e.

[4] Si tratta della conferma dell'incarico: cfr. p. 210, let. 225 (9.11.1895).

[5] L'allusione è al conferimento della medaglia della Società Italiana delle Scienze. Cfr. p. 190, c.p. 202 (3.5.1895).

230.

17 Nov[em]bre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio di quanto mi scrivi ti proponi di fare per me e mi dispiace del disturbo che ciò può recarti. Io ho scritto per informazioni al Richiardi segretario particolare del M[inistr]o, ma non ne ho ancora ricevuto risposta.

L'intervento di Cr[emona] sarà forse il caso di domandarlo soltanto quando si sappia che la conferma è stata sospesa.

Ti avverto poi che la Fac[ol]tà non ha colpa in tutto questo: la proposta della mia conferma è stata fatta in blocco colle altre nella seduta di Giugno, e solo la Fac[ol]tà ha richiamato il suo voto perché fosse aperto il concorso. Così mi dice il P[incherl]e, ma non mi sorprenderebbe fosse accaduto un equivoco per cui il M[inistr]o aspettasse ancora la proposta della Fac[ol]tà.

Il P[incherl]e mi consiglia, se passa ancora un'altra settimana o nasce qualcosa di nuovo a venire a Roma.

Passando ad altro ti dirò che (pensandoci oggi dopo ricevuta la tua let-

tera) credo aver trovato una via assai semplice per risolvere quella questione sui sistemi lineari che tu hai già risoluta in passato.

Supponi che un sist[ema] lin[eare] abbia come aggiunto (irriducibile) un fascio di curve non raz[ionali]: allora $p = 2$ e poiché la serie caratt[eristica] è completa e composta colla g_2^1 si ha

$$r \leq 3 \quad (r > 1) \qquad D = 4 \quad \text{o} \quad D = 2:$$

nel sist[ema] di gen[ere] 2 vi è una rete di grado $D = 2$, onde il sistema si trasforma in una corrispondenza (1 2) nella rete delle rette essendo curva di diramaz[ione] una sestica: segue ecc.

Può darsi che il sist[ema] abbia il suo agg[iunto] composto delle curve non raz[ionali] d'un fascio? In questo caso passa sempre fra la dim[ensione] e il gr[ado] la relazione $r = 2D$.

Ora se si impone un p[un]to 2-plo ne nasce un altro di conseguenza e il nuovo sistema ha

$$r' = r - 3 \qquad D' = D - 8$$

onde non è più $r' = 2D'$ mentre per esso vale sempre la proprietà del sist[ema] di partenza.

Vi è solo da trattare il caso che l'imposizione d'un p[un]to 2-plo spezzi il sistema di partenza: forse questo si trova già esaurito dal tuo lavoro «sulla massima dimensione ecc.»?[1]

Qualora la dimostrazione accennata ti soddisfi, ti sembra preferibile o no alla tua dimostrazione aritmetica? ed in caso come dovrei citare la tua dim[ostrazione] (che hai annunciata nei Math[ematische] Ann[alen]) e come quella di Kantor?[2]

Credo di non averti detto come tratto la questione della rappresentazione della sup[erficie] con un fascio raz[ionale] di curve raz[ionali] per vedere le irrazionalità da cui essa dipende:[3] ciò dà una nuova dimostrazione della raz[ionalità] di queste sup[erficie].

In 1° luogo presa la sup[erficie] col fascio di coniche si rappresenta per proiezione sul p[ia]no 2-plo con curva limite C_{2n} e p[un]to $(2n-2)$-plo O. Per avere una unisecante delle coniche, occorre trovare nel p[ia]no una C_m con O $(m-1)$-plo tangente (in tutte le intersezioni cioè) in $m + n - 1$ punti a C_{2n}, perché allora l'immagine di C_m si spezza in 2 unisecanti. Ora le C_m sono ∞^{2m}: basta prendere $m = n - 1$ per avere un numero finito di soluzioni al problema. Queste dipendono dall'equazione per la bisezione dell'argomento delle funzioni iperellittiche inerenti alla C_{2n} (Clebsch vol. 3° pg. 230 ediz[ione] franc[ese]).[4]

Ho ottenuto in un modo assai semplice un'altra rappresentaz[ione] della

var[ie]tà cubica di S_4 sopra una inv[oluzione] di coppie di p[un]ti in S_3, inv[oluzione] che ha una sup[erficie] di coincidenza spezzata in 2 p[ia]ni e in un'altra sup[erficie] che non [ho] ancora determinata: ma vedo già che quanto alla rappres[entazione] di questa inv[oluzione] siamo al punto di prima.

Non mi dici più nulla di quanto hai fatto nel Bericht riguardo ai sist[emi] completi.[5] Spero che, senza introdurre parola circa la connessione, tu abbia potuto accomodare le cose in modo chiaro nel senso di cui parlammo.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Le sup[erficie] con ∞^2 curve razionali sono sempre razionali? Credo che ciò si debba poter vedere assai facilmente data la tua condizione della rappresentabilità d'una sup[erficie] su una rigata.[6] Ma si dovrebbe vedere più direttamente.

[1] Castelnuovo 1890b.
[2] Cfr. Castelnuovo 1894a, 275-76, dove è citato l'articolo Kantor 1885.
[3] Per gli argomenti qui discussi cfr. p. 211, nota 1 a let. 226 (11.11.1895).
[4] Clebsch 1879-83, III, 230.
[5] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1896 e p. 212, let. 227 (13.11.1895).
[6] Cfr. la lettera di Castelnuovo del 5 agosto 1895 (p. 203).

231. [c.p.]

[Bologna, 18 novembre 1895]

Carissimo Castelnuovo

Ho pensato di spezzare il mio lavoro in 2 note; la prima[1] dedicata alla questione degli irrazionali numerici da cui dipende la risoluzione razionale di $f(x\ y\ z) = 0$ (supposta raz[ionale]): questi irraz[ionali] si collegano alle equazioni per la divisione dell'argomento nelle funz[ioni] iperellittiche o in quelle abeliane di gen[ere] 3 o 4. La questione ha interessato anche il P[incherl]e a cui la ho esposta.

Aspetto per redigere la 1ª nota la tua risposta alla domanda di ieri: a proposito sapresti dirmi dove si trovano i lavori di Noether sui p[ia]ni 2-pli e quello in cui li pone in relazione colle involuz[ioni] di Bertini?[2]

Ho scritto a casa che spediscano alla biblioteca della Scuola di Roma una copia della mia G[eometria] Pr[oiettiva][3] (se ce ne son sempre).

Il lemma che mi proponevo di dimostrare è probabilmente falso:[4] altrimenti per analogia si dovrebbe poter dire che una curva raz[ionale] si può

sempre riferire ad una C_n d'ord[ine] n (norm[ale] in S_n) perché contiene *una* g_n^n, ciò che non è vero se n è dispari. Il lemma è vero se il sist[ema] è dedotto con *operaz[ioni] raz[ionali]* dal sistema delle sez[ioni] della sup[erficie]

Cordiali saluti

aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1895b.
[2] Cfr. Noether 1878; Bertini 1877.
[3] Enriques 1894-95a.
[4] Cfr. p. 212, let. 227 (13.11.1895) e p. 214, let. 229 (16.11.1895).

232.

20 Nov[em]bre [18]95

Carissimo Castelnuovo

È veramente noioso che si trovino ancora difficoltà in quella questione sui sistemi lineari. Bada che a me non basta neppure che il fascio di curve ellittiche sia di cubiche (o si riduca ad esso): mi occorre proprio che il prec[eden]te sia il sistema di C_6 con 8 p[un]ti 2-pli.

Lasciando da parte questa questione io mi sono occupato in questi giorni di approfondire l'esame delle irrazionalità che compariscono nella rappresentazione delle sup[erficie] raz[ionali][1] ed ho anzitutto esaminato con cura i vari casi di sup[erficie] a sez[ioni] ellittiche, dove si ottengono delle riduzioni notevoli. Per le F^5, F^6, profitto dei teor[emi] di Caporali (sulle loro proiezioni in S_3):[2] la F^5 di S_3 ha *un* p[un]to 3-plo da cui si proietta sul p[ia]no 2-plo. La F^6 di S_3 ha 4 p[un]ti 3-pli onde mediante le sup[erficie] di 3° ord[ine] che passano 2 v[olte] per essi si può determinare una terna di p[un]ti della sua curva 2-pla C_9: così colla risoluzione d'un'equazione di 3° e una di 2° gr[ado] si determina un p[un]to su F^6 ciò che basta a rappresentarla (per proiez[ione] dal p[ia]no t[an]g[ente]).

Le F^7 F^8 si rappresentano senza irrazionalità.

Per la F^9 occorre determinare un suo p[un]to ciò che esigerebbe un'equaz[ione] di 9° gr[ado]. Ma si può fare così. In un fascio di sez[ioni] iperpiane ve ne sono *4* equianarmoniche a ciascuna delle quali è raz[ionalmente] legato un iperpiano trit[an]g[ente]: dunque basta risolvere un'equaz[ione] di 4° e una di 3° gr[ado].

Il p[ia]no 2-plo raz[ionale] con C_6 limite equivale al cono F_2 2-plo con C_6 limite passante 2 v[olte] pel vertice: la sua rappresentazione si ottiene determinando i p[ia]ni tritangenti alla C_6 ciò che dipende dall'equaz[ione] per la bisez[ione] dell'argomento delle funzioni abeliane di C_6.

Si ha anche un semplice mezzo per studiare la configurazione dei detti p[ia]ni trit[an]g[enti] colla rappres[entazione] sul p[ia]no semplice del cono (o p[ia]no) 2-plo. Se ciò non è stato fatto (in senso analogo alla ricerca di De Paolis[3] per le quartiche) costituirebbe un tema adatto per tesi di laurea di qualche giovane.

Però nel lavoro di Noet[her][4] sui p[ia]ni 2-pli con C_6 lim[ite] deve esser detto che la loro rappresentaz[ione] dipende dalle cubiche agg[iunte] (spez[zate] in conic[he] variab[ili]) 3 tg [tritangenti].

A parte il punto sui sistemi lineari, ho quasi redatto la nota; ma vedo che la discussione minuta che occorre caso per caso la renderà probabilmente più lunga di ciò che comporti una nota lincea. Questo mi secca perché dovendo darla p[er] e[sempio] agli Annali di Mat[ematica] non potrei averla presto, ciò che potrebbe occorrermi se sorgessero circostanze impreviste (se p[er] e[sempio] si venisse ad un giudizio privato di titoli da una commissione). Perciò avrei pensato di fare una notina di soli resultati nella quale potrei esporre le principali applicazioni alle var[ie]tà contenenti un fascio di sup[erficie] raz[ionali] o una congruenza ecc.; riservando le dimostrazioni diffuse ad un lavoro più ampio. Ma per questo occorre aver prima definito quella questione preliminare sui sistemi lineari.

Che te ne pare?

Come vedi non mi distolgono dal lavoro i pensieri relativi agli avvenimenti che si svolgono riguardo alla mia carriera, cui guardo con sufficiente filosofia. Ma non posso essere completamente tranquillo.

Il Preside di Fac[ol]tà è evidentemente seccato della noia che a lui proviene dalla mia questione[5] anche perché in questi giorni è un po' indisposto. Ha cominciato col dirmi che si occuperebbe della cosa dopo la nomina del rettore (fra 10 giorni), e solo cedendo alle mie sollecitazioni ha promesso di vedere se il verbale della fac[ol]tà contenga proprio la proposta della mia conferma ed in questo caso ricordarla a Roma: se no adunerà (con comodo) la fac[ol]tà. Ora il verbale della Fac[ol]tà dice

«Si propone la conferma di *tutti* gli incarichi: si ricorda al M[inistr]o il voto emesso dalla Fac[ol]tà riguardo alla cattedra di G[eometria] Pr[oiettiva] e Descr[ittiva] (concorso)».

Come vedi la cosa è ambigua checché ne dica il P[incherl]e.

Il quale non vorrebbe assolutamente che la cosa venisse in Fac[ol]tà, avendo dei timori pel caso in cui la Fac[ol]tà dovesse discutere accanto alla domanda del D[el] R[e]. Segno questo che il D[el] R[e] ha guadagnato terreno presso qualcuno della Fac[ol]tà ed il P[incherl]e teme un colpo di maggioranza.

Già lo stesso Arzelà tentenna, perché (mi ha detto) il rifiuto di un trasloco ad uno che è già prof[essor]e costituisce un grave schiaffo immeritato. E nota che l'Arz[elà] è con me in rapporti d'amicizia perché ci troviamo insieme a pranzo. Per questo appunto credo che al dunque si asterrà.

Invece il P[incherl]e è decisamente in mio favore in tutti i sensi dopo le conversazioni avute a Roma col Cr[emona], il S[egre] e il Bert[ini].

Il Ruffini che gode molta influenza in Fac[ol]tà è in relazione coi Modenesi (essendo ivi stato prof[essor]e) e quindi avrà certo ricevuto forti sollecitazioni pel D[el] R[e], ma siccome è uomo giusto, il P[incherl]e mi dice che non è da temerne. Egli stesso mi ha detto che il Cr[emona] gli ha parlato favorevolmente di me e che egli non sarebbe d'avviso di accogliere la domanda pura e semplice del D[el] R[e], ma piuttosto di rimettere la cosa ad una commissione.

Degli altri, naturalisti, che formano la maggioranza della Fac[ol]tà non so nulla sebbene con alcuni sia in buona relazione: ma il pericolo sta nel fatto che essi seccati dalla situazione che si prolunga vogliano uscirne nel modo che porta meno noie.

In tale condizione di cose io credo col P[incherle] che la meglio è di ottenere la conferma del mio inc[arico] con un semplice sollecito del Pres[ide]. Spero che egli acconsentirà a farlo ed allora bisogna ch'io agisca sul M[inistr]o perché lo accolga senz'altro (mi pare che ciò sia nel mio diritto perché la conferma doveva già esser venuta). Ma per questo non è il caso di ricorrere al Cr[emona].

Mi si è presentata un'altra occasione.

Ho veduto stamani il prof. Tizzoni, deputato, con cui sono in rapporti assai familiari: essendo caduto il discorso sulla mia questione egli mi ha offerto di parlarne al M[inistr]o (poiché torna a Roma in settimana). Se il Pres[ide] manderà il sollecito io mi varrò dell'offerta del T[izzoni]. Se no aspetterò che la Fac[ol]tà, col suo comodo, si riunisca e deliberi. Dopo tutto son persuaso che il trasloco di D[el] R[e] non verrebbe ora approvato. Non foss'altro perché tutti ritengono aver già proposto la conferma del mio incarico, tantoché mi consigliarono di cominciare le lezioni.

Chiudo la lunga lettera cominciata con questioni scientifiche dalle quali sono sceso allo studio degli umori della Fac[ol]tà. È proprio disgustevole che a questo dobbiamo ridurci!

Ti ringrazio delle affettuose offerte delle quali in caso profitterò liberamente.

Cordiali saluti

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 211, nota 1 a let. 226 (11.11.1895).
[2] Cfr. Caporali 1875.
[3] De Paolis 1878.
[4] Noether 1878.
[5] Enriques era ancora in attesa della conferma dell'incarico per l'anno accademico 1895-96.

233.

22 novembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

A me basta che in qualsiasi modo quando l'ultimo aggiunto è un fascio di curve ellittiche si costruisca *razionalmente* un sistema di C_6 con 8 p[un]ti 2-pli (sist[ema] ∞^2 almeno). Del resto il penultimo aggiunto che a me compare è almeno ∞^1 se no il prec[eden]te è già di curve ellittiche.

Io avevo anche pensato se non si potesse costruire razionalmente sulla sup[erficie] un sistema di grado n e gen[ere] π dove $n > 2\pi - 2$ nel qual caso l'analisi del processo di esaustione è già fatta nel tuo lavoro[1] sulle involuzioni. Mi pare che si dovrebbe riuscirvi ricorrendo ai successivi sistemi aggiunti di rango > 0. Capisco che questa via non sarebbe in ogni caso la più naturale e preferirei se il tuo calcoletto mi desse la costruzione *razionale* di quel sistema di sestiche.

Ma bada che per costruzione razionale intendo che si possa determinare il sistema segando la sup[erficie] F con un sistema raz[ionale] definito di sup[erficie].

A questo riguardo incontro già una difficoltà quando una delle sup[erficie] trasformate

$$F\ F'\ F''\ldots$$

è doppia: ma la difficoltà si supera subito. Se per esempio F'' è 2-pla posso avere F''' considerando la F_1'' trasf[ormata] di F' coll'agg[iunta] di rango 1, poi la F_1''' e staccando una curva immagine d'una sezione p[ia]na di F'. E così via.

Capisco che analogamente potrò compiere raz[ionalmente] l'operazione di *somma* d'un sistema raz[ionale] dato su F con *una* curva (immagine del 9° p[un]to base del fascio di cubiche).

Invece il solo fatto della *unicità* d'un certo sist[ema] lin[eare] su F non basta per poter dire che esso è dato raz[ionalment]e, ed in ciò appunto consisteva l'errore in cui cadevo quando volevo stabilire quel lemma di cui abbiamo più volte parlato. Analogamente (come già ti ho fatto osser-

vare)[2] su ogni curva raz[ionale] vi è una g_n^n ma non si determina sempre raz[ionalmente] se n è dispari.

Ti ringrazio dell'invio della nota di Noether.[3] Nella quale trovo data la rappresentaz[ione] dei p[ia]ni 2-pli con C_4 e C_6 limite proprio nel modo che ti avevo detto.

Quanto al p[ia]no 2-plo con C_{2n} lim[ite] e p[un]to $(2n-2)$-plo egli dice (senza citare) che si sa essere rappresentabile sul p[ia]no semplice. Probabilmente si riferisce al suo lavoro[4] Math[ematische] Ann[alen] III. Ma da quello non apparisce l'equazione che occorre risolvere per la rappresentazione, mentre serve all'uopo il procedimento che ti ho comunicato. (Quella dimostraz[ione] di N[oether] relativa alla unisecante d'un fascio raz[ionale] di curve raz[ionali] è incomprensibile, ma se essa è in sostanza simile a quella da te immaginata mi pare assai diversa dalla mia e non vedo come dia lo stesso resultato relativamente alle irraz[ionalità] che compariscono ecc. Non è così?).

Ed ora ti sottopongo due questioni didattiche.

Hai visto come ho svolto l'anno scorso la teoria delle coniche. Questo modo ha indubbiamente il vantaggio di anticipare di un mese (o due comprese le vacanze) la teoria delle coniche. Tutto sommato ti pare preferibile questa trattazione o quella colla polarità?

Il S[egre] come sai sarebbe per la 2ª soluzione.

Il mio assistente[5] mi consiglia a seguire la via dell'anno scorso per la quale propenderei. Che cosa ne dici?

La 2ª questione riguarda la Descr[ittiva]. Il modo con cui ho svolto la teoria della cubica gobba e delle quadriche (modo sintetico puro) mi conduce assai in lungo. Vorrei sostituirlo con una trattazione algebrico-geometrica.

Dopo aver detto cosa si intende per curve piane e sup[erficie] algebriche e loro ordini, noterei come ogni ragionamento sintetico si traduca in uno analitico e quindi non occorra distinguere i punti reali dagli immaginari. Allora (coll'ordinario metodo della Geom[etria] Sup[eriore]) si fa subito la teoria delle quadr[iche] e della cubica gobba come intersez[ione] di 2 quadr[iche] (in particolare coni) con una retta comune. Approvi? Così fa Bertini andando molto più innanzi. Non so che cosa ne direbbe il S[egre]. Ma credo che per gli studenti la cosa riuscirebbe facile e assai breve. L'anno scorso essi trovarono difficile quella 2ª parte, specie la generazione della cubica gobba colle stelle omografiche.

D'altronde non mi pare male che gli studenti acquistino familiarità col modo di ragionare adottato nella Geom[etria] sintetica dal Cremona e dallo Chasles in poi. Forse anche il Cr[emona] approverebbe ciò, ed in caso potrei

anche domandarglielo. In fondo nella G[eometria] Descr[ittiva] lo scopo è di arrivare il più rapidamente possibile alla rappresentazione e relativi problemi.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Castelnuovo 1894a.
[2] Cfr. p. 217, c.p. 231 (18.11.1895).
[3] Noether 1878.
[4] Noether 1871c.
[5] Eugenio Maccaferri, secondo l'Annuario dell'Università.

234.

24 novembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

In conclusione il resultato che tu mi dai è questo:[1]

Il penultimo sistema agg[iunto] puro, irriducibile ∞^1 almeno, il cui agg[iunto] si spezza in curve ellittiche d'un fascio (con 9 p[un]ti base), è un sistema di $C_{3\alpha}$ che ha come α-pli 8 di quei p[un]ti base, e come $(\alpha-2)$-plo o $(\alpha-1)$-plo il 9°, e più potrà avere altri p[un]ti base fuori di quelli ma (se non erro) 2-pli al più (essendo le $C_{3\alpha}$ incontrate in 2 p[un]ti da ogni curva ellittica).

Ora non è mai possibile che le curve agg[iunte] a $C_{3\alpha}$ si spezzino in più curve ellittiche di quel fascio se non è O *non base* per $|C_{3\alpha}|$ cioè $\alpha = 2$ o $\alpha = 1$ (caso che verrebbe escluso): infatti il sistema agg[iunto] avrebbe in O (punto di $C_{3\alpha}$) una molteplicità superiore a quella dovuta e ciò è assurdo perché la serie canonica su $C_{3\alpha}$ non ha p[un]ti fissi.

Dunque $\alpha = 2$ e le $C_{3\alpha}$ sono sestiche C_6 con 8 p[un]ti 2-pli, più forse al di fuori qualche punto base semplice (non 2-plo, ossennò sono ellittiche e si risale). Se le C_6 sono ∞^2 almeno la cosa è fatta; ma potrebbe essere ∞^1.

In tal caso sommo $|C_6|$ al sistema aggiunto $|C_3|$ ed ho un sist[ema] $|C_9|$ il cui agg[iunto] è quello delle C_6 con 8 p[un]ti base 2-pli e non altri.

Va bene?

Se sì fammi il piacere di scrivermi chiaramente il ragionamento che ti conduce all'enunciato posto in principio, in modo da eliminare ogni dubbio proveniente dal possibile staccamento di parti fisse nell'aggiunzione ecc.

Se no, ciò che tu mi dai come accertato non mi basta: ho proprio bisogno della unicità del sist[ema] di gen[ere] 2 *sulla superficie* ed anche così le cose si complicano.

Venendo alle questioni didattiche, sono persuaso anch'io che la trattazione di Reye[2] delle coniche sia più facile per gli studenti: ad essi non dà mai noia una dimostrazione artificiosa. Ma io detesto invece l'artificio e quindi non so acconciarmi al tuo consiglio. In questo vado d'accordo col S[egre] il quale è più intransigente di me.

Io sono disposto per ragioni didattiche a quelle maggiori transazioni che non obbligano a introdurre artifici. È per me artificiosa ogni dimostrazione che capita una volta non si ricorda senz'altro. Io sono persuaso che quando avessi fatto per anni la teoria di Reye non la ricorderei *senz'altro*: così p[er] e[sempio] io non ricordo subito la dimostrazione ordinaria del teor[ema] di Pascal se non vado a rivedere l'ordine in cui si dispongono le lettere ecc. Siffatte dimostrazioni non illuminano, e gli studenti le preferiscono appunto perché non vi è in esse nulla di sostanziale da capire: quindi io le ritengo inutili didatticamente: tanto varrebbe dare agli studenti il solo enunciato. Di dimostrazioni di quel genere nelle mie lezioni ve ne sarà forse 2 o 3 dove non saprei proprio come toglierle; ma non mai in punti sostanziali.

Dunque vedendo che tu classifichi le tre trattazioni (dal punto di vista didattico) proprio in ordine inverso a quello che tutti riconosciamo preferibile sotto l'aspetto scientifico (e che ad ogni costo il S[egre] non vorrebbe abbandonare) io mi atterrò alla mia trattazione dell'anno scorso. Nella quale non è disprezzabile il vantaggio che può venire agli studenti dall'acquistare familiarità con figure spaziali.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Forse l'ultimo ragionamento relativo a quei sistemi lineari semplifica tutto. Se $|C_n|$ ha il suo agg[iunto] spezzato in curve ellittiche d'un fascio ($C_{3\alpha}$ con 9 p[un]ti α-pli) e se esso ha fuori dei p[un]ti ρ-pli al più, consideriamo addirittura $|C_n + \rho C_{3\alpha}|$ e dopo ρ aggiunzioni abbiamo un sist[ema] con soli 9 p[un]ti base, necessariamente di uguale molteplicità (per la 1ª osservazione): segue subito dai tuoi calcoletti ridotti più semplici quel che si vuole.

Va bene?

[1] Cfr. p. 214, let. 229 (16.11.1895).
[2] Reye 1866-68.

235. [c.p.]

[Bologna] 24[1] novembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto ulteriori bozze del mio lavoro[2] dall'Acc[ademia] dei XL. Trovo qualche pasticcetto dipendente dal fatto che le curve subaggiunte a $|C|$ (non sing[olare]) sono definite a meno di punti. Così non è vero che queste subag[giunte] abbiano un punto base i-plo di $|C|$ come $(i-1)$-plo se $|C|$ ha curve fond[amentali] proprie. Tutto del resto si accomoda con lievi modificazioni e (ciò che a te non dispiacerà) il teor[ema] fond[amentale][3] viene enunciato non più *sull'ente*[4] ma sopra una ***superficie*** senza singolarità come vi è messo nel Bericht.[5] Dopo ciò l'utilità dell'***ente*** è molto discutibile, ma non posso ormai sopprimerlo.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] 26, dal timbro postale.
[2] Enriques 1896d.
[3] Cfr. Enriques 1896d, 269-73.
[4] Cfr. p. 188, let. 200 (16.4.1895).
[5] Enriques-Castelnuovo 1896, 385.

236.

Mercoledì 28 novembre [18]95[1]

Carissimo Castelnuovo

Ultime notizie *riservate*!

Il M[inistr]o domanda alla Fac[ol]tà se vuole il trasloco del D[el] R[e] mostrandosi favorevole.[2]

La Fac[ol]tà delibererà Sabato. P[incherl]e e Ruffini proporranno la mia conferma per ora e la nomina di arbitri per la decisione definitiva. È probabile che tale decisione venga approvata. Ed allora sarà il caso di rivolgersi al Cr[emona] perché l'appoggi presso il M[inistr]o.

Ti informerò in proposito.

Ho ricevuto ieri una cartolina del Cr[emona] sollecitante la revisione delle bozze del mio lavoro[3] (Acc[ademia dei] XL). Ho dovuto quindi rispondergli che il ritardo sopravvenuto dipende dall'aver riconosciuto una inesattezza che debbo correggere. Conto poter rimandare le bozze in settimana. Se egli fosse inquieto di ciò e te ne parlasse, prendi le mie difese.

Il calcoletto che mi comunichi unito alla mia osservazione[4] mi pare risolva nel senso voluto quella questione sui sistemi lineari, tantoché mi

pare di potere con tranquillità esporre i resultati ottenuti. Ti ho già esposto quali essi sieno e come ci si pervenga relativamente alla determinazione delle irraz[ionalità] da cui dipende la risoluzione d'un equaz[ione] raz[ionale] $f(x\ y\ z) = 0$. L'applicazione alle var[ie]tà con un fascio lineare di superficie razionali porta ai 3 tipi di S_3 2-pli con sup[erficie] lim[ite] F_{2n} dotata di p[un]to $(2n-2)$-plo, o di retta $(2n-4)$-pla o di retta $(2n-6)$-pla contenente 2p[un]ti $(2n-3)$-pli infinitamente vicini, o alle var[ie]tà con un fascio di sup[erficie] (a sez[ioni] ellittiche) d'ord[ine] 3, 6, o 9. Se vi è una unisecante le sup[erficie] del fascio si hanno soltanto gli spazi 2-pli.

In particolare ciò vale se vi è una rete di sup[erficie] raz[ionali] su V. Ma se le sezioni di 2 sup[erficie] della rete non si compongono di curve raz[ionali] o ellittiche si hanno su V ∞^3 curve raz[ionali] o ellittiche C (costituite dai fasci *noccioli* sulle sup[erficie]). Preso un p[un]to O vi sono per esso ∞^1 curve C riferite alle sup[erficie] del fascio per O: su ciascuna si può individare *un* punto; variando la C si ha una curva raz[ionale] K riferita *razionalmente* al detto fascio. Ora facciamo variare O su K ecc. si ottiene in generale il riferimento di V ad una involuz[ione] di S_3. Può anche darsi che K non muti mutando O su K, ed in tal caso vi è su V una congruenza di curve raz[ionali]. Questo caso deve essere ulteriormente studiato. Per ciò mi limito per ora ad enunciare i resultati relativi alle V con un fascio di sup[erficie] raz[ionali]. Li ho raccolti in una nota[5] che ti mando, dove è indicato sommariamente il procedimento seguito. Essa riempie già lo spazio concesso ad una nota lincea.

Se tutto ti par chiaro, ti prego di dare questa nota al Cr[emona], che potrebbe presentarla Domenica.

Io ho già in pronto quasi tutto il lavoro diffuso per la parte che si riferisce alle irrazionalità da cui dipende ecc.: vi manca soltanto quel lemma relativo ai sistemi lineari.[6] Mancano poi le applicazioni alle V con un fascio di sup[erficie] raz[ionali]; ma ho analizzato tutto e non vi sono difficoltà. Ho anzi la costruzione *diretta* delle var[ie]tà secanti sulle sup[erficie] del fascio le curve del sistema aggiunto.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] I due fogli di cui si compone l'originale della lettera si trovavano in buste distinte. Sul primo foglio (da «Carissimo Castelnuovo» a «Io ho già in pronto quasi tutto il lavoro diffuso per la parte che si riferisce») Castelnuovo ha apposto a matita la data «14 novembre [18]95», mentre il secondo foglio reca, per mano di Enriques, la data «Mercoledì 28 Nov[embre 18]95». Si osservi che il 28 novembre era giovedì e che la riunione del Consiglio di Facoltà, cui si allude all'inizio della lettera, si tenne sabato 30 novembre. La lettera dovrebbe quindi essere del 27 (mercoledì).

[2] Cfr. p. 172, nota 1 a let. 175 (31.1.1895) e p. 173, let. 178 (3.2.1895).
[3] Enriques 1896d.
[4] Cfr. in particolare p. 223, let. 234 (24.11.1895).
[5] Enriques 1895b; cfr. anche p. 211, nota 1 a let. 226 (11.11.1895).
[6] Cfr. p. 215, nota 3 a let. 229 (16.11.1895).

237. [c.p.]

[Bologna] 28 novembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio dell'interesse che continuamente mi dimostri occupandoti di me.

La prospettiva di cui mi parli se mi sarà offerta meriterà certo di essere ponderata anche in base ai resultati di ciò che ora sta maturando.

Ho quasi finito le correzioni al mio lavoro,[1] un po' più lunghe di quel che non pensavamo. Non mi pare che occorrano in conseguenza di ciò modificazioni al tuo lavoro.[2] L'enunciato del teor[ema] fond[amentale][3] viene ad essere quello posto nel Bericht:[4] l'aggiunzione resta definita su una sup[erficie] invece che sull'ente: cadono i resultati relativi alla molteplicità delle curve *sub*aggiunte (non agg[iunte]) nei p[un]ti base di $|C|$. Ecco tutto.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1896d.
[2] Enriques si riferisce ai lavori di Castelnuovo in corso di pubblicazione, in particolare a Castelnuovo 1896a.
[3] Cfr. Enriques 1896d, 269-73.
[4] Enriques-Castelnuovo 1896, 385.

238.

28[1] novembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho avuto oggi un abboccamento col D[el] R[e] presentatomi da Arz[elà]. Egli mi ha domandato ch'io l'aiutassi ad ottenere il chiesto trasloco offrendomi di appoggiarmi in compenso a Modena.

Naturalmente gli ho risposto di no. Gli ho detto francamente che mi sarebbe dispiaciuto di abbandonare Bologna e quindi non potevo cercare di procurarmi un dispiacere, ma in ogni caso non gli avrei serbato alcun rancore. Siamo rimasti in ottimi rapporti, sebbene egli abbia insistito a più riprese (inutilmente) per persuadermi.

Credo che egli sia oggi affaccendato per preparare la battaglia di domani.[2] Stimo questo un buon sintomo perché mostra che egli non ha messo in moto influenze capaci di persuadere in ogni caso il M[inistr]o.

Data la deliberazione della Fac[ol]tà per la soluzione oggettiva che ti accennavo ieri[3] credi che il Cr[emona] avrà difficoltà di appoggiarla presso il M[inistr]o? Ho sempre il dubbio se si sia fatto bene a non prevenire il Cr[emona] della cosa, accennandogli almeno che la mia conferma non è ancora venuta e che ciò dà luogo a dei timori (non parlandogli di quella proposta che si deve ignorare).

Ormai non c'è che da aspettare la decisione della Fac[ol]tà. E te la comunicherò domani.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Questa lettera sembra essere stata scritta il giorno precedente la prevista riunione della Facoltà del 30 novembre 1895.

[2] Enriques allude alla prevista riunione della Facoltà.

[3] Cfr. p. 225, let. 236 (28.11.1985).

239.

Sabato 30 novembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti comunico in fretta il resultato della seduta di Fac[ol]tà.

La Fac[ol]tà tenuto conto che alla cattedra di G[eometria] Pr[oiettiva] aspirano oltre il D[el] R[e], il P[ier]i ed io, propone al M[inistr]o che per l'anno corrente venga confermato il mio incarico, come già aveva deliberato in Giugno, e che per l'assegnazione della cattedra il M[inistr]o stesso consulti una commissione che decida fra i *3*, oppure autorizzi la Fac[ol]tà a rivolgersi per la scelta a persone competenti.

Io sono contento di questa soluzione oggettiva accolta unanimemente dalla Fac[ol]tà.

Ora importerebbe che il M[inistr]o l'accogliesse, e perciò mi faresti gran piacere a pregare il Cr[emona] a mio nome che volesse interessarsene. Potrei scrivergli direttamente, ma forse parlandogli tu a voce otterrai di più.

Del resto egli può propugnare presso il M[inistr]o questa soluzione senza offendere nessuno.

Ti ringrazio anticipatamente.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Grazie della presentazione della mia nota[1] al Cr[emona].

Ti manderò pel Bericht[2] il § [paragrafo] sul $p^{(1)}$ virtuale quando avrò le ulteriori bozze.[3]

[1] Enriques 1895b.
[2] Enriques-Castelnuovo 1896.
[3] Si tratta delle bozze di Enriques 1896d.

240.

1 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho saputo stasera (dal Righi) che la deliberazione della Fac[ol]tà sebbene presa infine coll'accordo di tutti fu molto contrastata (la seduta durò quasi 3 ore).

Il Pres[ide] (Ciaccio, naturalista) voleva far precedere la votazione sulla proposta del M[inistr]o ad ogni altra discussione, tendendo così a forzare la mano alla Fac[ol]tà, ed era anche appoggiato da altri. Ciò si spiega colle raccomandazioni piovute da ogni parte a favore del D[el] R[e]. Arz[elà] era titubante e stimava che la deliberazione oggettiva della Fac[ol]tà potesse offendere il D[el] R[e]. Il bello è che egli non solo è con me in ottimi rapporti personali (perché mangiamo quasi sempre insieme), ma mi dichiarava ieri che (informatosi) gli era stato detto ch'io supero gli altri 2 per valore scientifico; ma mi soggiungeva francamente che il D[el] R[e] essendo già prof[essor]e, rifiutargli un trasloco gli sembrava offesa immeritata. L'Arz[elà] che è di cuore ottimo si è lasciato commuovere dalle condizioni di famiglia per cui il D[el] R[e] dice desiderare il trasloco.

Se oggi[1] il Righi non avesse sostenuto la soluzione oggettiva coll'autorità di cui gode presso i naturalisti (anche per la mancanza di qualcuno di essi più legato con me) si sarebbe visto probabilmente Arz[elà] coi naturalisti votare contro i 3 matematici (P[incherl]e, Ruffini, Fiorini) pel trasloco del D[el] R[e].

Da ciò vedi come la mia condizione sarebbe disperata se il M[inistr]o non accogliesse la proposta odierna. Ed anche se il M[inistr]o rimettesse la nomina degli arbitri alla Fac[ol]tà chi sa cosa accadrebbe, perché alcuni naturalisti fecero togliere dall'ordine del giorno la frase in cui si pregava il M[inistr]o di valersi di una delle ultime commissioni nominate per concorsi o promozioni di Geom[etria].

Mi dicono poi che la lettera del M[inistr]o è concepita in modo molto propensivo pel D[el] R[e]. Non mi sorprenderebbe affatto che il M[inistr]o lo nominasse senz'altro dicendo alla Fac[ol]tà che egli ha interpellato per suo conto persone competenti.

La cosa non potrà andar bene se Cr[emona] non se ne interessa prontamente ed efficacemente. Anche P[incherl]e gli ha scritto per conto suo pregandolo di ciò.

Ho scritto al S[egre] informandolo.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Rimando le bozze[2] all'Acc[ademia] dei XL colle correzioni.

[1] Enriques si riferisce evidentemente alla seduta della Facoltà del 30 novembre 1895.
[2] Si tratta delle bozze di Enriques 1896d.

241.

2 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Dopo la lettera che ti ho scritto ieri avrai capito che la deliberazione presa dalla Fac[ol]tà era quel che di meglio si potesse desiderare in questo momento.

E se il M[inistr]o non vorrà far lui la commissione (la Fac[ol]tà vuol proprio la *commissione* se si tratta del M[inistr]o, consiglio di persone competenti isolate se si tratta di lei) e rimetterà il giudizio alla Fac[ol]tà perché provveda, vi sarà il vantaggio pratico che egli avrà assunto moralmente un impegno preventivo di accogliere la deliberazione della Fac[ol]tà.

Se il M[inistr]o non vuole entrare nella procedura da seguirsi dalla Fac[ol]tà, basta che rimetta a lei il giudizio fra i *3*,[1] e la Fac[ol]tà è ormai legata a seguire quella procedura.

Prevedevo che il Cr[emona] fosse un po' inquieto pel ritardo nell'invio delle bozze, ma a dire il vero la lentezza con cui procede la pubblicazione non dipende da me: l'ultimo incidente[2] ha fatto perdere solo una settimana.

Ti ringrazio nuovamente di tutto quanto fai per me.

Nelle condizioni attuali è più facile che tu sia informato prima di me di quel che succederà.

Ho veduto il D[el] R[e] che si è mostrato contento della decisione della Fac[ol]tà. In seguito a ciò Arz[elà] è contentissimo e spera che il M[inistr]o non tornerà più a metter nell'imbarazzo la Fac[ol]tà e risolverà lui la questione come gli pare.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Il S[egre] mi ha scritto l'altro giorno che crede poter rispondere di «sì» alla domanda che noi gli abbiamo rivolto a Firenze (circa le singolarità).[3]

[1] Alfonso Del Re, Enriques e Mario Pieri, aspiranti alla cattedra di Bologna.
[2] Si tratta delle bozze di Enriques 1896d; per l'«incidente» menzionato nel testo cfr. p. 225, c.p. 235 (24.11.1895).
[3] Cfr. p. 170, nota 1 a c.p. 172 (28.1.1895).

242.

4 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ringrazio di quanto hai fatto per me, e sono dolente di non poter avere dal Cr[emona] l'appoggio sperato, sebbene riconosca giuste le sue ragioni di delicatezza. Io credevo che egli avrebbe potuto esporsi in questa condizione di cose trattandosi d'una soluzione oggettiva[1] che il D[el] R[e] stesso mi ha detto non dispiacergli (naturalmente non parlare di ciò al Cr[emona]).

Ho scritto al Tizzoni prof[essor]e di qua e deputato che trovasi a Roma.

Ho scritto al S[egre] perché interessi il D'O[vidio] come mi hai suggerito.

Ho scritto finalmente al Bertini perché veda se è il caso di interessare il Dini, il quale però temo sia inquieto con me perché nelle ultime elezioni non ho sostenuto il suo candidato.

Il Cappellini[2] deve tornare qui oggi: appena lo potrò vedere gli parlerò della cosa.

Ma se dopo tutto vedrò che non viene subito la conferma del mio incarico verrò io stesso a Roma a parlare con Ferrando e a dirgli ch'io non posso seguitare a far lezione (come fin qui ho fatto nell'interesse della Scuola) senza che il M[inistr]o mi confermi subito l'incarico. Per la decisione definitiva il M[inistr]o prenda pur tempo.

Nella tua lettera vi è un'osservazione non giusta.

Tu dici che la Fac[ol]tà ha mostrato di dubitare del valore del D[el] R[e]. No. La Fac[ol]tà ha dichiarato che ritiene valenti tutti e *3* gli aspiranti alla cattedra, e solo ha mostrato di voler fare la scelta in base ad un criterio oggettivo, rimettendosi al giudizio di persone competenti.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Si tratta della delibera della Facoltà: cfr. p. 228, let. 239 (30.11.1895).
[2] Così nell'originale. Giovanni Capellini (1833-1922) era rettore dell'Università di Bologna.

243. [c.p.]

[Bologna] 6 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Le carte della Fac[ol]tà non sono ancora state trasmesse al M[inistr]o. Quando ciò sarà accaduto te ne avviserò e ti sarò grato se vorrai assumere informazioni in seguito alle quali potrò regolarmi.

Ringrazia il Fano dell'avvertimento circa il lavoro di Lie[1] (e salutalo). Guarderò se ci sono qui i Leipziger Berichte. Del resto è troppo naturale che non mi citi. Ma mi interesserà di vedere se pel fatto del considerare gruppi con omogr[afie] aventi p[un]ti uniti multipli, nascono tipi nuovi.

Ho ripensato un po' ai piani doppi di genere 1:[2] vi è qualche pasticcetto di cui ti parlerò. Dalla configurazione dei flessi d'una cubica si possono derivare (se non sbaglio) dei p[ia]ni 2-pli di gen[ere] 1; ma credo che il loro gen[ere] num[erico] sia < 1.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Lie 1895b.

[2] Cfr. Enriques 1896e. Le ricerche di Enriques su questi piani doppi risalgono già ai primi mesi del 1894: si veda in particolare p. 105, c.p. 93 (14.5.1894) e p. 106, let. 94 (16.5.1894).

244. [c.p.]

[Bologna] 10 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Soltanto ieri (incredibile lungaggine della segreteria!) è stata trasmessa al M[inistr]o la deliberazione della Fac[ol]tà. Il D'O[vidio] non vuole occuparsi della cosa per riguardo al D[el] R[e]. Ma il Volt[erra] ha scritto al D[ini] di Pisa cui ha parlato anche il Bert[ini], e questi si muoverà presso il M[inistr]o perché accolga la proposta della Fac[ol]tà. Il Cap[ellini] a cui avevo scritto a Roma invece di parlare al M[inistr]o si è diretto al Cr[emona].

In ogni modo spero che l'appoggio del D[ini] basti a scongiurare il pericolo.

Ho ripreso a pensar ad una questione sulle eq[uazioni] diff[erenziali] di cui già ti accennai;[1] ne ho scritto al Fano.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Cfr. p. 179, let. 185 (28.2.1895).

245. [c.p.]

[Bologna] 11 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ho dato ieri le ultime notizie. Ora se potrai sapere qualche cosa al M[inister]o mi farai molto piacere.

A Firenze andrò alla fine della settimana se ci lasceranno finire: in ogni caso ti avviserò.

Approvo ciò che mi scrivi riguardo al Bericht,[1] ma un po' più lungo o un po' meno tanto fa, io non farei tagli: ché il lettore trovi nel Bericht l'accenno a questioni non completamente risolute, mi pare assai utile.

Ho avuto in questi giorni lunghe conversazioni col P[incherl]e sulle sue operazioni funzionali distributive: sono cose molto interessanti di cui ti parlerò a Firenze.

Cordiali saluti tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.

246. [c.p.]

[Bologna] 14 dicembre [18]95

Carissimo

Due righe in fretta per avvertirti che sarò domani a Firenze. Avvisami della tua venuta.

Il D[ini] mi fa sapere che recatosi al M[inister]o prima che la deliberazione della Fac[ol]tà fosse trasmessa gli hanno assicurato che così stando le cose confermeranno il mio inc[arico].

Cordiali saluti tuo aff.mo
F Enriques

247. [c.p.]

[Firenze] 17 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Grazie delle notizie fornitemi: mi dispiace averti recato questa noia sapendo come sia noioso l'assumere informazioni al M[inister]o.

Anche il D[ini] mi scrive che al M[inister]o gli promisero la conferma del mio incarico e che egli ritiene la cosa si farà in questi giorni.

Aspetto un avviso preciso circa la tua venuta. Spero che potrai trattenerti qui qualche giorno.

Salutami il Fano che sarei pur lieto di vedere qui di passaggio.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

248. [c.p.]

[Firenze] 27 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto le risposte di P[incherl]e, S[egre], Bert[ini], Som[igliana], Cr[emona]. I primi 3 non sanno decidersi a darmi un consiglio: Bert[ini] e Som[igliana] mi confermano ciò che tu mi dicevi riguardo ad un eventuale incarico.

Il Cr[emona] mi spinge risolutamente a non lasciare Bologna. Ed a questo consiglio, che anche a noi è sempre parso il migliore, io mi atterrò.[1]

Aspetterò soltanto a rispondere definitivamente di aver notizia dell'effettuata conferma del mio incarico.

Saluti affettuosissimi ed auguroni a tutti i tuoi.

Tuo
F Enriques

[1] Dalle lettere successive si chiarirà che, in seguito al trasferimento di Giulio Vivanti, Enriques ebbe un'offerta di incarico alla Scuola Normale della Facoltà di Scienze di Pavia; cfr. anche p. 210, nota 1 a let. 225 (9.11.1895).

249.

28 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Ti ho informato ieri in succinto delle risposte avute riguardo alla questione di Pavia. Quella del P[incherl]e è come quelle di Bert[ini] e S[egre] incerta: il P[incherl]e mi dice poi che un affidamento dalla Fac[ol]tà io l'ho già avuto colla recente deliberazione e se il M[inistr]o non imporrà diversamente la Fac[ol]tà seguirà la via già indicata, quindi gli pare inutile la mia richiesta.

Il Dini mi scrive che al M[inister]o gli hanno detto essere stato confermato il mio incarico e gli hanno aggiunto che la decisione ulteriore per l'anno prossimo si farà secondo la proposta della Fac[ol]tà.

Dopo ciò, come vedi, non è più da esitare e rinunzierò all'offerta dei Pavesi.

Ma andrò domani o domani l'altro a Pisa a parlarne col Dini stesso per ottenere che egli solleciti il M[inistr]o a mandare la risposta a Bologna, affinché tutto *si possa* fare in tempo.

Vado appuntando le modificazioni proposte al Bericht[1] con lentezza però, dovendo anche occuparmi delle litografie del mio corso.[2]

Se però tu ripasserai di qua al tuo ritorno, fermandoti almeno una giornata, potrò ridarti il Bericht e potremo riparlare di alcune di quelle modificazioni.

Il tuo amico laureato a Torino con dissertazione filosofica è quel Levi di cui ci parlò il S[egre]?[3] Sono lieto di vedere la tua evoluzione filosofica: non dubito che, se te ne occuperai, prenderai interesse anche a quelle questioni.

Ti mando la mia nota del Circolo.[4]

Tanti affettuosi saluti

tuo

F Enriques

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.

[2] Enriques 1894-95a e 1894-95b.

[3] Corrado Segre in una lettera del 16 luglio 1895 aveva scritto a Castelnuovo che stava leggendo la tesi di laurea di Alberto Levi, poi pubblicata nelle due note: A. Levi 1896a e 1896b.

[4] Enriques 1896a, presentato all'adunanza del Circolo Matematico di Palermo il 25 agosto 1895.

250.

31 dicembre [18]95

Carissimo Castelnuovo

Sono stato ieri a Pisa a parlare col Bert[ini], Bi[anchi] e D[ini]. Quest'ultimo mi ha assicurato che il M[inistr]o oltre a confermare il mio incarico ha risposto alla Fac[ol]tà che proceda ad una proposta per l'anno nuovo sentite persone competenti. Pare dunque che vi sia una garanzia seria, quasi un impegno da parte del M[inistr]o di seguire quella proposta.

Ho scritto oggi stesso a Pavia rinunziando.

In confidenza debbo dirti che ho creduto mio dovere d'amicizia comunicare al Levi-Civita la proposta avuta e la mia rinunzia affinché egli possa in caso presentare ai Pavesi anche il suo nome. Ora vengo a sapere che ad esso pure i Pavesi avevano pensato; non so cosa risolveranno.[1]

In ogni modo ti prego nuovamente di mantenere la riserva su questa confidenza anche per riguardo al Tedone che terrebbe molto al posto di Pavia e che è in disagiate condizioni economiche.

L'enunciato che mi comunichi mi pare segua subito dalla regolarità di $|rC|$ per r assai grande, ma è certo interessante la nuova definizione del p_n che così si ottiene.

Se $|C|$ o $|rC|$ ha curve fondamentali proprie il tuo enunciato andrà modificato tenendo conto della loro valenza, ma è probabilmente estendibile.

Ti rinnovo cordiali saluti ed auguri anche a nome di tutti i miei.

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Tullio Levi-Civita fu poi in effetti nominato professore interno alla Scuola Normale della Facoltà di Scienze di Pavia.

251. [c.p.]

[Firenze] 3 gennaio [18]95[1]

Carissimo Castelnuovo

Non ho più ricevuto bozze[2] dalla tipografia dei XL: non sarà male se vuoi sollecitarle - grazie anticipate.

Ho saputo dal P[incherl]e che a Bologna non è ancora giunta la risposta del M[inistr]o[3] mentre il D[ini] mi aveva detto ch'era partita, ma si tratterà di uno dei soliti ritardi burocratici. Aspettiamo qualche giorno e se non avrò notizia che la risposta sia giunta a Bologna ti pregherò di informarti come gentilmente mi offri.

Ti manderò il Bericht[4] fra qualche giorno.

In queste vacanze all'infuori di ciò o di un po' di preparazione delle lezioni non avrò fatto nulla!

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] 1896, dal timbro postale.

[2] Si tratta delle bozze dell'articolo Enriques 1896d.

[3] Enriques era in attesa della conferma dell'incarico di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Bologna: cfr. in particolare le ultime lettere del 1895.

[4] Enriques-Castelnuovo 1896.

252. [c.p.]

[Firenze] 7 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto la tua cartolina, e ti ringrazio del disturbo che ti sei preso per me relativamente all'Acc[ademia] dei XL, e di quello che ti dispo-

ni a prenderti presso il M[inister]o. A me non è giunta nessun'altra notizia.

Ti ho mandato ieri il Bericht.[1]

Domani l'altro sera torno a Bologna.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.

253. [c.p.]

[Firenze] 9 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Ricevo in questo momento la tua cartolina.

Parto per Bol[ogna] fra qualche ora e lì spero di avere qualche notizia. Avremo meno di un mese di lezione in capo al quale sarò lietissimo di rivederti qua dove (come mi dicesti) hai fissato di trovarti coi tuoi (che anche i miei saranno molto contenti di conoscere).

Mi sono dimenticato di chiederti due cose: la lettera mia seconda[1] dove ti parlavo delle sup[erficie] di gen[ere] 1 ($p_g = p_n = 1 \;\; P = 1$), e l'importo del mio debito per gli estratti della nostra nota[2] dei C[omptes] R[endus].

In questi ultimi giorni (credo di non avertene parlato) ho frequentato il laboratorio di Patologia generale prendendo delle lezioni molto interessanti di biologia. Avendo fatto relazione coll'assistente a quella cattedra mi propongo di continuare anche nelle successive vacanze la mia istruzione biologica, che contraccambio insegnando al detto ass[istente] il calcolo.

Affettuosi saluti anche a nome dei miei

tuo
F Enriques

[1] Questa lettera, restituita a Enriques, non è stata ritrovata nella corrispondenza conservata da Castelnuovo.

[2] Enriques-Castelnuovo 1895.

254. [c.p.]

[Bologna] 10 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Due righe per avvertirti subito che è venuta la mia conferma e l'invito alla Fac[ol]tà di provvedere secondo il suo ordine del giorno.[1]

Il decreto è a partire dal 1° Gen[naio] sicché mi tolgono 2 mesi, ma dopo quanto ha corso pericolo di succedere questo è il minor male.

Cordiali saluti in fretta

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Cfr. p. 228, let. 239 (30.11.1895).

255. [c.p.]

[Bologna] 12 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto ieri la tua lettera insieme alla mia[1] che tratta delle sup[erficie] di gen[ere] 1: è appunto ciò che desideravo; grazie: e grazie anche dell'affettuosa cartolina d'oggi.

Ti mando la mia nota lincea.[2] A proposito, mi accorgo di avere smarrito gli indirizzi di Pic[ard], Humb[ert] e Painlevé. Li hai tu? Trovo qualche difficoltà nel preparare le generalità sulle curve e sup[erficie] alg[ebriche] per le lezioni di Descr[ittiva] (lezioni che debbono precedere quelle sulle quadriche e cubica gobba). Volendo andar per le brevi bisogna fare di gran tagli.

Affettuosi saluti

tuo
F Enriques

[1] Cfr. p. 237, c.p. 253 (9.1.1896).
[2] Enriques 1895b.

256.

13 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Prima che gliene abbia inviato l'estratto, il Noether ha veduto la mia ultima nota lincea[1] sui Rendic[onti] e mi scrive una gentile cartolina chiedendomi il lavoro[2] diffuso per i Math[ematische] Annalen. Naturalmente accetto.

Il Noether mi domanda anche come si sta ora rispetto alla questione della M_3 (var[ie]tà cubica?) di S_4, se cioè le recenti ricerche di Picard e mie permettono di considerarla come risoluta, ed in qual senso.[3]

A questo io rispondo che dalle mie ricerche nulla segue di nuovo intorno alla M_3, e che ignoro l'esistenza di qualche lavoro di Picard che possa collegarsi all'argomento. Tu hai veduto qualcosa in proposito?

Nella cartolina che scrivo oggi al N[oether] non mi pare di dovergli far cenno del nostro Bericht;[4] saremo a tempo a scrivergli quando gliene faremo l'invio.

Ti accludo l'importo del mio debituccio per la nota[5] collettiva dei C[omptes] R[endus] (£ 7).

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1895b.
[2] Enriques 1897a.
[3] Max Noether si riferiva al problema della razionalità o meno dell'ipersuperficie cubica non singolare dello spazio proiettivo a quattro dimensioni: a tale proposito si veda anche p. 85, let. 74 (5.4.1894).
[4] Enriques-Castelnuovo 1896.
[5] Enriques-Castelnuovo 1895.

257. [c.p.]

[Bologna] 15 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Nella cartolina di risposta al N[oether] scritta subito, non gli ho parlato del Bericht:[1] ma se egli mi scriverà di nuovo (avendogli domandato notizia del lavoro di Pic[ard]), gliene potrò parlare. Del resto le promesse al N[oether] sono ormai, per consuetudine nostra, a lunga scadenza e non credo ch'io potrò mandargli così presto il lavoro.[2]

Ho ricevuto le bozze dell'ultima parte della Memoria[3] dei XL.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Grazie degli indirizzi.[4]

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.
[2] Enriques 1897a.
[3] Enriques 1896d.
[4] Cfr. p. 238, c.p. 255 (12.1.1896).

258.

17 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto prefazione e ultimo cap[itolo] del Bericht.[1]

Ho letto subito la prefazione che approvo senza riserve: è abbastanza poetica senza averne l'aspetto; ci si sente l'animo di un pittore della scuola impressionista!

In nota o in fondo si potrebbe aggiungere l'elenco completo dei lavori sulle sup[erficie] passati in rassegna, disposti secondo l'ordine cronologico. Non sarebbe neppure inopportuno un indice.

Vuoi scrivere al N[oether] subito o appena ultimato il lavoro? ((Per parte mia ti restituirò il manoscritto prestissimo)).

Forse ho fatto male a non parlargli della cosa nell'ultima cartolina; ma non sapevo come entrare in argomento, giacché mi pare che si tratti soltanto di avvertirlo che siamo disposti a mandare ad effetto la promessa fattagli l'anno scorso e da lui richiesta[2] e teniamo a sua disposizione il lavoro pronto per l'invio.

Come ti ho detto aspetto dal N[oether] una risposta riguardo al lavoro del Pic[ard]:[3] se essa viene, io scrivendogli gli farò cenno del Bericht compiuto di cui tu ti proponi fargli l'invio secondo la promessa dell'anno scorso, e gli dirò che solo più tardi (ed a tempo illimitato) io potrò realizzare la mia ultima promessa[4] (da ciò indipendente). Va bene?

Informami dunque se e come scrivi al N[oether], come io ti informerò se egli mi scrive ed in questo caso (non essendovi premura) aspetterò la tua replica prima di rispondere.

Metti pure il Padoa in relazione con me: ne sarò contentissimo!

Parlando coll'Arz[elà] dei concorrenti al premio dei Lincei gli ho fatto i 4 nomi di cui mi hai scritto: egli si è mostrato meravigliato per gli ultimi due di cui ha avuto recente occasione di esaminare i lavori per la promozione a ord[inario], specie per il P[asca]l di cui la promozione è stata messa in dubbio un momento. Tutti ritengono che il premio venga diviso fra il S[egre] e il V[olterra], e speriamo che così sia.[5]

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Per Pavia (prof[essore] int[erno] alla Sc[uola] Norm[ale]) sarà fatta una specie di concorso fra Fano, Levi-Civita e Tedone,[6] i quali saranno invitati a presentare i loro titoli. È una soluzione giustissima. Ignoro chi dovrà giudicare dei titoli presentati: probabilmente saranno gli stessi prof[essori] di Pavia.

Questa Fac[ol]tà ricevuta nell'ultima adunanza la comunicazione della risposta del M[inistr]o ha creduto opportuno di rimandare la nomina degli arbitri[7] ad una prossima adunanza da tenersi a tempo indeterminato. Quelli con cui ho parlato dicono che non vi è furia e sono d'opinione che la più bella cosa che si possa fare a proposito della questione sia... di dormirci su. E purché si sveglino bene, ci vorrà pazienza.

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.
[2] Cfr. p. 161, c.p. 159 (27.12.1894).
[3] Cfr. p. 238, let. 256 (13.1.1896).
[4] Cfr. Enriques 1897a.
[5] In effetti il Premio Reale per la Matematica dell'Accademia dei Lincei per il 1895 venne assegnato a Corrado Segre e a Vito Volterra. Tra i concorrenti figurava anche Ernesto Pascal: cfr. la *Relazione al Premio Reale per la Matematica pel 1895*, «Rend. Accad. Lincei», (5), 7 (1898), 354-74.
[6] Cfr. p. 235, let. 250 (31.12.1895).
[7] Cfr. p. 228, let. 239 (30.11.1895).

259. [c.p.]

[Bologna] 20 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Sono passato dalla Segreteria: l'istanza del Diena[1] è stata rimandata stamani dal M[inistr]o coi documenti, mancano le annesse pubblicazioni, ma l'impiegato mi ha detto che hanno ricevuto avviso di pacchi postali in uno dei quali, suppone esse sieno contenute.

Avrai ricevuto il Bericht[2] colle insignificanti osservazioni che l'accompagnano. Va bene quanto mi scrivi circa le citazioni. L'indice, se vuoi, lascialo andare.

Ho avuto ieri la visita del Levi-Civita: abbiamo parlato insieme di una infinità di argomenti matematici.

Cordiali saluti tuo aff.mo
F Enriques

[1] Giulio Diena era allora libero docente di Diritto internazionale all'Università di Bologna.
[2] Enriques-Castelnuovo 1896.

260. [c.p.]

[Bologna] 21 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Ho rimandato le ultime bozze della Memoria (XL).[1] Spero che mi rimanderanno presto le 2[c] e poi gli estratti. Se hai occasione di far premura pei tuoi estratti[2] fai premura anche per me.

Sto leggendo i fascicoli usciti del 3° vol[ume] del «Traité d'Analyse» di Pic[ard].[3] Ci sono delle cose interessantissime! In particolare sono entusiasta della teoria dell'equazione algebrico-diff[erenziale] del 1° ord[ine],

e della sua integrazione pel caso che l'integrale non abbia punti critici mobili: questo problema si riduce a quello delle trasformaz[ioni] biraz[ionali] d'una curva alg[ebrica] in sé.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques 1896d.
[2] Si tratta degli estratti degli articoli Castelnuovo 1896a e 1896b.
[3] Picard 1891-96.

261. [c.p.]

[Bologna] 25 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Grazie delle tue Memorie:[1] vedo che l'edizione è bella e nitida.

Ho letto sui giornali la chiusura della U[niversi]tà di Roma.[2] Che cosa farai? Suppongo che per qualche giorno starai a vedere se si riapre e se invece essa rimanesse chiusa fin dopo carnevale anticiperai la tua partenza. In tal caso ci vedremo prestissimo perché credo che le nostre lezioni termineranno alla fine della settimana ventura o nei primi giorni della successiva.

Rimandami pure il cap[itolo] del Bericht sull'aggiunzione:[3] lo rivedrò volentieri.

Grazie anche delle note di Autonne. Qual è il suo indirizzo?

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F. Enriques

[1] Castelnuovo 1896a e 1896b.
[2] Durante una manifestazione di protesta di studenti contro un professore intervennero le forze dell'ordine. Il rettore decise di chiudere l'Università e di aprire un'inchiesta per chiarire le responsabilità dei disordini.
[3] Enriques-Castelnuovo 1896, cap. 4.

262. [c.p.]

[Bologna] 29 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Ancora non so quando cominceranno le nostre vacanze: pareva che i nostri scolari dovessero lasciarci alla fine della settimana; ma forse otterremo di farli venire altri due o tre giorni della settimana ventura.

In ogni modo ti informerò della mia partenza.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

263. [c.p.]

[Bologna] 30 gennaio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Ho ricevuto il cap[itolo] del Bericht[1] che mi affretterò a rimandarti, e le ultime bozze della mia Memoria.[2]

Se ben ricordi il mio teor[ema][3] diceva che «Una var[ie]tà con una congruenza raz[ionale] di curve raz[ionali] può trasformarsi in un cono o in una var[ie]tà con una congruenza di coniche». Nel 1° caso la var[ie]tà è raz[ionale] e si può far corrispondere alla congruenza una stella di rette: nel 2° caso non è detto che la var[ie]tà sia raz[ionale] e se lo è non è detto che alla detta congruenza si possa far corrispondere una congruenza di coniche in S_3.

Così vi sono sulla V^3 sistemi lineari di bisecanti le coniche della congruenza, ma se esiste su V^3 un sistema omaloidico non è detto che ne esista uno costituito di bisecanti. E perciò non mi pare che si arrivi a nulla circa la raz[ionali]tà di V^3 se non riesci ad approfondire nel senso accennato quel mio teorema, ciò che io ho tentato inutilmente (allo stesso scopo).

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques-Castelnuovo 1896; cfr. p. 242, c.p. 261 (25.1.1896).

[2] Enriques 1896d.

[3] Il teorema non compare in Enriques 1895b: sarà pubblicato in Enriques 1897a, § 15, 455.

264.

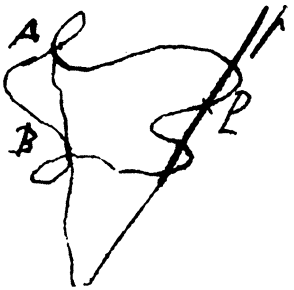
31 gennaio [18]96

Carissimo

È vero che non abbiamo mai incontrato un esempio di superficie di genere $p > 1$ avente una parte fissa per le curve canoniche, e non eccezionale: ma l'esempio che si ha per $p = 1$ può dirsi già risolutivo (Noether lo escluderebbe). E del resto non sembra difficile di procurarsi esempi analoghi per $p > 1$. Se non sbaglio si potrebbe procedere così.

Prendiamo una sup[erficie] del 6° ord[ine] F^6 che abbia una retta 2-pla p; 2 p[un]ti 2-pli A, B (semplici per le aggiunte),* tali che la retta AB incontri

* Ve ne sono di natura particolare siffatta all'infuori dei tacnodi: si presentano in alcune F^4.



p; un punto 3-plo P su p di natura particolare che riesca 2-plo per le sup[erfi-cie] aggiunte. Le agg[iunte] si spezzeranno nel piano pAB che sega F^6 in una C^4 con 2 p[un]ti 2-pli (genere 1) e in un piano per P.

Come si potrà realizzare la natura particolare del punto P? Mi pare che basti che a P sieno infinitamente vicini altri 2 p[un]ti 3-pli in direzioni non appartenenti al piano pAB, e non vedo che ciò porti aumento nelle molteplicità imposte o qualche molteplicità in P per C^4.

Resta a domandarsi se esisterà effettivamente una tale F^6: ma credo si riesca a stabilirne l'esistenza coi sistemi lineari determinati da sup[erficie] spezzate.

Un esempio anche più semplice sarebbe dato dalla F^6 con un p[un]to 4-plo O e 3 p[un]ti 2-pli A B C (in un p[ia]no per O) i quali riescano semplici per le aggiunte (e non sieno tacnodi).

Il piano $OABC$ si stacca dalle quadriche agg[iunte] a F^6 (che sono coni di vertice O), e sega F^6 secondo una C^6 di genere 1. Va bene?

Per accertarsi di questi esempi bisognerebbe esaminare bene quei p[un]ti 2-pli non tacnodi che impongono una condizione alle agg[iunte]. Essi hanno un altro p[un]to 2-plo infinitamente vicino; ma questo non basta, non è vero? Tuttavia è certo che la sezione per un tal p[un]to ha ivi un p[un]to 2-plo soltanto, e ciò basterebbe se le singolarità imposte alla sup[erficie] non sono troppe.

Vengo informato confidenzialmente che la relazione pel concorso relativo alla Scuola Norm[ale] di Pavia conclude in favore del Levi-Civita.[1] Questa relazione dovrà ora essere presentata alla Fac[ol]tà che procederà alla nomina.

Da quel che mi hai detto suppongo che il Fano non abbia concorso.

Chi certo avrà concorso è il Tedone, e mi dispiace per lui che non è davvero in buone condizioni. Tuttavia sono contento dell'esito favorevole al Levi-Civita del quale, come sai, ho molta stima e a cui voglio bene. Credo che egli profitterà dell'occasione per svolgere nelle conferenze argomenti

a lui meno familiari di analisi sintetica, e ciò gli sarà utile ad allargare l'indirizzo dei suoi studi.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Non hai ricevuto risposta dal Noether?[2]

[1] Cfr. p. 240, P.S. a let. 258 (17.1.1896).
[2] Cfr. p. 240, let. 258.

265. [c.p.][1]

[Bologna] 2 febbraio [18]96

Carissimo Castelnuovo

Bravo! Quantunque io non possa seguire nei suoi dettagli il tuo ragionamento non conoscendo bene la congruenza di Mont[esano][2] né la rappres[entazione] sul p[ia]no 2-plo della F^4 contenente una C_3 gobba, capisco che quel ragionamento deve condurre allo scopo: d'altronde è facile appurare la cosa.

Dunque la V^3 è razionale![3]

Ecco una nuova questione che ha resistito fin qui a tutti i tentativi e che tu riesci a superare felicemente! Ne sono contentissimo.

Di che ordine saranno le sup[erficie] rappresentative delle sezioni iperpiane di V^3? Se la C_7 non dovesse contenere p[un]ti ipermultipli, bisognerebbe andare almeno all'ordine 10: ma il contrario avverrà più probabilmente. Forse si riesce a costruire un tal sistema di F^4 con un tacnodo (o altra specie di p[un]to 2-plo superiore) sulla C_7. Ma la costruzione di questo sistema presenta qualche difficoltà, sebbene (se esiste) sia questione di pazienza.

Saluti cordialissimi

Tuo aff.mo
F Enriques

[1] Lettera in alcuni punti di lettura non agevole a causa di varie macchie.
[2] È la congruenza del secondo ordine con linea singolare: cfr. Montesano 1895.
[3] Castelnuovo riteneva evidentemente di aver trovato una dimostrazione della razionalità dell'ipersuperficie cubica non singolare dello spazio proiettivo a quattro dimensioni. Come si vedrà nelle successive lettere (cfr. in particolare p. 254, let. 279, 12.4.1896), questa speranza svanirà presto.

266. [c.p.]

[Bologna] 4 febbraio [18]96

Carissimo

Due righe per avvertirti che domani vado a Firenze. E tu quando sarai libero? quando ci vedremo?

Potremo contentare il N[oether] sulla questione del comportamento delle sup[erficie] agg[iunte] relativamente a sing[olarità] straordinarie:[1] ma non son punto persuaso della cosa. Ed infatti come avrebbe egli risoluto il problema finché la natura stessa delle sing[olarità] è sconosciuta? Egli suppone definita la sing[olarità] straord[inaria] come limite di sing[olarità] ord[inarie], ma perché ciò potesse ammettersi con rigore occorrerebbe una preventiva analisi di tutte le sing[olarità]. Del resto potremo esaminare meglio insieme la cosa. Porterò con me la notina del N[oether].[2]

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[1] Enriques si riferisce a una lettera scritta da Max Noether a Castelnuovo il 30 gennaio 1896 in risposta alla notizia del prossimo invio del *Bericht* (cfr. p. 239, let. 258, 17.1.1896). Dopo aver ringraziato Castelnuovo per aver aderito, congiuntamente con Enriques, all'invito a scrivere un'esposizione dei loro risultati, Noether aggiunge di aver potuto dare solo una rapida occhiata alle due memorie Castelnuovo 1896a e 1896b. In queste «Lei sembra dire che io avrei dato il concetto di superficie aggiunte a una superficie F solo per superficie F prive di curve e punti multipli singolari», obietta Noether a Castelnuovo, rivendicando invece l'applicazione del «principio della trasformazione razionale [...] e della teoria degli sviluppi in serie [...] per ogni singolarità» nei propri lavori (Noether 1871a, 1875, 1887). La lettera di Noether è riportata in Appendice (pp. 656-57).

[2] Per la «notina» e gli altri lavori di Noether sulle singolarità delle superficie algebriche cfr. p. 196, nota 8 a let. 210 (4.6.1895).

267. [c.p.]

[Firenze] Domenica [9 febbraio 1896]

Carissimo Castelnuovo

Ebbene, qual è il sistema rappresentativo della V^3? Hai avuto la pazienza di determinarlo?[1]

Io ho ripreso le mie lezioni di biologia[2] e cominciato a studiare la fisiologia cellulare. Sono cose molto interessanti, per quanto regni grande incertezza.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
F Enriques

[P.S.] Ti disturberebbe di sollecitare per telefono la pubblicazione della mia Memoria?[3]

[1] Cfr. p. 245, c.p. 265 (2.2.1896).
[2] Cfr. p. 237, c.p. 253 (9.1.1896).
[3] Enriques 1896d.

268.

22 febbraio [18]96

Carissimo Guido

Ti ringrazio delle tue affettuose parole. E passo a rispondere alla 2ª parte della tua lettera.

La strana coincidenza accaduta col Noet[her] aumenterà il suo interesse per la notizia che a quest'ora avrà ricevuto da te.[1] Su quali concetti si basava il N[oether]?[2]

Che il tuo spazio 2-plo razionale contenente una costante di più della V^3 di S_4 rappresenti il complesso cubico, mi sembra, così a priori, difficile. Invero quel complesso è dato da una V^5 di S_4 con quadrica 2-pla, e la V^5 si riduce ad una V^3 se ha inoltre un p[un]to 3-plo, ciò che pare debba portar via più di una cost[ante].

Ho mandato al N[oether] il Bericht[3] appena tu sei partito.

Come ho scritto al Cr[emona] non ho ancora avuto gli estratti del mio lavoro;[4] anzi, se non ti rincresce, potresti fare un'altra sollecitazione telefonica.

Ho ripensato un po' alle sup[erficie] di gen[ere] 1 F_{2p-2} di S_p.[5] Il fatto, da te accennato, che la presenza d'una serie particolare sulla sez[ione] iperpiana porti seco un sistema lineare che la sega, mi pare si possa in fatto stabilire. Ma non ho approfondito la cosa che non mi pare per il momento la più essenziale: la questione capitale è invero quella se alla detta curva C^p_{2p-2} appartengano serie siffatte.

Il metodo che si presenta è quello di esaminare le sup[erficie] raz[ionali] che passano per le C^p_{2p-2} generiche, che all'uopo saranno sezioni d'una var[ie]tà a 3 dim[ensioni] contenente F.

Per questo si può proiettare C^p_{2p-2} da punti su un piano in una C_n, e considerare la sup[erficie] rappresentata dalle C_{n-3} aggiunte a C_n. Si ottengono a seconda dei punti scelti su C^p_{2p-2} per la proiezione, ∞ sup[erficie] contenenti la curva; fra queste ve ne deve essere qualcuna spezzata (sotto certe limitazioni), e si deve vederlo proiettando tutta la F_{2p-2} in un S_4 da p[un]ti esterni. I miei studi sono a questo punto. Io riesco in tal modo a ricostruire le var[ie]tà a sez[io]ni ellittiche che le contengono per le prime F_{2p-2} note; ma le difficoltà vanno crescendo coll'ordine.

Saluti affettuosissimi,

tuo
Ghigo[6]

[1] Cfr. p. 245, c.p. 265 (2.2.1896).

[2] Si veda la comunicazione «del tutto provvisoria» sulla M_3 di S_4 e la successiva smentita nelle due cartoline postali inviate da Max Noether a Castelnuovo il 18 febbraio 1896

e riportate in Appendice (pp. 657-58). Due giorni più tardi Noether spiegava a Castelnuovo di esser stato costretto a smentire la propria affermazione «perché quella M_3 contiene quattro punti doppi», suggeriva delle possibili alternative promettendo «quanto prima qualcosa di più definitivo» (cfr. Appendice, p. 658). Nella corrispondenza di Castelnuovo, tuttavia, non sono conservate ulteriori comunicazioni di Noether a questo proposito.

[3] Enriques-Castelnuovo 1896.

[4] Enriques 1896d.

[5] Sono le superficie oggi note come superficie $K3$ (Enriques 1909). Si veda Enriques 1893f, § 6 e 1896e, § 5.

[6] Col fidanzamento di Castelnuovo con Elbina, sorella di Federigo Enriques, il tono delle lettere diventa più familiare. Enriques si indirizza all'amico chiamandolo per nome e firmandosi col diminutivo usato in famiglia.

269.

26 febbraio [18]96

Carissimo Guido

Mi par di vedere che i tentativi per le F^{2p-2} fatti nel senso che ti dicevo non conducano a niente, perché le cose si complicano straordinariamente al crescer di p. Per lo meno per affrontare la cosa ci vorrebbe una pazienza che io non ho.

Ho esaminato un po' le F^{2p-2} che si ottengono come sezioni di var[ie]tà a sezioni ellittiche e con mia sorpresa ho riconosciuto che esse sono tutte riferibili a p[ia]ni 2-pli all'infuori di quelle riferibili alla F^6 con curva 2-pla C^6 o C^5 o C^4.

In quanto ai p[ia]ni 2-pli di genere 1, oltre quelli con curva limite C_6 o C_8 con 2 p[un]ti 4-pli ve ne sarebbero altri 2: il p[ia]no 2-plo con curva lim[ite] C_{10} con p[un]to 7-plo e 2 p[un]ti 3-pli infinitamente vicini, e il p[ia]no 2-plo con curva lim[ite] C_{12} con p[un]to 9-plo e 3 p[un]ti 3-pli infinitamente vicini.[1]

Se ti ricordi io avevo trovato una serie di p[ia]ni 2-pli di gen[ere] 1 con curva lim[ite] C_{2n}, p[un]to $(2n-4)$-plo O e sing[olarità] infinitamente vicine, ma tu mi facesti notare che al crescere di n queste sing[olari]tà facevano aumentare la molteplicità di O: tantoché pareva non si potesse prendere $2n > 8$; ma ora invece vedo che non vi è danno se O diventa $(2n-3)$-plo per C_{2n}, sicché si hanno quei due nuovi p[ia]ni 2-pli che ti ho nominato.

Ho ricevuto una cartolina dal S[egre] il quale mi dice che si proponeva di scriverti, che vorrebbe sapere altre notizie, e che conta fin d'ora di assistere alle tue nozze.[2]

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[P.S.] Mi scrivono da casa che l'Elbina ritarda la sua gita a Roma per il cattivo tempo. Io trovo veramente (come ho scritto pure a casa), che questa ragione non giustifichi il ritardo, tanto più che a Roma la stagione sarà migliore che a Firenze.

Grazie della telefonatura[3] all'Acc[ademia].[4]

[1] Questi risultati saranno pubblicati in Enriques 1896e: cfr. p. 232, nota 2 a c.p. 243 (6.12.1895).
[2] Castelnuovo si sposò con Elbina Enriques il 9 luglio 1896.
[3] Così nell'originale
[4] Cfr. p. 247, let. 268 (22.2.1896).

270. [c.p.]

Bologna - 28 febbraio [18]96

Carissimo Guido

Grazie per quanto hai fatto relativamente agli estratti della mia Memoria,[1] che aspetto ormai di ricevere quanto prima. Appena ricevutola vedrò di dare gli ultimi tocchi alla notina[2] preparata da tempo «Sulle sup[erficie] a curve canoniche iperellittiche» che mi propongo di mandare direttamente al Cr[emona] (pei Lincei), visto che tu sei in questi giorni un «non geometra».

Tanti saluti affettuosi a te e all'E[lbina], e mi par superfluo di farvi auguri perché passiate bene questi giorni: il più bello augurio è quello che ora si avvera, di passarli insieme.

Se è accaduto come qui, dovreste avere a Roma una primavera, e ne profitterete, son sicuro, per fare delle belle passeggiate.

Di nuovo saluti affettuosissimi

tuo
Ghigo

[1] Enriques 1896d.
[2] Enriques 1896c: cfr. p. 108, c.p. 95 (17.5.1894).

271. [c.p.]

Bologna 2 marzo [18]96

Carissimo Guido

Ho ricevuto una pesante cassetta contenente gli estratti della mia Memoria[1] ed insieme anche gli estratti della nota dell'Ist[ituto] lomb[ardo].[2] Ti mando una copia di ambedue i lavori.

Tanti, tanti affettuosi saluti a te e all'Elbina, che (a quanto sento) si trattiene a Roma fino a Venerdì.

Tuo
Ghigo

[1] Enriques 1896d.
[2] Enriques 1896b: cfr. p. 179, let. 185 (28.2.1895).

272. [c.p.]

[Bologna] 5 Marzo [18]96

Carissimo Guido

Ho piacere che il nostro Ber[icht][1] abbia incontrato il favore del N[oether].

Io ho mandato ieri al Cr[emona] la notina sulle sup[erficie] a curve can[oniche] ip[erellittiche], come ti avevo detto.[2]

Vedo sui giornali che la vostra Un[iversi]tà è chiusa:[3] fino a quando? Qui dopo una dimostrazione non vi è stato altro e tutto procede regolarmente. Ma in questi giorni l'attenzione di tutti è rivolta al dramma in cui ci troviamo imbarcati contro la volontà e l'interesse del paese.

Affettuosi saluti

tuo
Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.
[2] Enriques 1896c: cfr. p. 249, c.p. 270 (28.2.1896).
[3] Dopo la battaglia di Adua (1° marzo 1896), nella quale le truppe del generale Oreste Baratieri subirono una gravissima sconfitta, si aprì una drammatica crisi istituzionale che portò alla caduta del governo Crispi. L'Università di Roma fu chiusa a seguito delle manifestazioni studentesche.

273. [c.p.]

[Bologna] 10 marzo [18]96

Carissimo Guido

Le sup[erficie] del 4° ord[ine] F^4 aventi un dato tacnodo A, lo stesso p[ia]no tacnodale α, e passanti per la C_{12} intersezione residua di 2 di queste F^4 aventi comune una sezione piana per A, compongono un sistema lineare ∞^3. Questo rappresenta uno spazio doppio con sup[erficie] limite F^4 dotata di p[un]to 2-plo. Pare che lo spazio doppio rappresentato possa essere il più generale avente una F^4 limite con p[un]to 2-plo.

Ma come accertarsene?

Se la cosa va si può forse anche estendere ed avere la raz[ionali]tà di tutti gli S_n 2-pli con var[ie]tà limite del 4° ord[ine] dotata di p[un]to 2-plo, quindi in particolare di tutte le var[ie]tà cubiche di S_n.

Avrai saputo la morte improvvisa del povero prof. Padova.[1]

Affettuosi saluti

tuo

Ghigo

[1] Ernesto Padova, dal 1872 professore di Meccanica razionale all'Università di Pisa e dal 1882 in quella di Padova, morì in questa città il 9 marzo 1896.

274.

11 marzo 1896

Carissimo Guido

Mi sono accorto che il sistema lineare di cui ti ho parlato rappresenta uno spazio 2-plo nascente da una V^4 con p[un]to 3-plo, sicché è inutile pensarci.

Oggi ti voglio parlare delle incertezze derivanti per me dal cambiamento di Ministero, e domandarti consiglio.

Bisognerebbe prima di tutto sapere se il nuovo M[inistr]o[1] è disposto ad aprire concorsi per straord[inario]. In tal caso mi converrebbe forse di fare subito domanda alla Fac[ol]tà perché il concorso venga aperto, pregandola di trasmetterlo ed appoggiarlo prima della riunione del Consiglio Superiore (quando si raduna il Cons[iglio] Sup[eriore]?). Se io non mi muovo la Fac[ol]tà naturalmente aspetterà fino a Luglio.

Ma se invece il Gianturco non volesse fare il concorso sarebbe il caso di ottenere da lui che almeno rispettasse l'impegno preso da Baccelli con questa Fac[ol]tà.[2]

Insomma mi pare che la cosa da fare sarebbe di poter conoscere direttamente le intenzioni del M[inistr]o, giacché qui per fare un passo qualsiasi la Fac[ol]tà impiega sei mesi.

Ma per mezzo di chi? Credi che il Cr[emona] si presterà a parlare al M[inistr]o e ad appoggiare l'apertura del concorso: egli potrebbe indurcisi tenuto conto che anche il D[el] R[e] aveva chiesto il concorso l'anno scorso.

È prevedibile che si trovi il M[inistr]o poco disposto ad aprire il concorso, per economia: bisognerebbe fargli capire che si tratta di un caso eccezionale perché da tre anni qui è stato chiesto continuamente e non fatto dal Baccelli, il quale intanto andava riempendo le Università con nomine di favore.

Aspetto un tuo consiglio che potrai darmi magari dopo aver parlato col Cr[emona] (se lo credi opportuno), prima di manifestare qui propositi o desideri.

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Dal 10 marzo 1896 al 24 settembre 1897 il ministro dell'Istruzione Pubblica fu Emanuele Gianturco.

[2] Cfr. p. 237, c.p. 254 (10.1.1896).

275. [c.p.]

[Bologna] 13 marzo [18]96

Carissimo Guido

A quel che ti ho scritto ieri aggiungo ora che, se non erro, la quintica limite di un p[ia]no 2-plo rappresentante la F_2^4 con 6 p[un]ti 2-pli avrebbe dei p[un]ti 2-pli. Come potrebbe dunque la F_2^4 esser riferibile alla Φ_2^4 con cubica gobba e p[un]to 2-plo su di essa?

Tanti affettuosi saluti, anche ai miei di casa.[1]

Tuo

Ghigo

[1] Castelnuovo trascorse alcuni giorni a Firenze in casa della famiglia Enriques, dove gli fu indirizzata questa cartolina.

276. [c.p.][1]

[Bologna] 14 marzo [18]96

Carissimo Guido

Ho ricevuto la tua lettera che non mi aspettavo in questi giorni e di cui, appunto per ciò, ti sono maggiormente grato.

Ed ho piacere che contro le mie previsioni pessimiste il tuo metodo conduca proprio alla rappresentazione della V^3 generale,[2] sebbene di quel ragionamento sui p[ia]ni 2-pli io non mi sia ancora reso ben conto.

Io sono ora assorto dal rimaneggiamento delle lezioni di Descr[ittiva],[3] proponendomi di far vedere che le curve piane *intuitive* sono rappresentabili con funzioni (analitiche) sviluppabili in serie di Taylor. La cosa viene discretamente.

Tanti affettuosi saluti anche alla nostra Elbina

Tuo

Ghigo

[P.S.] Mi ero accorto che la mia φ^4 limite ha un p[un]to 3-plo come vedrai nella lettera scritta a Roma.

[1] Questa cartolina fu dapprima inviata a Firenze e poi a Roma, come risulta dai due indirizzi indicati nell'originale e dai timbri postali.

[2] In particolare cfr. p. 245, c.p. 265 (2.2.1896).

[3] Le lezioni litografate di Geometria descrittiva (Enriques 1893-94b e 1894-95b) ebbero nel corso degli anni varie edizioni prima di essere pubblicate a stampa in Enriques 1902a.

277. [c.p.]

[Bologna] Mercoledì [18 marzo 1896]

Carissimo Guido

Mentre io ci pensavo, anche vari prof[essor]i della Fac[ol]tà avevano avuto l'idea di richiedere il concorso ed il P[resid]e si è informato ed ha saputo che il M[inistr]o intende di non far nomina se non per questa via.[1] Pare dunque che la Fac[ol]tà chiederà ella stessa il concorso prima della riunione del Cons[iglio] Sup[eriore], quod erat in votis.

Ciò risponde alla tua cartolina d'oggi entrando appunto nel tuo concetto.

Io però non sono ancora tranquillo perché temo sempre che il M[inistr]o non apra il concorso per economia: vorrei perciò che la Fac[ol]tà ricordasse al M[inistr]o l'impegno assunto di coprire la cattedra; ma questo sarà difficile ad ottenersi.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Domani sera probabilmente andrò a Firenze.

[1] Cfr. p. 251, let. 274 (11.3.1896).

278. [c.p.][1]

[Bologna] 19 marzo [18]96

Carissimo Guido

Ricevo la tua lettera. Grazie. Poiché alcuni prof[essor]i della Fac[ol]tà mi hanno prevenuto, come ti ho detto ieri non vi è da far altro. Ho piacere che la soluzione incontri anche l'approvazione del Cr[emona].

Quello che io temo è che l'ordine del giorno non venga fatto nel senso che anche a te parrebbe più naturale, cioè di cominciare a prender atto della promessa del M[inistr]o, giacché da discorsi fatti rilevo che alcuni temerebbero forse con questo pregiudicare la domanda di concorso: dunque probabilmente una domanda pura e semplice. Ad ogni modo contentiamoci e speriamo: almeno la Fac[ol]tà pare agirà questa volta con prontezza.

Grazie di nuovo e scusa il disturbo. Affettuosi saluti in attesa di rivederti a Firenze dove io mi reco stasera.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Lettera in alcuni punti di lettura non agevole per la presenza di macchie.

279.

12 aprile [18]96

Carissimo Guido

Ti scrivo questa a Firenze dove sarai arrivato a quest'ora.

Io non mi muoverò per questi due giorni, tanto più che le nostre vacanze cominceranno assai presto: è perfino dubbio se finiremo la prossima settimana.

Ci vedremo dunque a Pasqua.

Avrai ricevuto la mia di ieri[1] incrociatosi con la tua e quando sarai tornato a Roma ti sarò grato se vorrai occuparti di ciò che ti dicevo presso il Cr[emona].

Mi dispiace delle difficoltà che sorgono nella questione della var[ie]tà cubica;[2] difficoltà che a dir vero non mi sembrano lievi.

Si tratta di riferire la Φ_2^4 con 6 p[un]ti 2-pli su conica alla φ_2^4 con cubica e p[un]to 2-plo su essa. Ora se questo è possibile si dovrebbe trovare anche direttamente la trasformazione ad hoc senza ricorrere ai piani doppi.

E non solo io non vedo questa trasformazione, ma non vedo neppure come verrebbero rappresentate sulla φ_2^4 tutte le reti di sezioni piane di genere due, e le relative involuzioni (all'infuori di due).

D'altra parte mutando il centro di proiezione della V^3 muterà è vero lo spazio doppio, ma non sembra che debba essenzialmente mutarne la sup[erficie] limite; la possibilità della trasformazione di essa deve dipendere dalle sue singolarità. Tuttavia speriamo ancora.

E quando avrai un po' di tempo prova a costruire il sistema rappresentativo della V^3: mi pare il modo più sicuro. Se esso rappresenta la V^3 generale lo si deve riconoscere dal numero degli invarianti. Potrebbe anzi darsi che il tuo metodo pur essendo passibile di obiezione ti conducesse al sistema rappresentativo della V^3 generale.

Tanti affettuosi saluti, anche per l'Elbina,

tuo
Ghigo

[1] Questa lettera non è stata ritrovata. L'affermazione di Enriques evidenzia una lacuna nella corrispondenza conservata da Castelnuovo.

[2] Cfr. in particolare p. 245, c.p. 265 (2.2.1896).

280. [c. p.]

[Bologna, 15 aprile[1] 1896]

Carissimo Guido

Tanto per farmi vivo ti scrivo due righe quantunque non abbia niente da dirti.

Ho pensato un po' alla determinazione delle sup[erficie] che sono rappresentabili ∞ volte sul p[ia]no 2-plo ossia contengono ∞^1 involuzioni G_2^2. Il problema si collega agli studi di Picard, anzi deve condurre a quella classe di superficie da lui considerate ammettenti ∞ trasf[ormazioni] che non formano gruppo (finito). Sono pubblicati i resultati cui egli ti accennava in proposito?[2]

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Così secondo il timbro postale; marzo secondo l'indicazione apposta da Castelnuovo.
[2] Nella corrispondenza di Castelnuovo non sono conservate lettere di Emile Picard di questo periodo.

281. [c. p.]

[Bologna] 20 aprile [18]96

Carissimo Guido

Sul concorso di Bol[ogna][1] non so nulla: è probabile si aspetti per aprirlo il Cons[iglio] Sup[eriore] che deve adunarsi (credo) in questi giorni. Anzi è probabile che tu possa sapere la decisione prima di me.

Ho mandato al Fano quelle lezioni del Bianchi che desiderava vedere. Fagli pure a mio nome affettuosi saluti.

Io sto lavorando al lavoro[2] dei p[ia]ni 2-pli, e mi pare ormai che tutto venga liscio. Per quanto riguarda le sup[erficie] con ∞^1 involuzioni credo aver risoluto la questione quando le inv[oluzioni] sono ∞^1 e non più ed inoltre non permutabili: ma il caso in cui sono permutabili deve esser facile ad esaurirsi perché (escluso un caso ovvio) la sup[erficie] si può rappresentare sulle coppie di p[un]ti d'una curva algebrica. Par dunque non difficile condurre a termine la questione.

Saluti affettuosissimi tuo

Ghigo

[1] Cfr. p. 253, c. p. 277 (18.3.1896).
[2] Enriques 1896e.

282.

Giovedì 23 Aprile 1896

Carissimo Guido

Ecco lo schema della ricerca ideata intorno alle sup[erficie] con ∞ involuzioni.

La F abbia una serie ∞^1 di involuzioni.

Distinguo 3 casi: 1) le involuzioni sono 2 a 2 permutabili; 2) le involuzioni non sono 2 a 2 permutabili ma la serie è trasformata in sé da ogni involuzione di essa; 3) il caso rimanente.

1) I prodotti delle coppie di involuzioni danno ∞^2 trasformazioni permutabili di F in sé onde (se non sbaglio per un teor[ema] del Lie) formano gruppo (perché non esiston gruppi di trasf[ormazioni] perm[utabili] con più dimensioni della varietà su cui operano). La F è una sup[erficie] di Picard,[1] riferibile alla varietà delle coppie della curva di genere due.

Resta da esaminare quando una tale sup[erficie] può avere ∞^1 inv[oluzioni]: probabilmente mai. Ma può anche darsi che i prodotti delle coppie di inv[oluzioni] dieno un gruppo ∞^1: la F possiede allora un fascio (lineare) di curve razionali o ellittiche.

2) La serie delle inv[oluzioni] è ellittica o razionale.

Se i prodotti delle coppie di inv[oluzioni] non formano un gruppo ∞^1, essi sono ∞^2 (e non è detto che formino un gruppo).

La F risulta riferita alla varietà delle coppie ordinate d'una curva razionale o ellittica (o ad una involuzione su tale varietà). Ma se la serie delle inv[oluzioni] è razionale la F è razionale o riferibile a una rigata.

Se è ellittica, la F risulta dunque riferibile ad una rigata ellittica doppia con curva limite quadrisecante le generatrici (o ad una inv[oluzione] su tale rigata doppia).

3) Una inv[oluzione] della serie viene trasformata da un'altra in una inv[oluzione] fuori della serie. Si han dunque almeno ∞^2 inv[oluzioni]. Se la serie di queste è trasformata in sé da una qualunque sua inv[oluzione], le ∞^1 inv[oluzioni] (tra le ∞^2) che lascian fermo un punto danno una serie che si trova nel caso 2).

Se no esistono almeno ∞^3 inv[oluzioni] ecc.

Dunque se non si ricade nel caso 2) vi è su F una serie ∞^n di inv[oluzioni] con n grande ad arbitrio, che si possono considerare come successive trasformate di una data nella 1ª serie ∞^1, e però hanno le curve di coincidenza d'un genere π indipendente da n.

Ora si può pensare che:

a) le ∞^n inv[oluzioni] abbiano ∞^n curve di coincidenza; essendo π il genere e $n > 3\pi + 5$ (comunque il sistema non sia lineare) si riesce col-

l'imposizione di punti doppi a dedurne un sistema ∞^1 di curve razionali (non lineare) con una unisecante, ossia la F è una involuzione sopra una rigata (probabilmente ellittica).

b) le ∞^n (n crescente) involuzioni hanno solo un certo sistema ∞^s di curve di coincidenza. Si hanno allora infinite involuzioni con una stessa curva di coincidenza e queste pare debbano risultare permutabili, onde si ricade nel caso 1).

Questo è in breve il piano, ancora molto incompleto della ricerca: ma parmi se ne desuma la convinzione di poter arrivare in fondo alla questione o almeno a circoscrivere molto le sup[erficie] di cui si tratta.

Come ti ho detto sto redigendo il lavoro[2] sui p[ia]ni 2-pli di genere 1. Vorrei poterti mandare il manoscritto (che non sarà troppo lungo) in guisa che tu potessi darci un'occhiata prima dell'andata di Elbina a Roma.

Quando ha fissato di andare?

Affettuosi saluti dal tuo
Ghigo

[1] Cfr. Picard 1889.
[2] Enriques 1896e.

283.

26 Aprile 1896

Carissimo Guido

Ti mando, finalmente, il lavoro[1] sui piani doppi di genere 1, la cui redazione nonostante il lavoro assiduo mi ha costato più tempo di quel che credevo: non solo perché tutto fosse al riparo da possibili obiezioni, ma anche per dare al lavoro una forma leggibile. Per riuscirvi ho creduto di ripetere in vari punti assai lungamente resultati già stabiliti. Tu giudicherai del tutto e mi farai le più spietate critiche che crederai del caso.

Quanto alla pubblicazione del lavoro io sarei contento se il Cr[emona] volesse accoglierlo fra le memorie dei XL, anche perché si riattacca assai intimamente alla mia memoria e alla tua,[2] e perché sarei sicuro di averne fra 3 mesi gli estratti (gratis).

Vuoi le lezioni del Bianchi? Quali?

Il fascicolo prec[eden]te a quello mandato a Fano[3] tratta puramente della teoria delle sostituzioni ordinaria, e delle equazioni algebriche (risolubilità per radicali ecc.).

Nel corso di Analisi che il B[ianchi] ci fece l'anno dopo (sulle funzioni ellittiche)[4] vi sono applicazioni della teoria delle sost[ituzioni] alle equazioni modulari ecc.

Tengo l'uno o l'altro o ambedue a tua disposizione colla preghiera di non tenerli molto tempo perché ho frequenti occasioni di adoprarli.

Le superficie con ∞^1 involuzioni le lascerò stare per il momento: sarà uno studio per le vacanze: prima vorrei redigere il lavoro[5] «Sulle irrazionalità ecc.» pei Mathem[atische] Annalen; una redazione che sarà, come sai, molto laboriosa.

Ad un giovane che ha cominciato a studiare la quartica piana ho proposto la questione delle omografie che la trasformano in sé. Vedremo come se la caverà. È una questione che si può trattare affatto elementarmente ed i resultati sono molto semplici, temo anzi che abbiano il difetto di esser troppo semplici.

Affettuosi saluti dal tuo
Ghigo

[1] Enriques 1896e.
[2] Cfr. Enriques 1896d; Castelnuovo 1896a, 1896b. Come auspicava Enriques, anche il lavoro Enriques 1896e fu pubblicato nelle «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)».
[3] Cfr. p. 255, c.p. 281 (20.4.1896) e Bianchi 1897b per l'edizione litografata delle lezioni.
[4] Cfr. Bianchi 1898-99 per l'edizione litografata.
[5] Enriques 1897a.

284.

1 Maggio [18]96

Carissimo Guido

Ricevo la tua lettera e ti ringrazio dell'esame fatto del mio lavoro.[1]

Quanto alla modificazione che mi proponi bisogna che ci pensi. Così a primo aspetto mi sembra che essa non sia sostanziale, perché anch'io mi appoggio sul tuo lemma che se una F raz[ionale] ha una stella di sezioni iperellittiche i coni aggiunti son razionali. Se ben guardi è questa la base del mio procedimento come del tuo. Ma non nego che il ragionamento stesso possa presentarsi in forma più vantaggiosa, tale sarebbe appunto l'enunciare come lemma[2] staccato l'analisi del sistema ultimo agg[iunto] nel piano. Meriterebbe specialmente di farlo in vista dell'uso che si potrebbe averne nel seguito: e però ti ripeto, ci penserò. Non credere però che, pel caso concreto, il mio lavoro ne verrebbe notevolmente semplificato nella parte relativa a quella discussione. Io vedo specialmente l'interesse della cosa per riguardo alla redazione dell'altro mio lavoro «Sulle irrazionalità».[3]

Se vuoi ancora tenere il mio manoscritto tienilo finché vuoi. Io possiedo una brutta copia della parte relativa alla discussione: maturati i ritoc-

chi da fare, te lo richiederò. E se la stampa subirà ritardo poco male. Intanto, se credi, quando vedi il Cr[emona] puoi parlargliene, dicendogli ch'io sto dietro a dare gli ultimi ritocchi in guisa da presentare una redazione che si avvicini quanto è possibile ad essere soddisfacente.

Quanto al pubblicare un estratto di resultati ai Lincei, ne potremo discutere l'eventualità più tardi, quando si abbiano gli elementi per giudicare del tempo in cui la stampa regolare del lavoro potrebbe essere esaurita. Dopo tutto io non vorrei affannarmi troppo pel concorso, perché non sarà un lavoro più o meno quello che deciderà.

Il M[inistr]o ha già aperto vari concorsi, pare senza sentire il Cons[iglio] Sup[eriore]. Non capisco come mai.

Tanti affettuosi saluti alla Mamma e all'Elbina e tanti a te

dal tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1896e.
[2] Cfr. Enriques 1896e, § 7, 337 e la dimostrazione data da Castelnuovo nell'Aggiunta, *ibid.*, 352-54.
[3] Cfr. Enriques 1897a.

285.

2 Maggio [18]96

Carissimo Guido

Mi pare che effettivamente si possa dare una diretta dimostrazione di quel lemma un po' modificato.

La sup[erficie] F_n ammetta una stella di sezioni iperellittiche O. Si trasformi F_n in guisa che i coni aggiunti (razionali) per O formino un sistema d'ordine m con retta $(m-1)$-pla a (tralascio il caso che essi sieno ∞^2 o ∞^5), esigendo ancora che un fascio di piani (non per O) resti fermo: le sezioni di questi piani sono $C_{n+3+\delta}$ per cui l'intersezione con a è $(m+\delta)$-pla. Dunque vi è (appunto come tu affermi) un fascio di curve ellittiche K 3-secanti [trisecanti] le C: queste K 3-secano [trisecano] o bisecano le ∞^{r-1} C iperellittiche; se le 3-secano [trisecano] esse C hanno una g_3^1 e una g_2^1 e però il genere ≤ 3, onde le curve aggiunte son ∞^2 (al più) – caso escluso. Dunque le bisecano, e però le K passano pel punto fisso O. Prendiamo come immagine di F la F' (doppia) di cui le sezioni sono le agg[iunte] C' alle C: si vede che F' è un cono.

Ma non si vede che sia un cono quadrico.

Tuttavia staccando da $|C'|$ successivamente le K (sommando rK e pas-

sando all'r-esimo agg[iunto] per far sparire eventuali p[un]ti base) si arriva ad un sistema di gen[ere] 2 senza p[un]ti base su F.

È il ripiego già pensato per la questione delle irraz[ionali]tà.[1]

Quanto al caso in cui le C' son ∞^2, si riesce a vedere che esse sono ellittiche perché (per un tuo teor[ema]) la serie caratteristica è non speciale.

Se sono ∞^5 (caso di Veronese) $\left|\frac{1}{2}C'\right|$ è una rete di curve ellittiche.

Il bello è che la rete di C' di gen[ere] 2 viene esclusa. Ma non credo si possa escludere che l'operaz[ione] di agg[iunzio]ne conduca ad un sist[ema] non semplice prima di arrivare ad un sist[ema] di gen[ere] 2: è l'aggiunzione successiva (per comodità forse non necessaria combinata alla somma) che ci porta a questo.

Tuttavia la sicurezza relativa alla non esistenza di nuovi p[un]ti base non è così lucidamente messa in mostra. D'altra parte per me basta il fascio $|K|$ di curve ellittiche: dunque potrei omettere quest'ultima parte della discussione da riservarsi per la nota sulle irraz[ionali]tà. Ti persuade?

Se sì, modificherò il mio lavoro nel senso accennato.

Non aspetto una risposta ora finché c'è l'Elbina. Intanto avrò tempo di concretare i prec[eden]ti ragionamenti.

Salutami l'Elbina e la Mamma affettuosamente e prendi tu pure affettuosi saluti

dal tuo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1897a.

286.

4 Maggio [18]96

Carissimo Guido

Mentre le questioni matematiche sonnecchiano fino al miglior tempo, io mi sto occupando da più giorni di un'altra questione che dalla matematica prende solo il pretesto: sentendone il nome tu proverai più orrore che stupore. Si tratta del «problema filosofico dello spazio». Libri di psicologia e di logica, di fisiologia e di psicologia comparata, di critica della conoscenza ecc. passano sul mio tavolino dove li assaporo con voluttà tentando di estrarne il succo per ciò che concerne il mio problema. Ti esporrò altra volta il metodo e il piano del mio lavoro, cui non mi aspetto certo la tua adesione completa. Tuttavia spero che ti convincerai che la questione che io tratto non è metafisica ma critico-positiva, ed alcuni aspetti di essa potranno avere da te almeno una neutralità benevola.

Giacché vi è nel mio programma la questione della genesi dei concetti di spazio sopra i dati della psicologia fisiologica (specie dell'occhio e del tatto) di Helm[h]oltz, Wundt ecc. E vorrei trarne la prova di quel concetto già posto in germe nelle mie «Conferenze»[1] che le due grandi linee di svolgimento (metrico-analitica e proiettivo-metrica) della trattazione dei postulati hanno il loro fondamento nella differenziazione dei sensi.

Ma non è questo il solo aspetto sotto cui considero il problema. Vi è prima il lato critico in ordine alla teoria della conoscenza, e la questione della genesi del concetto di spazio nell'evoluzione: quindi questione delle idee innate e riattaccamento al controverso problema biologico dell'eredità.

Come vedi c'è da divertirsi! Per parte mia porto nella ricerca un entusiasmo, che tu stimerai degno di miglior causa, ma che è certo maggiore di quanto ne abbia mai provato per qualsiasi altra questione. Del resto quando anche gli sforzi per giungere a soluzioni per me soddisfacenti non mi conducessero a nulla, io sarei sempre lieto di averci guadagnato questo: l'occasione di apprezzare e conoscere il Wundt, il più meraviglioso ingegno filosofico, fisiologico, psicologico, matematico ecc.; uomo pur così poco conosciuto in Italia dove solo la filosofia di Spencer è popolare.

Leggi la «Logik» del Wundt[2] quella parte almeno che riguarda i metodi della matematica, e pensa che è un fisiologo che scrive così: un fisiologo che non teme di salire l'erta della concezione kantiana per illuminare dall'alto il gran corso di tutte le scienze!

Affettuosi saluti, anche alla Mamma e all'Elbina, tuo

Ghigo

[1] Enriques 1894-95c.
[2] Wundt 1880-83.

287.

5 Maggio 1896

Carissimo Guido

Ecco come si può dimostrare che una curva di gen[ere] 5 contente una γ_2^1 di gen[ere] 2 è iperellittica.[1]

Se non fosse si potrebbe assumere come immagine una C^8 di S_4. La rigata delle congiungenti le coppie di γ_2^1 è di ordine 6. Infatti si conduca per un p[ia]no un S_3, questo incontra in 8 p[un]ti la curva, e gli 8 p[un]ti danno 8 coniugati: nel fascio di S_3 si ha così una corrispondenza [8 . 8]: 4 coincidenze vengono date dalle coincidenze di γ_2^1; le altre 12 si riducono a 6 2-ple, e vengon date dalle rette della rigata che s'appoggiano al p[ia]no.

Ora la rigata d'ordine 6 e gen[ere] 2 in S_4 dovrebbe essere un cono (Segre «Surfaces reglées»);[2] ma è assurdo che su un cono di 6° ordine vi sia una C^8 bisec[ante] le generatrici.

Ciò posto (riferendosi al caso delle sestiche L nella discussione dei p[ia]ni 2-pli) si ha sopra la F (di gen[ere] 1) un sistema completo ∞^5 $|C|$ di gen[ere] 3 (iperellittico), appartenente ad una involuzione I'. La F^8 rappresentativa si riduce ad una F^4 2-pla.

Ora se la F^4 è rigata si vede subito che le generatrici debbono corrispondere alle cubiche aggiunte alle L nel piano π, e precisamente 2 ad una, onde la curva di diramazione si compone di 2 cubiche. (Credo questo caso impossibile, perché prese due cubiche di diramaz[ione] F^4 riesce sempre di Veronese, ma come vederlo a priori?).

Resta la F^4 di Veronese 2-pla. Ora su F^4 I (la primitiva involuzione) ammette una conica di p[un]ti uniti cui corrisponde la curva di diramazione di π: segue che questa è una L.

Aspetto dunque i fogli (sul caso delle sestiche e sul prec[eden]te della rete di cubiche) che ti ho chiesto ieri l'altro, per redigere definitivamente la trattazione di questo caso, coordinandolo al rimanente.

Tanti affettuosi saluti tuo

Ghigo

[P.S.] Il bollettino pubblica il decreto d'apertura del concorso.[3]

Ti prego di ringraziare Fano per l'invio della sua nota[4] nella quale ho visto con piacere l'applicazione del tuo teor[ema] sulle sup[erficie] razionali[5] ad esaurire la questione delle congruenze di 3° ordine.[6]

Ripensandoci mi pare che tu vorresti porre il seg[uente] lemma:

«Se una curva di gen[ere] 5 possiede una inv[oluzione] di gen[ere] 2 essa è iperellittica e (quindi) la g_2^1 è permutabile colla inv[oluzione] di gen[ere] 2».

Come si dimostra?

In ogni modo il mio ragionamento sussiste ancora sebbene la F^8 si riduca a una F^4 2-pla. È solo da modificarne la forma. Si può vedere *a priori* che la F^4 sarà di Veronese e non rigata?

[1] Cfr. Enriques 1896e, 340.

[2] Cfr. la seconda parte di Segre 1887-89.

[3] In realtà il decreto di apertura del concorso (cfr. p. 253, c.p. 277, 18.3.1896) porta la data 16 maggio 1896: cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXIII, 1, n. 21, 815.

[4] Fano 1896-97, presentato da Corrado Segre all'Accademia delle Scienze di Torino nell'adunanza del 26 giugno 1896.

[5] Cfr. Castelnuovo 1896b.

[6] Oltre a Fano 1896-97, si veda anche il precedente lavoro Fano 1894.

288. [c. p.]

[Bologna] 5 maggio [18]96

Carissimo Guido

Ricevo la tua cartolina. Non capisco tutto perché mi pare che un sistema piano iperellittico rappresentante una sup[erficie] 2-pla normale, possa non esser determinato dai punti base. Ad ogni modo se tu hai già nelle tue note degli appunti in proposito, perché non tratteresti tu la questione in una apposita notina?[1] Per te non sarebbe una gran fatica, si tratterebbe, in sostanza di riordinare cose quasi vedute, e potresti sbrigartene in pochi giorni. Così verresti anche a dare la dimostrazione di ciò che hai già enunciato nei Math[ematische] Ann[alen].[2] Sono finite le sedute del Cons[iglio] Sup[eriore]? Io ho veduto già aperti altri concorsi.

Tanti affettuosi saluti anche alla Mamma e all'Elbina, tuo

Ghigo

[1] Cfr. l'Aggiunta di Castelnuovo a Enriques 1896e.
[2] Castelnuovo 1894a, 275-76; cfr. p. 216, let. 230 (17.11.1895).

289.

8 maggio [18]96

Carissimo Guido

Ti ringrazio di tutto e aspetto le notizie che assumerai al M[inister]o. Mi parrebbe ormai tempo che si decidessero dovendo il concorso stare aperto 4 mesi.

Quanto al mio lavoro,[1] sarei anche disposto ad aspettare qualche mese se al Cr[emona] e al Cer[ruti] non dispiace ch'io annunzi in una nota preventiva il resultato fondamentale ottenuto, nel modo più breve, senza alcun cenno di dimostrazione.

Una tua notina su quella questione dei sistemi lineari[2] sarebbe giustificata oltreché dalle applicazioni future da quelle già date di quel teor[ema]. La questione si potrebbe porre nettamente così «quando si parte da un sistema piano semplice, e si applica l'aggiunzione, discutere tutti i casi di sist[emi] non semplici a cui si giunge» o ciò che equivale «assegnare i tipi di tutti i sist[emi] iperellittici a serie caratt[eristica] non speciale». Questa classificazione riunirebbe sotto un solo punto di vista le classificazioni già note dei p[ia]ni 2-pli razionali[3] (data con un metodo barbaro!), delle involuzioni p[ia]ne, dei gruppi finiti e infiniti di trasf[ormazioni] biraz[ionali] piane.

Pensaci un po' e se vedi che la cosa vien facilmente, la redazione della nota non ti costerà più di una settimana.

Ho seguitato i miei studi sulla questione filosofica dello spazio e sono, a vero dire, un po' stanco del lavoro: ho dovuto percorrere un'infinità di ragionamenti astrusi, e studiare questioni fisiologiche e biologiche.

Coloro che fino ad ora si sono occupati della questione hanno avuto secondo me questo torto: di considerare lo spazio come un concetto indivisibile. Come sai io vi distinguo 3 gruppi di nozioni (e relativi postulati) «*connessione*, *retta*, *distanza*». Una evoluzione del concetto di spazio non si può concepire che nel senso di un graduale svolgimento di queste nozioni: questa teoria tiene un posto intermedio fra l'apriorismo kantiano e l'evoluzionismo empirico di Spencer.

Il fatto strano è che nessuno ha dato importanza alle nozioni di connessione che pure sono il sostrato del concetto di spazio, salvo Riemann ma soltanto dal punto di vista matematico e senza precisare. Helm[h]oltz passa sopra a questa questione più grossa, prendendo già lo spazio come una V_3 analitica.

Il più infelice di coloro che hanno trattato la questione filosofica mi sembra Spencer il quale porta (contro Kant) l'affermazione che il concetto di spazio è posteriore alla coscienza, e dice «se noi supponiamo un organismo privo di tatto e di vista egli avrà delle percezioni non ordinate secondo lo spazio e quindi degli stati di coscienza che non presuppongono tale nozione». Ma questo ragionamento non è davvero positivo, perché l'evoluzione insegna invece che i sensi speciali sono una differenziazione del tatto generale il quale dà già le nozioni fondamentali di spazio (connessione).

Io traggo gli elementi della fisiologia delle sensazioni dal Wundt che riproduce e corregge le esperienze dei predecessori e specialmente di Helm[h]oltz. In molti punti le sue idee collimano colle mie, ma non mi sembra p[er] e[sempio] accettabile la sua osservazione che «l'idea di retta viene dal tatto e dalla sensazione di movimento muscolare perché le condizioni meccaniche dell'organismo favoriscono il moto rettilineo dei muscoli». Mi sembra che i muscoli essendo attaccati alle ossa e queste articolate, gli estremi dei muscoli tendono a muoversi come l'estremo d'un pendolo composto. E però l'idea di retta non può esser data *immediatamente* dal tatto: l'idea di *distanza* sì perché abbiamo la sensazione di deformazione nel moto dell'organo tattile: quindi l'idea di retta si desume da quella di distanza mediatamente (cioè come un portato della riflessione e dell'esperienza), considerata la retta come geodetica.

Invece la nozione di retta proviene direttamente dall'occhio,[4] come ogni altra nozione grafica di forma.

Similmente è strano che il W[undt] ammetta che la nozione di «distanza» proviene (anche) dall'occhio mentre le esperienze che cita provano il con-

trario, e cioè che «l'occhio non sa mai apprezzare l'uguaglianza di due distanze se non sono ugualmente poste». Da questo già Helm[h]oltz deduceva che la nozione di distanza non è data dall'occhio se non mediatamente come frutto di riflessione e d'esperienza: ma egli diceva addirittura la nozione di spazio, perché non distingueva nozioni proiettive e metriche.

Tanti affettuosi saluti

dal tuo
Ghigo

[1] Enriques 1896e.
[2] Cfr. l'Aggiunta di Castelnuovo a Enriques 1896e.
[3] Cfr. Clebsch 1871; Noether 1878.
[4] Seguono nell'originale sei righe cancellate.

290. [c.p.]

[Bologna] Sabato sera 9 maggio [18]96

Carissimo Guido

Mi viene assicurato che oggi stesso è stata mandata al M[inister]o la comunicazione della proposta fatta dalla Fac[ol]tà pel concorso. Ti scrivo subito due righe per avvertirne pregandoti di passare al M[inister]o prima di partire per Firenze. Però sarà meglio che tu ci vada l'ultimo momento possibile senza tuo incomodo. Credo di poter contar che la cosa sarà arrivata ed allora potrai far premura.

Scusa la ripetuta noia e grazie di nuovo.

Tanti affettuosi saluti

tuo
Ghigo

291.

10 maggio [18]96

Carissimo Guido

Quel che basta per il mio lavoro[1] attuale è effettivamente soltanto la discussione dei sist[emi] iperellittici regolari che possono provenire dall'aggiunzione ((partendo da sist[emi] privi di curve fond[amentali] proprie)). Se tu puoi darmela è indifferente per me che essa venga pubblicata in una nota a parte (che pur sarebbe giustificata) o in un §° [paragrafo] (o se più ti piace in una nota) del mio lavoro.[2] Se puoi darmi questa discussione le modificazioni al mio lavoro sono subito fatte e in una settimana posso consegnarlo compiuto. In questo caso mi pare dunque inutile una nota preventiva[3] di resultati che (son persuaso) il Cr[emona] concederebbe ma

a malincuore perché è cosa contraria alle consuetudini [dell']Acc[ademia] dei XL.

La questione viene dunque posta in questi termini:

Puoi tu redigere nettamente la discussione di quei sist[emi] iperellittici entro 10 o 12 giorni? (so che ora perderai la settimana a Firenze).

Se sì comunicami intanto il resultato e mandami il manoscritto. Entro quel termine lo potrò consegnare completo al Cr[emona] al quale potrai dire che avendomi suggerito una semplificazione in un procedimento basandoti sopra un tuo resultato mi hai rimandato il manoscritto per introdurvela, assicurando in pari tempo che il ritardo non verrà protratto.

Alla questione più generale che mi interessa per l'altra nota[4] penseremo più tardi.

Va bene?

Bada che a me basta tu dia i sist[emi] iperellittici regolari: non ti preoccupare se sono o no aggiunti di altri sistemi.

Vedi che così la questione è molto semplificata.

Grazie di tutto e affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Enriques 1896e.
[2] Cfr. l'Aggiunta di Castelnuovo a Enriques 1896e.
[3] Cfr. p. 259, let. 284 (1.5.1896).
[4] Enriques 1897a.

292.

Martedì 12 maggio [18]96

Carissimo Guido

Ho ricevuto lettera e manoscritto. Ho piacere che ci siamo accordati per la soluzione più semplice. Quanto ad inserire la tua nota nella mia Memoria o pubblicarla separatamente[1] è per me indifferente, ma (come ti ho detto) mi parrebbe valesse la pena di pubblicarla separatamente, notando anche ciò che se ne cava per l'aggiunzione partendo da sistemi privi di curve fond[amentali] proprie. In sostanza questa aggiunzione se non termina con un sistema semplice porta sempre ad un fascio di rette (immag[ine] d'un fascio puro) o di cubiche (immag[ine] d'un fascio con *un*[*o*] o 2 p[un]ti base). Così la mia discussione si abbrevia assai. La modificherò in questo senso, rivedendo anche gli ultimi calcoli.

Ti sarò grato dell'invio del Burkhardt:[2] sarà almeno il lavoro d'un matematico!

Non puoi immaginare quanti lavori filosofici sulla mat[emati]ca ho avuto

occasione di vedere o di scorrere in questi giorni: povera matematica! Vi sono perfino dei lavori intitolati «Spazio e Dio». Inutile aggiungerti che non ho creduto necessario di leggerli. Quasi in ogni volume della «Revue philosophique» vi sono lavori sullo spazio: solo alcuni, rarissimi, meritano qualche considerazione; i più si aggirano sull'eterna questione se lo spazio sia dato a priori o no, e non capiscono che si può intendere lo spazio in due modi, «spazio soggettivo» ed «oggettivo»; ho trovato solo un tedesco che ha riconosciuto questa differenza.

Un altro labirinto di questioni che si riattaccano al mio problema è quello delle questioni inerenti alla fisiologia del cervello: l'ultimo effetto di queste discussioni potrebbe esser quello di far perdere il medesimo, ciò che eviterebbe controversie ulteriori.

Finalmente ti dirò che discutendo della verità oggettiva dei postulati, e considerandoli come approssimati (in partic[olare] quello che per 2 p[un]ti passa una retta) si viene ad una giustificazione relativa dell'infinitesimo attuale.

Tanti affettuosi saluti anche all'Elbina e agli altri Miei,

tuo
Ghigo

[1] La soluzione adottata sarà la prima: cfr. l'Aggiunta di Castelnuovo a Enriques 1896e.
[2] Potrebbe trattarsi dell'articolo Burkhardt 1895.

293.

14 Maggio [18]96

Carissimo Guido

Il fatto che l'ultimo caso della mia discussione[1] (portante al fascio di curve ellittiche) nasca soltanto dalla presenza di un sistema lineare di curve di gen[ere] 2 e grado 4 (sestiche p[ia]ne con 8 p[un]ti 2-pli) non solo semplifica la mia discussione ma mi permette anche di completare il resultato ottenuto. Giacché in quel caso io mostravo come la sup[erficie] di gen[ere] 1 rientrasse in una delle mie classi di p[ia]ni 2-pli, ma *cambiando l'involuzione su di essa*, cioè la riduzione non si effettuava con semplice trasformazione birazionale sul piano $x\ y$, ma su $x\ y\ \sqrt{\varphi}$. Ora, come ti dico, posso colmare la lacuna. E ciò in un modo analogo al caso della rete di cubiche piane.

Io ragiono così.

Sia $|K'|$ il sistema di sestiche sul p[ia]no 2-plo: il sistema puro $|K|$ che gli corrisponde su F è di grado 8, gen[ere] 5, dim[ensione] 5. Dunque posso prendere come immagine di F una F^8 di S_5 su cui le immag[ini]

delle K' sono le sezioni per una retta r non incontrante F^8 (da cui F^8 vien proiettata in un cono quadrico 4-plo).

Ora considero una K di gen[ere] 5 sezione per r: su di essa una involuz[ione] di gen[ere] 2 con 4 coincidenze. Si ha su F^8 una C_4 di coincidenza (dell'inv[oluzione] I rappresentata dal p[ia]no 2-plo). Pel tuo teorema (lincei [18]92?)[2] la C_4 sega la detta K in 4 p[un]ti che insieme a 4 p[un]ti in un p[ia]no per r stanno in un S_3 (formano un gruppo canonico), onde la C_4 sta in un S_4 per r che tocca F in ciascun punto di essa. Segue che sul p[ia]no 2-plo la curva di diramaz[ione] appartiene al sistema lineare delle sestiche, ossia è una sestica.

Il curioso è che la C_4 su F^8 di fatto si riduce all'intorno di una conica 2-pla, da cui provengono molti apparenti pasticci (giacché la C_4 è di gen[ere] 2 e non può esser in un p[ia]no di S_5).

Ti persuade il ragionamento prec[eden]te? Esso comporterebbe il resultato già stabilito, e di più ci farebbe pervenire evitando i calcoletti relativi ai generi di curve spezzate.

Oggi passa di qua il Levi-Civita che è stato alcuni giorni a Padova.

Tanti affettuosi saluti anche a tutti i Miei.

Tuo
Ghigo

[1] Enriques 1896e.
[2] Cfr. Castelnuovo 1892a.

294. [c.p.]

[Bologna] 17 maggio [18]96

Carissimo Guido

Lieto della notizia che mi dai.* Ti ringrazio nuovamente per tutte le noie che hai voluto prenderti a cagion mia.[1]

Per procedere nelle modificazioni al mio lavoro mi occorre di sapere quale assetto definitivo darai ai tuoi resultati[2] sui sistemi lineari piani, e segnatamente se (come desidererei) dopo aver discusso i sist[emi] iperell[ittici] a serie non spec[iali], noterai esplicitamente che l'aggiunzione a partire da un sist[ema] privo di curve fond[amentali] proprie, conduce sempre ad un sistema di curve razionali o ellittiche, oppure al noto sistema ∞^3 di sestiche di genere due.

Tanti saluti affettuosi dal tuo
Ghigo

* È forse il caso di informarne il Cr[emona]?

[1] Enriques allude all'apertura del concorso per la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva a Bologna.
[2] Cfr. l'Aggiunta di Castelnuovo a Enriques 1896e.

295.

18 maggio [18]96

Carissimo Guido

Per dare al manoscritto l'ultimo assetto avrei bisogno di avere qui la tua aggiunta o nota redatta in forma definitiva, e di sapere quale posto essa deve occupare nel mio lavoro[1] (cioè se vi comparirà come aggiunta o come nota). Se a cagion di ciò vi sarà un ritardo di qualche giorno poco male, visto che il Cr[emona] non ha fretta.

La tua discussione dovendo essere inserita nel mio lavoro, mi parrebbe opportuno che essa cominciasse dal proporre il problema di determinare l'ultimo aggiunto ad un sist[ema] piano senza curve fond[amentali] proprie: dopo aver osservato che la questione si riduce a quella dei sist[emi] iperellittici a serie non spec[iali], ed esaurita la classificazione di questi, concluderesti che *l'ultimo aggiunto è* un sistema semplice di curve raz[ionali] o ellit[tiche] privo di curve fond[amentali] proprie, o una rete di cubiche o un sistema ∞^3 (o ∞^2?) di sestiche del genere 2.

Restiamo così d'accordo?

Quanto alla sup[erficie] F^8 di S_5 intersez[ione] di 2 quadr[iche] e d'un cono quadr[ico] di 2ª specie io non ho mai detto[2] che l'involuzione su di essa venga subordinata da un'omografia di S_5 e neppure che la curva di diramazione *appartenga* ad un S_4, ma solo che essa è contenuta in un S_4 passante per l'asse del cono (t[an]g[ente] in ogni p[un]to). È di qui che segue la conclusione indicata, cioè che nel p[ia]no 2-plo tale curva è una sestica con 8 p[un]ti 2-pli.

Ti mando subito le lezioni sulle sostituzioni del Bianchi.[3] Puoi tenerle quanto vuoi giacché per ora non me ne servo.

Il Levi-Civita che è passato di qua l'altro giorno mi ha parlato di un bel problema di meccanica che egli ha risoluto. Si tratta di assegnare i problemi dinamici (caso in cui vi sono solo forze iniziali) che ammettono dei trasformati non identici (riducibili l'uno all'altro per quadratura). Il L[evi]-C[ivita] riduce la cosa alla determinazione delle varietà a più dimensioni che ammettono delle trasformate in cui si corrispondono le geodetiche senza essere applicabili (né simili). E classifica i tipi di queste var[ie]tà ed i corrispondenti problemi dinamici.[4]

Tanti affettuosi saluti tuo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1896e e l'Aggiunta di Castelnuovo.
[2] Cfr. p. 267, let. 293 (14.5.1896).
[3] Bianchi 1897b. Cfr. p. 255, c.p. 281 (20.4.1896) e p. 257, let. 283 (26.4.1896).
[4] Cfr. Levi-Civita 1896.

296.

19 maggio [18]96

Carissimo Guido

Nella tua cartolina non enumeri come uno degli ultimi sistemi aggiunti la rete di cubiche con 7 punti base: ma mi pare una evidente dimenticanza.

Io ho quasi finito la nuova redazione del lavoro: te lo spedirò dunque (spero domani) e tu mi aggiungerai la nota,[1] come desideri.

La F^8 incriminata deve esistere. Infatti prendi il p[ia]no 2-plo con C_6 limite dotata di 8 p[un]ti 2-pli: puoi trasformarlo nella F^8. Se e come si costruisca proiettivamente in S_5 non mi importa.

Io non so quali obiezioni tu muova all'esistenza di una C_8 di S_4 dotata d'una inv[oluzione] di gen[ere] 2, ma pensa che quella C_8 ha 2 p[un]ti 2-pli e forse ciò farà sparire i pasticci.

Grazie della recensione del Burkhardt.[2]

È qui a [Bologna] il tuo amico A. Padoa, ed è venuto a trovarmi. Le questioni filosofiche di cui egli si occupa sono molto lontane da quelle di cui io specialmente m'interesso; sono essenzialmente questioni di *logica*: senza dubbio però hanno una importanza, nel modo con cui egli le considera.

Mi è venuto in mente di applicare i resultati concernenti i p[ia]ni 2-pli alla determinazione delle sup[erficie] di quarto ordine rappresentabili sul p[ia]no 2-plo, ciò che presenta almeno un interesse algebrico concreto. Però la cosa non è così facile come a prima vista parrebbe. Per lo meno esige una analisi assai minuta che sarebbe ricompensata soltanto se le condizioni in questione hanno una espressione semplice.

Tanti affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1896e e l'Aggiunta di Castelnuovo.
[2] Dovrebbe trattarsi dell'articolo Burkhardt 1895: cfr. p. 266, let. 292 (12.5.1896).

297.

23 maggio [18]96

Carissimo Guido

Vedo che non sei ancora persuaso. Siccome, sebbene non lo creda, potrei benissimo aver torto, ed allora occorrerebbe portare delle modificazioni

al manoscritto[1] che ti ho inviato, così ti prego di tenerlo presso di te finché la questione non sia decisa.

Perché la curva C di gen[ere] 5 non può rappresentarsi su una C_8 semplice di S_4?

Mi pare anzi che la serie canonica g_8^4 di C dia sempre una tale rappresentazione.

Piuttosto mi sembrava un paradosso l'esistenza di 2 p[un]ti 2-pli di questa curva.

Ma d'altra parte io prendo il p[ia]no 2-plo con C_6 limite dotata di 8 p[un]ti 2-pli. È esso o no di gen[ere] geom[etrico] e num[erico] 1?

Se sì (come pare) alle ∞^3 sestiche corrispondono sulla sup[erficie] di gen[ere] 1 ∞^3 curve C appartenenti ad un'inv[oluzione] I. Il sist[ema] normale $|C|$ è ∞^5 e non appartiene ad I perché è già normale rispetto ad I il sistema ∞^3 che corrisponde a quello delle sestiche. Dunque $|C|$ non appart[iene] ad I (ed ha come serie caratt[eristica] la serie can[onica]), onde è semplice o appartiene ad un'altra inv[oluzione] I': ma allora anche quel sist[ema] ∞^3 dovrebbe appartenere ad I'; questo non è assurdo perché il sist[ema] delle sest[iche] non è semplice.

Concludo, contro ciò che credevo cominciando la lettera, che potrebbe accadere quanto tu dici, anzi dovrà accadere perché F_8 a sez[ioni] canoniche non può possedere curva 2-pla.

Allora quale sarà la curva di diram[azione] del p[ia]no 2-plo corrispondente all'inv[oluzione] I (non ad I') (si suppone rovesciata l'ipotesi, cioè non che si sappia già che essa è una C_6).

Il mio ragionamento e quindi la conclusione (se non erro) sussiste ancora fondamentalmente.

Ti prego ora di rimandarmi (senza raccomandare) quei fogli del mio manoscritto contenenti quella discussione e quella prec[edente] (pel caso della rete di cubiche) che può dar luogo ad un caso analogo.

La questione per me essenziale è di vedere se (come ho asserito) in quei due casi la curva di diramaz[ione] del p[ia]no 2-plo è quella sestica o ci si può ridurre per trasf[ormazione] birazionale *del piano*, oppure se non è e soltanto la sup[erficie] si può riferire al p[ia]no 2-plo con C_6 limite ma non più operando una trasf[ormazione] biraz[ionale] del solo p[ia]no (mutando l'inv[oluzione] sulla sup[erficie]). Che almeno la seconda cosa sia vera è certo e lo avevo già provato in altro modo nel 1° manoscritto.

Tanti affettuosi saluti

tuo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1896e.

298. [c.p.]

[Bologna] 31 maggio [18]96

Carissimo Guido

Vedo dalla tua cartolina che hai finito la nota da apporre al mio lavoro:[1] mi persuade di metterla in fine, e ti ringrazio.

Io non andrò a Firenze che Giovedì o Venerdì al più presto: ma andatovi rimarrò là fino agli esami (che cominciano il 19). E le tue lezioni quando finiscono? Pare che facciate lezione almeno una settimana di più.

In ogni modo spero di vederti a Firenze almeno un giorno durante questa tua gita.

Vedrò di serbare al Fano una copia delle lezioni di G[eometria] Pr[oiettiva].[2]

Tanti affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Si tratta dell'Aggiunta di Castelnuovo a Enriques 1896e.

[2] Enriques 1894-95a.

299.

9 Giugno [18]96

Carissimo Guido

Sono dispostissimo a collaborare con te per la Enciclopedia di Meyer, sia che tu voglia fare insieme ciascun articolo, sia che tu preferisca dividerci il lavoro.

Ti consiglierei però ad accettare anche il tema «Curve algebriche piane» perché il tema «curve algebriche» per quel che riguarda almeno la Geometria sopra una curva è un tema unitario.[1]

Del resto vi è tanto tempo che non so se converrebbe cominciare il lavoro presto, perché di qui a 2 anni quelle teorie in formazione possono essere assai profondamente mutate.

Grazie e affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Alla *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* Enriques e Castelnuovo contribuiranno con gli articoli Enriques 1907d ed Enriques-Castelnuovo 1908, 1914. Il tema delle curve algebriche sarà invece trattato da Berzolari 1906.

300.[1]

10 Ott[obre 18]96

Carissimo Guido

Ti mando le bozze,[2] pregandoti di tener conto delle piccole modificazioni segnate a pg. 293, 304. La 2ª mi pare opportuna perché dal teor[ema] *c*) non si dedurrebbe $P_2 = P_3 = \ldots = 0$ se non si tenesse conto della prop[osizione] «parmi ceux-ci ecc.».[3]

Ti ringrazio delle notizie che mi fornisci. Non posso rammaricare che il D[el] R[e] non si presenti al concorso[4] perché in fin dei conti sarà una ragione perché rimaniamo in buoni rapporti, quantunque avrei desiderato il confronto con lui per evitare rammarichi possibili da parte di qualcuno della Fac[ol]tà di Bol[ogna].

Qui in biblioteca non c'è ancora il nuovo fasc[icolo] dei Math[ematische] Ann[alen].

Affettuosi saluti a te e all'Elbina.

Aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ho visto nel Bull[ettino] una novità.

«Il M[inistro] *potrà* (nei concorsi per prof[essor]e straord[inario]) assoggettare i concorrenti ad una discussione dei propri titoli coi commissari».[5]

Potrà? Forse che lo vorrà anche nel mio caso? O dipenderà dalla Commis[sione]? E, se mai, non si dovrebbe essere avvertiti? Io spero che non vi sia luogo a questa seccatura.

[...][6]

[1] La corrispondenza tra Enriques e Castelnuovo nell'estate 1896 fu certamente meno intensa, anche a causa del matrimonio di Castelnuovo il 9 luglio. Tuttavia sembra esserci una lacuna nel carteggio conservato.

[2] Si tratta delle bozze di Enriques-Castelnuovo 1896.

[3] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1896, § 37, 420-21.

[4] Enriques si riferisce al concorso per la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva di Bologna.

[5] Regio Decreto n. 387 dell'11 agosto 1896, «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXIII, 2, n. 37, 1433.

[6] Seguono nell'originale nove righe di saluto a Castelnuovo e alla moglie da parte di una persona che non siamo riusciti a identificare.

301.

23 Ott[obre 18]96

Carissimo Guido

Ti ringrazio della tua lettera.

Anche a me (per parlare con tutta franchezza) il giudizio è parso piuttosto severo, ma non me ne dolgo, e d'altra parte trovo giusto che pur non dando loro eccessiva importanza si tenga conto dei titoli didattici e, nel caso presente, della Descr[ittiv]a.[1]

I miei esami a Bol[ogna] cominceranno il 3 di Nov[embre]. Forse mi tratterrò là per attaccare il principio delle lezioni, dato che le cose procedono regolarmente al Cons[iglio] Sup[eriore] e la mia nomina non si faccia troppo aspettare.

Ho conosciuto oggi Piccini che mi incarica di salutarti.

Tante cose affettuose a te e all'Elbina. Tuo

Ghigo

[1] Enriques si riferisce alla relazione della commissione del concorso per la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva di Bologna, di cui era risultato vincitore, e in particolare al giudizio sui suoi titoli di geometria descrittiva: «Nelle lezioni di geometria descrittiva l'autore, pur presentando un quadro abbastanza esteso, non dà sufficiente sviluppo a certi argomenti del corso e specialmente alla parte pratica». Cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXIV (1897), 1, n. 529-35.

302.

Bologna 5 Nov[embre] 1896

Carissimo Guido

Ero sul punto di cominciare questa lettera quando mi è giunta la tua. Ringrazio prima di tutto il tuo Babbo delle gentili congratulazioni, e ti prego pure di ringraziare il Loria se hai occasione di rispondergli.

Io sto ora redigendo una notina sui gruppi primitivi (continui) di trasf[ormazioni] biraz[ionali] di S_3, e forse ne redigerò un'altra sui gruppi intransitivi. Con ciò la classificazione dei gruppi continui di trasf[ormazioni] bir[azionali] di S_3 non sarà forse completa, ma pochi tipi (se mai) potranno mancare: anzi non ho esempi di gruppi imprimitivi che non contengano sottogruppi invarianti intransitivi, e quindi escano dai tipi trovati.[1]

Ripensando al procedimento che mi ha condotto ai piani doppi[2] di gen[ere] 1, credo che esso possa condurmi anche alla determinazione dei piani doppi di bigenere 1, senza curva bicanonica.[3]

Le sup[erficie] di big[enere] 1 di tale specie sono molto analoghe alle sup[erficie] coi generi $p_g = p_n = P = 1$. Invero sopra di esse «ogni sistema

lineare puro (di dimensione > 1) ha il grado $n = 2\pi - 2$ (π indicando il genere): la dimensione è $\pi - 1$ (non π)».

Si tratterebbe prima di tutto di definire la mancanza di curve bic[anoniche] (per $P = 1$) mediante caratteri: poi di riprendere il ragionamento relativo ai piani 2-pli di gen[ere] 1 che fino a un certo punto si può ripetere passo, passo, e vedere a che cosa porti l'esistenza sulla sup[erficie] di un fascio puro di gen[ere] 2, o di sistemi rappresentati sul piano doppio da una rete di cubiche o da un sistema ∞^3 di sestiche di gen[ere] 2. Vedi che il resultato non può mancare.

Ci saranno soltanto i due piani doppi che noi conosciamo[4] o se ne incontreranno dei nuovi? Per ora non lo so, ma la cosa mi interessa, trattandosi di sup[erficie] completamente sfuggite agli studiosi fino a questi ultimi tempi.

A proposito di ciò che mi dici del Fano relativamente al concorso, ti dirò (pure in confidenza) che anche il Ciani, messo alla pari con lui, è rimasto scontento e se ne è lamentato con Bert[ini] in modo che ha fatto a questi una brutta impressione. Me lo ha raccontato il Bert[ini] stesso che ho visto recentemente a Pisa.

Non so che cosa abbia detto o pensato il P[ier]i, ma dubito che possa esser rimasto contento, e scontento di certo sarà l'Amodeo. In conclusione, mi pare, non sono stato contento che io.[5]

Tanti affettuosissimi saluti all'Elbina, e tanti a te

dal tuo
Ghigo

[P.S.] Ho finito gli esami di G[eometria] P[roiettiv]a, e comincerò fra qualche giorno quelli di G[eometria] Descr[ittiv]a, appena sarà tornato il Fiorini che è a Roma, suppongo, per la commissione di Geodesia.

[1] Queste ricerche saranno pubblicate in un articolo scritto in collaborazione con Gino Fano: cfr. Enriques-Fano 1897.

[2] Cfr. Enriques 1896e.

[3] In questa lettera Enriques comincia a occuparsi dei piani doppi aventi entrambi i generi uguali a 0 e bigenere 1, che sono casi particolari di quelle che oggi sono note come superficie di Enriques: i risultati conclusivi saranno pubblicati soltanto in Enriques 1907a.

[4] Cfr. p. 276, let. 304 (7.11.1896) nella quale viene chiarito di quali piani doppi si tratti.

[5] La commissione del concorso vinto da Enriques era composta da: Ferdinando Aschieri, Eugenio Bertini (presidente), Domenico Montesano, Corrado Segre (relatore) e Giuseppe Veronese. I candidati erano: Federico Amodeo, Edgardo Ciani, Enriques, Gino Fano e Mario Pieri.

303. [c.p.]

[Bologna] 5[1] Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Ho avuto oggi le felicitazioni di D[el] R[e] di passaggio per Bol[ogna]! Egli mi dice che crede il Cons[iglio] Sup[eriore] abbia finito la revisione delle relazioni di concorsi, ma non sa che cosa abbia deciso nel mio caso.

I caratteri che noi conosciamo, compresi i plurigeneri, non bastano a distinguere le sup[erficie] di big[enere] $P = 1$ senza curva bicanonica da quelle con *una* curva bicanonica ellitt[ica].

Io credo però che questo 2° caso dovrebbe essere impossibile, e le sup[erficie] di big[enere] $P = 1$ presenterebbero un fenomeno analogo alle curve ellittiche; ma è una pura supposizione che non vedo, per ora, come possa stabilirsi. Comunque si può andare avanti nella determinazione dei p[ia]ni 2-pli di big[enere] $P = 1$ senza curva bicanonica. Ho già eliminato vari casi che a priori sembravano possibili.

Tanti affettuosi saluti anche all'Elbina. Tuo
Ghigo

[1] 6, dal timbro postale.

304.

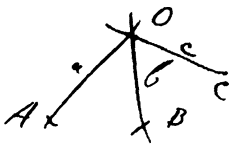
7 Nov[embre 18]96

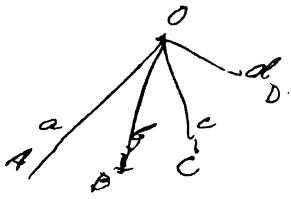
Carissimo Guido

Andando avanti nello studio dei piani doppi di bigenere 1 ($p_g = p_n = 0$),[1] trovo pasticci immensi, ed ancora non mi rendo conto della ragione di essi. Intanto ecco degli esempi di questi piani doppi:

1) piano 2-plo con C_8 limite avente O 4-plo e 2 coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vicini su due rette a e b per O (la C_8 è spezzata in A, B e in una C^6 con O^2 e A, B tacnodi ecc.). È il piano 2-plo che nasce dalla nostra F^6 come tu hai osservato.

2) piano 2-plo con C_{10} limite, spezzata in a, b, c e in una C con O^3 e 3 tacnodi in A, B, C con t[an]g[enti] tacnodali a, b, c.





3) piano 2-plo con C_{12} limite, spezzata in a, b, c, d, e in una C_8 con O 4-plo e 4 tacnodi in A, B, C, D ecc., finché queste curve (di cui cresce il n[umer]o dei tacnodi) esistono. Forse indefinitamente.

Ti ricordi che a Firenze si era parlato di un altro esempio: C_8 limite composta di una C_2 e di una C_6 con 3 tacnodi le cui t[an]g[enti] toccano C_2.

Ora questo p[ia]no 2-plo pare che rappresenti infatti una F con $p_g = p_n = 0$ $P = 1$, ma dotata di effettiva curva bic[anonica] di gen[ere] virt[uale] $p^{(1)} = 1$, spezzata in una curva razionale contata 2 v[olte], che però contata una volta non costituisce una curva can[onica].

Anzi credo si possa stabilire che «se una F riferita a un p[ia]no 2-plo possiede *una* curva bic[anonica] (ed è $p_g = p_n = 0$), la curva si riduce sempre ad una curva razionale di coincidenza contata 2 volte».

Se questo lemma è vero, non parrebbe difficile comprendere nella ricerca tutti i p[ia]ni 2-pli con $P = 1$ ($p_g = p_n = 0$). Ma come ti dicevo prima, ci sono degli imbrogli che non so ancora donde provengano.

È notevole il fatto che dai p[ia]ni 2-pli di big[enere] $P = 1$ e gen[ere] 0 (almeno da quelli incontrati finora) si ottengono togliendo una sing[olarità] della curva limite, dei p[ia]ni 2-pli rappresentanti sup[erficie] di gen[ere] $p_g = p_n = 1$ con $P = 2$, dotati di una effettiva curva can[onica] ellittica. Un 1° esempio lo hai dato tu, ed è la F^5 con 2 p[un]ti 3-pli e un tacnodo dove il p[ia]no tacnodale passa pei p[un]ti 3-pli; come vedi, questo esempio rientra nella categoria precedentemente accennata.

Ho visto nei Math[ematische] Ann[alen] la memoria di Wiman,[2] di cui mi hai discorso, e la trovo interessantissima, specialmente se (come pare) ci si può fidare dei resultati.

Mi viene domandato di chi fosse assistente un certo ing[egner] Spalazzi[3] morto recentemente a Roma (dicono di Geometria infinitesimale!).

Tanti affettuosi saluti

tuo
Ghigo

[P.S.] Mi accorgo che i p[ia]ni 2-pli sopra citati hanno $p_g = p_n = 0$ ma $P > 1$ (eccetto il 1°). Si avranno così esempi di sup[erficie] di gen[ere] 0 con P alto quanto si vuole?

[...][4]

[1] Cfr. p. 275, nota 3 a let. 302 (5.11.1896).

[2] Wiman 1897, dell'aprile 1896.

[3] Filippo Spalazzi, assistente di Giulio Pittarelli alla Scuola di Applicazioni per gli Ingegneri a Roma.

[4] Seguono nell'originale tredici righe di saluto a Elbina.

305. [c.p.]

[Bologna] 8 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Il prof. Fiorini che è a Roma (credo per il concorso di Geodesia), mi scrive che il Cons[iglio] Sup[eriore] ha approvato la relazione del mio concorso. Pare che altri concorsi sieno stati annullati.

Credo di essere arrivato alla conclusione che l'unico p[ia]no 2-plo di big[enere] $P = 1$ ($p_g = p_n = 0$) *senza* curva bic[anonica] è quello (con C_8 limite spezzata) proveniente dalla F^6 che passa 2 v[olte] per gli spigoli d'un tetraedro.[1] Mi resta solo a discutere un certo tipo assai bizzarro, che non dovrebbe esistere.

Tanti affettuosi saluti anche all'Elbina. Tuo
Ghigo

[1] Sarà questo il risultato definitivo della ricerca: cfr. Enriques 1907a.

306.

11 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Credo finalmente di vedere un po' chiaro sui piani doppi che ho preso a studiare. Il piano doppio con C_8 limite composta di una C_6 con 3 tacnodi tangenti a una C_2 e della C_2, si trasforma quadraticamente in un caso particolare di quello con C_8 limite composta di 2 rette a b e di una C_6 passante 2 v[olte] per $O \equiv ab$ e dotata di 2 tacnodi con t[an]g[enti] tacn[odali] a, b. E questo piano doppio sarebbe il solo dotato dei caratteri

$$(p_g = p_n =) p = 0 \qquad P = 1.$$

Ciò risulterebbe da una analisi un po' minuta, dopo avere stabilito che «Una superficie per cui $p = 0$, $P = 1$ non possiede mai curva bicanonica».[1]

Questo resultato, che occorre premettere alla trattazione, si dimostra (mi pare) per assurdo nel modo seguente.

In 1° luogo per una F con $p = 0$ $P = 1$ il $p^{(1)}$ (virtuale) vale 1. Invero sia $|C|$ un sistema puro di caratteri π, n su F: $|C'|$ ha i caratteri

$$\pi' = 3(\pi - 1) - n + p^{(1)}$$
$$n' = 4(\pi - 1) - n + p^{(1)} - 1$$
$$r' = \pi - 1;$$

$|2C'|$ sega su C' una serie non speciale completa (per il teor[ema] di R[iemann] R[och]) e quindi ha la dimensione $2n' - \pi' + r' + 1$: la serie

che esso sega su $2C$ può supporsi non speciale ed ha il grado $8(\pi - 1)$; si deve dedurre che se $p^{(1)} > 1$, $P > 1$ $(P \geq p^{(1)})$. Ora il genere (virt[uale]) delle curve bic[anoniche] è $p^{(1)} + p^{(1)} + (p^{(1)} - 1) - 1 = 3p^{(1)} - 2$. Nel nostro caso è 1. Segue che il trigenere $P_3 = 1$, ed esiste una curva 3-canonica effettiva aggiunta alla supposta bic[anonica] (ellittica), segante in $3\{2(\pi - 1) - n\}$ punti le curve C. Anche questa curva 3-can[onica] ha il gen[ere] 1 e così via per le pluricanoniche ($P_4 = P_5 = \ldots = 1$). Ora sia K_2 la curva bic[anonica], e K_3 la 3-can[onica]; esse non coincidono. $3K_2$ e $2K_3$ costituiscono 2 curve 6-canoniche distinte quindi $P_6 \geq 2$, il che è assurdo.

Segue la non esistenza di K_2: allora $P_3 = 0$ $P_4 = 1$ ...

Si tratta, come vedi, di un abbozzo di dimostrazione.

A pg. 7 del mio lavoro[2] «Sui piani doppi di gen[ere] 1» c'è un piccolo sbaglietto senza conseguenze (v[edi] la nota). Ivi è detto che se sopra una F $(p = 1)$ vi è una effettiva curva can[onica] di gen[ere] $p^{(1)}$, si ha $P = p^{(1)} + 1$: ciò va bene per $p^{(1)} > 1$, ma per $p^{(1)} = 1$ si può avere $P > 2$. ((Nel Bericht[3] si è messo per $p^{(1)} = 1$ $P = 1$ o $P = 2$, si correggerà il secondo = in $\geq$ e passerà come errore di stampa)).

Si possono avere in questo caso ∞^{p-1} $(p - 1 > 1)$ curve bic[anoniche] composte di curve ellittiche d'un fascio non seganti la curva canonica. Esempi sono i p[ia]ni 2-pli con C_{2n} limite composta di $n - 3$ rette per O e di una C_{n+3} con O $(n - 2)$-plo e tacnodi (con t[an]g[enti] tacn[odali]) su queste $n - 2$ rette (certo esistenti per $n \leq 18$). Forse questi sono anzi i soli p[ia]ni 2-pli con $p = 1$ $p^{(1)} = 1$ $P > 1$.

Domani sono invitato ad una seduta di Fac[ol]tà dove è all'ord[ine] del giorno la comunicazione della mia nomina: il M[inistr]o ha fatto presto!

Non sai di chi fosse assistente l'ing[egner] Spalazzi?[4]

Tanti affettuosi saluti anche all'Elbina. Tuo

Ghigo

[1] Per i risultati definitivi su tale questione cfr. Enriques 1907a.
[2] Enriques 1896e, 333.
[3] Enriques-Castelnuovo 1896, 408.
[4] Cfr. p. 277, nota 3 a let. 304 (7.11.1896).

307.

13 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

La comunicazione della mia nomina,[1] della cui sollecitudine mi ero sorpreso, è stata... un falso allarme! Pare che il Pres[ide] abbia fatto l'ordine del giorno dell'adunanza, a orecchio!

Ho piacere che tu abbia vinto le ultime difficoltà relative al tuo teor[ema][2] sul $p_g - p_n$, e mi interesserà molto di leggere ciò che me ne scriverai.

Io mi trovo di fronte ad una contraddizione di cui non vedo la chiave. Ecco di che si tratta.

1) Le sup[erficie] di gen[ere] $p_g = p_n = 1$ con *una* curva canonica (esistente) $p^{(1)} = 1$, hanno $P \geq 2$.

2) Il piano doppio con C_{12} limite composta d'una C_9 con 9 p[un]ti 3-pli e della C_3 per essi, sembra avere *una* curva can[onica] (la C_3) ed *una* bic[anonica] C_3^2.

Tu dubiterai anzitutto dell'esattezza del[la] prop[osizione] (1) ch'io ho dimostrato (nella Mem[oria][3] sui p[ia]ni 2-pli) ricorrendo alle agg[iunte] di *una* curva. Ma quel ragionamento si traduce nel seg[uente] che mi pare inattaccabile:

Sia $|C|$ un sistema puro sulla sup[erficie] (e su quel p[ia]no 2-plo ne costruisci subito quanti vuoi); $|C|$ abbia i caratteri π, n; $|C'|$ ha il gen[ere] $p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n$, quindi $|C''|$ ha la dim[ensione] $p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n$. D'altra parte $|C''|$ sega C in $4(\pi - 1) - n$ p[un]ti di una serie (al massimo) di dim[ensione] $3(\pi - 1) - n - 1$ (non speciale essendo $2(\pi - 1) > n$), quindi $|C'' - C|$ (cioè il sist[ema] bic[anonico]) ha la dim[ensione]

$$P - 1 \geq p^{(1)}; \quad \text{per } p^{(1)} = 1 \;\; P \geq 2.$$

(Noterai che se la curva can[onica] non esiste la serie segata da $|C''|$ su C diviene speciale e $P = 1$).

Resta dunque uno dei due casi seguenti: *a*) o non esiste una C_9 irriducibile con 9 p[un]ti 3-pli, *b*) o un p[un]to 4-plo non impone *sempre* una condizione alle curve can[oniche] (d'ordine $n - 3$ essendo $2n$ l'ord[ine] della curva limite).

Sono andato a rivedere la nota di Halphen[4] sulle C_{3n} con 9 p[un]ti 3-pli, perché mi era nato un dubbio che per n dispari vi fossero delle riduzioni. Il ragionamento di Halphen che s'appoggia sulla divisione dei periodi delle funz[ioni] ellittiche si tradurrebbe nel nostro linguaggio così:

Si prenda una C_3 e su di essa le C_9 con 8 p[un]ti 3-pli: esse sono ∞^6 e segano su C_3 una g_3^2: un p[un]to 3-plo della g_3^2 è 3-plo per ∞^1 C_9 che hanno come 3-pli anche gli altri 8 p[un]ti (facile a verificarsi). Ora i p[un]ti 3-pli della g_3^2 sono i 9 flessi di una cubica, ma fra questi figura il 9° p[un]to O che cogli 8 è base di un fascio di C_3. Ne restano 8 che danno soluzioni del problema. Pare che essi sieno distinti dai 3 p[un]ti (fuori di O) che sono le coincidenze della g_2^1 segata su C_3 dalle C_6 cogli 8 p[un]ti 2-pli e che

danno i fasci di C_6 con 9 p[un]ti 2-pli. Dunque il ragionamento di Halphen andrebbe bene.

Non rimane che esaminare l'ultima questione.

Può darsi che un p[un]to 4-plo di una C_{2n} di diramazione in certi casi non ne abbassi il genere?

Nel caso il nostro p[ia]no 2-plo con $C_3 + C_9$ limite avrebbe il genere 10 perché tutti i p[un]ti 4-pli di $C_3 + C_9$ sono nelle stesse condizioni.

Per spiegarsi la cosa bisognerebbe ammettere che quei p[un]ti 4-pli rappresentano sing[olarità] della sup[erficie] che influirebbero sul genere ma non influiscono più perché sono andati a cadere sulla curva doppia. Ma la spiegazione non mi soddisfa.

Che cosa ne pensi?

La conclusione cui ti accennavo l'altro giorno[5] per le sup[erficie] di big[enere] $P = 1$ mi pare che regga, ma è vero che ti ho presentato il ragionamento in modo assai oscuro. Credo anch'io che la F^6 sia l'unica sup[erficie] con quei caratteri, ma ho provato un po' inutilmente a dimostrarlo, come pure a costruire esempi in contrario.

Ora mi sono ingolfato nella determinazione dei piani 2-pli con $p_g = p_n = 1$ $p^{(1)} = 1$ e $P > 1$. Credo di possederne i tipi che mostrerebbero l'esistenza di un massimo, assai alto, per P: ma ho incontrato per strada la difficoltà di cui ti ho detto innanzi.

È tornato il F[iorin]i da Roma e mi ha dato la notizia aspettata ma pur sempre lieta della vittoria del Reina.[6] Abbiamo ora cominciato col F[iorin]i gli esami di G[eometria] Descr[ittiva], e ne avrò fino a Domenica, riposando domani per l'inaugurazione.

Tanti affettuosi saluti anche all'Elbina. Tuo

Ghigo

[1] Si tratta della nomina a professore straordinario.

[2] Si tratta del teorema: «Sopra una superficie di generi p_g, p_n ogni sistema lineare completo di curve ha una serie caratteristica la cui deficienza non può superare $p_g - p_n$» (Castelnuovo 1897a, 416). A tale proposito Castelnuovo osservava (*ibid.*, nota *, 415): «Quando pubblicai la Memoria *Alcuni risultati*... [Castelnuovo 1896a], ero già in possesso di questo teorema; ma alcune difficoltà riscontrate nella dimostrazione che davo allora, mi consigliarono di differirne la esposizione. Mi limitai a dar cenno del risultato in una nota a piè di pagina. Il teorema si trova poi enunciato (senza dimostrazione) nella Monografia *Sur quelques récents résultats*..., n. 27 [Enriques-Castelnuovo 1896]». A questo proposito si veda anche p. 199, c.p. 214 (18.6.1895).

[3] Enriques 1896e, § 5, 333-34.

[4] Cfr. Halphen 1882, 556.

[5] Cfr. p. 278, let. 306 (11.11.1896).

[6] Si tratta del concorso di Geodesia: cfr. p. 275, P.S. a let. 302 (5.11.1896).

308.

14 Novembre [18]96

Carissimo Guido

Avendo saputo la ragione che tiene in letto per riguardo l'Elbina, mando a lei tanti baci, e faccio le più calde e affettuose congratulazioni ed augurii a tutti e due.[1]

Un albergo economico per Tullio[2] potrebbe essere l'Albergo dei Tre Re (Via Rizzoli) ove io sono andato sempre quando ho avuto occasione, altrimenti la Stella d'Italia (pure in Via Rizzoli); questo 2° albergo lo credo un po' meglio e un po' più caro.

Non so se ti ho scritto che dei parenti del mio padron di casa mi hanno detto di avere una camera da affittare. Non so se a Tullio piacerà (io non la ho vista), ma se gli accomodasse credo si troverebbe benissimo per la famiglia, almeno a giudicare dai miei padroni di casa.

Mi farai piacere ad avvertirmi della venuta di Tullio. Dagli il mio indirizzo e digli ch'io vado a mangiare abitualmente al Ristorante Firenze (Via dell'Indipendenza), alle 12 e alle $7\frac{1}{4}$: ma, se io sarò libero, lo cercherò subito io stesso. Ripetigli anche che conti pure su di me per qualunque cosa possa occorrergli. Sono lietissimo della sua venuta.

Ripensando al paradosso di ieri, vedo che non può spiegarsi nel modo che ti avevo espresso e di cui non ero soddisfatto. Forse la chiave della cosa sta in ciò: quel p[ia]no 2-plo con $C_9 + C_3$ limite ha $p_g = 1$ ma $p_n = 0$. Questa spiegazione sebbene non provata direttamente non urta contro niente e mi pare plausibile: d'altra parte mi pare l'unica e perciò legittima conclusione. Se p[er] e[sempio] si potesse vedere che le C_9 pei p[un]ti 4-pli di $C_3 + C_9$ danno immagini spezzate variabili in un fascio ellittico?

Mi è venuto in mente un metodo col quale si potrà forse abbordare lo studio[3] delle sup[erficie] di gen[ere] 1 e di big[enere] 1 $F^{\pi}_{2\pi-2}$ e $F^{\pi-1}_{2\pi-2}$. Si tratterebbe di considerare queste sup[erficie] non normali in S_4. Per una di esse F, faccio passare la var[ie]tà V_x del minimo ordine che vi passa e la sego con un'altra V_x o V_{x+1} che passi per F: poi prendo le V_x o V_{x+1} per l'intersezione residua; queste segano su F un sistema puro. Rendendo il minimo possibile questo sistema si dovrebbe avere la riduzione domandata. Che te ne pare?

Non ho ora il tempo di pensare alla cosa colla calma dovuta, finché non saranno finiti gli esami di Descr[ittiva].

Sono tuttora incerto se cominciare le lezioni finché non è venuta la nomina.

Tanti saluti affettuosi

tuo
Ghigo

[1] Enriques allude alla gravidanza di Elbina: il 24 giugno 1897 nascerà Mario, il primogenito dei coniugi Castelnuovo.

[2] Tullio Luzzatti, pediatra, figlio di Luigi, professore di Diritto costituzionale a Padova e ministro del Tesoro e delle Finanze in vari governi. Luigi Luzzatti aveva sposato la sorella della madre di Castelnuovo. Tullio sposerà Giorgina Enriques, sorella di Federigo.

[3] Cfr. anche p. 247, let. 268 (22.2.1896).

309.

Bologna 16 Novembre 1896

Carissimo Guido

Ho letto con molto interesse la tua lunga lettera. E mi pare che tutto vada bene; soltanto mi rimane dubbio se non sia *necessario* estendere il 1° lemma anche ai p[ia]ni passanti per i p[un]ti sing[olar]i.[1] Ma questa estensione deve essere certo possibile; mi pare che basti di considerare una tal sezione come riducibile (formata in parte dall'intorno del p[un]to sing[olar]e contato un certo n[umer]o di volte), applicando i teor[emi] di geom[etri]a sulle curve alle curve riducibili. Quanto all'affermare che le sup[erficie] subaggiunte passanti per curve agg[iun]te sono agg[iun]te, non vi ha dubbio; anzi è la definizione che io ho assunto per le sup[erficie] agg[iun]te.[2]

Vedo ormai chiara la ragione del paradosso. Quel p[ia]no 2-plo ha $p_n = p_g = 1$, ma ∞^1 curve bic[anoniche]. Il mio errore consisteva nel supporre che le curve bicanoniche, come le can[oniche], dovessero appartenere all'inv[oluzione] I_2 sulla sup[erficie]. Posso ormai assegnare facilmente i tipi di p[ia]ni 2-pli con $p^{(1)} = 1$ $p_g = p_n = 1$, tra i quali se ne trovano con P alto quanto si vuole (il che mi pare assai interessante).

Vengono fuori anche i tipi di p[ia]ni 2-pli con $p^{(1)} = 1$ e $p_g > 1$; ma pare che questi abbiano sempre $p_n = 1$, e sieno degenerazioni dei precedenti.

Se non incontro altre difficoltà ho ora il tempo di redigere subito questo lavoretto, giacché debbo aspettare la nomina per cominciare le lezioni. Poi penserò con più calma alle sup[erficie] con $p_g = p_n = 0$ e $P = 1$ e a quelle con $p_g = p_n = P = 1$.

Ho piacere che l'Elbina stia meglio e possa alzarsi. I più affettuosi saluti a tutti e due.

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 280, let. 307 (13.11.1896) e Castelnuovo 1897a, 377-81.

[2] Cfr. Enriques 1896d, § 31, 278-80.

310.

21 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Eccoti la spiegazione del telegramma che ti ho spedito testé.

Lunedì scorso mi sono recato dal rettore (che è il mio amico prof. Puntoni),[1] domandandogli l'autorizzazione di cominciare intanto le lezioni.

Il ret[tore] ha detto che avrebbe telegrafato al M[inistro], ed infatti gli ha telegrafato dicendogli che gli constava esser io vincitore del concorso e desiderando non ritardare il principio dei corsi pregava autorizzarmi a cominciare. Risponde telegraficamente Ferrando,[2] dicendo di sospendere l'autorizzazione perché il M[inistro] non avendo ancora ricevuto le carte dal Cons[iglio] Sup[eriore] non ha provveduto per la cattedra. Il ret[tore] mi ha voluto subito avvertire dicendomi che quel telegramma di Ferrando ha fatto a lui brutta impressione perché in casi simili si dà sempre l'autorizzazione a cominciare le lezioni. Egli interpreta quel telegramma così: il M[inistro] ha sentito che al Cons[iglio] Sup[eriore] è sorta qualche discussione in proposito (su cui forse qualcuno ha richiamato l'attenzione), e si riserba di esaminare da sé le carte.

Quest'interpretazione sarebbe suffragata da ciò che mi hai scritto ieri.

Scusa dunque la seccatura che ti ho dato; ma siccome vedo un pericolo, vorrei esserne informato per tempo per cercare di porvi riparo. Anzi secondo quel che mi telegraferai domani potrebbe darsi che venissi subito a Roma. Infatti è urgente che il M[inistro] non annulli il concorso: dopo il decreto di annullamento non si potrebbe far altro.

Quanto a ciò che mi scrivi sui sistemi regolari, cioè che il sist[ema] agg[iunto] coincide col subaggiunto, vedo la cosa se la dim[ensione] $r > p_g$, perché il sistema non ha curve fond[amentali] proprie, altrimenti (staccandone una) diminuirebbe il $\pi - 1 - n + r$, che ha invece il minimo p_n pei sist[emi] non speciali. Ma come si fa ad escludere l'esistenza d'un sistema ∞^{p_g} con una curva fondamentale ellittica, il cui residuo sia il sistema canonico? ecc. Anzi la sup[erficie] del 3° ordine con punto triplo ne dà esempio.

Tanti affettuosi saluti

dal tuo
Ghigo

[1] Vittorio Puntoni fu il rettore dell'Università di Bologna dal 1896 al 1911.
[2] Giovanni Ferrando era capo divisione del Ministero dell'Istruzione Pubblica.

311.

21 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Vedo dalla tua lettera che, sebbene il caso non sia grave, ben aveva giudicato il Puntoni che qualche cosa dovesse esserci. Ed io non posso stare tranquillo finché non sappia la decisione del M[inistr]o (tanto più essendo il M[inistr]o un avvocato!). Mi pare meglio di restare nel frattempo a Bologna.

Ti sarò gratissimo se vorrai tenerti informato di ciò che succede, a ciò si possa, se mai, scongiurare il pericolo.

Credi che sia il caso di informare fin d'ora della cosa il Cr[emona]?

Ecco l'elenco[1] dei p[ia]ni 2-pli di 2° genere $p^{(1)}$ e $P \geq 1$.

Famiglia I

1) C_{2n} di diramazione con O $(2n-4)$-plo e ρ p[un]ti 4-pli e s coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vicini ad O:

$$p_n = n - 2 - \rho - s$$
$$P = 2n - 5 - 2\rho - s.$$

2) C_{2n} con O $(2n-4)$-plo e un p[un]to 4-plo distinto da O.

3) C_{2n} con O $(2n-4)$-plo composta di b rette per O e di una C_{2n-b} con b tacnodi e t[an]g[enti] tacn[odali] le dette rette

$$p_n = n - 2 - b$$
$$P = 2n - 5 - b.$$

È sempre (per i p[ia]ni 2-pli di questa famiglia) $p_g = p_n$ se non è $p_n < 0$. Esisteranno p[ia]ni 2-pli della classe 3) con $p_g = p_n = 0$ e P grande ad arbitrio?

Famiglia II

C_{6r} di diramazione con 9 p[un]ti $2r$-pli

$$p_n = 1.$$

Se la C_{6r} non è composta di C_6 o C_3, anche

$$p_g = 1;$$

unica curva canonica la C_3 pei 9 p[un]ti $2r$-pli contata $r-1$ volte: curve bicanoniche d'ordine $12(r-1)$ passanti $4(r-1)$ v[olte] pei 9 p[un]ti; il loro numero P dipende dall'ordine delle componenti irriducibili di C_{6r}; può

rendersi alto quanto si vuole. Quando C_{6r} è composta di C_6 o di C_3 si hanno tipi di p[ia]ni 2-pli col p_g alto ad arbitrio ($p_n = 1$).

Questi esempi mostrano bene l'indipendenza dei caratteri p_g p_n P $p^{(1)}$.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina (che sento con piacere star meglio).

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] I risultati qui indicati saranno esposti in Enriques 1898b.

312.

22 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Il problema dei p[ia]ni multipli (n-pli) razionali mi pare attaccabile.

Supponiamo che la curva di diramazione C_{2m} sia irriducibile e dotata di punti multipli distinti: denotiamone le molteplicità con $ni_s + \rho_s$ dove $\rho_s < n$. Questi p[un]ti multipli si possono addirittura considerare come ni_s-pli. Una curva can[onica] appartenente all'inv[oluzione] I_n sulla sup[erficie] verrebbe data sul p[ia]no 2-plo da una $C_{(2m-3n)/n}$ passante $i-1$ v[olte] per ogni p[un]to ni-plo di C_{2m}. Segue che le curve can[oniche] sul p[ia]no 2-plo sono tutte date da *certe* curve C_{2m-3n} passanti $n(i-1)$ v[olte] per i p[un]ti ni-pli di C_{2m}, in altre parole curve dell'n-esimo agg[iun]to a C_{2m}. Le condizioni ulteriori verrebbero espresse dall'avere tanti contatti n-pli con C_{2m}.

Si prenda il numero X delle curve n-esime agg[iun]te a C_{2m} linearmente indipendenti e si defalchi il numero x delle menzionate condizioni, si avrà

$$X - x = p_n.$$

Ora, per la razionalità,

$$X - x = 0.$$

Ma le curve n-esime agg[iunt]e a C_{2m} prese n volte rappresentano curve n-canoniche; dunque esse non devono esistere e però deve essere

$$X = 0 \qquad x = 0.$$

Pare che queste 2 condizioni (venendo esclusa la sovrabbondanza dell'n-esimo agg[iun]to a C_{2m}) dovrebbero dare le condizioni di razionalità del p[ia]no n-plo.

Le singolarità più elevate di C_{2m} darebbero un caso più difficile, ma forse ancora abbordabile quando si fosse risoluta la questione nel caso più semplice sopra accennato.

Le mie deduzioni sulle sup[erficie] di big[enere] $P_2 = 1$ sono soltanto parzialmente giuste.[1] È vero cioè che se una sup[erficie] di big[enere] 1 e $p_g = 0$ possiede *una* curva bicanonica (effettiva) si ha $P_3 \geq 1$ e (ciò che è più notevole) $P_6 \geq 2$, onde un fascio di curve ellittiche, ma questo caso non è assurdo come pensavo.

Infatti la formula per cui la dim[ensione] di $|C'|$ è

$$r = p + \pi - 1 \qquad (p = p_g = p_n)$$

quando $|C|$ ha il gen[ere] π, va rimpiazzata colla disuguaglianza

$$r \geq p + \pi = 1$$

quando $\pi = 1$ e $|C|$ è un fascio o una curva, onde per $p^{(1)} = 1$ $P = 1$ non si trova $P_3 = P_4 = \ldots = 1$, ma $P_3 \geq 1$ $P_4 \geq 1 \ldots$

I più affettuosi saluti, anche all'Elbina, dal tuo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1907a; p. 279, let. 306 (11.11.1896).

313. [c.p.]

[Bologna] 22[1] Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

I piani n-pli ($n > 2$) hanno il torto di non esistere sempre, data la curva di diramazione. Se così non fosse i p[ia]ni n-pli con C_{3n} di diramazione (n pari) darebbero le sup[erficie] di gen[ere] 1 di tutti gli ordini. Invece queste sup[erficie], se esistono, danno p[ia]ni n-pli di cui la curva C_{3n} di dir[amazione] ha p[un]ti 2-pli il cui numero è facile valutare (il gen[ere] della curva di dir[amazione] è n). Le immagini delle curve del sist[ema] di partenza sono C_n aventi $3n$ contatti n p[un]ti con C_{3n}. Tra queste C_n per n assai alto ve ne dovranno esser sempre delle spezzate? La questione delle sup[erficie] di gen[ere] 1 sarebbe risoluta dalla risposta alla pre[ceden]te questione.

I p[ia]ni n-pli razionali (almeno nei casi più semplici) avrebbero lo $(n-1)$-esimo agg[iun]to costituito di curve razionali (le parti variabili). Se ne dovrebbe trarre la loro classificazione.

I più affettuosi saluti, anche all'Elbina, tuo
Ghigo

[1] 24, dal timbro postale.

314.

24 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Ripensando alle cose che ti ho accennato sui p[ia]ni multipli, alle possibili applicazioni, e a varii esempi che mi sono costruito, ho concluso che relativamente ai p[ia]ni multipli ancora non si capisce niente, mentre sarebbe importantissimo di capirne.

Prendi per esempio una sup[erficie] F_n di ord[ine] n con sola curva doppia: la rappresenti per proiezione su un p[ia]no n-plo di cui la curva C di dir[amazione] ha solo p[un]ti 2-pli. Eppure anche in questo caso più semplice non sembra facile assegnare la condizione di razionalità. Se vi si riuscisse si avrebbe una nuova forma, forse più vantaggiosa, del criterio di ra[zionali]tà delle sup[erficie].

Gli esempi di sup[erficie] dei primi 6 ordini che ho esaminato, contraddicono ad ogni previsione.

Io credo di vedere una 1ª ragione delle difficoltà che s'incontrano in ciò che noi pretendiamo di avere dalla curva di dir[amazione] del p[ia]no multiplo ciò che essa non può dare. Mi spiego, e bisogna per ciò che cominci un po' da lontano.

Mi propongo di vedere a priori che la retta n-pla è determinata (almeno per ciò che concerne i suoi caratteri) dai p[un]ti di diramazione. Partiamo dalla formula che dà il gen[ere] di una curva spezzata

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r + \Sigma i - (r - 1):$$

la curva sia spezzata in r rette, con $2n$ p[un]ti di diramazione; parrebbe che fosse $2n = \Sigma i$, ma è facile persuadersi che il $2n$ va dimezzato, onde

$$n = \Sigma i \qquad \pi = n - (r - 1):$$

la formula è esatta perché dà

$$2(r - 1) + 2\pi = 2n.$$

Andiamo ora alle sup[erficie]. Prese due sup[erficie] F_{π_1} F_{π_2} di generi π_1 π_2, che si seghino secondo una curva di gen[ere] p, il genere di $F_{\pi_1} + F_{\pi_2}$ vale $\pi_1 + \pi_2 + p$. La formula si verifica con esempi e si dimostra se le sup[erficie] spezzate sono regolari.

Di qui si trae il genere di un p[ia]no 2-plo. Esso è il genere della *metà* della sua curva di dir[amazione]. Il resultato è giusto almeno nei casi di sing[olari]tà più semplici.

Ora si potrà ottenere una formula che dia il genere di una sup[erficie] formata di 3 pezzi, ma come è chiaro bisognerà tener conto non solo dei

generi delle curve loro intersezioni, ma anche del numero di punti che esse hanno 2 a 2 a comune; forse soltanto della somma di tali numeri.

Quindi il genere di un p[ia]no 3-plo (ed anche n-plo con $n > 3$), non dipenderebbe soltanto dalla curva di diramazione e dal genere della sua *metà*, ma anche dal numero di quei suoi p[un]ti 2-pli che rappresentano 3 punti coincidenti di un gruppo dell'inv[oluzione] I_3 (o I_n) sulla sup[erficie]. In altre parole noi pretendiamo di desumere i caratteri invariantivi di $f(x\ y\ z) = 0$ dall'esame del discriminante $D(x\ y) = 0$ resultante di

$$f = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0:$$

bisogna di più esaminare espressamente la resultante $\chi(x) = 0$ di

$$f = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

È probabile che non $D(x\ y)$ soltanto ma $\bar{D}(x\ y)$ e $\chi(x)$ (mai da prendersi ad arbitrio) assorbano tutti i caratteri della superficie $f(x\ y\ z) = 0$.

Viste le difficoltà che si presentano passando ai p[ia]ni n-pli con $n > 2$, e visto che non sono neppure risolute completamente le questioni fondamentali relative ai p[ia]ni 2-pli, mi propongo di esaurire prima quest'ultime. Vorrei trattare la cosa un po' sistematicamente:

1) determinare sopra un p[ia]no 2-plo le immagini delle curve canoniche *in tutti* i casi (vedo che l'analisi delle sing[olari]tà sup[eriori] conduce allo scopo);

2) valutare quindi il p_g, p_n, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ tanto virtuali che effettivi. Si trovano infatti classi di esempi in cui le curve can[oniche] han componenti fisse, rappresentate sul p[ia]no 2-plo da p[un]ti multipli (d'ord[ine] disp[ari]) per la curva di diramazione;

3) estendere a tutti i p[ia]ni 2-pli regolari l'esistenza di un sistema puro rappresentato sul p[ia]no da curve raz[ionali] o ellittiche, da cui segue la classificazione dei p[ia]ni 2-pli con $p = 1$, e $P = 1$ o con $p = 0$ $P = 1$;

4) classificare i p[ia]ni 2-pli con $p^{(1)} = 1$ $(P > 1)$;

5) enunciare il metodo che serve alla costruzione di tutti i p[ia]ni 2-pli con dati $p > 2$ e $p^{(1)} > 1$ a curve canoniche irriducibili;

6) assegnare i tipi corrispondenti ai valori più bassi del $p^{(1)}$ in confronto al p.

Si avrebbe così il programma per una memoria racchiudente in parte, riassunti, i resultati precedenti.[1]

Ricevo la tua cartolina. È giusta l'osservazione relativa al Cr[emona].[2]

Sono stato a cercare Tullio[3] e non lo ho trovato, ma egli è venuto

poco dopo da me. Mi pare assai contento di Bol[ogna] e dell'accoglienza cordiale che gli hanno fatto in clinica.

I più affettuosi saluti, anche alla Elbina, dal tuo Ghigo

[1] Cfr. p. 285, let. 311 (21.11.1896) ed Enriques 1898b.

[2] Riguardo al problema della nomina di Enriques: cfr. p. 284, let. 310 (21.11.1896) e p. 285, let. 311 (21.11.1896).

[3] Tullio Luzzatti; cfr. p. 283, nota 2 a let. 308 (14.11.1896).

315.

26 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Non sembra facile di dare una definizione diretta di sistema lineare di sup[erficie] determinato dalle linee e dai *punti* base.[1] Bisognerebbe prima aver definito in tutti i casi i punti multipli straordinari. Ma io assumerei come definizione quella di *sistema normale* o *completo* rispetto al grado: almeno quando il grado del sistema è > 0.

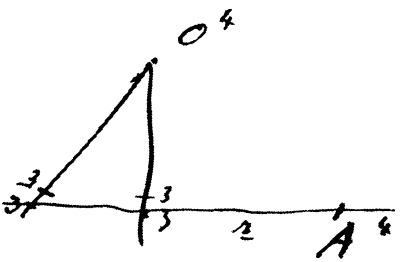
Il rettore dell'U[niversi]tà mi promise già da parecchi giorni di sollecitare a Roma la decisione del M[inistr]o che mi riguarda: ritengo che la sollecitazione sia costà fino da Lunedì.

Mi sono trovato con Tullio ieri sera. Abbiamo parlato lungamente anche di voi, ed egli mi ha confermato le buone notizie della nostra Elbina; le piccole noie presenti avranno largo compenso per tutti e due.

Ai resultati sui p[ia]ni 2-pli che ti ho comunicato posso ora aggiungere la determinazione delle sup[erficie] con $p^{(1)} = 2$ $p = 2$.[2] Esse sono certo riferibili al p[ia]no 2-plo (curva lim[ite] $= C_8$ con 2 p[un]ti 3-pli infinitamente vicini, o C_{10} con 2 p[un]ti 5-pli infinitamente vicini). Le curve can[oniche] hanno un punto (base) comune.

Anche le sup[erficie] con $p^{(1)} = 3$ e $p \geq 2$ si determinano in conseguenza del metodo generale:[3] ma trovo qualche difficoltà pel caso ($p = 2$) in cui le curve can[oniche] abbiano una parte raz[ionale] fissa, in guisa che le parti variabili abbiano il genere $p_g^{(1)} = 2$. Che la cosa sia possibile lo mostra prima di tutto il p[ia]no 2-plo con C_{12} lim[ite] dotata di 8 p[un]ti 4-pli e uno 2-plo, 9 p[un]ti base per un fascio di cubiche. Ma una tale sup[erficie] deve potersi riferire ad un altro p[ia]no 2-plo in cui le curve can[oniche] vengano date dalle rette d'un fascio. Effettivamente esiste il p[ia]no 2-plo con C_{10} lim[ite] dotata di un p[un]to 4-plo O, d'un altro 4-plo A e di 2 coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vicini (allineati con O), e sopra una retta r per A.

Le imm[agini] delle curve can[oniche] di esso si spezzano nella r (imm[agine] d'una curva raz[ionale]) ed in rette per O. Ma io vorrei trasformare questo p[ia]no 2-plo in un altro, dove la componente fissa venisse rappresentata dall'intorno di O, e qui non riesco. Eppure non si dovrebbe riuscire con una trasformazione di Jonquières? Che cosa sarebbe la nuova curva di diramazione ottenuta?



A quanto pare esistono anche sup[erficie] di gen[ere] p alto quanto si vuole, di cui le parti variabili delle curve can[oniche] sono spezzate in curve di gen[ere] 2, (d'un f[ascio] lineare), ma non si vede come possano esser rappresentate sul p[ia]no 2-plo assumendo le rette d'un fascio come imm[agini] delle curve di gen[ere] 2.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina, tuo

Ghigo

[1] Cfr. Castelnuovo 1897a, 367-72.

[2] Si confronti con i risultati esposti in Enriques 1897b; si veda anche p. 285, let. 311 (21.11.1896).

[3] Si confronti con i risultati esposti in Enriques 1897c.

316. [c.p.]

[Bologna] 27 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Ci sono dei piani 2-pli curiosissimi in cui l'aggrupparsi di più di 2 p[un]ti multipli infinitamente vicini porta a resultati inattesi.

Questa è una nuova sorgente d'imbrogli. Così per esempio il p[ia]no 2-plo con C_{14} lim[ite] dotata di p[un]to 8-plo, 2 p[un]ti 6-pli e uno 4-plo tutti infinitamente vicini ha un $p^{(1)}$ assai alto e le parti variabili delle curve can[oniche] hanno un $p_g^{(1)} = 2$.

È qui di passaggio il L[evi]-C[ivita] che si reca a Padova dove avrà l'incarico della Meccanica.[1] Egli (che attende dal M[inistr]o la libera docenza)

mi dice che la relazione del Cons[iglio] Sup[eriore] è alla divisione fino da Domenica.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina Tuo

Ghigo

[1] Tullio Levi-Civita tenne l'insegnamento di Meccanica razionale a Padova per l'anno 1896-97 come incaricato e dall'anno successivo come professore straordinario e poi ordinario.

317.

28 Nov[embre 18]96

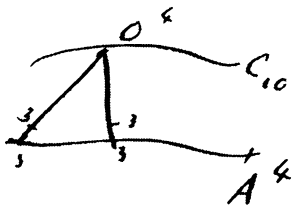
Carissimo Guido

Prima di tutto ti ringrazio di essere passato al Cons[iglio] Sup[eriore] e sono spiacente per causa mia tu abbia seccature così frequenti. Il L[evi]-C[ivita] mi aveva detto ieri che la relazione del Cons[iglio] Sup[eriore] era stata trasmessa al M[inistr]o fino dal 22; ma si tratterà di sunto invece che di relazione.

Il fatto è che molti cominciano a dire che il M[inistr]o ritarda le nomine e le promozioni per fare un mese o più di economie! A tale scopo si attaccherebbe a tutti i pretesti.

La definizione che proponi pei sistemi lineari di sup[erficie] determinati dal gruppo base,[1] mi persuade completamente. È poi facile dimostrare che un sistema completo rispetto al grado è determinato dal gruppo base e viceversa, cioè che come curve pei p[un]ti base basta considerare quelle sezioni variabili delle sup[erficie] del sistema.

In quanto al mio piano 2-plo, so anch'io che si deve trasformare nel modo che desidero con una trasf[ormazione] quadratica avente come p[un]ti fond[amental]i O, A e un altro p[un]to di r; ma, siccome non ho punto pratica colle trasf[ormazioni] quadratiche non vedo ancora che pasticcetto venga fuori.



Sup[erficie] con curve can[oniche] spezzate in parti variabili di gen[ere] 2 si ottengono prendendo 9 p[un]ti A_1 A_2 ... A_9 base per un fascio di C_3, e una C_{6n} di dir[amazione] con A_1^{2n} ... A_8^{2n} A_9^{2n-2}. Le immagini delle

curve can[oniche] sono date dalle C_{3n-3} con $A_1^{n-1} \ldots A_8^{n-1} \; A_9^{n-2}$; ma queste si spezzano in gruppi di $n-1$ cubiche del fascio più l'intorno del punto A_9.

Ora si dovrebbero potere rappresentare queste sup[erficie] riferendo le curve can[oniche] alle rette (doppie) d'un fascio; ma le difficoltà che già compariscono per $p = 2$, qui aumentano. Tutto deve stare nella presenza di singolarità complicatissime, analoghe a quella della C_{14} di cui ti accennavo ieri.

Ti saluto in fretta, affettuosamente, insieme all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. Castelnuovo 1897a, 367-72; cfr. anche p. 290, let. 315 (26.11.1896).

318.

30 Nov[embre 18]96

Carissimo Guido

Sia $|F|$ un sistema lineare di sup[erficie] del grado n (> 0), completo (rispetto al grado). Esso è certo determinato dal gruppo base secondo la tua definizione.

Si tratta di stabilire l'inversa. Cioè se $|F|$ è determinato dal gruppo base, esso è completo. Se non lo è si può ampliare conservandone il grado: sia $|F'|$ il sistema ampliato e V la var[ie]tà che esso rappresenta. $|F|$ è contenuto in $|F'|$ e segato su V dagli iperpiani passanti per qualche punto di V (corrispondente alle intersezioni di meno che F ha con qualche curva); ma allora $|F|$ avrebbe il grado $<$ [del grado di] $|F'|$: *assurdo*.

La C_{14} che mi dai, soddisfa appunto a tutte le esigenze; ma io ho una curva più semplice che dà un analogo p[ia]no 2-plo: la C_{10} con una sola sing[olari]tà che dà $p_g^{(1)} = 2$, $p^{(1)} = 3$. S'intende che le sing[olari]tà si succedono sopra uno stesso ramo.

La costruzione di tutte le sup[erficie] (p[ia]ni 2-pli) aventi le curve can[oniche] spezzate in parti variabili di genere $p_g^{(1)} = 2$, dipende dalla costruzione di tutti i sistemi lineari di curve raz[ionali] C_n con O^{n-1} che riescono sovrabbondanti, avendo O n-plo per conseguenza degli altri p[un]ti base. La cosa sembra paradossale, ma non è perché le C_n risultano riducibili e con una parte fissa. In ogni modo è un grande imbroglio.

Ho dato una scorsa alla lunga memoria di Poincaré[1] sull'Analysis sytus ((Journal de l'Ecole Polytecnique - [18]*95*)). Contiene cose interessanti ma non si spinge molto in là.

Le var[ie]tà riemanniane V_4 delle sup[erficie] hanno 3 caratteri di connessione $P_1 = P_3$, P_2: ma $P_1 = 1$ salvo in casi particolari. Il P_1 si collega agli integrali di Pic[ard]; il P_2 pare al genere p_g: ma a quanto pare non vi è identità. Due V_4 cogli stessi caratteri P_1, P_2, non possono sempre farsi corrispondere biunivocamente (in modo continuo), a differenza di ciò che avviene per le superficie di Riemann.

Questa è secondo il Poincaré la ragione della difficoltà della teoria delle sup[erficie].

La lettura della memoria mi sembra molto difficile. Ho capito soltanto questo, che una var[ie]tà V_n ha tante connessioni diverse, rispetto alle varietà V_1 V_2 ... V_{n-1}. Il 1° numero (di Betti) P_1 dà appunto il numero delle linee chiuse irriducibili di V_n. Il P_2 ha una definizione analoga ma che non capisco bene. Se V_n è *chiusa* (come per le riemanniane),

$$P_1 = P_{n-1} \qquad P_2 = P_{n-2} \ \ldots$$

Il numero P_r è $\geq$ del n[umer]o degli integrali d'un certo tipo (linearmente indipendenti).

Qualche cosa di simile per le V_4 c'era già nella memoria del Picard.[2]

I più affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[P.S.] Tullio vi ringrazia e ricambia i saluti.

Sapevo già che la Giorgina[3] è a Roma, e ne ho piacere per l'Elbina. Tanti saluti anche a lei quando la vedete.

Essendo andato a Roma il dep[utato] Tizzoni, gli ho scritto pregandolo di sollecitare la mia pratica al M[inister]o.

[1] Poincaré 1895.
[2] Picard 1889, § 7.
[3] Giorgina Enriques, sorella minore di Federigo.

319.

4 Dec[embre 18]96

Carissimo Guido

Ho saputo da casa che l'Elbina è stata un po' incomodata con una infreddatura, della quale ora va benino; e speriamo sia cosa finita, giacché anche una piccolezza è noiosa in questo momento.

Io vado avanti coi miei piani doppi.

Il comportamento delle immagini delle curve canoniche nei punti multipli della C_{2n} di diramazione, si può enunciare (raggruppando tutti i casi) così:

Sieno $A\ B\ C\ D$ ..., p[un]ti multipli degli ord[ini] $i\ j\ r\ s$ ... succedentisi sopra un ramo della curva. Le C_{n-3} canoniche sono soggette a passare per A colla molt[eplicità] $\left(\frac{i}{2}-1\right)$ (indico con (ρ) il mass[imo] intero contenuto in ρ); per $A\ B$ complessivamente colle molt[eplicità] $\left(\frac{i+j}{2}-2\right)$; per $A\ B\ C$ colle molt[eplicità] $\left(\frac{i+j+r}{2}-3\right)$ ecc.

Vale a dire se $i>j$, per A $\left(\frac{i}{2}-1\right)$ e per $B\left(\frac{i+j}{2}-\frac{i}{2}-1\right)$ ecc.; se $i=j$, per A $\left(\frac{i}{2}\right)$ (in conseguenza della 2ª condiz[ione]), per $B\left(\frac{i}{2}-1\right)$ ecc.

Se vi sono successioni di p[un]ti multipli su vari rami, queste sono da considerare come distinte.

Si ottiene così la formula generale delle condizioni che i p[un]ti multipli di C_{2n} *impongono* alle curve can[oniche]. Dico che impongono, non delle molt[eplicità] che *resultano*; queste ultime possono essere più elevate, come hai già visto negli esempi che ti ho comunicato e nel tuo esempio: allora vi sono parti fisse o p[un]ti base pel sistema canonico. Del resto di queste parti fisse si hanno esempi più intuitivi.

Prendi per esempio come curva di dir[amazione] una C_{12} con 4 coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vicini, ed i 4 p[un]ti stieno su una retta r. Le C_3 can[oniche] si spezzano nella retta (parte fissa ellittica) e in una conica.

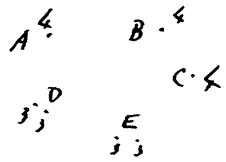
Il solo carattere di un p[ia]no 2-plo che si può calcolare dati i numeri delle sing[olari]tà di C_{2n} è il genere numerico p_n. Il genere p_g dipende anche dalla sovrabbondanza del sistema delle C_{n-3} can[oniche]. Ma ciò che è più strano il $p^{(1)}$ (virtuale) non è dato da quei n[umer]i, e dipende esso pure dalla posizione delle sing[olari]tà di C_{2n}. Ciò dipende dallo staccarsi di parti fisse eccezionali dalle C_{n-3}.

Ecco un esempio ad hoc.

Prendi la C_{10} con 3 p[un]ti 4-pli e due (3 3) (coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vic[ini]). In generale la C_2 can[onica] non si spezza e si ha

$$p^{(1)} = 1 \quad p = 1 \quad P = 2$$

(∞^1 C_4 bic[anoniche] $A^2B^2C^2$ *DD EE*).



Ma se *ABC* sono su una retta (facente parte di C_{10}) la C_2 can[onica] si spezza in questa retta (eccezionale) e nella *DE*: si ha ora

$$p = 1 \quad p^{(1)} = 2 \quad P = 3,$$

avendosi ∞^2 C_3 bic[anoniche] passanti per *ABC DD EE* (più la retta fissa).

Vedo sempre Tullio che viene a mangiare con me. Viene pure là Diena il Giov[edì], V[enerdì] e S[abato], giorni in cui è a Bologna per le sue lezioni; egli anzi mi incarica di salutarti.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina, dal tuo
Ghigo

[P.S.] Il M[inistr]o brilla sempre per il suo silenzio. Tizzoni è ripartito subito da Roma e non ha potuto occuparsene, ma quando torna a Roma (se nel frattempo non sarà venuto il decreto) mi promette di passare alla Divisione e svegliarli un po' dal sonno inqualificabile in cui sono sepolti; giacché la cosa comincia a passare i limiti. Al rettore che ha scritto sollecitando, non hanno nemmeno risposto. E siccome il trattamento è lo stesso per altri che aspettano promozioni, non vi può essere altra ragione di ritardo, che l'economia.

Di nuovo i più affettuosi saluti.

320. [c.p.]

[Bologna] 5 Dec[embre 18]96

Carissimo Guido

Ti sono davvero gratissimo della tua premura sapendo quanto sia noioso lo scendere e salire... per le scale del M[inister]o. Speriamo!

Ho cercato di generalizzare il resultato sulle sup[erficie] $p_g = p_n = 1$ «non esistenza di effettiva curva can[onica] con $p^{(1)} = 0$». Si generalizza così: una curva razionale che (considerata come un sistema ∞^0) abbia il grado virt[uale] -1, è eccezionale.[1] Ne segue che il sistema canonico non può possedere parti fisse razionali unisecanti le residue e diminuenti di 1 il $p^{(2)}$: queste parti fisse si riducono a p[un]ti base semplici pel sistema canonico.

Vorrei estendere la cosa al caso di p[un]ti base multipli del sistema canonico. Intanto tutti i p[un]ti (3 3) delle C_{2n} di dir[amazione] dei p[ia]ni 2-pli danno punti base semplici pel sistema canonico. Vedi che larga messe di esempi contro il teor[ema] di N[oether]![2]

I più affettuosi saluti anche all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[1] Questo risultato sarà dimostrato in Enriques-Castelnuovo 1901, 111.
[2] Cfr. Noether 1875, §§ 9-10 e p. 126, let. 113 (1.8.1894).

321.

7 Dec[embre 18]96

Carissimo Guido

Lasciando per un momento i p[ia]ni 2-pli mi sono proposto di determinare i tipi di sup[erficie] in corrispondenza ai valori minimi del $p^{(1)}$. Occorre cominciare[1] dal $p^{(1)} = 2$ perché per $p^{(1)} = 1$ la ricerca non è determinata neppure fissato il p. Occorre pure di limitarsi al caso $p_n > 0$, perché, come vedrai, le difficoltà aumentano col decrescere del genere.

Per $p^{(1)} = 2$ può essere $p_n = 2$ o $p_n = 1$.

$p^{(1)} = 2$, $p_n = 2$ (risulta anche $p_g = 2$) conduce a p[ia]ni 2-pli. Infatti la sup[erficie] bicanonica è un cono quadrico 2-plo con C_{10} di diramazione.

$p^{(1)} = 2$ $p_n = 1$ (risulta $p_g = 1$) non conduce sempre a p[ia]ni 2-pli.

Vi sono ∞^2 curve bican[oniche], e ∞^4 3-canoniche. È facile vedere che le curve bic[anoniche] non sono iperellittiche (altrimenti $p_n = 2$ e si ricade nel caso prec[eden]te). Perciò si può prendere come immagine della sup[erficie] una F_9 di S_4 tricanonica.

Ora le curve 3-can[oniche] segano la curva can[onica] (di gen[ere] 2) nei gruppi di una g_3^1: considerando le curve 3-can[oniche] per un gruppo, se ne ha ∞^3. A ciò corrisponde una proiezione della F_9 in S_3 del 6° ord[ine]. È una F^6 a sezioni di genere 8, C_2 2-pla con p[un]to 2-plo particolare O, le sezioni per O essendo le curve bic[anoniche].

Mi pare che si riesca a vedere che C_2 deve essere una conica; nel caso (che forse racchiude come casi particolari gli altri) O non sta su C_2: su ogni sez[io]ne p[ia]na per O vi sono 4 p[un]ti 2-pli.

Si può costruire una F^6 con tali sing[olari]tà, in modo che risulti

$$p_n = p_g = 1, \quad p^{(1)} = 2, \quad P_2 = 3, \quad P_3 = 5.$$

Per $p^{(1)} = 2$ $p_n = 0$, come vedi, bisognerebbe discutere la F^9 3-can[onica]: in questo caso appartenente ad S_3.

Per $p^{(1)} = 3$ $p_n \geq 1$ si ha una sup[erficie] bicanonica, F^8 di S_3 almeno che forse può essere discussa più facilmente.[2]

Come vedi i nostri sistemi pluricanonici giuocano la loro parte a meraviglia.

Ho interrotto questa lettera cominciata ieri. La riprendo.

Vedo che la F^6 ha le sezioni di genere 7 e non 8: pare possieda 3 rette 2-ple per O in un p[ia]no.

Quanto alla F^8 ($p^{(1)} = 3$) mi accorgo che sarà probabilmente intrattabile almeno per $p = 1$. Per $p = 2$ essa sta in S_4 e da un p[un]to viene proiettata in una F^7 con retta 3-pla e C_5 2-pla ...; vedremo.

Il caso $p^{(1)} = 3$ $p = 3$ è di per sé evidente (p[ia]no 2-plo con C_8 lim[ite]).

Vedendo che ormai non potrò cominciare le lezioni prima di Natale mi propongo di tornarmene domani a Firenze.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[1] I risultati ottenuti saranno pubblicati in Enriques 1897b; cfr. anche p. 290, let. 315 (26.11.1896).

[2] I risultati ottenuti saranno pubblicati in Enriques 1897c; cfr. anche p. 290, let. 315.

322.

Bologna 8 Dec[embre 18]96

Carissimo Guido

La F^8 bicanonica ($p = 1$, $p^{(1)} = 3$) si determina subito. Essa ha una curva doppia C_{14}, 2-pla anche per una F^7 razionale a sezioni ellittiche, e questa condizione la caratterizza nel mondo più generale. ((Si costruisce F^8 facendo fascio di F^7 + un p[ia]no e F^4 agg[iun]ta contata 2 v[olte])).

Per $p = 2$ $p^{(1)} = 3$ la F^8 è in S_4 e si può proiettare in una F^9 che pare

abbia 2 rette 3-ple a, b e 2 rette 2-ple c, d per un p[un]to O; c, d giacendo in un p[ia]no con b.

Non dispero nemmeno di determinare le sing[olari]tà della F^9 tricanonica ($p = 0$, $p^{(1)} = 2$) e forse anche della F^{18} tricanonica ($p = 0$ $p^{(1)} = 3$). Non bisogna spaventarsi troppo dei numeri alti che vengono fuori per le singolarità: il diavolo è forse meno brutto di quel che pare. E chi sa non si possa anche passare ai casi $p^{(1)} = 4$ ...?

Tornando indietro alla F^6 che nasce dal sistema tricanonico nel caso $p = 1$ $p^{(1)} = 2$, ti dirò che la determinazione delle sue sing[olari]tà (curva 2-pla C_3 di 3° ord[ine] e p[un]to 2-plo speciale O, che dà sez[ioni] piane di genere 4) mi ha fatto disperare, e sebbene creda di essere in porto, non ne sono però ben sicuro. È anzitutto chiaro che la C_3 2-pla deve essere piana, giacché essa è 2-pla per una φ_3 che insieme a un p[ia]no per O dà una φ_4 biaggiunta. Questa φ_3 si riduce dunque al p[ia]no di φ_3 contato 2 v[olte] più il p[ia]no (diciamo così) tangente in O. Segue (per le condizioni che O impone alle φ_4 biaggiunte) che la C_3 passa per O; ma non segue di più. Anzi se si prende una F^6 con C_3 piana 2-pla e un contatto di 3° ordine con sé stessa in un p[un]to O di C_3, si ha una F^6 coi caratteri voluti. Ma il p[ia]no tangente in O sega la F^6 in 6 rette eccezionali, mentre ve ne debbono essere 3: come va questo pasticcio?

Ho provato a costruire effettivamente la F^6, mi pare che in tutti i modi nascan per essa 3 rette 2-ple per O nel p[ia]no tangente, vale a dire la F^6 colle sole sing[olari]tà volute non esisterebbe.

Ed allora per avere la F^6 voluta bisognerebbe supporre che C_3 si spezzi in 3 rette (2-ple) per O (nel p[ia]no tangente); queste rette 2-ple sarebbero cuspidali, la φ_2 agg[iun]ta si ridurrebbe al p[ia]no di esse contato 2 v[olte] (per le condizioni imposte da O) donde segue che ci sarebbero 3 rette eccezionali, intorni delle rette cuspidali che sono 2-ple invece che semplici per la φ_2 agg[iun]ta. Ti pare plausibile la cosa?

Nota che il dubbio della non esistenza di F^6 non può accamparsi perché si hanno esempi di p[ia]ni 2-pli $p = 1$, $p^{(1)} = 3$. Del resto mi pare che la F^6 prec[eden]te si costruisca direttamente.[1]

I più affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[P.S.] Parto per Firenze.

[1] I risultati ottenuti saranno pubblicati in Enriques 1897b e 1897c.

323.

9 Dec[embre 18]96

Carissimi

Vi ringrazio del vostro affettuoso invito. Chi sa che non mi decida! Intanto mi informerò di questi biglietti di andata e ritorno per il Natale. Sarebbe per me una vera festa di passare con voi qualche giorno e rivedere l'Elbina nelle sue nuove condizioni di... mamma futura.

Rispondendo alla parte matematica della lettera di Guido gli dirò che il trasformare la curva di diramazione di un p[ia]no 2-plo per assegnare le immagini delle curve canoniche eliminando le sing[olari]tà superiori, non mi pare conveniente. In 1° luogo è dubbio se proprio le sing[olari]tà superiori sparirebbero, dovendosi tener conto delle trasformate dei p[un]ti dispari nella nuova curva di diramazione. E poi sarebbe un rispondere alla questione soltanto a mezzo. Mi pare essenziale di poter dare i caratteri della sup[erficie] data proiettivamente la curva di diramazione. Ed a ciò mi pare che risponda l'analisi fatta delle sing[olari]tà; se la cosa è un po' complicata non è colpa mia. Del resto la complicazione maggiore dipende da circostanze geometriche più che numeriche. Ma se una curva di diramazione è conosciuta anche nelle sue sing[olari]tà geometricamente, si possono calcolare tutti i caratteri della superficie.

Quale obiezione ha fatto il S[egre] alla definizione di sistema lineare determinato dai p[un]ti base?[1]

Mi interesserà assai il lavoro di S[egre][2] sulle sing[olari]tà.

I più affettuosi saluti

vostro
Ghigo

[1] A questo proposito si vedano le lettere di Corrado Segre a Castelnuovo del dicembre 1896 pubblicate in Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie* cit., 175-81. Cfr. anche p. 292, let. 317 (28.11.1896).

[2] Segre 1897a.

324.[1]

11 Decembre [18]96

Carissimo Guido

Sei davvero molto buono a perseverare con tanta pazienza a fare i cozzi con un M[inistr]o che mette altrettanta perseveranza nel conseguire in questo bel modo il suo fine economico. So che la cosa è generale per tutte le nuove nomine; ma il M[inistr]o dovrebbe almeno avvertire delle sue decisioni gli interessati anche se vuol ritardare il decreto.

Quel che ti dicevo[2] a proposito della F^6 proiezione delle F^9 tricanonica mi pare esatto.

Ecco la costruzione effettiva della F^6.

Prendi 3 rette *a b c* d'un p[ia]no per un p[un]to *O* e considera una F^3 per esse: fra le F^3 che segano la prima in una C_9 di cui fan parte *a b c* ed una C_6 cerchiamo quelle per cui *O* risulta 3-plo per la C_6; vedi dalla rappresentazione piana della 1ª F^3, che dalla sezione C_6 [di] questa F^3 si staccano *a b c*. Due F^3 siffatte costituiscono una F^6 con *a b c* 2-ple che ha in *O* un contatto di 5° ordine con se stessa (5 p[un]ti 2-pli infinitamente vicini ad *O* su ogni sezione). Queste coppie di F^3 danno un sistema lineare cui appartengono F^6 irriducibili per cui *a b c* sono cuspidali.

Le F^3 che soddisfano alla nominata condizione rispetto alla 1ª assegnata sono ∞^4 (segando sulla 1ª un sistema ∞^3); sono aggiunte alla F^6; ma non sono tutte le F^3 aggiunte; invero queste F^3 contengono su ogni sezione piana per *O* il 5° p[un]to infinitamente vicino ad *O*, ciò che non occorre per le aggiunte. {Vuol dire che le dette F^3 sono le aggiunte passanti per la curva canonica di F^6 (rappresentata dall'intorno di *O*), e segano il sistema completo ∞^4 cui appartengono le sezioni piane di F^6; è quindi chiaro a priori il fatto (già verificato) che le F^3 debbono contenere le 3 rette eccezionali infinitamente vicine alle rette cuspidali *a, b, c*}.

Ciò che è posto fra le parentesi { } non è esatto tanto è vero che il sistema segato dalle F^3 su F^6 ha il grado 12: le F^3 precedenti debbono essere assoggettate ad un'ulteriore condizione in *O* per contenere la curva canonica. Vi è qui veramente un pasticcetto che non vedo bene come si spieghi. Tuttavia la F^6 costruita soddisfa a tutte le esigenze.

Vi è *una* F^2 aggiunta costituita del p[ia]no osculatore in *O* contato 2 volte (come risulta dalla condizione in *O*). Lo stesso p[ia]no contato 3 v[olte] insieme ad un p[ia]no per *O* dà una F^4 biaggiunta. Infine il p[ia]no stesso contato 5 v[olte] dà una sup[erficie] 3-aggiunta. Le F^2 agg[iun]te sono ∞^7 come si verifica direttamente.

Proviamo invece a costruire una F^6 con C_3 2-pla per *O*, dove *O* sia un contatto di 3° ord[ine] della sup[erficie] con se stessa. Questa sup[erficie] se esiste ed è tale che sul p[ia]no t[an]g[ente] in *O* vi sieno in ogni direzione 2 p[un]ti 2-pli infinitamente vicini ad *O*, ha i caratteri voluti. Ma essa non deve esistere perché conterrebbe 6 rette eccezionali.

D'altra parte la costruzione della F^6 per mezzo di 2 F^3, come nel caso prec[eden]te, ora non riesce più. Infatti una F^3 che abbia la metà delle sing[olari]tà di F^6 ha per O 3 rette $a\ b\ c$ nel p[ia]no t[an]g[ente], ed un'altra F^3 che abbia in O colla 1ª un contatto del 3° ordine contiene le stesse rette, onde la F^6 composta ha 3 rette doppie per O.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina, tuo

Ghigo

[1] Il testo della lettera è tormentato da varie correzioni e cancellature, anche di più righe. Le parentesi graffe sono nell'originale parentesi quadre.

[2] Cfr. p. 299, let. 322 (8.12.1896).

325.

16 Dec[embre 18]96

Carissimo Guido

Non ho più riveduto ciò che ti scrivevo intorno alla superficie $p^{(1)} = 2$ $p_n = 1$, appunto per veder meglio le cose dopo una pausa di qualche giorno.

Intanto sono andato avanti nella determinazione delle superficie $p^{(1)} = 3$, e credo di averne l'elenco completo[1] ($p > 0$)

$p^{(1)} = 3 \quad p_n = 3 \quad (= p_g)$ p[ia]no 2-plo con C_8 limite.

$p^{(1)} = 3 \quad p_n = 2 \quad (= p_g)$ p[ia]no 2-plo con C_{10} limite dotata di 3 p[un]ti 4-pli in linea retta e due coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vicini (mi pare di aver stabilito la non esistenza della F_8 bicanonica semplice {in questo caso}, cioè la sua riducibilità ad un F_4 2-pla).

$p^{(1)} = 3 \quad p_n = 1 \quad (= p_g)$ Superficie F_8 con curva 2-pla C_{14}, 2-pla per una F_7 razionale (a sezioni ellittiche). Oppure: p[ia]no 2-plo con C_{10} limite dotata di p[un]to 4-plo e 4 coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vicini.

Questi sarebbero i tipi almeno finché si suppongono le curve canoniche irriducibili, perché la riducibilità potrebbe portare dei pasticci, sebbene io non lo creda.

Ho ricevuto dai Math[ematische] Ann[alen] le bozze del mio lavoro[2] «Sulle irrazionalità...». Non capisco il ritardo del nostro Bericht.[3]

Calcolo di venire a Roma fra qualche giorno e ve lo annunzierò.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina

tuo

Ghigo

[P.S.] Avrai visto che il M[inistr]o ha fatto ora le promozioni ad ord[inari]o: la mia nomina non dovrebbe dunque tardare, se non insorgono difficoltà.

[1] Cfr. Enriques 1897c.
[2] Enriques 1897a.
[3] Enriques-Castelnuovo 1896.

326.

30 Decembre [18]96

Carissimo Guido

Ho mandato al S[egre], anche a tuo nome, come siamo rimasti d'accordo, una copia del Bericht,[1] accompagnando la primizia con una cartolina.

Ricevo dal Noether una cartolina oscurissima in cui torna daccapo sulla questione della bisezione dell'argomento delle funz[ioni] iperellittiche. Non è già che egli muova dubbio alle mie affermazioni ma vuole ch'io aggiunga qualcos'altro sopra una semplificazione che si presenta per tale equazione, cosa notata da Riemann e poi da lui stesso e da altri; anzi mi par di capire che egli *more solito* abbia aggiunto l'osservazione e mi abbia lasciato il posto per le citazioni.[2]

Il N[oether] ti ricambia saluti ed auguri.

Sto rivedendo e dando l'ultimo tocco alle mie Note[3] sulle superficie con $p^{(1)} = 2$, $p^{(1)} = 3$, che spero di mandarti uno di questi giorni.

A te e all'Elbina i più affettuosi auguri pel nuovo anno che coronerà i vostri desideri, e i più cordiali saluti

Tuo
Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.
[2] A questo proposito si veda Enriques 1897a, § 9, 450-51, nota 17 in particolare.
[3] Enriques 1897b e 1897c.

327.

31 Dec[em]bre [18]96

Carissimo Guido

Ti mando la lettera ricevuta dal S[egre].[1] Il quale, come vedrai, non è entrato nel nostro ordine di idee per ciò che riguarda le sing[olari]tà delle sup[erficie]. Vedrai anzi che interpreta in un modo che sarebbe stato da parte mia molto ingenuo ciò ch'io gli dicevo sulla trasformazione cremoniana delle sing[olari]tà.

Il S[egre] accetta, come si prevedeva, di riprendere l'idea del trattato. Siccome per parte mia non mi preoccupo dei dubbi che egli muove circa la convenienza per me di cominciarlo (non sarà una ragione per lasciare da parte le ricerche originali, tanto più che non importa andare con fretta), così si può pensare sul serio a tradurre l'idea nel campo dei fatti.

Affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. la lettera di Corrado Segre del 30 dicembre 1896 in Gario, *Singolarità e geometria sopra una superficie* cit., 176-78.

328.

2 Gennaio 1897

Carissimo Guido

Sono curioso di sapere che impressione ti farà il M[inistr]o, e speriamo che tu possa darmi buone notizie per te e per me.[1]

Per quanto riguarda le cose tue credo possa interessarti una notizia (di cui non posso garantirti l'esattezza) avuta qui dai Grandi. Mi dicono che il Cons[iglio] Sup[eriore] (?) ha deliberato che la promozione del Monticolo ad ord[inario] abbia luogo entro l'anno scolastico, e mancando il posto sia fatta per l'art[icolo] 69.[2] Dovresti informarti giacché questo precedente ti sarebbe favorevole.

Ho ricevuto le 2^{e} bozze del mio lavoro dei Math[ematische] Ann[alen].[3] A proposito delle citazioni che ivi devo fare per contentare il N[oether]r, ti pregherei di guardare nella Absch[nitt] IX del Bericht di Brill e Noether la letteratura ivi citata[4] riguardo al teorema che l'equazione per la bisezione dell'argomento delle funz[ioni] iperellittiche di genere p si riduce ad un'equazione di grado $2p + 2$ e a radici quadrate.

Ti manderò domani la 1^{a} delle mie note:[5] quella «Sulle sup[erficie] con $p^{(1)} = 2$», ma forse tratterrò la 2^{a} avendo il dubbio che per una certa degenerazione possa aversi un nuovo tipo.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[1] Enriques allude sia al possibile ordinariato di Castelnuovo, a quest'epoca ancora straordinario, sia alla propria nomina. Cfr. a questo proposito p. 303, P.S. a let. 325 (16.12.1896).

[2] Per l'articolo 69 della Legge Casati, cui si riferisce Enriques, cfr. p. 175, nota 1 a let. 178 (3.2.1895).

[3] Si tratta delle bozze di Enriques 1897a.

[4] Cfr. Brill-Noether 1894, 471-77 e p. 303, c.p. 326 (30.12.1896).

[5] Enriques 1897b. La seconda, citata subito sotto, è Enriques 1897c.

329.

3 Gennaio 1897

Carissimo Guido

Le mie copie del Bericht[1] spedite a Bologna saranno qui domani, e comincerò subito la spedizione, aggiungendo ai nomi che tu mi dai quello del Wiman cui voglio chiedere i lavori. Se poi, con comodo, tu mi darai la nota di quelli a cui hai spedito tu il nostro Bericht, specialmente degli stranieri con cui non sono in corrispondenza, io potrò mandare ai medesimi i miei lavori citati nel B[ericht] stesso.

Per le sup[erficie] con $p^{(1)} = 3$ credo che il tipo di piano doppio di cui sospettavo l'esistenza non vi sia di fatto, ma per escluderlo occorre una analisi molto minuziosa.[2] Io non credo che valga la pena di farla, poiché se ne può fare a meno imponendo a priori la restrizione $p_g = p_n$ ciò che toglie molte noiose discussioni in vari punti del lavoro (e non fa sparire nessuno dei tipi trovati).

D'altronde ho dovuto già escludere la riducibilità delle curve can[oniche] a cui probabilmente si riattaccano i casi $p_n < p_g$. La discussione di tali casi potrà se mai formare oggetto di un'altra ricerca.

Ho modificato dunque la 2ª delle mie note ponendovi la restrizione $p_g = p_n$. E ti mando ambedue le note (oggi stesso se trovo aperta la posta); ti sarò grato se vorrai rivederle un po' attentamente, senza alcuna fretta, *prima di* darle al Cr[emona].[3]

È inqualificabile la lentezza del M[inistr]o.[4] Ho scritto al rettore di Bol[ogna], ma ho poca fiducia nella energia dei Bolognesi. Credi che prolungandosi il ritardo sia il caso di ricorrere al Cr[emona] che vedo tornato a Roma?

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.

[2] Cfr. Enriques 1897c.

[3] Le due note Enriques 1897b e 1897c saranno entrambe presentate da Luigi Cremona per la pubblicazione nei «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», rispettivamente nelle sedute del 21 febbraio e 7 marzo 1897.

[4] Enriques era ancora in attesa della nomina. Cfr. p. 292, let. 317 (28.11.1896) e seguenti.

330.

7 gennaio [18]97

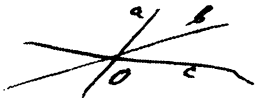
Carissimo Guido

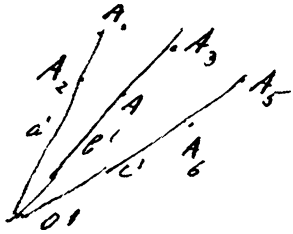
Finalmente è venuta la mia nomina (a decorrere dal 1° Gennaio): me l'ha comunicata personalmente Ferrando[1] con lettera ricevuta oggi.

Ora che l'odissea è finita ti ringrazio nuovamente di tutte le seccature che ti sei preso per cagion mia, con così affettuosa premura.

Credo di poter rispondere alle tue obiezioni relative alla F_6.

Prendiamo[2] una F_3, Γ, con 3 rette $a\ b\ c$ per O in un piano. Riferiamoci alla nota rappres[entazione] di Γ sopra un p[ia]no α. Le sezioni della Γ con tutte le altre F_3 sono date da curve C_9 $(A_1^3\ A_2^3 \dots A_6^3)$. I p[unt]i fond[amentali] A_i sono disposti come nella fig[ura]. Le F_3 che hanno un contatto d'ordine 5 con Γ segano su di essa delle C_9 con O 6-plo.





Prendiamo le F_3 per $a\ b\ c$, esse segano su Γ delle C_6 sul p[ia]no C_6 $(A_1^3 \dots)$; fra queste scegliamo quelle con O 3-plo, esse si spezzano (v[ed]i rappres[entazione]) in $a\ b\ c$ e in una rimanente C_3 qualunque. Le F_3 che hanno con O un contatto d'ordine 5 sono dunque effettivamente ∞^4.

Una $F_3 + \Gamma$ ha $a\ b\ c$ come rette 2-ple cuspidali o come rette tacnodali? A me pare che la 1ª alternativa sia la giusta. Perché a fosse tacnodale bisognerebbe che su Γ vi fosse un'altra retta infinitamente vicina ad a mentre non vi è. E poi mi sembra che se la F_6 esiste si debba costruire così, prendendo il doppio del sistema lineare delle sue F_3 aggiunte, e l'esistenza della F_6 mi risulta da esempi di p[ia]ni 2-pli.

Quanto alle involuzioni su rigate mi pare che si possa vedere che se la sup[erficie] rappresentativa ha le sezioni di genere π, l'ordine di essa è 2π. Seguirebbe che le F a sez[ioni] di gen[ere] π in $S_{\pi+1}$ hanno le sezioni normali (non speciali). Forse di qui sarà possibile di dedurre che $p_g = p_n$? Per ora non lo vedo, ma se questo punto fosse superato la raz[ionali]tà della sup[erficie] ne risulterebbe subito, come è chiaro.

Siccome mi pare che si possa ammettere la F priva di punti multipli si potrebbe tentare di mostrare che un sistema lineare multiplo di quello delle sez[ioni] p[ia]ne ha la serie caratt[eristica] completa non spec[iale], e ciò forse basterebbe, perché un tal sistema multiplo deve finire per essere regolare. Mi pare anzi che tutto ciò sia ottenibile e la difficoltà più grossa rimarrebbe quella di mostrare che un sistema di gen[ere] π e gr[ado] 2π contenente ∞^1 curve razionali è $\infty^{\pi+1}$.

Ho ricevuto la scheda per le elezioni del Circ[olo] di Palermo.[3] Mi pare che si convenisse nell'idea di non far propaganda; ma se questa si dovesse fare bisognerebbe mandare a tutti circolari a stampa come ha fatto il comitato di Palermo.

(Fra parentesi trovo scorretto che il comitato che indice le elezioni mandi allo stesso tempo una tale circolare; poteva limitarsi a comunicare i nomi dei cons[iglieri] già scaduti).

Ad ogni modo noi ci metteremo d'accordo per sostituire alcuni nomi.

Saluti affettuosissimi anche all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[P.S.] Andrò a Bologna Domenica.
Non ho ancora ricevuto il Bericht![4]

[1] Cfr. p. 284, nota 2 a let. 310 (21.11.1896).
[2] Cfr. Enriques 1897b, 465-66.
[3] Si tratta delle elezioni per il rinnovo del consiglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo per il triennio 1897-99.
[4] Enriques-Castelnuovo 1896.

331.

9 gennaio [18]97

Guido carissimo

Nella lettera andata perduta ti pregavo appunto di mandare al Bertini una copia del Bericht.[1] Io intanto ho scritto a Teubner[2] per sollecitare l'invio.

Riconosco giusto ciò che mi dici per la F_6, e mi pare anche che la tua costruzione vada bene, ma ci ripenserò.

Vedo che non mi sono spiegato bene quanto alle sup[erficie] con ∞ curve raz[ionali]. Tu mi dicevi che il caso primo da studiarsi è quello delle sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] π in $S_{\pi+1}$, ed io volevo notare soltanto che tali sup[erficie] sono dell'ordine 2π, quindi a sezioni normali, appunto perché riferibili a inv[oluzioni] su rigate in modo che ecc. Da ciò forse seguirebbe la raz[ionalità] di tali sup[erficie]. Ma per le inv[oluzioni] su rigate (siamo d'accordo) sarà sempre difficile vedere la dim[ensione] del sist[ema] cui appartengono le immag[ini] delle generatrici.

In fretta saluti affettuosi anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[P.S.] Vado a Bol[ogna] domani.

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.
[2] Teubner (Lipsia) era la casa editrice dei «Mathematische Annalen».

332. [c.p.]

[Bologna] 11 gennaio [18]97

Carissimo Guido

Non ho ricevuto ancora il Bericht[1] né la risposta di Teubner: che cosa sarà successo?

Quanto alle sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] π in $S_{\pi+1}$ deve avvenire che esse abbiano l'ord[ine] 2π, oppure che le sezioni π tangenti si spezzino come appunto tu noti. In questo 2° caso forse si avrà una riduzione ad una sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] $< \pi$ appartenente ad uno spazio assai elevato, escluse le rigate e altri casi consimili. Ma nel 1° caso non nasceranno certo difficoltà nella dimostrazione $p_g = p_n$?

Io comincio le lezioni domani. Ho ricevuto i lavori del Cosserat ed avevo avuto a suo tempo un biglietto di Autonne che ho ricambiato; hai fatto bene a mandargli subito il Bericht.

Affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.

333.

12 gennaio [18]97

Carissimo Guido

Mi sono sempre dimenticato di risponderti a proposito delle elezioni del Circolo,[1] che a me non sembra opportuno, né cortese verso uno straniero, togliere il nome di Mittag-Leffler, e perciò sostituisco Maisano, Del Pezzo e Jung.

Tornando alle sup[erficie] a sezioni di gen[ere] π in $S_{\pi+1}$, vedo che il ragionamento che si faceva incontra un ostacolo più grave.

Considerando l'inv[oluzione] sopra una rigata, diciamo π la classe (rispetto alle gen[eratrici]) e δ il n[umer]o dei p[un]ti di coincid[enza] sulle generatrici: allora sulla sup[erficie] F immagine della involuzione si ha un sist[ema] lineare di genere π e grado $2\pi + \delta$ (non 2π). Per ottenere qualche resultato non basta dunque che il sistema sia $\infty^{\pi+1}$, ma bisogna che sia $\infty^{\pi+\delta+1}$. Ma questo non dice nulla se non si riesce a determinare δ, il che non pare del resto difficile. Tutto sta che il resultato sia significativo!

Se vuoi rimandarmi il manoscritto introdurrò nella mia nota la correzione occorrente[2] (mi dispiace di procurarti sempre tali disturbi).

Quanto all'asserzione che per $p^{(1)} = 3$ $p_n = p_g = 2$ il sistema bicanonico è non semplice solo se le curve canoniche sono iperellittiche (non ti ho mai risposto in proposito), essa si giustifica così:[3]

il sistema bicanonico contiene le coppie di curve can[oniche], quindi se non è semplice il passaggio per un p[un]to A trae solo il passaggio per altri p[un]ti sulla curva can[onica] per A, quindi ($p_g = p_n$) ecc.

Teubner brilla per il suo silenzio: sarebbe una gran noia se fosse nato qualche equivoco nella spedizione del Bericht.[4]

Ho cominciato oggi le lezioni. Ho idea di fare anche alcune conferenze sulla Geometria delle curve algebriche, che inizierò probabilmente colla settimana ventura.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[P.S.] Ho veduto una rivista semestrale (in francese) sul tipo dell'Jahrbuch, che passa in rassegna (spesso assai *bene*) i recenti lavori di matematica: deve pubblicarsi da pochi anni, almeno io non la conoscevo.[5]

È uscito il fasc[icolo] dei Mathem[atische] Ann[alen] col nostro Bericht.

[1] Cfr. p. 307, nota 3 a let. 330 (7.1.1897).
[2] Cfr. Enriques 1897b e p. 306, let. 330 e p. 307, let. 331 (9.1.1897).
[3] Cfr. Enriques 1897c, 470-71.
[4] Enriques-Castelnuovo 1896.
[5] Si tratta della «Revue semestrielle des publications mathématiques» edita da Pieter Hendrik Schoute ad Amsterdam a partire dal 1893.

334. [c.p.]

[Bologna, 13 gennaio 1897]

Carissimo Guido

Ho ricevuto finalmente le copie del Bericht,[1] per errore rimaste giacenti e speditemi da Teubner (come egli mi scrive) da più di 15 giorni. Comincio subito la diffusione. Aggiungerò i nomi di Maccaferri e Fabry se non sono (come suppongo) nella tua nota. A proposito, ti sarei grato se tu volessi darmi la nota degli stranieri a cui hai inviato il lavoro, per mandar loro le memorie originali.

La causa dei pasticci per le sup[erficie] di $S_{\pi+1}$ ecc. è quella che ti ho detto.

Preparando le conferenze sulle curve alg[ebriche] trovo una dimostrazione elementare dell'inv[ariabili]tà della g^{p-1}_{2p-2}. Data una g^1_m essa ha $2m + 2p - 2$ p[un]ti di coinc[idenza]. Questo gruppo dà una $g_{2m+2p-2}$: detta $g_{m+2p-2} = g_{2m+2p-2} - g_m$ la serie agg[iun]ta di g_m si prova subito il teor[ema] funz[ionale] analogo a quello del sist[ema] agg[iun]to.

Cordiali saluti anche all'E[lbina]

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1896.

335. [c.p.]

[Bologna] 15 gennaio [18]97

Carissimo Guido

Grazie del manoscritto[1] che ho ricevuto.

Manderò a Fiedler i miei ultimi lavori. Con Hurwitz sono già in corrispondenza. Sto cercando[2] una dim[ostrazione] del teor[ema] di R[iemann] R[och] senza ricorrere alla Geom[etria] enumerativa. Per ora riesco solo a vedere che le curve agg[iun]te ad una curva p[ia]na segano su di essa una serie completa e che la g_{2p-2}^{p-1} segata dalle C_{n-3} è invariante.

Affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1897b e 1897c.
[2] Per le conferenze sulle curve algebriche.

336. [c.p.]

[Bologna] 23[1] Gen[naio 18]97

Carissimo Guido

L'argomento delle C_5 e C_n piane con trasf[ormazioni] pr[oiettive] in sé offre più campo a scoperte nuove, ma esso non dà garanzia sicura di riuscita, cioè il candidato può non trovar nulla al di là della semplice discussione, laboriosa forse ma non atta a metter in evidenza nozioni svariate del candidato.

Non ti ho mai risposto per la mia nota che la sto rivedendo e te la rimanderò presto. Sono tornato a rifare la redazione quasi completamente; ammetterò per semplicità $p_g = p_n$. Temo nonostante che la redazione più chiara oltrepassi i limiti[2] e perciò mi restringerò ad un cenno nella parte in cui si eliminano i casi di riduzione delle curve canoniche.

Affettuosi saluti

Tuo
Ghigo

[P.S.] Sai nulla di Beltrami?

Ti dirò un altro giorno come dimostro che le aggiunte segano serie complete.

[1] 22, dal timbro postale.
[2] Per i limiti posti alla lunghezza delle note lincee l'articolo fu in effetti pubblicato in due parti: cfr. Enriques 1897b e 1897c. Cfr. anche p. 305, let. 329 (3.1.1897).

337. [c.p.]

[Bologna] 23 gennaio [18]97

Carissimo Guido

Il sig. P.a[1] mi scrive un biglietto per dirmi che non può assumere informazioni su quella cosa.

Non so più a chi rivolgermi a meno che tu non desideri ulteriori schiarimenti dalla prima sorgente.

Vedo che per dimostrare la completezza della serie segata dalle aggiunte vi sono delle difficoltà. Veramente ho quasi costruito un ragionamento all'uopo ma è quasi una traduzione geom[etrica] del teor[ema] $Af + B\varphi$ (il quale per C_n con soli p[un]ti 2-pli è troppo complicato). Però non sono soddisfatto.

Mando a te e all'Elbina il mio ritratto che mi son fatto per avere il libretto.

Affettuosi saluti

tuo
Ghigo

[P.S.] Ho avuto una cartolina di ringr[aziamento] da Fiedler.

[1] Non ci è stato possibile identificare la persona cui fa riferimento Enriques.

338. [c.p.]

[Bologna] 26 gennaio [18]97

Carissimo Guido

Ti scrivo due righe in fretta perché sono giornate di occupazione. Avrai saputo dei disordini qui successi.[1]

Il M[inistr]o si è comportato benissimo: peccato soltanto che sia partito stamani invece di eseguire tutto il programma fissato! L'Un[iversi]tà non verrà mai chiusa, e tutti i prof[essor]i sono invitati a risiedere all'Un[iversi]tà quanto più possono a presidio dell'ordine. È una disposizione felice.

I disordini del resto sono opera di pochi sconsigliati, la maggior parte non studenti.

Mando al Visalli una copia del Bericht.[2]

Ho ricevuto una cartolina gentile e 2 lavori di Macaulay che mi ha prevenuto.

Il Lev[i]-Civ[ita] mi scrive che ha letto una buona parte del nostro Ber[icht], ha capito tutto e trova l'esposizione molto felice.

Cordiali saluti a te e all'Elbina.

Tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] La persona di cui parlammo era l'altr'anno a Sezze (presso Roma). Cercherò di sapere se ha cambiato residenza.

[1] A seguito della visita all'Università di Bologna di Emanuele Gianturco, allora ministro dell'Istruzione Pubblica, vi furono delle manifestazioni studentesche. Il ministro ordinò al prefetto l'intervento della forza pubblica per sgomberare l'Università dai manifestanti.
[2] Enriques-Castelnuovo 1896.

339.

29 gennaio [18]97

Carissimo Guido

Il Wiman cui avevo scritto chiedendo i suoi lavori e mandandogli i miei mi risponde una lettera molto gentile accompagnata da varie memorie nelle quali è risoluta, fra l'altre cose, la questione delle curve di gen[ere] $p = 3$, 4, 5, 6 con trasf[ormazioni] in sé.[1]

Nella lettera egli dice che non può considerare la mia domanda che come una cortese attenzione «perché appunto voi Italiani siete andati tanto al di là dei limiti segnati alla Geometria».

Ho ricevuto un biglietto gentile anche dal Fouret, per il Bericht.[2]

Sta bene per l'introduzione del cenno sugli integrali 2-pli e di Pic[ard] nel lavoro per l'Enciclopedia.[3]

Sapevo del Congresso Mat[ematico] a Zurigo[4] e se l'invito è anche per me mi propongo di prenderci parte salvo impedimenti.

Ti avevo fatto cenno a Roma dell'intenzione di pubblicare le mie lezioni di G[eometria] Proiet[tiva].[5] Ora il disegno si avvicina al concretamento, perché l'editore Zanichelli prenderebbe a fare la pubblicazione, dandomi per la 1ª ediz[ione] di 1000 copie un utile di qualche centinaio di £ [lire].

Per ora abbiamo parlato soltanto in via preliminare. Se la pubblicazione dovesse effettuarsi, io dovrei consegnare il manoscritto nell'Estate in modo che la stampa fosse compiuta a principio dell'anno nuovo. Ciò non mi riuscirebbe difficile perché io non vorrei introdurre grandi cambiamenti dalle lezioni di quest'anno, nelle quali introdurrò le coniche colla polarità.

A parte questa questione del modo di introdurre le coniche della quale già abbiamo discorso[6] e su cui rammarico che non andiamo d'accordo, conto sui tuoi consigli.

P[er] e[sempio] introdurresti tu le coppie di p[un]ti immaginari?

Io sarei piuttosto per il no o per introdurle solo in fine in un'Appendice:[7] ma siccome c'è sull'argomento una monografia didattica del S[egre],[8] si potrebbe lasciare.

Del resto riparleremo più ampiamente della cosa.

A proposito dell'articolo per l'Enciclopedia se avessi qui l'articolo di prova, potrei cominciare a occuparmene in modo da agevolare il lavoro collettivo che ci proponiamo di fare quest'Estate.

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Cfr. in particolare Wiman 1895a, 1895b, 1896 e 1897.

[2] Enriques-Castelnuovo 1896.

[3] Per la collaborazione di Enriques e Castelnuovo all'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* cfr. p. 272, let. 299 (9.6.1896). Il piano iniziale dell'*Encyklopädie* fu modificato nel corso della realizzazione, anche per il protrarsi negli anni della sua pubblicazione. Come si capirà dal seguito di questa corrispondenza, Enriques e Castelnuovo avrebbero dovuto scrivere anche un articolo sulle trasformazioni; l'articolo *Transformationen und Korrespondenzen* fu poi redatto da Luigi Berzolari (1932). Così l'articolo sui fondamenti della geometria, che era stato assegnato a Heinrich Burkhardt, fu scritto invece da Enriques (cfr. Enriques 1907d).

[4] Si tratta del primo Congresso Internazionale dei Matematici, che si tenne a Zurigo dal 9 all'11 agosto 1897.

[5] Cfr. Enriques 1898f.

[6] Cfr. p. 222, let. 233 (22.11.1895) e p. 224, let. 234 (24.11.1895).

[7] Così avvenne infatti: cfr. Enriques 1898f, 354-58.

[8] Segre 1886a.

340. [c.p.]

[Bologna, 1° febbraio 1897]

Carissimo Guido

Ti ringrazio di ciò che hai scritto al Burkhardt e delle tue esibizioni[1] riguardo alla G[eometria] Proiet[tiva], di cui non mancherò di profittare.

Ho fatto ieri una scappata a Padova, a trovare il Levi-Civita.

Ho potuto vedere appena il Veronese andato alla seduta dell'Istituto Veneto; ed invece ho veduto con più comodo il Ricci e D'Arcais.

Ho parlato al L[evi]-C[ivita] della questione sulle equazioni differenziali algebriche del 1° ordine $f(x\ y\ y') = 0$ che ti accennavo a Roma, e spero di poter concretare la cosa, cioè l'integrazione pel caso in cui l'integrale ha un n[umer]o finito di punti critici variabili (Poincaré[2] dà l'integrazione quando tutti i p[un]ti critici sono fissi).

Affettuosi saluti a te, all'Elbina, e alla Mamma e alla Giorgina che saranno oggi tra voi.

Tuo aff.mo

Ghigo

[P.S.] Ho ricevuto lavori da Hermite.

[1] Così nell'originale.

[2] Poincaré 1885.

341.

4 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Sono persuaso che la difficoltà cui accenna il S[egre] deve eliminarsi trasformando la superficie F in una φ senza singolarità, e mostrando che alla curva multipla di F deve corrispondere su φ un insieme di curve $\omega_1\ \omega_2 \ldots$ luogo di gruppi neutri pel sistema $|C|$ e pei sistemi residui di questi gruppi (denotando con C le immagini delle sezioni di F).

Ed in ogni modo credo tu faccia bene a non complicare le cose con questo scrupolo.

Leggerò molto volentieri i fogli che mi manderai del tuo voluminoso lavoro:[1] il quale, venendo dopo il Bericht[2] troverà, speriamo, un maggior n[umer]o di lettori.

Ho tenuto dietro ai chiassi di Roma e mi pare che un po' più di moderazione da parte dell'autorità politica avrebbe evitato che i guai ingrossassero. Qui p[er] e[sempio] l'ordine si è mantenuto perché il rettore Puntoni ha fatto allontanare la forza che senza consultarlo aveva intempestivamente invaso l'Un[iversi]tà.

Ormai a Bologna non accadranno disordini tranne forse per il processo di 10 giovani arrestati per la fischiata a Gianturco[3] sotto l'imputazione di oltraggio a un M[inistr]o nell'esercizio delle sue funzioni (pena da 3 mesi a 3 anni di reclusione).

Secondo me non ci sono gli estremi del reato e il processo è inopportuno; la gravità del fatto è di ordine disciplinare e come tale avrei voluto vederlo punito con provvedimenti simili a quelli presi a Roma. Invece l'azione del Cons[iglio] Accad[emico] è stata paralizzata dall'intervento dell'autorità giudiziaria.

Seguitando così si creeranno dei martiri e non si freneranno gli abusi. Che la forza entri nell'Un[iversi]tà per cacciare gli studenti ribelli va bene, ma che seguiti poi *ad accamparcisi* e ad istruire processi è troppo!

Aggiungi che i socialisti vedono nell'azione del governo la ricerca di pretesti contro di loro e sono irritatissimi.

Ho ricevuto dal Burkhardt gli articoli di prova dell'enciclopedia e il programma. Quali sono gli articoli a noi affidati? superficie algebriche e trasformazioni algebriche?[4] (pg. 12 - 5, 9C).

Non ho ancora trovato un momento per ultimare la noiosa discussione del caso di spezzamento nella mia Nota,[5] che vorrei rimandarti tra pochi giorni.

Ecco la questione sulle equaz[ioni] diff[erenziali] $f(x\ y\ y') = 0$ (f è un polinomio).

Avrai visto nel Picard[6] che:

1) l'integrale y non ha altre sing[olari]tà variabili (colla cost[ante]) che poli e p[un]ti critici algebrici,

2) se i p[un]ti critici sono fissi l'equazione si riduce a un'equazione di Riccati o s'integra con funzioni ellittiche.

Supponiamo che y non abbia i p[un]ti critici fissi, ma un certo n[umer]o di p[un]ti critici variabili. Girando attorno ad essi nel piano x, a partire da 2 soluzioni y_1 y_1' di $f = 0$, si ottengono altre soluzioni y_2 y_2' ... y_n y_n': supponiamo che esse sieno in n[umer]o finito. Allora io considero

$$Y = \sum_1^n y_i \qquad Y' = \sum_1^n y_i'$$

e credo di poter dimostrare che Y Y' sono funzioni razionali del p[un]to y y' della curva $f(y\ y') = 0$ (in cui x compare come parametro). Ne segue che Y Y' soddisfano ad un'equazione algebrica

$$F(x\ Y\ Y') = 0,$$

di cui l'integrale ha p[un]ti critici fissi. Così l'equaz[ione] $F = 0$ e quindi la $f = 0$ s'integra.

Affettuosi saluti a te, alla Mamma, all'Elbina, alla Giorgina.

Tuo
Ghigo

[1] Castelnuovo 1897a.
[2] Enriques-Castelnuovo 1896.
[3] Cfr. p. 312, nota 1 a c.p. 338 (26.1.1897).
[4] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[5] Cfr. in particolare la prima delle due note Enriques 1897b e 1897c.
[6] Picard 1891-96, II, 368-77.

342. [c.p.]

[Bologna] 5 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Non è stato male che soprassedessi alla discussione noiosa dei casi di riducibilità della curva can[onica] per $p^{(1)} = 2$. Infatti mi pare di vedere che un caso almeno non può escludersi: il p[ia]no 2-plo con curva di diramazione C_{12} dotata di 3 coppie di p[un]ti 3-pli infinitamente vicini allineati. Questo deve considerarsi come un nuovo tipo sebbene sia una degenerazione della F_6.

Sarò ormai costretto a spezzare la nota in due[1] e la 1ª dedicata al caso ($p^{(1)} = 2$) della curva can[onica] irriducibile sarà pronta subito.

Affettuosi saluti a tutti

Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1897b e 1897c, rispettivamente.

343. [c.p.]

[Bologna] 7 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Ho ricevuto il tuo manoscritto[1] e da una rapida scorsa datogli vedo che contiene spiegazioni molto diffuse anche delle cose note e perciò dovrà riuscire di facile digestione al lettore. Lo leggerò attentamente.

Io navigo tutto il giorno in pasticci per le sup[erficie] $p^{(1)} = 2$ a curve ca-n[oniche] riducibili;[2] ho finito per non capire più niente e smetto per oggi.

Ho letto l'articolo di prova dell'enciclopedia sulle sup[erficie] di 3° ord[ine],[3] e mi pare ben fatto.

Usufruendo di 2 fogli per ogni articolo $32 + 32 = 64$ p[a]g[ine] in tutto, credo potremo far entrare tutta la roba che ci occorre. L'altro giorno avevo cominciato un po' a pensare al programma per l'art[icolo] sulle corrispondenze algebriche,[4] che potrà venire molto benino. Quanto alle sup[erfi-cie] il compito è semplificato dal Bericht[5] sebbene alcune di quelle cose andrebbero forse nel 2° art[icolo]. Ne riparleremo.

Affettuosi saluti a tutti Ghigo

[P.S.] La nota[6] $p^{(1)} = 3$ va tutta bene? Se no potresti dare il manoscritto alla Mamma quando torna a Fir[enze].

[1] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1897a.
[2] Cfr. Enriques 1897b.
[3] Questo argomento sarà trattato in Meyer 1928.
[4] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[5] Enriques-Castelnuovo 1896.
[6] Enriques 1897c.

344.

7 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Sono arrivato alla conclusione che i tipi $p^{(1)} = 2$ $(p = 1, p = 2)$ sono soltanto quelli trovati.

Ci sono arrivato a posteriori colla minuta discussione dei piani doppi con C_{10} limite. Non potevo riportare questa discussione nel manoscritto e non valeva la pena di dedicarvi un'altra nota. Mi sono limitato ad asserire la cosa come vedrai.[1]

Ti mando dunque il manoscritto redatto nella sua forma definitiva. E spero che abbia la tua approvazione.

Affettuosi saluti a tutti Tuo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1897b, § 4, 466.

345. [c.p.]

[Bologna] 10 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Ripensando alle sup[erficie] di gen[ere] > 0 infinite volte riferibili al p[ia]no 2-plo, mi par di vedere che esse si distacchino dalle sup[erficie] con un fascio di curve di gen[ere] 1 per la proprietà caratteristica di potersi rappresentare sopra la sup[erficie]

$$u \quad p(v) \quad p'(v)$$

dove la funz[ione] ellittica $p(v)$ è costruita con un invariante assoluto cost[ante] rispetto ad u.

Le sup[erficie] le cui coor[dinate] son funz[ioni] raz[ionali] di un parametro e ellittiche a modulo cost[ante] d'un altro sarebbero dunque le uniche sup[erficie] di gen[ere] > 0 riferibili ∞ v[olte] al p[ia]no 2-plo.

Affettuosi saluti alla Mamma, all'Elbina, alla Giorgina e a te

tuo aff.mo
Ghigo

346. [c.p.]

[Bologna] 12 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Grazie della revisione del 1° manoscritto.[1] Se credi puoi darlo al Cr[emona] perché lo presenti ai Lincei, ed intanto puoi mandarmi colla Mamma il 2° manoscritto.[2]

Io procedo nella lettura del tuo manoscritto[3] ma è un po' lungo e mi ci vorranno alcuni giorni, sebbene la lettura sia facile per la grande chiarezza dell'esposizione.

Ciò che mi dici sulle sup[erficie] riferibili ∞^2 v[olte] al p[ia]no 2-plo dove una coppia individua un riferimento, mi pare si riduca alla raz[ionali]tà delle sup[erficie] (non rigate) che sono riferibili in ∞^1 modi dipendenti raz[ionalmen]te da un par[ametro] sul p[ia]no 2-plo.

Affettuosi saluti a tutti

Tuo
Ghigo

[P.S.] Mi pare di vedere che il processo degli studenti per fischi al M[inistr]o terminerà con un'assoluzione.[4]

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1897b.
[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1897c.
[3] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1897a.
[4] Cfr. p. 314, let. 341 (4.2.1897).

347.[1]

13 febbraio [18]97

[+++] ottenere γ sommando:

la deficienza χ della curva C (differenza fra la dim[ensione] del suo spazio e quella dello sp[azio] normale);

la deficienza δ di D;

la differenza ω fra la dim[ensione] dello spazio intersezione degli spazi di C e D e la dim[ensione] dello spazio minimo individuato dal gruppo CD:

$$\gamma = \chi + \delta + \omega.$$

Consideriamo le curve Γ (di $|\Gamma| = |C + D|$) passanti pel gruppo CD esse segano su C una serie la cui def[icienza] è $\leq \chi$: se obblighiamo gli iperpiani di Γ a contenere tutto lo spazio comune a quelli di C, D, la def[icienza] della serie segata su C diventa $\leq \chi + \omega$.

D'altronde la serie segata su C da questi iperpiani non differisce da quella segata dagli iperpiani per D, e quest'ultima è la serie caratteristica di $|C|$. Dunque

$$\text{def}|C + D| \geq \text{def}|C|.$$

Nel ragionamento si esige che $|\Gamma| = |C + D|$ sia proprio la somma di due sistemi irriducibili di dim[ensione] > 0, affinché l'immagine proiettiva di D non diventi un punto, ed anche forse qualche cosa di più (che D non sia contenuta nello spazio di C). Ma anche con queste (o analoghe) restrizioni si concluderebbe sempre che la def$|C|$ è $\leq$ di quella relativa al sistema segato p[er] e[sempio] dalle aggiunte d'ordine altissimo, e quindi $\leq p_g - p_n$.

Se ne concluderebbe del pari che la def$|nC|$ per n grande raggiunge il massimo ecc.

Domani probabilmente andrò a Firenze trovandomi in vacanza.

Affettuosi saluti Ghigo

[1] Lettera incompleta. Per la comprensione degli argomenti in essa discussi si vedano le lettere seguenti e l'articolo Castelnuovo 1897a.

348.

[s.d.]

Carissimo Guido

Ho letto il tuo manoscritto[1] salvo l'esame del punto delicato su cui richiami la mia attenzione. Mi pare che se in $|C'|$ vi sono delle componenti fond[amentali] proprie di $|C|$ esse sono parti fisse anche per $|bC + C'|$.

Se questo è giusto dal tuo lemma seguirebbe che in $|C'|$ non entrano componenti fisse fond[amentali] proprie di $|C|$, ma questo mi pare strano. Del resto riparleremo della cosa.

Oggi non sono nelle condizioni più opportune per farlo avendo passato tutta la notte a ballare fino alle $7\frac{1}{2}$.

Attendo il conto di Teubner.

Affettuosi saluti Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1897a.

349.

16 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Rispondo alla tua lettera per quanto riguarda la dimostrazione del teor[ema][1]

$$\text{def.s.c.}\,|C| \leq p_g - p_n.$$

[def.s.c. = deficienza della serie caratteristica]

Anzitutto il lemma ch'io ti esponevo dice soltanto

«se $|C_1|$ e $|C_2|$ sono sistemi lineari irriducibili ∞^1, e $|C| = |C_1 + C_2|$ def.s.c. $|C| \geq$ def.s.c. $|C_1|$».

E sotto questa forma mi pare inattaccabile, mentre è dubbio se per arrivare alla conclusione basti sapere che $|C|$ contiene $|C_1|$ (anzi la cosa è falsa).

In secondo luogo si può riconoscere che la def.s.c. del sistema segato su F_n dalle agg[iun]te φ_{n-3+r} per r alto è $\geq p_g - p_n$. In 3° luogo che la def.s.c. di $|nC|$ per n alto è $\leq p_g - p_n$.

Ora questi 2 limiti, *quando si parta da un* $|C|$ *privo di curve fondamentali*, debbono coincidere dando il mass[imo] della def.s.c. dei sistemi sulla sup[erficie].

Ho sottolineato la restrizione che serve ad escludere i sist[emi] sez[ioni] dei coni. La ragione della esclusione è questa: Il sistema $|C_2|$ residuo di una curva data C_1 rispetto ad $|nC|$ non riesce sempre irriducibile se $|C|$ ha delle curve fond[amentali], quindi non è più applicabile il lemma che ho enunciato precedentemente. Ma se $|C|$ è privo di curve fond[amentali] (prendiamo addirittura un sistema non singolare) non cade dubbio che $|C_1|$ sarà irriducibile e si avrà

$$|nC| = |C_1 + C_2|,$$

oppure $|C_1 + C_2|$ si dedurrà da $|nC|$ coll'imposizione dei p[un]ti base di $|C_1|$ ciò che non altera la def.s.c.

Credo dunque esatte le conclusioni che ti enunciavo. Ma questa via più semplice non rende inutile la tua più laboriosa, poiché essa dà di più i resultati importanti relativi alle condizioni che permettono di concludere la regolarità di una superficie.

Grazie di aver presentato al Cr[emona] il mio 1° manoscritto.[2] Ho riletto il 2° e mi pare vada bene.[3] Debbo mandarlo a te oppure direttamente al Cr[emona]?

Affettuosi saluti a te e all'Elbina, tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ho scritto al Burkhardt per sapere a chi è stato affidato l'articolo sui Fondamenti della Geometria.[4]

[1] Cfr. Castelnuovo 1897a, 412-19; si veda anche p. 281, nota 2 a let. 307 (13.11.1896).
[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1897b.
[3] Si tratta del manoscritto di Enriques 1897c.
[4] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

350.

18 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Ripensando al ragionamento che deve portare a concludere

$$\text{def.s.c.}\,|nC| \leq p_g - p_n$$

[def.s.c. = deficienza della serie caratteristica] vi trovo una lacuna; non so se si potrà rimediare. $|C' + nC|$ sega su nC una serie di def[icienza] $\leq p_g - p_n$: ora se il gruppo di p[un]ti $C'C$ individua lo spazio intersezione di quelli di C, C' (sulla sup[erficie] che ha per sez[ioni] le $C' + nC$) si conclude $\text{def.s.c.}\,|nC| \leq p_g - p_n$; se no si trae soltanto $\text{def.s.c.}\,|nC| \leq p_g - p_n + \text{def.s.c.}\,|C|$.

Il ragionamento porta dunque alla conclusione che esiste un massimo per la def.s.c. dei sistemi sopra una superficie, ma non mostra che questo massimo sia proprio $p_g - p_n$.

Pei sistemi lineari di superficie si vede subito che la irregolarità (sovr[abbondanza] - spec[ialità]) del sistema caratteristico è uguale a quella del sistema di sup[erficie]; basta paragonare la relazione che vien data dal teor[ema] di R[iemann] R[och] con quella data dalle formule di postulazione ecc. (v[ed]i Guccia); si deve ottenere (Guccia)[1]

$$\pi - 1 - n + \rho = p_n$$

dove ρ è la dim[ensione] virtuale del sistema caratteristico ($r - \rho = \omega - i$).

Invece non vedo ugualmente che per un sistema regolare non possano esservi due cause di irregolarità opposte agenti sul sistema caratt[eristico]. Credo anch'io che se la dimostrazione ti deve costar tempo e fatica puoi rimandarla ad altra occasione.

Non ho qui con me i lavori del Wiman[2] (Wundt è il filosofo!). Ricordo che egli trova tutte le curve iperellittiche con trasf[ormazioni] e con gruppi fin[iti] di trasf[ormazioni] in sé. Trova pure le curve di genere 3, 4, 5 (e forse 6) con trasf[ormazioni] in sé o con gruppi fin[iti] di trasf[ormazioni]: le discute ricorrendo alla questione proiettiva mediante le curve canoniche.

Nel lavoro di Wiman[3] dei Math[ematische] Ann[alen] (quello che dapprima tu mi hai segnalato) è discussa la questione delle sup[erficie] cubiche con trasf[ormazioni] pr[oiettive] in sé e per questo mezzo trovata una serie di gruppi cremoniani del piano. In questo stesso lavoro vi sarà forse un po' di letteratura sull'argomento.

Ti saluto cordialmente insieme all'Elbina.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Giovanni Battista Guccia si occupò dell'estensione alle superficie del teorema di Riemann-Roch negli articoli Guccia 1887 e 1888.

[2] Cfr. p. 312, let. 339 (29.1.1897).

[3] Wiman 1897.

351.

[s.d.][1]

Carissimo Guido

Credo di aver completato la dimostrazione cui ti accennavo ieri.[2]

Consideriamo il sistema

$$|nC + bC'| = |C_n + C'_b| \qquad (C_n = |nC|,\ |C'_b| = |bC|)$$

e la sup[erficie] F su cui le curve del sistema sono segate dagli iperpiani. Su questa le curve C_n hanno una def[icienza] $\leq p_g - p_n$ (def[icienza] s[erie] segata da $|C_n + C'_b|$). Si può scegliere b così grande che la s[erie] segata su C' da $|bC'|$ sia completa; allora il gruppo di p[un]ti $C'C_n$ determina lo spazio com[une] ai 2 sp[azi] di C' C_n. Se ne deduce che il gruppo di p[un]ti bC'. C_n determina lo spazio com[une] agli sp[azi] delle 2 curve, e perciò gli iperpiani per bC' segano su C_n una serie la cui def[icienza] $\leq p_g - p_n$. c.d.d. Ti persuade?

Credo che si potrà forse andare avanti ottenendo resultati più espressivi per sistemi dotati di curve fond[amentali].

Come ti dicevo ieri l'analisi delle sup[erficie] cubiche con trasf[ormazioni] pr[oiettive] in sé (e relativi gruppi finiti) si trova fatta nella sua parte sostanziale dal Wiman,[3] il che non toglie la possibilità di dare quel tema, ma ne diminuisce a mio credere l'opportunità perché la parte di riuscita sicura resta esigua.

Agli altri temi che hai in vista potresti aggiungere anche il seg[uente], da prendersi in esame:

Discutere le sup[erficie] con infinite trasformazioni conformi in sé, in particolare con ∞^2 (costituenti un gr[uppo] trans[itivo]) e più. Considerare in particolare da un lato le sup[erficie] algebriche, e le relative proprietà algebriche (raz[ionalità] ecc.); da un altro lato le proprietà inerenti alla linea di curvatura e (forse) alle geodetiche, asintotiche ecc. L'ultima parte del tema può essere spezzata, presentando al candidato la scelta. Questa avrebbe il vantaggio di non forzare il candidato ad uscire troppo dal campo dei suoi studi se fin qui si fosse occupato di preferenza di G[eometri]a differenziale.

Del resto io non so come si usi in questi casi ma non sarei alieno dal lasciare al candidato la scelta fra più temi.

(Delle degeneraz[ioni] del pent[aedro] [inscritto nelle] sup[erficie] cub[iche] si dev'esser occupato Le Paige).[4]

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Ma probabilmente 19 febbraio 1897, dal contesto.

[2] È interessante per la datazione della lettera osservare che qui Enriques continua con le seguenti righe, poi cancellate: «Dal ragionamento di ieri resultava l'esistenza di un massimo finito per la def[icienza della] s[erie] c[aratteristica] dei sistemi su sup[erficie]. Ora».

[3] Wiman 1897.

[4] Cfr. Le Paige 1887.

352.

[s. d.]

Carissimo Guido

È giusta la tua obiezione al ragionamento ch'io facevo.

Ieri è stato qui Fano e con lui abbiamo concretato la determinazione dei gruppi cremoniani di S_3 (proiettivi, conformi, con una stella di raggi o un fascio di p[ia]ni invariante, e vari tipi di gruppi ∞^3 simili al gruppo binario).[1]

Il tema proposto per libera docenza è tale che il candidato potrebbe farsi onore, ma, non so perché, ho il presentimento che egli non se la caverà,

come credo non se la sarebbe cavata con nessuno degli altri temi di cui abbiamo parlato. Speriamo per lui che i fatti smentiscano la mia opinione pessimista.

Affettuosi saluti tuo
Ghigo

[P.S.] Il resultato sulle eq[uazioni] diff[erenziali] alg[ebriche] di cui ti parlai in passato è stato trattato recentemente dal Painlevé.[2]

[1] Queste ricerche saranno pubblicate nel lavoro Enriques-Fano 1897.
[2] Cfr. p. 314, let. 341 (4.2.1897); Painlevé 1897, 47-56.

353.

[s.d.]

Carissimo Guido

Ti rimando il manoscritto[1] poiché sei deciso di togliere il lemma. Del resto hai ragione ed anch'io mi ero persuaso dell'esattezza della 1ª parte del tuo ragionamento e quanto alla 2ª volevo farti l'osservazione che tu stesso ti sei fatto. A questo proposito ti dirò che nel manoscritto manca ivi un foglio, fino dal 1° giorno che l'ho ricevuto ((almeno me ne sonò accorto alla 1ª lettura)).

Mi ero dimenticato di avvertirtene. Del resto ciò non ti sarà causa di disturbo.

Ti saluto affettuosamente Tuo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1897a.

354.

26 febbraio [18]97

Carissimo Guido

Ben volentieri leggerò la 3ª parte del tuo lavoro[1] che aspetto in giornata.

Col Fano ci siamo accordati per un lavoro in comune[2] dove esporremo il resultato generale che ti ho comunicato:[3] lui poi darà successivamente l'analisi minuta dei singoli tipi. La differenza fra i nostri metodi non era essenziale, soltanto egli faceva una discussione caso per caso dove io invece mi occupavo di stabilire il teor[ema] generale con metodo più comprensivo. Tuttavia in alcuni punti le considerazioni del F[ano] avranno la pre-

ferenza perché più semplici. Debbo anzi dirti che in questa occasione mi sembra il F[ano] abbia dimostrato nei suoi ragionamenti più originalità del solito.

Ho sotto gli occhi le splendide lezioni di Painlevé mandatemi dal L[evi]-Civita. Fra l'altre cose vedo trattata la questione delle sup[erficie] con trasf[ormazioni] in sé, e mi persuado che a torto abbiamo dato poco peso ai resultati del Painlevé. Il quale dà la condizione necessaria e *sufficiente* perché una sup[erficie] abbia un gruppo di trasf[ormazioni]. Non basta che la sup[erficie] abbia un fascio di curve razionali, ma deve essere rigata: non basta che abbia un fascio di curve ellittiche ma le coor[dinate] dei p[un]ti debbono esprimersi algebricamente per u e ellitticamente per v, essendo i periodi delle funz[ioni] ellittiche indipendenti da u.[4]

Nel nostro articolo sulle trasformazioni (per l'Enciclopedia)[5] dovremo tener conto di questi resultati. A proposito ho immaginato uno schema del detto articolo e te lo comunicherò.

Quanto al fatto che una sup[erficie] con un fascio di curve raz[ionali] traiettorie d'un gr[uppo] ∞^1 si possa riferire ad una rigata, mi pare si possa stabilire anche geometricamente, costruendo un sistema lineare trasformato in sé (p[er] e[sempio] il sistema multiplo, conveniente, della curva di coincidenza). Ne seguirà che la curva di coincidenza si spezza in due direttrici (ciò che è in fondo l'obiettivo della dimostrazione del Painlevé).

Io faccio in questo momento una vita molto svagata, e mi diverto assai.

Saluta affettuosamente l'Elbina e ricevi tu pure i saluti cordiali

del tuo
Ghigo

[1] Castelnuovo 1897a.
[2] Enriques-Fano 1897.
[3] Cfr. p. 322, let. 352 (s.d., 1897).
[4] Cfr. Painlevé 1897, 457-89.
[5] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

355. [c.p.]

[Bologna] 10 marzo [18]97

Carissimo Guido

Puoi dire al Cr[emona] che voterò[1] certamente per il Belt[rami] e ne parlerò ai colleghi. Del resto si tratta di un nome che s'impone senz'altro.

Ho ricevuto l'estratto della 1ª n[ot]a lincea (che ti manderò domani) e ringrazio il Cr[emona] per la presentazione di ambedue.[2]

Come ti pare la Glottologia? Io lessi tempo fa in proposito un manualetto Hoepli[3] e mi parve cosa interessante, sebbene ad allontanarsi dalle linee generali occorre molta pazienza.

Affettuosi saluti anche all'E[lbina] Tuo
Ghigo

[1] Si tratta delle elezioni per il rinnovo del consiglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo: cfr. p. 307, let. 330 (7.1.1897).
[2] Enriques 1897b e 1897c.
[3] Cfr. De Gregorio 1896.

356.

16 marzo [18]97

Carissimo Guido

Sono ritornato a Firenze per le nuove vacanze elettorali[1] che dureranno fino al 2 Aprile.

Il Burkhardt che si era assunto personalmente l'incarico di redigere per l'Enciclopedia l'art[icolo] III A1 «Principi della Geometria», ed a cui avevo per ciò spedito le litografie delle mie Conferenze,[2] mi offre con una lettera molto gentile di fare io stesso il detto Art[icolo]. Come puoi bene immaginare accetto volentieri l'incarico.[3]

Il B[urkhardt] mi dà tempo fino al Giugno 98. Credo che lo stesso termine valga anche per i due art[icoli] che dobbiam fare insieme; ma sarebbe bene non ridurci all'ultimo. Ti proporrei perciò di cominciare a scambiarci alcune idee in proposito, specialmente per la divisione della materia fra i 2 Art[icoli].

Nell'Art[icolo] sulle trasf[ormazioni] dovremo anche naturalmente discorrere anche dei gruppi algebrici, e in particolare tener conto con giustizia dei resultati importanti di Painlevé di cui ti ho parlato.[4]

Siccome poi nello studio dei gr[uppi] alg[ebrici] (e forse quasi soltanto qui in modo notevole) compare l'applicazione degli integrali di Picard, così io ti proporrei di parlare di questi integrali (e di quelli di Nöther)[5] nello stesso Art[icolo]. Si potrebbe destinare un §° [paragrafo] agli *invarianti* e espressioni inv[arianti] nelle trasf[ormazioni] birazionali. Ciò vale anche ad alleggerire l'art[icolo] sulle sup[erficie]. Dunque secondo le mie idee lo schema dell'Art[icolo] sulle trasf[ormazioni] consterebbe nelle sue linee generali di 3 cap[itoli]:

1) Trasformazioni - loro costruzione - trasf[ormazioni] crem[oniane] ecc.
2) Invarianti
3) Gruppi.

Un 4° cap[itolo] potrebbe trattare delle trasf[ormazioni] multiple.

Se sei d'accordo in questa idea generale potrei prepararti uno schema più dettagliato dello svolgimento che si potrebbe dare al n[ostr]o Art[icolo]. Tu potresti preparare invece lo schema dell'Art[icolo] sulle sup[erficie]. È necessario confrontare bene i 2 schemi prima di fissarne uno.

I più affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Il 21 marzo si svolsero le elezioni politiche.
[2] Enriques 1894-95c; cfr. anche p. 320, let. 349 (16.2.1897).
[3] Cfr. Enriques 1907d; p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[4] Cfr. p. 324, let. 354 (26.2.1897).
[5] Integrali doppi di prima specie; cfr. Noether 1869b, 301.

357.

27 Marzo [18]97

Carissimo Guido

Scusa il mio prolungato silenzio!

Sono molto contento di quel che mi scrivi del Picard.[1] Mandandogli le mie ultime note gli ho scritto, oggi stesso, un bigliettino di ringraziamento. E sarebbe proprio una bella cosa se il Pic[ard] riuscisse a dirci il significato analitico del p_n, ciò che a lui dovrebbe riuscire più facile che a noi.

Sono occupato coi gruppi cremoniani di S_3. Sai che ci siamo messi d'accordo col Fano per la redazione d'un lavoro[2] in comune. Sono i gruppi ∞^3 i ribelli! essi non pare si lascino ricondurre ai tipi più semplici, di tutti gli altri (gruppi proiettivi e conformi, stella di rette o fascio di piani invarianti). Nascono invece 3 nuovi tipi di gr[uppi] ∞^3 assai singolari, in stretta connessione ai gruppi finiti dei poliedri regolari.

Ho piacere che il modo con cui è redatto il mio lavoro[3] dei Math[ematische] Annalen abbia incontrato la tua approvazione.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. la lettera di Emile Picard del 23 marzo 1897 riportata in Appendice (pp. 662-63).
[2] Enriques-Fano 1897.
[3] Enriques 1897a.

358.

[s. d.]

Carissimo Guido

Ho letto nell'ultimo n[umer]o del bollettino la relazione del mio concorso[1] e ne sono rimasto soddisfatto. Si vede che i commissari hanno fatto un lavoro molto accurato.

Ho veduto pure nei C[omptes] R[endus] la nota di Picard.[2] Il resultato mi pare ci fosse *quasi* nell'Analysis sytus di Poincaré[3] e mi è sembrato strano di non vederlo citato. Ma forse il Poinc[aré] stesso avrà preso la cosa dalla 1ª mem[oria] del Pic[ard].[4]

In ogni modo è una cosa interessante. Vedremo che cosa il Pic[ard] ci saprà dare andando avanti per la stessa strada. Probabilmente il p_g è l'altro ordine di connessione della varietà. Ma il p_n?

Affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] La relazione fu pubblicata in data 25 marzo 1897 in «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXIV, 1, n. 12.
[2] Picard 1897.
[3] Poincaré 1895.
[4] Picard 1889. Cfr. p. 294, let. 318 (30.11.1896).

359. [c. p.]

[Bologna] 9 Aprile [18]97

Carissimo Guido

Ho piacere che il mio programma[1] non ti dispiaccia. Penserò intanto al programma per l'altro Art[icolo].[2]

Ho ricevuto anch'io la nota dei collaboratori dell'Enciclopedia. Se guardi la 1ª comunicazione vedrai che l'art[icolo] III A1 «Principii della Geometria» riguarda *tutta* la Geom[etria] (Geom[etria] non euclidea, subordinazione della metrica alla proiett[iva] ecc.) mentre gli Art[icoli] III A2, III A5 debbono dare i *teoremi* elementari.

Qual è dunque il resultato definitivo della tua nota lincea?[3]

Io credo che le sup[erficie] su cui $|iC|$ contiene $|iC'|$ debbano contenere sempre ∞ curve eccezionali.

Domani torno a Firenze.

Affettuosi saluti anche a E[lbina]

tuo
Ghigo

[1] Si tratta dello schema per l'articolo comune sulle trasformazioni per l'*Encykopädie der mathematisben Wissenschaften*: cfr. p. 325, let. 356 (16.3.1897) e p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[2] L'articolo sulle superficie: cfr. Enriques-Castelnuovo 1908.

[3] Castelnuovo 1897b. Per i limiti imposti alle note lincee l'articolo fu diviso in due parti presentate, rispettivamente, nelle adunanze del 5 e 20 giugno 1897.

360.

[s. d.]

Carissimo Guido

Fai bene a svolgere diffusamente i concetti del tuo lavoro[1] ponendo in luce la massa intricata di questioni relative alle sup[erficie] con ∞ curve eccezionali.

Non mi sorprende che il Pic[ard] si sia fermato perché il vedere la corrispondenza fra gli altri ordini di connessione d'una var[ie]tà di Riemann e gli integrali *doppi* di Noether, dev'essere altrimenti difficile.[2] In sostanza finora egli è rimasto nel campo lineare.

Il resultato di Painlevé[3] che permette di trasformare una sup[erficie] con un gr[uppo] ∞^1 di trasf[ormazioni] a traiettorie raz[ionali] in una *rigata* (resultato di cui ormai mi sembra vedere una dimostrazione geometrica) deve permettere di trasformare in una rigata una sup[erficie] con un fascio di coniche.

Prendendo sull'asse del fascio di p[ia]ni delle coniche due p[un]ti ∞ [infinitamente] vicini A A' e componendo le relative involuzioni su ciascuna conica si dà luogo ad una trasformazione birazionale infinitesima della sup[erficie]. Ora la questione sta nel vedere se questa trasf[ormazione] ripetuta ∞ volte dà trasf[ormazioni] *razionali* o *trascendenti*.

A me sembra che si dovrebbero ottenere trasf[ormazioni] raz[ionali], però si tratta di un punto molto delicato. Certo è che se si fa questa costruzione per le coniche d'una congr[uenza] sulla var[ietà] cubica di S_4, non si arriva ad un gr[uppo] di trasf[ormazioni] biraz[ionali], perché altrimenti si costruirebbe anche qui una unisecante (il luogo dei p[un]ti uniti si spezza come vedrai nel n[uov]o lavoro[4] sui gruppi cremoniani), il che è impossibile almeno per le V^3 generali con un p[un]to 2-plo.

Del resto per le sup[erficie] F la questione si può anche trattare così. Prendiamo una rigata doppia e vediamo di costruire su di essa un conveniente gr[uppo] di trasf[ormazioni] [2, 2] che corrisponda ad un gruppo ∞^1 sulla F.

Affettuosi saluti anche all'Elbina Tuo

Ghigo

[P.S.] Mi arriva il conto di Teubner pel mio ultimo lavoro;[5] questo mi fa ricordare che ho ancora un debito verso di te che, per regolarità, desidero saldare visto che non ci vediamo tanto presto; ma non ne ricordo più l'ammontare. Ti prego di ripetermelo.

[1] Castelnuovo 1897b.
[2] Cfr. p. 327, let. 358 (s.d., 1897).
[3] Cfr. Painlevé 1897 e p. 324, let. 354 (26.2.1897).
[4] Enriques-Fano 1897.
[5] Enriques 1897a.

361.

22 Aprile [18]97

Carissimo Guido

Se si prende una rigata, poniamo pure razionale, e si considera la trasf[ormazione] infinitesima di cui ti parlavo, si dà luogo ad un gr[uppo] ∞^1 di trasf[ormazioni] in generale *irrazionali* [2, 2]: l'irraz[ionali]tà si spezza e quindi si ha un gr[uppo] ∞^1 di trasf[ormazioni] birazionali se la curva *bisecante* le generatrici (luogo dei p[un]ti un[i]ti) da cui dipende la costruzione della trasf[ormazione] infinitesima è essa stessa spezzata in *due unisecanti*!

Come vedi dunque non si è fatto alcun passo.

Sono sempre occupato colla redazione del lavoro sui gruppi cremoniani (con F[ano]), che abbiamo promesso di dare agli Annali entro 15 giorni.[1] Mi pare che la cosa non venga male.

Ti ho dato il resultato ma solo incompletamente. I tipi sono:

1) gruppi proiettivi
2) gruppi conformi
3) gruppi con una stella di rette invariante
4) gruppi con un fascio di p[ia]ni invariante

più due tipi di gr[uppi] ∞^3 (irriducibili ai prec[edenti]): l'uno è di trasf[ormazio]ni cubiche lasciando invariato il sistema delle F^3 per una C^4 di 2ª sp[ecie]: l'altro è di trasf[ormazio]ni d'ord[ine] 10 (pare), ma quest'ultimo n[umer]o deve ancora essere verificato. I detti tipi di gr[uppi] ∞^3 sono

risp[ettivamente] tali che fissando un p[un]to si ha un gr[uppo] finito *ottaedrico* o *icosaedrico*.

Affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] L'articolo Enriques-Fano 1897 pubblicato negli «Annali di Matematica» porta la data maggio 1897.

362. [c.p.]

[Bologna] 27 Aprile [18]97

Carissimo Guido

Sono tornato a Bologna ed abbiamo ripreso le lezioni. Era tempo!

Finito il lavoro[1] sui gruppi cremoniani vorrei attendere in questo mese alla pubblicazione delle lezioni di G[eometria] proiettiva,[2] per le quali spero accordarmi definitivamente colla Zanichelli appena avrò pronto tutto. Ma per ora non ne parlare.

Ti annunzio che mi sono comprato una bella bicicletta «Spalding» (americana).

Affettuosi saluti anche all'E[lbina]

tuo
Ghigo

[1] Enriques-Fano 1897.
[2] Cfr. Enriques 1898f e p. 312, let. 339 (29.1.1897).

363. [c.p.]

[Bologna] 3 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Anch'io ho ricevuto le lezioni di Painlevé[1] insieme ad altri lavori: speditemi, non so perché, a Pisa, mi sono arrivate oggi.

Il P[ainlevé] è stato davvero molto gentile ed in questo caso il dono è graditissimo, anzi io avrei già comprato quelle lezioni se il prezzo non ne fosse stato un po' alto.

Io pure scrivo al P[ainlevé] un rigo di ringraziamento.

Tanti saluti affettuosi anche all'E[lbina]

Tuo
Ghigo

[1] Painlevé 1897.

364. [c.p.]

[Bologna] 7 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Ho ricevuto il tuo manoscritto[1] e gli ho dato una rapida scorsa riportandone favorevole impressione; ma lo leggerò attentamente. Però non potrò occuparmene prima di Lunedì perché avrò domani e doman l'altro la visita del Levi-Civ[ita].

È un'intricata questione quella del gruppo ∞^3 icosaedrico[2] che trasforma in sé la V^{22} inerente a C_{12}. Sinteticamente io riesco a vedere soltanto che la V^{22} viene proiettata univocamente da un S_8 osc[ulatore] a C_{12} e che il sist[ema] rappr[esentativo] ha l'ord[ine] ≤ 10 e la curva base composta di una retta e di una conica con incognite molteplicità; ma il Fano dice che il calcolo prova che il detto ordine si riduce a 7, e questo sarebbe già notevole.

Certo sono molto strani quei due tipi di gr[uppi] ∞^3 (ottaedrico[3] e icosaedrico) che si distaccano da tutti gli altri tipi di gr[uppi] primitivi e imprimitivi!

Aff[ettuosi] saluti anche all'E[lbina] Tuo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1897b.
[2] Cfr. in particolare Enriques-Fano 1897, § 27, 507-11.
[3] *Ibid.*, § 26, 505-07.

365.

13 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Ti restituisco il manoscritto[1] insieme ad un foglietto, dove ho segnato le piccole osservazioni suggeritemi dalla lettura. Tutto mi sembra perfettamente chiaro e l'importanza dei resultati appare ben lumeggiata.

Forse dopo aver parlato della 1ª def[inizione] numerica del $p^{(1)}$ invece di porre subito l'enunciato di pg. 8 potresti segnalare l'impossibilità di estendere la definizione al caso in cui vi sieno infinite curve eccezionali, e però far risaltare la convenienza di modificare la definizione assumendo quel massimo.

Ti saluto per oggi affettuosamente, in fretta, insieme all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1897b.

366. [c.p.]

[Bologna] 14 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Ho pensato di dirigere al Congresso Matematico di Zurigo una comunicazione[1] «sui problemi inerenti alla risoluzione delle equazioni alg[ebriche] fra più variabili» segnalando i problemi e i contributi (relativamente piccoli) che ad essi portano i nostri resultati: un'occasione che mi par buona per esporre molte cose in una forma più accessibile alla generalità dei matematici. Non so però come si debba fare per mettere ad effetto il disegno, ed ho scritto al Burkhardt per informarmi. Se la cosa sarà attuabile parleremo lungamente del progetto: io avrei idea di redigere in proposito un breve scritto, ma poi mi piacerebbe *parlare* sull'argomento.

Per ora non dir nulla a nessuno, non sapendo se la cosa potrà aver effetto.

Ho sentito con molto piacere che il Babbo è con voi; salutamelo affettuosamente insieme all'E[lbina], ed abbiti tu pure

cordiali saluti dal tuo aff.mo

Ghigo

[1] Enriques 1898e; la versione estesa della comunicazione sarà pubblicata in Enriques 1899a.

367.

16 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Se devi accorciare in qualche punto il tuo manoscritto,[1] accorcia la 1ª parte relativa alle curve eccez[ionali] che può riuscir chiara anche in una redazione meno diffusa, mentre il resto è già assai stringato.

Il programma, che non ho ancora concretato, della mia comunicazione[2] dovrebbe comprendere i seg[uen]ti punti:

1) Posizione del problema. Riduzione del caso di più eq[uazioni] ad una sola. Risoluzione trascendente ([per] es[empio] funz[ioni] circolari, ellittiche, abeliane, fuc[h]siane) e alg[ebriche] ([per] es[empio] funz[ioni] raz[ionali], $\sqrt{\ }$ [radicali quadratici] ecc.). Caratteri d'una ris[oluzione]: *grado* irraz[ionalità] e *gruppo*.

2) Teorie introduttorie. Classe di equazioni. Funz[ioni] raz[ionali] del campo di raz[ionali]tà. Operaz[ioni] raz[ionali] su di esse ($f(x\ y) = 0$, il *discriminante* di y conduce alla aggiunzione per la serie $y = \text{cost}$: analog[amente] per più variabili). Caratteri invarianti.

3) Metodo di riduzione da n ad $n - 1$ variabili. Il problema aritmetico

delle irraz[ionalità] nei coefficienti. Sotto-classi. [Per] es[empio] risoluz[ione] raz[ionale] $f(x\ y) = 0$: teor[ema] di N[oether].[3] Eq[uazione] $f(x\ y) = 0$ di gen[ere] 1, ∞ tipi di sottoclassi (non vi è gr[ado] minimo). Eq[uazione] $f(x\ y) = 0$ di gen[ere] > 1 vi è 1 *tipo* [di] sottoclassi. Risoluz[ione] raz[ionale] $f(x\ y\ z) = 0$, applicazioni a $f(x\ y\ x\ u) = 0$.

4) Risoluzione semplice e multipla - caso di $f(x\ y) = 0$ teor[ema] di Lüroth,[4] di Painlevé (caso iperellittico)[5] e di Enr[iques] (gr[ado] n).[6]

$f(x\ y\ z) = 0$ ris[oluzione] raz[ionale] (inv[oluzioni] piane) Castelnuovo.[7] Problemi insoluti.

5) I due aspetti del problema generale della risoluzione di una equazione: data l'equazione da quali irraz[ionali]tà semplici si può far dipendere la risoluz[ione]; date le irraz[ionalità] caratterizzare la corrispondente classe di equaz[ioni].

Eq[uazione] $f(x\ y) = 0$ di grado 1, 2, 3, 4, 5 o di gen[ere] 0, 1, 2, 3, 4.

Eq[uazioni] risolubili razionalmente, o con un $\sqrt{\ }$ [radicale quadratico], o con un $\sqrt[n]{\ }$ [radicale n-esimo].

Problemi insoluti.

6) Eq[uazione] $f(x\ y\ z) = 0$ di gr[ado] 1, 2, 3, 4 (ris[oluzione] eq[uazioni] di gr[ado] 4 con un $\sqrt{\ }$ [radicale quadratico], funz[ioni] *non* invertibili). Eq[uazioni] coi gen[eri] 0. Qualche delimitazione di classe per caratteri superiori.

Ris[oluzione] raz[ionale] (v[ed]i eq[uazioni] gen[ere] 0), o con un $\sqrt{\ }$ [radicale quadratico] (p[ia]ni 2-pli) o in modo *semi-razionale* (rigate e affini). Problemi insoluti.

Forse converrà scambiare i n[umer]i 3 e 4.

Quali osservazioni ti suggeriscono queste prime idee abbozzate intorno al programma della comunicazione?

Il pericolo è di riuscire troppo lunghi: io vorrei la massima brevità: ma, in caso, si può ricorrere all'espediente di svolgere verbalmente solo una parte del progr[amma] (dato che si possa trattare verbalmente), scrivendo tutto.

Tanti affettuosi saluti anche all'E[lbina]

tuo
Ghigo

[1] Castelnuovo 1897b. La necessità di accorciare era dettata dal limite di pagine imposto alle note lincee.

[2] Enriques 1898e; cfr. Enriques 1899a.

[3] Cfr. Noether 1871c.

[4] Cfr. Lüroth 1876.

[5] Cfr. Painlevé 1891, cap. 2.

[6] Cfr. Enriques 1896a, § 4.

[7] Cfr. Castelnuovo 1894a.

368. [c.p.]

[Bologna] 19 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Il Burk[hardt] mi scrive che la mia comunicazione[1] sarà accolta con molto piacere e mi domanda se intendo dirigerla alla sezione «Algebra e Aritmetica», ciò che va bene.

Ho ricevuto vari lavori dal Duca:[2] dapprima ho provato piacere di questo inaspettato invio, poiché non capivo che cosa egli avesse con me; ma mi ha fatto poi assai dispiacere di vedere riaperta da lui la polemica col S[egre],[3] in un modo assai veemente. Infatti fra i lavori inviati c'è appunto una risposta[4] all'ultima monogr[afia] del S[egre]. In quanto agli appunti ch'ei fa al S[egre] io non li ho esaminati, ma più la cosa dura, e più (seccati per tanti versi) vien fatto di dire «benedette queste singolarità!» La qual questione non si limita più a seccare i matematici come tali, ma comincia un po' a seccare gli uomini!

Affettuosi saluti anche all'E[lbina] e al Babbo se è sempre costà

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1898e.

[2] Ossia Pasquale Del Pezzo, duca di Caianello.

[3] Le osservazioni contenute in Segre 1897a alla dimostrazione di Del Pezzo del teorema di risoluzione delle singolarità di una superficie algebrica mediante trasformazioni birazionali della superficie (cfr. Del Pezzo 1888 e 1889), furono all'origine di un'aspra polemica tra i due geometri.

[4] Del Pezzo 1897a, datato 21 febbraio 1897.

369.

20 Maggio [18]97

Carissimo Guido

L'impressione che hai provato pel tuono[1] insolente di D[el] P[ezzo][2] riguardo al S[egre] l'ho provata anch'io, ma se vogliamo giudicare la cosa non come amici del S[egre] ma spassionatamente bisogna esaminare la questione. Ora io non ho fatto questo, ma mi sono limitato a dare uno sguardo allo scritto del D[el] P[ezzo], e bisogna convenire che la polemica è almeno abile.

Quello che sopratutto mi sembrerebbe doversi approfondire è il ragionamento in fine alla pg. 5, dove si dimostrerebbe in sostanza il termine della riduzione delle sing[olari]tà d'una sup[erficie]. Se questo rag[ionamen]to fosse giusto, almeno nella sostanza il D[el] P[ezzo] potrebbe con un certo

fondamento pretendere di aver risoluto la questione *essenziale* relativa alle sing[olari]tà, sia pure che abbia commesso in gran numero inesattezze ed errori altrove.

In quanto a ciò ch'ei dice a pg. 10 è una confessione implicita di un errore fondamentale che distrugge il suo lavoro[3] ivi citato (ma non l'altro).[4] Il rag[ionamento] con cui il D[el] P[ezzo] si giustifica a pg. 11 da un'obiezione del S[egre] è un cavillo.

Quanto agli appunti che il D[el] P[ezzo] fa a sua volta al S[egre] bisognerebbe esaminarli minutamente, ma quello che dice intorno al Kobb[5] si presenta con un'apparenza di verità. Dove poi il D[el] P[ezzo] riesce dal suo punto di vista efficace è infine, perché il carattere dubitativo delle conclusioni del S[egre] è un difetto che anche noi abbiamo deplorato.

Insomma io spero che il S[egre] possa ribattere[6] fortunatamente tutte le obiezioni del D[el] P[ezzo], ma mi pare proprio che di una risposta vi sia bisogno perché la polemica del D[el] P[ezzo] sembra destinata a fare piuttosto impressione (p[er] e[sempio] il P[incherl]e mi esprimeva questa impressione sebbene propenso per personale stima a credere che il S[egre] abbia ragione). A meno che il S[egre] non possa trovare una specie di *tribunale* matematico, accettato anche dal D[el] P[ezzo] a cui appellarsi nell'interesse della risoluzione della questione? Ma la cosa non sembra facile. Certo però sarebbe un errore da parte del S[egre] di disprezzare l'avversario che ora (tolta di mezzo la questione della prom[ozione])[7] si presenta munito di forti armi. Ed io temo che la polemica non si estingua così presto.[8]

Mi spiace che tu abbia trovata non chiara la redazione del lavoro (con F[ano])[9] sui gruppi, ma per dir la verità avrei preferito che tu non spingessi il F[ano] a introdurre egli stesso delle modificazioni. Non hai idea cosa mi ha fatto impazzare colla sua sofisticheria per questioni di parole, colla sua smania d'imbrogliare tutto cogli incisi, periodi uno dentro l'altro ecc. Quella redazione lo aveva bene o male contentato; ora speriamo non mi tocchi tornare daccapo! (Naturalmente non gli far parola di ciò).

Ti riparlerò più diffusamente della mia comunicazione al Congr[esso]:[10] capisco anch'io che non ne potrò svolgere che le linee generali.

Aff[ettuosi] saluti anche all'E[lbina] Tuo

Ghigo

[1] Così nell'originale.

[2] Il riferimento è all'articolo Del Pezzo 1897a.

[3] Del Pezzo 1888.

[4] Del Pezzo 1892, riguardante la risoluzione delle singolarità delle superficie algebriche mediante trasformazioni cremoniane dello spazio.

[5] Cfr. Kobb 1892.

[6] Cfr. Segre 1897b.

[7] Corrado Segre aveva fatto parte della commissione che nel 1894 aveva espresso un giudizio negativo per l'ordinariato di Pasquale Del Pezzo. Su ricorso dei candidati, fra i quali vi erano, oltre a Del Pezzo, anche Giovanni Battista Guccia e Francesco Gerbaldi, fu nominata una nuova commissione che diede invece un giudizio favorevole. Cfr. anche p. 65, nota 2 a let. 52 (4.1.1894).

[8] Per quanto riguarda questa polemica, oltre ai due articoli già citati, si vedano: Del Pezzo 1897b e 1897c; Segre 1897c.

[9] Enriques-Fano 1897.

[10] Enriques 1898e; cfr. Enriques 1899a.

370. [c.p.]

[Bologna] 24 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Siamo in sostanza d'accordo sulla nota polemica.

Ho ricevuto dal Fano il manoscritto[1] e per la parte che ho letto sono assai contento. Egli ha introdotto qualche schiarimento; pochi a dir vero, ma io non so come si possa rendere più chiara la redazione nelle sue linee fondamentali, e la trovo a dir vero assai lucida per quanto lo consente l'argomento un po' intricato. Tuttavia mi ci proverò ancora in qualche punto.

Ho ricevuto anch'io il bollettino dell'Ass[ociazione] tedesca e letta la notina di Nöther.[2] Il suo resultato è d'accordo coi nostri ma non vi rientra.

Affettuosi saluti anche all'E[lbina]. Tuo

Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques-Fano 1897.

[2] Noether 1897.

371. [c.p.]

[Bologna] 26 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Hai fatto bene a scrivere al S[egre] della mia comunicazione.[1] Io stesso mi proponevo di dirglielo, ed anzi gli ho scritto oggi diffusamente in proposito.

Io ho cominciato già a pensare al modo di svolgere il mio programma, e trovo difficoltà non piccole per esporre in modo conciso certe idee.

Chi sa quando avrò finito? In ogni modo conto allora che tu voglia leggere il mio scritto e darmi il tuo parere e i tuoi consigli. Poi vorrei mostrarlo anche al S[egre].

Tanti cordiali saluti anche alla nostra E[lbina]. Tuo aff.mo

Ghigo

[P.S.] Vedo Tullio[2] tutti i giorni perché mangiamo insieme. Anzi ora è qui e ti saluta (andiamo insieme a fare una passeggiata in bicicletta): dice che sta un po' meglio e ti vedrà presto a Roma.

[1] Enriques 1898e e 1899a.
[2] Tullio Luzzatti.

372.

29 Maggio [18]97

Carissimo Guido

Il S[egre] mi ha scritto una lunga lettera dicendomi che ha idea di fare a Zurigo una comunicazione[1] sugli iperspazi e domandandomi francamente che cosa ne penso; perché (egli soggiunge) voler dimostrare oggi l'utilità degli iperspazi davanti ad una sezione di Geometria, non vorrà dire «sfondare una porta aperta»?

Io sono rimasto un po' dubbioso e (poiché egli mi domandava una franca risposta *subito*) gli ho esposto i miei dubbi, più relativi alla forma che al contenuto della cosa. Giacché in fondo mi sembra che oggi importi non tanto di rilevare l'uso degli iperspazi, quanto il modo di intenderli. Insomma io credo (e glie l'ho detto) che il S[egre] riuscirebbe forse più utile e più ascoltato se parlasse del concetto della «sostituibilità dell'elemento» in Geom[etria] concetto che informa appunto il suo modo di intendere la Geom[etria] iperspaziale. Che te ne pare?

Il S[egre] dice che non parlando del tema degli iperspazi un altro soltanto gli si presenterebbe possibile: quello delle antiproiettività ecc. Ma si può dir questo un tema d'interesse generale, come gli organizzatori del Congresso richiedono?

In fondo ad un Congr[esso] non si devono tanto esporre dei resultati nuovi quanto delle vedute generali, dei problemi tuttora aperti che interessino molti. Il mio tema[2] per questo lato corrisponde bene, anche troppo! Ho cominciato a scrivere l'introduzione e poche pagine riassumendo le nozioni note di Galois; ma in media una pagina mi costa una mezza giornata!

A proposito mi pare che una volta tu mi accennassi ad una certa memoria sulle eq[uazioni] $f(x\ y) = 0$ secondo le teorie di Galois. Te ne ricordi? almeno a un dipresso?

Ricevo in questo momento la tua cartolina.

Tullio che era presente quand'io ti scrivevo l'altro giorno mi ha fatto mettere quella frase. Io veramente non saprei dirti bene che cosa egli abbia avuto o abbia. Si tratta, mi pare, di uno stato nervoso che si deve riattac-

care a qualche dispiacere avuto in clinica sul quale si mantiene riservato! Anzi ti prego di far conto che nulla ti abbia scritto di ciò perché credo che egli non desideri parlarne con nessuno. Ad ogni modo tuo cugino partirà appena terminate le lezioni, sicché fra pochissimi giorni (forse due o tre soltanto) lo vedrai a Roma.

Cordiali saluti anche all'E[lbina].

Tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ho ricevuto la diss[ertazione] inaugurale di un certo Bernhard[3] che probabilmente l'avrà mandata anche a te. Gli rispondo con qualche nota; lascio a te, se credi, di inviargli il Bericht[4] per non correre il rischio di fare un doppio invio.

[1] Al Congresso dei Matematici di Zurigo Corrado Segre non presentò invece nessuna comunicazione.
[2] Cfr. Enriques 1898e e 1899a.
[3] Bernhard 1897.
[4] Enriques-Castelnuovo 1896.

373.

[s. d.]

Carissimo Guido

Arrivato qui trovo la tua lettera. Mille grazie delle indicazioni di cui profitterò appena tornato a Bol[ogna].

Vedo che quanto alla comunicazione del S[egre] siamo perfettamente d'accordo. Scrivigli tu pure per spingerlo a non rinunziare a trattare l'argomento generale della «sostituibilità dell'elem[ento]» ossia delle varie interpretazioni delle teorie geom[etriche].

Affettuosi saluti in fretta anche all'E[lbina]

Tuo
Ghigo

374.

[s. d.]

Carissimo Guido

In un lavoro di Kronecker[1] «sul discriminante ecc.» trovo il seg[uente] teorema:

Tutte le funzioni algebriche di y che si esprimono razionalmente per x, y, (dove $f(x\ y) = 0$) sono del tipo

$$\Delta(y) + \Delta(y)x + \Delta(y)x^2 + \ldots + \Delta(y)x^n,$$

dove $\Delta(y)$ è il discriminante della funz[ione] alg[ebrica] $x(y)$. E questo teor[ema] mi pare si estenda al caso in cui l'eq[uazione] contiene 3 o più variabili.

Ora questo teor[ema] direbbe che una retta multipla è *determinata* dai suoi p[un]ti di diramaz[ione], un p[ia]no multiplo dalla sua curva di diramaz[ione] ecc.

Quando avrò tempo mi propongo di studiare bene la cosa per vedere a che conclusioni generali si possa arrivare riguardo ai p[ia]ni multipli. Ma non potrò farlo che dopo il Congresso di Zurigo.

Quanto agli art[icoli] per l'Enciclopedia,[2] sto pensando allo schema di quello sulle sup[erficie]. Penso che si potrebbe dividerlo in due parti: 1) teoria proiettiva (inclusi i teor[emi] sulle sup[erficie] aggiunte...); 2) Geometria sulla sup[erficie]: sistemi lineari, operazione di aggiunzione ecc. (esclusi i caratteri invarianti di cui si parlerebbe nell'altro art[icolo], ma incluso lo studio di particolari classi).

Dopo che ci saremo accordati per lo schema dei due art[icoli], ci possiamo dividere il lavoro, facendo ciascuno la 1ª redazione di un art[icolo] (o di qualche parte di ogni art[icolo]) salvo a scambiarceli poi e a discuterne insieme quando ci troveremo a Montepiano.

Io prenderei volentieri la parte che tratta dei gruppi di trasformazioni ed anche le corrispondenze algebriche, γ_n^1 irrazionali ecc., se tu non hai preferenze. Conto di potermi occupare della cosa nel Giugno, perché non posso dedicarmi tutto alla comunicazione pel Congr[esso],[3] giacché questo lavoro è assai faticoso, e lo prendo a piccole dosi.

Data una curva C di gen[ere] p, un gruppo di $n > p$ p[un]ti determina in generale una g_n^{n-p}; il *gruppo* di questa è il gruppo (di monodromia) relativo ad una g_n^1 generica. Ora si può vedere che se per un valore di n, questo gruppo è il gruppo totale (di $n!$ sost[ituzioni) altrettanto avviene per ogni g_m^1 generica $m > n$; se invece *non* è il gr[uppo] totale, nemmeno quello delle g_m^1 sarà un gr[uppo] totale. Ma credi che esisteranno delle curve per le quali il gruppo di una g_n^1 generica non sia il gruppo totale? Bisognerebbe trovare qualche esempio. Per $p = 3$ ad es[empio] che cosa accade nel caso iperellittico?

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina].

Tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Tullio va domani a Milano e poi a Roma fra 3 o 4 giorni.

Io farò una scappatina domani sera a Firenze, e mi ci tratterrò probabilmente fino alla fine della settimana. Poi debbo tornare qui per fare delle ripetizioni.

[...][4]

[1] Kronecker 1881.
[2] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[3] Cfr. Enriques 1898e e 1899a.
[4] Sul verso dell'ultimo foglio dell'originale compare una serie di appunti autografi di Enriques, qui non trascritti per il loro carattere ellittico e disordinato. Si tratta forse di un abbozzo di indice per uno degli articoli dell'*Encyklopädie* tedesca.

375.

5 Giugno [18]97

Carissimo Guido

Il teor[ema] di Kronecker[1] dice, mi pare, qualcosa di più di quel che si sapeva. Tu stesso anzi ponevi la questione se «due piani multipli colla stessa curva di diramazione sieno rappresentabili uno sull'altro».

Questa questione precisamente verrebbe risolta dal teor[ema] di Kronecker in senso affermativo. Ora deve esser facile assegnare tutti i caratteri aritmetici (p_n, $p^{(1)}$) d'un p[ia]no multiplo in funzione dei caratteri della curva di diramazione; e si dovrà anche riuscire a calcolare i caratteri geometrici. In proposito intravedo qualche cosa, ma, come ti ho detto, non posso ora occuparmene.

Giacché tu sosti per il momento dall'occuparti dell'art[icolo] per l'Encicl[opedia],[2] sosterò anch'io volentieri fino a che sia più avanti nella comunicazione per Zurigo.[3]

La nota del S[egre][4] ha fatto anche a me favorevole impressione pel suo tuono[5] sereno. Non ho analizzato profondamente le sue osservazioni ma sono convinto a priori che le sue difese sieno giuste. Noto soltanto ch'egli si restringe puramente alla parte difensiva e non mostra perché il D[el] P[ezzo] erri nel dire che il procedimento di riduzione delle sing[olari]tà ha un termine. Qui per me è il nocciolo della questione.

In quanto poi all'uso delle trasformazioni monoidali di D[el] P[ezzo][6] mi pare che esso provi questo che: se è possibile ridurre le sing[olarità] di una sup[erficie] con una trasf[ormazione] della sup[erficie], è possibile farlo con una trasf[ormazione] *cremoniana* (giacché pei p[un]ti basteranno trasf[ormazioni] quadratiche).

Questa lettera ti sarà data dalla Mamma che insieme porterà a te e all'E[lbina] i miei più cordiali saluti ed... auguri per l'avvenimento che si avvicina.[7]

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Kronecker 1881.
[2] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] Cfr. Enriques 1898e e 1899a.
[4] Segre 1897b; cfr. p. 334, let. 369 (20.5.1897).
[5] Così nell'originale.
[6] Cfr. Del Pezzo 1892.
[7] Enriques allude alla nascita imminente del primogenito di Castelnuovo, Mario.

376. [c. p.]

[Bologna] 7 Giugno [18]97

Carissimo Guido

Non sono perfettamente d'accordo. Che si possano costruire *più* sup[erficie] di Riemann (rette n-ple) con dati p[un]ti di diramazione, attaccando i fogli in vari modi, non vuol dire che queste sup[erficie] di Riemann non possano risultare sempre riferibili raz[ionalmen]te una all'altra come nel caso in cui vi sono $2(n-1)$ p[un]ti di dir[amazione], in cui riescono razionali. (Anche per questo caso il computo di H[urwitz] darebbe *più* curve). Resta solo da vedere se questa conseguenza si trae realmente o no dal teor[ema] di Kronecker,[1] ma un'impossibilità a priori non mi pare vi sia.

Ci sono però in queste questioni dei pasticci che non so spiegare, giacché pare che i p[un]ti di dir[amazione] non possano essere dati ad arbitrio senza che se ne aggiungano altri ecc.

Cordiali saluti anche alla Mamma e all'Elbina.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Kronecker 1881.

377. [c. p.]

[Bologna] 12 Giugno [18]97

Carissimo Guido

Ti ricordi se il Montesano abbia studiato particolarmente le trasf[ormazioni] [1 2] dello spazio che mutano in stelle di rette le congruenze di coniche?[1] Se no, non ti parrebbe che l'argomento potesse proporsi a qualche giovane?

Ho visto i lavori di Kneser e mi pare se ne cavi qualche cosa di negativo.[2] Manderò al K[neser] i miei lavori (anche il Bericht)[3] per avere la sua diss[ertazione][4] di cui ho avuto nozione solo attraverso le memorie dei Math[ematische] Ann[alen].[5]

Sto studiando di ridurre il più possibile il programma della mia comunicazione,[6] giacché vi son certe cose che non potrò saltare nella lettura.

Tante cose affettuose alla Mamma all'E[lbina] e a te

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Montesano 1895.
[2] Cfr. Enriques 1899a, 10.
[3] Enriques-Castelnuovo 1896.
[4] Kneser 1885.
[5] La lettura dei lavori Kneser 1887a e 1887b sembra essere stata suggerita da Castelnuovo in risposta a una domanda di Enriques: cfr. p. 337, let. 372 (29.5.1897).
[6] Cfr. Enriques 1898e e 1899a.

378. [c.p.]

[Bologna] 15 Giugno [18]97

Carissimo Guido

Nel tuo esempio non vedo perché quelle due cubiche corrispondendosi dovrebbero essere proiettive (e quindi omologiche). In ogni caso non importerebbe neppure che nella corrispondenza fra le 2 cubiche si corrispondessero i gruppi allineati con *O*.

Hai forse ragione per le trasf[ormazioni] [1 2] delle congr[uenze] di coniche; che oltre ad esser ampio il tema non sia anche troppo difficile?

Sai che ci sia una notina di Nöther o di Bertini che deduce dalle involuzioni piane i p[ia]ni 2-pli razionali?[1]

Alle altre occupazioni minaccia di aggiungermisi un incarico poco divertente; quello di presiedere la commissione di esami in... Zoologia!! Spero ancora di cavarmela, ma vedo il pericolo assai imminente per un insieme di circostanze che ti racconterò.

Affettuosi saluti anche alla Mamma e all'E[lbina],

tuo
Ghigo

[1] Cfr. Noether 1878; Bertini 1877 e 1889. Si veda anche p. 217, c.p. 231 (18.11.1895).

379. [c.p.]

[Bologna] 20 Giugno [18]97

Carissimo Guido

Mi sto preparando agli esami di Z[oologia]. Mi sono fatto un quadro generale riassuntivo di tutta la materia e credo che potrò compier bene il mio ufficio per la circostanza favorevole che la maggior parte delle questioni biologiche generali cui è dedicata una metà del corso mi erano note. Quanto alla sistematica anche non ricordando tanto i nomi potrò formarmi un criterio dell'importanza delle domande e quindi delle risposte. Quegli esami cominceranno il 23. Intanto sono lieto di constatare che la mia nomina

è stata accolta con simpatia da tutti i prof[essor]i. Spero non nasceranno inconvenienti.

D'accordo sul resultato di Hurwitz.[1]

Anche qui si è votato per le commissioni.

Auguro esito favorevole alle tue pratiche.[2]

Affettuosi saluti anche alla M[amma] e E[lbina].

Tuo
Ghigo

[P.S.] I miei esami di Descr[ittiva] vanno a vele gonfie.

[1] In Enriques 1899a, che è la versione estesa della comunicazione di Enriques al Congresso di Zurigo, alla pagina 12 si rinvia a un risultato esposto in Hurwitz 1893. Forse è questo il risultato cui si allude in questa lettera.

[2] Enriques allude alla promozione di Castelnuovo a professore ordinario.

380. [c.p.]

[Bologna] 22 Giugno [18]97

Carissimo Guido

Il Lev[i]-Civ[ita] avrebbe bisogno per certe sue ricerche del lavoro di Poincaré[1] «Sur les fonctions définies par les équations aux différences partielles» tesi di laurea edita da Gauthier Villars ed esaurita. Questo lavoro non trovandosi né a Padova né qui il L[evi]-C[ivita] ti pregherebbe di guardare se esso esista nella Bibl[ioteca] di Roma ((o presso qualcuno a cui egli potesse rivolgersi)). In caso affermativo egli potrebbe farselo venire pel tramite burocratico, oppure potresti mandarglielo tu stesso. Egli te ne sarebbe gratissimo.

Scusa la piccola noia.

Ho finito i miei esami e avrò domani quelli di Zoologia.

Cordiali saluti alla M[amma] e all'E[lbina] e a te

Tuo. aff.mo
Ghigo

[1] Poincaré 1879.

381. [c.p.]

[Bologna] Giovedì sera [25 giugno 1897]

Carissimi

Tornato ora a casa (sono le 12) trovo il telegramma col lietissimo annunzio.[1] È troppo tardi per mandare telegraficamente le più affettuose con-

gratulazioni, le quali arriveranno dunque soltanto domani, ma non per questo meno vive.

Brava la nostra Elbina! Sono contentissimo! Tanto più che non mi aspettavo la cosa così presto.

Al piccolo bimbo che è già una così grande speranza gli augurii migliori, che egli divenga un giorno degno del nome di suo padre!

Vi abbraccio, l'Elbina, la Mamma, Guido con immenso affetto

Ghigo

[1] La nascita di Mario, primogenito di Castelnuovo.

382.

1 Luglio [18]97

Carissimo Guido

Ti ringrazio della tua lettera così buona e affettuosa. Sento con piacere che tutto procede regolarmente.

Che bella cosa quando ci troveremo tutti riuniti a Montepiano!

Sono libero ormai degli esami, e sono venuto a Firenze. Gli esami di Zoologia hanno dato per resultato 16 rimandati su 86 presentati (157 iscritti). Tolti 4 o 5 salvataggi che ho dovuto subire sono rimasto soddisfatto del modo con cui tutto è proceduto. Ma senza il mio intervento probabilmente sarebbero passati tutti anche quelli che non si sono presentati. Pareva ci fosse una parola d'ordine d'interrogare specialmente i laureandi sul cap[itolo] dei parassiti. Ma io ne ho fatti cadere parecchi riportandoli nella parte generale. Nonostante nessun lamento specialmente perché sono riuscito a mostrare a molti dei bocciati che la loro deficienza si estendeva anche nel campo anatomico ed embriologico, cui essi pure riconoscono importanza.

Pensa un po' a qual punto d'ignoranza dovevano essere questi medici futuri cui io riuscivo a contestare errori grossolani come quello d'un tale che faceva sboccare la vena porta nel polmone, o di un altro che non conosce le principali divisioni dell'intestino, o di altri ancora che invertivano le prime fasi dello sviluppo dell'embrione!

Ma accanto a questi rimandati, relativamente pochi, abbiamo avuto invece bellissimi esami, e con più d'uno mi son divertito a discutere sulle teorie generali dell'evoluzione, eredità..., di cui il corso dell'Emery[1] tratta da un punto di vista molto elevato.

In complesso tutti sono rimasti contenti.

Ho combinato collo Zanichelli la stampa delle mie lezioni[2] di G[eometria] Pr[oiettiv]a. Mi darà per un'edizione di 600 copie, £ 250 a Novembre e £ 200 quest'altr'anno. L'edizione dovrà uscire a Novembre.

Ho ricevuto anch'io la replica di Del Pezzo[3] ed ho scritto al S[egre] la mia impressione. Se egli risponde ancora,[4] non può, secondo me, limitarsi a difendersi da quel piccolo appunto. Il nocciolo della polemica è un'altro. Il S[egre] deve dimostrare che il D[el] P[ezzo] a nulla ha diritto perché non ha affatto dimostrato che la riduzione delle sing[olari]tà ha un termine, e perché il ridurre le curve multiple senza ridurre i punti equivale a niente. Altrimenti al D[el] P[ezzo] può restare l'apparenza della ragione presso chi non conosce bene la storia. Non ti pare?

Tanti cordiali saluti all'Elbina e alla Mamma e tante cose affettuosissime a te che vedo già compreso delle tue funzioni di padre.

Un bacio al piccolo Mario. Tuo
Ghigo

[1] Emery 1891 e varie edizioni successive.
[2] Enriques 1898f.
[3] Del Pezzo 1897b; cfr. p. 334, c.p. 368 (19.5.1897) e let. 369 (20.5.1897).
[4] Cfr. Segre 1897c.

383.

23 Luglio [18]97

Carissimo Guido

Dopo tanto mi faccio vivo, finalmente![1]

Avendo già preso impegno col comitato pel Congresso di Zurigo, capisci che non posso rinunziarvi. E con un certo sforzo ho finito, ora appunto, di preparare la mia comunicazione.[2] Ma, orrendo a dirsi!, non che mezz'ora, la lettura di essa impiegherebbe certo più di un'ora, sebbene mi sia tenuto al breve tutte le volte che ciò mi è sembrato non contrario alla chiarezza.

Speravo di finir presto questo lavoro e di mandartelo, poi l'avrei fatto vedere anche al S[egre]; ma ho fatto i conti senza l'oste, sebbene l'oste (poveretto!) abbia fatto il possibile per non scomodare i miei calcoli.

Dunque così all'uscio coi sassi non posso mandarti il manoscritto, dovendo tentare la riduzione di esso almeno in quella parte che dovrò leggere. Non mi resta che sperare (anche per questa ragione egoistica) che tu venga presto e possa dedicarmi i primi giorni di Agosto.

Intanto ti sottometto il piano della comunicazione:

Dopo una breve introduzione comincio dal ricordare la nozione di irrazionalità definita da un gruppo (secondo Galois): irraz[ionali]tà in senso aritmetico, cioè radici (valori) di un'eq[uazione]; in senso algebrico cioè operazione irrazionale che fa passare dai coeff[icien]ti alle radici.

Ora se i coeff[icien]ti contengono dei parametri si passa alle funzioni algebriche.

Sia data l'eq[uazione]

$$f(x_1\ x_2\ \dots\ x_n) = 0:$$

posso considerare $x_1\ \dots\ x_{n-1}$ come parametri e *risolvere* l'eq[uazione] coll'irraz[ionali]tà $x_n(x_1\ \dots\ x_{n-1})$, ma questa non è la risoluzione più semplice che dipende invece da una conveniente scelta dei parametri. Questi par[ame]tri $u_1\ \dots\ u_{n-1}$ sono alla lor volta funzioni 1) razionali, o 2) algebriche delle incognite - Risoluzione semplice o no - Raz[ionali]tà involuzioni (Lüroth,[3] Castelnuovo)[4] - Teor[ema] di Painlevé[5] sulle curve iperellittiche e mia estensione[6] (Circolo di Palermo).

Dopo ciò in modo brevissimo parlo dei rapporti tra il problema della risoluzione e quello della trasformazione delle equazioni. Ma ciò nella lettura ho idea di saltare, per venire alle equazioni

$$f(x\ y) = 0.$$

Spiego per queste la natura dei problemi che si presentano:

1) data l'eq[uazione] risolverla,

2) data un'irraz[ionali]tà formare le eq[uazioni] con cui essa si risolve (in partic[olare] le eq[uazioni] risolubili razionalmente, le iperellittiche ecc.).

Poi: metodo di riduzione, e quindi problema aritmetico degli irrazionali numerici da cui dipende la risoluzione di un'eq[uazione] con una data irraz[ionali]tà. [Per] es[empio] curve raz[iona]li (teor[ema] di Nöther, sup[erficie] con un fascio).[7] Le curve di gen[ere] p ($\neq 1$) ammettono una risoluzione di grado $2p-2$ che si ottiene in modo aritmeticamente razionale, mentre per $p = 1$ si ha un'eccezione essenziale perché occorre in generale introdurre un irraz[iona]le num[erico] il cui grado è non minore dell'ordine della curva.

Fin qui almeno vorrei poter arrivare.

L'ultima parte si riferisce alle eq[uazioni] $f(x\ y\ z) = 0$: eq[uazioni] dei primi gradi, eq[uazioni] con dato $p^{(1)} > 1$ (risoluz[ione] di gr[ado] determinato). Eq[uazioni] risolubili razionalmente o con una $\sqrt{\ }$ [radice]. Infine problema aritmetico degli irraz[ionali] numerici per le eq[uazioni] risolubili razionalmente. Eq[uazioni] di 3° gr[ado] in più di 3 vari[abili]; eq[uazione]

$$z^2 = f_4(x_1 \dots x_n).$$

Questo è il piano del lavoro. Come vedi ho omesso assai cose che vi potevano trovar posto. Ma anche così è troppo lungo!

A proposito ti pregherei di vedermi nel Clebsch[8] (3° vol[ume] in una nota) gli ordini delle curve normali di gen[ere] p di Riemann, cioè qual è il < [minimo] valore di r per una g_r^1 su C_p (in generale). Grazie anticipate.

Sperando di vederti presto insieme all'Elbina e al piccolo Mario, vi saluto tutti e due (anzi tutti e tre) cordialmente.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Nel frattempo Enriques si era fidanzato con Luisa Coen e ne aveva informato Castelnuovo in una lettera non datata, qui non riprodotta dato il suo carattere personale.
[2] Cfr. Enriques 1898e e 1899a.
[3] Cfr. Lüroth 1876.
[4] Cfr. Castelnuovo 1894a.
[5] Cfr. Painlevé 1891, cap. 2.
[6] Cfr. Enriques 1896a, § 4.
[7] Cfr. Noether 1871c.
[8] Cfr. in particolare l'edizione francese delle *Vorlesungen über Geometrie*: Clebsch 1879-83, III, 62, nota 1.

384.

[s.d.]

Carissimo Guido

Sento con piacere che verrete presto. Non ti dimenticare di portar qui i fogli che ti mandai relativi ai nostri articoli per l'Enciclopedia,[1] giacché subito dopo il mio viaggio a Zurigo potremo cominciare ad occuparcene, e sarebbe anzi desiderabile che potessimo finire o quasi il lavoro nell'Ottobre.

Le mie nozze, pare, saranno per la fine di quel mese; ma la Luisa avrà tante occupazioni (visite, corredo ecc.) ch'io avrò certo molto tempo disponibile. E poi è una necessità a cui non possiamo sottrarci.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina. Un bacio al piccolo nipote di cui anelo fare la personale conoscenza.

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897); p. 339, let. 374 (s.d., 1897).

385.

6 Nov[embre 18]97

Carissimo Guido

Se non mi sono fatto più vivo dopo che sei partito da Firenze così disturbato, attribuiscilo alle occupazioni che me ne hanno tolto il tempo, appena

arrivato a Bologna; infatti ho dovuto provvedere alla mia sistemazione provvisoria in casa Amici (Via d'Azeglio 51) e ho dovuto fare gli esami di G[eometria] Pr[oiettiv]a.

Le notizie che mi comunichi non mi giungono nuove. Ho saputo stamani dal P[incherl]e la notizia della morte del Biolchini, che ti dischiude la via all'ordinariato. Ed il P[incherl]e stesso mi aggiunse che il Tonelli avrebbe preso l'incarico dell'Algebra.[1] A chi l'Analisi?

Sapevo anche il resultato dei concorsi di Meccanica, che è però controverso, perché una minoranza di 2 (chi sono?) voleva proporre il Lev[i]-Civ[ita]. Non so se questa minoranza abbia fatto relazione separata. In ogni modo dopo ciò che mi annunzi, la cosa è senza conseguenze pratiche.[2]

Finalmente sapevo dai giornali e da P[incherl]e della promozione di Del Re,[3] decisa (come mi ha detto quest'ultimo) *a denti stretti*.

Scriverò al S[egre] riguardo ai ritratti e facendogli le congratulazioni.[4]

In fretta ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina. Ti scriverò presto con un po' più di comodo.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Luigi Biolchini era ordinario di Algebra complementare all'Università di Roma. Come scrive Enriques, dopo la sua morte tale insegnamento fu ricoperto per incarico da Alberto Tonelli.

[2] Si tratta dei concorsi a cattedra di Meccanica razionale nell'Università di Padova e di Meccanica superiore nell'Università di Torino. In entrambi i concorsi i concorrenti furono Roberto Marcolongo (che dal 1895 era professore straordinario di Meccanica razionale a Messina), Tullio Levi-Civita, Giuseppe Lauricella e Orazio Tedone e la commissione fu composta da Valentino Cerruti, Gian Antonio Maggi, Giacinto Morera, Francesco Siacci e Vito Volterra. In entrambi i casi risultò primo Marcolongo con tre voti (e due andarono a Levi-Civita), secondo all'unanimità Levi-Civita, terzi *ex aequo* Lauricella e Tedone. I verbali della commissione coincidono *verbatim* per entrambi i concorsi salvo i punti di merito, che nel primo caso furono: Marcolongo 48 (su 50, all'unanimità), Levi-Civita 46 (a maggioranza), Lauricella e Tedone 41; nel caso del concorso di Torino i punti furono invece: Marcolongo 39 (su 50, all'unanimità), Levi-Civita 38 (a maggioranza), Lauricella 32 e Tedone 31 (all'unanimità). Non vi fu relazione di minoranza (né è specificato nel verbale pubblicato chi furono i due della minoranza) e la commissione propose la nomina di Marcolongo. Nel caso del concorso di Padova la commissione accompagnò la proposta «colla dichiarazione che qualora il prof. Marcolongo non intendesse occupare il posto, il dott. Levi-Civita potrebbe esservi nominato senza l'esperimento di un ulteriore concorso» (Relazione del 5 novembre 1897). Il ministro accolse la proposta della commissione. Nel caso del concorso di Torino, il Consiglio Superiore fu di avviso che non si dovesse dar corso alla proposta della commissione (Relazione del 7 novembre 1897), essendo il punteggio attribuito a Marcolongo (39 su 50) «troppo lontano da quella eccellenza che il vincitore dovrebbe possedere per un ufficio così elevato» e il ministro deliberò in conformità al parere del Consiglio Superiore. Di fatto, Marcolongo rimase a Messina, Levi-Civita fu nominato professore straordinario a Padova e la cattedra di Torino rimase scoperta. Cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.» (1898), 1, 714-20 e 757-63.

[3] Si tratta della promozione a ordinario; la notizia era stata riportata dal «Corriere della Sera» del 2 novembre.

[4] Per la nascita della secondogenita Adriana.

386. [c.p.]

[Bologna] 9 Novembre [18]97

Carissimo Guido

Ti ringrazio di avermi subito comunicato la notizia,[1] di cui mi rallegro cordialmente.

Comunque vi sia da temere il ritardo di cui parli nella nomina della commissione, la tua posizione resta fin d'ora stabilita, sicché puoi aspettare con più pazienza.

Non mi dici nulla come la Fac[ol]tà intende provvedere all'insegnamento dell'Analisi.

Ho comunicato subito al Levi-Civita la tua conversazione col M[inistro], mandandogli anzi addirittura il brano della tua lettera che vi si riferisce.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina, anche da parte della Luisa.

Tuo
Ghigo

[1] Si tratta della promozione di Castelnuovo a professore ordinario.

387.

26 Nov[embre 18]97

Carissimo Guido

Scusa il mio lungo silenzio. Sono tutto occupato colla pubblicazione del libro di Geometria proiettiva,[1] che ormai spero potrà uscire tra breve; ed intanto mi sono cominciate le lezioni.

Ciò che mi scrivi sui fondamenti della Geometria proiettiva è assai interessante; ma sono curioso di sapere come introduci il post[ulato] «5 rette determinano un complesso lineare», vale a dire che definizione dai del complesso. Immagino poi che utilizzerai questo post[ulato] per dedurre il teor[ema] di Pascal dalla rigata quadrica. La via è certo ingegnosa. Ora si domanda se in quel modo non venga introdotta una *relativa* continuità, corrispondente all'introduzione dei punti irrazionali quadratici.

Mi rendo conto della prop[osizione] di Poincaré e credo anzi di poterla dimostrare nel caso più generale dei piani multipli.

Un giovane che ha fatto appena il 2° anno mi ha annunziato di aver fatto uno studio delle relazioni tra due proiettività nel piano. Egli considera i corrispondenti A', A'' di un p[un]to A, e cerca quando i p[un]ti $A\ A'\ A''$ sieno in linea retta; ottiene così in generale un inviluppo di 3ª classe e ne deduce varie relazioni note. Sai che quest'inviluppo sia stato studiato, o che si sia considerata l'estensione di ciò nello spazio?

Giorni sono c'è stata un'adunanza di Fac[ol]tà per provvedere con un ord[inario] alla vacanza della cattedra di Botanica. La questione era se traslocare un certo «Morini», o fare un concorso per ord[inario], visto che altri domandava il trasloco. Emerge chiaro, specialmente dalle difese dei sostenitori, il poco valore del M[orini] il cui pregio è di esser bolognese e di *carattere remissivo*. Ora, dopo lunga discussione fra i naturalisti (uno contro tutti gli altri), si è venuti ai voti e si è visto che 7 voti sarebbero stati pel concorso e 6 pel trasloco del M[orini]; ma allora si è sollevata la questione degli straordinari e quindi si è tolto due voti ai partigiani del concorso. Dunque il M[orini] verrà traslocato. Hanno votato pel concorso tutti i matematici meno P[incherl]e che si è lasciato convincere.

Tutto ciò, in confidenza.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina anche da parte della Luisa

Ghigo

[1] Enriques 1898f.

388.

4 Decembre [18]97

Carissimo Guido

Sono sempre pigro al solito, per la solita ragione. Ma spero che nella settimana ventura il libro,[1] di cui la stampa procede alacremente, possa veder la luce. Allora, andando a Firenze potrò occuparmi degli articoli per l'Enciclopedia.[2]

L'argomento che hai indicato al S[egre] per la tesi di quel giovane,[3] mi pare buonissimo; c'è da cavarne un lavoro interessante.

Quanto a ciò che mi dici, relativamente ai piani multipli razionali ti faccio osservare che le curve raz[ional]i C sopra la sup[erficie] obiettiva possono avere come immagini delle curve raz[ional]i del p[ia]no multiplo, non tangenti ovunque alla curva di diramazione; i p[un]ti di diramazione corrispondendo a coincidenze delle involuzioni appartenenti alle curve complementari delle C.

Ho ricevuto ultimamente lavori da Borel, Autonne, Cosserat, Macaulay, ed una lettera da Simart che mi chiede la mia «Introduzione»[4] avendone bisogno pel 2° vol[ume] del lavoro a cui sta attendendo insieme al Picard.[5]

Che cosa ti ha risposto lo Zeuthen?

I più affettuosi saluti anche all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Enriques 1898f.
[2] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[3] Cioè «determinare generi e bigeneri nel caso di singolarità superiori», come si legge in una lettera di Corrado Segre a Castelnuovo del 19 dicembre 1897.
[4] Enriques 1896d.
[5] Picard-Simart 1897-1906. Il secondo volume fu pubblicato in tre parti: nel 1900 i capitoli 1-7, nel 1904 i capitoli 8-11 e nel 1906 l'ultima parte comprendente in appendice la nota Enriques-Castelnuovo 1906b.

389.

6 Decembre 1897

Carissimo Guido

Prendiamo una sup[erficie] $f(x\ y\ z) = 0$ d'ord[ine] n, con sola curva 2-pla, non passante pel p[un]to all'infinito A dell'asse z, e proiettiamola sul p[ia]no n-plo $z = 0$.

Avremo una curva di diramazione C_m d'ord[ine] $m = n(n-1) - 2\delta$, e le immagini delle curve canoniche saranno d'ordine $m - 3n$. Esse passeranno in un certo modo (da determinare) pei p[un]ti singolari di C_m e la toccheranno ovunque la incontrano.

Ora consideriamo prima tutte le curve d'ord[ine] $m - 3n$ passanti nel modo anzidetto pei p[un]ti singolari di C_m: la sovrabbondanza di questo sistema sarà una prima causa che farà differire il genere geometrico dal genere numerico della sup[erficie] data. Ma un'ulteriore differenza potrà venir generata pel fatto che tra le C_{m-3n} passanti nel debito modo pei p[un]ti sing[olari] di C_m, le pluritangenti a C_m sieno più di quante dovrebbero essere. Ora queste plurit[an]g[enti] dipendono da un problema di bisezione delle funzione abeliane. Come può accadere che le soluzioni di questo problema sieno più del dovere? Io riterrei che ciò dipendesse da speciali relazioni fra gli integrali abeliani della C_m. Ora, la non esistenza di queste relazioni, congiunta alla regolarità del sistema delle C_{m-3m} darebbe un criterio per la regolarità della superficie.

Assegnato questo criterio sarà anche facile esprimere la nullità del bigenere ed avere così le condizioni di raz[ionali]tà del p[ia]no multiplo. Si tratta, è vero, d'un p[ia]no multiplo molto particolare, ma che nasce tuttavia da una sup[erficie] generale, sicché la cosa avrebbe interesse. Ma occorre:

1) determinare le condizioni imposte alle C_{m-3n} dai p[un]ti singolari (i più elementari) di C_m;

2) sapere se e quando il problema della bisezione degli integrali abeliani di C_m comporta più soluzioni del dovere.

Questa 2ª questione è, per noi, la più difficile. Quanto alla prima non dev'esser difficile risolverla; importerebbe poi di assegnare il significato algebrico dei p[un]ti sing[olari] di C_m per rapporto alla $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina, anche da parte della Luisa.

Ghigo

[P.S.] Fano è tornato a Roma?

390.

9 Decembre [18]97

Carissimo Guido

Prima di tutto ti do la notizia che abbiamo fissato la casa. È in una stradetta lungo le mura vicino alla Porta S. Stefano (in città); posizione un po' lontana ma ariosa ed amena. Abbiamo tutte le stanze che ci occorrono (3 camere, studio, salotto da pranzo e da ricevere), ed un taglio discreto. Tutto questo per un prezzo assai conveniente.

Passando ad altro, risponderò alla tua cartolina, che l'obiezione che mi ritorci è giusta; strano non ci avessi pensato.

In quanto alla questione relativa ai fondamenti della G[eometria] pr[oiettiv]a,[1] mi pare si possa trasformare nel seg[uen]te modo: decidere se il teor[ema] fond[amentale] dell'omografia fra piani «se 4 p[un]ti indipendenti sono uniti tutti i p[un]ti sono uniti», si possa dimostrare senza la continuità.[2]

Ora si può procedere con Möbius e tutto si riduce a vedere se preso un p[un]to P qualunque si possono trovare delle coppie di p[un]ti *razionali* allineate con P. Ma non pare che questo avvenga, (giacché il gruppo dei p[un]ti raz[ionali] non ha la stessa potenza del continuo), e quindi si ha almeno un indizio per ritenere che una conclusione relativa al punto P non possa ottenersi se non riguardando P come limite ecc.

I più cordiali saluti a te e all'Elbina, dalla Luisa e dal

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Sto rivedendo le ultime bozze del mio libro.[3]

[1] Cfr. p. 349, let. 387 (26.11.1897).

[2] Cfr. Enriques 1898f, capp. 4-5 «Cenno storico-critico sulla genesi dei concetti fondamentali della Geometria proiettiva», in particolare 365-66.

[3] Enriques 1898f.

391.

21 Decembre [18]97

Carissimo Guido

Ti ringrazio dell'invio del Don Chisciotte[1] nel quale ho letto lo spiritoso articolo di Vamba.

Rispondendo ora alla tua lettera ti dirò che sono d'accordo con te nel preferire il metodo d'esposizione obiettiva allo storico, pei nostri articoli.[2] Anzi mi pare che in una Enciclopedia non si possa pretendere una perfetta uniformità; ciò che va bene per alcuni argomenti, non va più bene per altri.

Atteniamoci dunque ai programmi fissati, almeno nelle loro linee generali. Io da parte mia ho cominciato pure a scrivere qualche pagina (in francese, non è vero?) sulle trasformazioni birazionali. Ma ti sarò grato se vorrai comunicarmi la bibliografia raccolta. Io ho ricavata quella contenuta nel Clebsch.[3]

Per me la teoria delle curve gobbe è fuori del nostro campo, e mi appiglierei al partito di parlarne solo per quel tanto che occorre.

Non sapevo della disgrazia terribile toccata al Marcolongo. Forse che in seguito a ciò egli vorrà venir via da Messina?[4]

Cordiali saluti anche all'Elbina

Ghigo

[P.S.] Nel trattare le trasf[ormazioni] cremoniane del piano, sorgono numerose questioni su cui desidero il tuo parere.

1) Si deve dare uno sviluppo completo alle relazioni fra punti e curve fondamentali? o basta un cenno sommario?

2) Si può riattaccarsi ad alcune proprietà dei sistemi lineari di curve? (p[er] e[sempio] al teor[ema] di Bertini[5] che non vi sono p[un]ti multipli variabili?)

3) Si può suppor nota la definizione del genere delle curve? (sì, non è vero?)

4) Si può suppor nota la teoria delle singolarità delle curve?

Veramente questa è un'applicazione delle trasf[ormazioni] quadratiche, ma, se non si suppone nota o non vi si accenna in principio, non si possono considerare trasf[ormazioni] cremoniane *generali* con p[un]ti fondamentali infinitamente vicini.

D'altronde si possono anche decomporre le singolarità d'una curva con sole trasf[ormazioni] *della curva*. Se ciò potesse supporsi noto tutto sarebbe semplificato, ma mi pare che così ci si scosterebbe troppo dall'esposizione storica (è vero che c'è un lavoro in proposito di Halphen),[6] e si perderebbe un'applicazione importante delle trasf[ormazioni] cremoniane.

[1] Si tratta del settimanale «Don Chisciotte della Mancia. Giornale serio con caricature», pubblicato a Milano dal 1892 da Gattinoni.

[2] Enriques allude agli articoli che avrebbero dovuto scrivere insieme per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] Cfr. in particolare l'edizione francese delle *Vorlesungen über Geometrie*: Clebsch 1879-83.

[4] Roberto Marcolongo (cfr. p. 348, nota 2 a let. 385, 6.11.1897) si trasferirà dall'Università di Messina a quella di Napoli soltanto nel 1908.

[5] Cfr. Bertini 1880.

[6] In Halphen 1884 è presentata una prima dimostrazione del teorema di risoluzione delle singolarità delle curve piane per trasformazioni birazionali della curva.

392. [c.p.]

[Firenze] 25 Decembre [18]97

Carissimo Guido

Ti ringrazio di ciò che mi scrivi; ma non sono più in tempo a introdurre correzioni nel libro,[1] perché, partendo da Bologna (dopo aver licenziato le bozze), ho dato incarico allo Zanichelli stesso di spedirlo a quelli cui volevo farlo avere, ciò che egli avrà già eseguito. Posso però fare una 2ª errata-corrige, in un foglietto volante da attaccarsi, ed anzi mi propongo di attenermi a questo partito. Per ciò mi faresti piacere di comunicarmi tutte le sviste che hai avuto occasione di osservare, giacché mi parli appunto di *varie* sviste.

Anch'io procedo dal conto mio nel mio art[icolo],[2] ma lentamente, e lasciando per ora un po' da parte la bibliografia perché manco qui di libri. La parte essenziale della teoria delle trasformazioni cremoniane fra piani, si riduce in fondo semplicissima. Credi che convenga rivolgersi al P[ier]i o al Mont[esano] per avere un sunto dei resultati relativi ai complessi che sostengono date trasf[ormazioni] in S_3? In caso scriverei ad uno di essi, preferibilmente al P[ier]i con cui ho più confidenza.

Cordiali saluti anche all'E[lbina] e a P[aolo][3]

Ghigo

[1] Enriques 1898f.

[2] Si tratta dell'articolo sulle trasformazioni per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] Paolo Enriques, fratello minore di Federigo, biologo, insegnò a Padova.

393.

29 Decembre [18]97

Carissimo Guido

Contro ciò che supponevo la correzione da te indicatami si è potuta introdurre nell'errata-corrige in tutte le copie del libro,[1] ad eccezione delle prime distribuite.

Seguito ad occuparmi dell'art[icolo] sulle trasformazioni[2] lasciando per ora da parte qualche punto che mi mancano qui i mezzi di trattare.

Ti saluto affettuosamente facendo a te, all'Elbina, a Paolo e al piccolo Mario i più cordiali augurii per l'anno nuovo.

Tuo
Ghigo

[1] Enriques 1898f.

[2] Si tratta dell'articolo sulle trasformazioni per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

394.

2 Gennaio [18]98

Carissimo Guido

Il Segre mi scrive del mio libro[1] in termini molto indulgenti, e mi annunzia che ne pubblicherà una recensione nel Bollettino di Loria,[2] il quale pel 98 uscirà separato dal Giornale di Matematiche di Napoli.

Ripensando ai piani 2-pli di gen[ere] $p_g = p_n = 0$ e big[enere] $P = 1$, mi pare proprio che tutti sieno riducibili al piano doppio con C_8 limite composta di due rette a, b, e di una C_6 avente come p[un]to 2-plo $O \equiv ab$, e 2 tacnodi su a, b. A questo si riduce anche il p[ia]no 2-plo in cui la C_8 limite si compone di una conica e di una C_6 con 3 tacnodi sulla conica.[3]

Sarei condotto al resultato dallo stesso ragionamento della mia memoria[4] sui p[ia]ni 2-pli di gen[ere] 1; ragionamento che si può anche semplificare in qualche punto.

Cordiali saluti

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1898f.

[2] Cfr. Segre 1898.

[3] È la stessa affermazione che già compare nella cartolina postale dell'8 novembre 1896 (n. 305, p. 278) e che costituirà il risultato definitivo sui piani doppi di genere zero e bigenere 1: cfr. Enriques 1907a.

[4] Enriques 1896e.

395.

4 Gennaio [18]98

Carissimo Guido

Ho ricevuto una lettera di Picard e una di Zeuthen, tutte e due per ringraziamento del libro[1] loro inviato.

Il Picard mi dice che si sta occupando del 2° volume[2] sulle superficie, ma ritiene troppo complicata l'introduzione delle superficie aggiunte per la via algebrica, e si atterrà quindi, probabilmente, ad introdurle per via trascendente, passando poi al nostro punto di vista algebrico. Egli mi dice ancora di avere l'interpretazione della connessione P_2 a due dimensioni.[3]

Infine fa anche a te auguri pel nuovo anno, ch'io mi permetto di ricambiare pure a tuo nome.

Zeuthen mi parla lungamente dei suoi tentativi per ora infruttuosi di fondare la Geom[etria] pr[oiettiva] senza il post[ulato] della continuità; e dice che vede soltanto la possibilità di riuscirvi ammettendo l'esistenza di *rigate gobbe*, il che sembra corrispondere al tuo post[ulato] sulle quadriche rigate pel caso ove queste sieno definite da tre generatrici infinitamente vicine.[4] Quale cosa curiosa, però, una Geometria in cui tutte le rigate sieno sviluppabili!

Io anticiperò probabilmente il mio ritorno a Bologna. Ho idea di partire domani l'altro, perché i mobili spediti da Livorno sono arrivati più presto del previsto.

Affettuosi saluti anche all'Elbina Ghigo

[P.S.] La Mamma non scrive oggi perché occupata; lo farà domani dopo il ritorno di Paolo.

[1] Enriques 1898f.

[2] Cfr. p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).

[3] Cfr. p. 294, let. 318 (30.11.1896) e p. 327, let. 358 (s.d., 1897).

[4] Cfr. Zeuthen 1898 a proposito delle sue ricerche di questo periodo sui fondamenti della geometria proiettiva.

396.

6 Gennaio [18]98

Carissimo Guido

Mille grazie per le notizie bibliografiche molto diffuse. Tornando ora a Bologna (domani) mi dedicherò tutto a quell'art[icolo] per quanto me lo consentiranno le occupazioni della casa da montare. Ed anch'io svolta la prima parte ti manderò il manoscritto; tanto più che non è detto che

non possiamo forse anche utilmente alternarci il lavoro in uno stesso articolo.[1]

Non avrei veramente intenzione di entrare in diffusi sviluppi sopra le sing[olari]tà superficiali, giacché nell'Enciclopedia si deve parlare dei resultati ben acquisiti.

Il Simon mi domanda notizie sulla letteratura italiana relativa alla Geometria elementare e trigonometria. Chi si può citargli oltre i trattati del De Paolis[2] e del Veronese?[3]

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina], ringraziandoti per gli auguri[4] cordiali

Tuo
Ghigo

[1] Si tratta della redazione degli articoli per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[2] De Paolis 1884.
[3] Veronese 1897.
[4] Per il suo compleanno.

397.

9 Gennaio [18]98

Carissimo Guido

Non ho infatti intenzione di occuparmi subito dei piani doppi di bigenere 1, quantunque io creda di pervenirvi facilmente coi metodi usufruiti nella Memoria sui piani doppi di gen[ere] 1.[1] Giacché essi mi condurrebbero alla conclusione dell'esistenza di un fascio puro di curve ellittiche, onde la curva di diramazione sarebbe una C_{2n} con p[un]to $(2n-4)$-plo e le altre sing[olari]tà si potrebbero determinare senza difficoltà. Tutto sta che le sup[erficie] con $p_g = p_n = 0$ e $P = 1$ manchino di effettiva curva canonica, sicché esistano dei sistemi puri di gen[ere] π e grado $2\pi - 2$. Ma anche questo mi pare che stia.

Riguardo alle considerazioni interessanti che mi comunichi sui fondamenti della Geom[etria] pr[oiettiv]a, io non vedo bene come arrivi a stabilire che il teor[ema] di Pappo non basta più per fondare la Geom[etria] pr[oiettiv]a in tutto il piano (continuo). Se p[er] e[sempio] invece del teor[ema] di Pappo prendi un altro corollario del teor[ema] fondamentale della pr[oiettivi]tà, come sarebbe il post[ulato] metrico del movimento della retta, non si arriva a stabilire un sistema di coordinate?

Lasciando da parte questo dubbio sulla questione principale, osservo anche che tu fai percorrere ai rapporti $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{z}$ i valori interi naturali;

mentre restando nel campo di razionalità (operazioni di quarti armonici) essi possono ricevere valori fratti. Ma questa è una piccolezza senza conseguenze.

Ti saluto cordialmente insieme all'Elbina, anche da parte della Luisa.

Tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Non ho qui il foglio ove sono segnati i collaboratori dell'enciclopedia; sai dirmi chi farà l'art[icolo] sulla Geometria proiettiva?[2]

[1] Cfr. Enriques 1896e e p. 355, let. 394 (2.1.1898).
[2] Questo articolo sarà scritto da Arthur Schönflies: cfr. Schönflies 1910.

398.

[s.d.]

Carissimo Guido

Che il teorema di Pappo non basti a stabilire le coordinate *continue* in esso è fuor di questione. Ma non era veramente questa la mia obiezione. Io domando se sulla base del solo teorema di Pappo non si può stabilire la rappresentazione di tutti i punti del piano sopra tutte o in parte le coppie di numeri, dal che potrebbe resultare la validità completa della Geom[etria] pr[oiettiva] pel nostro piano sia pure discontinuo. Insomma, per seguire il tuo procedimento, poniamo di aver rappresentato tutti i punti razionali del piano; ora se il piano non è così esaurito *aggiungiamo* un punto ampliando così il sistema dei suoi punti razionali; la validità del teor[ema] di Pappo pel sistema più ampio di punti razionali, non permetterà di affermare che i punti di esso corrispondono biunivocamente ai numeri del nuovo campo di raz[ionalità] (e non alle operazioni da cui essi nascono)?

Ancora un'altra osservazione.

Il teorema dei triangoli omologici sostituisce completamente lo spazio tanto pel piano continuo che pel piano di punti razionali, giacché allora il piano risulta riferibile omograficamente ad un piano analitico (continuo o di punti razionali) contenuto in uno spazio analitico (a 3 o più dimensioni).

Tanti saluti affettuosi a te e all'Elbina da

Ghigo

[P.S.] Procedo nella redazione dell'art[icolo] [sulle] trasf[ormazioni][1] con quella lentezza che mi è consentita dalle occupazioni per la sistemazione.

[1] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

399.

21 Gennaio [18]98

Carissimo Guido

Rimandando la cosa di giorno in giorno, per varie occupazioni, sono venuto fino ad oggi senza aver risposto alla tua lettera.

Rilevo come la cosa più notevole fra quelle che mi comunichi la possibilità di dedurre il teorema di Pappo (ossia quello delle quadriche rigate) dai postulati della Geometria di posizione di S_4. Ora io ti propongo il dubbio se dato un S_3 non si possa costruire *convenzionalmente* un S_4 che lo contenga riguardando lo S_3 come rappresentazione descrittiva dello S_4 (Veronese), e ciò senza introdurre altri postulati all'infuori di quelli della Geom[etria] di posizione. La stessa questione si può porre riguardo al piano, ed io inclinerei a credere che dato il teor[ema] dei triangoli omologici si possa considerare un piano descrittivo come rappresentazione di un S_3 contenente il piano stesso.

L'ordinaria rappresentazione per proiezione centrale include è vero il concetto metrico del parallelismo, ma è chiaro che si può liberarsene traducendo tutto in forma grafica. Con ciò si dovrebbe stabilire che il teor[ema] dei triangoli omologici nel p[ia]no sostituisce completamente lo S_3, e quindi probabilmente anche che allo S_3 non viene aggiunto nulla dall'esser contenuto in S_4, indipendentemente dalla continuità. L'ultima osservazione in base al tuo ragionamento condurrebbe ad una conseguenza molto bella, qual è quella di cui lo Zeuthen andava in cerca.[1]

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 356, let. 395 (4.1.1898).

400. [c.p.]

30 Gennaio [18]98

Carissimo Guido

Domani andiamo alla casa nuova «Via S. Giuliano 2». Come ti puoi immaginare questi giorni sono stati per me di gran perditempo.

Se vuoi mandarmi quel che hai scritto di quell'art[icolo], lo vedrò prima che ci incontriamo a Firenze, dove anch'io spero di venire avendo finita la parte relativa alle trasf[ormazioni] cremoniane.[1]

Cordiali saluti anche all'Elbina, da me e da Luisa Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

401.

10 Febbraio [18]98

Carissimo Guido

Che cosa dirai che non mi son più fatto vivo? Volevo prima di tutto congratularmi di cuore per l'onore resoti dall'Accad[emia] di Torino col prendere in considerazione il tuo nome pel premio Bressa. Ho cercato la relazione di D'Ovidio in Biblioteca, ma l'ultimo fascicolo dei Rendiconti dell'Acc[ademia] non era ancora venuto.[1]

Volevo poi rispondere alla domanda che mi rivolgevi circa la notizia bibliografica (su ? e per ?); ma tutti i miei fogli erano nelle casse, gli operai per casa, e la testa confusa con mille pensieri ed ammattimenti diversi. Abbiamo finito per venir via da Bologna oppressi dalla stanchezza, lasciando tutti i libri e le memorie sulle seggiole e la casa non ancora del tutto ordinata. Fra l'altre cose ho lasciato la tua cartolina e perciò ti pregherei di ripetermi la domanda.

Ho portato con me le tue note bibliografiche ed il principio del mio Art[icolo].[2] Se verrai potremo occuparcene insieme. Questo dipenderà dalla decisione che prenderemo riguardo alla bimba.

Scusa il mio lungo silenzio; ora sarò più attivo.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[P.S.] Hai avuto la nota di Levi[3] contenente la risoluzione delle singolarità delle superficie?

Tanti saluti cordiali anche da Luisa che non ha più scritto neppure lei per le stesse ragioni.

[1] Il premio Bressa dell'Accademia delle Scienze di Torino fu conferito nell'adunanza del 9 gennaio 1898 a Giuseppe Pitré, medico e fondatore degli studi sulle tradizioni popolari in Italia. Luigi Bianchi e Castelnuovo furono i matematici presi in considerazione per l'assegnazione del premio. Cfr. la relazione sul concorso in «Rend. Acc. Sci. Torino», 33 (1898), 194-202.

[2] Si tratta dell'articolo per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] B. Levi 1897b.

402.

18 Febbraio [18]98

Carissimo Guido

Ho avuto da Fano il tuo manoscritto,[1] che leggerò, ed ho ricevuto ieri la lettera.

Nella tua bibliografia non ho trovato nessun titolo di memoria che possa accennare a quel conto di costanti desiderato dal Cassari. Però ricordo che nel Clebsch-Lindemann (lasciato a Bologna) si fa il computo degli invarianti assoluti (proiettivi) d'una trasformazione piana[2] d'ordine n, e questo computo dà un numero che aumentato di 8 fornisce il numero delle costanti desiderate dal Cassari.

Ti saluto affettuosamente, in fretta, insieme all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di uno degli articoli che Castelnuovo ed Enriques stavano redigendo per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[2] Cfr. in particolare Clebsch 1879-83, I, cap. 3, § 7.

403.

7 Marzo [18]98

Carissimo Guido

Il S[egre] mi ha scritto giorni sono riguardo all'inclusione degli iperspazi nel nostro art[icolo] «Trasformazioni»;[1] ma ben poco mi pare vi sia da dire in proposito. Ad es[empio] per le trasformazioni cremoniane tra S_n che cos'è stato fatto? L'ho chiesto al S[egre] stesso che in questo momento ha a mano la bibliografia iperspaziale.[2]

Ciò che mi dici di Kantor si riferisce a questioni sulle trasf[ormazioni] cicliche?

Ho vista, io pure, la nota [di] Painlevé[3] ed anzi mi proponevo di scrivertene. Avrai pur visto che il P[ainlevé] cita Humb[ert] come l'autore di un esempio dato l'anno scorso[4] (forse la sup[erficie] di Kummer). Quello che non ho ben visto è se i gruppi discontinui in questione contengono entro di sé una serie continua di trasf[ormazioni].

Sono lieto e mi congratulo con te della prossima riunione della tua commissione.[5] Sebbene desiderabile mi sembra però improbabile che il M[inistr]o faccia seguire la promozione prima dell'Ottobre, ma ciò non toglie il vantaggio di avere fin d'ora la promozione, moralmente.

Presto ti manderò i fogli del mio Art[icolo] sulle trasf[ormazioni] cremoniane insieme al tuo manoscritto. Troverai i miei fogli redatti in forma quasi di abbozzo, e potrai aggiungere nelle pagine bianche tutte le osservazioni che ti sembreranno opportune. A me manca ora quasi soltanto la parte bibliografica che è la più noiosa e non facile.

Ti compiango per l'infelice idea venuta al Bianchi nell'assegnare al Giudice[6] quell'orrendo tema. Se non sbaglio i temi proposti dai commissari sono estratti a sorte; in questo caso la sorte è stata, più che cieca, crudele!

Dovrai poi andare a Napoli per un esame orale?

Tanti saluti affettuosi a te e all'Elbina

Ghigo

[1] Per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[2] Cfr. l'articolo per l'*Encyklopädie* tedesca Segre 1918.

[3] Painlevé 1898.

[4] Secondo Painlevé 1898, 609, «M. Humbert (30 Janvier 1897) [...] a montré incidemment que certaines surfaces de Kummer non dégénérées admettent, comme groupe de transformations birationelles, un groupe infini discontinu». Tuttavia nei «Comptes Rendus» di quell'anno non vi è traccia di una comunicazione di Georges Humbert né risulta un'adunanza in quella data. Cfr. anche Humbert 1897.

[5] Si tratta della commissione per la promozione a professore ordinario.

[6] Si tratta invece di Modestino Del Giudice, che sarà per vari anni assistente alla cattedra di Geometria proiettiva all'Università di Napoli.

404.

13 Marzo [18]98

Carissimo Guido

Nel manoscritto che mi hai mandato mi pare troppo deficiente la trattazione delle sing[olari]tà della superficie; vi sono cose che non si possono rimandare all'art[icolo] «Trasformazioni».[1] Prima di tutto io vorrei la definizione generale di una sing[olari]tà qualunque, cioè dei punti multipli infinitamente vicini. Per ciò si può usare delle stesse condizioni analitiche che individuano un punto r-plo ordinario (annullamento delle derivate r-esime). I punti multipli infinitamente vicini ad uno dato si individuano sopra rami di curve algebriche mediante differenziali; la rappresentazione è semplicissima se si tratta di punti che stanno su rami lineari, perché tali punti nell'intorno d'ordine n sono dati da

$$x_i + n dx_i + (n-1)\, d^2x_i + \ldots + d^n x_i .$$

Nella memoria del Segre[2] manca la rappresentazione coi differenziali, ma c'è la definizione geometrica equivalente coi rami di curve.

Se vuoi sbrigartela puoi dire che le stesse condizioni analitiche che definiscono un p[un]to s-plo ordinario definiscono anche i punti s-pli infinitamente vicini ad uno dato (in un intorno di un certo ordine), punti che vengono rappresentati coi differenziali sopra rami di curve algebriche, come si ha dalla teoria delle sing[olari]tà delle curve; si ottiene così una definizione per la quale:

1) una curva generica passante per successivi p[un]ti multipli... ha ivi... intersezioni riunite colla sup[erficie] (come se i p[un]ti fossero distinti). v[ed]i Segre pg. 10

2) le polari hanno in un p[un]to s-plo un p[un]to $(s-1)$-plo almeno (Segre pg. 34).

Dalla proprietà (2) segue subito che se si hanno più di $n(n-s+1)^2$ p[un]ti s-pli *successivi* ad O, *vi è una curva s-pla che li contiene*. Infatti due polari φ_{n-s+1} si segano secondo una curva C che deve contenere tutti quei p[un]ti s-pli.

In altre parole la *composizione d'un p[un]to multiplo è finita*.

Come vedi mi sono tuffato nelle sing[olari[tà] delle sup[erficie] e mi sono anche reso conto dei dubbi che il Segre solleva a proposito delle trasformazioni.[3] Ma certo sarebbe facile superare quelle difficoltà se ormai non ci si potesse riportare alla Nota di Beppo Levi,[4] incomprensibile è vero, ma posta sotto il patronato del Segre.

Per domani sera ho un invito a pranzo, insieme ad altri colleghi, dal Del Re (!), il quale vuole così festeggiare il suo ordinariato.[5]

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Si tratta dell'articolo per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[2] Segre 1897a.
[3] Si veda quanto riferito in Segre 1897a, nota 42.
[4] B. Levi 1897a, che completa la lacuna segnalata da Corrado Segre nella sua memoria.
[5] Cfr. p. 348, let. 385 (6.11.1897).

405.

[s.d.]

Carissimo Guido

Il P[incherl]e ha ricevuto solo stamani l'invito a far parte della tua commissione convocata pel 4 del mese prossimo.[1] Gli altri commissari sono, come per Del Re, Bertini, Bianchi, Veronese, D'Ovidio.

Volentieri farò io stesso quel cenno occorrente sulle sing[olari]tà delle sup[erficie].[2] Bada che anche geometricamente i p[un]ti multipli infinitamente vicini si possono definire mediante contatti ed osculazioni di rami di curve, come fa il Segre, senza ricorrere alle trasformazioni; la *necessità* di quest'ultime è un'idea di Bertini che mi pare sbagliata.

Io debbo interrompere in questo momento di occuparmi di questi nostri art[icoli] che sono pel Decembre, mentre debbo preparare per Giugno quello sui Principii della Geometria.[3]

Vuoi vedere intanto così incompleta quella parte di manoscritto che si riferisce alle trasf[ormazioni] cremoniane? E vuoi riavere il tuo manoscritto?

Per l'art[icolo] sui Principii ho dovuto aspettare la Nicht. Eucl. [Nicht-euklidischen] Geom[etrie] di Klein[4] giunta soltanto ora alla nostra biblioteca di Magistero.

Ora mi proporrei di sviluppare quell'art[icolo] sopra il seg[uente] schema:

1) Principii dell'ordinaria Geom[etria] metrica, da Euclide a Legendre, Leibnitz, Bolyai, Lobatschewsky, Veronese

2) Principii della Geom[etria] pr[oiettiva] e subordinazione della metrica

3) Il problema dei fondamenti secondo Riemann (ds^2)

4) Il problema gruppale Helm[h]oltz-Lie.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Cioè aprile: infatti in una lettera del 10 aprile 1898 Corrado Segre si congratulò con Castelnuovo per la promozione a professore ordinario.

[2] Il problema delle singolarità delle superficie algebriche, nella versione poi data alle stampe degli articoli per l'*Encyklopädie* tedesca, sarà trattato in Enriques-Castelnuovo 1914, § 3.

[3] Enriques 1907d.

[4] Klein 1890.

406. [c.p.]

[Bologna] 27 Marzo [18]98

Carissimo Guido

È un po' di tempo che non ho più tue notizie.

Credo che la F_{2p-2} a sez[ioni] di gen[ere] p in S_p stia sempre sopra una var[ie]tà V_3 d'ordine $p-1$ a sezioni razionali o ellittiche, la quale V_3 si ottiene come sezione d'un certo numero di quadriche che passano per F_{2p-2}. Ora le V_3 raz[iona]li contengono un fascio di piani il quale sega sopra F_{2p-2} un fascio d'un certo genere $\pi < p$ (con punti base). Si otterrebbe quindi la riduzione per $p > 9$.

In qualche intervallo di tempo ho ripreso e redatto la nota[1] sui piani doppi con $p^{(1)} = 1$, di cui avevo i resultati. Te la manderò pregandoti di passarla al Cr[emona] perché voglia presentarla ai Lincei.

Cordiali saluti anche all'E[lbina]. Luisa è a Firenze come saprai.

Ghigo

[1] Enriques 1898b. Cfr. p. 285, let. 311 (21.11.1896).

407.

4 Aprile [18]98

Carissimo Guido

Grazie tante a te e all'Elbina pel ritratto del bimbo, che ci ha fatto grandissimo piacere.

Ti ringrazio pure di aver presentato la mia nota[1] al Cr[emona]. Ho già riveduto più volte i calcoli di quei numeri, ma tornerò a verificarli sulle bozze.

Ora sono imbarcato nell'Art[icolo] sui «Principii della Geometria»[2] e più specialmente nell'esame del libro di Veronese.[3] A quanto pare (anche dalla nota recente di Levi-Civita)[4] i suoi ∞ e infinitesimi attuali non portano a nessuna logica contraddizione, ma mi sembra piuttosto che racchiudano delle ipotesi restrittive pel campo finito.

Una cosa elegante del libro di Veronese è la discussione sulla possibilità che particolari coppie di punti non determinino la retta; dalla quale discussione vien fuori molto bene la forma sferica della Geometria riemanniana.

Mi è dispiaciuto di non aver potuto vedere il tuo Babbo (che non ho trovato in casa). Salutalo ti prego a mio nome, insieme alla tua sorella.

Ed abbiti coll'Elbina tante cose cordiali da

Ghigo

[1] Enriques 1898b.
[2] Enriques 1907d.
[3] Veronese 1891.
[4] Levi-Civita 1898.

408.

19 Aprile [18]98

Carissimo Guido

Non ti avevo mai risposto riguardo alle elezioni del Cons[iglio] Sup[eriore], aspettando di sapere che cosa facessero qui a Bologna, dove si è portato il nostro Ciamician.[1]

All'ultimo momento poi ho avuto lettere dal Bertini e dal Nardi Dei (ex sindaco di Pisa) che mi raccomandavano di dare il voto al Dini. E poiché il Dini è stato mio prof[essor]e e recentemente mi ha anche reso dei servizi, non ho creduto di dovergli togliere il mio voto per darlo al Cerruti. In queste elezioni (dove d'altronde i candidati su per giù si equivalgono rispetto all'ufficio) ha gran parte il criterio personale. Perciò mi immagino che vi sarà stata una grande dispersione di voti.

Sono stati qui a Bologna, e si sono fermati due giorni, i coniugi Joung[2] di Cambdrige, ambedue geometri, col loro piccino di 10 mesi (che non

mi ha manifestato preferenze per la geometria o per l'analisi). Essi mi avevano fatto domandare prima dal Levi-Civita dove potevano incontrarmi, se qui o a Firenze.

Girano l'Italia dove si tratterranno 6 mesi o un anno. Ora vanno in campagna e poi al mare durante l'estate.

Lui ha studiato a Cambdrige e lei a Göttingen dove si è trovata con Fano (era la sig.na Chrisholm). Hanno una cultura matematica assai larga, e specialmente lei manifesta intelligenza pronta.

Lui mi ha parlato di un pasticcetto di ricerca sullo S_n di piani di S_3, S_4 ... in via statica.

Credo ormai di avere acquistato una sufficiente idea del libro di Veronese,[3] per quanto mi occorre di riferirne.

Ora mi occupo dei principii della teoria della connessione. Al qual proposito la lettura nuovamente fatta della memoria di Riemann,[4] mi ha ispirato una ricerca:

Sai che Riemann genera la sup[erficie] col moto d'una linea *l*. Considerando le posizioni di *l* e le traiettorie *m* dei punti di essa si ottengono così *per dato*, sopra la sup[erficie], due fasci di linee. Ma è facile persuadersi che (se sulle dette linee non vi è alcuna determinazione metrica) non si può dedurre di qui l'esistenza di alcuna altra linea, e tanto meno introdurre sopra la superficie delle coordinate. Qualche post[ulato] esistenziale occorre all'uopo?

Io credo di poter stabilire che si possono introdurre le coor[dinate] sulla superficie appena si ammette l'esistenza di un *terzo fascio* di linee sopra la superficie.

La Luisa andrà questi giorni a Tazzarello presso il sig. Tedesco, per finire colla campagna la cura ricostituente.

Ti ringrazio dei tuoi pensieri affettuosi e cordialmente ti saluto

Ghigo

[P.S.] Un libraio di Milano mi chiede la mia «Introduzione...».[5] Io la quoto £ 10. Giorni sono ho avuto la stessa richiesta da Hermann; siccome però egli mi voleva dare solo £ 8, non volendo trattare gliela ho regalata.

[1] Giacomo Ciamician fu professore straordinario di Chimica all'Università di Padova, poi ordinario all'Università di Bologna.

[2] Si tratta in realtà di William Henry Young e di sua moglie Grace C. Chrisholm.

[3] Veronese 1891.

[4] Riemann 1854.

[5] Enriques 1896d.

409.

28 Maggio [18]98

Carissimo Guido

Sono lietissimo per la tua promozione anticipata rispetto alle mie previsioni.[1] Siamo tanto abituati ai ritardi burocratici che una cosa fatta a tempo ci sorprende.

Mi rallegro dunque con te del fatto compiuto.

Le nostre lezioni riprese da pochi giorni termineranno la settimana ventura.

Ho ricevuto da Borel il dono molto gradito di un piccolo libro intitolato «Lezioni sulla teoria delle funzioni».[2] Contiene un'esposizione dei fondamenti della teoria degli insiemi di Cantor, in relazione ai principii generali della teoria delle funzioni di variabile reale o complessa; è assai interessante.

Io sono tutto immerso nell'Art[icolo][3] sui «Fondamenti della Geometria».

Null'altro di nuovo da comunicarti.

Saluti affettuosi a te e all'Elbina tuo

Ghigo

[1] Il decreto di nomina a professore ordinario di Castelnuovo porta la data 1 luglio 1898.

[2] Borel 1898.

[3] Enriques 1907d.

410.

27 Agosto 1898

Carissimo Guido

Hai ragione di lamentarti del mio silenzio, ma che vuoi? il mio ozio è così completo che mi manca proprio l'argomento di cui scrivere. Sai che vita faccio a Badia? Non studio, non leggo, non cammino, non vedo nessuno. Una vita come questa è del resto assai riposante.

Il Fano mi ha scritto, l'altro giorno, che ha ricevuto notizia essere stato riaperto il concorso di Algebra e Geometria analitica di Pavia, per ordinario. Sai tu chi saranno i giudici?

Mi è balenata alla mente una lontana idea di concorrere. Dico idea lontana perché varie ragioni mi sconsigliano: in primo luogo la repugnanza che avrei a cambiare la residenza di Bologna con quella di Pavia; e poi il gran dubbio sull'esito, perché non so come potranno essere considerati i miei titoli d'Algebra, e perché vi saranno almeno due concorrenti temi-

bili, il Gerbaldi e il Berzolari.[1] Ma siccome c'è tempo, avremo anche agio di parlare della cosa a voce. Tu intanto dimmi quello che sai e quello che pensi in proposito, e, ti prego, non comunicare a nessuno la mia idea.

Sono qui a Badia i matematici inglesi, coniugi Joung,[2] che fanno vita nei boschi. Andranno quest'inverno a Torino per assistere ad un corso di Segre sugli iperspazi.[3] Mi avevano manifestato l'intenzione di venire a Firenze nel Settembre per conoscerti (a proposito, quando conti essere a Firenze?), ma pare che rinunzieranno a questo progetto perché la signora, che è stata un po' incomodata, desidera andare al mare. Del resto ogni giorno fanno un progetto e poi lo disfanno. Volevano andare in Romagna, in Grecia, ora in Liguria... e intanto restano a Badia.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina.

Ghigo

[P.S.] Levi-Civita è [ad] Agordo e Ricci sul lago d'Alleghe con Panebianco, almeno fino a pochi giorni fa.

[1] I candidati al concorso di Pavia furono in realtà: Giuseppe Bagnera, Luigi Berzolari, Ettore Bortolotti, Alberto Brambilla, Edgardo Ciani, Gino Fano e Francesco Giudice. La commissione fu composta da: Alfredo Capelli, Alfonso Del Re, Enrico D'Ovidio, Salvatore Pincherle e Corrado Segre. Il concorso si chiuse nel 1899 con il seguente risultato: 1° Berzolari, 2° Fano, 3° Bagnera, 4° Bortolotti.

[2] Cfr. p. 366, nota 2 a let. 408 (19.4.1898).

[3] Il corso di Geometria superiore che Segre terrà nell'anno accademico 1898-99 sarà dedicato alle curve algebriche iperspaziali: cfr. Terracini, *I quaderni di Corrado Segre* cit., 256.

411.

26 Ottobre [18]98

Carissimo Guido

Sono stato molto contento di passare con te e coll'Elbina questo mese di Ottobre, che è stato molto piacevole. Era molto tempo che non ci eravamo ritrovati insieme un po' lungamente ed in circostanze normali.

Anch'io ho ripreso da ieri sera la vita consueta. Domani mi cominciano gli esami. Il Cons[iglio] Accademico ha deciso che ci sia un 2° appello dal 6 al 15 Nov[embre], senza proroga nel principio delle lezioni. Ma in pratica come si farà a cominciare?

Ho ricevuto una lettera dallo Schönflies il quale vuole mettere nel suo art[icolo] III C5 dell'Enciclopedia[1] le cose inerenti alle più semplici corrispondenze: inversione rispetto ad un cerchio ecc. Ho capito che ha anche idea di trattenersi un po' su certe generazioni proiettive di corrispondenze. Gli ho risposto che con te avevamo fissato di menzionare[2] quelle corri-

spondenze come esempii, e che non abbiamo difficoltà di rimandare il lettore al suo Art[icolo] per le loro proprietà. Ho fatto bene?

Ripensando alla redazione del mio lavoro[3] sulle sup[erficie] con un fascio di coniche, credo di poter esporre il punto scabroso in una forma passabilmente accettabile. Abbiamo (ad es[empio] per $p = 4$) una famiglia di sestiche piane (birazionalmente identiche) con 3 tangenti 3-ple; fra queste sestiche ce ne sono ∞^1 proiettivamente distinte; una relazione tra gli invarianti permette di esprimere la condizione perché le 3 tangenti 3-ple passino per un punto. D'altronde se ciò non si potesse realizzare tranne per moduli particolari della curva, si troverebbe sopra una curva di genere 4 infinite g^1_6 con 3 terne 2-ple; ora credo di poter dimostrare che questo è assurdo.

Così farei a meno della irriducibilità di quella certa equazione, che in seguito ad esame più accurato, mi sembra dubbia.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina.

Un bacio a Mario. Tuo

Ghigo

[...][4]

[1] Schönflies 1910.

[2] Nell'articolo sulle trasformazioni che stavano scrivendo per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] Gli argomenti a cui si fa cenno in questa lettera e in altre che seguiranno furono pubblicati negli articoli Enriques 1898c e 1898d, presentati all'Accademia dei Lincei il 20 novembre e il 18 dicembre, rispettivamente.

[4] Nell'originale seguono due righe di saluto da parte di Luisa.

412.

29 Ottobre [18]98

Carissimo Guido

La tua osservazione relativa al caso $p = 3$ mi sembra giusta soltanto nel senso che vanno scartate fra le 6 coppie comuni alle due g^1_4 quelle che corrispondono a tangenti doppie facenti parte di una conica d'un sistema e di una d'un altro. Ora il numero di queste sembra variare a seconda delle coppie di g^1_4 che si considerano, ma resta, probabilmente sempre, certo in qualche caso, < 6. Però è innegabile che questi pasticci complicano il problema. Tutto dipende dal fatto che noi vogliamo attenerci alle g^1_4. Il problema diventa più facile per le g^1_{2n} dove $n > 3$. In particolare mi sembra di ottenere la soluzione semplicissima per $n = 2p - 1 = 5$.

Un G_5 qualsiasi della C_3 (di gen[ere] 3), dà sulla C_5 un G_{10} composto di coppie e una g^5_{10} trasformata in sé dall'involuzione, entro cui esistono

due g^2_{10} i cui gruppi sono uniti cioè composti di coppie; una corrisponde alla g^2_5 individuata su C_3 da G_5, l'altra dà su C_3 un'altra g^2_5 appartenente (contata 2 v[olte]) alla g^7_{10} determinata da G_5. Ora per un'altra C_5 rappresentata sulla C_3 2-pla si ha su C_3 un'altra g^2_5 che contata 2 v[olte] appartiene alla g^7_{10}. Vi sono nella g^7_{10} delle g^1_{10} che contengono un gruppo di ciascuna delle $(g^2_5)^2$?[1] Mi pare di sì, perché, se non sbaglio, una $(g^2_5)^2$ appare in g^7_{10} come una serie quadratica, sicché (trasformando per dualità) si deve in sostanza cercare se vi sieno in S_7 delle rette che si appoggiano a 3 superficie di 2° ordine, e di queste ve n'è un numero finito (8?).

Il processo si estenderebbe senza complicazioni.

Non ho ancora parlato col P[incherl]e di Pavia.[2] Siccome non c'è furia aspetto un'occasione in cui mi trovi con lui un po' a lungo.

Mi sorprende e mi dispiace un po' ciò che mi dici intorno alla diffusione della notizia. In ogni modo dì pure che io posso aver parlato accademicamente della possibilità della cosa, ma che non ho nessuna intenzione concreta e molto probabilmente non ne farò nulla.

Ti saluto cordialmente tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Tante cose affettuose all'Elbina.

[1] Seguono nell'originale sei righe cancellate.
[2] Cfr. p. 367, let. 410 (27.8.1898).

413.

3 Novembre [18]98

Carissimo Guido

Ho redatto la Nota[1] sulle superficie con un fascio di curve razionali e mi propongo di spedirtela domani.

La cosa mi par che vada come ti avevo scritto salvoché quelle superficie hanno un ordine, che non è né 2 né forse 4, e che non par facile di determinare; ma ciò non importa affatto.

Data la semplicità del ragionamento non saprei immaginare obiezioni; ad ogni modo avrò piacere che anche tu concordi con me in questo giudizio, prima di pubblicare il lavoro.

Sono contento che in tal modo il lemma,[2] costituente la parte secondaria della dimostrazione, non figuri come parte principale. (La dimostrazione va per $p > 1$ e con lieve modificazione anche per $p = 1$).

Ripensando alla rappresentazione che tu facevi della varietà cubica V di S_4 su quel certo S_3 2-plo mi pare che se ne possa dedurre l'impossibi-

lità di rappresentare la congruenza di coniche data su V, sulla congruenza di coniche di S_3 di Montesano.[3]

Infatti la congruenza di Montesano conduce ad un altro S_3 2-plo che ha la F_4 limite di prima, più un cono F_2 col vertice nel punto 2-plo O di F_4. Ora bisognerebbe poter trasformare F_4 in sé stessa con una trasf[ormazione] di Jonquières che riducesse F_2 ad una linea fondamentale; ma una siffatta trasformazione pare che, necessariamente, mentre trasforma F_2 nella sua linea di contatto con F_4, trasformi alla sua volta questa linea (in una nuova superficie certo di diramazione se la linea è semplice, cioè) in F_2.

Non so capire però che cosa accada quando V ha un p[un]to 2-plo. Forse però la congruenza di coniche di V non è riferibile a quel tipo di Montesano che tu hai scelto, ma ad un altro.

Ti saluto cordialmente insieme all'Elbina. Tuo
Ghigo

[1] Cfr p. 369, nota 3 a let. 411 (26.10.1898).
[2] Cfr. Enriques 1898c, 532.
[3] Cfr. Montesano 1895.

414.

8 Nov[em]bre [18]98

Carissimo Guido

Ho parlato ieri col P[incherl]e della cosa di Pavia.[1] Egli stesso me ne ha dato occasione raccontandomi che aveva visto il D'Ovidio ed insieme avevano rammaricato che il concorso fosse per ord[inari]o, discutendo se era il caso di proporre il vincitore soltanto per straord[inari]o.

Io gli ho posto la domanda come giudicherebbe la mia partecipazione al concorso e se crederebbe quelle considerazioni applicabili anche al mio caso.

Egli ha risposto che i miei titoli comunque più propriamente appartenenti a materie affini dovrebbero secondo lui esser giudicati favorevolmente e che egli (qualora com'è probabile fosse commissario) sosterrebbe esser io atto (in linea assoluta) a coprire quella cattedra di ord[inari]o e non crede si penserebbe ad applicare al mio caso quelle considerazioni di cui sopra. In quanto all'esito naturalmente dipenderebbe dai concorrenti, e nulla egli potrebbe dirmi perché se vi fossero Berz[olar]i e Gerb[aldi] crede si avrebbe tra noi tre una lunga discussione.

Questo è il parere complessivo del P[incherl]e riguardo al concorso, ma nella conversazione avuta con lui egli ha cominciato da meravigliarsi ch'io

pensassi a lasciar Bologna dove «la mia promozione sarà probabilmente prossima». Al che io ho risposto che avendo in vista la promozione qui anche con ritardo di un anno, non abbandonerei questa Un[iversi]tà. Ed egli mi ha obiettato che le commissioni vedono di mal occhio che qualcuno concorra per non andare, e che egli come mio collega sarebbe probabilmente interpellato sulle mie intenzioni. Poi mi ha anche detto che alla Fac[ol]tà il mio atto potrebbe fare cattiva impressione. Ed infine ha soggiunto che a Pavia avrei degli inconvenienti per gelosie di Aschieri.

Dal complesso di questa conversazione (che però egli ha concluso consigliandomi a fare intanto la domanda prima dello scadere dei termini) ho veduto che al P[incherl]e secca la mia partecipazione al concorso e più seccherebbe ch'io me ne andassi.

Riguardo alla mia promozione ha detto che alla fine di quest'anno io presenti la domanda che la fac[ol]tà certo appoggerà. Se il M[inistr]o non l'accoglierà è prevedibile avvenga qualche prossima vacanza d'un posto d'inc[aricato], ed allora «la fac[ol]tà non vuole danneggiare la promozione d'uno straord[inari]o colla chiamata d'un ord[inari]o».

Da questo lato dunque le idee del P[incherl]e a mio riguardo sono buonissime.

Io non so ancora che cosa decidere. Se non ci fossero Berz[olari] e Gerb[aldi] concorrerei volentieri, ma come saperlo prima del 15 Dec[embre]? D'altra parte se venissi nel proposito di ritirarmi saputa la loro presenza, forse sarebbe più opportuno rinunziare da prima facendo capire al P[incherl]e che intendo usargli così un atto di deferenza e prendendo atto, in certo modo, delle disposizioni relative alla mia promozione?

Entro il mese si saprà probabilmente la fine dell'affare Berz[olar]i e si potrà meglio decidere.[2]

Passando al mio lavoro,[3] ti ringrazio dell'esame che ne hai fatto. Riguardo alla semplificazione proposta, dubito che per risparmiare una trasf[ormazione] per dualità non si renda la cosa meno visibile. Quanto al «prodotto degli ordini» la formula si dimostra subito come per le rigate, prendendo prima 2 S_{p-1} e 1 V_{p-1}, poi 1 S_{p-1} e 2 V_{p-1} e infine 3 V_{p-1}.

Sopra una rigata di gen[ere] p, quando si conosce un sistema lineare mancante di aggiunto, si ottiene il sistema delle generatrici costruendo l'aggiunto *di rango* 1 (o agg[iun]to al 2-plo). Ora se sopra una sup[erficie] l'aggiunzione termina, giunti all'ultimo sistema si può considerare l'agg[iun]to di rango 1, e si dimostrerà che esso è composto colle curve razionali d'un fascio se il $p^{(1)}$ *relativo al sistema* è inferiore a dati limiti, oppure (restando il $p^{(1)}$ assai basso) si vedrà che il grado e quindi la dimensione dell'ultimo sistema agg[iun]to è grande quanto si vuole, onde la sup[erficie] è rigata.

Così si dovrebbe riottenere il tuo resultato[4] sotto una nuova forma, cioè: una sup[erficie] è riferibile e rigata se su di essa esiste un sistema lineare avente un $p^{(1)} <$ di dati limiti (tenuto conto che il $p^{(1)}$ pare possa decrescere soltanto coll'aggiunzione).

Ti saluto cordialmente insieme all'Elbina

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 367, let. 410 (27.8.1898).
[2] Luigi Berzolari era a quest'epoca professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Torino, dove aveva presentato domanda per la promozione a ordinario.
[3] Enriques 1898c e 1898d.
[4] Cfr. Castelnuovo 1897b.

415.

13 Novembre [18]98

Carissimo Guido

In un intervallo lasciatomi dagli esami di G[eometria] descrittiva rispondo alla tua lettera.

Ti ringrazio prima di tutto delle notizie che mi comunichi, e mi atterrò probabilmente al consiglio di rinunziare a Pavia, per ciò mi riservo a riparlare col P[incherl]e.

È giusta l'osservazione circa il $p^{(1)}$ relativo. Io tentavo per questa via di studiare le involuzioni su rigate. Appunto in questo studio mi si è presentata un'osservazione che vedo avere stretto legame con quanto mi scrivi, sebbene ciò non mi riesca del tutto chiaro.

Io parto da un sistema con $n > 2\pi - 2$ e lo raddoppio successivamente. Tenuto conto che $r = n - \pi - p_n$, si arriva ad un sistema con caratteri N, Π e R dove non solo $R > \Pi$ ma R si avvicina asintoticamente a Π più una parte aliquota di Π.

Ora qui appunto ci si riattacca alla tua osservazione, perché basta imporre un p[un]to i-plo che diminuisce di $\frac{i(i-1)}{2}$ il genere e di $\frac{i(i+1)}{2}$ la dimensione, per ottenere un sistema grande quanto si vuole di genere negativo.

Di qua si trarrebbe che ogni superficie con un sistema dove $n > 2\pi - 2$ è razionale o riferibile a rigata.[1] A te la 2ª ipotesi non si presenta perché prendi il $p^{(1)} > 0$. Non vedo però in che cosa ti possa servire un sistema dotato di i aggiunti successivi, con i assai grande; e non vedo neppure, sul momento, se i resultati a cui arriveremmo sarebbero identici, o avrebbero una parte comune, o l'uno sarebbe compreso nell'altro.

Mi pare però che il ragionamento sopra indicato darebbe, senza aggiunzione, una semplicissima dimostrazione della razionalità o rif[eribili]tà a rigate delle involuzioni, tanto sopra il piano che sulle rigate.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina].

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Questo risultato, enunciato in Enriques-Castelnuovo 1900a, sarà dimostrato in Enriques-Castelnuovo 1901.

416.

14 Novembre [18]98

Carissimo Guido

Se hai ripensato un po' all'argomento ti sarai accorto di quel che succede quando il gen[ere] d'un sistema diviene negativo per effetto di una sing[olari]tà. Si stacca in generale una parte fissa C ed il sistema residuo può avere il genere alto purché C abbia un genere negativo, ossia contenga delle componenti razionali. Pare dunque che null'altro si possa concludere tranne che la superficie possiede infinite curve razionali, ciò che già si sapeva.

Però potrebbe accadere che la C contenesse una sola curva raz[iona]le ed ove questo fosse stabilito si arriverebbe ad una serie ∞^1 razionale di curva razionali.

È curioso che ogni sup[erficie] con ∞^1 curve raz[iona]li (non fascio) possiede sempre un numero arbitrariamente grande (∞^∞) di curve razionali, il che si vede facilmente.

Ho finito i miei esami di Descr[ittiva], con grande strage.

Ho notato anch'io l'interesse delle memorie di Bagnera.[1]

Ti saluto affettuosamente Ghigo

[1] Il riferimento è probabilmente alle memorie sulla teoria dei gruppi che Giuseppe Bagnera iniziò a pubblicare dal 1897: cfr. in particolare Bagnera 1898a, 1898b e 1898c.

417.

17 Novembre [18]98

Carissimo Guido

Io sarei ben contento di poter collaborare con te[1] alla risoluzione dell'importante problema delle sup[erficie] con un sistema per cui $n > 2\pi - 2$. Questo problema coincide del resto con quello delle involuzioni su rigate, perché con successivo raddoppiamento si può costruire sulla sup[erficie]

un sistema in cui r supera π di quanto si vuole, e quindi (imponendo π p[un]ti 2-pli) si ottengono quante si vogliono curve razionali. Credo anche che vada bene quanto ti dicevo, cioè che coll'imposizione di un solo p[un]to multiplo si possa ottenere un sistema di genere negativo. La semplificazione ch'io otterrei rispetto al tuo procedimento dipenderebbe dal fatto di partire da un sistema per cui $n > 2\pi - 2$ invece che da un sistema regolare qualunque. Però la difficoltà che ti ho accennato ieri l'altro mi pare molto seria.

Ho qualche speranza di pervenire alla rappresentazione della varietà cubica V_3 di S_4 servendomi dei concetti utilizzati ultimamente per le sup[erficie] con un fascio di curve raz[ionali].[2]

Vi sono su V_3 dei fasci di F_3 sezioni di p[ia]ni bitangenti, si tratterebbe di riferire le F_3 di un tal fascio alle F_3 di un fascio analogo di F_3' (facilmente costruibile) in S_3. Consideriamo una F_3 e una F_3'. Si può immaginare che i 2 p[un]ti 2-pli A, B di F_3 sien fatti corrispondere in modo ordinato ai p[un]ti 2-pli A', B' di F_3' (riferendo opportunamente le 2 involuzioni costituite dalle coppie di p[un]ti 2-pli).

Ora F_3, F_3' si possono rappresentare *razionalmente* sopra uno stesso p[ia]no 2-plo con curva di diramazione C_{2n} e p[un]to $(2n-2)$-plo. Una retta qualsiasi di questo p[ia]no dà su F_3, e così su F_3', una curva γ bisecante le coniche segate dai p[ia]ni che passano pei 2 p[un]ti 2-pli di F_3 (e di F_3'), in 2 p[un]ti C, D coniugati armonici ad A, B.

Ora se i p[un]ti C, D si potessero riferire *ordinatamente* agli analoghi C' D' di F_3', tutto sarebbe fatto; ma invece questa operazione è irrazionale. Però variando la F_3 del fascio la γ descrive una sup[erficie] φ (e l'analoga γ' una φ'), e *pare* che le sup[erficie] φ e φ' sieno riferite ad uno stesso p[ia]no 2-plo onde sarebbero riferibili fra loro e si otterrebbe il riferimento ordinato di C, D a C' D'.

Però la cosa è molto delicata ed occorrono perciò tutte le riserve, specialmente in quest'ultimo punto.

Passando ad altro ti dirò che ho manifestato al P[incherl]e l'idea di rinunziare al concorso di Pavia,[3] ed egli pur protestando di non volere influire colle sue considerazioni, ha mostrato di averne piacere.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]. Tuo

Ghigo

[1] Cfr. p. 373, let. 415 (13.11.1898).
[2] Cfr. Enriques 1898c e 1898d.
[3] Cfr. p. 371, let. 414 (8.11.1898).

418.

20 Novembre [18]98

Carissimo Guido

Se non ci siamo intesi fin ora, dipende in parte dalla mia eccessiva concisione, ed in parte da un errore in cui sono caduto.

Io ti facevo osservare che dato sopra una sup[erficie] F un sistema per cui $n > 2\pi - 2$, si può per moltiplicazione ottenere un sistema in cui r supera π di quanto si vuole, e quindi colla imposizione di p[un]ti multipli *non* prestabiliti ottenere (almeno in generale) $\infty^{r-\pi}$ curve razionali.

Ma questa è un'osservazione del tutto distinta dal procedimento per cui volevo ottenere un sistema *lineare* di genere 0 o negativo coll'imposizione di un p[un]to i-plo *prestabilito*. Perché ciò possa farsi occorre l'esistenza di un i per cui

$$\frac{i(i-1)}{2} \geq \pi \qquad \frac{i(i+1)}{2} < r.$$

Ora partiamo da un sistema lineare in cui $n > 2\pi - 2$, $n = 2\pi - 2 + \delta$. Considerando lo s-plo si ha

$$P = s^2\pi + \left(\frac{\delta}{2} - 1\right) s(s-1) - s$$

$$N - P = s^2\pi + \left(\frac{\delta}{2} - 1\right) s(s+1) + s$$

$$R \geq N - P - p_n.$$

Affinché esista per s grande un i tale che

$$\frac{i(i-1)}{2} \geq P \qquad \frac{i(i+1)}{2} < R,$$

occorre che sia

$$\delta^2 > 4\pi + 2\delta.$$

A me pareva invece che per s assai grande si potesse sempre soddisfare (con un i opportuno) a quelle 2 condizioni.

Disgraziatamente dunque non si arriva al resultato se non è

$$\delta(\delta - 2) > 4\pi.$$

Tu provi ad imporre invece che un solo punto i-plo, più punti multipli, ma a me pare che con ciò si è in condizioni più svantaggiose, come appari-

rebbe volendo risolvere in luogo delle equazioni sopra scritte le

$$\frac{i(i-1)}{2} + \frac{j(j-1)}{2} \geq P \qquad \frac{i(i+1)}{2} + \frac{j(j+1)}{2} < R.$$

Se poi si arriva per un sistema a soddisfare le condizioni precedenti, credo di aver capito il tuo pensiero relativo alla dimostrazione della raz[ionali]tà (escluse le rigate). Infatti il caso più sfavorevole è quello in cui imposto il p[un]to O i-plo (discorriamo pure nell'ipotesi che sia unico) si ottiene un numero finito di curve razionali C_1 C_2 ... aventi in O un p[un]to ν-plo; ora queste curve o staranno in diversi sistemi lineari e saranno separabili razionalmente, o saranno in uno stesso sistema e determineranno un fascio di curve razionali.

Tutta la difficoltà sta dunque, come ben dici, nel trovare un sistema da cui con imposizione di sing[olari]tà si deduca un sistema di genere negativo. Notando che pel sistema $|C'|$ agg[iun]to a $|C|$ si ha $n' - \pi' = \pi - 2$, ho provato a costruire un sistema ($n > 2\pi - 2$) per cui $\pi - \pi'$ sia abbastanza grande in confronto a π. Guardando a ciò che succede sulle sup[erficie] raz[ionali]i si direbbe che l'aggiunzione applicata successivamente ad un sistema per cui $n > 2\pi - 2$ dovrebbe condurre allo scopo. Ma come dimostrarlo?

Il mio ragionamento sulla var[ie]tà cubica urta nel solito scoglio delle curve eccezionali, sicché la rappresentazione in quel modo non par possibile.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]

Tuo
Ghigo

419.

23 Novembre [18]98

Carissimo Guido

Mi piace la riduzione che mi comunichi; trovo soltanto una difficoltà che forse sarà superabile e ti dirò dopo.

Intanto però ti faccio osservare che il processo riesce non solo per $p^{(1)} > 4$ come tu dici, ma forse anche per $p^{(1)} = 3, 4$.

Mettiamoci nell'ipotesi più sfavorevole $p^{(1)} = 3$ a cui possiamo sempre ridurci se $p^{(1)} > 2$.

Si ha un sistema per cui

$$R_i = \frac{i(i+1)}{2}(p^{(1)} - 1) + p_n$$

$$\pi_i = \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1,$$

dove $p^{(1)} = 3$, ossia

$$R_i = i(i+1) + p_n \qquad \pi_i = i(i-1) + 1.$$

Cerchiamo un intero j siffatto che sia

$$i(i+1) \geq \frac{j(j+1)}{2} \qquad i(i-1) \leq \frac{j(j-1)}{2}$$

cioè

$$(1) \qquad \begin{cases} 2i^2 + 2i \geq j^2 + j \\ 2i^2 - 2i \leq j^2 - j. \end{cases}$$

Si ha per sottrazione

$$4i \geq 2j,$$

onde si può porre

$$i = \frac{j}{2} + h \qquad \text{con} \quad h \geq 0.$$

Allora le (1) divengono

$$(2) \qquad \begin{cases} 4h(j+h+1) \geq j^2 \\ 4h(j+h-1) \leq j^2. \end{cases}$$

Bisogna riguardare le (2) come due disuguaglianze di analisi indeterminata rispetto ad j ed h, le quali verrebbero risolute dai valori di j ed h per cui

$$4h(j+h) = j^2.$$

Qui s'incontra un'equazione di analisi indeterminata la cui risoluzione in numeri interi non è possibile, perché si trova

$$j = 2h + 2\sqrt{2}\,h.$$

Però a noi basta trovare valori di j ed h (sufficientemente grandi) i quali forniscano una risoluzione *approssimata* dell'equazione a meno di $4h + p_n$. Una tale risoluzione mi *sembra* possibile prendendo per $\sqrt{2}$ un valore assai approssimato (frazione con denominatore $2h$ per difetto o per eccesso) in relazione ad un h molto grande antecedentemente fissato.

Calcolato in questo modo j, si potrebbe imporre al dato sistema un p[un]to j-plo rendendo negativo il suo genere.

Mi pare ormai chiaro che se coll'imposizione di punti multipli il genere di un sistema si riduce negativo, si riesca alla raz[ionali]tà della sup[erficie] escluse le rigate.

Se non è errato ciò che ti scrissi, a più punti multipli si può sempre sostituire con *vantaggio* l'imposizione di un solo p[un]to multiplo, e allora il ragionamento riesce più semplice.

Piuttosto vi è un'obiezione relativamente alla costruzione del sistema $|iC - iC'|$ da cui tu parti.

Questo sistema potrebbe essere riducibile, e se da esso si staccano parti fisse razionali (sconnesse fra loro) il genere delle parti variabili può forse resultare maggiore di ciò che è dato dal tuo calcolo. Ma può anche darsi che guardando bene le cose, il dubbio non abbia ragione di sussistere.

Come sta Elbina del suo dito?

Affettuosi saluti a tutti e due Ghigo

PS.

Il caso $p^{(1)} = 2$ è forse abbordabile per un'altra strada.

Consideriamo un sistema $|C|$ per cui $n > 2\pi - 2$, sia $n = 2\pi - 2 + \delta$. Per $|C'|$ si ha

$$\pi' = 3(\pi - 1) - n + 2 = \pi + 1 - \delta$$
$$n' = 4(\pi - 1) - n + 1 = 2\pi - 1 - \delta$$
$$n' = 2\pi' - 2 + (\delta - 1).$$

Ora se si parte da un sistema (multiplo di uno dato) in cui il δ è assai grande e si applica successivamente l'aggiunzione *pare* si arrivi ad un sistema in cui la differenza $\delta_r = n_r - (2\pi_r - 2)$ è assai grande in confronto del π_r tanto da soddisfare a quella disuguaglianza $\delta_r(\delta_r - 2) \geq \pi_r$ (salvo errore) che ti indicavo l'altro giorno come necessaria per arrivare allo scopo secondo quella strada.

420. [c.p.]

[Bologna] 27 Novembre [18]98

Carissimo Guido

Ritengo che quella discussione si compirà assai più presto di quel che ti sembra. Se imponendo O i-plo ad un sistema $|C|$ si stacca una curva fissa non razionale K, togliendolo si ha sempre un sistema lineare di genere $\leq$ al virtuale, anche se K è contata più volte. Pertanto si può prescindere da K e considerare il sistema residuo. Il solo caso in cui (la presenza di)

una curva fissa fa aumentare il genere del sistema residuo è dunque quello in cui la curva contiene parti razionali, e questo ormai è risoluto.

Tutto verrà perciò semplicissimo. Per $p_n = -2$ la discussione del p[ia]no 2-plo è un po' minuta sebbene ritengo che non ne usciranno *nuove* superficie aventi il $p^{(1)} = 2$. Questo caso resterà dunque insoluto se per altra via non si dimostra che le sup[erficie] $p^{(1)} = 2$ non esistono.

Ma forse invece esisteranno per $-p_n$ assai elevato.

Saluti cordiali anche all'E[lbina] tuo

Ghigo

[P.S.] Hai avuto occasione di dimostrare che i multipli della g^{p-1}_{2p-2} sono sempre completi?[1]

[1] Cfr. Castelnuovo 1893a, 103.

421.

28 Nov[embre 18]98

Carissimo Guido

Credo che la questione relativa al caso $p^{(1)} = 2$ si possa trattare nel modo seguente.

Consideriamo un sistema lineare $|C|$ per cui $n > 2\pi - 2$, $n = 2\pi - 2 + \delta$. Affinché il procedimento d'imposizione d'un p[un]to i-plo si possa applicare con frutto a $|rC|$ (per r grande) occorre che sia $\delta(\delta - 1) > 2\pi - 2$ (veramente ti avevo forse scritto $\delta(\delta - 2) > 2\pi - 2$ ma mi pare ora che la relazione sia da rettificare come qui ho fatto; del resto è lo stesso per il seguito).

Ora se applichiamo l'aggiunzione troviamo per $|C'|$,

$$\pi' = \pi - \delta + p^{(1)} - 1, \quad n' = 2\pi - \delta + p^{(1)} - 3,$$

da cui

$$\delta' = -(2\pi' - 2 - n') = \delta - (p^{(1)} - 1).$$

Dunque per $p^{(1)} = 2$ abbiamo

$$\pi' = \pi - (\delta - 1) \qquad \delta' = \delta - 1,$$

e quindi, posto

$$h = \delta(\delta - 1) - \pi$$
$$h' = \delta'(\delta' - 1) - \pi',$$

si ha

$$h' = h - (\delta - 1) = h - \delta'.$$

Questa relazione ci dice che se per $|C|$ $h < 0$, tanto peggio avverrà per $|C'|$ e quindi *l'aggiunzione ci allontana* dalle condizioni volute.

Sorge allora naturale il pensiero di ricorrere all'*operazione inversa dell'aggiunzione*. Questa ci permette invero di passare da un sistema avente certi δ', h' ad un sistema per cui

$$\delta = \delta' + 1 \qquad h = h' + \delta',$$

e quindi ripetuta convenientemente ci permette di rendere $h > 0$ come a noi occorre.

Osserverai che tanto più rapidamente si riesce se $p^{(1)} > 2$. A questo procedimento si può sollevare l'obiezione della possibilità di eseguire l'operazione inversa dell'aggiunzione. Ma siccome questa operazione si può effettuare mediante l'aggiunzione e la sottrazione (per mezzo del teor[ema] fond[amentale]),[1] così per $n > 2\pi - 2$, ed n e π assai grandi in confronto a p_n si riuscirà a vedere che le dimensioni virtuali dei sistemi (diremo) antiaggiunti si può rendere sempre grande ad arbitrio, sicché l'antiaggiunzione non abbia termine.

Che cosa ti pare?

Ti dirò ancora che l'antiaggiunzione può riuscire utile in varie questioni; p[er] e[sempio] essa dà subito il teor[ema] di R[iemann] R[och] per tutti i sistemi (contenenti il canonico) cui è applicabile.

Infine un'altra questione di diversa natura. Si tratta della dimostrazione del teor[ema]: Se $|C'|$ sega su C la s[eri]e canonica completa, $p_g = p_n$.

Tu hai dimostrato il teor[ema][2] con qualche restrizione per $|C|$, ricorrendo alla completezza della s[erie] caratteristica. Ora mi pare che si possa completare la cosa procedendo semplicemente così: Il sistema $|2C'|$ sega su C la serie 2-pla della canonica che è completa (v[ed]i lemma); così pure $|3C'|$... Allora le dimensioni effettive di $|2C'|$, $|3C'|$... sono uguali alle virtuali; ma poiché $|iC'| = |\{(i-1)C' + C\}'|$, basterà che quelle restrizioni in luogo che per $|C|$ si verifichino per $|C + (i-1)C'|$.

Il *lemma* sopra adoperato si giustifica subito purché si ricorra ad una C_n^π con soli p[un]ti 2-pli nel p[ia]no. Il sistema 2-plo minimo del $|C_{n-3}|$ agg[iunto] è costituito dalle C_{2n-6} che passano 2 volte pei p[un]ti 2-pli di C_n^π.

Affettuosi saluti anche all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[P.S.] Se la trattazione del caso $p^{(1)} = 2$ va bene e quindi sono razionali tutte le sup[erficie] $p^{(1)} > 1$, resta anche stabilito che è raz[ionale] o rigata ogni sup[erficie] contenente un sistema per cui $r \geq \pi$ con $p_g = 0$. In ogni caso si può trattare facilmente la questione della sup[erficie] a sez[ioni] di genere 3.

Contrariamente a quanto si credeva non pare punto facile di stabilire che per $p_n = -1$ l'aggiunzione termina quando mancano le curve pluricanoniche. Il caso $p^{(1)} = 1$ non sembra si possa eliminare appena $p_n < 0$, e pare una fortuna che sparisca per $p_n = 0$.

Dunque per $p_n = -1$ non si otterrebbe in sostanza nulla di più della raz[ionalità] delle involuzioni su rigate ellittiche.

Prima di chiudere la lettera ho voluto verificare i calcoli su cui basavo l'asserzione che per $\delta(\delta - 1) > 2\pi - 2$ il procedimento riesce applicabile ad $|rC|$. La cosa è un po' più imbrogliata di quanto mi sembrava, perché quella condizione si presenta subito come necessaria, ma non si vede che sia sufficiente. Tuttavia si riuscirebbe prendendo per la molteplicità da imporsi

$$i = r\sqrt{2\pi - 2 + \delta} = r\sqrt{n}$$

(dove in forza della $\delta(\delta - 1) > 2\pi - 2$ si ha $i < r\delta$).

Però la $\sqrt{\ }$ [radice] in generale non si potrà estrarre esattamente. Ma se $|C|$ è multiplo s-plo d'un altro sistema, si ha $i = rs\sqrt{n'}$, e si può valutare $\sqrt{n'}$ a meno di $\frac{1}{2rs}$. Questo se s è preso assai grande sembra condurre al resultato con una relazione poco *discosta* da $\delta(\delta - 1) > 2\pi - 2$, a cui l'antiaggiunzione condurrebbe.

Però bisogna ripensarci con calma.

[1] Cfr. Enriques 1896d, cap. 4, § 27.
[2] Cfr. Castelnuovo 1896a, § 6, 351-52.

422.

30 Nov[embre 18]98

Carissimo Guido

Pur troppo mi ero accorto ieri sera della svista per cui quel procedimento non riesce per $p^{(1)} = 2$, ma solo per $p^{(1)} > 2$.

Questo caso $p^{(1)} = 2$ è dunque intrattabile?

Intanto mi sono un po' occupato delle superficie a sezioni di genere 3. Quelle d'ord[ine] $n > 6$, hanno un $\delta(\delta - 1) \geq 6$ e perciò > 4 $(= 2\pi - 2)$. Sembra dunque che per esse il nostro metodo debba condurre a dimostrare che sono razionali o riferibili a rigate (quindi rigate o con un fascio di coni-

che...) Per $n = 5$ si vede subito che le sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] 3 (con C_3 2-pla) sono razionali o rigate. Per $n = 6$ credo si possa pervenire al resultato nel modo seguente.

Basta occuparci delle F_6 nell'ipotesi che non esistano ∞^2 F_3 subaggiunte, perché questo caso mi pare esaurito dalle tue ricerche.

Allora consideriamo una retta r che passi per un p[un]to della C_7 2-pla e su questa fissiamo 2 p[un]ti A, B. In ogni piano per r ho una C_3 aggiunta alla sezione C_6 di F_6, la quale descrive una F_{3+b} contenente b volte la r. Vi sono dei p[ia]ni tangenti per r i quali toccano F_{3+b} secondo tutta la r, e la segano ulteriormente in una C_2 contenente 6 p[un]ti 2-pli della C_7. Variando la r e il punto della C_7, si ottengono almeno ∞^2 C_2 le quali contengono 6 p[un]ti 2-pli (di C_7) e però non segano ulteriormente F_6. È facile escludere che le C_2 generino una sup[erficie] (quadrica). Esse invadono dunque tutto lo S_3, e quindi per ogni p[un]to di F_6 vi è qualche C_2 tutta contenuta in F_6; tali C_2 potendo anche essere spezzata. Segue che F_6 contiene ∞ rette o coniche ecc. Qualche modificazione se F_6 ha una curva 3-pla, caso che si esaurisce anche direttamente.

Il metodo impiegato mi pare notevole perché c'è da sperare che esso possa applicarsi ad altre questioni, riuscendo a costruire sopra sup[erficie] irregolari dei sistemi di curve non contenuti in sistemi lineari, sebbene la cosa non si presenti facile.

Chiederò al P[incherl]e che ti mandi il suo programma e se non lo ha ti manderò la mia copia. Anch'io sono stato richiesto dal Loria di dargli il programma del mio corso di G[eometria] sup[eriore] dell'anno scorso.[1]

Quest'anno comincerò dopo Natale, e mi propongo di svolgere per la scolaresca dell'anno passato (3 di cui ora 2 sono dottori) la geom[etria] su una sup[erficie]. Vorrei trattare il soggetto entrando in tutti i particolari per vedere quali semplificazioni possono introdursi.

Il giovane Bottari[2] sta studiando i p[ia]ni 3-pli ciclici $x\ y\ \sqrt[3]{f(x\ y)}$, e passerà poi agli altri p[ia]ni ciclici. Intanto i tipi dei p[ia]ni 3-pli pare che sieno dati dalle seg[uenti] curve di diramazione:

C_3 generale, C_6 con p[un]to 4-plo, C_{3n} costituita da $3n - 2$ rette per un p[un]to e da altre 2 rette. L'ultimo è il caso Jonquières dove (per un'osservazione di Wiman)[3] la curva di diramazione è spezzata.

Anche per gli altri p[ia]ni ciclici (quelli d'ordine primo sono in piccolo numero) pare che la questione si esaurirà facilmente sebbene il Bottari abbia poca iniziativa e si perda facilmente di coraggio di fronte a piccole difficoltà. D'altra parte bisogna considerare che non si può esigere una gran disinvoltura da un principiante.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina] Tuo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1899d.
[2] Cfr. Bottari 1899.
[3] Cfr. Wiman 1897.

423.

[s. d.]

Carissimo Guido

Ripreso in esame il caso più difficile $p^{(1)} = 2$, mi sono convinto che in questo caso non si può ottenere la soluzione. Partendo da un sistema di caratteri

$$\pi_i = \frac{i(i-1)}{2} + 1 \qquad r_i = \frac{i(i+1)}{2} - p \qquad (n_i = i^2),$$

ed applicando l'aggiunzione si deduce (se non ho sbagliato il calcolo) un nuovo sistema coi caratteri $\pi_{i-1}\ r_{i-1}\ n_{i-1}$. Dunque non si ottiene nulla, ossia questo soltanto: che il numero i può supporsi non solo grande, ma anche piccolo ad arbitrio.

Allora se si fa $p = 1$ si ottiene una rete di curve di genere 2 per $i = 2$; se si fa $p = 2$ si ottiene un fascio di curve di gen[ere] 2 e siccome si ha allora la rappresentazione su un p[ia]no 2-plo la questione si può riguardare come risolta, ed è molto probabile si arrivi soltanto a rigate o sup[erficie] raz[ionali].

Per $p = 3$, $i = 3$ si ha un sistema ∞^3 di gen[ere] 4 e gr[ado] 9, da cui si ottiene in S_3 una F_9 a sezioni di gen[ere] 4, curva 2-pla C_{24} che sta sopra *una* φ_6 (aggiunta) secante ulteriore F_9 in una C_6 di gen[ere] 2.

Ora si può tentare la costruzione di una tale F_9 che avrebbe il $p^{(1)} = 2$ (≥ 2 e quindi $= 2$) $p_n = -p = -2$, e perciò non sarebbe certo né razionale né rigata. Per riuscirvi bisognerebbe partire da una C_6 di gen[ere] 2, mandare per C_6 una φ_6 e segare φ_6 con una φ_9 la quale passi per C_6 e tocchi ulteriormente φ_6 secondo una C_{24}; vedere poi se la C_{24} è 2-pla per una F_9. La cosa non è facile, ma forse è tentabile.

Affettuosi saluti anche all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

424.

4 Decembre [18]98

Carissimo Guido

Ho ripensato ancora, con poco frutto alle sup[erficie] $p^{(1)} = 2$. Riuscirei soltanto a trovare un massimo di p $(= -p_n)$ dato un sistema di caratteri π, n. Ma ciò dice poco.

Quanto alle sup[erficie] a sez[ioni] di genere 3 d'ordine $n > 6$ ho verificato con numeri l'applicazione del nostro procedimento pel caso più sfavorevole $n = 7$. Basta allora prendere il sistema r-plo delle sezioni piane, ove $r = 3p$ ed imporre un punto i-plo dove $i = 8p$.

Per le F_6 con C_7 2-pla, aventi genere negativo, si ottengono ∞^1 coniche in piani passanti per un qualsiasi punto O di C_7, e contenenti ciascuno *altri 6* punti di C_7. Ora se le dette coniche stanno su una sup[erficie] ((F_3 rigata, si prova che la retta 2-pla di F_3 è 2-pla per F_6, e poi partendo da un p[un]to O della retta 2-pla si dovrebbe avere su F_3 una conica non incontrante la retta 2-pla il che è assurdo)).[1]

Si stabilirebbe dunque che le sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] 3 son razionali o riferibili a rigate.

Quest'ultimo caso porta allo studio dei sistemi ∞^3 di genere 3 sopra una rigata di genere $p = 1$ o $p = 2$ (per $p = 3$ si hanno unisecanti), allo scopo di esaurire la questione proiettiva.

Ora per $p = 2$ pare che le curve di genere 3 sieno iperellittiche il che condurrebbe ad un assurdo se il sistema è semplice.

Per $p = 1$ considero il sistema aggiunto ad un sistema $|C|$ di genere $\pi = 3$ e grado $n > 6$, ed ho che il suo genere vale

$$\pi' \leq 3(\pi - 1) - n + 1 \qquad p^{(1)} = 1$$

ossia

$$\pi' \leq 0;$$

donde consegue che il sistema agg[iun]to a $|C|$ si spezza, e pare che lo spezzamento debba aver luogo in generatrici della rigata. Ma perché ciò accada bisogna che le C sieno *bisecanti* le dette generatrici.

In conclusione si avrebbe che le sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] 3 non razionali sono rigate o contengono un fascio ellittico di coniche.[2]

Ho ricevuto ieri da E[ugène] Cosserat (a Tolosa) una lettera gentilissima con cui mi invita a dargli qualche lavoro per gli Annales de Toulouse di cui è direttore (come ha fatto il Bianchi).[3] Gli ho risposto ringraziando e promettendogli che non lascerò sfuggire una qualche occasione che spero non lontana.[4]

Siccome in passato avevo un po' pensato ai gruppi d'omografie spaziali,[5] ho scritto al Bagnera per comunicargli un'osservazione che feci in proposito, che potrà forse riuscirgli utile. Condivido pienamente la tua opinione relativa a questo giovane, che negli ultimi lavori[6] ha trattato questioni veramente serie, e per quanto si può giudicare, non facili.

Il Berzolari mi scrive da Torino che il M[inistr]o ha finalmente esaudito la Fac[ol]tà dando corso alla sua domanda di promozione.[7] Perciò egli è incerto se concorrere a Pavia e non vorrebbe in ogni caso esporsi ad alcun rischio. Quindi mi domanda se io prendo parte al concorso.

Gli ho risposto che non ne ho intenzione e lo ho pregato tuttavia di volermi avvertire se rinunzia a quel concorso.[8] Così mi lascio l'adito ad un possibile pentimento pel caso in cui sapessi che non vi sono più concorrenti seri (del Gerbaldi sai nulla?). Infatti se questa circostanza si avverasse in modo ch'io ne fossi informato avanti il 15 Decembre non credi che sarebbe il caso di discutere se tornar sopra alla decisione presa?[9]

Riuscendo vincitore tutti gli inconvenienti si eliminerebbero perché io potrei rinunziare incoraggiando così la Facoltà ad appoggiarmi. Sai che è stata riconosciuta per Bologna l'applicazione delle leggi locali.[10] Ora se io fossi nominato ord[inario] a Pavia la Fac[ol]tà potrebbe chiedere la mia nomina ad ord[inario] qui in forza di quel concorso, sebbene non si tratti della stessa cattedra (le leggi locali applicate ora non esigono nemmeno la solita procedura), e così potrei guadagnare un anno. Se poi il M[inistr]o non acconsentisse potrei ancora rinunziare a Pavia col patto che si procedesse alla nomina della mia commissione. E così la Fac[ol]tà avrebbe una prova del mio attaccamento.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina], anche da parte della Luisa che ti ringrazia dell'informazione.

Tuo
Ghigo

[1] Il brano tra doppie parentesi tonde, posto nell'originale in calce alla pagina e richiamato con asterisco, sostituisce quattro righe cancellate nel testo. Nel corso della lettera compaiono ulteriori correzioni e cancellature di minor entità.

[2] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1901, § 16, 130-31.

[3] Cfr. Bianchi 1897a.

[4] Sulle «Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse» sarà pubblicato l'articolo Enriques 1901a.

[5] Cfr. in particolare p. 194, let. 209 (30.5.1895).

[6] Cfr. p. 374, nota 1 a let. 416 (14.11.1898).

[7] Si tratta della promozione a professore ordinario.

[8] Cfr. in particolare p. 367, let. 410 (27.8.1898).

[9] Cfr. p. 371, let. 414 (8.11.1898) e p. 375, let. 417 (17.11.1898).

[10] La Legge Casati sull'università (cfr. p. 175, nota 1 a let. 178, 3.2.1895) era stata emanata nel 1859, inizialmente solo per il Regno di Sardegna e per la Lombardia: ad essa, con l'unificazione dell'Italia, le varie università avrebbero dovuto uniformare i rispettivi ordinamenti. Questa legge non fu però estesa a Bologna, dove vigevano le «leggi locali». A Bologna non poteva dunque essere applicata alcuna limitazione al numero dei professori ordinari di ciascuna facoltà, come invece stabiliva la Legge Casati.

425.

6 Decembre [18]98

Carissimo Guido

Il teor[ema] di Humbert[1] si può stabilire invece che per le sup[erficie] senza integrali di Picard, per le sup[erficie] regolari.[2]

Supponi che su F vi sia una ∞^1 di curve C, e sia $p_g = p_n$.

Nell'ente ∞^1 prendo una g_n^1; così ho una serie *razionale* di gruppi di C, la quale (per la mia nota del Circolo di Palermo)[3] è contenuta in un sistema lineare $|K|$. Considero il subaggiunto $|K'|$. Dico che $|K'|$ è subaggiunto ad ogni altro sistema $|K_1|$ costruito partendo da un'altra g_n^1 della nostra ∞^1 di C. In primo luogo detto π il genere di $|K|$ e di $|K_1|$, si ha che le K' segano una K o una K_1 in $2\pi - 2$ p[un]ti. La serie segata su K è $\infty^{\pi-1}$ $(g_{2\pi-2}^{\pi-1})$; quella segata su K_1 può essere meno ampia? No, perché il sistema residuo di K_1 sarebbe più ampio del residuo di K e questo (potendo variare $|K_1|$ in una serie continua che comprende $|K|$) dà luogo ad un assurdo.

Dunque $|K'|$ è subaggiunto anche a $|K_1|$.

Ora costruisco un sistema $|L|$ partendo da una g_{2n}^1 e trovo che $|L'|$ è subaggiunto agli analoghi $|L_1|$. Infine $|L' - K'|$ fornisce un sistema lineare che contiene tutti i gruppi di n C, onde anche le C sono contenute in un sistema lineare.

Vedrai come il teor[ema] stabilito permetta di costruire un'amplissima classe di superficie irregolari, partendo da una qualsiasi curva di genere $p > 0$. Ma probabilmente tutte queste sup[erficie] hanno un $p_g > 0$ e quindi non ci serviranno a costruire l'esempio che cerchiamo di sup[erficie] $p^{(1)} = 2$.

Ricevo ora la tua cartolina. Di ciò che mi scrivi ero informato appunto dalla lettera del Berz[olari]. Ora non muoverò un passo se non riceverò l'assicurazione del Berz[olari] che egli non concorre (data la mia astensione è probabile invece, secondo quanto mi scrive, che egli concorra). Se poi avrò dal Berz[olari] una tale assicurazione, dopo avere parlato col P[incherl]e, potrei spedire la domanda a te invece che direttamente al M[inistr]o, e tu potresti farmi il piacere di consegnarla il giorno 15 se il Gerb[aldi] non ha presentato la sua domanda prima di quel giorno, il che forse, sul luogo, si potrà sapere.

Ho ricevuto anch'io la recensione di Nöther[4] del trattato di Picard.

Sai se il Cr[emona] abbia presentato ai Lincei la mia 2ª nota[5] sulle sup[erficie] con un fascio di curve razionali? Da molto tempo ho riveduto le bozze della 1ª,[6] ma non ho ancora ricevuto quelle della 2ª.

Saluti cordiali anche all'E[lbina] Tuo

Ghigo

[1] Cfr. Humbert 1893b, 362; 1894c, 195.
[2] Cfr. Enriques 1899b.
[3] Enriques 1896a.
[4] Noether 1898.
[5] Enriques 1898d, presentato il 4 dicembre.
[6] Enriques 1898c.

426.

[s. d.]

Carissimo Guido

Non ho più risposto alla tua, perché ho avuto durante questi giorni il Levi-Civita venuto a trovarmi da Padova.

Comincio col dirti subito che il Berzolari mi ha scritto di aver mandato i titoli pel concorso di Pavia, e così la questione resta definitivamente chiusa.

Vengo ora alle sup[erficie] con un sistema di curve non contenuto in uno lineare. La tua obiezione al mio ragionamento non mi pare seriamente che abbia luogo di esistere, perché il principio ch'io adopero è quello della conservazione del numero. Dato un sistema variabile $\infty^r |C|$, per r punti generici passa *una* C, per un sistema particolare $|C|$ si potrà avere per gli r p[un]ti ∞ C invece di *una*, ma una almeno ci sarà sempre. Sei persuaso?

Il tuo ragionamento è certo più semplice, ma forse la semplicità è compensata dal fatto che il tuo teor[ema] (su cui ti appoggi) richiede maggiori sviluppi per essere dimostrato, tantoché in una trattazione didattica p[er] esempio la mia dimostrazione permetterebbe di dare subito una classe di e[sempi] di sup[erficie] con $p_n < p_g$ appena posta la nozione di p_n e p_g.

Io avevo redatto, tre giorni fa, la brevissima nota che vorrei pubblicare all'Ist[ituto] lomb[ardo] o nel Circolo di Palermo. Se tu non hai difficoltà aggiungerei in fine la semplificazione del ragionamento da te indicata.[1]

Ho pensato qualche momento alle sup[erficie] con un gruppo infinito di trasformazioni. Forse il problema si potrebbe abbordare per la via seguente.

Prendiamo sulla sup[erficie] una curva razionale che abbia per esempio r p[un]ti 2-pli, e applichiamo una serie ∞^1 di trasf[ormazion]i in guisa che quei p[un]ti 2-pli vadano in posizioni fissate $A_1 \dots A_r$. Avremo ∞^1 curve raz[ionali] con r p[un]ti 2-pli fissi e p[un]ti 2-pli (o multipli) variabili; queste son contenute in un sistema di gen[ere] π e grado $n > 2\pi - 2$ (perché nascono da un'involuzione su una rigata) dotato di r p[un]ti base 2-pli. Questi si possono togliere operando prima l'aggiunzione e poi l'inversa dell'aggiunzione; allora si avrà un sistema di gen[ere] $\Pi = \pi + r$ e grado $N = n + 4r$. Si ha che la differenza $N - 2\Pi = (n - 2\pi) + 2r$.

Basterebbe dunque che r potesse esser preso sufficientemente grande in confronto (alle sing[olari]tà variabili delle curve da cui dipende il) π, per trovarci nelle condizioni di applicare il nostro metodo.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[P.S.] Domani vado probabilmente a Firenze.
Ho ricevuto ieri le bozze della 2ª Nota lincea.[2]

[1] La nota in questione (Enriques 1899b, che porta la data dicembre 1898) fu pubblicata sui «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo». Nell'ultimo paragrafo è riportato il suggerimento di Castelnuovo.
[2] Enriques 1898d.

427.

14 Decembre [18]98

Carissimo Guido

L'idea che ti ho appena abbozzata nell'ultima lettera, relativa alle sup[erficie] con ∞ trasf[ormazioni], mi pare possa condurre al seguente svolgimento.

La F ammetta una serie ∞^1 di trasf[ormazioni] π, che non genera un gruppo.

Poniamo che le π abbiano σ p[un]ti fondamentali. Mi pare si possa concludere che $\pi_r \dots \pi_2 \pi_1$ avrà (al più) $r\sigma$ p[un]ti fond[amental]i.

Per conseguenza (partendo da una curva raz[ional]e, suppongo con t p[un]ti multipli), si avranno ∞^{2r+1} curve razionali con $(2r+1)\sigma + t \leq 2rs$ p[un]ti multipli, dove r è grande ad arbitrio ed s fisso.

Io fisso r di questi p[un]ti; quelli di molteplicità i ($i_1\ i_2 \dots$) più elevata ($\geq b$), lasciando variare i p[un]ti di molteplicità $j \geq b$. Ottengo un sist[ema] ∞^1 di curve raz[ional]i, contenuto in un sist[ema] lineare $|C|$ di gen[ere]

$$\pi = \Sigma \frac{j(j-1)}{2}$$

e di un certo grado n; pongo

$$\delta = n - (2\pi - 2).$$

Ora (come ti ho detto) a $|C|$ si possono togliere i p[un]ti multipli i-pli. Si ottiene un sistema lineare $|K|$ che ha i caratteri

$$\Pi = \Sigma \frac{j(j-1)}{2} + \Sigma \frac{i(i-1)}{2}$$

$$N = n + \Sigma i^2$$

$$\Delta = N - (2\Pi - 2) = n - (2\pi - 2) + \Sigma i^2 - \Sigma i(i-1) = \delta + \Sigma i.$$

Ora

$$2\Pi = \Sigma i^2 + \Sigma j^2 - \Sigma i - \Sigma j \leq \Sigma i^2 + 2rsb$$

$$\Delta(\Delta - 2) = (\delta + \Sigma i)(\delta - 2 + \Sigma i) =$$
$$= \delta(\delta - 2) + (2\delta - 2)\Sigma i + (\Sigma i)^2 \qquad (\Sigma i \leq rb).$$

Ma

$$(\Sigma i)^2 = \Sigma i^2 + 2\Sigma ii' \geq \Sigma i^2 + (r^2 - r)b^2.$$

Dunque

$$\Delta(\Delta - 2) - 2\Pi \geq (r^2 - (2s + 1)r)b^2 + (2\delta - 2)rb + \delta(\delta - 2).$$

Se dunque si prende r molto grande, restando fissi s, δ e potendo crescere b, il segno di $\Delta(\Delta - 2) - 2\Pi$ sarà positivo, anzi si potrà rendere il $\Delta(\Delta - 2) - 2\Pi$ grande quanto si vuole. Questa condizione renderebbe applicabile il nostro procedimento ad un multiplo del sistema $|K|$.

Ti persuade?

Sarebbe una bella cosa se il nostro metodo potesse esaurire così la questione delle sup[erficie] con ∞ trasf[ormazioni], compensandoci in parte della lacuna che resta per $p^{(1)} = 2$.

Tu solleverai forse qualche dubbio sulla possibilità di togliere a $|C|$ i punti base i-pli, però in ogni caso (applicando aggiunzioni e operazioni inverse) si potrà costruire il sistema multiplo $|mC|$ da cui sono tolti i p[un]ti base, e se questo sistema venisse tuttavia ad avere dei p[un]ti base (che virtualmente non contano) il nostro procedimento sarebbe applicabile, anzi in condizioni più vantaggiose, perché pare che la dimensione virtuale del sistema possa essere calcolata mediante le operazioni fatte.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]. Tuo

Ghigo

428.

16 Decembre [18]98

Carissimo Guido

Mi pare che il Δ sia necessariamente positivo (cioè $N > 2\Pi - 2$) come per qualunque sistema lineare contenente ∞ curve razionali. Spero dunque che la questione delle sup[erficie] con ∞ trasf[ormazioni] possa condursi a termine.

Ora, se tu credi, si potrebbe redigere il lavoro nel seguente modo:

1) Metodo per ricondurre a rigate o sup[erficie] raz[ional]i le sup[erficie] che contengono un sistema di dim[ensione] r e gen[ere] π tale che esi-

sta un i per cui

$$r > \frac{i(i+1)}{2} \qquad \pi \leq \frac{i(i-1)}{2}.$$

2) Applicazione alle sup[erficie] col $p^{(1)} > 2$. Casi $p = 1$, $p = 2$ ($p = -p_n$).

3) Applicazione alle sup[erficie] contenenti un sistema di gr[ado] n e gen[ere] π dove (essendo $\delta = n - (2\pi - 2)$)

$$\delta(\delta - 2) > 2\pi.$$

In particolare enunciato relativo alle sup[erficie] a sezioni di genere 3 d'ord[ine] ≥ 7 (il caso $n = 6$ (ed $n = 5$) lo potrei poi trattare a parte in un lavoretto sulle sup[erficie] a sezioni di gen[ere] 3 che potrei forse dare al Cosserat per gli Annales de Toulouse).[1]

4) Sup[erficie] con ∞ trasf[ormazion]i.

Il tutto potrebbe essere esposto concisamente in 2 note lincee. L'ultima parte (ammesso che tutto vada bene) potremmo forse trattarla in modo un po' più diffuso, redigendo insieme una nota pei Comptes rendus.

Se la disposizione ti persuade, io potrei intanto cominciare la redazione del lavoro, nel quale poi tu introdurresti quelle modificazioni o correzioni che ti sembrassero opportune.[2]

Ho dimenticato di prendere l'indirizzo del Burkhardt. Sapresti darmelo? Debbo scrivergli per avere una proroga di due o tre mesi alla consegna dell'Art[icolo] sui Fondamenti della Geom[etria].[3] Credo del resto che ciò non rechi disturbo alla redazione, visto che si fa uscire un fascicolo ogni 3 mesi.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[P.S.] La lettera non essendo stata impostata ieri, aggiungo due righe per rispondere alla tua ricevuta stamani.

Ho già scritto (ieri stesso) al Guccia se vuole la mia Nota pel Circolo e può pubblicarla presto, ma tratterrò ad ogni modo il manoscritto, e sarò lietissimo se la proposizione stabilita potrà completarsi col tuo concorso nel modo interessante che mi comunichi.[4] Pensandoci un po' mi pare che la cosa venga appunto come tu dici purché si stabilisca il seg[uente] lemma: sopra una sup[erficie] dato un $|C|$ (regolare?) e considerate le serie segate su C da C, $2C$, $3C$ ..., la somma delle deficienze è $p_g - p_n$.

Bada che bisogna anche riferirsi espressamente al caso che le ∞^1 γ non appartenenti ad uno stesso sist[ema] lineare sieno irriducibili. Infatti una bella conseguenza del tuo teor[ema] sarebbe:

ogni sistema ∞^2 è contenuto in un sistema lineare, perché ad esso appartengono serie di genere $> p_g - p_n$; ora tale proposizione non sarebbe vera se le curve del sistema posson essere riducibili.

Di nuovo saluti affettuosi.

[1] Cfr. p. 385, let. 424 (4.12.1898).

[2] Le difficoltà nel trattare gli argomenti qui indicati, che saranno evidenziate nelle lettere che seguono, costrinsero Castelnuovo ed Enriques a rinviare la pubblicazione del lavoro. Gli argomenti e i risultati accennati nelle lettere di questo periodo saranno annunciati in parte in Enriques-Castelnuovo 1900a ed esposti in Enriques-Castelnuovo 1901.

[3] Enriques 1907d.

[4] Cfr. Enriques 1899b e p. 388, let. 426 (s.d., 1898).

429.

[s.d.]

Carissimo Guido

La tua offerta è molto generosa e gentile, ma non mi par giusta.

In primo luogo è molto discutibile il grado di partecipazione che ciascuno di noi ha nella questione, ma all'infuori di ciò, quando mai, lavorando insieme, abbiamo pesato colla bilancia quello che ciascuno di noi aveva messo del suo?

Lascia dunque che rediga il lavoro in nome collettivo.[1] Né per questo tu devi stancarti in alcun modo; io farò la redazione completa e tu a tutto tuo comodo (giacché non c'è nessuna fretta) vedrai se ti pare che tutto vada bene. Già io penso che lo svolgimento verrà più semplice di quel che credi. Seguita intanto ad occuparti dell'art[icolo] per l'Enciclopedia,[2] che è pure un lavoro in comune!

Ho preparato in questi giorni nuove lezioni di G[eometria] descrittiva sulla cubica e la quartica gobba (di 1ª sp[ecie]). Mi sono anche occupato della rigata cubica F_3 che si studia bene colla rappresentazione.[3] Qui ho incontrato una questione elegante.

Ho visto recentemente (mi pare nel Bullettin de la Soc[iété] math[ématique])[4] che la F_3 è unilatera tranne nel caso particolare di Cayley. Ora sarebbe bellino dimostrare il teor[ema] colla rappresentazione, ciò che non mi sembra difficile; forse il metodo si estenderebbe alle rigate di gr[ado] n con retta $(n-1)$-pla che nel caso generale sarebbero unilatere o bilatere secondo la disparità o parità di n. In ogni modo sarebbe un titolo non indecoroso di G[eometria] descr[ittiva]. Ma per ora non posso occuparmi della cosa.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina]

Tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Se possiedi il Dirichlet[5] mi faresti piacere a verificare se l'equazione di Pell che ammette sempre ∞ soluzioni intere è $u^2 - Dv^2 = 1$ dove D è un intero qualunque, non quadrato perfetto. È infatti a questa proprietà ch'io farei appello per le sup[erficie] con un sistema in cui $\delta(\delta - 1) > 2\pi - 2$.

[1] Cfr. p. 392, nota 2 a let. 428 (16.12.1898).
[2] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[3] Le lezioni di Geometria descrittiva, già litografate, furono poi pubblicate nel 1902. In particolare per l'argomento indicato cfr. Enriques 1902, cap. 6, § 58.
[4] Cfr. Dumont 1898; Delaunay 1898.
[5] Dirichlet 1863, cap. 8.

430.

22 Dec[embre 18]98

Carissimo Guido

Il nostro procedimento urta in una obiezione molto grave che tu avevi visto ed a cui avevo avuto torto di non dare importanza.[1]

Imponendo a $|C|$ un p[un]to i-plo O, può darsi che la parte fissa di genere virtuale ≤ 0 sia costituita da una curva multipla di gen[ere] > 0 con connessione negativa. Mi pare proprio che questo caso non si possa escludere. Allora il procedimento non si può condurre a termine, né può più applicarsi il tuo elegante ragionamento fondato sul teorema di Humbert.

Credo tuttavia che in un caso si possa condurre a termine il procedimento quando già si sappia che la sup[erficie] non ha integrali per modo che le si può applicare il teor[ema] di Humbert.[2]

Ed ecco come:

Imponendo O i-plo a $|C|$, abbiamo delle C spezzate in C_1 variabile e C_2 fissa; C_1 ha O j-plo e C_2 ha O s-plo, $j + s = i$. Se C_1 non si compone di curve raz[ional]i (di un fascio), essa ha il genere virtuale $\pi_1 \geq 1$ e perciò C_2 ha il genere virtuale $\pi_2 \leq 0$.

Ora al variare di O, $|C_1|$ varia con continuità e perciò è contenuto in un sistema irriducibile $|C'|$ che non ha molteplicità in O, di cui il genere

$$\pi' = \pi_1 + \frac{j(j-1)}{2} \geq \frac{j(j-1)}{2} + 1.$$

Le C segano su C' una serie di grado $j^2 + js$ $\{C = C_1 + C_2\}$, la quale (si vede facilmente) è non speciale; dunque la dim[ensione] di $|C - C'|$ è

$$r' \geq r - j^2 - js + \frac{j(j-1)}{2}; \qquad r' \geq r - \frac{j^2}{2} - \frac{j}{2} - js.$$

Ma se

$$r > \frac{i(i+1)}{2},$$

poiché

$$i = j + s, \qquad \frac{i^2 + i}{2} = \frac{j^2}{2} + \frac{j}{2} + js + \frac{s(s+1)}{2},$$

si avrà

$$r' > \frac{s(s+1)}{2}.$$

Ora questo porta a un assurdo, perché imponendo a $|C - C'|$ il p[un]to O s-plo si avrebbero ∞ curve C_2 invece di *una sola* (parte fissa di $C_2 + C_1$).

Dunque se alla sup[erficie] è applicabile il teor[ema] di H[umbert], la parte variabile C_1 è composta di curve raz[ional]i ecc.

La restrizione imposta alla sup[erficie] a priori è forse indispensabile. Pare infatti che si possa concepire una sup[erficie] contenente un fascio irraz[ionale] di curve ellittiche per modo che imponendo O i-plo a $|C|$, si stacchi una curva fissa del fascio contata 2 volte. Ma ad ogni modo si può tentare se direttamente si riesca a vedere che $|C_1|$ è contenuto in un sistema irriducibile non avente O come p[un]to multiplo, che è quanto basta.

Se ciò non può vedersi la maggior parte dei nostri resultati sfuma.

Resta solo il caso delle sup[erficie] con ∞^1 curve razionali sistema ellittico o di genere 2, casi che d'altronde si possono forse trattare direttamente (almeno il 1°).

Resta però ancora il resultato per le sup[erficie] con ∞ trasf[ormazioni], ma cade tutto quanto si riferisce al $p^{(1)}$, alle sup[erficie] a sez[ioni] di gen[ere] 3 ecc.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. in particolare p. 388, let. 426 (s.d., 1898) e p. 389, let. 427 (14.12.1898).
[2] Cfr. Humbert 1893b, 362; 1894c, 195.

431.

25 Dec[em]bre [18]98

Carissimo Guido

Sono d'accordo che convenga di rimandare la pubblicazione del lavoro[1] a quando si sia risoluta la questione più completamente: forse esistono delle involuzioni sopra sup[erficie] rappresentanti le coppie di punti d'una curva C, aventi il $p^{(1)} > 1$; forse queste involuzioni vanno cercate in rela-

zione a C di moduli particolari. Quando si avesse qualche esempio in proposito il nostro procedimento ci direbbe che ogni sup[erficie] $p^{(1)} > 2$, non razionale, contiene una serie di curve non appartenenti a un sistema lineare.

Però in attesa di giungere a resultati più completi sulle sup[erficie] ($p^{(1)} > 1$) aventi un sistema in cui $n > 2\pi - 2$, credo potrebbe essere utilmente pubblicata la trattazione delle sup[erficie] con ∞ trasf[ormazion]i, che altrimenti i francesi potrebbero portarci via.

Ho ripensato a tutto e tutto mi pare che vada bene: veramente io ricorrevo[2] alle soluzioni intere dell'eq[uazio]ne $t^2 - Du^2 = 1$ (ne ammette o no tale eq[uazio]ne? non capisco se nella $t^2 - Du^2 = z^2$ supponi z dato oppure variabile), ma per il caso che qui occorre credo che si rimedi facilmente, costruendo in modo diretto i numeri che ci occorrono.

Avendo ricevuto la partecipazione ufficiale dell'avvenimento che si prepara, faccio a te e all'Elbina i più cordiali augurî, desiderando la nuova edizione simile alla prima![3]

Ti saluto affettuosamente Ghigo

[1] Cfr. p. 392, nota 2 a let. 428 (16.12.1898).
[2] Cfr. p. 393, P.S. a let. 429 (s.d., 1898).
[3] L'allusione è forse all'attesa della secondogenita dei coniugi Castelnuovo, Maria, nata il 15 luglio 1899.

432.

3 Gennaio [18]98[1]

Carissimo Guido

Da varii giorni sto tentando per tutti i versi di cavare qualcosa dal nostro procedimento di riduzione consistente nell'imporre un punto i-plo ad un sistema di genere $< \frac{i(i-1)}{2}$, ma non son venuto a capo di nulla.

Il ragionamento che ti avevo comunicato[2] non regge perché non ho tenuto conto delle intersezioni fuori del punto i-plo della parte variabile e della parte fissa del sistema ottenuto.

Per conseguenza anche la questione delle sup[erficie] con trasf[ormazioni] resta di nuovo incagliata.

Vuoi vedere come si presentano le componenti multiple di genere negativo?

Prendi una curva K di gen[ere] 0 con O ν-plo; al variare di O essa varia in un sistema lineare di grado $\nu^2 - \nu + \lambda$ (con $\lambda \geq 0$); ora il genere di $|2K|$ è

$$2\omega + 2\nu^2 - 2\nu + \lambda - 1,$$

sicché imponendo in O la molteplicità 2ν si ha una curva (K^2) di genere virtuale

$$2\omega + 2\nu^2 - 2\nu + \lambda - 1 - \frac{(4\nu^2 - 2\nu)}{2} = -\nu + 2\omega + \lambda - 1,$$

e questo può ben essere negativo anche per $\omega > 0$.

Vedi anzi che per $\nu = 1$, $\lambda = 0$, $\omega = 1$ la curva K varia in un fascio di curve ellittiche, ma per $\nu > 1$ varia in un sistema più elevato.

Non ho perduto del tutto la speranza di riuscire in qualche modo a veder qualcosa, ma per ora le probabilità maggiori sono perché non si riesca a nulla. Peccato!

Ti saluto affettuosamente tuo

Ghigo

[1] In realtà 1899.

[2] Cfr. p. 393, let. 430 (22.12.1898).

433.

12 Gennaio 1899

Carissimo Guido

La missione che mi affidi non è facile a compiersi, anche perché io vivo fuori dell'ambiente delle cliniche e non conosco i prof[essor]i Murri e Albertoni e i loro assistenti. Il prof. Rovighi che probabilmente è informato della cosa, come sai non era in buoni rapporti con Tullio[1] tantoché mi pare imprudente rivolgermi a lui. Il Tizzoni che vedo più spesso è nemico acerrimo del Murri e dell'Albertoni.

Tuttavia non mancherò di cercare le occasioni più favorevoli, ma non posso prometterti di riuscir presto.

Intanto ho assunto qualche informazione dai padroni della casa ove Tullio abitava l'anno scorso, i quali sono miei amici e persone molto per bene.

Tullio prima di partire ha detto loro che lasciava Bologna perché qui c'è poco da fare, soggiungendo «già è tutta una camorra». Ultimamente poi ha scritto da Genova ai medesimi che anche del nuovo ambiente non è molto soddisfatto avendo poco da fare.

Quanto al lavoro che Tullio faceva l'anno scorso col Pugliese, se non hai gran premura, posso aspettare la pubblicazione dell'annuario (che dovrebbe uscir presto) per vedere se il titolo di esso vi si trovi registrato.

Se mi autorizzi a farlo, io posso scrivere a Tullio (dopo la sua partenza non ci siamo corrisposti) in modo ben inteso che non appaia ch'io agisca per suggestione; forse egli stesso vorrà parlarmi colla confidenza altre volte dimostratami.

Io credo veramente che un fatto preciso determinante la partenza di Tullio non vi sia stato; ma egli è vissuto sempre mal volentieri in un ambiente

piuttosto ostile dove era considerato come un estraneo venuto a fare la concorrenza ai bolognesi; forse anche il suo carattere chiuso e la sua attitudine riservata, aliena dal prender parte ai pettegolezzi politici e d'altro genere che sono qui all'ordine del giorno, gli ha nociuto.

Comunica pure quanto ti ho scritto a tuo Zio, presentandogli i miei ossequi, e digli che sono dolente di non potere per ora dirgli di più.

Saluti affettuosi a te e all'E[lbina].

Ghigo

[1] Tullio Luzzatti.

434.

18 Gennaio [18]99

Carissimo Guido

Da varii giorni volevo scriverti ed una lettera della Luisa per l'Elbina aspettava sul mio tavolo di unirsi alla mia. Aspettavo per darti la risposta di Pugliese che sono stato cercare e non ho trovato. Lo cercherò di nuovo presentandomi a lui colla scusa di domandargli l'indirizzo di Tullio per avere l'informazione che desideri.

Ci avviciniamo alle vacanze di Carnevale; essendoci mossi da poco ci proponiamo questa volta di restare a Bologna. La nostra decisione cambierebbe soltanto in vista del piacere di incontrarci con voi, se vi decideste a venire a Firenze; ma per le condizioni dell'Elbina supponiamo che rinunziate ad effettuare la gita. In ogni modo ti sarò grato se vorrai informarmi delle vostre deliberazioni cui le nostre saranno subordinate.

Non so darmi pace che sieno sfumate tutte le conseguenze aspettate dal nostro procedimento anche per le sup[erficie] con ∞ trasf[ormazioni], ed ho ripensato un po' alla cosa senza cavarne nulla.[1]

Ho cominciato il mio corso di G[eometria] Sup[eriore] sulla teoria delle superficie, trattando le prime generalità sui sistemi lineari e facendo un continuo raffronto fra il piano e le sup[erficie] più generali.

Del resto mi occupo per l'Art[icolo][2] dell'Enciclopedia «Sui fondamenti». In questi giorni ho schizzato il disegno del cap[itolo] che si riferisce ai fondamenti della Geometria metrica, comprendente forse il più bel gruppo di ricerche.

Il mio assistente Bonola ha riunito sull'argomento una lunga bibliografia che sarà pubblicata nel Bollettino di Loria.[3]

Ti saluto cordialmente

Ghigo

[1] Cfr. in particolare p. 392, nota 2 a let. 428 (16.12.1898) e p. 395, let. 432 (3.1.1899).
[2] Enriques 1907d.
[3] Bonola 1899.

435.

28 gennaio [18]99

Carissimo Guido

Ti parrà strano, sono tornato 3 volte a cercare il Dr Pugliese al laboratorio inutilmente; infine oggi ho potuto vederlo. Gli ho detto che desideravo avere l'indirizzo di Luzzatti e che mi ero diretto a lui sapendo che avevano fatto un lavoro insieme. Così senza metterlo in alcun sospetto ho potuto sapere ciò che t'interessa; il lavoro non è ancora pubblicato, il Pugliese sta ora redigendolo e spera che la pubblicazione avvenga presto.

Non avrei potuto rivolgere al Pugliese (che non conoscevo) altre domande senza correre il rischio di metterlo in sospetto. La domanda che ho fatto anche venisse all'orecchio di Tullio non compromette nulla.

Redigendo l'Art[icolo] per l'Enciclopedia[1] ho incontrato la questione se esiste una sup[erficie] dello S_3 ordinario sopra la quale valga la Geometria del piano iperbolico o ellittico completo.[2] In proposito ho avuto una corrispondenza col Bianchi che mi ha fatto rilevare tutta la difficoltà del problema (insoluto), che si riattacca alla questione dei limiti degli integrali delle equazioni a derivate parziali.

Noi restiamo qui tutto il Carnevale; in questo momento la nostra presenza a casa riuscirebbe inopportuna. Ma, come ti puoi immaginare, la malattia di Paolo sebbene segua il suo corso regolare mi tiene in pensiero.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina

Ghigo

[1] Enriques 1907d.

[2] Alla questione posta da Enriques fu data risposta negativa da Hilbert 1901.

436.

[s.d.]

Carissimo Guido

Il De Franchis mi scrive pregandomi di comunicarti un suo desiderio: nel caso che Fano lasciasse il tuo assistentato per un prossimo collocamento,[1] il De F[ranchis] aspira a quel posto che gli darebbe mezzo di proseguire i suoi studi sotto la tua guida in condizioni economiche non disagiate. Egli si trova ora con un migliaio di £ [lire] che gli sono insufficienti ed è costretto a perder tempo dando lezioni private.

Abbiamo parlato altre volte del De F[ranchis]. In queste circostanze mi immagino che tu non vorrai prendere fin d'ora un impegno, e se così è io potrei rispondere ciò al De F[ranchis] aggiungendo che quando dovrai

fare la scelta del nuovo assistente terrai presente *anche* il suo nome. Se la tua decisione è diversa dimmi pure come devo rispondere.

Anch'io ho risposto come te all'invito pel Congresso di Parigi.[2] Non ho ricevuto alcuna comunicazione riguardo a Stockes.

Mi si è presentata una semplice dimostrazione del teor[ema] di Lüroth:[3]

Si prendano nell'involuzione (non dico lineare) g_n^1 due gruppi G, G' e si fissino nel 1° gli zeri nel 2° gli ∞ di una funzione razionale f che riesce così determinata a meno di un fattore cost[ante]. Dico che questa funzione riprende gli stessi valori in tutti i punti di un gruppo della g_n^1. Indichiamo con $f_1\ f_2\ \ldots\ f_n$ i valori che essa prende nei punti $1\ \ 2\ \ \ldots\ \ n$ d'un tal gruppo e consideriamo la funzione $\varphi_i = \frac{f_i}{f_1}$ come funz[io]ne del punto 1. La φ potrebbe essere polidroma avendo $n-1$ rami $\varphi_2\ \ldots\ \varphi_n$: considero le funzioni simmetriche $\varphi_2 + \ldots + \varphi_n$, $\varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2$ ... Queste funzioni sono monodrome senza infiniti e perciò sono costantemente uguali ad n, onde $\varphi_i = 1$ ecc.

Ora vorrei estendere il teorema al caso di involuzioni composte di gruppi infiniti.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[1] Gino Fano, che risulterà secondo classificato al concorso di Pavia (cfr. anche p. 368, nota 1 a let. 410, 27.8.1898), sarà chiamato nell'autunno 1899 sulla cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica all'Università di Messina, lasciando dunque vacante il posto di assistente alla cattedra di Castelnuovo.

[2] Il secondo Congresso Internazionale di Matematica si tenne a Parigi dal 6 al 12 agosto 1900. Enriques e Castelnuovo non figurano nell'elenco dei partecipanti.

[3] Cfr. Lüroth 1876.

437. [c.p.]

[Bologna] 8 Febbraio [18]99

Carissimo Guido

Ho comunicato al De F[ranchis] la tua risposta ed ora comunico a te i suoi ringraziamenti. Quando tu abbia occasione di scrivergli potrai parlargli direttamente della sua domanda.

Ho chiesto al Noether ospitalità nei Math[ematische] Annalen per il rifacimento delle ultime note,[1] ed avendo egli accolto con piacere la mia richiesta, gli manderò prestissimo il manoscritto redatto ormai, quasi completamente. Ho potuto togliere tutti i pasticci relativi alle sing[olari]tà nella

1ª parte. Quanto al lemma finale[2] il ragionamento per p qualunque vale anche per $p = 1$, sicché non ho bisogno di distinguere la trattazione di questo caso.

Saluti cordiali a te e all'E[lbina] anche da L[uisa]. Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1899c in cui sono riesposti i risultati già pubblicati in Enriques 1898c e 1898d.

[2] Cfr. Enriques 1898c, 532.

438.

26 febbraio [18]99

Carissimo Guido

Pensavo appunto anch'io al lungo silenzio della nostra corrispondenza, e mi proponevo di romperlo oggi; ma tu mi hai prevenuto.

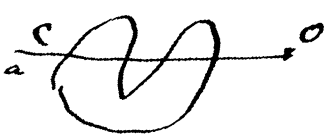
Nei primi giorni della malattia del bimbo era qui il Babbo, sicché avevamo notizie quotidiane; perciò non ti ho scritto per non disturbarti. Del resto siamo stati presto tranquillizzati sulla salute del caro piccino.

Io vado avanti, ma lentamente nell'Art[icolo][1] sui Fondamenti della Geometria, di cui ti puoi immaginare le difficoltà, data l'enorme bibliografia e i criteri differenti che dominano le ricerche dei vari autori.

Ricerche originali, nulla. Però, sviluppando nel mio corso superiore, i principii della Geom[etria] sulle superficie ho trovato il modo di semplificare molte cose, facendo largo uso delle funzioni razionali sopra la sup[erficie] e delle loro sing[olari]tà, e potendo così lasciare da parte le questioni più delicate di connessione. Se anche nel seguito, potrò introdurre le semplificazioni che spero, relative al teor[ema] fondamentale dell'aggiunzione, non sarei forse alieno dal pubblicare una monografia[2] sull'argomento.

Come ti ho detto, l'Art[icolo] per l'Enciclopedia procede con lentezza. Ma, a giudicare dal modo con cui si fa la pubblicazione, per fascicoli, passerà molto tempo avanti che venga il turno pei nostri.

Ripensando ad una vecchia questione[3] che tu proponevi, mi par di vedere che la curva di diramazione di un piano multiplo non possa darsi ad arbitrio, e che se una curva p[ia]na C è curva di diramazione d'un p[ia]no n-plo, essa definirà *in generale* un unico p[ia]no n-plo. Ed ecco perché.



Prendi nel p[ia]no un fascio O e considera una retta (n-pla) per a.[4] Essa definisce un certo numero μ di curve obiettive K_1 ... K_μ; scegliamone una K_1. Facciamo ruotare a attorno ad O, e seguiamo per continuità ciò che diventa K_1. Dopo un giro completo, in generale K_1 si permuterà con K_2 ... o K_μ. Ciò invece deve escludersi se la C è curva di diramazione di un p[ia]no n-plo. Ma se imponiamo la condizione che K_1, ad es[empio], si separi raz[ionalmen]te fra le μ K rappresentate sulla retta n-pla a, in generale non accadrà lo stesso per K_2 ... o K_μ.

Tanti saluti cordiali a tutti, tuo

Ghigo

[1] Enriques 1907d.
[2] Enriques 1901b, presentato per la pubblicazione il 17 novembre 1901.
[3] Cfr. in particolare p. 340, let. 375 (5.6.1897).
[4] Così nell'originale. Lapsus per: «una retta [...] a per O».

439.

2 marzo [18]99

Carissimo Guido

Ho il piacere di ciò che mi scrivi relativamente al Fano, e ne parlerò col P[incherl]e.[1]

Sai già che il Klein viene in Italia. Ora ho ricevuto una sua lettera in cui mi dice che ha intenzione di fermarsi a Bologna per una giornata. Avrò molto piacere di rivederlo e perciò mi propongo di tornare un giorno a Bologna da Firenze, qualora fosse già andato colà per le vacanze. Anzi a suo tempo ti pregherò d'informarmi, quando il Klein sarà a Roma, dell'epoca della sua partenza per Bologna.

Non ho altre novità da raccontarti, e ti saluto affettuosamente.

Tuo

Ghigo

[1] In una lettera a Castelnuovo del 26 febbraio 1899 Corrado Segre scriveva: «È bene che Enriques trovi modo di dire a Pincherle dell'invito che Fano ha avuto per Gottinga». Secondo quanto riportato in A. Terracini, *Gino Fano*, «Boll. U.M.I.», 7 (1952), 485-90, Fano avrebbe ricevuto da Felix Klein un'offerta per la cattedra di Gottinga tenuta fino ad allora da Arthur Schönflies. Fano a quest'epoca era uno dei candidati per il concorso a professore ordinario di Pavia; Salvatore Pincherle e Segre facevano parte della commissione giudicatrice. Cfr. p. 368, nota 1 a let. 410 (27.8.1898).

440.

Venerdì 17 marzo [18]99

Carissimo Guido

La nostra corrispondenza, non so perché, da un po' di tempo va languendo. Forse è la naturale pigrizia che piglia tutti gli uomini ammogliati, ed anche, diciamo, i pensieri della famiglia. Per parte mia Luisa colla solita anemia della Primavera; non è cosa che abbia gravità alcuna, ma è però un disturbo molto spiacevole.

Il Klein mi ha scritto nuovamente, che sarà a Roma Lunedì e vi si tratterrà fino a Venerdì. Tu certo sarai arrivato e lo vedrai. Il K[lein] verrà poi a Bologna dalla Domenica al Lunedì 25-26 Marzo, e mi ha indicato con precisione l'ora del suo arrivo. Io andrò apposta a Bologna per passare con lui una giornata, e farlo conferire con alcuni prof[essor]i ai quali ho già parlato della cosa.

Non capisco però dove il K[lein] intenda passare i due giorni dal Venerdì alla Domenica; forse a Firenze, ed in tal caso potrò trattenermi più lungamente con lui.

Vedo che la legge Baccelli sta passando alla Camera.[1] Il progetto modificato dalla Commissione in complesso non mi par cattivo, salvo qualche punto che resta ancora oscuro. Ma per me la cosa non viene in buon punto, a meno che la discussione e l'esame degli uffici del Senato non protraggano la promulgazione della legge fino alla fine dell'anno.

Sai già che è stata riconosciuta per Bologna la validità della legge Albicini.[2] Ma non sai forse tutte le conseguenze assurde, se non forse giuridicamente, certo moralmente; conseguenze che, ove l'impero della legge Albicini avesse a durare, condurrebbe inevitabilmente la nostra Università ad un livello inferiore.

Il parere della nostra Fac[olt]à giuridica è che non valendo la legge Casati, non valga neppure quella parte del regolamento che concerne le nomine dei prof[essor]i.[3] Per la legge Albicini non vi sarebbero prof[essor]i straordinari, ma solo ordinari, e non vi sarebbero concorsi di nessun genere. Le nomine sono fatte dal M[inistr]o senza che occorra nemmeno il parere delle Facoltà! In pratica però la procedura per diventare ordinari è di farsi proporre dalla Fac[olt]à; il M[inistr]o poi decide la cosa senza commissione. Puoi immaginare come la cosa mi dispiaccia, perché secondo il rettore io non potrei invocare la *promozione* ad ord[inari]o, ma invece la *nomina* che potrebbe essere chiesta dalla Facoltà *quando che sia*. Non credo però che la nostra Fac[olt]à la pensi allo stesso modo e ritengo che alla fine dell'anno, essa proporrà la mia promozione. Vedremo cosa accadrà. Ma, converrai con me, è assai doloroso (e poco soddisfacente anche nel caso più favore-

vole) di essere alla balìa del Ministro, e per di più in mezzo ad un disparere circa il modo d'interpretare la legge che può condurre più in lungo la procedura.

Intanto i furbi hanno già approfittato di questo stato di cose, che anzi è stato creato ad hominem per il Rava (ex sotto-segretario alle Poste). E sono parecchi i nominati ord[inar]i, già straord[inar]i, da uno o due anni, che non fecero mai un concorso! Altri si muovono per ottenere la nomina.

Io sono il solo straord[inari]o della mia Fac[ol]tà (tolto il Donati che è ordinario alla Sc[uola] d'Ing[egner]i); ma il domandare ora per grazia quello che alla fine dell'anno potrei ottenere per diritto, almeno morale, mi repugna e se anche non mi repugnasse sarebbe un passo rischioso. Aspetto dunque, il che sarà poco o punto male se la legge Baccelli non sarà promulgata così presto.

Ti saluto cordialmente insieme all'Elbina e a Paolo. Tuo
Ghigo

[1] In questa lettera e in altre che seguiranno viene ripresa la questione dell'ordinariato di Enriques. Il progetto di Legge Baccelli non fu poi approvato.

[2] Tra il 1859 e il 1860 furono emanati dai governatori delle provincie della Romagna e dell'Emilia dei decreti per uniformare l'ordinamento dell'Università di Bologna a quello del Regno di Sardegna. Tra questi vi furono un decreto emanato da Amilcare Cipriani nel novembre 1859 e due decreti emanati da Carlo Farini nei primi mesi del 1860. Cesare Albicini era a quest'epoca ministro senza portafoglio con la reggenza interinale delle Finanze. In questa veste riformò l'Università di Bologna e l'insegnamento pubblico e privato.

[3] Cfr. p. 386, nota 10 a let. 424 (4.12.1898). Per quanto riguarda in particolare le norme della Legge Casati sulla nomina dei professori si vedano gli articoli 56-69.

441.

21 marzo [18]99

Carissimo Guido

Grazie della tua lettera. Siamo perfettamente d'accordo su tutto; soltanto io non muoverò alcuna pedina, se non quando la Camera si sia pronunziata riguardo all'art[icolo] delle disposizioni transitorie che mi concerne. Intanto però credi che, capitando l'occasione, sarebbe opportuno informare il Cr[emona] dello stato delle cose?

Spero di condur presto a termine l'Art[icolo] dell'Enciclopedia[1] «Sui fondamenti», ma ci vorranno poi larghi ritocchi. È un lavoro interminabile. Poi mi occuperò delle trasformazioni, e se vuoi (prima ancora) delle sing[olari]tà delle sup[erficie].[2] Credo però che non occorra entrare in dettagli troppo minuti, né appurare punto per punto la parte avuta dai singoli lavoratori in ciascuna teoria.

A momenti persi ho ripensato a ciò che ti scrissi[3] sui piani multipli, e non credo veramente di aver avuto torto.

Cordiali saluti a tutti Ghigo

[1] Enriques 1907d.

[2] Per quanto riguarda gli articoli che Castelnuovo ed Enriques stavano allora scrivendo per l'*Encyklopädie* tedesca cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] Cfr. p. 400, let. 438 (26.2.1899).

442.

Martedì 28 marzo [18]99

Carissimo Guido

Ho ricevuto ieri sera la tua lettera, di ritorno da Bologna.

Anch'io ho passato col Klein due giornate bellissime: la prima a Firenze ove (tranne due ore di visite all'Istituto geografico) me lo sono goduto interamente, e la 2ª a Bologna dove pure ho conferito lungamente con lui; infine ieri mattina sono andato a salutarlo accompagnandolo alla stazione; è partito per Padova.

Gli ho parlato un po' (Domenica sera) delle nostre cose sulle superficie: del tuo teorema sulle superficie raz[ional]i[1] che gli è piaciuto moltissimo, del completamento che ho fatto recentemente del teor[ema] di Nöther,[2] della questione della varietà cubica ecc., tutte cose che non conosceva affatto e a cui ha preso interesse.

Sabato durante la visita alle gallerie, gli ho esposto dettagliatamente il programma del mio Art[icolo][3] sui Fondamenti della Geometria, e sono stato lieto di vederlo soddisfatto. Egli ha preso note assai minute su ciò che gli ho esposto.

Ma il soggetto di cui abbiamo discorso più lungamente è quello che si riferisce ai problemi psicologici matematici. Ieri mattina congedandosi da me, mi ha detto: riprenderemo la nostra conversazione su questi argomenti, che non dimenticherò.

Il Klein ha fatto a tutti, a Bologna, una straordinaria impressione per la vasta coltura, non solo nel campo della Matematica, ma in tutti gli svariati campi delle applicazioni.

Quanto si potrebbe imparare a trattenersi un po' a lungo con lui!

Appena sarò a Bologna mi occuperò delle sing[olari]tà delle superficie.[4] Penso che convenga evitare questioni polemiche citando in principio tutti i lavori, ed accennando soltanto alla polemica[5] sul teor[ema] della trasf[ormazion]e, che ormai deve ritenersi stabilito.[6]

Del resto discuteremo meglio la cosa quando avrò redatto il foglio di cui si tratta.

Vedo anch'io con piacere che l'approvazione della legge Baccelli[7] va in lungo, sebbene non sia ancora accertato che essa non possa sbrigarsi prima dell'estate.

Ti saluto cordialmente, insieme all'Elbina e a Paolo

Tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Non ho ricevuto la memoria di Picard[8] di cui mi discorri.

[1] Cfr. Castelnuovo 1896b.
[2] Cfr. Noether 1871c; Enriques 1898c e 1898d.
[3] Enriques 1907d.
[4] Il problema delle singolarità delle superficie algebriche, negli articoli per l'*Encyklopädie* tedesca, sarà trattato in Enriques-Castelnuovo 1914, § 3: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[5] Enriques si riferisce alla polemica intercorsa tra Pasquale Del Pezzo e Corrado Segre sul teorema di risoluzione delle singolarità delle superficie algebriche per trasformazioni birazionali della superficie: cfr. p. 334, let. 368 (19.5.1897) e seguenti.
[6] Enriques si riferisce alla dimostrazione di Beppo Levi: cfr. B. Levi 1897b.
[7] Cfr. p. 402, let. 440 (17.3.1899).
[8] Dovrebbe trattarsi di Picard 1899.

443.

5 Aprile [18]99

Carissimo Guido

Ho ricevuto anch'io, ieri sera, la bella offerta di Teubner[1] (e stavo appunto scrivendotene mentre mi arriva la tua lettera) alla quale si aggiunge un'offerta analoga per un lavoro sui Principii della Geometria.

Rispondo anzitutto alle tue osservazioni.

Teubner non è un matematico e non può quindi fissarci un programma del nostro lavoro, anzi la sua lettera parla di libertà concessa all'autore. Perciò io credo che a noi soltanto spetti di assegnare i limiti dell'opera nostra, e la mia opinione sarebbe che essa fosse rivolta alla teoria invariantiva delle superficie; per svolgere questa teoria sarebbe naturale di dedicare uno o 2 cap[itol]i alle curve, a mo' d'introduzione. Di questa convenienza potremmo avvertire Teubner, che non avrà certo alcuna obiezione.

Sono d'accordo con te circa la convenienza di rimandare il lavoro e credo che la proroga ci verrà concessa: rimandarlo, diciamo pure, a dopo la pubblicazione del 2° vol[ume] del Picard[2] e all'anno 900 o 901. Atten-

dere che si sia scoperto il ponte fra l'indirizzo algebrico-geom[etric]o e il trascendente è forse troppo, e d'altra parte può convenire che l'indirizzo algebrico-geom[etric]o sia più conosciuto a fine di facilitare il compito del collegamento colla teoria analitica.

Al Teubner io vorrei fare anche una riserva, riguardante il diritto nostro della traduzione italiana, perché vorrei che il lavoro venisse pubblicato contemporaneamente anche in Italiano. Che non s'abbia da trovare qui un editore il quale ci prenda almeno gratis quel che fuori si paga 60 M[archi] a foglio?

Ora ti parlerò dei miei progetti relativamente all'altro lavoro propostomi dal T[eubner] sui Principii della Geometria. Sai che da tempo mi sono occupato delle questioni logiche e psicologiche che concernono l'argomento. Nell'offerta del Teubner io vedo l'occasione per condurre a termine e pubblicare queste ricerche. Credo che Teubner mi consentirà questo allargamento, magari rivolgendomi come intermediario a Klein, che ha preso interesse alla cosa.

Pertanto io avrei questo programma:

I Problemi logici inerenti al concetto di spazio (Lo spazio rispetto alla teoria della conoscenza).

II I fondamenti della Geometria.

Cenno storico. Esposizione dei fondamenti della teoria dell'estensione (secondo la mia Nota[3] del Circ[olo] di Palermo). Esposizione dei principii della G[eometria] pr[oiettiv]a e delle metriche subordinate. Esposizione dei principii della G[eometri]a metrica, per via sintetica, partendo dai post[ulat]i che si desumono dalle ricerche di Lie (parte nuova).

III Problemi psicologici (e biologici) inerenti all'acquisto delle nozioni spaziali.

Che cosa ti pare di questo programma?

Questo lavoro potrei compierlo nel prossimo anno scolastico prendendo a trattare la parte II come corso di Geom[etria] Superiore.

Per l'anno 900-901 prenderei invece a trattare con più dettagli il programma di quest'anno, sulle superficie, e così mi troverei nella miglior condizione per collaborare al lavoro sulla superficie. Aggiungi che potremo forse acquistare l'aiuto di qualche giovane che lavori sotto la nostra direzione a raccogliere o emendare dei materiali ecc.

Vengo alla conclusione. Io risponderei a Teubner che le sue offerte in massima sono accettabili, purché egli lasci all'autore la libertà di scegliere il programma, accetti e faccia tradurre fedelmente manoscritti italiani, conceda il diritto di traduzione italiana. Senza prendere un impegno preciso gli offrirei di dargli il lavoro sui Principii fra un anno circa; mentre il lavoro con te sulle Superficie converrebbe ritardarlo di un paio d'anni almeno.

Se sei perfettamente d'accordo con me in queste idee, puoi scrivere tu stesso, se vuoi, per il lavoro comune. In quanto a me gli farò le mie proposte pel lavoro sui Principii confermandogli quanto tu gli avrai scritto per l'altro lavoro. Ma prima di far proposte concrete vorrei anche parlare collo Zanichelli.

Saluti affettuosi, anche all'E[lbina] e a Paolo, che spero sia già rimesso della piccola febbretta.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] In connessione con la pubblicazione dell'*Encyklopädie*, l'editore Teubner aveva progettato di pubblicare una serie di trattati. Tra i titoli annunciati figuravano i trattati *Prinzipien der Geometrie* di Enriques e *Theorie der algebraischen Flächen* di Enriques-Castelnuovo. Questi trattati non furono mai pubblicati. In lingua tedesca, sul problema dei fondamenti della geometria, apparvero invece: Enriques 1903b, 1907d, 1907e e 1910b.

[2] Picard-Simart 1897-1906, II; cfr. p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).

[3] Enriques 1898a.

444.

7 Aprile [18]99

Carissimo Guido

Se Teubner non potrà indicare e fissare i nomi degli autori di altri trattati della serie, sarà forse opportuno di dirgli fin d'ora che il nostro programma abbraccerebbe «tutte le nuove teorie algebrico-geometriche sulle superficie e gli elementi della teoria invariantiva delle curve atti a servire d'introduzione nell'argomento». Così egli nell'accordarsi con altri per argomenti affini mostrerebbe loro il nostro programma.

Quanto alle traduzioni mi sono informato presso Seeber (della libreria Loescher e S.), che mi ha detto, a norma delle consuetudini e delle leggi, doversi intendere che l'editore acquistando l'edizione acquista per sé il diritto di traduzione, alle condizioni da stipularsi. Il Seeber ritiene però che il Teubner non avrà difficoltà a cedere il diritto di traduzione in italiano; se ciò egli accorda, la traduzione può uscire anche contemporaneamente all'edizione tedesca.

Siccome io tengo molto a pubblicare in Italiano le mie ricerche filosofiche, che non so se saranno fedelmente rese in Tedesco, così scriverò al Teubner domandandogli se egli sarebbe disposto a lasciarmi (pel libro sui «Principii») il diritto di traduzione e specialmente di traduzione italiana; e gli dirò che per l'altro lavoro, sono con te in scambio di idee, in seguito al quale gli daremo una risposta. Questa risposta si può aspettare a dargliela dopo aver sentito che cosa egli propone, relativamente alle mie richieste.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

445.

12 aprile [18]99

Carissimo Guido

Ho scritto a Teubner nel senso in cui siamo rimasti d'accordo, dicendogli che pel nostro lavoro comune siamo in scambio d'idee, in seguito al quale gli risponderemo. Vedremo ora come egli prenderà la cosa.

Mi sto occupando della questione delle sing[olari]tà delle superficie.[1] Per non entrare in polemiche, penserei di riportare in principio i titoli dei lavori che si riferiscono all'argomento, e poi sviluppare le cose fondamentali senza attribuirle a nessuno, tranne per alcuni teoremi che sono soltanto in Segre.[2]

Ora vorrei domandarti un piacere.

Il Klein mi ha detto che nell'Introduzione alla Geom[etria] Analitica dello Schur[3] vi sono alcune considerazioni (di cui dovrei tener conto) sui fondamenti della Geom[etria] pr[oiettiv]a, e segnatamente su ciò che il teor[ema] di Pascal ha relazione colla proprietà commutativa della moltiplicazione.

Ho cercato qui, al solito inutilmente, il libro dello Schur; ma probabilmente voi a Roma lo avrete. Se tu potessi vedere di che cosa si tratta precisamente (e a chi spettano originariamente quelle oss[ervazion]i se qualcuno è citato), mi faresti un gran piacere. Forse la cosa interessa te pure e quindi non ti dispiace di occupartene (senza alcuna fretta); ma se si trattasse di sviluppi un po' lunghi o faticosi, potresti farmi mandare il libro.

Ti ringrazio anticipatamente e ti saluto con affetto

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 405, nota 4 a let. 442 (28.3.1899).
[2] Segre 1897a.
[3] Schur 1898.

446.

14 Aprile [18]99

Carissimo Guido

Ti ringrazio di ciò che mi scrivi intorno al libro di Schur.[1] Vedrò se il tuo cenno mi basti per ciò che dovrò dirne nel mio Art[icolo],[2] ed in caso diverso profitterò ancora della tua gentilezza, pregandoti di spedirmi il libro.

Nessuna risposta fino ad ora da Teubner.

Abbiamo avuto oggi a Bologna il Mittag-Leffler che è ripartito per i laghi, colla Signora.

Egli mi ha detto che in Francia ha sentito parlare molto favorevolmente dei nostri lavori, e che anche a Stockolma un suo collega vi prende interesse; ma disgraziatamente il nostro linguaggio, italiano e geometrico, riesce molto difficile; ed il nostro Bericht[3] se pure è scritto in francese è pur sempre troppo geometrico per lui. Perciò il M[ittag]-L[effler] vorrebbe pubblicare negli Acta-Mathematica un rapporto sui recenti progressi della teoria delle superficie, ove si trovassero i *resultati* esposti in forma puramente analitica. Gli ho risposto che gradivo l'offerta e che ne avrei parlato, sperando che potremo metterci d'accordo per soddisfare il suo desiderio.

Salutandomi egli ha insistito nuovamente nella domanda, ripetendomi che desidera far conoscere le nostre cose ad un pubblico più largo, e che sarà lieto di accogliere un articolo comunque lungo; mi ha soggiunto che gli scriva presto in proposito.

Io credo che per noi non sarà ormai una gran fatica di redigere con comodo un tale rapporto; tanto più che della traduzione analitica di alcuni concetti io mi sono occupato pel mio corso.

Ho parlato al M[ittag]-L[effler] dell'offerta di Teubner,[4] ed egli mi ha detto che la pubblicazione di un libro sarà utilissima; che anche Picard trova grandi difficoltà per esporre i nostri teoremi, come vorrebbe, e che perciò, secondo lui, non sarebbe il caso di aspettare il 2° vol[ume] del Picard[5] stesso.

Ho trovato il M[ittag]-L[effler] più simpatico e meno originale di quel che mi era parso a Zurigo, dove, del resto, gli ero stato appena presentato.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

[P.S.] Ho scritto a Paolo = Via Palermo 6 = ; ha ricevuto la mia lettera?

[1] Schur 1898.
[2] Enriques 1907d.
[3] Enriques-Castelnuovo 1896.
[4] Cfr. p. 407, nota 1 a let. 443 (5.4.1899).
[5] Picard-Simart 1897-1906, II; cfr. p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).

447.

[s.d.]

Carissimo Guido

Per l'articolo richiesto da Mittag-Leffler non c'è nessuna fretta; così potremo parlarne a voce quando ci vedremo.

Ora è giusto di pensare agli art[icoli] dell'Enciclopedia. In ogni modo

puoi sentire anche il parere del Segre che vedrai a Roma in questi giorni. Ed io potrò forse scrivere al Mittag-L[effler] dicendogli che il suo desiderio non potrà essere soddisfatto subito, ma fra qualche tempo.

Ho preso un'indigestione di singolarità superficiali.[1]

Vedo che riuscirà forse impossibile di dare le citazioni in blocco, e d'altra parte entrare nel merito delle discussioni è cosa troppo spinosa, anche se ciò deve farsi soltanto nel senso di attribuire un resultato all'uno o all'altro.

Tuttavia nella mia mente ho ordinato i lavori veduti nel modo seg[uente]:

Rohn, Zeuthen... si occupano[2] di particolari p[un]ti 2-pli e della influenza sulla classe di questi e anche di p[un]ti multipli più elevati (Rohn).

Halphen e Kobb (forse anche Del Pezzo) si occupano degli sviluppi in serie che rappresentano una superficie nell'intorno di una linea sing[olar]e (H[alphen])[3] o di un p[un]to (Kobb).[4] Al lavoro di K[obb] si riferiscono alcune osservazioni critiche di Beppo Levi.[5]

La definizione geom[etric]a diretta della sing[olari]tà mediante rami di curve (def[inizion]e legata a quella analitica) si trova in Segre.[6]

L'idea della decomposizione delle sing[olari]tà per trasf[ormazion]e è di Noether. N[oether] enuncia anche che una sup[erficie] si può ridurre ad avere soltanto curva 2-pla e p[un]ti 3-pli,[7] ma in sostanza fa la cosa pel calcolo dei moduli non in vista delle sing[olari]tà sup[erior]i.

Il teor[ema] di riduzione delle sing[olari]tà sup[erior]i viene esplicitamente enunciato da Del Pezzo,[8] il quale propone allo scopo di prendere come sup[erficie] trasformanti quelle che *hanno le stesse sing[olari]tà della data.*

(Questa nozione di = [stesse] sing[olari]tà viene spiegata erroneamente da D[el] P[ezzo] in un'*altra* memoria[9] da passarsi sotto silenzio perché nulla).

Segre ha fatto vedere come deve intendersi la nozione precisata e mostrato che la via di D[el] P[ezzo] conduce allo scopo, salvo che bisogna escludere qualche dubbio un po' minuto.

B[eppo] Levi si propone di dare una dim[ostrazion]e completamente rigorosa del teor[ema][10] (ma chi ci capisce qualcosa nei suoi lavori?).[11]

Ho sentito che Paolo ha idea di andare a Napoli. Se gli facesse comodo Emery può assumere informazioni presso Dohrn (che è suo amico) circa la possibilità di avere quest'anno un posto nella Stazione Zoologica. Poi egli potrebbe farsi raccomandare al M[inistr]o da Luciani.

Saluti aff.i a tutti Ghigo

[P.S.] Teubner sempre zitto!

[1] Cfr. p. 405, nota 4 a let. 442 (28.3.1899).
[2] Cfr. Rohn 1883; Zeuthen 1876a e 1876b.
[3] Cfr. Halphen 1878-79.
[4] Cfr. Kobb 1892.
[5] Cfr. B. Levi 1897a.
[6] Cfr. Segre 1897a.
[7] Cfr. Noether 1869a e 1888, rispettivamente.
[8] Cfr. Del Pezzo 1888.
[9] Cfr. Del Pezzo 1889.
[10] Cfr. B. Levi 1897b.
[11] Oltre ai lavori già citati si veda anche l'articolo B. Levi 1899, che porta la data luglio 1898.

448.

28 Aprile [18]99

Carissimo Guido

Ti ringrazio delle notizie relative al concorso.[1] Il resultato mi pare assai soddisfacente. Le eleggilibità, specie per ord[inari]o, sono un po' alte rispetto ai concorsi precedenti, ma io penso che non sia male di largheggiare un po' nei punti per coloro che vengono creduti atti alla cattedra.

La riuscita di Berz[olar]i era sicura e si giustifica (forse) coll'anzianità; in fondo però credo che Bagnera e Fano valgano di più. Fano ha tutte le ragioni di essere contento dell'esito.

Ciò che mi ha fatto piacere è sopratutto la riuscita di Bagnera al 3° posto, ciò che gli assicura un collocamento. È vero che il B[agner]a è laureato da 10 anni, ma prima faceva l'ing[egner]e e nei due o tre anni ultimi è diventato un vero matematico, più promettente di tutti gli altri. Per quanto so invece del Bort[olotti], egli non ha fatto alcun lavoro notevole (naturalmente non è questa l'opinione del P[incherl]e che lo ha indirizzato).

L'opposizione a Fano per parte del gruppo analitico si spiega pensando ai suoi lavori, poco felici, sulle eq[uazion]i diff[erenzial]i.[2] Però io avevo parlato di lui lungamente col P[incherl]e[3] (il quale conosceva soltanto i detti lavori pei quali siamo d'accordo), e gli avevo fatto notare come il Fano abbia dato due resultati importanti: quello[4] sulle congruenze del 3° grado e quelli[5] sui gruppi di S_3 (faccio astrazione del lavoro comune).[6] Mi pareva che il P[incherl]e fosse rimasto persuaso. Al P[incherl]e stesso avevo pure manifestato l'opinione che il B[agner]a fosse il più forte, per ingegno, di tutti i concorrenti.

Avendo avuto occasione di leggere la nota di Noether[7] sui moduli delle sup[erficie] mi sono accorto che il resultato da lui enunciato non è punto stabilito. Per pervenire alla sua formula $10p - 2(p^{(1)} - 1)$ bisogna appli-

care le formule di postulazione per valutare le sup[erficie] che hanno una data curva 2-pla; ora è chiaro che *in generale* queste formule daranno un numero negativo di sup[erficie]. Così per esempio il conto di Nöther si potrebbe ripetere per le sup[erficie] bicanoniche di gen[ere] $p = 0$ e vedi subito che assurdo ne verrebbe. Insomma la formula di Nöther può valere tutt'al più per i valori più bassi del $p^{(1)}$ in confronto al p.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbin]a tuo

Ghigo

[1] Si tratta del concorso a professore ordinario per la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica dell'Università di Pavia (cfr. p. 368, nota 1 a let. 410, 27.8.1898). Ricordiamo la graduatoria dei candidati: Luigi Berzolari, Gino Fano, Giuseppe Bagnera, Ettore Bortolotti.

[2] Cfr. p. 166, nota 3 a c.p. 168 (20.1.1895).

[3] Cfr. p. 401, let. 439 (2.3.1899).

[4] Fano 1894.

[5] Fano 1898a, 1898b e 1898c.

[6] Enriques-Fano 1897.

[7] Noether 1888.

449.

1 Maggio [18]99

Carissimo Guido

Finalmente ho avuto la risposta di Teubner![1]

Mi accorda piena libertà relativamente al programma anche per includere nel libro le questioni logiche e psicologiche; mi consente il diritto di traduzione italiana un anno dopo la pubblicazione del lavoro in tedesco; ma c'è una difficoltà più seria.

Il Teubner non aveva previsto, pare, che autori stranieri non avrebbero scritto in tedesco, e dice che sarà un po' difficile trovare la persona adatta per la traduzione, che in ogni modo bisognerebbe che io stesso rivedessi lo scritto tedesco, ed infine che le spese di traduzione andrebbero a mio carico.

Il Teubner chiude la lettera dicendomi che aspetta le nostre comunicazioni riguardo al lavoro sulle superficie.

Ora come penseresti di scrivere a Teubner? Credi che offrendogli di redigere il lavoro in francese (anziché in italiano) ci si salverebbe da questa diminuzione di onorario? Oppure credi che questa sia una rivalsa per l'accordato diritto di traduzione italiana?

Ho cercato, oggi stesso, di vedere il P[incherl]e per avere qualche lume da una risposta che forse lui pure avrà ricevuta (relativa ad un'analoga offerta),[2] ma non l'ho trovato.

Intanto sto pensando se, dato il caso, non converrebbe trovare qua il traduttore, e ad ogni modo (per parte mia) di rinunziare a trattare i problemi filosofici che portano una più grande difficoltà di linguaggio.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

[P.S.] Credi che anche per gli Art[icoli] dell'Enciclopedia[3] ci possano defalcare dall'onorario le spese di traduzione?

[1] Cfr. p. 405, let. 443 (5.4.1899) e seguenti.
[2] Nella serie di trattati progettati dall'editore Teubner (cfr. p. 407, nota 1 a let. 443) figurava anche *Funktional-Gleichungen und Operationen* di Salvatore Pincherle.
[3] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

450.

[s.d.]

Carissimo Guido

Pare che una mia lettera si sia perduta. Io ti rispondevo al progetto del trattato di G[eometria] S[uperiore] del Segre, che la cosa, come sai, ha la mia approvazione ma dal punto di vista pratico è meglio formularci un programma, più facilmente realizzabile. Il trattato potrebbe comprendere più volumi, redatti da noi tre, in parte separatamente in parte a coppie; volumi tra cui esisterebbe una connessione ideale. Uno di questi volumi è quello sopra le sup[erficie] che il Teubner ci invita a comporre;[1] in questo io non richiamerei se non quanto è necessario dalla teoria delle curve. Così il nostro lavoro non escluderebbe un trattato sulle curve e i loro sistemi lineari nel piano. Volendo conglobare tutto nella nostra opera si rischia di differirne troppo l'esecuzione.

Alle notizie di ieri l'altro ti posso aggiungere che il P[incherl]e ha ricevuto dal Teubner una risposta analoga alla mia.

Il P[incherl]e proponeva di mandare il manoscritto in italiano o in francese, e non parlare di diritto di traduzione; ebbene il T[eubner] gli dice che dovrà segnare a suo carico le spese di traduzione e in compenso gli offre il diritto di tradurre l'opera in italiano *o* in francese un anno dopo la pubblicazione tedesca.

Ora se vuoi rispondere al Teubner mostrando di voler tener duro sul punto dell'onorario, fallo pure, ma ti raccomando di non fare tali dichiarazioni che ci tolgano la possibilità di acconciarci alle esigenze di T[eubner] quando non si trovasse un'offerta migliore. Credi che in Francia un editore ci darebbe 75 fr[anchi] a foglio? E d'altronde una casa come quella

di Teubner per un affare di questo genere, avrà fissato i suoi preventivi dai quali derogherà difficilmente.

Intanto io ho cercato un traduttore pel mio lavoro e credo di averlo trovato. È un giovane laureando in Matematiche che è cresciuto in Austria e prenderebbe volentieri una tale impresa anche collo scopo di studiare, contentandosi di 10 Marchi a foglio. Però non ha preso alcun impegno defintivo.

Io ho idea di rispondere a Teubner per parte mia, accettando la sua offerta in massima per la circostanza che credo aver trovato un mio allievo capace di tradurre il lavoro. Debbo aggiungergli qualchecosa relativamente al nostro lavoro comune, cioè che per questo non sarà così facile trovare un traduttore e che d'altra parte egli deve considerare che siamo in *due* autori, oppure vuoi che dica al T[eubner] semplicemente che avrà da te la nostra risposta?

Dimmi ciò che preferisci.

Ho scritto al Fano congratulandomi, ma pare egli non sia rimasto contento dell'esito del concorso e tema che il Berz[olari] vada a Pavia.[2] Sai se questo dubbio sia fondato. Che cosa pensa il Cons[iglio] Sup[eriore] della promozione Berz[olari]?

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[P.S.] Ti mando la trattazione delle sing[olari]tà per l'Art[icolo] Sup[erficie].[3] Prima di copiare l'art[icolo] mi faresti piacere a mandarmelo, quando sia completo.

[1] Nella serie di trattati progettati dall'editore Teubner (cfr. p. 407, nota 1 a let. 443, 5.4.1899) figurava anche *Vorlesungen über algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der mahrdimensionalen Räume* di Corrado Segre.

[2] Luigi Berzolari aveva anche presentato domanda di promozione a ordinario a Torino: cfr. p. 386, let. 424 (4.12.1898). In realtà Berzolari si trasferirà a Pavia e Gino Fano andrà a Messina: cfr. p. 399, nota 1 a let. 436 (s.d., 1899).

[3] Cfr. p. 405, nota 4 a let. 442 (28.3.1899).

451.

15 Maggio [18]99

Carissimo Guido

Ti voglio subito informare delle pratiche virtualmente incominciate per la mia promozione, s'intende nella più *assoluta* confidenza.

Prima di tutto ti dirò che ho ricevuto dal Segre una lettera in cui anche a nome del Volterra mi rivolge due domande:

1) se farei subito la domanda di trasloco come straord[inari]o salvo a farla seguire dalla domanda di promozione;

2) se concorrerei dato che si bandisse un concorso per ord[inari]o.[1]

Ho creduto di non mancare di delicatezza parlando confidenzialmente di queste domande ricevute da *amici* di Torino (senza nominare) al nostro Preside Righi, e ciò per avere da lui un affidamento prima di rispondere.

Già era cosa quasi intesa con P[incherl]e ch'io avrei presentato alla fine dell'anno la domanda di promozione, ma volevo esser sicuro che questa avrebbe anche l'appoggio del Righi. Ed infatti il Righi mi ha promesso pieno appoggio, e mi ha detto che adunerà presto la Facoltà per fare il voto necessario.

In seguito a ciò ho risposto francamente al Segre (cui sono gratissimo) che non potevo accettare la 1ª offerta perché andando come straord[inari]o a Torino la mia promozione, contrastata da Mattirolo e da Porro, sarebbe più difficile di qua, ove la Fac[olt]à farà presto un voto in mio favore; e quanto al concorrere per ord[inari]o lo farei certo se qui le cose non andassero lisce; gli ho aggiunto che in vista di ciò avrei molto piacere se tale concorso venisse bandito, ma non vorrei spingere forse inutilmente lui e il V[olterra] per una via che può dar loro dei fastidi.

Ritornando alla mia promozione qui, ti dirò che in seguito al colloquio col Righi mi sono recato a parlare col rettore Puntoni, il quale volendomi bene ha preso la cosa di petto. Il Puntoni dice che tutto andrà sicuramente nel modo desiderato, e che egli si metterà d'accordo col Righi affinché il voto della Fac[olt]à sia redatto conforme alla legge Albicini.[2]

Ho detto al P[unton]i che io preferirei una nomina regolare fatta sul parere di una commissione; ed egli mi ha detto che (sebbene la legge Albicini non contempli questa procedura) la cosa si potrà forse fare. Ma mi ha soggiunto che passando la legge Baccelli[3] io perderei la speranza di promozione, e quindi se la legge va avanti mi converrebbe accettare la nomina in qualunque modo purché subito.

Infine ti dirò che ho parlato anche col P[incherl]e il quale mi ha detto che non ha dubbio sul voto della Fac[olt]à ma che egli cercherà di far sì che tutti i matematici intervengano, per fare un voto in termini caldi.

Vedi che le cose sono bene avviate.

Non mi pare che ora sia il caso di parlare con nessuno, nemmeno col Cr[emona], il quale forse converrà informare dopo il voto della Fac[olt]à pel caso si rendesse necessario di ricorrere al suo appoggio.

Passando ad altro ti dirò che ho quasi combinato col Teubner pel libro sui Principii. Mi lascia il diritto di traduzione in italiano e in francese, un anno dopo la pubblicazione tedesca, e mi dà (oltre il prezzo) 20 copie gra-

tis. Di più se io gli manderò il manoscritto in italiano, egli lo farà tradurre per 24 M[archi] il foglio, ma prenderà sopra di sé $\frac{1}{3}$ della spesa. Però io spero di far tradurre il manoscritto da un mio scolaro.

Ti saluto affettuosamente, insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[1] Le domande riguardano la cattedra di professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva di Torino, che nell'autunno sarà resa vacante dal trasferimento di Luigi Berzolari a Pavia.
[2] Cfr. p. 403, nota 2 a let. 440 (17.3.1899).
[3] Cfr. *ibid.*, nota 1.

452.

18 Maggio [18]99

Carissimo Guido

Se la pratica per la mia promozione non incontra difficoltà presso il M[inistr]o, le cose andranno più presto di quel che credi. Infatti, data la legge Albicini, non può essere il caso di sentire il Cons[iglio] Sup[eriore] prima di convocare la commissione. Infatti nel caso della legge Casati il Cons[iglio] Sup[eriore] deve decidere *prima* se è il caso che una data cattedra (piuttosto che un'altra) sia coperta con un ord[inari]o, e se l'aspirante ha i requisiti per la *promozione*. Colla legge Albicini è invece preveduto che ogni cattedra *deve* esser coperta con un ord[inari]o, e non si può parlare di *promozione* ma di *nomina*. Il ministro propone al re[ttore] le nomine senza nessun vincolo; si può dunque ammettere che egli consulti una commissione e *poi* anche il Cons[iglio] Sup[eriore] per avere garanzie sui meriti dell'aspirante, ma non avrebbe ragione di consultarlo prima. Tuttavia anche il consultare una commissione pare a qualcuno non conforme allo spirito della legge Albicini; per lo stesso modo di vedere per cui Baccelli non ammette i concorsi per straord[inari]o colla legge Casati.

C'è poi da tener conto del fatto che altri straord[inar]i della Fac[olt]à medica faranno domanda per essere nominati ord[inar]i e tutti senza commissione. Riuscendo così la loro pratica più sbrigativa c'è il caso che si nominino qui molti ord[inar]i e che si voglia poi mettere un fermo. Per queste ragioni io desidererei che il M[inistr]o assumesse fin d'ora l'impegno di convocarmi la commissione nell'Ottobre facendo subito votare la Fac[olt]à; oppure che mi nominasse direttamente. Se io non m'illudo tutti dovrebbero capire che se io accetto una nomina in tal forma è solo per la situazione gravida di pericoli e non per sfuggire al giudizio di una commissione, a cui potrei fornir prova della mia operosità anche in questi ultimi tre anni.

Certo il meglio sarebbe che a Torino si aprisse un concorso per ord[inari]o, ed io non ho taciuto al S[egre] il mio desiderio.

Quanto a ciò che mi dici di Messina, comprendo benissimo i dubbi di quella Fac[olt]à. Fra l'altre cose essi hanno un geometra come Martinetti, ed è naturale che desiderino ora un algebrista. Invece il Fano sarebbe andato meglio a Pavia dove la Geometria è peggio rappresentata.[1]

Ai primi di Giugno si convocherà a Roma la commissione pel concorso pel Liceo di Bologna. Fra i concorrenti vi sono il Bagnera (che forse ora si ritirerà) e il De Franchis. Te l'avverto perché tu guardi se è possibile che questi bravi giovani non sieno trattati male come l'altra volta. Capisco che il De Franchis non potrà forse riuscire vincitore, ma dovrebbe avere un giudizio molto buono dei suoi titoli relativamente ad un posto secondario, il che gli potrà giovare in seguito anche se ora avrà il tuo assistentato.[2]

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[P.S.] Ti par che vada bene il modo come ho trattato le sing[olari]tà?[3]

[1] Nell'autunno 1899 Gino Fano sarà chiamato all'Università di Messina sulla cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica.

[2] Nell'annuario del Ministero dell'Istruzione Pubblica Fano figura come assistente di Castelnuovo fino al 1901.

[3] Cfr. p. 405, nota 4 a let. 442 (28.3.1899).

453.

Lunedì 22 Maggio 1899

Carissimo Guido

Ti comunico che la Facoltà si è riunita per deliberare sulla mia promozione, e a unanimità ha deliberato di appoggiarla presso il M[inistr]o con un ordine del giorno molto benevolo che comincia colle parole «visto l'alto valore scientifico... e lo zelo nell'adempimento dei doveri didattici ecc.».

Vedremo ora cosa ne penserà il M[inistr]o.

Intanto il rettore mi ripete che chiedergli la costituzione di una commissione è come una diminutio capitis nel caso della legge Albicini, diminutio che Baccelli non vorrà consentire; e che nel caso migliore la cosa si trascinerà a lungo, gli altri si faranno intanto nominare, ed un futuro ministro non sarà mai tenuto a tener conto del parere della commissione anche se già costituita, qualora egli non voglia applicare a Bologna la legge Albicini.

Ci vorrebbe proprio il concorso di Torino[1] per cavarmi d'impaccio! Sai se Berz[olar]i abbia comunicato ufficialmente la sua decisione, e che cosa stia per fare quella fac[olt]à?[2]

Intanto sono contento del voto della nostra Fac[olt]à, nella cui motivazione, come vedi, si dà un giudizio di merito. Questo è appunto secondo il rettore, nello spirito della legge Albicini, la cui procedura somiglia, secondo lui, a quella per l'applicazione dell'art[icolo] 69 della legge Casati,[3] in cui le proposte sono fatte dalle Facoltà.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina.

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 414, let. 451 (15.5.1899).

[2] La Facoltà di Torino deciderà di affidare per l'anno 1899-1900 l'insegnamento di Geometria proiettiva e descrittiva, vacante a seguito del trasferimento a Pavia di Luigi Berzolari, a Mario Pieri, che era allora libero docente di Geometria proiettiva. La cattedra sarà in seguito messa a concorso: vincitore ne risulterà nel 1901 Gino Fano che da Messina si trasferirà pertanto a Torino.

[3] Cfr. p. 175, nota 1 a let. 178 (3.2.1895) e p. 402, let. 440 (17.3.1899).

454.

25 Maggio [18]99

Carissimo Guido

Capisco di non essermi spiegato chiaramente. La Fac[olt]à non parla affatto di «commissione»; essa si limita ad appoggiare la mia domanda di promozione ad ord[inari]o (da me rivolta al Preside) colla motivazione di cui ti ho parlato. Tutto è stato fatto d'accordo col rettore che trova la mia domanda e il voto della Fac[olt]à ben redatti, in guisa da non contraddire alla legge Albicini.

Ti ringrazio di cuore delle tue profferte. Sarebbe certo molto importante per me di avere una risposta sollecita per aver tempo di agire contro le difficoltà che si presentassero. Mi dispiace soltanto delle seccature che, ancora una volta, vorrai prenderti per causa mia.

Il rettore dice che cercherà dal canto suo di provocare dal M[inistr]o la mia nomina, e che io cerchi di premere nello stesso senso, perché le difficoltà da vincere sono ormai soltanto politiche o economiche; il M[inistr]o esiterà probabilmente a coprire un nuovo posto d'ord[inari]o in previsione della nuova legge.

Vedo dalle tue lettere che tu sei pure d'accordo con me, che nelle condizioni attuali è il caso di andare per la via più pratica, ed ho piacere del tuo consenso.

Nota che non si può neppure mettere in dubbio presso il M[inistr]o ch'egli debba attenersi alla legge Albicini, altrimenti per me non vi sarebbe posto.

Io ti informerò appena sappia con sicurezza che di qua è stato trasmesso al M[inistr]o il voto della Fac[olt]à. Intanto ho scritto al Dini perché mi appoggi. Così ai primi di Giugno spero di poter sapere qualcosa delle intenzioni del M[inistr]o, in modo da regolarmi in conseguenza: se il M[inistr]o fosse contrario alla mia nomina, potrei mandare al Preside della Fac[olt]à di Torino una domanda perché si apra un concorso d'ord[inari]o. Prima di saper nulla, questo passo non mi par conveniente, e per riguardo alla Fac[olt]à di qui dopo il voto recente e per riguardo a quella di Torino, visto che (per molte ragioni economiche e di famiglia) io preferirei sempre di restare a Bologna.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

455.

[s. d.]

Carissimo Guido

Se il D'O[vidio] te ne domanda, digli pure che io desidererei vivamente l'apertura del concorso per ord[inari]o a Torino; io dirò pure lo stesso al S[egre], sebbene non possa prendere alcun impegno. D'altronde un impegno si prende quando si sollecita addirittura un posto, mentre la domanda del concorso è assai obiettiva, ed il Fano potrebbe unirsi a me nel promuoverla.

Finirò le lezioni Martedì. Quest'anno ho potuto esaurire il mio programma, tanto per la Pr[oiettiv]a che per la Descr[ittiv]a.

Ora vengo a parlarti di un progetto, che spero di attuare con poca fatica. Si tratta di un libro[1] dedicato a tutte le questioni che interessano la G[eometria] elementare (fra queste vi sono anche quei problemi non di 2° gr[ad]o trattati dal Klein,[2] ma le questioni sono moltissime). Mi propongo non di farlo, ma di farlo fare a giovani laureati e ad insegnanti delle scuole secondarie, serbando a me, o a qualche altro matematico che volesse occuparsene, la trattazione di qualche argomento più delicato.

Da te vorrei avere un'idea di ciò che hai fatto (mi pare l'anno scorso) sui problemi in G[eometria] analitica. Se alle tue lezioni assisteva qualche giovane di cui ci si possa fidare, lo incaricherei magari volentieri della redazione di quell'art[icol]o, che potrebbe consistere in un rapporto su quelle tue lezioni.

Io mi propongo di trattare diffusamente i metodi proiettivi per la riso-

luzione dei problemi, sviluppando con dettagli molte cose accennate nel mio libro.[3]

Ma il programma dell'opera è assai ampio perché comprende oltre i problemi, anche le questioni più controverse come le «equivalenze» le «parallele» i «postulati», l'«utilità delle costruzioni spaziali per la G[eometri]a piana» ecc.

Cordiali saluti anche all'E[lbina]

Tuo
Ghigo

[1] Enriques 1900c.
[2] Cfr. Klein 1895.
[3] Enriques 1898f.

456.

6 Giugno [18]99

Carissimo Guido

Ho parlato col rettore. Egli ritiene che il M[inistro] possa nominare ord[inar]i anche per cattedre non contemplate dalla legge Albicini ma aggiunte dal regolamento successivo, perché anche queste seguono la natura delle prime.[1] Questa tesi è stata accolta di fatto per la Fac[olt]à di legge.

Ma per essere pratici egli cercherà la via più breve perché il M[inistr]o non abbia a suscitare obiezioni. Bisogna però che il M[inistr]o dal canto suo risponda subito.

Il rettore dice che il M[inistr]o non è benevolo come vuol far credere, e susciterà forse più tardi nuove difficoltà. Intanto il più temibile è che guadagni tempo col lasciar passare questo mese avanti di rispondere; così la Fac[olt]à non potrebbe replicare fino ad Autunno.

Credi che sia il caso di parlare della cosa al Cr[emona], per avere da lui un consiglio e occorrendo un appoggio? Purché però il Cr[emona] non sia egli stesso contrario all'applicazione a Bologna della legge Albicini. In questo caso però egli dovrebbe considerare, che ad altra Fac[olt]à la legge è stata applicata nel modo più largo, e che ad ogni modo colla nuova legge universitaria ora in discussione questo stato di cose cesserà. Tutto sta per me di essere stato nominato in tempo!

Tanti saluti cordiali insieme all'E[lbina]

Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 402, let. 440 (17.3.1899) e, per il regolamento universitario, Amante, *Il regolamento universitario* cit.

457.

9 Giugno [18]99

Carissimo Guido

Col caldo che certo a Roma si farà sentire anche più di qua, sarà stata per te una noia e una fatica di ritornare al M[inister]o; perciò te ne sono doppiamente grato.

Ho potuto verificare che il Cremona venne qui prof[essor]e di G[eometria] Superiore;[1] poi fu incaricato della G[eometria] Descrittiva; dopo la sua partenza questo incarico fu dato al Boschi mentre la G[eometria] Sup[eriore] non fu più coperta;* solo qualche anno dopo (verso il 75) l'insegnamento della G[eometria] Pr[oiettiv]a fu unito a quello della Descr[ittiv]a e quindi divenne titolare delle due cattedre lo stesso Boschi, più tardi promosso ord[inari]o.

Da ciò emergerebbe che la G[eometria] Sup[eriore] della legge Albicini dovrebbe intendersi come equivalente alla G[eometria] Pr[oiettiv]a, e l'aggiunta della Descr[ittiva] costituirebbe un ampliamento della stessa cattedra. Ho saputo poi dal Fiorini che quando qui istituirono la G[eometria] Sup[eriore] ignoravano di che cosa si trattasse, ma in quell'epoca si tendeva ad arricchire l'Università di tutti gli insegnamenti possibili, ed anche questo fu istituito nel convincimento che si trattasse di una G[eometria] elementare un po' più elevata!

Ti ho già detto che il rettore sostiene che il M[inistr]o può fare ord[inar]i anche di cattedre aggiunte dal reg[olament]o dopo la legge Albicini; egli dice che ciò fu ammesso conforme al parere della Fac[olt]à giuridica, e in ogni caso non mancherà di far valere *anche* queste ragioni.

Spero che tutto si accomoderà presso la Divisione, ma temo invece del M[inistr]o che già so esser contrario per ragioni economiche (salvo pei suoi protetti); così mi hanno detto a proposito della proposta fatta dalla Fac[olt]à medica pel Poggi.

Se tutto si accomodasse presto alla Divisione, potrei forse profittare dell'occasione che il Puntoni si reca a Roma alla fin del mese, per venire anch'io e veder di ottenere il consenso del M[inistr]o.

Che cosa ti hanno detto alla Divisione circa la procedura che seguirebbero?

Intanto il Segre mi scrive che a Torino accoglieranno probabilmente il Mattirolo, sebbene egli e il Volt[erra] si preoccupino della cattedra di Geom[etria].[2]

Ho già trovato alcuni collaboratori pel libro progettato sulle questioni

* Più tardi istituito il 2° biennio P[incherl]e ebbe l'incarico di G[eometria] Sup[eriore] (intesa ora in un altro senso) e convertita poi in Mat[ematiche] S[uperior]i.

di G[eometria] elementare.[3] Aspetto in proposito la tua risposta relativa ai problemi di G[eometria] analitica.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina]. Tuo
Ghigo

[P.S.] Quando ti proponi di venire a Vallombrosa?

[1] Sulla cattedra di Geometria superiore, istituita con un decreto legge da Carlo Farini nel marzo 1860 (cfr. p. 403, nota 2 a let. 440, 17.3.1899), venne allora nominato (senza concorso) Luigi Cremona: cfr. S. Francesconi, *L'insegnamento della matematica nell'Università di Bologna dal 1860 al 1940*, in S. Coen (a cura di), *Geometry and Complex Variables*, Dekker, New York 1991, 415-74.

[2] Cfr. p. 418, nota 2 a let. 453 (22.5.1899).

[3] Cfr. Enriques 1900c e p. 419, let. 455 (s.d., 1899).

458.

[s.d.]

Carissimo Guido

Grazie di avermi avvisato subito di una difficoltà che siamo in tempo a parare. La cosa non offrirebbe in sé alcuna incertezza; l'unico punto sta nella resistenza che può offrire il P[incherl]e per ragioni di suscettibilità personali, che ora ti spiegherò. Ma anche queste, spero, si supereranno mettendo bene le cose a posto.

Io credo (e cercherò di provarlo) che la cattedra di G[eometria] Superiore tenuta qui dal Cremona si sia trasformata in cattedra di G[eometria] Pr[oiettiv]a e D[escrittiva]; certo inizialmente l'insegnamento fu quello della G[eometria] Pr[oiettiv]a.

Più tardi, quando fu aggiunto il 2° biennio, si istituirono due incarichi; l'uno di Analisi e l'altro di G[eometria] Superiore, il 2° fu dato al P[incherl]e.[1] Poi i due incarichi cambiarono nome, ed ora sono Matematiche Sup[erior]i. Dunque la G[eometria] Sup[eriore] fu intesa in epoche diverse in due sensi diversi; nel senso della legge Albicini è G[eometria] Pr[oiettiv]a.

Ora il P[incherl]e vedrebbe certo di mal occhio un prof[essore] di G[eometria] Sup[eriore]. E perché gli parrebbe grado superiore a quello di un prof[essore] del 1° biennio (!), e perché gli parrebbe di essere in certo modo menomato, avendo tenuto lui il vero insegnamento della G[eometria] Sup[eriore].

Bisognerebbe dunque convincere il P[incherl]e che non si tratta di darmi una vera cattedra di G[eometria] Sup[eriore], ma di chiamare sotto questo nome la G[eometria] Pr[oiettiv]a. E la Fac[ol]tà potrebbe benissimo dichiararlo, e il M[inistr]o facendo la nomina secondo la legge Albicini potrebbe dichiarare anche lui che l'insegnamento della G[eometria] Sup[eriore] isti-

tuito dalla legge Albicini, terrà luogo per la nostra Un[iversi]tà della G[eometria] Pr[oiettiv]a e D[escrittiva] contemplata dal regolamento universitario, onde il prof[essor]e sarà sempre obbligato a fare un corso il cui esame sia obbligatorio per la licenza universitaria.

Spiega bene questo al P[incherl]e, e vedrai che le difficoltà spariranno. Ma bisognerebbe che dal M[inister]o rispondessero subito.

Intanto io parlerò col rettore e col preside.

Affettuosi saluti Ghigo[2]

PS Ho parlato col Preside. È ben disposto purché si trovi modo di specificare nel decreto che la Geom[etria] Sup[eriore] costituisce l'insegnamento fond[amentale] prescritto dai regolamenti. Però la Fac[ol]tà non potrà far nulla finché il M[inistr]o non presenti ufficialmente le sue obiezioni; bisognerebbe che ciò accadesse prima che tutti vadano via.

[1] L'incarico di Analisi superiore fu affidato a Cesare Arzelà.

[2] Nell'originale, a sinistra, in parte coperta dalla firma e cancellata con un tratto di penna, compare la sigla «FE».

459.

18 Giugno [18]99

Carissimo Guido

Ti ringrazio della tua premura. Non è giunta fin ora alcuna risposta dal Ministero. Appena giunga, la Fac[olt]à si riunirà per confutare le obiezioni presentate. A quanto mi dice il Preside la Fac[olt]à sosterrà in 1° luogo che il M[inistr]o può nominare un ord[inari]o per una cattedra aggiunta per regolamento dopo la legge Albicini (c'è il precedente di Rava); in 2° luogo che il M[inistr]o deve considerare la G[eometria] Sup[eriore] della legge Albicini come equivalente all'attuale Pr[oiettiv]a, e quindi può nominarmi ord[inari]o di G[eometria] Sup[eriore] e Descrittiva.

Io poi, all'occorrenza, sosterrò le mie ragioni facendo valere, in un promemoria gli argomenti da te addotti ed altri che mi vengono suggeriti dal prof. Rossi, della fac[olt]à di legge, che recentemente ha dovuto lottare in causa propria per ottenere (come ha ottenuto) l'ordinariato.

Se la Fac[olt]à potrà riunirsi presto, prima che il Puntoni vada a Roma, io profitterò probabilmente di questa occasione per venire a perorare la mia causa. Se ciò non accade, mi pare inutile, finché almeno non possa contare che qualcuno mi appoggi direttamente, e al bisogno, mi presenti al Ministro. È proprio una combinazione sfavorevole che tutti questi matematici pezzi grossi, non sieno in migliori rapporti con lui.

Non mi hai mai detto se sei riuscito a smontare le suscettibilità del P[incherl]e persuadendolo che facendo passare la mia cattedra per G[eometria] Sup[eriore], non s'intende già di darmi effettivamente una cattedra di Matematiche Sup[erior]i.

Aspetto le notizie che potrai avere dal P[incherl]e stesso, ed intanto ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

460.

[s. d.]

Carissimo Guido

Tutto immerso negli esami (ho finito i miei ma sono nella commissione di Zoologia)[1] ti scrivo in fretta le ultime notizie relative al mio affare.

Il P[resid]e ha portato dal M[inistr]o la risposta che... non vogliono rispondere ufficialmente perché ciò impegnerebbe il M[inistr]o a mettere in bilancio la somma occorrente. Dopo ciò si è pensato che la Facoltà può mandare al M[inistr]o le considerazioni che crede più opportune a titolo di schiarimento ed in appoggio al voto fatto, così da confutare le obiezioni non formulate. E siamo d'accordo che la Facoltà presenterà all'uopo, come di sua iniziativa, un pro-memoria da me redatto col consiglio del prof. Rossi competente in tali questioni di diritto anche per ragioni personali.

In questo pro-memoria si mette in luce che a Bologna non vige la limitazione degli ord[inar]i e si ricordano i precedenti di fatto. Quindi si avverte che se per Bologna si vuole fissare un limite agli ord[inar]i questo deve essere desunto dalle leggi locali che danno 13 ord[inar]i alla nostra F[acolt]à, mentre ora ne abbiamo soltanto 12. Così si fa p[er] e[sempio] a Napoli ove sempre si nominano senza obiezioni ord[inar]i di materie aggiunte coi regolamenti posteriori alla legge Imbriani[2] (v[edi] p[er] e[sempio] Montesano) purché non si passi il numero delle cattedre istituite con quella legge.

Dopo si osserva che le leggi locali istituiscono qui la G[eometria] Sup[eriore] e si sostiene colle ragioni da te indicate l'equivalenza di tale cattedra con quella di Pr[oiettiv]a e Desc[rittiv]a.

Infine si insiste sull'importanza della cattedra di G[eometria] Pr[oiettiv]a e Desc[rittiv]a che in altre Un[iversi]tà è divisa in due.

E si conclude affermando che il M[inistr]o può far la nomina, sia riguardando la cattedra di G[eometria] Pr[oiettiv]a e Desc[rittiv]a come un insegnamento qui istituito dai regolamenti, ma pur non eccedendo il n[umer]o dei 13 ord[inar]i che spettano alla nostra F[acolt]à, sia considerando la

G[eometria] Pr[oiettiv]a e Desc[rittiv]a come compresa nel decreto-legge Farini sotto la denominazione di G[eometria] Sup[eriore].[3]

Così si salva il pericolo, temuto giustamente dal P[incherl]e, riguardo al suo incarico di Mat[ematiche] Sup[erior]i che la Corte dei Conti registra ora come G[eometria] Sup[eriore] (benché facile sarebbe cambiarne il nome), perché il M[inistr]o dovrebbe far il decreto dando alla G[eometria] Pr[oiettiv]a e Desc[rittiv]a (1° biennio) il posto d'ord[inari]o attribuito nelle leggi locali alla G[eometria] Sup[eriore] ma sotto il nome Pr[oiettiv]a e nulla gli vieta di aggiungere poi incarichi o anche cattedre complementari di G[eometria] S[uperiore].

La Fac[ol]tà si riunirà il 28, giorno delle lauree, [+++]

[1] Cfr. p. 342, c.p. 378 (15.6.1897) e seguenti.

[2] Paolo Emilio Imbriani fece parte, per l'Istruzione, del Consiglio di Luogotenenza nominato a Napoli nel gennaio 1861. Quando nel marzo il Consiglio fu abolito, Imbriani divenne uno dei quattro direttori per l'Istruzione, l'Agricoltura e il Commercio.

[3] Cfr. p. 422, nota 1 a let. 457 (9.6.1899).

461.

28 Luglio [18]99

Carissimo Guido

Non starò a ringraziare te e l'Elbina per le accoglienze affettuose e cordiali ricevute durante il mio soggiorno a Roma; vi dirò soltanto che mi è dispiaciuto di portarvi un po' di disturbo in giornate tanto affaccendate, sicché, se non fosse la vostra bontà ed il vostro affetto, crederei di avere un po' abusato delle vostre gentili profferte. A te in particolare ho recato altre noie che temo non saranno finite, e dell'aiuto che sempre così amorosamente mi hai dato, non saprei dirti abbastanza la mia gratitudine.

Che l'Elbina si rimetta presto un po' in forza, e venite a Vallombrosa! Vedrete che soggiorno piacevole, che aria fresca e pura se anche non vibrante come nell'alta montagna!

Mi è piaciuto tutto, sotto tutti i rapporti, ma, perché non vi è nel mondo una perfetta felicità, c'è qui un piccolo bruscolo... arrivato ieri mattina insieme a me. Hai indovinato?

La cara compagnia che temo fra una decina di giorni non ti potrà più deliziare (ed egli lo rammarica) è l'unica che tolga la più perfetta libertà anche dal lato socievole. Infatti, vedrai, che qui si sta sotto il rapporto società come in una città, senza avere compagnia forzata vicino, e potendo andare a cercarla più lontano ove piaccia.

Insomma credo che anche voi altri vi troverete benissimo. E desidero, quanto più presto sarà possibile, la vostra venuta.

Tante cose affettuosissime all'Elbina e a te e mille bacioni al bel Mario.

Ghigo

462.

21 Sett[embre 18]99

Carissimo Guido

Non ci siamo più scritti dopo la tua partenza, il cui vuoto si è accresciuto dopo che se n'è andata via l'Elbina e quel bel faccione di Mario. Ma, come saprai, la Luisa non è stata bene e non sta bene tuttora, né ancora sappiamo a qual causa attribuire con sicurezza questo malessere.

Io ho seguitato ad occuparmi delle questioni sui principii della Geometria[1] ed ho ormai compiuto il capitolo sulla teoria delle parallele. Mi resta a trattare la teoria dell'equivalenza e la Geometria ellittica per esaurire il programma elementare. Vorrei poi chiudere questa parte con osservazioni sull'indipendena dei vari gruppi di postulati.

Ho già ricevuto un articolo del Vitali[2] per la mia Collectanea «Le applicazioni della continuità», trattate in modo soddisfacente. E d'altra parte il Guarducci mi ha mostrato un abbozzo del suo art[icol]o[3] sulla congruenza in cui ha tenuto conto delle mie osservazioni, sicché spero che anche questo scritto risulti assai ben fatto. L'autore ha trattato bene da sé, quel che si riferisce all'eguaglianza dei triangoli nei sistemi di Pasch e Hilbert.[4]

Ora nell'Ottobre mi verranno tutti gli art[icol]i da riguardare, e ciò mi darà molto da fare.

Per coordinare gli scritti relativi ai problemi costruttivi, mi occorrerebbe di avere non più tardi degli altri anche l'art[icol]o che tu mi hai mezzo promesso,[5] e al quale altri andrebbero in certo modo subordinati.

Non ti dirò quanto piacere mi faresti cambiando la speranza della tua collaborazione in un acquisto, che riuscirà a tutti particolarmente gradito.

Se per ciò ti occorre il libretto di Hilbert te lo manderò subito.

Credo che tu potrai far la cosa in pochi giorni senza fatica, e per questo appunto mi permetto d'insistere; naturalmente mi risponderai senza complimenti se dal soggiorno delle Alpi non ti senti ancora rimesso in modo da sopportare senza danno questo piccolo lavoro.

Ti saluto con tutto l'affetto, pregandoti di abbracciare per me l'Elbina e i bimbi,[6] e di ricordarmi ai Tuoi.

Ghigo

[1] Cfr. p. 407, nota 1 a let. 443 (5.4.1899).
[2] Vitali 1900.
[3] Guarducci 1900.
[4] Cfr. Pasch 1882; Hilbert 1899.
[5] Cfr. Castelnuovo 1900 e p. 421, let. 457 (9.6.1899).
[6] Mario e Maria, nata il 15 luglio 1899.

463.

2 Ottobre [18]99

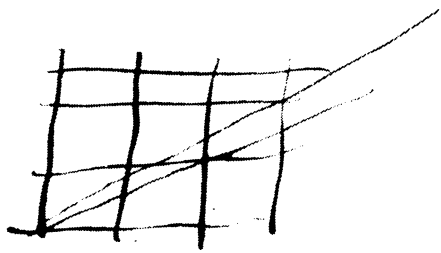
Carissimo Guido

Luisa sta molto meglio e tutto procede regolarmente; grazie degli auguri cordiali.

Sono contento di ciò che mi scrivi dell'articolo[1] di cui ti occupi, il quale riuscirà interessantissimo.

In esso potresti forse trovar posto per un breve cenno sulla costruzione approssimata d'un irrazionale μ, fondata sullo sviluppo di μ in frazione continua. Le successive ridotte $\frac{p_n}{q_n}$ corrispondono ai coefficienti angolari θ_n delle congiungenti l'origine coi punti (p_n, q_n) e $\mu = \lim \theta_n$.

Ciò si traduce in una semplice costruzione grafica.



Se credi di esporre brevemente la cosa, potrai riservarti di citare poi chi sia il caso.

In quanto al titolo, occorre trovare i titoli anche degli altri articoli che precedono il tuo, come vedi segnato nel Programma. Perciò io desidererei che nel tuo figurasse una qualche parola precisante che si tratta di considerazioni relative alla Geometria analitica; ti piacerebbe p[er] e[sempio]: «Prime questioni sulla risolubilità dei problemi considerata nella Geometria analitica»? o trattati col metodo analitico?

Ho finito la parte del mio trattato[2] relativa alle questioni nel campo elementare, salvo qualche punto su cui dovrò ritornare; mi propongo ora di occuparmi dei principii della Geometria analitica, ove vedo questioni interessanti.

Fra le cose fatte nel campo elementare, ti parrà forse non priva di interesse la seguente. Dopo aver enunciato 6 gruppi di postulati (I sull'appartenenza di rette e p[ia]ni, II ordini o div[isione] in parti della retta, III divisione in parti del piano, IV divisione in parti di S_3, V congruenza, VI continuità) mi domando se non si possa attribuire a tali post[ulat]i una *validità limitata* all'intorno d'ogni punto. Se ciò si ammette per i post[ulat]i II, III, IV vien fuori il sistema ellittico; se si ammette per tutti i post[ulat]i tranne il V (cui si accorda validità illimitata) vien fuori oltre ai 3 sistemi anche lo «sferico».

Come vedi c'è qui il teorema di Killing,[3] ma dimostrato elementarmente. Anche Veronese[4] ha tentato una tale dimostrazione, ma ha ammesso un'ipotesi inutile cioè che un punto d'una retta a insieme ad un punto A fuori di a determini sempre la retta. In sostanza egli ammette a priori che una coppia di p[un]ti che non determinano la retta debba appartenere a tutte le rette passanti per uno dei due punti, mentre ciò può essere dimostrato semplicemente.

Ho anche costruito una serie di esempi assai semplici per mostrare l'indipendenza ordinata dei vari gruppi di postulati.

A proposito d'indipendenza ho un'obiezione da fare al modo come Hilbert[5] pretende stabilire l'indipendenza dei suoi post[ulat]i della congruenza dai precedenti.

Prima di tutto bisogna intendersi sul significato di tale indipendenza. Quando un post[ulat]o B racchiude un concetto nuovo (come la congr[uenz]a) non definibile per i prec[eden]ti A, si può a priori affermare l'indipendenza di B dai prec[eden]ti A. Ma se si vuole una indipendenza veramente significativa, bisogna mostrare che da B si può dedurre qualche ipotesi relativa ai soli concetti contenuti in A, e indipendente da A.

Ora che cosa fa Hilbert? Parte da uno S_3 che verifica i post[ulat]i A (anteriori alla congr[uenza] B), e pone in S_3 convenzionalmente i concetti di congr[uenza] segmentaria ed angolare in modo che non resti verificato l'ultimo dei post[ulat]i B.

Così egli prova l'indipendenza di quest'ultimo post[ulat]o dai post[ulat]i della congr[uenza] segmentaria ed angolare; non l'indipendenza del gruppo B da A.

Non ti par giusto?

L'esempio di cui io mi servo è assai semplice. Prendo un semispazio S, considerato come S_3, e suppongo che in un modo qualunque si possa porre in esso il concetto della congruenza in guisa da soddisfare a tutti i relativi post[ulat]i; allora vengo ad un assurdo perché in S dovrebbero valere e non valgono, alcune proposizioni della teoria generale delle parallele.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina] e ai bimbi, e ti prego di ricordarmi ai Tuoi.

Ghigo

[1] Castelnuovo 1900.
[2] Cfr. p. 407, nota 1 a let. 443 (5.4.1899).
[3] Cfr. Killing 1893-98, I, 313.
[4] Veronese 1891, 435.
[5] Cfr. Hilbert 1899, § 11.

464.

12 Ott[obre 18]99

Carissimo Guido

Avrai già ricevuto il lavoro dell'Hilbert,[1] e così potrai portarmi qui il lavoro[2] bell'e terminato. Se è venuto un po' lungo mi dispiace, giacché credo che tutto insieme il libro non supererà una conveniente misura. Ancora non posso però giudicarne, perché all'infuori di *tre*, questi lavori si fanno aspettare; vedi puntualità dei collaboratori!

Tu senza aver preso alcun impegno sarai dunque fra i primi a consegnarmi il manoscritto; e questo è un bene perché gli altri articoli sui problemi saranno in certo modo subordinati al tuo.

Colle questioni sui principii della G[eometria] Analitica[3] vado avanti molto lentamente, avendo dovuto ricostruire da me la curva di Peano[4] che riempie un quadrato, ed alcuni teoremi sulle curve continue che credo si trovino nel Jordan.[5]

Intanto vado anche pensando al miglior modo di svolgere i principii della G[eometria] proiettiva, e incline a seguire piuttosto la via di Möbius che quella di Staudt. È molto più breve, e non presenta che un difetto: data una corrispondenza fra due piani (o S_3) in cui ai p[un]ti d'una retta corrispondano i p[un]ti di una retta manca la dimostrazione che la corrispondenza (fra due rette omologhe) è *ordinata* (quindi continua pei piani).

Ma questa dimostrazione si può dare senza ricorrere agli sviluppi di Staudt. Fatta la teoria delle proiettività (continue) fra piani e rette (omologhe in p[iani] pr[oiettiv]i), si può notare che una corr[ispondenza] fra 2 p[ia]ni che muta le rette in rette, trasforma anche le *proiezioni* e le *sezioni* in operazioni analoghe, quindi le Πà [proiettività] sopra una retta in Πà [proiettività] sull'omologa, ed anche le Πà [proiettività] d'un gruppo parabolico dell'una in Πà [proiettività] d'un gruppo parabolico dell'altra; da ciò si desume che la corrispondenza fra 2 rette omologhe è ordinata.

Ma il metodo di Möbius ha un altro, notevole vantaggio. Si può svolgere la teoria della Πà [proiettività] fra triangoli o tetraedri, evitando così

tutti gli sviluppi relativi ai p[unt]i ideali, i quali possono introdursi dopo p[er] e[sempio] analiticamente.

Insomma si riesce ad una fondazione della G[eometria] pr[oiettiv]a, ricorrendo soltanto a proiezioni e sezioni e al post[ulat]o di Dedekind, senza dare né il teor[ema] dei triang[ol]i omologici, né il concetto di gruppo armonico! Di tutto ciò si può parlare dopo, in un cap[itolo] sui teoremi di configurazione.

Ti saluto affettuosamente e a rivederci a presto

Ghigo

[P.S.] Per il mio ordinariato[6] non so nulla e vado pensando al modo di avere informazioni dal nuovo direttore Chiarini.

[1] Hilbert 1899.
[2] Castelnuovo 1900.
[3] Cfr. p. 407, nota 1 a let. 443 (5.4.1899).
[4] Cfr. Peano 1890a.
[5] Jordan 1882-87.
[6] Cfr. p. 414, let. 451 (15.5.1899) e seguenti.

465.

31 Ott[obre 18]99

Carissimo Guido

Il Babbo di Luisa ha parlato a Roma col Chiarini, il quale ha promesso di mandare la mia pratica al Cons[iglio] Sup[eriore], senza pregiudicare la questione di bilancio. È un primo passo, purché il Ministero mandi veramente ad effetto la promessa. E perciò sarebbe utile di sorvegliare quando si apra il Cons[iglio] Sup[eriore]. Come vedi mi rivolgo ancora una volta a te per darti delle seccature e conto sul tuo affetto per perdonarmi.

Italo Amaldi, il fratello del nostro assistente,[1] mi brucia l'Art[icol]o sulle equazioni algebriche e poligoni. Dovrò dunque farlo da me.[2] A questo proposito vedo che mi converrà usufruire del resultato dato nel tuo Art[icol]o[3] sotto una forma un po' modificata, riferendomi al piano complesso di Gauss. In questo piano sono certo costruibili colla riga e col compasso i punti $x + iy$ ottenuti a partire da dati $a + bi$, $c + di$ ..., effettuando operazioni razionali e radici quadrate. Anzi le espressioni così ottenute sono anche costruibili col regolo trasportatore. Forse potresti tu stesso osservare la cosa che è, del resto, semplicissima. Forse sussiste anche l'inversa, cioè ogni espressione costruibile col regolo trasportatore può ottenersi nel piano complesso effettuando operazioni raz[ional]i e $\sqrt{\ }$ [radici quadrate] a partire da numeri complessi dati.

Cordiali saluti anche all'E[lbina] e ai bimbi

Aff.mo
Ghigo

P.S. Pare che Chizzoni abbia chiesto di andare a Modena nel posto di Del Re.[4] Per l'altro posto lasciato da Niccoletti[5] il P[incherl]e vorrebbe provvedere coprendo invece l'Algebra col Bort[olott]i.

Che cosa ha fatto il Fano? E perché, se il Fano non andasse, si dovrebbe lasciar fuori il Bagnera?[6]

[1] Ugo Amaldi.
[2] Cfr. Enriques 1900a.
[3] Castelnuovo 1900.
[4] Alfonso Del Re si era trasferito dall'Università di Modena, dove ricopriva l'insegnamento di Geometria analitica, all'Università di Napoli. A seguito di ciò Francesco Chizzoni si trasferì dall'Università di Catania a quella di Modena.
[5] Onorato Niccoletti dall'Università di Modena si era trasferito all'Università di Pisa, dove ricoprì la cattedra di Algebra complementare.
[6] Gino Fano sarà nominato all'Università di Messina il 1° dicembre 1899. Giuseppe Bagnera, terzo classificato al concorso di Pavia (cfr. p. 411, let. 448, 28.4.1899), sarà nominato professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica a Messina il 16 dicembre 1901, dopo il trasferimento di Fano a Torino. Ettore Bortolotti fu nominato professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica all'Università di Modena il 16 gennaio 1900.

466.

3 Nov[embre 18]99

Carissimo Guido

Ti ringrazio e sono lieto che il Chiarini abbia effettivamente dato corso alla mia pratica mandandomela al Cons[iglio] Sup[eriore]. Vedremo ora cosa farà il Cons[iglio].

Quanto alle costruzioni col regolo trasportatore,[1] osserva che un problema risolubile colla riga e col compasso porta a trovare un certo numero di valori di x e di y espressi per $\sqrt{\ }$ [radici quadrate]; ma queste espressioni possono avere valori immaginari. Invece se il problema dipende da un'equazione a coeff[icient]i raz[ional]i in $x + iy$, pare che *tutte* le soluzioni del problema debbano essere reali, condizione che (secondo H[ilbert])[2] basta per l'effettuabilità della costruzione col regolo trasportatore. D'altra parte non so come metter d'accordo questo modo di ragionare colla tua osservazione, e non vedo come si effettui col regolo la costruzione di $\sqrt{x + iy}$.

Ho avuto una cartolina di Padoa che mi fa attendere il lavoro[3] ancora una settimana. Questo sarebbe poco male se potessi contare che il lavoro riesca di mia soddisfazione.

Ho già quasi ultimato l'Art[icol]o sui poligoni.[4]

Saluti affettuosi anche all'E[lbina]. Ghigo

[P.S.] Mi vorresti dare l'indicazione precisa del Longchamps?[5]

[1] Cfr. Castelnuovo 1900.
[2] Cfr. Hilbert 1899, § 37.
[3] Come si chiarirà nel seguito, Alessandro Padoa stava redigendo un articolo da pubblicare in Enriques 1900c.
[4] Enriques 1900a.
[5] Il riferimento potrebbe essere alle lezioni pubblicate del corso di Matematiche speciali: cfr. de Longchamps 1883-85.

467.

13 Nov[embre 18]99

Carissimo Guido

Il rettore ed altri colleghi mi stimolano a non riposare sopra la deliberazione del Cons[iglio] Sup[eriore], facendomi riflettere che essa non impegna il M[inistr]o attuale e meno ancora un di lui successore, il quale potrebbe essere contrario ad applicare qui le leggi locali.[1] Perciò il rettore ha scritto al M[inistr]o pregandolo vivamente (ove voglia accogliere il parere del Cons[iglio]) a riunire subito la mia commissione. Mi assicurano che ciò sarà possibile pur d'insistere convenientemente.

A tale scopo io verrò probabilmente a Roma, ma non più a file impreparate, bensì avendo tutto preparato per presentarmi al M[inistr]o con un deputato influente che prenda a cuore la cosa. La riuscita della preparazione è condizione essenziale del mio viaggio; tanto più che potrei trattenermi soltanto pochi giorni.

Ti scriverò domani appena avrò deciso qualcosa di più concreto, in seguito ai consigli che aspetto di alcuni colleghi.

La difficoltà teorica per me sarebbe una sola, e cioè che, radunata la commissione, occorrerebbe attendere il collaudo del Cons[iglio] Sup[eriore], ma tutti mi dicono che il M[inistr]o passerebbe sopra, non essendo ciò imposto dalle leggi locali.

Ti saluto affettuosamente e ti dico forse a rivederci a presto.

Ghigo

[1] Cfr. p. 402, let. 440 (17.3.1899).

468.

14 Nov[embre 18]99

Carissimo Guido

Aggiungo qualche altra spiegazione alla lettera di ieri.

L'applicazione della legge Albicini dà sempre luogo a dei dubbi; tant'è vero che la corte dei Conti ha rifiutato di registrare il decreto di nomina

del prof. Venezian, nominato ordinario di diritto civile per concorso, adducendo credo (fra le altre ragioni) che il decreto era mal motivato facendo menzione (suppongo per la procedura) anche della legge Casati.

Tutti sono sicuri che la cosa si accomoderà, perché si conta su Baccelli. Ma ti ho citato il caso soltanto come un indizio delle difficoltà che possono sorgere.

I prof[essor]i di legge che si sono trovati in mezzo, specialmente Bolaffio e Rava s'interessano assai gentilmente al caso mio e mi spingono ad agire.

Essi si propongono d'interessare alla mia causa il deputato Danieli, il quale mi assicurano possa molto se prende a cuore una cosa. Quando io abbia affidamento dell'appoggio del Danieli, verrò a Roma. Si tratta di parlare con Baccelli; sottoporgli lo stato delle cose che certo egli ignora; domandargli se intende accogliere il parere del Cons[iglio] Sup[eriore], ed in questo caso chiedergli che convochi la commissione subito, e si impegni a fare la nomina (dato il voto favorevole di essa) o per il 1° Gennaio, o al più tardi nell'Aprile ove ritenga necessario il collaudo del Cons[iglio] Sup[eriore], ma in questa 2ª ipotesi prenda fin d'ora un impegno formale rispondendo alle numerose sollecitazioni del rettore e al voto della Fac[olt]à. Quando ci fosse un tale impegno, ed il voto d'una commissione già riunita, anche un successore dell'attuale M[inistr]o si troverebbe impegnato.

Qualora poi al M[inistr]o non piaccia di accogliere il parere del Cons[iglio] Sup[eriore], e ripresenti obiezioni alla nomina (ad es[empio] quella del titolo della cattedra), si avrebbe modo di agire subito a seconda dei casi.

Come puoi immaginarti io sono assai seccato di dovermi mettere in mezzo a queste pratiche, e soltanto il successo potrebbe compensarmi. Cedo alle insistenze energiche e amichevoli dei colleghi e ai consigli del rettore che mi pongono in guardia contro una troppo tranquilla aspettativa. Appena avrò deciso qualcosa ti scriverò ancora.

Ho avuto l'art[icol]o di Padoa, che non posso assolutamente accettare.[1] Non tratta l'argomento ma eleva invece una teoria costruttiva, quasi una monografia del punto e del segmento. Naturalmente gli scrivo in modo gentile che il suo scritto non è in coordinazione cogli altri. Provvederò ponendo pochi cenni sul segmento e l'angolo nell'art[icol]o di Amaldi[2] «Retta e piano».

Affettuosi saluti Ghigo

[1] Per la pubblicazione in Enriques 1900c.
[2] Amaldi 1900.

469.

16 Nov[embre 18]99

Carissimo Guido

Le tue osservazioni sono giuste, e ti sono veramente grato di dirmi sempre schietto il tuo pensiero. In qual conto io lo tenga, vedrai da quanto segue.

Due punti mi colpirono dapprima nei consigli dei colleghi: 1) la necessità di non adagiarsi in una tranquilla aspettativa; 2) l'opportunità di approfittare delle forze che essi, in questo momento, mettono a mia disposizione.

Debbo dirti, del resto, che essi non sono per nulla interessati nella questione, e che il rettore stesso è disposto ad accettare il principio della procedura regolamentare, ritenendo ad ogni modo che il Ministro potrà discostarsene in casi eccezionali.

Ora maturando il modo d'azione che più mi convenga, sono venuto in questo proposito: tendere con tutte le forze a che il M[inistr]o accolga, per quanto mi concerne, il parere del C[onsiglio] S[uperiore], e mi nomini subito la commissione impegnandosi a fare il decreto in Aprile dopo che il C[onsiglio] S[uperiore] ne abbia convalidato il voto.

Se anche il M[inistr]o non vorrà prendere tale impegno, basta per ora che mi nomini la commissione, giacché (a parer anche dei colleghi di legge), questo atto lega in certo modo anche il successore (qualora cada Baccelli) a dare esito alla pratica, conforme ai regolamenti.

In questa richiesta, come vedi, non c'è nulla di male, ed io mi propongo anzi di tenerla nascosta ai membri del Cons[iglio] Sup[eriore].

Del resto tu sai che hai dovuto lottare per far riunire la tua commissione in Aprile, e capisci che mi contenterei anche della promessa del M[inistr]o di radunarla per quell'epoca.

Se poi Baccelli non volesse riunirmi la commissione, non piacendogli di accogliere il parere del C[onsiglio] S[uperiore], io potrei esporre la cosa ad un membro dello stesso C[onsigio] p[er] e[sempio] al Cerruti, il quale allora sarebbe interessato ad appoggiarmi ed, ove non riuscisse troverebbe giusto ch'io agissi direttamente nel senso di ottenere la nomina.

Ma questa eventualità non mi pare punto probabile, perché io cercherei di fare intendere al M[inistr]o che, seguendo per me la procedura caldeggiata anche dalla Divisione, egli non si vieterebbe di usufruire nel senso più largo dei diritti che le nostre leggi locali gli consentono.

Credo che il nodo d'azione, così tracciato, che mi propongo, non debba incontrare la disapprovazione tua né di altri. Se non si trattasse di usufruire oggi degli appoggi che mi vengono offerti, e di far compiere al M[inistr]o un primo atto impegnativo, potrei aspettare al Marzo a muovermi; ma, così stando le cose, mi conviene agir subito. Ti aggiungerò che,

ove incontrassi delle difficoltà, credo la Fac[olt]à sarebbe disposta a rinnovare il voto per la mia promozione, ed anche questo esigerebbe un po' di tempo.

Or non mi resta che ringraziarti della cordiale ospitalità che mi offri, della quale senz'altro approfitterei; ma vorrei esser sicuro che nella cresciuta tua famiglia, non porterei troppo disturbo.

Ti saluto affettuosamente insieme all'E[lbina] e ai bimbi.

Ghigo

[P.S.] Ho combinato collo Zanichelli per i Collectanea.[1] Egli mi darà £ 400.

Ho qualche speranza di potere sabilire che la var[ie]tà $x^2 + y^2 + z^2 + t^3 = 1$ non è razionale, perché mi sembra che essa ammetta un gruppo di trasf[ormazion]i birazionali che non esiste nello spazio. Ma la cosa che non ho avuto il tempo di approfondire esige naturalmente le più grandi riserve.

[1] Enriques 1900c.

470.

19 Nov[embre 18]99

Carissimo Guido

Dato che siamo ormai d'accordo nella questione di massima, troverai giusto che per la scelta del momento d'azione io tenga conto del fatto che ora dispongo di appoggi, che più difficilmente più tardi potrei ritrovare.

Del resto prevedo che il tempo occorrente per gli accordi preliminari, mi condurrà vicino alle vacanze di Natale; ed anche i colleghi di qui mi consigliano ad aspettare che la situazione parlamentare si sia un po' delineata in modo che il M[inistr]o sia più tranquillo.

Ti rinnovo poi i ringraziamenti per la cordiale ospitalità che mi offri, della quale volentieri approfitterò. Avrò così il piacere di stare qualche giorno con voi.

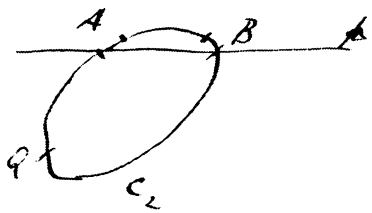
Ti sarai accorto dell'abbaglio preso relativamente a quella var[ie]tà cubica, la quale ha una conica 2-pla.

Studiando più da vicino la varietà $x_5^3 = f_3(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$, S_3 3-plo con F_3 di diramazione, mi par proprio di potere affermare (per due vie) che essa è razionale, sebbene non abbia p[un]ti 2-pli.

Il modo più semplice di dimostrarlo mi pare il seg[uen]te:

Considero 2 rette sghembe p e q della F_3 di diramazione, ed i p[ia]ni (3-pli) per p. In un p[ia]no per p c'è una C_3 di diramazione composta di

p e di una conica C_2. Sopra C_2 c'è un p[un]to Q sezione di q. Ora considero le cubiche aventi in Q un p[unt]o 2-plo e tangenti in A e B alla C_2.



In A e B sono assorbite 3 intersezioni con C_3, che si elidono; in Q 2 intersezioni che contano come una. Pertanto le dette cubiche 3-ple hanno con $C_3 = C_2 + p$ 2 intersezioni sicché rappresentano curve raz[ional]i. Tali curve formano una rete su ogni sup[erficie] proiettata su un p[ia]no 3-plo per p, rete di grado 3 che si estende e conduce ad una rappresentazione determinata dalla sup[erficie] su un piano. Perciò V_3 risulta razionale.

Ho cercato inutilmente di estendere il metodo alle V_3 generali.

Tuttavia relativamente agli S_3 2-pli con F_4 di diramazione, mi par di vedere che essi sono raz[ional]i se la F_4 ammette una, e quindi ∞^1, F_2 tangenti lungo C_4 ellittiche. Infatti queste F_2 danno sopra la varietà V un fascio di sup[erficie] raz[ional]i, di quelle che io chiamo del 1° tipo (riferibili a quadriche), fascio di cui si può costruire una unisecante conducente alla rappresentazione di V. Sarà possibile di proiettare una V_3 sopra un tale S_3 2-plo?

Saluti affettuosi

Ghigo

471.

16 Dec[embre 18]99

Carissimo Guido

Per scusare il mio lungo silenzio, ti dirò che sono stato, nei giorni passati, e sono tuttora, caricato di lavoro, per la stampa dei Collectanea.[1]

Gli ultimi Art[icol]i mi si sono affollati tutti in un momento sul tavolino, e per alcuni ho dovuto faticare più che se avessi dovuto farli di sana pianta.

Per uniformità dei vari art[icol]i, e per fare un indice espressivo, ho pregato tutti i collaboratori di adottare una divisione del loro lavoro in §§ [paragrafi] intitolati (non esclusa, occorrendo, una divisione più larga in due o 3 parti, I, II, senza titolo). Pensavo che questa piccola modificazione

potesse farsi sulle bozze; ma l'editore ha preferito rimandare i manoscritti agli autori, e ciò senza avvertirmene prima. Così anche tu avrai ricevuto il tuo manoscritto.[2]

Quanto alla mia gita a Roma, non ho ancora concretato nulla. Aspetto per questo una risposta da Bologna, che riceverò probabilmente fra un paio di giorni. Allora mi muoverò, avvisandoti prima con precisione il mio arrivo.

Mi hanno detto che alla domanda del Pieri per Catania si oppone una domanda del Fano per il concorso.

Questa soluzione non offenderebbe nessuno, ma mi pare che pel Fano racchiuda qualche pericolo. Non era meglio per lui lasciare che il P[ier]i partisse da Torino?[3]

Tanti saluti affettuosi insieme all'E[lbina], e tanti baci a Mario e a Maria.

Ghigo

[1] Enriques 1900c.

[2] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1900.

[3] Mario Pieri, a quest'epoca assistente a Torino, fu nominato nei primi mesi del 1900 professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Catania.

472.

5 Gennaio [1]900

Carissimo Guido

Grazie, prima di tutto, a te e all'Elbina pei vostri affettuosi augurî pel mio natalizio.

Ciò che mi scrivi mi sembra racchiudere una buona idea; e può darsi che si arrivi a stabilire l'uguaglianza, di cui discorri $\delta - n - 4\pi = 12p_n - -p^{(1)} + 9$.

Ma io trovo una difficoltà iniziale relativamente all'invarianza della espressione di Segre (non ho qui la sua memoria da confrontare).[1]

Per essa dato un sistema $|C|$ di caratteri n, π dovrebbe essere invariante $\delta - n - 4\pi$ dove δ è il n[umer]o delle curve d'un fascio con un p[un]to 2-plo, e dove suppongo $|C|$ privo di p[un]ti base.

Ora riferiamoci per semplicità ad una superficie F nelle condizioni più semplici, d'ord[ine] n, a sez[ioni] C di gen[ere] π, senza curve eccezionali, su cui abbiamo definiti con uguaglianza il $p^{(1)}$ e il $p^{(2)}$.

Per valutare il δ, di un fascio di sez[ion]i p[ia]ne, basta calcolare il grado del sistema $|2C + C'|$ segato dalle sup[erficie] polari d'ord[ine] $n - 1$. Si avrà dunque (se non erro)

$$\delta = 4n + n' + 4(\pi - 1).$$

Quindi

$$\delta - n - 4\pi = 3n + n' - 4.$$

Ora come può essere invariante $3n + n'$?
Abbiamo

$$n' = p^{(2)} + 4(\pi - 1) - n,$$

e perciò

$$3n + n' = p^{(2)} + 4(\pi - 1) + 2n,$$

dove l'espressione $4(\pi - 1) + 2n$ non può essere un invariante né *relativo* né *assoluto*.

Dunque o io sbaglio, o hai dimenticato un qualche termine nella formula di Segre, o la sua espressione non è invariante. È invariante invece (almeno relativamente) $\delta - 3n - 8\pi = p^{(1)} - 9$.

Anch'io ripensavo in questi giorni alle superficie col $p^{(1)} > 1$, tornando a considerare più attentamente l'antico metodo[2] dell'imposizione d'un p[un]to i-plo. Certo ricordi che si trovava nell'applicazione di esso una difficoltà relativa al caso in cui imponendo un p[un]to i-plo O a C, si ottenesse un sistema contenente una curva multipla fissa K con O j-plo. Per parlare proiettivamente, si ha una F che ogni S_r *osculatore* tocca lungo tutta una K.

Riferiamo una serie ∞^1 di tali S_r ad una serie ∞^1 di p[un]ti d'una stella O in S_3, e proiettiamo ogni K sul piano corrispondente. La F si trasforma in una F', dove un p[un]to di F dà origine a più (ρ) p[un]ti di F', mentre da un p[un]to di F' sembra nascere generalmente un p[un]to di F.

Ora, se non erro, la F' sarebbe segata da ∞^1 p[ia]ni per O secondo curve spezzate, ciascuna delle quali contiene una parte K' multipla (omologa di K). Questo fatto è assurdo perché trasformando per dualità si avrebbe una sup[erficie] con linea multipla, in ciascun p[un]to della quale vi sarebbe un cono osculatore non spezzato in p[ia]ni.

Perciò se regge il ragionamento prec[eden]te, si viene ad un assurdo a meno che le curve K su F non *formino un fascio*, caso che non dà noia.

In sostanza si stabilirebbe un resultato estendente quello già noto relativo al caso in cui ogni piano tangente tocchi la sup[erficie] lungo una curva.

Il povero Pincherle ha perso la moglie, già malata da due anni di nefrite, ma che non pareva trovarsi in pericolo imminente.

Affettuosi saluti Ghigo

[P.S.] Se la tua uguaglianza valesse col termine correttivo $x \geq 0$, cioè si avesse

$$\delta - n - 4\pi + x = 12p_n - p^{(1)} + 9,$$

mi pare si dedurrebbe

$$x = 12p_n - 2p^{(1)} - 4\pi + 18 - 2n,$$

onde, dall'ipotesi $x \geq 0$ $p_n < 0$ seguirebbe $p^{(1)} \leq 0$. E ciò tenendo conto della formula

$$\delta - n - 4\pi = p^{(2)} + 4(\pi - 1) + 2n - 4$$

e facendo in essa $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$, passaggio che deve essere meglio esaminato.

Per la sup[erficie] generale del 4° ord[ine] trovo $\delta - n - 4\pi = 21$, $p_n = 1$ $p^{(1)} = 1$, $12p_n - p^{(1)} + 9 = 20$. Peggio mi pare accada per quelle del 5° ord[ine].

[1] Per l'invariante di Zeuthen-Segre cfr. Zeuthen 1871b e Segre 1896.

[2] Cfr. le lettere del novembre e dicembre 1898 (nn. 417-31, pp. 374-95), nonché pp. 395-96, let. 432 (3.1.1899).

473.

6 Gennaio 1900

Carissimo Guido

Mi sono messo a redigere il lavoretto sulle sup[erficie] a p integrali di Picard con $2p$ periodi; è venuta una breve notina[1] che potrò mandare agli Annales de Toulouse.

Nella redazione mi si è presentato un solo dubbio. Quando si tratta di riferire due sup[erficie] iperellittiche, facendo corrispondere due p[un]ti dati (OO) si può porre tra i parametri le relazioni

$$z_1 \equiv + z_1' \qquad z_2 \equiv + z_2',$$
$$z_1 \equiv - z_1' \qquad z_2 \equiv - z_2';$$

ma parrebbe si ottenessero ancora due corrispondenze birazionali ponendo

$$z_1 \equiv + z_1' \qquad z_2 \equiv - z_2'$$
$$z_1 \equiv - z_1' \qquad z_2 \equiv + z_2',$$

mentre questo darebbe luogo, a quel che sembra, a qualche inconveniente.

Vorrei poi dare l'applicazione del teor[ema] concernente le condizioni trascendenti di riferibilità di una sup[erficie] ad una rigata. La quale applicazione si basa in sostanza sulla tua osservaz[io]ne relativa alle sup[erficie] con $p_g = 0$ con un sistema *non* lineare di curve. In questo caso si ha che le curve $I =$ cost sono le stesse per qualunque integrale. Come ne dimostri l'algebricità? Non me ne ricordo più.

Non ti dispiace in ogni caso che riporti questa tua proposizione[2] della quale dovremo poi servirci per le sup[erfici] con $n = 2\pi - 2$ e il fascio di curve ellittiche?

Quanto alla formula di Segre nel caso del fascio irrazionale di cui pure mi occorre l'uso, ne dai la dimostrazione nel lavoro degli Annali[3] non è vero? E sotto quale forma la scrivi precisamente?

Aspetto la risposta a tutte queste domande a Bologna dove mi reco doman l'altro.

Saluti affettuosi Ghigo

[P.S.] Scorza è partito oggi e ti rinnova saluti e ringraziamenti.
Ricevo ora la tua e penserò alla tua obiezione.

[1] Enriques 1901a.
[2] Cfr. Enriques 1901a, 62.
[3] Questo lavoro fu quindi scritto in collaborazione con Enriques: cfr. Enriques-Castelnuovo 1901.

474.

8 Gennaio [1]900

Carissimo Guido

Se la formula

$$\delta - n - 4\pi = 12p_n - p^{(1)} + 9$$

risulta dalle formule di Nöther[1] quando si ha soltanto una curva 2-pla (con p[un]ti 3-pli), *anche spezzata* in più parti, non vedo alcuna seria obiezione al tuo procedimento.

Solo potrà occorrere un'analisi un po' minuta per esaurire tutti i casi di spezzamento o di nuovi p[un]ti base che nell'aggiunzione possono presentarsi.

Oltre ciò che ti riprometti come resultato immediato, col tuo procedimento si otterranno tutti i frutti concreti, relativi alle involuzioni su rigate ecc.

Nota infatti che il procedimento che applichi per[2] $p^{(1)} > 1$, vale anche per $p^{(1)} = 1$ ($p_n = < -1$), *purché l'aggiunzione termini*, il che accade certo se sulla superficie vi è un sistema in cui $n > 2\pi - 2$.

Il caso $p_n = -1$ come sai l'ho studiato riducendomi ad un piano doppio con $C_{2n}\ O^{2n-6}$ o $C_{2n}\ O^{2n-4}$, partendo dall'ultimo fascio aggiunto di C_2 o di C_1. Ma bisognerà riveder tutto, perché non credo di conservare nulla di scritto; segnatamente importa che il fascio di C_1 abbia qualche p[un]to base, il che accade intanto se vi è un sistema con $n > 2\pi - 2$, o se $\mathbf{p}^{(1)} > 1$ (per la formula $4\pi + n \geq \mathbf{p}^{(1)} - 12p_n - 9$, che dà $4\pi + n \geq 5$).

Comunque, siccome l'esecuzione del lavoro è un po' faticosa, ti prego di non stancarti.

Lascia ch'io mi occupi dei particolari, il che farò molto volentieri per l'interesse della cosa. Se mi avverrà di portare alla questione un contributo notevole, unirò volentieri il mio nome al tuo nel lavoro[3] del quale, in ogni caso, tu avrai il merito principale. Ma se anche ciò non avvenga, sarò ugualmente lieto di avere impiegato così un po' del mio tempo e di averti risparmiato, con poca fatica mia, una fatica che a te potrebbe far male in questo momento.

Ti saluto affettuosamente tuo

Ghigo

[P.S.] Domani torno a Bologna.

[1] Cfr. Noether 1875, 526-29.

[2] Rendiamo in carattere grassetto la doppia sottolineatura che nell'originale contrassegna $\mathbf{p}^{(1)}$. Secondo Castelnuovo 1897b, $\mathbf{p}^{(1)}$ è il genere lineare secondario.

[3] Enriques-Castelnuovo 1901.

475.

13 gennaio [1]900

Carissimo Guido

Ieri sono caduto in errore.[1] Il ragionamento di Picard può cadere in difetto nel caso nostro, per la presenza di p[un]ti 2-pli delle curve del fascio.

Torno perciò ad esaminare le altre tue proposte.

Ed in quanto alla 1ª, che a te par conclusiva, trovo da obiettare:

1) Dato che $|C|$ seghi le γ in ν p[un]ti pareva anche a me che le $|C'|$ le segherebbero in $\nu + 2\pi - 2$, e non so anzi spiegarmi come ciò possa non esser vero. Ma d'altra parte la formula cadrebbe in difetto, per l'esempio di rigata 2-pla che ti ho citato.

2) Ad ogni modo non si esaurisce così il caso $\pi = 1$, perché non vedo come si escluda che $|iC|$ contenga $|iC'|$ più qualche curva γ, invece che coincidere con esso.

Se un sistema composto solo di curve γ fosse da solo (senza compo-

nente fissa) l'agg[iun]to di un altro sistema, allora si proverebbe subito, dalla formula $n' = \pi + \pi' - 2$, che $n' > 0$ e quindi il fascio ha qualche p[un]to base, e quindi non è irrazionale.

Ma appunto se quelle superficie esistono, l'operazione inversa dell'aggiunzione non è applicabile ad un sistema composto di curve γ.

Pertanto la questione non mi pare ancora risolta, e ci penserò ancora con calma.

L'aggiunzione sopra una rigata multipla può riuscire utile, ma bisogna notare che essa conduce a sistemi i quali più non appartengono all'involuzione da cui siamo partiti.

Affettuosi saluti a te e all'Elbina Ghigo

[1] Segnaliamo un'apparente lacuna nella corrispondenza conservata.

476.

[...][1]

15 Gennaio [1]900

Carissimo Guido

Sono ora convinto, sebbene non perfettamente tranquillo, che sopra una sup[erficie] dotata d'un fascio irrazionale di curve irrazionali γ, il sistema $|C'|$ agg[iun]to ad un sistema $|C|$ di m secanti, è composto di curve secanti in $m + 2\pi - 2$ p[un]ti le γ.

Dato ciò vedo come si completi il tuo ragionamento per il caso $\pi = 1$.

In questo caso se $|C|$ contiene $|C'|$, si avrà $|C| = |C' +$ qualche $\gamma|$. Ora sommando una γ a $|C'|$ si aumenta il grado di $2m$, ed il genere di m. Da qui segue che la differenza $2\Pi - N$ (relativa a $|C|$) non varia nell'agg[iunzio]ne, e quindi $p^{(1)} = 1$.

Se $|C|$ non contiene $|C'|$ ma $|iC|$ contiene $|iC'|$ si arriva alla stessa conseguenza.

Così si escludono le sup[erficie] contenenti un fascio irr[azional]e di curve irraz[ional]i ed aventi il $p^{(1)} > 1$.

Nella tua nota lincea[2] tu affermi che un *esame minuto* escluderebbe la possibilità di sup[erfici]e con un fascio irr[azional]e di curve irraz[ional]i, per $p^{(1)} \leq 1$, ed io capisco all'ingrosso il ragionamento che ti ha guidato. Infatti la cosa mi pare venga facilmente se si suppone l'ultimo agg[iun]to costituito soltanto di curve del fascio, senza componente fissa; però l'esame di quest'ultimo caso meriterebbe, mi sembra, un po' più d'attenzione.

Ad ogni modo ritengo la difficoltà superata.

So che sei a letto, in questo momento; ma l'Elbina ti darà questa quando sarai rimesso dall'influenza, il che spero accadrà prestissimo.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Omettiamo un biglietto a Elbina con cui Enriques accompagnava la lettera che segue.
[2] Castelnuovo 1897b, § 10.

477.

28 gennaio [19]00

Carissimo Guido

Mi dispiace di averti tratto in equivoco, per mancanza di chiarezza in un punto un po' delicato, tanto più che temo ciò ti abbia portato una inutile fatica.

Credo tuttavia che la dimostrazione abbozzata vada esente dalla tua critica, perché io utilizzo il *teorema di R[iemann] R[och]* ove figurano *non i caratteri effettivi ma i caratteri virtuali*, e di tale relazione ho abbozzato la prova.

Siccome però a te pare che il teor[ema] di R[iemann] R[och] coi caratteri virtuali non si accordi con quello già dimostrato pei caratteri effettivi, mi fermo anzitutto un momento a discutere questo punto.

Poniamo di avere un sistema $|C|$ dotato di un punto base (i-plo); ne indico con n_e, π_e, r_e i caratteri effettivi, ed ho

$$\pi_e - 1 - n_e + r_e \geq p.$$

Ora prescindendo dal punto i-plo (cioè togliendolo se è possibile) si hanno i caratteri virtuali

$$n = n_e + i^2 \qquad \pi = \pi_e + \frac{i(i-1)}{2},$$

ma anche la dimensione r aumenta virtualmente di $\frac{i(i+1)}{2}$ e perciò

$$\pi - 1 - n + r \geq p.$$

Ma tu osserverai, se il p[un]to i-plo non si può togliere $r = r_e$ (trattandosi di dimensioni effettive) ed è vero; ma la presenza di un p[un]to i-plo che non si può togliere, cioè il fatto che le curve del sistema abbiano un p[un]to i-plo non prestabilito dà al sistema una sovrabbondanza $\omega \geq \frac{i(i+1)}{2}$. Tieni conto di questa e avrai dal 1° sist[ema] irrid[ucibile]

$$\pi_e - 1 - n_e + r_e = p + \omega,$$

sicché le due relazioni si accordano.

Ti sarà facile di verificare questo fatto nel piano.

Ma ora vengo a giustificarti il procedimento (abbozzato in uno dei fogli)[1] in cui si può stabilire il teorema di R[iemann] R[och] pei caratteri virtuali essendo sempre la dimensione intesa in senso effettivo.

Prendi un sistema completo $|C_1|$ riducibile di gen[ere] e gr[ado] *virtuali* π_1 e n_1; si può trovare un sistema irriducibile C_2 (car[atteri] π_2, n_2) tale che $|C_1 + C_2|$ sia irriducibile. Per $|C| = |C_1 + C_2|$ vale il teor[ema] di R[iemann] R[och]. Stacca da $|C|$ una C_2 facendo *l'ipotesi che* $|C|$ *seghi su* C_2 *una serie non speciale*, e calcola così la dimensione del sistema residuo $|C_1|$; troverai

$$\pi_1 - 1 - n_1 + r_1 \geq p.$$

L'ipotesi prec[eden]te è certo verificata se $|C_2|$ ha $n_2 > 2\pi_2 - 2$, perché allora a fortioni le C segano su C_2 una serie i cui gruppi hanno più di $2\pi_2 - 2$ p[un]ti. Ora si può supporre che $|C_2|$ soddisfi a tale condizione, altrimenti basterebbe sommargli un multiplo conveniente di un sistema $|K|$ pel quale $n > 2\pi - 2$.

Spero che troverai queste spiegazioni soddisfacenti. Posti sull'avviso da altri casi in cui i caratteri virtuali ci avevano dato noia, credo di non aver omesso nella discussione attuale, tutte le cautele necessarie.

A maggiore schiarimento della lettura dei miei fogli, ti dirò che io applico il ragionamento all'ultimo sistema agg[iun]to C^ν privato delle parti fisse K (curve, e non punti).

Questo sistema, $C^\nu - K$ può essere riducibile (in parti d'un fasc[io]) o irriducibile, può avere dei p[un]ti base che non sono però prestabiliti, e se non si può toglierli ciò dipende dalla sovrabbondanza del sistema. A noi basta che il *genere virtuale* del sistema sia $\leq p$ (o $p + 1$), e questo è, altrimenti l'agg[iun]to ad esso sommato alle curve fisse di C^ν darebbe l'agg[iun]to a C^ν.

Quanto alle sup[erfici]e con $p^{(1)} = 1$ d'ord[ine] $n = 2\pi - 2$, la mia osservazione si giustifica semplicemente. Se non è $|C'| = |C|$, si hanno sulla sup[erficie] infiniti sistemi lineari di genere π e di ordine $2\pi - 2$. Ora sopra una sup[erficie] senza integrali di diff[erenzial]i totali, le curve di dato ordine si distribuiscono in un numero finito di sistemi lineari (Humbert).[2]

Avrai ricevuto le bozze del tuo art[icol]o[3] pei miei Collectanea.

Ti ha comunicato Veronese il tema messo a premio dall'Istituto Veneto pel 1902?[4]

Saluti affettuosi anche all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

[1] Questi fogli di appunti non sono stati conservati.
[2] Cfr. Humbert 1893b; 1894c, 196.
[3] Castelnuovo 1900.
[4] Nell'adunanza dell'Istituto Veneto del 14 maggio 1899 Giuseppe Veronese propose, per il concorso della Fondazione Querini Stampalia per l'anno 1902, il seguente tema: «I caratteri projettivi delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad n dimensioni», con la seguente precisazione: «Tali caratteri e le loro relazioni numeriche sono già conosciuti per le curve algebriche anche di uno spazio ad n dimensioni. Sono pure stati studiati quelli dello spazio ordinario ed alcuni delle superficie degli spazi superiori. Il tema propone la stessa ricerca generale per le superficie a due dimensioni dello spazio (lineare ad n dimensioni). Negli ultimi anni si è svolta la geometria sopra una superficie algebrica generale, per merito particolarmente di geometri italiani e francesi, tenendo conto dei caratteri della superficie che rimangono invariati per trasformazioni birazionali. Geometricamente è pure importante di conoscere i caratteri che rimangono invariati per trasformazioni projettive, le relazioni fra loro, e come queste si modifichino col modificarsi di alcuni di essi. Potranno anche essere premiate ricerche importanti che non risolveranno completamente il tema». Cfr. Atti Ist. Veneto per l'a.a. 1898-99, 96 e 136-37, in «Atti Ist. Veneto», (8), 1 (numerazione separata).

Non essendosi presentato alcun concorrente, nell'adunanza del 24 maggio 1903 il concorso fu riaperto, con scadenza 31 dicembre 1906, e il tema fu modificato nel seguente: «Perfezionare in qualche punto importante la geometria projettiva delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad n dimensioni». Il premio non fu assegnato. Cfr. Atti Ist. Veneto per l'a.a. 1902-03, 159, in «Atti Ist. Veneto», (8), 5 (numerazione separata).

478.

2 Febbraio [1]900

Carissimo Guido

Sta bene quanto mi scrivi per le sup[erfici]e col fascio di curve irrazionali.

Ma nella nostra discussione insorge una nuova difficoltà, perché non è lecito supporre l'ultimo sistema agg[iun]to di genere $\pi \leq p$; bisogna considerare anche il caso $\pi = p + 1$.

Allora non si arriva direttamente al resultato che per $\pi \geq 6$, ma si esauriscono subito i casi $p = 5, 4$.

Le difficoltà di abbordare direttamente i casi $p = 3, 2$ sarebbero molto seccanti.

Penso però che si potrà giungere allo scopo nel modo seguente:

Per $p = 3$ si arriva ad un ultimo agg[iun]to di genere $\pi = 4$ con $r \geq 7$, ossia imponendo un p[un]to 2-plo, ad una sup[erficie] di S_4 a sez[ion]i di genere 3, la quale contiene una conica. Considerando gli iperp[ia]ni t[an]g[ent]i nei p[un]ti della conica si ottengono ∞^1 fasci di C_2, e quindi una serie razionale di trasf[ormazion]i della sup[erficie] in sé stessa. Queste trasf[ormazion]i conducono da un p[un]to generico ad una curva raz[ional]e, e dai p[un]ti di questa ad una serie raz[ional]e di curve raz[ional]i (oppure ad un fascio).

In quanto al caso $p = 2$, abbiamo un sistema ultimo agg[iun]to di genere $\pi = 3$; il genere del suo agg[iun]to vale

$$\pi' = \mathrm{p}^{(1)} + 3(\pi - 1) - n = \mathrm{p}^{(1)} + 3p - n \leq p,$$

onde

$$n \geq \mathrm{p}^{(1)} + 2p \geq 6.$$

I casi difficili sono $n = 6, 7$ in cui $r = 2, 3$.[1]

Considerando p[er] e[sempio] il caso $n = 6$, $\mathrm{p}^{(1)} = 2$, trovo che il sistema predetto ha una C_2 agg[iun]ta e che il sistema $|2C_2|$ avrebbe il genere $\pi = 6$ e il grado $n = 12$. Ma da ciò si ricaverebbe un assurdo perché i successivi agg[iun]ti di $|2C_2|$ avrebbero sempre $n < 2\pi$ mentre l'ultimo agg[iun]to ha sempre $n \geq 2\pi$.

Come vedi la cosa non è tanto semplice, e ci ripenserò ancora.

Frattanto la relazione utilizzata innanzi $n \geq 2\pi$ per l'ultimo agg[iun]to $\pi = p + 1$, semplifica la trattazione per $p = 1$, arrivandosi non ad un fascio ma ad una rete di C_2.

L'assistente del Dini,[2] che è un mio antico scolaro, mi scrive di aver saputo da questi che la riunione della mia commissione[3] verrà un po' ritardata per aspettare che sieno compiuti i 3 anni *solari* dal mio straordinariato.

Io credo che si tratti di un errore perché i 3 anni solari sono compiuti ormai il 1° Gennaio, e quindi il M[inistr]o non potrebbe rimangiarsi l'ordine dato.

In ogni modo ti pregherei di procurarti informazioni, che p[er] e[sempio] il Cerruti potrà darti, circa lo spoglio dell'ultima votazione delle Fac[ol]tà. Così appena questo sia fatto e comunicato al M[inistr]o, si potrà vigilare che la commissione sia subito riunita.

Saluti affettuosi Ghigo

[P.S.] All'ultimo momento mi par di vedere una via assai semplice per eliminare tutti i casi $\pi = p + 1$. Te ne riscriverò, se andrà bene.

[1] Seguono nell'originale cinque righe cancellate.
[2] Si tratta di Giuseppe Vitali.
[3] Si tratta della commissione per l'ordinariato di Enriques.

479.

12 febbraio [1]900

Carissimo Guido

Ti ringrazio della domanda rivolta al Cerruti. Se potrai sapere quando lo spoglio sia fatto, e vorrai comunicarmelo, mi farai piacere.

Vedo dalla lettera dell'Elbina di ieri la probabilità che tu possa venire con lei e coi bimbi per il Carnevale, e me ne rallegro.

Nella redazione del lavoro[1] ho incontrato nuove difficoltà di particolari, assai noiose.

Nella tua nota[2] hai sempre proceduto formalmente senza tener conto delle possibilità di riducibilità dei sistemi aggiunti.

Da ciò consegue che per le nostre superficie:

1) non resta stabilita l'esistenza di un sistema lineare irriducibile con $n > 2\pi - 2$ (e questo è l'inconveniente più serio);

2) non resta stabilito che il massimo di ω $(= \mathbf{p}^{(1)})$ si realizzi per sistemi irriducibili;

3) non resta stabilito che $|iC|$ contenga $|iC'|$ $(\mathbf{p}^{(1)} > 1)$.

Aggiungi a ciò che il tuo ragionamento per escludere l'esistenza d'un fascio $|\gamma|$ senza punti base (o irraz[ional]e) di curve irraz[ional]i, non si può applicare se prima non si mostra l'esistenza di un sistema $|C|$ in cui $n - 2\pi$ è molto grande *in confronto al numero delle intersezioni* delle C colle γ. Ora io non vedo come ciò si realizzi per $\mathbf{p}^{(1)} \leq 1$, mentre per $\mathbf{p}^{(1)} > 1$ il resultato si ottiene coll'operazione inversa dell'aggiunzione.

Ma comunque staccando successive γ da $|C|$ si ottiene un sistema di genere ω e dimensione $r > 3\omega + 5$, il quale può essere riducibile spezzandosi in una curva fissa e in curve di genere ρ variabili di un fascio; proprio come si ottiene nella tua nota per $\mathbf{p}^{(1)} \leq 1$.* L'impossibilità di questo caso per $\rho > 0$ si dimostra facilmente se la curva fissa non contiene parti multiple di genere negativo, ma l'affermazione di questo fatto mi sembra giustificata soltanto quando il sistema da cui si parte (per cui $n > 2\pi - 2$) sia irriducibile.

In conclusione credo che tutto possa condursi a termine nell'ipotesi di sistemi irriducibili con $n > 2\pi - 2$; ma l'esistenza di tali sistemi per le sup[erfici]e dove l'aggiunzione si esaurisce non mi pare dimostrata in modo soddisfacente.

Si riesce tuttavia a dare indipendentemente da ciò il teor[ema] di R[iemann] R[och] (per sist[emi] riducibili)[3] il quale forse potrebbe costituire un mezzo per arrivare a stabilire la cosa.

Saluti affettuosi tuo

Ghigo

* Il caso che contempli nella tua nota di sole curve variabili di gen[ere] $\rho = 1$, senza curva fissa, non può presentarsi perché il grado è > 2.

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.

[2] Castelnuovo 1897b.

[3] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1901, § 4.

480.

17 febbraio [1]900

Carissimo Guido

Credo di avere accomodato tutto. Basta infatti che si arrivi ad un sistema con $n > 2\pi - 2$, applicando l'aggiunzione a partire da un sistema irriducibile, segato sulla superficie (senza sing[olari]tà) da tutte le varietà d'ord[ine] n di S_r. Allora nessuno dei sistemi aggiunti successivi ha punti base (*imposti*) sulla superficie, e da ciò mi pare si deduce che l'ultimo aggiunto non può contenere come parti fisse delle curve multiple aventi un numero negativo d'intersezioni con sé stesse. Per tal modo si esaurirebbe il caso $\mathbf{p}^{(1)} \leq 1$, mentre per il caso $\mathbf{p}^{(1)} > 1$ resta una piccola difficoltà che spero tuttavia di superare.

Quando verrete?

Saluti affettuosi Ghigo

481.

8 Marzo [1]900

Carissimo Guido

Ho ripreso a pensare alle nostre questioni incominciando ad esaminare tutti i casi in cui una curva può staccarsi nell'aggiunzione, restando fondamentale pel sistema residuo. Ciò avviene soltanto per le curve eccezionali, tranne se si arriva ad un aggiunto composto colle curve γ d'un fascio. Ora in questo caso se $p^{(1)} \leq 1$, vale il tuo ragionamento che mostra come il penultimo aggiunto sia costituito da bisecanti le γ; di qui si desume che le γ sono razionali, altrimenti esse sarebbero bisecate anche dalle curve dei prec[eden]ti sistemi agg[iun]ti e del sistema di partenza che non sarebbe semplice. Mi par dunque che l'ipotesi $p^{(1)} \leq 1$, che ultimamente ci sembrava la più difficile, si esaurisca semplicemente.

Riprenderò ora in esame l'altra ipotesi $p^{(1)} > 1$.

Saluti affettuosi Ghigo

[P.S.] Ti prego di dare a Giorgina l'acclusa lettera.

482.[1]

[s.d.]

Carissimo Guido

Mi dispiace che la mia faccenda ti rechi tanta seccatura, per la introvabilità del Chiarini. Non starò a ripeterti ringraziamenti per quanto fai per me, giacché ben sai come te ne sia di cuore gratissimo.

Vedo con piacere che la questione Volt[erra][2] è messa bene sopra un punto di massima, in modo da guadagnare il voto degli imparziali. Del resto dalla lotta attuale potrebbe uscire un compromesso, vantaggioso per tutti, cioè la chiamata simultanea del Volt[erra] e del Dini. È molto probabile che quando la Fac[ol]tà facesse ciò, il M[inistr]o ne accoglierebbe il voto, nonostante l'aggravio del bilancio.

La formula di Nöther[3] $c' = 24(\pi + p_n)$ è molto interessante. La questione di mostrare l'invariantività di $c' - 24\pi$ per qualunque rete, dovrebbe ridursi al calcolo del genere numerico di un piano multiplo; l'ordine della curva di diramazione di questo dipende da π e dal grado della rete, c' sarebbe (se non sbaglio) il numero delle cuspidi di questa curva di diramazione.

In un primo studio basterebbe considerare il caso in cui la rete non abbia curve fondamentali, e la curva di diramaz[io]ne del piano multiplo riesca dotata soltanto di punti doppi e di cuspidi. Mi pare che in questo caso la curva di diramaz[io]ne riesca aggiunta al triplo della rete. Il suo ordine è $2\pi - 2 + 2n$; quindi le immagini delle curve canoniche sul piano multiplo avranno l'ordine $2\pi - 2 - n$. Esse saranno tangenti alla curva di dir[amazio]ne ovunque l'incontrano, ma soddisferanno anche a particolari condizioni in relazione ai punti 2-pli e alle cuspidi di questa. Quando si avessero queste relazioni si potrebbe valutare per questa strada il numero p_n, e, secondo la formula di Nöther, dovrebbe resultare

$$p_n = \frac{c' - 24\pi}{24} .$$

Anzi si dovrebbe trovare anche un'altra formula (forse quella già nota, ma forse anche un'altra in cui entri il numero delle curve della rete con due punti 2-pli) includente il $p^{(1)}$.

Ho ricostruito con calma tutto il nostro lavoro[4] e mi sembra che non si presentino più difficoltà, riuscendosi a realizzare nel 2° caso la sup[erficie] con $n > 2\pi - 2$ avente $\omega > 1$.

Vedo ora le cose con maggiore chiarezza, giacché il teor[ema] fond[amental]e vale proiettivamente sulla superficie, e perciò l'ω è un invariante sulla sup[erfici]e stessa per tutti i sistemi privi di punti base.

Il pernio dei ragionamenti per la realizzazione della sup[erfici]e anzidetta è il tuo teor[em]a sulla deficienza della serie caratteristica;[5] sembra dunque che neppur di questo si possa fare a meno per la nostra questione. Per essa si approfitterà dunque di tutto quanto abbiam fatto, ma la ricostruzione della teoria ne riescirà notevolmente semplificata.

Così parmi si possa dimostrare direttamente, pel caso in cui occorre, il resultato sulle reti di gen[ere] 2, e quindi ottenere la raz[ionali]tà sulle involuzioni come corollario del nostro teor[ema] generale.

La memoria volendo dare una chiara esposizione di tutto riuscirà lunga, ma non tanto impasticciata come si temeva.

Ne incomincerò oggi stesso la redazione, premettendo un riassunto dei resultati occorrenti. L'ideale sarebbe che un lettore potesse, senza nozioni preliminari troppo speciali, seguire interamente il filo del ragionamento!

Affettuosi saluti

tuo

Ghigo

[P.S.] Ricordami all'E[lbina], a G[iorgina], a Mario.

Prendi due fasci di una medesima rete. Il τ di Segre[6] (pg. 5) è il numero delle curve della rete dotate di cuspide. D'altra parte il π di Segre è il genere delle curve agg[iun]te al 3-plo della rete. Allora le formule di Segre danno il τ. Dovrebbe venirne fuori la formula di Nöther. Veramente a me non viene, ma probabilmente avrò sbagliato i calcoli.

Se vale la formula di Nöther $24\pi = 24p + \tau$, essa si applica, pare, con successo alla discussione dei casi $p = 2$, $p^{(1)} > 1$, combinandola col teor[ema] di R[iemann] R[och] e colla formula $\delta - n - 4\pi = \ldots$ Forse così la discussione verrebbe più elegante.

[1] Lettera costituita da due fogli separati, rispettivamente di quattro e due facciate, e di diverso formato, ritrovati in buste distinte. Il secondo foglio inizia da «teoria ne riuscirà notevolmente semplificata» e termina, nel verso, con i saluti «a Mario». Si noti che nel poscritto la simbologia usata per la formula di Noether è diversa da quella che compare nel corpo della lettera.

[2] Nell'autunno del 1900 Vito Volterra si trasferirà dall'Università di Torino a quella di Roma.

[3] Cfr. Noether 1875, 526-29.

[4] Enriques-Castelnuovo 1901.

[5] Cfr. Castelnuovo 1897a, 416.

[6] Cfr. Segre 1896, 314.

483.

15 marzo [1]900

Carissimo Guido

Ho ripreso la questione del numero τ delle curve d'una rete dotate di cuspide, ma senza un buon resultato.

Indicando con π, n i caratteri della rete, e con Π la curva agg[iun]ta al 3-plo della rete che è (nelle condizioni più semplici) curva di diramazione del corrispondente piano multiplo, le formule di Segre[1] danno (detto δ il n[umer]o p[un]ti 2-pli d'un fascio)

$$\tau + \delta + [n]^2 = 2N + 2\Pi - 2$$

ove

$$N = 2n + 2\pi - 2 \qquad 2N = 4n + 4\pi - 4$$

$$\Pi = p^{(1)} + 9\pi - 9 \qquad 2\Pi - 2 = 2p^{(1)} + 18\pi - 20$$

$$\tau + \delta = 3[4]^{3}\, n + 22\pi - 24 + 2p^{(1)}$$

$$2\delta - 2n - 8\pi = -24p - 2p^{(1)} + 18,$$

$$\tau + 3\delta = 30\pi + 5[6]^{4}\, n - 24p - 6.$$

Ora se questa formula sta bene, non vedo come essa possa coesistere con quella di Nöther[5]

$$\tau = 24\pi + 24p,$$

giacché se ne dedurrebbe (per differenza) un'espressione di δ per p, π ed n, ove non comparirebbe il $p^{(1)}$.

Come si spiega questo pasticcio?

Ad ogni modo una cosa sembra certa, ed è che si debba ottenere un'espressione di p e di $p^{(1)}$ per π, n, δ, τ, che è quanto dire assegnare i caratteri di un piano multiplo generale. Sarà utile soprattutto l'espressione di p che così potrà calcolarsi algebricamente. Si avranno quindi le condizioni di razi[onali]tà d'un p[ia]no multiplo $(n \leq 2\pi - 2)$ $p = 0$ $p^{(1)} \leq 0$.

Ho ricevuto in questo momento il 2° vol[ume] del Picard.[6] Vedo che è andato molto addentro nelle cose nostre, di cui si vale anche per gli integrali doppi di 2ª specie; ma poi manca una conclusione che riattacchi la loro determinazione, o meglio il loro numero, ai caratteri invarianti noti della superficie. Insomma non vedo un progresso effettivo nel senso da noi desiderato.

Ad ogni modo il volume è destinato a farci una grande réclame.

È intitolato t[omo] II 1° fasc[icol]o: ci sarà dunque un 2° fascicolo?

Affettuosi saluti

Ghigo

[1] Cfr. Segre 1896, 314; p. 437, let. 472 (5.1.1900).
[2] Le parentesi quadre, nell'originale tonde, sono state aggiunte da Castelnuovo.
[3] Tra parentesi [ ] abbiamo riportato la correzione di Castelnuovo.
[4] Tra parentesi [ ] abbiamo riportato la correzione di Castelnuovo.
[5] Cfr. Noether 1875, 526-29.
[6] Picard-Simart 1897-1906; cfr. p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).

484.

21 marzo [1]900

Carissimo Guido

Dal Babbo della Luisa ricevo la comunicazione che la mia commissione[1] sarà convocata ai primi di Aprile. Speriamo che non nasca alcun ritardo dipendente da impedimenti dei commissari!

Quando abbia il giudizio favorevole della commissione, l'esito finale della cosa sembra ormai assicurato anche se cadesse Baccelli ed il successore non volesse più sapere della legge Albicini;[2] infatti è morto ieri il prof. Saporetti lasciando così scoperta una cattedra d'ord[inari]o, a cui (mi assicurano) la Fac[ol]tà non provvederà per quest'anno.

In questi giorni ho lavorato un po' alla redazione del nostro lavoro[3] trattando la questione relativa al modo di eliminare le curve eccezionali che si staccano dai successivi aggiunti alle sez[ion]i iperpiane. Si può dire la parte più noiosa del lavoro stesso, ed anche un po' delicata; ma mi sembra che la cosa riesca in modo interamente soddisfacente.

Il procedimento che ti accennavo l'altro giorno vale per reti *prive di curve fondamentali*; altrimenti occorrerebbe modificare la definizione stessa di quel carattere, cercando a quante sezioni cuspidate equivalga una curva fondamentale. Questo però non mi sembra un inconveniente troppo grande. Il valore del resultato sta nel poter calcolare facilmente il p_n. Così si potesse calcolare ugualmente il $p^{(1)}$? Ma invece è l'ω, invariante relativo, che vien fuori dalle formule.

Ho cercato se si possa definire un bigenere aritmetico P_2 il quale assumendo un valore $\leq -p_n$, dia la condizione di riferibilità ad una rigata. Il resultato è negativo: il bigenere aritmetico (che si definisce come il p_n) è un invariante relativo come l'ω; si trova del resto $P_n \geq p_n + \omega$, e si ottiene il segno $=$ sotto certe restrizioni realizzabili mentre $\omega < p^{(1)}$.

Allora mi sono dato a cercare se l'annullarsi di un certo numero di plurigeneri (assegnabile dato p) bastasse a dedurre $p^{(1)} \leq 0$ ecc. Naturalmente il solo caso da considerare è $p^{(1)} = 1$.

Perciò mi sono rivolto a queste superficie.

Non ho raggiunto affatto lo scopo, ma ho riconosciuto un fatto notevole, cioè:

Le sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$, possedenti una effettiva curva pluricanonica ($n < 2\pi - 2$), hanno i plurigeneri crescenti da un certo punto in poi, e contengono perciò un fascio di curve ellittiche; da ciò (applicando la formula di Segre)[4] si trova per esse $p_n \geq -1$.

Come sai è noto un esempio di queste sup[erficie] con $p_n = -1$, $P = 1$.

Non ho altro da dirti per oggi, e ti lascio coi più affettuosi saluti

Ghigo

[P.S.] Ricordami a E[lbina] G[iorgina] M[ario].

Mi dimenticavo di dirti che, ricevuto il libro del Picard,[5] ho scritto a lui ringraziando ed ho mandato un biglietto all'editore e a Simart.

Al Picard ho parlato di qualche modificazione didattica, di cui ho usato l'anno scorso nelle mie lezioni, per la teoria dei sistemi *completi*.

Adoperando il concetto di funzione definita dalle sue sing[olari]tà sulla sup[erficie], diventano quasi evidenti quei teoremi che il Picard fonda sul Restsatz e che, per noi, servono invece a stabilirne la dimostrazione.

Ho anche accennato al Picard alle ricerche che stiamo facendo, da cui crediamo avere la risposta alla questione da lui sollevata sulle sup[erficie] con ∞ trasformazioni.[6]

[1] Si tratta della commissione per l'ordinariato di Enriques: cfr. p. 446, let. 478 (2.2.1900).

[2] Cfr. p. 403, nota 2 a let. 440 (17.3.1899).

[3] Enriques-Castelnuovo 1901.

[4] Cfr. p. 437, let. 472 (5.1.1900).

[5] Picard-Simart 1897-1906; cfr. p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).

[6] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1900a, presentato il 5 novembre 1900, e Enriques-Castelnuovo 1901, cap. 5, § 19. Cfr. anche la lettera di Emile Picard del 5 novembre 1900 riportata in Appendice (p. 663).

485.

30 marzo [1]900

Carissimo Guido

Temo che la formula di Hilbert[1] non dia quanto speravamo. Invero può accadere che $f = 0$ $\varphi = 0$ non passino per una data curva e $f + \varphi = 0$ vi passi.

Nota che in ogni caso parrebbe si dovesse potere usare invece della formula di H[ilbert] il teor[ema] di Nöther[2] $(Af + B\varphi)$. Ma già riferendosi alle curve appare che la cosa non va.

Si presenta poi un imbroglio che non so come spiegare, perché φ_{2n-r} dovrebbe esprimersi razionalmente per φ_{n-3} ed f, il che non può accadere quando $p_g = 0$ $P > 0$.

Ripenserò alla questione con calma. Oggi mi ci sono fatto il capo grosso.

Affettuosi saluti

Ghigo

[1] Per il teorema degli zeri, cfr. Hilbert 1893.

[2] Cfr. Noether 1873 e le successive dimostrazioni.

486.

2 aprile [1]900

Carissimo Guido

Temo che la questione di vedere se l'agg[iunzio]ne si esaurisce quando $P_i = 0$, sia più seria di quanto pareva.

Mi par di vedere che non si possa cavare alcun profitto dal teorema di Noether, e neppure dalla formula di Hilbert.

Ho consultato il Picard[1] dove, a pg. 18 del 2° v[olume], trovo un ragionamento che eventualmente potrebbe essere utile.

Parmi anzi che con questo si andrebbe in porto se si riuscisse a trovare una φ_{2i+1} che avesse la curva 2-pla come 4-pla e ne contenesse 2 v[olte] gli intorni, per modo che in ogni piano $z = z_0$ si potesse porre (supposte esistenti le $C_{i(n-4)} = A_i$, $C_{(i+1)(n-4)} = A_{i+1}$)

$$\varphi_{2i+1} = A_{i+1}\varphi_i + A_i\varphi_{i+1}.$$

Ma se si parte da una φ_{2i+1} qualunque la formula si scrive invece

$$\varphi_{2i+1} = A_{i+1}\varphi_i + A_i\varphi_{i+1} + Cf$$

$(z = z_0)$ ove f è la data sup[erficie]; se ne trae quindi

$$R(z)\,\varphi_{2i+1} = A_{i+1}\varphi_i + A_i\varphi_{i+1} + Cf,$$

e la presenza del termine Cf che non si può affermare esser divisibile per $R(z)$ o per φ_i, distrugge tutto.

Abbiamo oggi le elezioni per il Cons[iglio] Sup[eriore]. Naturalmente diamo tutti il voto al Cremona; ma per il 2° posto c'è molta incertezza dato che quest'anno è mancata ogni propaganda preventiva.

Ho sentito fare i nomi del Siacci e del D'Ovidio. Se non sorge altra candidatura io darò il voto a quest'ultimo.

Tanti saluti affettuosi anche all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

[1] Picard-Simart 1897-1906.

487.

16 aprile [1]900

Carissimo Guido

Procedo sempre lentamente nella redazione del lavoro[1] sulle sup[erficie]. Ed eccoci di fronte ad una nuova difficoltà o almeno ad una grande seccatura. Si tratta del caso in cui in un fascio di curve $|\gamma|$, vi sia una componente contata 2 v[olte].

Ti avevo detto che le cose venivano bene anche in questo caso; ma invece c'è un pasticcio quando il genere ω della componente è $\omega = 0$. Riprendiamo il ragionamento di Segre[2] paragonando $|\gamma|$ ad un fascio generico $|\gamma'|$. Sia χ la componente doppia di γ, δ il n[umer]o delle γ effettive dotate di p[un]ti 2-pli, T la curva dei contatti delle γ e γ', tolta la χ. Si trova con Segre,

$$N = 2m + 2p - 2$$
$$N' = 2m + 2p' - 2 - i \qquad i = (\chi\gamma')$$

quindi

$$(\chi T) = \text{n[umer]o p[un]ti 2-pli } g_i^1 \text{ su } \chi = 2i + 2\omega - 2,$$
$$2N + 2p - 2 = \tau + \delta + \sigma' - 2(i + \omega - 1)$$
$$2N' + 2p - 2 = \tau + \delta' + \sigma,$$

e si conclude

$$\delta + 2(\omega - 1) - \sigma - 4p = \delta' - \sigma' - 4p'.$$

D'altra parte però in δ figurano, *pare 2 v[olte] almeno* i punti d'incontro di χ colla curva residua θ ((Mi pare sia da ammettere che $\chi + \theta$ sia connessa)), dato che 2χ non sia curva totale di γ'; onde l'unico caso che dà noia sarebbe quello in cui 2χ è curva totale di γ' e $\omega = 0$.

Però in questo caso si potrebbe forse andare in fondo nel modo seg[uen]te: χ ha un n[umer]o > 0 d'intersezioni con sé stessa, poniamo 1. Allora il sistema $|r\chi|$ ha il grado r^2 e il genere $\frac{r(r-3)}{2}$. Si può per r grande imporgli un punto $(r-1)$-plo deducendone un sistema di curve raz[ional]i; e pare si eliminino qui facilmente le difficoltà provenienti da componenti multiple fisse.

Vedi però che enorme pasticcio! E tutto ciò lasciando da parte il caso che in $|\gamma|$ entri una componente 3-pla o i-pla anziché 2-pla!

Ho avuto la 1ª copia dei miei collectanea.[3] In settimana (date le lentezze dell'editore) i collaboratori riceveranno ciascuno la copia e gli estratti loro dovuti.

Il Babbo mi ha scritto che hai avuto una seccatura per conto mio andando al Municipio di Roma. L'esorbitante pretesa accampata dal detto Municipio mi costringerà a cambiare l'impiego di quel capitale, giacché il sorteggio che rappresenterebbe un guadagno si convertirebbe forse in una perdita, certo in noie grandissime.

Affettuosi saluti Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.
[2] Cfr. Segre 1896.
[3] Enriques 1900c.

488. [c.p.]

[Bologna] 16[1] aprile [1]900

Carissimo Guido

Facendo seguito alla mia di ieri, mi si presenta a semplificare la trattazione l'osservaz[ion]e seg[uen]te:

Si può escludere fin da principio che la nostra sup[erficie] contenga curve raz[ional]i senza punti 2-pli, operando sulle curve delle 3 specie possibili nel modo seg[uen]te:

1) sulle curve di *grado* > 0, nel modo ieri indicato;

2) sulle curve di grado 0, moltiplicando per s si ottiene un sistema di dim[ensione] virtuale

$$n - \pi + 1 - p, \qquad n = 0 \qquad \pi = -s + 1,$$

quindi esiste un fascio (di genere p) di curve raz[ional]i;

3) le curve eccez[ional]i di grado < 0 si mandan via sommandole ad un sistema regolare come ho già avuto occasione di fare.

Questa riduzione sembra semplificare alcuni sviluppi ulteriori.

Saluti affettuosi

Ghigo

[1] 17, dal timbro postale.

489.

18 aprile [1]900

Carissimo Guido

Rifatti i calcoli secondo le tue indicazioni troverei che una curva 2-pla la cui residua sia di genere ρ, conta come $p - \rho$ p[un]ti 2-pli ($p - \rho > 0$). In ciò non ho tenuto conto della correzione relativa ai σ p[un]ti base del fascio $|\gamma|$, ma questa correzione mi sembra sia nulla nel caso generale, ed in ogni caso *favorevole*. Bada che nell'esempio da te addotto vi sono p[un]ti base infinitamente vicini i quali (secondo Segre) esigono speciali cautele; in ogni caso il termine correttivo è, anche qui, a noi favorevole.

Credo essenziale per noi di potere applicare al fascio la formula di Segre,[1] giacché se pur si riuscisse a trattare le reti di curve di genere $p + 2$, resterebbero sempre a studiare le reti che sono composte colle curve d'un fascio.

La vostra Fac[ol]tà non ha poi risoluto niente riguardo alla Fisica-matematica?[2] Forse avete rimandato ogni decisione alla fine dell'anno?

Da noi si comincia a parlare della cattedra di Astronomia, sebbene sia in massima stabilito che una risoluzione non debba prendersi prima del Giugno.

Si può dire che si manifestano due correnti: di quelli che vorrebbero dare all'insegnamento un carattere matematico, facendo Meccanica Superiore e di quelli che vorrebbero proprio un astronomo. A me pare veramente che la Meccanica nella nostra Fac[ol]tà avrebbe bisogno di essere rinforzata, mentre l'osservatorio astronomico è privo di mezzi e potrebbe funzionare per suo conto come osservatorio metereologico fino ad un giorno in cui, per un rimaneggiamento di cattedre, potesse venire aggregato alla Geodesia.

Sembra che qui verrebbero volentieri due astronomi: il Porro e il Venturi;[3] il primo specialmente si dà molto moto. Per la Mecc[anic]a Sup[eriore] invece non si sa che cosa potrebbe farsi. Qualcuno vorrebbe dare l'incarico a me; ma io sono riluttante, e perché non mi piacerebbe che ciò accadesse senza il consenso di tutti, e perché dovrei sobbarcarmi ad una fatica non piccola mentre d'altra parte dovrei cedere l'incarico a colui che venisse qui (un giorno o l'altro) per la Meccanica razionale.

Ci sarebbe però una speranza molto bella, sebbene lontana, per il caso che il Volt[erra] non andasse a Roma.

Il V[olterra] interpellato confidenzialmente dal P[incherl]e ha risposto che certe eventualità (Roma) sospendono ora ogni sua iniziativa, ma non ha esplicitamente escluso di accettare una chiamata quando queste eventualità svaniscano. È difficile capire se la risposta del V[olterra] è dettata soltanto da cortesia; si potrebbe anche dubitare che egli, per una qualche ragione, non stesse bene a Torino e fosse disposto ad un cambiamento. Quando ci fosse una probabilità in questo senso credo che il partito, dirò astronomico, sarebbe sconfitto.

Ti raccomando la massima segretezza su quanto ti ho raccontato, tanto più che gli astronomi pare sieno già in precedenza inquieti con noi pel caso si muti l'insegnamento. D'altronde qui nemmeno i nomi dei candidati destano entusiasmo.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Cfr. Segre 1896.

[2] Su questa cattedra verrà chiamato Vito Volterra: cfr. p. 449, let. 482 (s.d., 1900).

[3] La Facoltà di Scienze di Bologna deciderà invece di mettere a concorso la cattedra di Astronomia e di affidarne l'insegnamento per l'anno 1900-01 a Enriques. La cattedra sarà assegnata nel 1903 a Michele Rajna, ricercatore dell'Osservatorio astronomico di Brera a Milano.

490.

[s. d.]

Carissimo Guido

Il ritratto della piccola Maria mi ha fatto un gran piacere, e sono grato a te e all'Elbina di avercelo mandato.

Picard, a cui avevo inviato i miei collectanea,[1] mi ha scritto un biglietto gentilissimo, in cui loda in special modo il tuo art[icol]o[2] («... votre article et celui de M. Castelnuovo m'ont tout à fait ravi...»); e questo tuo scritto *fa furore* anche qui, presso Pincherle, Amaldi...

Riguardo alla distribuzione dei miei estratti ho preso per norma di mandarli a quelli che non hanno ricevuto il libro completo. Ti do la nota di questi ultimi (cui è inutile fare un doppio invio): Segre, Bettazzi, Cremona, Berzolari, Montesano, Bianchi, Bertini, Arzelà, Pincherle, Loria, Martinetti, Pieri, Gerbaldi, Veronese, Levi-Civita, Lazzeri, Ricci, A[lessandro] Padoa, Guccia, Del Pezzo, Picard, Borel, Cosserat, Klein, Simon, Zeuthen, Noether, Del Re.

La nota è stata combinata coll'editore che, per ragioni sue, vi ha incluso alcuni nomi.

Ti saluto affettuosamente insieme all'Elbina e ai bimbi; un bacio speciale a Maria.

Ghigo

[1] Enriques 1900c.
[2] Castelnuovo 1900.

491.

1 maggio [1]900

Carissimo Guido

Vedo dai giornali che è convocato il Cons[iglio] Sup[eriore]. Se ciò non ti reca disturbo potresti pregare il Cerruti di avvertirti della deliberazione che il Cons[iglio] prenderà relativamente al mio caso, con che si otterrebbe anche il vantaggio di poter provvedere nel caso che il M[inistr]o avesse trascurato di mandare al Cons[iglio] stesso la mia pratica.[1]

In questi giorni ho un po' lasciato da parte il nostro lavoro[2] occupato col corso di Geom[etria] Sup[eriore], avendo dovuto preparare lezioni nuove sulla teoria delle sup[erficie] a curvatura costante.

Ho trovato eleganti dimostrazioni sintetiche dei teoremi di Beltrami, che si estendono (opportunamente modificate) al caso delle var[ie]tà a 3 dimensioni (teoremi di Beltrami, Schläfli e Schur).

Ad es[empio] dimostro che «una sup[erficie] S rappresentata sul p[ia]no π in modo che alle geodetiche corrispondano rette è a curv[atur]a cost[ante]»[3] nel modo seg[uen]te:

Su π vi sono ∞^1 rette rappresentanti le linee (geodetiche) di lunghezza nulla; ve n'è 2 per ogni p[un]to. Data l'analiticità della rappresentazione, esse inviluppano una conica C.

Ora le trasf[ormazion]i omografiche di π che lascian ferma C mutano in sé l'equazione $ds^2 = 0$ e perciò il ds^2 in $k\,ds^2$ (k cost). Se in particolare si considerano le omologie armoniche, si hanno trasf[ormazion]i di S ove esistono archi mutati in sé stessi, e perciò $k = 1$.

Dunque S è mobile su sé stessa e perciò a curv[atura] cost[ante].

Grazie degli augurî per l'avvenimento aspettato,[4] del quale daremo a te e all'Elbina immediatamente l'annunzio.

Saluti cordiali aff.mo

Ghigo

[1] Si tratta della pratica per la promozione a ordinario.
[2] Enriques-Castelnuovo 1901.
[3] Cfr. Beltrami 1865, 279-80.
[4] La nascita della figlia primogenita Alma, nata a Bologna il 9 maggio 1900.

492.

19 giugno [1]900

Carissimo Guido

Le notizie che mi dai mi fanno molto piacere, e più ancora sono lieto del fidanzamento di Volt[erra] che egli stesso gentilmente mi annunzia.

Oltre al guadagno della Facoltà[1] tu acquisti un collega ed amico, in cui le doti dell'animo non sono inferiori a quelle della mente.

Nel lavoro[2] sulle sup[erficie] non ho potuto andare avanti, occupato anch'io, tutto il giorno, cogli esami. Ho finito i miei di Pr[oiettiv]a con esito discretamente buono, e domani farò quelli di Descr[ittiv]a.

Credo che pochi giorni di libertà basteranno a portare a compimento il lavoro. Mi par di vedere che la trasf[ormazio]ne d'una sup[erficie], non rigata, in una senza curve eccezionali, debba riuscire semplicemente. Gli altri corollari del resultato fondamentale sono immediati.

Porterò dunque il lavoro a Firenze dove, a quel che capisco, tu sarai ai primi di Luglio. Conti di fermarti?

E tu mi mostrerai allora l'art[icolo] per l'Enciclopedia.[3]

A proposito dell'Enciclopedia, la commissione amministrativa mi fa scrivere che ha posto gli occhi su di me perché trovi un collaboratore per un

art[icolo] nuovo sulla «Geometria elementare *moderna*» comprendente le teorie di Study, Meyer..., sulle corrispondenze, complessi invarianti (?!). Il Meyer aggiunge che offre prima di tutto a me di assumere l'incarico. Naturalmente io ne ho assai degli impegni già assunti, e quanto a trovare un collaboratore non saprei chi proporre. Ho scritto in proposito (ieri l'altro) a Segre, ma questi mi risponde che non crede adatto allo scopo nessuno degli scolari (Scorza, Daniele...) che ha attualmente a Torino.

Se non hai, come credo, nessuna proposta da farmi, risponderò dunque al Meyer declinando l'incarico.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina]. Tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ricevo ora la tua. Sei stato molto buono a passare al M[inister]o. Io m'ero rivolto a Danieli per ottenere la nomina[4] dal 1° Luglio, questi ha riposto da Parigi, che se ne sarebbe occupato; poi non ho saputo altro.

Sono contento ad ogni modo, se proprio vogliono rubarmi 4 mesi, di avere la nomina subito.

Grazie dunque e di nuovo saluti affettuosi.

[1] L'allusione è al trasferimento di Vito Volterra a Roma.
[2] Enriques-Castelnuovo 1901.
[3] Cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[4] La nomina a professore ordinario.

493.

Cutigliano 30 agosto [1]900

Carissimo Guido

Ho tardato a scriverti perché ho proceduto nel lavoro assai lentamente. Tuttavia, in base alle tue osservazioni, parmi di aver già introdotto nella redazione dei miglioramenti notevoli.

In primo luogo mi sono diffuso sulla discussione dei piani doppi con un fascio di curve ellittiche, ed ho trattato collo stesso metodo il caso del fascio di genere due. Spero che la discussione andrà bene e potrà soddisfarti.

Mi occupo ora da qualche giorno delle curve eccezionali. Mi par buona idea quella di raccogliere in un cap[itol]o speciale le cose sull'argomento, ma forse questo cap[itolo] potrebbe essere il 4° anziché il 3°, cioè seguire la discussione dei p[ia]ni 2-pli ecc., e precedere immediatamente lo studio delle sup[erficie] sopra cui l'aggiunzione si estingue.[1] Ad ogni modo se preferisci mantenere l'ordine accennato nelle tue osservazioni, si tratterà di una pura e semplice posposizione.

Quel che più importa è la possibilità d'introdurre nello studio delle curve eccezionali, ulteriori semplificazioni. Si possono distinguere *due specie* di curve eccezionali: quelle di 1ª specie sono fondamentali per un sistema *privo di punti base* sopra la sup[erficie], e quindi si trasformano in p[un]ti senza creare nuove curve eccezionali. Si possono sempre fare scomparire quantesivogliano curve eccezionali di 1ª specie non secantisi fra loro.

Una curva eccezionale di 2ª specie non si può eliminare senza che qualche punto di essa si muti in una curva. La presenza di una sola curva eccezionale di 2ª specie porta l'esistenza di sistemi per cui $n > 2\pi$.

Le curve che si distaccano nell'aggiunzione, nel modo che sai, sono tutte e sole le curve eccezionali di 1ª specie d'ordine assai piccolo e non si segano fra loro.

La preparazione della superficie[2] consiste nell'eliminare tutte le curve ecc[ezional]i di 1ª specie fino ad un certo ordine.

Come resultato definitivo ogni sup[erficie] può trasformarsi in guisa da non contenere curve eccezionali di 1ª specie ed allora $\omega = p^{(1)}$, colla restrizione $n \leq 2\pi - 2$.

Delle ultime riduzioni relative all'ipotesi $\omega > 1$ non mi sono ancora occupato.

In complesso spero che il lavoro possa assumere una forma assai organica e soddisfacente.

Saluti cordialissimi tuo

Ghigo

[1] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1900b, che porta la data ottobre 1900, per i risultati sui piani doppi, ed Enriques-Castelnuovo 1901, cap. 3 «Sulle curve eccezionali» e cap. 4 «Superficie sopra le quali il procedimento di aggiunzione si estingue; loro riferibilità a rigate».

[2] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1901, cap. 4, § 12 «Preparazione della superficie».

494.

5 Sett[embre 1]900

Carissimo Guido

È interessante ciò che mi scrivi, tanto più che il resultato mi sembra invertibile.

Infatti quei ragionamenti che andavamo facendo per un caso troppo generale avanti la mia partenza per Andorno, sembrano applicabili in questo caso (e chi sa non possano rendersi validi sempre). Se p[er] e[sempio] ci fissiamo sopra una sup[erficie] con un fascio ellittico di curve ellittiche, dove per ogni sistema puro sia $n = 2\pi - 2$, l'aggiunzione come tu dici è data dalla formula

$$|C'| = |C + \gamma - \gamma_1|$$

dove γ e γ_1 sono due curve (elementi) del fascio in corrispondenza birazionale fra loro. Ora se questa corrispondenza non è ciclica, l'aggiunzione non può terminare.

Si potrà costruire una tal superficie con fascio ellittico dove per uno e quindi per ogni sistema puro sia $n = 2\pi - 2$? Mi pare che la costruzione possa ottenersi mediante una rigata ellittica doppia, per una scelta opportuna della curva (quadrisecante le gen[eratric]i) di diramazione.

E sarebbe già bello di avere così esempi di sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$ e $P_i = 0$.

Ma questo primo successo per le sup[erficie] con $n = 2\pi - 2$, persuade sempre più che tutte le sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$ debbano contenere un fascio di curve ellittiche. Come si riuscirà a dimostrarlo?

Se supponiamo che la serie dei generi di $|C|$ $|C'|$ $|C''|$ ... sia π, $\pi + d$, $\pi + 2d$ ..., tutto avviene *come se* si avesse sulla sup[erficie] un fascio di curve ellittiche (γ) secanti in d p[un]ti le C, le C'... Ora se il fascio esiste, l'imposizione d'un p[un]to di molteplicità superiore a d, ad un sistema $|C^i|$ (ove i è assai alto) deve produrre lo spezzamento in una γ contata d v[olte] e in una residua curva. Bisognerebbe far vedere che tale spezzamento accade necessariamente, almeno quando la molteplicità del punto imposto supera certi limiti. Ma i soliti calcoletti del δ non mostrano una siffatta necessità.

Domani parto con Luisa e la bimba per l'*Ardenza* (Livorno) - Via della Palazzetta Comunale 14.

Ti saluto cordialmente Ghigo

495.

11 settembre [1]900

Carissimo Guido

Dopo averti scritto mi ero accorto anch'io che le superficie con $p^{(1)} = 1$ ove $n < 2\pi - 2$, contenenti un fascio di curve ellittiche hanno i plurigeneri P_i, da un certo punto in poi, > 0.

Quanto alle superficie ove $n = 2\pi - 2$, credo che l'esempio che c'interessa venga dato dalle rigate multiple di cui la curva di diramazione è una quadrisecante del genere minimo. Ma per verificare la cosa (almeno nel caso delle rigate ellittiche doppie) mi occorre la formula, che tu conosci, che dà il numero delle intersezioni di due curve sopra una rigata.

Mi sembra poi probabile che tutte le sup[erficie] con $n = 2\pi - 2$, e $p_n < 0$ $p_g = 1$ contengano un fascio irrazionale di curve ellittiche. Per dimostrarlo (applicando il tuo ragionamento elegantissimo) occorrerebbe costruire sulla sup[erficie] un sistema non contenuto in un sistema lineare.

Ora a ciò si riuscirebbe ove si potesse costruire delle sup[erficie] φ_{n-2} agg[iun]te alla sup[erficie], contenenti una retta e su questa $n-3$ p[un]ti 2-pli, perché allora si avrebbero ∞^2 piani contenenti delle curve agg[iun]te d'ord[ine] $n-4$ e ∞^1 di tali curve starebbero sulla sup[erficie].

Quanto alle sup[erficie] con $n < 2\pi - 2$ e $p^{(1)} = 1$, non riesco a nulla, ed è un peccato perché sono sempre più persuaso che esse contengano un fascio di curve ellittiche (pluricanoniche).

Sono curioso di sapere che cosa hai trovato di generale intorno agli integrali di Picard.

Ho condotto a termine la parte fondamentale del nostro lavoro,[1] riuscendo a semplificare assai la discussione degli ultimi casi, senza mai far uso delle circostanze che portano $\delta > 0$.

Saluti cordiali

dal tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.

496.

[s.d.]

Carissimo Guido

Se non sono caduto in errore, uno degli esempi che c'interessano potrebbe ottenersi nel seg[uen]te modo:

Prendiamo una rigata F_4 con 2 dir[ettric]i 2-ple a^2, b^2.

Imponiamo ad una F_5 di contenere a e 5 p[un]ti fissati sopra b, inoltre le 10 gen[eratric]i uscenti dai 5 p[un]ti nominati: si hanno $6 + 5 + 40 = 51$ condizioni, e siccome il sistema F_5 contiene in sé quello ∞^3 costituito dalla F_4 più un piano, tenuto conto che tutte le F_5 sono ∞^{55}, si conclude che *esiste una F_5 irriducibile soddisfacente alle condizioni richieste.*

Ora supponiamo che dei 5 p[un]ti presi su b, 4 si riducano a 2 coppie di p[un]ti infinitamente vicini, e uno sia un p[un]to per cui escono due generatrici coincidenti di F_4. Abbiamo così una F_5 secante F_4 in una C_8' (d'ord[ine] 8), nella a^2 e in 5 gen[eratric]i r contate 2 v[olte]. Prendendo a considerare la rigata 2-pla $x\ y\ z\ \sqrt{F_5}$ (ove $x\ y\ z$ son legate dall'eq[uazione] di F_4), si ottiene una sup[erficie] con un fascio ellittico di curve ellittiche.

Di più consideriamo le C_8 sez[ion]i quadriche di F_4; esse rappresentano un sistema di grado $n = 32$. Una curva agg[iun]ta viene data da C_8' più 4 gen[eratric]i (secanti su C_8 un gr[uppo] can[onic]o composto di 4 cop-

pie); pertanto se π è il gen[ere] del sistema immagine di C_8 si ha

$$2\pi - 2 = 16 + C_8 C_8' = 32,$$

ossia $n = 2\pi - 2$.

Ciò basta per affermare che $p^{(1)} = 1$ e che l'agg[iunzio]ne si ottiene sulla sup[erficie] sommando una curva ell[ittic]a K del fascio e sottraendone un'altra K_1. La sola cosa che mi par chiara ma si potrebbe desiderare di dimostrare rigorosamente è che K e K_1 non coincidono.[1]

Avvertenza. Conviene nella costruzione precedente supporre all'infinito la a e le due generatrici infinitamente vicine per cui passa F_5.

Mediante rigate 2-ple o 3-ple ($\sqrt[3]{f}$) si dovrebbe poter costruire, se esiste, un esempio di sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$ ed un fascio irr[azionale] di curve di gen[ere] > 1. (Ma per ora non sono riuscito).

Ho redatto anche la parte del lavoro[2] che riguarda le sup[erficie] con ∞ trasf[ormazion]i, sopra le quali si riesce subito a costruire un sistema ove $n > 2\pi - 2$.

Ho pure scritto quanto[3] si riferisce alla definizione del $p^{(1)}$ e al suo valore per le rigate. Trovo solo una piccola difficoltà nel caso ellittico. Infatti si riesce a costruire una tras[format]a della rigata ellittica ove $n \leq 2\pi - 2$ e $\omega = -1$, ma non vedo bene come si escluda in modo semplice che l'ω possa raggiungere il valore 0.

Sono assai curioso di sapere qualcosa di più intorno a ciò che hai trovato in questi ultimi giorni.

Tanti saluti cordialissimi anche all'Elbina e tante cose ai Tuoi.

Tuo
Ghigo

[1] Seguono nell'originale tre righe cancellate.
[2] Enriques-Castelnuovo 1901, cap. 5, § 19.
[3] *Ibid.*, cap. 6, §§ 20-21.

497.

[s.d.]

Carissimo Guido

Pare che un esempio di sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$ ed un fascio ellittico di curve di genere 2 si possa costruire nel modo seg[uen]te.

Prendasi una rigata F_4 con 2 dir[ettric]i 2-ple a, b. Esiste *una* F_7 irriducibile passante per a e contenente 7 coppie di generatrici uscenti da 7 punti di b.

Si può supporre che 6 di tali coppie sieno a coppie infinitamente vicine, e la 7ª sia costituita da 2 gen[eratric]i coincidenti. Si può anche supporre che queste 2 gen[eratric]i coincidenti ed a costituiscano la sezione della rigata $f_4 = 0$ col piano all'infinito.

Allora la rigata 2-pla $x\ y\ z\ \sqrt{F_7}$ ($f_4 = 0$) è una sup[erficie] con un fascio di curve di gen[ere] 2. La curva di diramazione è una C_{12} *di genere* 1.

Ora consideriamo il sistema $|C_8|$ segato su F_4 dalle quadriche; ad esso corrisponde un sistema $|C|$ di *grado* $n = 32$. Una curva agg[iun]ta è data dalla C_{12} di dir[amazion]e più 4 gen[eratric]i, e quindi il genere del nominato sistema $|C|$ si valuta colla formula

$$2\pi - 2 = 16 + 24 = 40$$

$$\pi = 21$$

$$n = 2\pi - 2 - d \qquad \text{ove} \qquad d = 8$$

Il genere di $|C'|$ vale $(C_{12} + 4r^2)$

$$\pi' = 1 + 4 \cdot 7 = 29$$

ossia

$$\pi' = \pi + d = 3(\pi - 1) - n + 1.$$

Da qui segue $p^{(1)} = 1$.

Così resterebbero confermate le tue previsioni almeno in ciò che concerne l'effettiva esistenza di sup[erficie] cón $p^{(1)} = 1$ $P_i = 0$ ed un fascio di curve irr[azional]i non ellittiche.

Mi par chiaro infatti che per la sup[erficie] prec[eden]te $P_i = 0$ poiché C e C' hanno lo stesso n[umer]o d'intersez[ion]i colle curve rappresentate dalle sez[ion]i piane della rigata.

Saluti affettuosi Ghigo

[P.S.] Pare che esempi analoghi si ottengano segando F_4 con una F_9 per a e per 18 gen[eratric]i uscenti da 9 p[un]ti di b ecc.

498. [c.p.]

[Livorno] 19 settembre [1]900

Carissimo Guido

Ti ringrazio di quel che mi comunichi intorno agli integrali,[1] ma peccato che sia andato in fumo quanto speravi poter ottenere per le sup[erficie] con $n = \pi - 2 - d$!

Per la costruzione effettiva d'un esempio temo anch'io che quello che ti ho comunicato nella 2ª lettera[2] non vada bene; il genere di C_{12} viene bensì 1 (almeno mi pare); però la C_{12} potrebbe forse costituire una curva 3-canonica. Per eliminare tali dubbi converrebbe costruire una rigata 2-pla ($p^{(1)} = 1$) di gen[ere] 2. Ma per la F_5 con 2 dir[ettric]i $a^3\ b^2$, troverei che la curva di dir[amazion]e dovrebbe segare le gen[eratric]i in 38 p[un]ti e avere l'ord[ine] 19! un assurdo!

Al 1° es[empio][3] non ho più ripensato ($n = 2\pi - 2$), ma spero che andrà bene e si riuscirà a vedere rigorosamente che $P_i = 0$.

Tanti saluti cordiali anche all'E[lbina] Tuo
Ghigo

[1] Cfr. p. 463, let. 495 (11.9.1900).
[2] Cfr. p. 465, let. 497 (s.d., 1900).
[3] Cfr. p. 463, let. 496 (s.d., 1900).

499.

24 novembre [1]900

Carissimo Guido

Ciò che mi racconti nella tua lettera mi ha un po' seccato, specialmente se sarò costretto a reclamare la priorità del resultato sulle sup[erficie] con un fascio di curve raz[ional]i, per il che aspetto a vedere la nota di S[eligmann] Kantor.[1]

Il sig. Kantor si mette, mi pare, sopra una strada tale da recar molte noie, giacché dice (in parte) delle cose giuste attribuendo agli autori di esse le affermazioni contrarie. Una polemica su questo terreno di mala fede è molto pericolosa.

Il Meyer mi scrive relativamente ai nostri art[icol]i,[2] che desidera avere un sommario degli argomenti trattati, e ciò perché la coordinazione del 3° vol[ume] sembra difettosa. Dice che nell'art[icolo] III C5 troverebbero posto secondo lui le questioni di: generazione, singolarità, questioni sul genere, questioni di realtà (o di forma?). Per il III C9 richiama la nostra attenzione sui gruppi di trasf[ormazion]i, sul principio generale di corrispondenza di Hurwitz, sulla teoria dei connessi. E dice che nel 1901 si dovrà rifare il piano dei cap[itol]i III A, C, D. Che cosa si deve rispondere?

Quanto alla stampa del vol[ume] III il Meyer mi avverte che ne verrà rimandato il principio di varii mesi, ciò che mi secca per il 1° Art[icolo].

La nostra Fac[ol]tà è tuttavia incerta per la questione dell'Astronomia.[3] Pare che si finirà col chiedere un concorso, ed in questo caso sembra darebbero a me l'incarico del corso per quest'anno. In vista della probabilità

ho preso ad esaminare libri di Astronomia e di Meccanica celeste, e mi pare che riuscirei a mettere insieme un programma.

Avrei del resto libertà di scelta fra i vari argomenti, e mi atterrei naturalmente all'indirizzo matematico, ma senza trascurare un'esposizione del modo come si possono stabilire i fatti astronomici fondamentali che servono di base alla meccanica celeste.

Ti terrò informato di quel che la Fac[ol]tà avrà deliberato.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Kantor 1900; a questo proposito si veda la lettera di Picard del 12 novembre 1900 riportata in Appendice (pp. 664-65).

[2] Si tratta degli articoli per l'*Encyklopädie* tedesca: cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] Cfr. p. 456, let. 489 (18.4.1900).

500.

1 dicembre [1]900

Carissimo Guido

Da varii giorni volevo scriverti e non ne ho trovato il tempo. Ed anche ieri ho potuto soltanto soddisfare alla tua richiesta di inviarti le bozze[1] senza ritardo, tutto assorbito dal lungo verbale della seduta per l'Astronomia.

Nella quale si è concluso (contrariamente all'opinione del Preside) di chiedere un concorso per ordinario. Frattanto mi viene affidato l'incarico.

Il programma che mi propongo di svolgere è il seguente:

1) Fino a che punto abbia senso la questione del moto assoluto (rotazione ma non traslazione). (Ho fatto piena luce su tale questione e te ne parlerò). Dimostrazione diretta della rotazione diurna della terra.

2) Le osservazioni astronomiche (triangolazioni, parallassi...) e le leggi di Keplero.

Prove (indirette) della rotazione della terra attorno al sole. Teoria di Bradley dell'aberrazione della luce.

3) Deduzione della teoria della gravitazione universale dalle leggi di Keplero. Esperienze di Cavendish. Conferme della rotazione della terra attorno al sole.

4) Equazioni del moto dei pianeti e del sole (o meglio dei loro centri di gravità).

Problema dei due corpi.

Integrazione.

5) Problema dei 3 corpi. Cenno della funzione perturbatrice.

6) Conferme della teoria della gravitazione.

Esame dei piccoli errori astronomici e delle ipotesi che potrebbero introdursi a spiegarli (l'attrazione impiega un tempo di propagazione?).

7) Moto dei pianeti attorno al proprio centro di gravità.

8) Potenziale e forme di equilibrio di masse gassose rotanti.

9) Deduzione della forma della terra supposta omogenea e confronto colla forma dedotta dalle misure geodetiche. Spiegazione del non accordo.

Questi sono, per sommi capi gli argomenti su cui avrei fissato la mia attenzione. Il bel trattato di Meccanica Celeste del Tisserand[2] dà modo di svolgere tutte le questioni matematiche che vi si connettono; ma occorre fare una scelta in relazione alla scarsezza del tempo.

Quanto alla sottoscrizione Beltrami,[3] i Colleghi manderanno direttamente; l'Accademia delibererà (o ha già deliberato) di contribuire con £ 100. Dai pure a mio nome £ 10 che ti rimborserò a Firenze, e grazie dell'anticipo.

Saluti affettuosi

Ghigo

[1] Si tratta delle bozze di Enriques-Castelnuovo 1900b.
[2] Tisserand 1899.
[3] Eugenio Beltrami era morto a Roma il 18 febbraio 1900.

501.

Firenze 18 dicembre [1]900

Carissimo Guido

Ti ringrazio delle £ 10 sborsate a conto mio per la sottoscrizione Beltrami, e te le rimborserò quando verrai qui fra pochi giorni.

Credo di non averti scritto che il Consiglio Superiore ha bocciato il programma del mio corso libero di filosofia scientifica, ritenendone l'argomento non affine ai corsi della Facoltà di scienze ai sensi dell'art[icolo] 13 della legge Casati![1]

Oltre alla comunicazione ufficiale, mi ha partecipato la cosa anche il Sen. Cantoni (il filosofo di Pavia), esprimendomi il rammarico che il Cons[iglio] non abbia accolto il parere favorevole da lui espresso su quel programma, o meglio che abbia creduto inconciliabile coi regolamenti un tale programma nella Fac[ol]tà di scienze.

Sarei curioso di sapere chi fu il relatore. Se ti capita l'occasione di far chiacchierare il Cerruti potrai levarmi questa curiosità.

Intanto il Cantoni mi chiede qualche art[icol]o per la sua Rivista di Filosofia. Ciò mi spinge a redigere per lui, in breve, la conclusione dei miei studi sul problema psicologico dei postulati geometrici,[2] lavoro che mi

propongo di compiere in queste vacanze nel tempo lasciatomi libero dalla preparazione del corso di Astronomia.

Tanti saluti affettuosi Ghigo

[1] Per il testo della Legge Casati, cfr. Amante, *Il regolamento universitario* cit.
[2] Cfr. Enriques 1901c.

502.

8 gennaio [190]1

Carissimo Guido

È venuto dal Ministero il mio incarico di Astronomia[1] del quale, con metodo nuovo, non mi si assegna una certa retribuzione, ma mi si promette alla fine un adeguato (!) compenso.

Comincerò prestissimo le lezioni.

Ripensando alla obiezione che tu fai al mio ragionamento, vedo che, nonostante la giustezza di essa, quel ragionamento non è da buttar via.

In 1° luogo serve ad escludere l'esistenza di un fascio (irrazionale o no) senza p[unt]i base, di curve di gen[ere] $\pi > 0$. Infatti colle curve del fascio si può sempre comporre un sistema $|C|$ per modo che $|C + D''|$ seghi su D una s[erie]e non speciale.

In 2° luogo se $|C|$ ha (come deve avere) dei p[unt]i di base, $|rC|$ ammetterà sempre qualche sistema agg[iun]to per r alto, giacché il suo gen[ere] sarà elevato, visto che s'integra col considerare i p[unt]i base come accidentali.

Ora si potrà prendere

$$|D| = |rC|$$

e si avrà che $|C + D''|$ segherà una s[erie]e non speciale su D almeno nel caso $n \leq 2\pi - 2$.

Dunque credo che l'inconveniente si ridurrà tutt'al più a dovere discutere un po' più a lungo l'ultimo caso a cui siamo condotti dal processo di riduzione.

Ho presentato alla Facoltà la domanda relativa alla questione del corso libero di Filosofia. Desideravo soltanto ottenerne la trasmissione. Ma varii colleghi hanno voluto entrare nel merito della questione, ed il resultato è stato un ordine del giorno, votato unanimemente, in favore della mia tesi.

Tanti saluti cordiali

Ghigo

[1] Cfr. p. 467, let. 500 (1.12.1900).

503. [c.p.]

[Bologna] Mercoledì [16 gennaio 1901]

Carissimo Guido

Volentieri scriverò al Meyer comunicandogli il programma dell'Art[icolo] sulle trasformazioni.[1]

La lettera in cui mi comunicavi la dimostrazione che le curve $I = \text{cost}$ ($p_g = 0$ e $I_1 \ldots I_s$ integrali di diff[erenzial]i totali) sono algebriche, non mi riesce di ritrovarla; perciò ti sarò grato se vorrai ripetermi almeno un cenno di quel ragionamento (ricordo solo che $I_1 = \text{cost} = I_2 = \text{cost} \ldots$).[2]

Oltre a ciò ti pregherei di dirmi se hai messo nel comune lavoro la formula di Nöther $\delta - n - 4\pi = \ldots$, modificata pei fasci irraz[ional]i, e di scrivermi tale formula nella forma che gli hai dato.[3]

Ho cominciato le lezioni d'Astronomia, e sono molto occupato per preparare il corso non volendo ridurmi all'ultimo momento.

Tanti saluti affettuosi Ghigo

[1] Cfr. anche p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).
[2] Cfr. p. 440, let. 473 (6.1.1900); Enriques 1901a, 62.
[3] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1901, 106-08.

504.

31 gennaio [1]901

Carissimo Guido

Picard mi scrive segnalandomi l'ultima Nota di Kantor[1] 21 Genn[ai]o 1901 e invitandomi a rispondere, ciò che faccio in forma garbata,[2] ma in sostanza cercando di prendere un po' in giro il sig. K[antor] che mi fa dire l'opposto di quel che ho detto.

Del resto la Nota stessa di K[antor] dà un resultato noto, ma la sua dimostrazione mi sembra cada nello sbaglio, che viceversa egli rimprovera a me, e ad ogni modo non mi soddisfa anche per altre ragioni.

La 3ª Nota di Kantor[3] sarà pubblicata dopo che Picard avrà tolto la critica che ti concerne, di cui miracolosamente l'autore ha riconosciuto l'errore.

Picard coglie l'occasione per ringraziarmi della nota inviatagli: «Je viens de lire avec un estreme intérêt ce que vous venez de publier avec Castelnuovo sur le plan double.[4] Quelle fécondité ont vos études sur le bigenre...! c'est merveilleux».

Avrai ricevuto il mio manoscritto del quale attendo il tuo giudizio, sia per la parte generale del lavoro, sia per l'esposizione del tuo lemma,[5] cui ci legano le applicazioni; di questo vorrai dirmi se preferisci di pubblicarlo

prima in altro lavoro sulle sup[erficie] con $n = 2\pi - 2$, e, dato che non ti dispiaccia che esso sia da me pubblicato, se la dimostrazione datane ti pare lo metta bene in luce.

Tante cose affettuose a te e all'E[lbina] e ai bimbi

Ghigo

PS 1 febbraio [1]901

Ricevo il manoscritto e la tua lettera; penserò alle osservazioni che mi comunichi.

La generalizzazione del teor[ema] di Picard si trova nel mio lavoro[6] sulle var[ie]tà a sez[ion]i iperellittiche. Ho già mandato ieri al Picard la risposta al K[antor]. Anzitutto avverto che quella generalizzazione si effettua semplicemente come io ho mostrato (non critico il ragionamento di K[antor] che mi pare errato anche nella estensione della congr[uenz]a dalla var[ie]tà allo spazio).

Poi dichiaro che i suoi rimproveri sono frutti di un malinteso. E soggiungo: Ho citato la congr[uenz]a di Montesano[7] per mostrare che non è possibile ecc. Il sig. K[antor] fa la stessa osservazione nella nota[8] del 12 Nov[embre] 1900. Del resto egli ha scorto il passaggio del mio Art[icol]o[9] cui fa allusione. Ma ho avuto la disgrazia di non esser capito da lui, perché egli pretende ch'io abbia affermato l'opposto di ciò che ho detto, ed allude ad un lemma che non si trova né a pg. 17 né altrove nel mio lavoro. Veramente sarebbe stato strano che cercassi da Montesano un esempio per dedurne conseguenze contraddittorie!

Fortunatamente il malinteso non può produrre dubbi quanto al fondo della questione, perché le oss[ervazion]i che K[antor] espone alla fine della sua nota sono giuste. Le stesse oss[ervazion]i e l'esempio citato sopra, mi avevano guidato alla stessa conclusione.

[1] Kantor 1901a; cfr. anche p. 466, let. 499 (24.11.1900).

[2] Cfr. Enriques 1901e.

[3] Questa nota non fu pubblicata sui «Comptes Rendus». Nel verbale della seduta del 20 maggio 1901 si legge soltanto: «M. S. Kantor, en reponse à une Communication de M. Enriques du 4 février dernier [Enriques 1901e], adresse une courte Note dans laquelle il rappelle qu'il a cité le Travail de M. Enriques [Enriques 1895d] dans un Mémoire paru au mois de janvier dans l'American Journal [Kantor 1901b]».

[4] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1900b.

[5] Cfr. Enriques 1901a, 62.

[6] Enriques 1895d, 190-91.

[7] Cfr. Montesano 1895.

[8] Kantor 1900.

[9] Enriques 1897a, 455.

505.

Venerdì [s.d.]

Carissimo Guido

Anch'io da un pezzo volevo scriverti e la pigrizia mi ha vinto.

.Sono stato, giorni sono, a Padova, ed ho un po' meglio determinato alcune questioni che mi propongo di svolgere nel corso di Astronomia. Mi sono anche occupato di Logica (inorridisci! ho letto il trattatello di Burali-Forti)[1] e di divertimenti carnevaleschi...

Ho mandato al Cosserat la nota[2] sugli integrali di Picard.

Avevo veduto il resultato della votazione per la commissione giudicatrice del concorso di Torino,[3] ma ignoravo i particolari che mi comunichi. Bada però che il D[el] R[e] non è stato portato dai malcontenti soltanto, ma anche dai descrittivi, giacché ho saputo che p[er] e[sempio] a Padova hanno votato per lui, avendo Veronese seguito il criterio di proporre di preferenza i prof[essor]i di Descrittiva.

Per parte mia non sono stato malcontento di riuscire fra i dieci.

Hai finito di dar forma definitiva al manoscritto del lavoro[4] per gli Annali?

A Pavia, per il posto di prof[essor]e alla Scuola Normale, pende un concorso cui hanno preso parte 12 aspiranti. I più quotati sembra che sieno il nostro Amaldi, Daniele, Fubini di Pisa, e Gallucci di Napoli. Quest'ultimo passa per un gran geometra!

Qualcuno mi accennò anche alla possibilità di riuscita del Viterbi, ciò che sarebbe una vera enormità.

Ho sentito che il Tonelli sarebbe malato. Si tratta di cosa grave?

Quanto al premio dei Lincei, se vuoi proprio che concorriamo insieme, credo che non si potrà incontrare alcuna difficoltà pregiudiziale, giacché in ogni caso vi è un lavoro comune che costituisce come la sintesi degli altri resultati parziali, il che, sotto l'aspetto giuridico, dovrebbe bastare.[5]

Tanti saluti affettuosi a te e all'E[lbina]

Ghigo

[1] Burali-Forti 1894.

[2] Enriques 1901a.

[3] Si tratta del concorso per la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università Torino. La commissione fu composta da Castelnuovo, Alfonso Del Re, Domenico Montesano, Corrado Segre e Giuseppe Veronese. Al concorso si presentarono Federico Amodeo, Edgardo Ciani, Michele De Franchis, Gino Fano, Beppo Levi e Marino Pannelli. La graduatoria finale fu la seguente: 1° Fano, 2° Ciani, 3° De Franchis e Beppo Levi *ex aequo*.

[4] Enriques-Castelnuovo 1901.

[5] Castelnuovo ed Enriques concorsero congiuntamente al Premio Reale per la Matematica dell'Accademia dei Lincei, che scadeva il 31 dicembre 1901. Alla loro domanda la commissione giudicatrice solleverà alcune obiezioni di carattere formale che si chiariranno in parte nel corso di questa corrispondenza. Il premio non verrà assegnato: cfr. la *Relazione della commissione del concorso al Premio Reale di Matematica scaduto nel 1901*, «Rend. Acc. Lincei», 12 (1903), 540-47.

506.

18 Marzo [1]901

Carissimo Guido

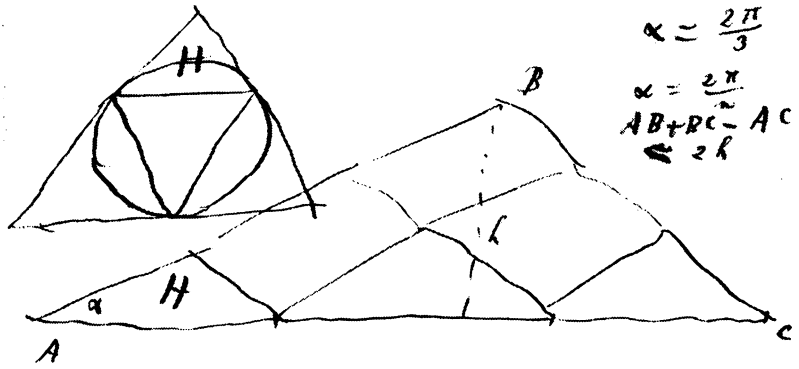
Il Picard è proprio gentile con noi ad ogni occasione. Ringrazialo molto anche a mio nome.

Non so capire come tu non abbia il mio lavoro[1] sulle superficie con un fascio di curve razionali. Te ne manderò volentieri un'altra copia, ma qui non l'ho trovata.

Sono occupato colla Geometria elementare,[2] nella quale trovo bellezze non sospettate.

Ho fatto lo schema dei principii, della teoria dell'eguaglianza, delle proporzioni e della ciclometria, preoccupandomi molto dell'ordine dei teoremi in ogni capitolo. La teoria delle proporzioni mi viene assai semplice e facile.

Per la ciclometria, ho trovato una dimostrazione del teor[em]a relativo alla differenza dei poligoni iscritti e circoscritti che mi sembra preferibile alla solita: $AB + BC - AC$ è la diff[erenz]a dei perimetri; ABC delle superficie.



Saluti affettuosi Ghigo

[1] Enriques 1899c.
[2] Cfr. Enriques-Amaldi 1903a.

507.

22 marzo [1]901

Carissimo Guido

Sono indifferente che tu mi mandi il manoscritto[1] qui o a Bologna dopo il 15 Aprile. Quando dobbiamo spedirlo a Jung?[2]

Siccome mi pare inutile far fare al lavoro tanti viaggi, se basta spedirlo alla fine di Aprile, puoi aspettare a mandarmelo a Bologna, giacché sono persuaso non vi saranno ormai, tutt'al più, che variazioni insignificanti da introdurre; ed io stesso lo farò proseguire per Milano.

Dei lavori dell'Hilbert di cui mi parli, non ho alcuna conoscenza; e nel mio Art[icol]o per l'Enciclopedia[3] ho accennato a tali questioni come insolute, dopo che il Bianchi mi fece notare le difficoltà di trattarle.[4]

Mi interesserebbe moltissimo di avere le citazioni precise! Come procurarsele?

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques-Castelnuovo 1901.

[2] Giuseppe Jung era allora uno degli editori degli «Annali di Matematica pura ed applicata».

[3] Enriques 1907d.

[4] Cfr. p. 398, let. 435 (28.1.1899).

508.

1 Aprile 1901

Carissimo Guido

Ti ringrazio della citazione del lavoro di Hilbert,[1] che cercherò in qualche modo di vedere.

Quanto a ciò che mi scrivi delle tue conversazioni col Doro,[2] l'andamento delle cose non mi sembra per me favorevole. Io non posso tenere l'Astronomia indefinitamente, e non può essa restare divisa dalla direzione dell'Osservatorio, attualmente affidata in via provvisoria al Dessau, libero docente di Metereologia.

D'altra parte il rifiuto del Ministero di dare all'Arzelà la supplenza della Geodesia, rende inevitabile di provvedere subito a quell'insegnamento, mentre io sono occupato coll'Astronomia.

Se invece il Ministero avesse aderito alle nostre richieste Arzelà mi avrebbe poi ceduto le Matematiche Superiori, ove la Fac[olt]à avesse acconsentito a questa sistemazione.

Dunque se ti capita di nuovo di conversare col Doro digli che è mio desiderio venga fatto subito il concorso di Astronomia, pel quale ho dato il mio voto. Io non potrei tenere senza indelicatezza quell'incarico.

Ho ricevuto la memoria di Fano[3] che sembra un bel lavoro. Ho notato la congruenza di gen[ere] 0 e bigenere 1 è una superficie *nuova*;[4] almeno sembra irriducibile alla mia F_6.

Mi è stato domandato chi costruisse i modelli di superficie. Ho dato l'indirizzo del Brill a Tubinga. È a Tubinga anche il laboratorio, oppure a Darmstadt?

Tanti saluti affettuosi Ghigo

[1] Hilbert 1901.

[2] Egidio Doro era allora capo divisione del Ministero dell'Istruzione Pubblica.

[3] Fano 1901.

[4] È la cosiddetta congruenza di Reye (cfr. Reye 1866-68, III, 140 sgg.) che Fano 1901, § 14 dimostra essere una superficie di genere 0 e bigenere 1, cioè una superficie di Enriques nella terminologia moderna.

509.

5 Aprile 1901

Carissimo Guido

Se il Segre è ancora in tempo, mi pare che egli stesso potrebbe e dovrebbe mostrare come si debba modificare il procedimento di Nöther per evitare la sua obiezione.[1] Infatti non è bello né giusto demolire ciò che ha bisogno soltanto di essere riparato.

Se non erro il ragionamento che tu fai,[2] sostituendo trasf[ormazion]i di Jonquières (risolubili in quadratiche) alle trasf[ormazion]i quadratiche adoperate da Nöther serve per *tutti* i casi, e mostra quindi che il procedimento errato di Nöther non ha condotto a nessuna conclusione erronea.

Tanto meno sono disposto ad accogliere la 1ª conclusione del Segre circa la decomponibilità di una trasf[ormazion]e cremoniana in quadratiche, giacché penso che le dimostrazioni del teor[ema] di Nöther usate dagli analisti nei corsi sulle funzioni abeliane rispondano, almeno implicitamente, a tutti i dubbi.

In ogni modo ti ripeto, mi sembra che quando un geometra come Segre fa una critica la cui portata può esser grave, sia conveniente che si occupi se questa inficia veramente il resultato oppur no, ove non si oppongano difficoltà troppo serie. E questo lo dico specialmente nell'interesse dell'A[utore] di evitare polemiche che potrebbero riuscir noiose. Al quale scopo credo anche (e se credi diglielo pure a nome mio) che il S[egre] dovrebbe citare anche noi fra gli autori caduti in errore.

Se il S[egre] non è più a tempo o non vuole distruggere da sé stesso le conseguenze delle sue obiezioni, forse sarebbe meglio che noi scrives-

simo una *mezza* pagina di aggiunta alla nostra nota,[3] pubblicandola nel Circolo di Palermo ove la nota comparve, oppure nei Rendiconti di Torino ove compare la critica.[4]

Quanto a De Fr[anchis] siamo pienamente d'accordo che sarebbe ridicolo e ingiusto punirlo di non aver scorto una difficoltà sfuggita a tanti geometri, e tanto più se l'errore non infirma minimamente i suoi resultati. A questo proposito noto che il De Fr[anchis] ponendo in relazione i fasci di genere 2 coi piani 2-pli ha avuto probabilmente una conferma indiretta delle sue conclusioni.[5]

Per B[eppo] L[evi] ho piacere che tu sia venuto allo stesso giudizio che la lettura dei suoi lavori mi aveva suggerito.[6]

Quando sarò tornato a Bologna ti saprò dire che cosa pensano i Colleghi intorno alla Geodesia; ma prevedo delle difficoltà.

Saluti affettuosissimi anche all'E[lbina]. Ghigo

[1] Cfr. Segre 1901, presentato il 24 marzo 1901.

[2] La risposta alle osservazioni di Corrado Segre si trova in Castelnuovo 1901, che contiene una nota di Segre.

[3] Enriques-Castelnuovo 1900b.

[4] A questo proposito si veda quanto è riferito in Castelnuovo 1901, 459, nota **.

[5] Cfr. De Franchis 1899, citato in Segre 1901.

[6] Castelnuovo era uno dei commissari al concorso di Torino (cfr. p. 472, nota 3 a let. 505, s.d. 1901) a cui concorrevano sia Michele De Franchis che Beppo Levi.

510.

7 Aprile 1901

Carissimo Guido

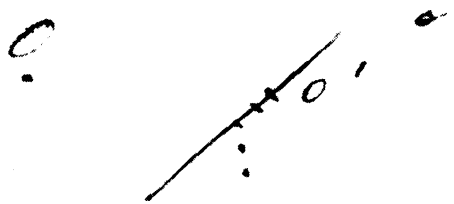
Il Segre mi ha scritto domandandomi che cosa penso di B[eppo] Levi e di De Franchis. Dice che senza avere spinto il Levi lo ha veduto concorrere colla segreta speranza che potesse andare un po' in su, e perciò, si capisce, è rimasto un po' dispiacente del tuo giudizio. Si è diretto a me direttamente anziché per mezzo tuo, per non perdere tempo, autorizzandomi a comunicarti la cosa.

Naturalmente io ho risposto al S[egre] dicendogli apertamente il mio pensiero e dicendogli pure come te lo avevo comunicato quando ancora tu non avevi esaminato i lavori del Levi, ed eri disposto a concedergli maggior stima. Spero che il S[egre] non sarà dispiacente della mia franchezza, giacché non ho cercato di temperare il mio modo di vedere; e se il resultato fosse di persuaderlo a far ritirare il Levi, credo potrebbe venirne un bene anche a questo giovane, massime se egli è riuscito alla dimostrazione di ciò che enuncia nella Nota lincea.[1]

Quanto alla ricostruzione dei resultati incriminati dal S[egre],[2] se questi non vuol farla da sé, potresti forse pubblicare una lettera[3] rivolta al S[egre] stesso negli Atti di Torino, visto che hai rifatto tutto quanto occorre. A me sembra però che la tua ricostruzione valga ad annullare la portata pratica dell'obiezione del S[egre] in *tutti* i casi, giacché, in sostanza, tu mostri che dove l'abbassamento non riesce col metodo di Nöther, con *una* trasf[ormazion]e quadratica, riesce con una trasf[ormazion]e di Jonquières, cioè con *più* trasf[ormazion]i quadratiche.

Non è così? E allora perché i resultati di riduzione per $p > 1$ dovrebbero esserne incriminati?

A me sembra, del resto, che la singolarità che il S[egre] considera, si possa *sciogliere* con un n[umer]o finito di trasf[ormazion]i quadratiche ed operare poi sulle sing[olari]tà risolute, restando solo a mostrare che le complicazioni non si riproducono. Quando una 1ª trasf[ormazion]e generica muti O in una retta, su cui si trovino i punti mult[ipl]i successivi O'...;



dopo $i - 2$ trasf[ormazion]i analoghe la sing[olari]tà è sciolta ((per quanto occorre)). Ora bisogna far vedere che nella progressiva riduzione del sistema trasformato, non capita mai una trasf[ormazion]e quadr[atic]a per cui una retta fond[amental]e sia tangente alle curve del sistema. E ciò dovrebbe potersi eliminare vista l'arbitrarietà della trasf[ormazion]e eseguita innanzi, giacché la retta supposta darebbe luogo (tornando indietro) a una curva o a un punto dipendente dagli elementi della suddetta trasf[ormazion]e, da noi determinata.

Comunque quel che mi sembra importante è che la risposta al S[egre], in un modo o in un altro, venga fuori *subito*, per evitare il rumore che potrebbe nascerne.

Saluti affettuosi

Ghigo

[P.S.] La Mamma non scrive e vi saluta.

[1] B. Levi 1900.
[2] Cfr. Segre 1901.
[3] Castelnuovo 1901 fu pubblicato infatti sotto forma di lettera a Corrado Segre.

511.

21 Aprile 1901

Carissimo Guido

Ho riletto la comune Memoria,[1] colle tue modificazioni. Mi pare che tutto vada benissimo, ed in complesso il lavoro sia riuscito redatto molto benino. Quando debbo mandarlo ad Jung? Debbo aspettare che egli lo richieda?

Sarete domani alla fine del vostro lavoro, ed aspetto notizie.[2] Spero che il Segre si arrenda alla mia preghiera e passi per Bologna, almeno per qualche ora.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.

[2] Enriques allude alla conclusione dei lavori della commissione del concorso di Torino. Cfr. p. 472, nota 3 a let. 505 (s.d., 1901).

512.

26 Aprile 1901

Carissimo Guido

Ti ringrazio delle notizie particolareggiate che mi dai intorno al concorso. Due cose soprattutto mi hanno colpito.

Il contegno di D[el] R[e] riguardo al Fano mi pare indecente, e non giustificabile colla scusa della Descrittiva; giacché per un giudice spassionato che voglia dare molta importanza ai titoli di questa materia, la conclusione legittima era soltanto quella a cui è venuto il Veronese.

In secondo luogo il resultato pratico della graduatoria per quanto concerne il Ciani, è tale da compromettere un futuro concorso,[1] data la sua eleggibilità con 5 sì (sotto il qual riguardo il C[iani] viene a superare tutti i concorrenti), e i 3 voti che lo separano da De Fr[anchis] e B[eppo] L[evi].

Non mi sorprenderebbe, del resto, che il Cons[iglio] Sup[eriore] annullasse l'attuale giudizio, ravvisandovi una certa incongruenza al lume dei criterii (a dir il vero non perfettamente logici) che esso ha adottato in altre occasioni.

Il modo di combattere le pretese esorbitanti dei descrittivi credo potesse esser quello di convenire con loro nella massima, cioè che per un concorso di Pr[oiettiv]a e Descr[ittiv]a si deve dare importanza ai titoli di Descr[ittiv]a. Ma ravvisando poi la nullità dei titoli presentati da qualche concorrente, sostenere che un titolo privo di valore non può costituire una superiorità sulla mancanza di ogni titolo. Una tal massima, il Cons[iglio] non avrebbe potuto discuterla.

Passando ad altro argomento, vorrei saper da te, che sei pratico delle Alpi venete, qualche cosa intorno a Cortina d'Ampezzo, e S. Martino ecc. Segnatamente a qual prezzo sia la pensione nei buoni alberghi di Cortina.

Vorrei fare una villeggiatura alpina con Luisa, e dalle informazioni avute mi piacerebbe assai andare a Cortina, purché non costi troppo.

Ci sono altri bei luoghi di villeggiatura, nel Veneto, dove si trovi anche una certa compagnia?

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Edgardo Ciani sarà nominato professore di Geometria proiettiva all'Università di Genova nel 1906.

513.

1 Maggio 1901

Carissimo Guido

Grazie delle informazioni intorno alle villeggiature, che ci fornite. Siamo assai contenti di quelle che riguardano Cortina, tanto più che tutti ci dicono essere un luogo bellissimo.

Quanto a ciò che mi dici intorno alla convenienza di dedicare al Cr[emona] il nostro lavoro,[1] puoi immaginare ch'io sono diviso, come te, fra il medesimo desiderio e il medesimo dubbio. Tuttavia per schiarire quest'ultimo vorrei sapere, se in occasione del Giubileo altri facciano feste al Cr[emona]. Se ad es[empio] molti geometri si mettessero d'accordo di onorare il suo nome dedicandogli in quest'anno dei lavori, mi pare che ogni sospetto di cortigianeria da parte nostra verrebbe escluso.

Finalmente ti racconterò (non ti stupire) che sto pensando a pubblicare le mie lezioni di G[eometria] descrittiva.[2] Scopo principale sarebbe quello di togliermi per l'avvenire la seccatura di pensare alle litografie, giacché ogni volta mi tocca almeno riguardare le fig[ure] ecc. Ora avrei progettato di stampare le suddette lezioni senza pretesa di scopo scientifico, pei miei studenti, scrivendo sul frontespizio «pubblicate per cura di U[mberto] Concina», al quale appunto affiderei qualche aggiunta o modificazione. Il libro dovrebbe rappresentare una fusione dell'ultimo mio corso (che, per quanto mi disse il S[egre], non spiacque al Veronese) con qualcuno dei cap[itol]i contenuti negli antecedenti. Il Concina è poi adatto per ampliare e svolgere argomenti semi-tecnici, avendo studiato la G[eometria] descrittiva in Ungheria ed essendone appassionato.

Tanti saluti cordiali Ghigo

[P.S.] Luisa ringrazia l'Elbina della sua lettera e vi saluta affettuosamente.

[1] Enriques-Castelnuovo 1901; il lavoro in realtà non fu dedicato a Luigi Cremona.
[2] Enriques 1902a.

514. [c.p.]

[Bologna] 9 Maggio 1901

Carissimo Guido

Io avevo scritto ieri a Jung pel lavoro[1] degli Annali. Non è male che la direzione capisca in tal modo che il ritardo ci dispiace. Per questa volta direi ad ogni modo di subire l'inconveniente; ma con questo sistema un giornale non incoraggia certo i suoi collaboratori.

La pubblicazione della G[eometria] descrittiva[2] mi assorbe in questo momento più di quanto avrei pensato, ma spero che il libro non lascerà nulla a desiderare a coloro che amano il lato tecnico delle questioni, giacché sarà corredato di numerosi esercizi di portata pratica.

Siamo rimasti gratissimi a te, all'E[lbina], ai bimbi del gentile pensiero che avete avuto per la nostra Alma, la quale, entra oggi, senza accorgersene nel suo 2° anno di vita.

Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.
[2] Enriques 1902a.

515.

17 Maggio 1901

Carissimo Guido

Mi pareva di averti scritto (vedo che mi sono ingannato), come l'Jung mi abbia fatto rispondere dal Rebeschini,[1] il quale mi ha accluso copia della lettera a te inviata.

Fai benissimo a insistere per avere un formale impegno circa la stampa del nostro lavoro.[2]

Mi ero rivolto al Segre chiedendogli di far accettare fra le Memorie di Torino il lavoro dell'Amaldi sui potenziali, di cui altra volta ti ho parlato. E gli dicevo pure come il Levi-Civita abbia conoscenza del lavoro stesso, di cui ha letto recentemente la redazione finale. Ma il S[egre] mi risponde che non si sente, date le troppe occupazioni, di fare la relazione, e che deve limitarsi ad esaminare lavori di Geometria.

Così per troppo scrupolo di revisore da un lato si porta un danno ad un giovane (perché l'Am[ald]i ha bisogno di pubblicare presto il lavoro), d'altro lato si fa in modo che l'Accademia non risponda più interamente al suo scopo. Ora mi sono rivolto al Guccia, e spero di ottener da lui ciò che non ho potuto ottenere dal S[egre].[3]

Ferve nella nostra Fac[olt]à la questione della Geodesia, per la quale alcuni vorrebbero chiamare subito un ord[inari]o, cioè il Venturi.[4]

Vedremo come andrà a finire. Te ne informerò.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] C. Rebeschini, proprietario della tipografia Bernardoni di Milano che stampava gli «Annali di Matematica pura e applicata».
[2] Enriques-Castelnuovo 1901.
[3] Cfr. Amaldi 1902, presentato al Circolo Matematico di Palermo il 9 giugno 1901.
[4] Cfr. p. 457, let. 489 (18.4.1900) e p. 474, let. 508 (1.4.1901).

516.

24 giugno [1]901

Carissimo Guido

Ti ringrazio dell'informazione intorno al corso libero di filosofia.

Avrai già ricevuto le prime bozze della nostra memoria,[1] ho avuto oggi altre bozze che ti manderò stasera o domani.

Porterò a Firenze le mie memorie sulle Sup[erficie]. Io calcolo di essere in libertà per la fine del mese.

Ora permettimi che ti faccia i mirallegri... anticipati, per la tua nomina a Corrispondente dei Lincei,[2] di cui probabilmente avrai già saputo qualcosa.

L'elezione, per parte della classe, non è ancora avvenuta, ma tu sei il 1° di una delle due terne proposte pei due posti vacanti di corrispondente (Segre e Pincherle verranno promossi soci nazionali). Le due terne sono: Capelli, Levi-Civ[ita], Tonelli e Castelnuovo, Enriques, Jung. Per ciascuno vi è un breve elogio (stampato nella relazione riservata distribuita alla classe) e in particolare di noi dicono molto bene.

Inutile ti dica che queste notizie sono confidenziali. Immagino del resto che non ti riesciranno nuove.

Tanti saluti affettuosi Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.
[2] Castelnuovo fu nominato socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei il 15 luglio 1901 e socio nazionale il 4 aprile 1918.

517.

30 Giugno 1901

Carissimo Guido

Ti rimando le ultime bozze[1] inviatemi, da Firenze ove sono venuto, finiti gli esami.

Non mi pare impossibile di abbordare la questione delle sup[erficie] col $p^{(1)} = 1$, nel modo seguente:

Supposto $n < 2\pi - 2$, esistono da un certo punto ($r > s$) in poi le curve pluriaggiunte alle sezioni piane $C_{r(n-4)}$.

Formiamo il sistema lineare (più ristretto)

$$\alpha C_{r(n-4)} \cdot C_1 + \beta C_{(r-1)(n-4)} \cdot C_{n-3} + \ \ldots \ + C_{s(n-4)} \cdot C_{(r-s)(n-4)+1}$$

(C_{n-3} agg[iun]ta).

Supponiamo che si possa dimostrare essere questo sistema per r assai grande, *completo*.

Vuol dire che una curva r-agg[iun]ta $C_{r(n-4)+1}$ qualunque si può ottenere facendo la somma in senso ristretto dei sistemi

$$C_{r(n-4)} \cdot C_1, \ C_{(r-1)(n-4)} \cdot C_{n-3} \ldots$$

Ora prendiamo a considerare una sup[erficie] $\varphi_{r(n-4)+1}$ r-agg[iun]ta alla data (r assai alto). Ogni sua sezione piana si esprime come una somma di curve $C_{r(n-4)} \cdot C_1, \ldots$, ed una tale decomposizione è *razionale*. Pertanto facendo variare il piano in un fascio, $\varphi_{r(n-4)+1}$ resta espressa come somma di

$$\varphi_{r(n-4)+b} \ \varphi_{1+\delta}, \ \varphi_{(r-1)(n-4)+b_1} \ \varphi_{n-3+\delta_1}, \cdots$$

dove necessariamente

$$b = \delta = 0 \qquad b_1 = \delta_1 = 0.$$

Questo resultato è appunto quello di cui andavamo in cerca.

Tutto si ridurrebbe dunque a dimostrare ciò che ho supposto di sopra, il che sembrerebbe possibile.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Si tratta delle bozze di Enriques-Castelnuovo 1901.

518.

Levanto 23 Agosto 1901

Carissimo Guido

Ho ricevuto qui al mio arrivo (or sono 6 giorni) la tua cartolina e la prima copia del nostro lavoro.[1] Se ho ritardato a risponderti, ciò dipende dal fatto che ho trovato molte cose da fare (bozze da correggere, lettere da rispondere ecc.), ed un ambiente molto snervante da togliere la voglia di far nulla.

Puoi far mandare in casa Coen (via Mattonaia 29) gli estratti della memoria, senza timore di recar disturbo.

Il mio giro attraverso le Alpi si è prolungato un po' più di quel che avessi previsto; da Pontresina per il Bernina sono andato a Poschiavo; la mattina di poi a Bormio; quindi ho passato lo Stelvio e mi sono fermato a Trafoi una settimana, donde per Merano e Bolzano sono ritornato in Italia, a Firenze e poi a Levanto.

Ho avuto sullo Stelvio un tempo bellissimo che mi ha permesso di apprezzare interamente le bellezze dei luoghi, che tu ben conosci: una struttura di rocce e di ghiacciai veramente grandiosa, e, nelle valli, boschi mirabilmente folti e verdi.

Dopo queste sensazioni eccitanti, qui al mare mi sento in preda ad un gran sonno; passo la vita in accappatoio sulla sabbia, facendo lunghi bagni d'aria e brevi tuffi nell'acqua.

Ricevetti mentre ero ancora a Pontresina una lettera di uno scolaro del Klein, che mi dice come il Maestro lo solleciti a tradurre in tedesco le mie lezioni di Geometria proiettiva.[2] Gli ho risposto che per parte mia mettevo a sua disposizione alcune modificazioni ed aggiunte, e lo pregavo di procurare l'editore che assuma la traduzione e mi faccia sapere le condizioni. Non ho più avuto nulla.

Vedo che ti diverti coll'Elbina, sul Gottardo. Seguitate a godervi la bella villeggiatura, ed abbiate affettuosi saluti dal vostro

Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.

[2] Enriques 1903b, che contiene un'introduzione di Felix Klein: la traduzione fu curata da Hermann Fleischer.

519.

27 Agosto 1901

Carissimo Guido

Ho avuto ieri la tua lettera.

Per la centesima volta ho voluto ritentare la varietà cubica, e l'idea che ti comunico mi sembra meriti di essere discussa, se pure non possa pretendere che essa sia immune da critiche, dati i precedenti insuccessi.

Parto dallo spazio doppio avente una F_4 di diramazione, con un punto doppio O. E considero un fascio di piani per una retta generica a. Il cono quadrico osculatore in O ad F_4, insieme alle coppie di piani per a costituisce una rete di sup[erficie] del 4° ord[ine], la quale unitamente alla F_4 fondamentale dà luogo ad un sistema lineare ∞^3. Si ha quindi una rete di monoidi del 4° ord[ine], M_4, con O 3-plo, seganti su F_4 le coppie di quartiche sezioni piane per a.

I monoidi che toccano F_4 lungo una delle suddette C_4 formano, entro la nominata rete, un sistema ∞^1 d'indice 2 che ha come inviluppo la F_4.

Ora si possono riferire i citati monoidi ai piani d'un fascio, e si può rappresentare *razionalmente* ogni monoide sul piano corrispondente. Così si dà origine ad una trasf[ormazion]e [6, 2] avente come sup[erficie] di diramazione la F_4. È appunto ciò che si richiede per dimostrare la razionalità del nostro spazio doppio.

Se il precedente ragionamento racchiude qualche errore, dovrà esser facile di rilevarlo, vista la sua semplicità.

Frattanto lo sottopongo al tuo esame.

Saluti affettuosi all'E[lbina] e ai bimbi, e tante cose cordialissime dal tuo

Ghigo

520.

30 Agosto 1901

Carissimo Guido

Ricevo ora la tua cartolina, la quale m'induce a strappare il foglio che già ti avevo scritto stamani e a riprendere la penna. Giacché è inutile che ti ripeta quello che tu stesso hai veduto relativamente alla rappresentazione di quello spazio doppio.

Soltanto io credo che alla F_4 di diramazione vada aggiunto il solo cono quadrico osculatore nel punto doppio, ma la conclusione non varia. Movendo dal fatto (che si verifica anche in altro modo) della razionalità dello spazio doppio con sup[erficie] di diramazione F_4 + cono osc[ulatore] in p[unt]o 2-plo, avevo anche tentato di proiettare la varietà cubica in modo da far nascere nella F_4 di dir[amazion]e un p[unt]o uniplanare. Ma contro l'apparenza di un conto di costanti, mi sono accorto che ciò è impossibile se la varietà stessa è priva di punti doppi.

Dunque, conclusione puramente negativa.

Sono stato ieri alla Spezia dove ho passato la giornata con Arzelà.

Egli è stato a Livorno al congresso promosso da Mathesis[1] che è stato presieduto dal Bianchi. Ha veduto là anche il Loria, il Peano e il Veronese, Padoa, Vailati ecc.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Si tratta del secondo Congresso dei professori di matematica delle scuole secondarie tenuto in Livorno nei giorni 17-22 agosto 1901 ad iniziativa dell'Associazione Mathesis. I relativi atti furono pubblicati dalla tipografia R. Giusti, Livorno 1902.

521.

30 Ott[obre] 1901

Carissimo Guido

Ti sottopongo il profilo di un metodo che dovrebbe condurre a stabilire l'esistenza di un sistema di curve non contenuto in un sistema lineare, sopra le sup[erficie] irregolari.[1]

Veramente l'applicazione diretta del metodo riesce soltanto se la sup[erficie] contiene un sistema lineare di genere p e dim[ension]e $r = p + 2$, onde si ritroverebbero soltanto i resultati essenziali della nostra ultima memoria.[2] Ma sembra si debba poter spingere un passo innanzi almeno alle sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$ che più c'interessano.

Ecco di cosa si tratta.

Sia $|C|$ un sistema di genere p e dim[ension]e $r = p + 2$, sopra una sup[erficie] F. Sopra una C generica si consideri un qualunque gruppo di p punti, G_p. Esso appartiene ad ∞^2 C_1 e, *se la superficie è irregolare*, è speciale sopra ∞^1 C; i gruppi G_{p-2} residui di G_p sulle ∞^1 C, generano una curva K la quale sega ciascuna delle suddette ∞^1 C in un gruppo di $2p - 2 + xp$ punti ($x > 0$), costituito dal G_p contato $x + 1$ volte e dal G_{p-2}. Ora se si fa variare il G_p sulla primitiva C, la K varia in un sistema che evidentemente non può essere contenuto in un sistema lineare.

Quando la dimensione di $|C|$ è più piccola, un G_p preso a caso sopra una C non appartiene più a ∞^2 C. Tuttavia ci si può domandare se su una C non esistano gruppi G_p, comuni a ∞^2 C, almeno quando la dimensione di $|C|$ è $p - d$, con d molto piccolo rispetto a p (è questo il caso che interessa le sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$).

Certo, anche superata questa prima difficoltà, sembrami sarà più difficile di vedere che le curve costruite, K, variano ancora in un sistema non lineare. Tuttavia la cosa non mi par dubbia.

Sono curioso di sapere che impressione ti fa questo metodo, che si riattacca precisamente a quella proprietà delle sup[erficie] irregolari, che tu hai utilizzato nel lemma precedente il teor[ema] della serie caratteristica.[3]

Noterai che se la cosa è giusta nel 1° caso, la raz[ionalit]à delle involuzioni su rigate viene ricondotta in modo quasi immediato alle condizioni di raz[ionalit]à delle sup[erficie].

Sono a Bologna soltanto da ieri l'altro sera, occupato per ora negli esami degli altri.

Tanti saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] I risultati ottenuti saranno pubblicati in Enriques 1905a e 1905b; cfr. anche p. 383, let. 422 (30.11.1898).

[2] Enriques-Castelnuovo 1901.

[3] Cfr. Castelnuovo 1897a, §§ 9 e 21.

522.

21 Nov[embre] 1901

Carissimo Guido

Ti lascio arbitro di giudicare l'opportunità di asteriscare quei lavori, che a Firenze ponemmo in linea subordinata.[1]

Se hai piacere di porre l'asterisco al tuo[2] sulle «Superficie con una rete di curve iperellittiche», potresti porlo pure alla mia memoria[3] di argomento analogo dei Mat[ematische] Annalen; se preferisci invece allargare la cerchia dei lavori su cui chiediamo in particolare il giudizio dell'Accad[emia] potresti segnare per parte mia il lavoro[4] sui piani doppi di gen[ere] 1, od anche la notina[5] del Circolo di Palermo sulle superficie irregolari, la quale contiene un'applicazione dei nostri resultati generali.

Quanto alla nota didattica,[6] essa può riguardarsi come uno schiarimento dell'Introduzione[7] e mi piacerebbe che senza porla in evidenza in modo speciale, l'Accad[emia] potesse riguardarla quasi come un surrogato di quelle parti dell'Introduzione che riescono meno chiare.

Del resto, ti ripeto, fai tu, come credi per il meglio.

Anch'io ho ricevuto la memoria di Lacaze,[8] e se tu pensi di mandargli qualche lavoro comune (dimmi quali) io potrei inviargli qualcuna delle mie note sui piani doppi.

Avrai pure avuto un lavoro di Hamel,[9] scolaro di Hilbert, sui principii della Geometria.

Mi è capitato sott'occhio un libro di J[ules] Andrade[10] «Leçons de Mécanique physique» che tratta le questioni critiche di cui più volte abbiamo discorso, e mi pare assai interessante. Le ultime note del libro concernono la Meccanica non-euclidea.

Ti ho fatto spedire dall'editore la mia Geom[etria] descrittiva.[11] Ma per errore è stata mandata (tanto per te che per Pittarelli) all'Università invece che a S. Pietro in Vincoli, spero che la riceverai egualmente.

Il Cons[iglio] Sup[eriore] ha negato la libera docenza in G[eometria] Analitica all'Amaldi (proposta dalla nostra Fac[olt]à) perché la cattedra è qui unita all'Algebra, ed il Cons[iglio] opina che non possono darsi libere

docenze per uno solo dei due insegnamenti. Conosco in proposito l'art[icolo] 100 della legge Casati,[12] e questa interpretazione restrittiva mi pare assurda. E poi noi stessi abbiamo un libero doc[ente] di G[eometria] differenziale, di cui non c'è insegnamento ufficiale. Mi spiacerebbe poi che questa fosse una scusa e il Cons[iglio] non avesse ritenuto sufficienti i titoli dell'Amaldi, su cui noi abbiamo fatto una relazione coscienziosa.

Saluti affettuosi anche all'E[lbina]

tuo
Ghigo

[1] Si tratta della domanda per il Premio Reale dell'Accademia dei Lincei: cfr. p. 473, nota 5 a let. 505 (s.d., 1901).
[2] Castelnuovo 1894d.
[3] Enriques 1895d.
[4] Enriques 1896e.
[5] Enriques 1899b.
[6] Dovrebbe trattarsi di Enriques-Castelnuovo 1896.
[7] Enriques 1896d.
[8] Lacaze 1901a e 1901b.
[9] Cfr. la tesi Hamel 1901, poi pubblicata in Hamel 1903.
[10] Andrade 1898.
[11] Enriques 1902a.
[12] Per il testo della Legge Casati, cfr. Amante, *Il regolamento universitario* cit.

523.

5 Dec[embre] 1901

Carissimo Guido

Ti sono grato di avere accolto il mio desiderio quanto all'asterisco del lavoro[1] dei Mat[ematische] Annalen, ed ho piacere che, avendo tu asteriscato il teor[ema] di Kronecker,[2] non occorre togliere l'asterisco da qualcuno dei miei lavori già segnati.

Concordo infine con te circa l'opportunità d'indicare al giudizio dell'Accad[emia] anche la Nota[3] dei C[omptes] R[endus]. Trascrivendone il resultato in italiano, si può completare l'ultimo resultato parlando addirittura di «rigata» invece che di sup[erficie] con un fascio di coniche.

Ti rimando l'abbozzo della domanda ai Lincei. Avrei segnato in fine una modificazione di pura forma. Ne terrai quel conto che credi, nel redigere la domanda, cui apporrò la firma. Avrei soltnto dei dubbi circa l'ultima dichiarazione, intorno alla quale sarebbe forse prudente che tu sentissi il parere di qualcuno degli accademici più pedanti.

Quanto all'ultima Nota[4] di Torino, ne avrai già ricevuto gli estratti.

Ho piacere per il Bisc[oncin]i che, a quanto mi disse L[evi]-C[ivita], ci teneva molto, che tu lo chiami tuo assistente.[5]

Per parte mia se il Concina potrà trovare una sistemazione, sarei veramente contento di prendere il Severi[6] l'anno venturo, e ne scriverò al S[egre].

Tanti saluti affettuosi anche all'E[lbina].

Tuo
Ghigo

[1] Enriques 1895d.
[2] Cfr. Castelnuovo 1894b.
[3] Enriques-Castelnuovo 1895.
[4] Enriques 1901b.
[5] Giulio Bisconcini fu nominato assistente alla cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica e Calcolo infinitesimale dell'Università di Roma il 16 dicembre 1901.
[6] Francesco Severi si laureò con Corrado Segre il 30 giugno 1900 e fu per due anni assistente di Enrico D'Ovidio a Torino. Nel 1902-03 fu assistente di Enriques a Bologna.

524.

18 Dec[embre] 1901

Carissimo Guido,

sono sulle mosse per andare a Padova ove terrò domani sera una conferenza all'Univ[ersit]à Pop[olar]e sul tema «Che cos'è la Scienza?».

Ricevo la tua lettera a proposito del Cons[iglio] Sup[eriore].

Io non nutro alcuna speranza di riuscita, per le seguenti ragioni.

Le Fac[olt]à di Scienze sono unite come sai, nelle elezioni, alle Scuole d'Ing[enier]i e Cerr[ut]i, per la sua posizione e pei suoi legami, ha in queste grandi appoggi. Oltre a ciò le Fac[olt]à saranno divise; si prevede la candidatura Nasini a cui accederanno i chimici e molti naturalisti se pure non porteranno un candidato proprio. Da tempo invero si va protestando da questa parte dei nostri colleghi contro il troppo gran numero di consiglieri mat[ematic]i.

In tali condizioni credo che il nostro fiasco sarebbe sicuro. Mi pare bene di contar bene prima del tentativo le probabilità di vittoria, perché altrimenti rischiamo di pregiudicare il nostro candidato anche pel futuro. Con tutto ciò io parlerò intanto coi colleghi delle loro idee e tasterò il terreno.

Ma il vero rimedio ai mali che lamentiamo secondo me sarebbe nella riforma legislativa del Cons[iglio] Sup[eriore], chiesta alla Camera e promessa dal M[inistr]o, se si trovasse modo d'includere in essa effettive garanzie che i consiglieri si rinnovino, p[er] es[empio] statuendo che nessuno possa essere rinominato più di due volte, e magari facendo eleggere i cons[iglier]i

di nomina universitaria da tutto il corpo accademico anziché dalle Fac[olt]à. Se l'idea ti par buona dovresti parlarne al tuo Zio[1] perché la presentasse al M[inistr]o. Dal mio canto io m'adopererei per mezzo di qualche amico a farla sostenere dai giornali più avanzati. D'un colpo noi riusciremmo in tal modo ad un rinnovamento totale del Cons[iglio] ed apriremmo la strada ad elementi più giovani. Tanto meglio se riuscissimo anche a impedire il cumulo delle funzioni di senatore (o dep[utat]o) e di consigliere!

Mi risponderai che questi progetti sono di troppa incerta attuazione e non potranno ad ogni modo effettuarsi così presto. Intanto si può far qualcosa col nostro voto! È vero, ma per le ragioni che ti ho detto dubito del successo. Questo sarebbe forse più facile se ci unissimo p[er] es[empio] sopra un fisico, ad es[empio] su Rositi se questi non è nel Cons[igli]o, o sopra un naturalista come Grassi.

Ai nomi dei mat[ematic]i che tu citi si potrebbe anche aggiungere quello del Bert[ini], uomo come sai, di carattere, o di Mart[inett]i che potrebbe avere l'appoggio delle Univ[ersit]à minori e del mezzogiorno. Ma l'insuccesso sarà non meno sicuro.

È qui a Bologna l'Amaldi da una settimana. Come ti ho detto, a Cagliari han proposto gli sia affidata la supplenza di Pr[oiettiv]a in attesa che sieno accettate le dimissioni offerte (temo non seriamente) dal Vivanet,[2] respinte per ragioni di bilancio della cassa pensioni. L'Am[ald]i mi dice che vi è un gran lavoro dietro le quinte per assicurare la successione del Viv[ane]t ad un elemento locale incognito. Bisognerebbe che il M[inistr]o aprisse subito il concorso.[3]

Tanti saluti cordiali a te e all'E[lbina] tuo aff.mo
Ghigo

[1] Luigi Luzzatti.

[2] Filippo Vivanet insegnò Geometria descrittiva all'Università di Cagliari fino al 1904-05.

[3] Si tratta del concorso per la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica dell'Università di Cagliari, bandito l'11 settembre 1902. Ne risulterà vincitore, l'anno seguente, Ugo Amaldi.

525.

21 Dec[embre 1]901

Carissimo Guido

Grazie a te e all'Elbina per gli augurî affettuosi, quantunque a dir il vero l'avvenimento non fosse eccessivamente desiderato.

E grazie a te delle svariate notizie che mi hai dato in questi giorni.

Di Severi sapevo direttamente ch'egli ha un mezz'impegno col Bertini per l'anno prossimo, giacché senza nulla promettere avevo domandato al Segre informazioni circa la condizione in cui questo giovane si troverà quest'altr'anno.[1]

Il giudizio del concorso di Catania riesce in fondo una meritata risposta all'ingiustizia commessa colla nomina del Bort[olott]i a Modena, due anni or sono.[2]

Quanto al premio linceo[3] sarebbe una gran bella cosa se al 1° Gennaio potessimo apprendere che non abbiamo da temere se non da uno scopritore della quadratura del circolo.

Saluti cordiali tuo

Ghigo

[1] Cfr. p. 488, nota 6 a let. 523 (5.12.1901).

[2] Cfr. p. 431, P.S. a let. 465 (31.10.1899). Al concorso per professore straordinario di Analisi superiore dell'Università di Catania si presentarono Giuseppe Bagnera ed Ettore Bortolotti. La commissione, composta da Luigi Bianchi, Alfredo Capelli, Enrico D'Ovidio, Gregorio Ricci Curbastro e Vito Volterra, il 19 dicembre 1901 propose Bagnera come vincitore. Il Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica, pur trovando gli atti regolari, obiettò sia sulla scelta di bandire un concorso per straordinario per una materia superiore, sia sulla pertinenza dei titoli scientifici di Bagnera, di carattere prevalentemente algebrico. La relazione del concorso fu pubblicata solo nel 1905 (cfr. «Boll. Min. Istr. Pubbl.», XXXII, I, n. 26, 1417-22). Nel frattempo, il 16 dicembre 1901, Bagnera fu nominato professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica a Messina.

[3] Cfr. p. 473, nota 5 a let. 505 (s.d., 1901). I concorrenti al Premio Reale, oltre a Castelnuovo ed Enriques, furono Cesare Bongi, Pietro Genna, Domenico Lojacono, Ernesto Pascal, Gregorio Ricci Curbastro, Giulio Ugolini.

526.

Venerdì 7 Marzo 1902

Carissimo Guido

È il 4° giorno che passo a Parigi. La grandezza armoniosa della città mi ha conquistato. Qui tutto imprime l'idea della maestà e della potenza, i boulevards e le avenues distendentisi per chilometri, e irradianti a stella dalle piazze circondate dai più grandiosi edifici; il Louvre che copre lo sfondo dei giardini delle Tuilleries, e la piazza della Concordia, dai mille obelischi e dalle statue sontuose, da cui la vista si spinge sui Campi Elisi, sulla Maddalena e sulla Senna.

Ho passato ieri con Picard una giornata indimenticabile a Versailles. Mi ha fatto visitare il palazzo, il parco splendido e il Trianon. Mi ha offerto una colazione sontuosa, e mi ha trattenuto in discorsi fino alla sera.

Gli ho portato i tuoi saluti ed egli mi ha detto aver ricevuto ultimamente da te una lettera (a proposito del suo rapporto) che ha molto gradito.

Abbiamo parlato naturalmente delle superficie, intramezzando la conversazione con cose più leggere e divertenti, e uscendo anche dalle Matematiche per toccare questioni scientifiche d'ordine generale. Picard è veramente un uomo superiore, e uno spirito fine.

Egli tratta quest'anno nel suo corso delle superficie sotto l'aspetto trascendente. Vuol terminare il suo secondo volume.[1]

Approfitterà pare del nostro teorema sulle curve eccezionali[2] di cui non aveva capito la portata.

Le questioni che più volte insieme abbiamo tentato di risolvere hanno preoccupato molto anche Picard ed Humbert, ma non sembra che Painlevé se ne sia interessato.

Il modo con cui noi abbiamo cercato più volte di costruire gli integrali di 1ª specie partendo dagli integrali abeliani delle curve $z = \text{cost}$ urta in una difficoltà che Picard crede insormontabile.

Similmente Picard e Humbert non sono riusciti a dimostrare che il numero degli integrali di 1ª sp[ecie] è la metà di quello dei loro periodi, sebbene non abbiamo esempii in contrario.

Picard rammarica che pochi si occupino di questi problemi. Ha spinto Lacaze[3] su questa via, ma dice che egli non è arrivato che a resultati negativi.

La gentilezza di Picard mi ha estremamente confuso. Non ti dico i complimenti riguardo ai nostri lavori.

Stamani ho veduto Humbert che rivedrò domani. Non sono stato molto con lui, ma l'impressione provata pur essendo simpatica è quella di un uomo piuttosto mediocre.

Anche lui ha abbondato di gentilezza.

S'interessa molto ai nostri lavori, ma pel momento ha abbandonato quel campo per occuparsi di questioni aritmetiche.

Mi ha parlato del Bianchi con molto favore.

Stasera sono a pranzo da Borel, ove sarà anche Appel[l].

Sono stato a cercare Painlevé ma non l'ho trovato.

Ti saluto per oggi cordialmente, insieme all'E[lbina].

Lunedì mattina parto per Bruxelles.

Ghigo

[1] Picard-Simart 1897-1906; cfr. p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).
[2] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1901.
[3] Cfr. p. 486, let. 522 (21.11.1901).

527.

11 Marzo 1902
Bruxelles - Pension de Boek's
Avenue de la Toison d'Or

Carissimo Guido

Ho lasciato Parigi ieri, eccomi qua a cominciare stasera le mie conferenze. Parlerò oggi degli scopi positivi che si possono proporre ad una teoria della conoscenza la quale tenda a sottoporre ad esame le teorie scientifiche per distinguere ciò che esse contengono di fatto e ciò che contengono di rappresentazione soggettiva.

La 2ª conf[erenz]a sarà dedicata a definire il «fatto», dapprima il fatto nel senso volgare della parola, e poi il fatto scientifico cercando di porne in luce i caratteri.

La conclusione è che la scienza tende a cogliere e a subordinare i fatti a dei concetti sempre più generali.

Due problemi ne scaturiscono: studiare le trasformazioni logiche dei concetti; e determinare la loro trasformazione.

Al 1° di questi problemi è dedicata la mia 3ª conf[erenz]a: studio il significato reale delle leggi logiche e la relazione loro con ciò che è noto intorno alla fisiologia del sistema nervoso; una teoria di localizzazione cerebrale (non importa anatomica) renderebbe conto degli assiomi logici come leggi di struttura.

La 4ª e 5ª conf[erenz]a tratterranno della genesi dei concetti geometrici e meccanici.

Nella 6ª prendo in considerazione l'estensione che può darsi alla Meccanica, parlo del valore solo quantitativo delle spiegazioni meccaniche e discuto le questioni che solleva nel campo biologico il proposito di una spiegazione meccanica.

Così ti ho reso conto rapidamente del mio programma.

Ti dirò ora che a Parigi ho avuto una conversazione interessante col Poincaré, sulla varietà cubica di S_4.

Gli ho sottoposto il dubbio che essa potesse differire per qualche carattere di connessione dallo S_3. Mi ha detto che così a fiato direbbe di no.

Fattagli conoscere la rappresentazione sulle coppie di un'involuzione (e dettogli che il tuo teor[ema] vale solo per le in[voluzion]i piane[1] giacché egli lo credeva affatto generale) Poincaré ha detto che si ha così un ottimo mezzo per determinare i caratteri di connessione della varietà; ha accennato che studierebbe la cosa e forse riuscirebbe a dividere la varietà in un certo numero di poliedri come lo spazio.

Ma seguitando poi la conversazione essendo stato condotto a conside-

rare che la rappres[entazion]e suddetta non degenera quando la varietà acquista un punto doppio, ha detto che ciò significa senz'altro che la var[iet]à ha la stessa connessione dello S_3.

Questa conclusione se pure probabile mi sembra un po' precipitata e tale sembra pure al Picard con cui ne ho riparlato. Ma ad ogni modo è verosimile che neppure lo studio della connessione rechi alcun contributo alla questione della V_3^3.

Ho rivisto Picard e Humbert, Borel e Appell, il quale ultimo mi è riuscito simpaticissimo. Ho cercato Hadamard ed egli ha cercato me senza trovarmi.

Quanto a Painlevé (che è sposo recente) egli non si è fatto vivo dopo aver ricevuto la mia carta, sicché non ho creduto di ritornare a cercarlo.

Picard ha fatto colazione con me Domenica mattina al Louvre.

Quando ci siamo lasciati mi ha incaricato di salutarti cordialmente.

Mi ha accompagnato alla Gare St Lazare ove ho trovato Borel, col quale siamo andati a St Germain.

Ricordami all'E[lbina], ed abbiti saluti affettuosi

dal tuo
Ghigo

[1] Cfr. Castelnuovo 1894a.

528.

13 marzo [1]902
Bruxelles - Pension De Boek's
Place Louise

Carissimo Guido

Prima di cominciare a redigere il lavoro per Mittag-Leffler voglio sottoportene il piano. Si tratta di una specie di Bericht, breve, intorno ai nostri lavori, in cui mi propongo di esporre la teoria sotto l'aspetto analitico:[1]

1) definizione dei campi algebrici dipendenti da 2 variabili u, v. Ogni funz[ion]e x del campo è legata ad u, v, da eq[uazio]ne $f(u\ v\ x) = 0$.

Ed ogni y funz[ion]e raz[ional]e di u, v, x.

La $x(u\ v)$ ha un discriminante che si spezza in 2 parti $\delta = D_x D'_x$; la 2ª $D' = 0$ corrisponde a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

(curva 2-pla). D_x è la *parte essenziale*.

Questione della costruzione dei piani multipli.

2) Prese 3 funz[ion]i x, y, z del campo in modo generale $D_x = 0$ $D_y = 0$ $D_z = 0$ non han soluzioni comuni in u, v, sup[erfici]e modello F senza sing[olarit]à in S_5.

3) Trasformazioni birazionali delle sup[erfici]e e curve eccezionali, anticipaz[ione]e del teor[ema] che ad esse si riferisce.

4) Funzioni raz[ional]i su F, loro singolarità. Come queste sin[golarit]à caratterizzino una o un sistema lineare di funz[ion]i *razionali* (sistemi completi).

Caratteri delle funzioni (n, π ..., diseguaglianze).

5) Moltiplicazione e divisione dei sistemi lineari di funz[ion]i.

6) Prendo due funz[ion]i affatto indipendenti x, y, e una terza z e considero su $f(x\ y\ z) = 0$ la curva $D_z(x\ y) = 0$. Costruisco la funzione più generale j che ha la detta curva come polare, e prendo

$$x' = \frac{j}{x^2 y^3}$$

Ho così la funz[ion]e (variab[il]e in un sist[ema] lin[ear]e) agg[iunt]a a x. Questa costruzione posto $|x| = |C|$, $|y| = |K|$, corrisponde a prendere

$$|C'| = |(C + K)_j| - 2C - 3K.$$

Teor[ema] fondamentale dell'aggiunzione. Plurigeneri ecc.

7) Genere numerico e teor[ema] di R[iemann] R[och].

8) Campo (u v) razionale e semi-razionale (u $f(v\ w) = 0$) (cilindro).

Varii teoremi che li caratterizzano.

In tutto ciò non vi è posto per le sup[erfici]e agg[iun]te; credi essenziale di parlarne?

In fine se il lavoro non verrà troppo lungo potrei parlare delle sup[erfici]e con trasf[ormazion]i biraz[ional]i e dei piani doppi, citando numerosi esempii.

Ho cominciato ieri sera le mie conferenze.

Ti saluto affettuosamente Ghigo

[1] Cfr. p. 409, let. 446 (14.4.1899); il lavoro a cui si fa cenno non fu mai pubblicato. A questo proposito si veda P. Gario e P. Nastasi (a cura di), *Alcune lettere inedite di Federigo Enriques a Gösta Mittag-Leffler*, in «Lettera PRISTEM», Università Bocconi, Milano, n. 19-20 (maggio 1996).

529.

15 Aprile 1902

Carissimo Guido

Non so raccapezzarmi fra mezzo alla varietà di voci che corrono per la candidatura al Cons[iglio] Sup[eriore].

A me fu parlato a Torino del D'O[vidio], poi da Ciamician mi fu raccomandato il nome di Cannizzaro. In seguito mi fu detto che il D'O[vidio] si ritirava e mi fu anche parlato del Cossa.

Finalmente da una cartolina di Fano apprendo che colà mantengono la candidatura D'O[vidio], e dalla tua lettera dovrei arguire che Cannizzaro è sfumato. Se ciò è non esiterò a dare il voto al D'O[vidio]. Ma anche a me il nome di Cannizzaro piacerebbe di più e sarei soltanto un po' imbarazzato perché sembra a Torino abbiano interpretato le mie espressioni generiche di simpatia pel D'O[vidio] in un senso quasi impegnativo ch'io non volevo dar loro.

Ad ogni modo sono un po' disgustato del brutto modo con cui si preparano queste elezioni, inventando ritiri che non esistono e tacendo i candidati avversari. Non capisco perché non si possa far propaganda per uno invitando esplicitamente a preferirlo a tali altri di cui si è fatto il nome.[1]

Quanto al Magini sono stupefatto che la Facoltà vostra prenda l'iniziativa o secondi il suo desiderio di essere proclamato illustre. Ma credo tu sbagli nel negare alla Fac[oltà] stessa la competenza di un tale giudizio; anzi mi pare che l'art[icolo] 69[2] di regola debba essere applicato per voto delle Fac[olt]à e solo pel soprannumero occorra sentire il Cons[iglio] Sup[eriore].

Il lavoro che sto preparando per M[ittag]-Leffler si è arenato e data un po' di stanchezza sopravvenuta dubito di condurlo a termine nel tempo prefisso.

Mi scrivono che finalmente sarà pubblicato in fasc[icol]o separato il mio Art[icol]o[3] sui Principii della Geom[etri]a; del resto l'Enciclopedia è arenata e la direzione prevede necessari due anni solo per finire il vol[ume] dell'Analisi!

Tanti saluti affettuosi anche all'E[lbina]

tuo
Ghigo

[1] Cfr. anche p. 488, let. 524 (18.12.1901). Enrico D'Ovidio sarà in effetti eletto al Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica.

[2] L'allusione è all'articolo 69 della Legge Casati; cfr. p. 175, nota 1 a let. 178 (3.2.1895).

[3] Enriques 1907d; cfr. p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

530.

20 Aprile 1902

Carissimo Guido

Anch'io ho votato per Cannizzaro avendo saputo da Ciamician che la sua candidatura era mantenuta; ho poi informato francamente Fano.

Il vostro voto per Magini potrebbe avere il resultato che, mancando il parere tecnico sull'applicazione dell'art[icolo] 69, il Ministro nomini una commissione (come p[er] e[sempio] fu fatto pel Finzi).

Avrai veduto i nuovi regolamenti universitarii[1] che, per la nostra Facoltà, mi sembrano tecnicamente buoni ma un po' troppo pedanti e restrittivi.

Noi acquisteremo un incarico di Mat[ematich]e pei Chimici, che toccherà probabilmente a me, almeno nel seguito: per l'anno venturo troverei giusto che fosse dato ad Amaldi, ma Ciamician preferisce che il corso sia organizzato da uno di noi prof[essor]i.

Ho scritto a M[ittag]-Leffler avvertendolo che per un po' di stanchezza sopraggiunta debbo rinunziare al lavoro, e che lo finirò a comodo e glie lo manderò per un altro volume degli Acta.

Ho ricevuto un bel regalo da Klein: le litografie di un corso[2] di Applicazioni del Calcolo ai principii della Geometria (curve intuitive...).

La Geom[etri]a elementare che facciamo con Amaldi[3] si può dire compiuta, salvo inevitabili e noiosi ritocchi; ne cominceremo fra pochi giorni la stampa.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina], tuo aff.mo
Ghigo

[1] Un nuovo regolamento generale universitario fu emanato il 13 marzo 1902 e pubblicato nel «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXIX, I, suppl. n. 15 del 11 aprile 1902.
[2] Klein 1902.
[3] Enriques-Amaldi 1903a; cfr. p. 473, let. 506 (18.3.1901).

531.

3 Giugno 1902

Carissimo Guido,

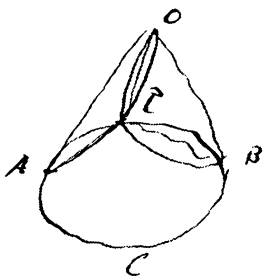
le notizie che mi comunichi relativamente ai premi ministeriali mi giungono nuove.

Sapevo invece del caso Severi,[1] ed anzi ho sulla coscienza di avergli suggerito tre o quattro argomenti elementari di Geometria descrittiva, qualcuno dei quali fu da lui scartato perché non abbastanza elementare. Si trattava infatti, nientemeno, che della rigata cubica, e di distinguere sulla rappresentazione i due casi in cui è bilatera o unilatera![2]

Ti dirò poi che è ormai fissato il Severi verrà mio assistente l'anno venturo.[3]

Sto terminando in questi giorni il rifacimento dell'Appendice della G[eometria] proiettiva il cui testo è ormai completamente tradotto dal Flei-

scher.[4] Ho trovato poi il modo di arrivare (colla Geom[etri]a *astratta*) alle trasf[ormazion]i che mutano sfere in sfere. Ma non basta riferire proiettivamente le sfere per un punto O ai piani dello spazio; occorre che alla sfera O, di raggio nullo e alla relativa polarità (ortogonale) per O, risponda l'assoluto del 2° spazio. Allora infatti due cerchi per O facenti un dato ang[ol]o vengono mutati in rette facenti un ang[ol]o uguale. E si prova quindi che ad un cerchio C in un piano per O corrisponde un cerchio, mediante la generazione di C con fasci di cerchi per O. Variando P su C (v[ed]i fig[ura]) si prova che l'ang[ol]o dei due cerchi OPB, OPA resta costante ($= O\hat{A}P + O\hat{B}P = A\hat{P}B - A\hat{O}B$).



Quindi la linea corrispondente a C vien generata da due fasci di raggi congruenti ecc.

Come vedi è molto semplice.

Tanti saluti cordiali anche all'E[lbina]. Tuo

Ghigo

[1] In una lettera del 19 maggio 1902 Corrado Segre scriveva a Castelnuovo: «Bertini mi ha poi scritto in proposito quanto ha saputo dal Dini: cioè che Cremona disse che non si doveva concedere la libera docenza *mancando un lavoro di Descrittiva*. Il Dini disse che se "Severi presenterà un lávoro di Descrittiva (ad es[empio] per Ottobre) sarà *certo* di ottenere la libera docenza"».

[2] Cfr. Severi 1903c.

[3] Cfr. p. 488, nota 6 a let. 523 (5.12.1901).

[4] Enriques 1903b; cfr. p. 483, let. 518 (23.8.1901) e nota 2.

532.

29 Agosto 1902
Hotel Jungfrau - Mürren[1]

Carissimo Guido,

Mittag-Leffler mi scrive che il vol[um]e degli Acta pel centenario di Abel[2] è stato diviso in tre parti, e che nella 3ª parte vi è ancor posto

disponibile. Perciò insiste perché gli mandi qualcosa, e mi prega di fare presso di te vive premure perché tu voglia pure collaborarvi.[3]

Ho ripreso in esame la questione delle sup[erficie] irregolari, e, se non fossero le delusioni già avute in proposito, direi di essere in porto. Ti riferisco il procedimento.

Sopra la sup[erficie] F (irregolare) prendo un sistema $|C|$ di gr[ado] n e dimensione $r-\delta+1$, dimensione della $g_n^{r-\delta}$ caratteristica completata $= r$.

Prendo un G_n comune a due C ed $r-1$ p[un]ti di esso $1, 2 \ldots r-1$. Sopra ogni C del fascio, contando 2 v[olte] il p[un]to 1, ottengo un G_{n-r} residuo rispetto a g_n^r. Al variare della C nel fascio, G_{n-r} genera una curva K. Se la s[eri]e caratt[eristic]a di $|C|$ fosse completa la K sarebbe una C. Ma essendo scompleta K non appartiene a $|C|$.

La K avrà, in generale, una molt[eplicit]à k in 1, una molt[eplicit]à s in ciascuno dei p[un]ti $2 \ldots r-1$ (che entrano simmetricamente nella costruzione), ed una molt[eplicit]à h in $r, r+1 \ldots n$.

a) Se la K (variando il G_n ecc. su C) *deve segare su* C *una serie contenuta in una serie lineare, deve essere* $k = h+2, s = h+1$. Ne lascio a te la verifica facile a stabilire con il teor[ema] di Abel o anche senza.

b) Mettiamoci dunque nell'ipotesi $k = h+2, s = h+1$. La K varia allora in un sistema lineare segante su C la medesima serie del sistema $|(h+1)C|$.

Posso dire addirittura che K *varia nel sistema* $|(h+1)C|$, altrimenti avrei $|(h+1)C + K'| = |K + \{(h+1)C\}'|$ e quindi $|K'|$ e $|\{(h+1)C\}'|$ segano su C la stessa serie, onde (*a meno del caso di una rigata*) $|K'|$ è il sistema agg[iun]to di rango h a C, ossia $|K'| = |\{(h+1)C\}'|$, da cui $|(h+1)C| = |K|$.

Ora dunque considero la curva K prima costruita e la combino linearmente colle altre omologhe ottenute mutando il p[un]to 1 con $2, 3 \ldots r-1$. Ottengo un sistema $|K|$ coi p[un]ti $1, 2 \ldots r-1$ $(h+1)$-pli, ed $r \ldots n$ h-pli. In questo sistema sono contenute le ∞^{h+1} curve composte di $h+1$ C del fascio dato.

Trasformando la sup[erficie] mediante $|K|$ ottengo una rigata F' $(n-r+1)$-pla, alle C del fascio (sulla data sup[erficie] F) corrispondendo *rette* di F'.

La F' se non è un cono, si può proiettare successivamente da una, due ... generatrici finché si giunga ad un cono. Ciò equivale a staccare delle C da $|K|$, diminuendo h. *Fa eccezione il caso in cui si pervenga ad una quadrica*, caso che tratterò poi.

Se F' è un cono (normale), le sue sez[ion]i iperpiane contenendo gruppi di $h+1$ generatrici, l'ordine di F' sarà $h+1$ {e la dimensione del suo spazio (e di $|K|$) sarà $h+2$}. Pertanto il grado di $|K|$ sarà

$$(h+1)(n-r+1).$$

D'altra parte si ha direttamente (pensando che $|K|$ si deduce da $|(b+1)C|$ coll'imposiz[ion]e di p[un]ti base...)

$$(b+1)^2 n - (b+1)^2 (r-1) - b^2 (n-r+1).$$

Dunque

$$(b+1)^2 n - (b+1)^2 (r-1) - b^2 (n-r+1) = (b+1)(n-r+1).$$

D'onde segue

$$2b(n-r+1) = b(n-r+1)$$

$$b = 0.$$

Ma se $b = 0$ *la* K *varia in* $|C|$ *che viene ad avere serie completa.*
Resta il caso in cui F' sia una quadrica. Allora si ottiene

$$2(n-r+1) = (b+1)^2 (n-r+1) - b^2 (n-r+1)$$

$$2b(n-r+1) = n-r+1$$

assurdo.
Che cosa ti pare di tutto questo ragionamento.
Saluti cordiali a te e all'E[lbina]. Ghigo

[P.S.] Sei sempre a Borca o sei andato a Venezia?

[1] Lettera su carta intestata dell'albergo.
[2] «Niels Henrik Abel. In memoriam» è la dedica dei volumi 26 (1902), 27 (1903) e 28 (1904) degli «Acta Mathematica».
[3] Cfr. in particolare p. 493, let. 528 (13.3.1902).

533.

7 Sett[embre] 1902
Hotel Victoria - Grindelwald - Suisse[1]

Carissimo Guido

Ho passato la piccola Scheidegg (montando al Lauberhorn, e visitando l'Eigergletscher) e sono disceso a Grindelwald, donde fra pochi giorni prenderò la via del ritorno, per Grimsel e la Furka.

Prima di partire da Mürren ho ricevuto la tua lettera, la quale non mi ha completamente persuaso.

Il primo punto che tu affermi è che la mia costruzione conduca ad una φ_{n-2+b} $(b > 0)$ anche per una sup[erficie] regolare, *non* normale. Ora ciò non mi sembra vero. Infatti pei p[un]ti $1\ 2 \ldots r-1$ (del gruppo G_n) pas-

sano ∞^2 curve C del sis[tem]a delle sez[ion]i p[ia]ne, e fra queste *una* che ha il p[un]to 1 come 2-plo, la quale viene segata da una φ_{n-2} $(h = 0)$ passante per la curva (agg[iun]ta) sez[ion]e di φ_{n-3} da te prescelta.

Eliminata questa pregiudiziale, vedi che il venire $h > 0$ è un carattere delle sup[erficie] *irregolari*.

Ma tu dici: la curva costruita varia ad ogni modo nel sis[tem]a lin[ear]e segato dalle φ_{n-2+h} per la sez[ion]e di φ_{n-3}.

Sì, se la curva stessa è irriducibile. Ma l'assurdo ch'io voglio trarre dall'ipotesi $h > 0$, (curva irrid[ucibil]e sez[ion]e di φ_{n-2+h}) proverebbe appunto che la sezione di φ_{n-2+h} si spezza in 2 parti ciascuna delle quali non varia più in un sis[tem]a lin[ear]e.

Esamina un po' attentamente ciò che accade nel caso delle rigate. Vedrai che la curva costruita consta di un certo gruppo di gen[eratric]i e della curva (unisec[ant]e) residua di una di queste.

In fine tu muovi un appunto al calcoletto col quale voglio dimostrare assurda l'ipotesi $h > 0$. Ho rifatto quel calcoletto colla tua correzione, e mi pare che si arrivi ancora al resultato voluto. Ma questo avrei bisogno di rivederlo con più calma avanti di poterlo asserire.

L'essenziale è, mi pare, di esaminare se il processo è buono, e due cose credo si possano affermare:

1) che esso stabilisce una differenza caratteristica fra le sup[erficie] regolari ed irregolari;

2) che esso riesce per le rigate.

Certo bisogna anche qui interpretarlo *sopra la sup[erficie]* seguendo lo spirito della costruzione.

Tanti saluti a te e all'E[lbina]. Ghigo

[1] Lettera su carta intestata dell'albergo.

534.

11 Sett[embre] 1902
Hotel Victoria - Grindelwald - Suisse[1]

Carissimo Guido,

Sono partito da Grindelwald e, per la via del Grimsel, che è molto interessante, sono venuto a Gletsch ove ho dormito ieri sera. Ti scrivo dal Belvedere della Furka in attesa della diligenza che mi ricondurrà stasera a Goeschenen.

Ho ripensato a quella costruzione. Il mio calcoletto, data la tua correzione non porta più a niente. Ed infatti anche sopra una rigata si può avere un sistema di curve $|hC|$ dotate di $r - 1$ p[un]ti h-pli e $n - r + 1$ $(h - 1)$-pli

base per un fascio di $|C|$. Ma se uno degli $r-1$ p[un]ti deve diventare $(h+1)$-plo la curva necessariamente si spezza.

Portata l'attenzione su questo punto mi si è presentata la seg[uente] oss[ervazio]ne:

Facciamo la nota costruzione scegliendo fra gli $r-1$ p[un]ti il p[un]to 1 (che dovrebbe venire $(h+1)$-plo). Orbene la curva K che noi costruiamo avrà un certo n[umer]o di p[un]ti ∞ [infinitamente] vic[in]i al p[un]to 1; uno di questi p[un]ti appartiene ad una C del fascio sulla quale 1 è una coincidenza per la g^1_{n-r+1} residua dei p[un]ti 1 ... $r-1$. Ora il luogo delle coincidenze di tali g^1_{n-r+1} ha un p[un]to 2-plo in ciascuno dei p[un]ti 1 ... $r-1$. Pertanto la K costruita ha in 1 (non dico in 2 ...) un p[un]to 2-plo.

Come vedi ciò porta che la K sia una C (sup[erfici]e reg[olare]) oppure che essa varii in un sist[ema] non lin[ear]e.

Al mio ragionamento non vedo che un'obiezione possibile, un po' speciosa. Che cioè la K abbia p[er] e[sempio] un p[un]to 4-plo con 2 p[un]ti 2-pli ∞ [infinitamente] vic[in]i secondo le 2 direzioni t[an]g[ent]i alla curva delle coinc[idenz]e su nominate. Speciosa dico, perché non vedo alcuna ragione di contare in modo mult[ipl]o quei p[un]ti, ed oltre a ciò si dovrebbe avere sempre h dispari, il che non si concilia p[er] e[sempio] con $p_g - p_n = 2$.

Sono curioso di sapere il tuo giudizio.

Scrivimi a Marina di Pisa.

Ti saluto cordialmente insieme all'E[lbina].

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Lettera su carta intestata dell'albergo. Presenti nell'originale varie macchie d'inchiostro di modesta entità, che non pregiudicano la lettura del testo.

535.

17 Sett[embre] 1902

Carissimo Guido,

accetto la tua correzione ma (perdona la mia insistenza) non rinunzio ancora alla speranza di mostrare che la curva costruita nel noto modo si spezza. E ti sottometto quest'ultimo tentativo.

Abbiamo un sistema lineare di curve (K) dotate di $r-1$ p[un]ti $(h+1)$-pli 1, 2 ... $r-1$ e di $n-r+1$ p[un]ti h-pli (base pel fascio delle C). Le K segano sopra una C gruppi di una g^1_{n-r+1}. Sopra una K le C del fascio segano alla lor volta i gruppi di una g^1_{n-r+1} che ha un certo numero Δ

di coincidenze. Imponiamo alla K un p[un]to $(h+2)$-plo in 1 (invece che $(h+1)$-plo).

Il gen[er]e di K diminuisce di $h+1$, e la s[eri]e segata dalle C (da essere una g^1_{n-r+1}) diviene una g^1_{n-r}. Quindi Δ deve diventare

$$\Delta - 2(h+1) - 2.$$

Ora contiamo le intersezioni di K colla curva L luogo delle coincidenze delle g^1_{n-r+1} sulle C. Questo n[umer]o essendo Δ per la K generica, quando s'impone a K un p[un]to $(h+2)$-plo in 1, diviene

$$\Delta - 4,$$

tenuto conto che la L ha il p[un]to 1 come 2-plo e 2 t[an]g[en]ti comuni colla K particolare avente in 1 un p[un]to $(h+2)$-plo.

Di qui si deduce

$$\Delta - 4 = \Delta - 2(h+1) - 2 \qquad h = 0,$$

oppure *curva* K con 1 $(h+2)$-plo *spezzata*.

Che cosa ti pare di questo ragionamento?

Scrivo a Venezia ove ti troverai Sabato.

Tanti saluti affettuosi Ghigo

536.

27 Ott[obre] 1902

Carissimo Guido,

ripensando alla nostra discussione relativa a Lorentz mi sono accorto ch'io avevo scambiato Lorentz con Larmor. È quest'ultimo (di Cambridge) che si trovava questa estate con Macdonald a Zermatt!

Farò avere a Pannelli la Geom[etri]a elementare;[1] la copia deve essersi perduta. L'invio ai prof[essor]i universitari fu cominciato soltanto pochi giorni or sono; Pittarelli è compreso nella nota, perciò ritengo che a quest'ora il libro gli sarà pervenuto.

Conoscevo (di nome) quei due trattati di Matematiche per chimici, e appunto Amaldi se ne è fornito questa estate per prepararsi.

Almansi è con ragione meravigliato della commissione di Meccanica.[2] Sai che il Ministro ha chiesto telegraficamente ai concorrenti oltre 10 copie delle pubblicazioni e delle esposizioni di vita?

Siamo in un bel mondo di matti.

Cordiali saluti a te e all'E[lbina]. tuo aff.mo

Ghigo

[P.S.] Grassi pare non voglia più venire a Firenze.

Emery è qui e pare verrà sicuramente chiamato.

Per Paolo ciò può essere un bene se, come pare, vi è un posto libero di assistente alla Specola. Ma per la nostra Fac[olt]à sarà una perdita irreparabile.[3]

[1] Enriques-Amaldi 1903a.

[2] La commissione di Meccanica razionale era composta da Gian Antonio Maggi, Giacinto Morera, Vito Volterra, Carlo Somigliana e Tullio Levi-Civita.

[3] Enriques allude a un possibile trasferimento (in realtà non avvenuto) a Firenze di Carlo Emery, a quest'epoca professore ordinario di Zoologia e preside della Facoltà di Scienze di Bologna. Paolo Enriques era a Bologna con la qualifica di preparatore nel gabinetto di Zoologia.

537.

31 Ott[obre] 1902

Carissimo Guido

Ho ricevuto qui una lettera del Bertini che mi ha portato una sgradita sorpresa.

Il Bertini dice che sentendosi stanco di salute avrebbe bisogno del Severi,[1] e mi prega di accettare il *cambio* col Maroni a cui egli ha già dato la sua parola.

A malincuore, ma non ho potuto rifiutare il Severi in queste circostanze. Però alla 2ª parte della domanda (prendermi il Maroni) non mi sento di consentire.

Non mi par giusto di preferire ai nostri *mediocri*, un altro mediocre, non privo forse di studio, ma mal dotato per l'insegnamento stante il suo carattere eccessivamente freddo.

Ho pregato dunque il Bertini di cercare al Maroni un altro collocamento; p[er] es[empio] il Dini che a lui s'interessa potrebbe fargli avere un posticino in una scuola secondaria.

E lo stesso ho risposto al Segre che mi ha pure scritto in proposito.

Il mio corso libero di Filosofia dell'anno scorso ha fruttato £ 366 che ho destinato alla biblioteca della nostra scuola di Mag[ister]o.

Per evitare difficoltà burocratiche dovrò fare il dono *in libri*. Hai qualche libro interessante da consigliarmi. Ho già pensato al nuovo libro di Poincaré «Science et hypothése»[2] e Pinch[erl]e desidera prendere gli atti del congresso matematico di Parigi.[3]

Conosci p[er] es[empio] qualche libro di interesse generale del Mach?

Tanti saluti affettuosi a te e all'E[lbina].

Ghigo

[1] Cfr. p. 488, nota 6 a let. 523 (5.12.1901).
[2] Poincaré 1902b.
[3] *Compte Rendu du deuxième Congrès International des Mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villars, Paris 1902.

538.

2 Nov[embre] 1902

Carissimo Guido,

pare che il Bertini pensi a un'altra soluzione lasciandomi il Severi. Mi dispiace di non poterlo contentare quanto al Maroni, ma anche il Segre ha trovato giuste le mie ragioni.

Grazie delle indicazioni dei libri, ma alcuni di questi (Atti del congresso fisico)[1] temo sembreranno a Pinch[erl]e troppo *non* matematici. Prenderò ad ogni modo la storia della Meccanica del Mach,[2] le litografie del Klein[3] e qualche altro tra i libri che mi suggerisci che non possediamo.

Il volume di Poincaré[4] è già uscito.

Quanto al concorso[5] io non so, trattandosi della prima volta, se i prof[essor]i interpellati risponderanno o no alla domanda. Ma dato che i più rispondono, credo faresti bene a rispondere anche tu affinché non prevalga il giudizio dei meno illuminati.

Questa specie di referendum crea alla commissione una specie di vincolo morale, e perciò credo se ne attenuerebbe il danno intendendo la cosa nel senso più largo; cioè, quando non vi sia un nome che *s'imponga*, nominare i migliori esponendo le ragioni per cui si ritengono tali e dichiarando di non poter *scegliere* diminuendo i dubbi troppo giustificati in chi ha da *risolvere* (neppure in via consultiva) ma solo da *consigliare*.

Così il referendum avrebbe l'effetto di scartare in certo modo, con un plebiscito, i meno degni.

Nel caso presente s'io dovessi rispondere direi che per la cattedra di Alg[ebr]a e Analitica Ciani e Amaldi mi paiono i più adatti tenuto conto del valore e della natura delle pubblicazioni; che il primo sembra più maturo pel numero delle pubblicazioni e pei titoli didattici rappresentanti una lunga carriera; che il secondo, laureato soltanto da pochi anni ha fatto lavori varii in cui mostra seria e più alta cultura, ma sembra meno maturo; che per conseguenza non saprei scegliere fra i due senza un ulteriore e più profondo esame dei loro titoli.

So che i lavori dell'Amaldi sono stati giudicati recentemente dal Bianchi con molto favore. Io ti ho detto altre volte che conoscendo bene il mio amico, so che egli non possiede un vero ingegno originale che prometta *molto*; ma in via relativa mi pare di ordine superiore agli altri 5 con-

correnti, per la larghezza dei mezzi di cui dispone e per l'elevatezza dei criteri con cui giudica le questioni. Riguarda del resto i suoi lavori sul potenziale[6] e quello sui gruppi imprimitivi;[7] questa ultima questione che egli ha preso dal Lie, non esigeva una grande originalità, ma assai abilità di maneggio analitico.

Cordiali saluti anche all'E[lbina] e a P[aolo]. Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Potrebbe trattarsi dei *Rapports presentés au Congrès International de Physique réuni à Paris en 1900*, 4 voll., Gauthier-Villars, Paris 1900.
[2] Mach 1883.
[3] Klein 1902.
[4] Poincaré 1902b.
[5] Si tratta del concorso per la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica presso l'Università di Cagliari: cfr. p. 489, nota 3 a let. 524 (18.12.1901).
[6] Amaldi 1902.
[7] Amaldi 1901-02.

539.

7 Dec[embre] 1902

Carissimo Guido

Mi dispiace delle difficoltà insorte, tanto più che temo la commissione[1] trovandosi imbarazzata cerchi un pretesto per metterci fuori.

Approvo completamente la tua proposta e ti autorizzo a dichiarare che ritiriamo le memorie scritte separatamente da ciascuno di noi, se l'Accad[emi]a ritenga di non poterle giudicare, persistendo tuttavia a desiderare il giudizio dell'Accad[emi]a stessa sull'opera comune.

Siccome però questa dichiarazione bisognerà farla per iscritto e firmarla, così credo faresti bene a redigerla subito (sentiti i pareri più autorevoli) acciocché anch'io possa subito firmarla.

Il Sev[er]i è sempre in alto mare. Egli cerca nel momento di risolvere una difficoltà preliminare mostrando che il n[umer]o dei periodi degli integrali di 1ª o 2ª sp[eci]e è pari.

Poi spera di pervenire a stabilire che il n[umer]o degli integrali di 1ª [specie] è p essendo $2p$ i periodi. Ma la cosa non sembra tanto facile.

Gli comunicherò il tuo consiglio.

Saluti affettuosi anche all'E[lbina] tuo
Ghigo

[1] Si tratta della commissione per il Premio Reale: cfr. p. 473, nota 5 a let. 505 (s.d., 1901).

540.

Martedì [s. d.]

Carissimo,

ho ricevuto la dichiarazione e te la rimando firmata. Speriamo bene!

Il Severi aveva già visto la nota di Poincaré[1] sulla connessione dei p[ia]ni 2-pli; ma è poco interessante perché esclude che la curva di diramazione abbia singolarità all'infuori di p[un]ti 2-pli, onde se essa è irriducibile non vi sono integrali e $p_g = p_a$.

Il Sev[er]i dalle sue considerazioni è stato portato a studiare in generale la connessione di un piano multiplo, ma ho paura che sia un osso difficile a rodere.

Tanti saluti cordiali anche all'E[lbina] tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Riguardo alla forma della dichiarazione da te composta non avrei che una sola osservazione (intorno a cui, se credi, si può sentire il parere di qualcuno prima di rilasciare la dichiarazione suddetta): noi diciamo di *precisare* la nostra anteriore domanda, in realtà *aggiungiamo* a quella una nuova domanda che *modifica* o *limita* la prima, poiché ricordo che in essa si chiedeva il giudizio dell'Accademia su un gruppo più esteso di lavori.

Tuttavia tu dici appunto che la nostra domanda attuale non può (e capisco che vi sarebbe pericolo nel fare il contrario) che precisare o chiarire l'antica, sicché forse la voluta inesattezza di parola riesce in tal caso opportuna.

[1] Poincaré 1902a.

541.

[s. d.]

Carissimo Guido

In relazione a ciò che mi scrivi ecco le mie riflessioni:

1) Noi non abbiamo né veste né motivo per interpellare il Consiglio di stato finché l'Accademia non ci abbia messo fuori dal concorso o non ci abbia ufficialmente partecipato di non voler tener conto dei nostri lavori staccati.

2) Pare anche a me, come al Volt[erra], che all'Accademia non convenga affatto di provocare una simile decisione.

3) L'Accademia ammette che si presentino al concorso lavori comuni ((e l'interesse dell'Acc[ademia] è di incitare la produzione di *opere* senza

occuparsi delle persone)); ora un lavoro comune è sempre la riunione di sforzi fatti dai due collaboratori ed insieme congiunti. Se nel lavoro comune si dichiarano esplicitamente, per una parte del lavoro, i contributi parziali, in che cosa questa circostanza può modificare la condizione giuridica della coppia concorrente?

Evidentemente solo nei rapporti fra i due collaboratori non nei rapporti verso i terzi.

Sarebbe bella che se due concorrenti concorrono con uno stesso lavoro, il lavoro non potesse più venire giudicato perché in un qualsiasi modo si è venuti a sapere pubblicamente quale parte i due collaboratori vi hanno avuto.

4) Queste ragioni valgono anche per accettare lavori separati che gli autori uniscono, tuttavia in quest'ultimo caso l'Accad[emia] può sollevare un'eccezione formale; essa può dire che manca *l'opera unita*, essendosi fatta l'unione per il solo scopo del concorso.

Ad evitare questa eccezione e a quietare gli scrupoli giuridici della commissione amministratrice, noi possiamo fare una dichiarazione del genere di quella che ieri ti ho rimandata; ma appunto chiedendo il giudizio sulla memoria[1] degli Annali noi desideriamo che l'Accad[emia] si pronunzii sul valore della nostra opera; in quanto essa è unita. Studiamo la forma della dichiarazione; chiediamo p[er] es[empio] che l'Accad[emia] si pronunzii su alcuni teor[em]i della comune memoria fra cui il teorema relativo alle superficie su cui l'aggiunzione termina, prendendo in considerazione tutti i resultati che ne discendono, facendo astrazione dalle dimostrazioni parziali di alcuni di essi contenute in precedenti lavori.

Cerca di persuadere il Volt[erra] e gli altri accademici che quando l'Accademia pronunzia un giudizio sopra lavori che portano i nostri due nomi, nessun corpo può essere competente a giudicare il suo operato restringendo i criterii a cui esso sia uniformato, e che in ogni caso il diritto d'impugnare il giudizio dell'Acc[ademia] non può spettare ai terzi, poiché se consta in parte il contributo portato da ciascuno di noi all'opera comune questo non muta rispetto a loro le condizioni del concorso di fronte al caso in cui *non constasse*.

Io ripenserò da parte mia alla forma della dichiarazione. Direi che poi messici d'accordo la si presentasse anziché metterci in una via per un lato più pericolosa per noi, e che d'altra parte a qualcuno dell'Accad[emia] può dispiacere.

Piuttosto perché la Presidenza non convoca la classe per decidere la questione di massima?

Magari presentando una domanda che da noi stessi potrebbe venire rivolta in una forma che a noi sembri conveniente?

Tanti saluti affettuosi anche all'E[lbina]

tuo
Ghigo

P.S. Non ti faccio l'offerta di ritirarmi io dal concorso perché temo che ciò non possa farsi essendo la nostra domanda collettiva. Ma se m'ingannassi in proposito e questo facilitasse la soluzione sarei lieto di toglierti dall'imbarazzo in cui ti trovi.

Abbozzo[2]

I sottoscritti concorrenti ecc., in aggiunta alla domanda da loro presentata ecc., dichiarano:

che qualora l'Accad[emia] ritenga di non poter ammettere al concorso i lavori da loro staccatamente fatti, non ravvisando nell'insieme di più lavori di due persone i caratteri formali di *un'opera*, alla quale si possa conferire il premio;

desiderano che l'Accad[emia] limiti il suo giudizio alle sole memorie alle quali unitamente hanno collaborato, prescindendo da tutte le altre.

Si permettono in particolare di richiamare l'attenzione dell'Accad[emia] sulla comune memoria...,[3] facendo osservare che in essa hanno ricevuto un più completo sviluppo i concetti dagli autori già precedentemente elaborati in varii lavori, ((dei quali l'Acca[demia] può giudicare nella loro veste più perfetta,)) e da tutto l'insieme di tali concetti si sono dedotti alcuni resultati nuovi e fondamentali, comprendenti in partic[olare] molti dei teoremi prima stabiliti.

I concorrenti ritengono perciò che quella memoria[4] possa essere considerata come rappresentante la somma dei loro sforzi e l'identificazione degli scopi delle loro ricerche ad un oggetto comune, e che in essa si ravvisino i caratteri di un'opera nuova ed unica intorno a cui l'Accad[emia] può pronunziare il suo giudizio.

Si deve osservare che in ogni caso non si ledono i diritti dei terzi?

Si deve chiedere che la Pres[idenz]a voglia far decidere la questione di massima dalla classe?

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.
[2] Foglio allegato alla lettera.
[3] Enriques-Castelnuovo 1901.
[4] Seguono nell'originale dieci righe cancellate. Anche in altri punti la lettera è tormentata da correzioni e cancellature, di minore entità.

542.

11 Dec[embre] 1902

Carissimo Guido

Ricevo un invito dal Ministero per venire costà a giudicare della promozione di Pieri;[1] gli altri commissarii sono Pittarelli, Favaro, Del Re, Martinetti.

La commissione si aduna Mercoledì ed io conterei di trovarmi a Roma Martedì. Ma te lo saprò dire con maggior precisione.

Mentre sono contento di fare questo viaggetto e di rivedere te e l'Elbina, mi dispiace un po' di lasciare Luisa in questo momento poiché ella è sempre di cattivo umore ed un po' indebolita per l'allattamento.

Mi era venuto anche in mente di condurla con me insieme ad Adriana[2] prendendo insieme una stanza che tu forse avresti potuto aiutarci a trovare. Sono convinto che la distrazione e l'aria più tiepida di Roma le gioverebbero. Ma temo sia un po' di pazzia per la bimba che forse ci darebbe troppa noia.

Non ho potuto procurarmi oggi il regolamento del premio reale dei Lincei, e cercherò di farlo domani. Se l'Accademia domanda il parere del Cons[iglio] di stato[3] ci converrà forse di appoggiarlo con un pro-memoria. Ma se non c'è furia potremo discorrerne a voce.

Ti saluto e... a rivederci a presto tuo aff.mo

Ghigo

[1] La promozione a professore ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva a Catania.

[2] Secondogenita di Enriques, nata a Firenze il 2 agosto 1902.

[3] La commissione per il Premio Reale, riunitasi ai primi di dicembre, decise di chiedere un parere al Consiglio di Stato sull'interpretazione del regolamento per l'assegnazione dei premi reali. Castelnuovo ed Enriques presentarono di conseguenza alla presidenza dell'Accademia un memoriale per appoggiare la loro domanda, con la richiesta di trasmetterlo al Consiglio di Stato. Se ne veda l'abbozzo a p. 508, let. 541 (s.d., 1902).

543.

12 Dec[embre] 1902

Carissimo Guido,

visto che l'Accademia vuol domandare il parere del Cons[iglio] di Stato a noi non resta che metterci per questa via appoggiando la domanda con un pro-memoria. Per far ciò bisogna metterci d'accordo coll'Accad[emi]a stessa e magari pregare poi la presidenza di trasmettere il nostro pro-memoria insieme alla sua relazione.

La mia venuta a Roma è propizia a questo scopo. Tu dovresti intanto

cercare che le cose non precipitino in guisa che si possano prendere a voce gli opportuni accordi; ma credo che ciò avverrà naturalmente.

Penso che noi potremo sostenere la nostra tesi in modo rispettoso per l'Accad[emi]a, sostenendo che in ogni caso analogo debba spettare all'Accad[emi]a stessa di decidere in base a criterii scientifici se in un complesso di lavori si ravvisino i caratteri di *un'opera*. E questo giudizio dovrà quindi dare nel caso la commissione dicendo se i concetti, i metodi, i resultati si uniscano e convergano a scopi comuni.

Credo che questo modo di presentare le cose potrà soddisfare anche il Volt[err]a, evitando i pericoli che egli vede nel giudizio del Cons[iglio] di Stato.

In questi giorni pensiamo ciascuno per conto proprio agli argomenti che si potrebbero addurre, e poi insieme combineremo la cosa, per la quale cerca intanto di disporre bene gli animi.

Saluti cordiali tuo aff.mo

Ghigo

[P.S.] Avevo saputo dal Raina[1] del Di Legge. Ma credo che la nostra Fac[olt]à non sarà disposta a servire di comodino agli interessi del sig. Di Legge, il quale si faccia nominare in soprannumero costà o venga da noi, ma in ogni caso non deve intralciare il regolare andamento dei nostri studi.

[1] Michele Rajna, professore straordinario di Astronomia all'Università di Bologna, sarà promosso ordinario il 12 febbraio 1903.

544.

1 Gennaio 1903

Carissimo Guido

Luisa ed io rinnoviamo saluti ed augurî.

La questione intorno alla congruenza delle rette della var[ie]tà cubica, oltre ad essere bellina, come tu dici, potrebbe forse porgere la risposta al problema della raz[ionali]tà. Infatti mi pare che si stabilisca assai facilmente che, «se la var[ie]tà è razionale, le sue rette formano una sup[erficie] che corrisponde ad una serie ∞^2 di gruppi di una curva». Se dunque quella sup[erficie] fosse di natura diversa la var[ie]tà sarebbe irrazionale.

Per studiare la suddetta congruenza come superficie, si presenta una rappresentazione sul p[ia]no 6-plo che è per verità poco attraente.

Ma questa rappresentazione si particolarizza nel caso delle var[ie]tà $x_5^3 = f_3(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$, che pure non han p[un]ti 2-pli.

In questo caso la sup[erficie] si rappresenta sulla congruenza delle t[an]g[enti] principali di una sup[erficie] cubica contata 3 v[olte] in modo ciclico; curva di diramaz[io]ne le 27 rette.

Nota che la cong[ruenz]a delle t[an]g[enti] principali alla sup[erficie] cubica si rappresenta sulla sup[erficie] 2-pla, curva di dir[amazio]ne la linea parabolica.

Così lo studio della congruenza riesce accessibile in questo caso, ed è da ritenere che il caso particolare informi del generale poiché non vi è degenerazione (ciò si vede colla rappres[entazio]ne della var[ie]tà sullo sp[azi]o 2-plo).

Severi ha costruito la sup[erficie] canonica corrispondente alla raz[ionali]tà delle coppie di p[un]ti di una curva.[1] Riesce, come prevedevi, corrispondente ai complessi lineari dello sp[azi]o a cui la curva appartiene come canonica. Tuttavia il resultato non è ancora dimostrato, perché Sev[er]i ha soltanto considerato il lato aritmetico della questione.

Tante cose cordiali tuo

Ghigo

[1] Cfr. Severi 1903a.

545.

4 gennaio [1]903

Carissimo Guido

Severi ti scriverà direttamente per avere notizie più precise intorno a ciò che ha fatto De Franchis.[1] S[ever]i ha dimostrato geometricamente quella relazione.

Se la V_3^3 è raz[ional]e, alle sue rette corrispondono curve raz[ional]i C unisecanti le sup[erficie] F d'un sistema ∞^3. Da ciò segue che le C segano almeno in due punti la curva base di $|F|$. E così la congruenza riesce rappresentata sopra una serie ∞^2 di gruppi G_n app[artenent]i ad una curva.

A priori è vero che i G_n potrebbero stare in una serie lineare (e allora la rapp[resentazio]ne non direbbe nulla); ma siccome una particolarizzazione del sist[em]a porta $|F|$ a divenire rappr[esentativ]o della V_3^3 con p[un]to 2-plo, non pare possibile che una serie contenuta in una serie lin[ear]e abbia per limite una serie non lin[ear]e (quella delle coppie di punti di una C_6 o dei gruppi segati sulla curva base di $|F|$ dalle immagini delle rette, la quale sembra in ogni caso dovere esser non lineare).

Queste sono le ragioni per cui ritengo che la congruenza delle rette di V_3^3 debba contenere (come sup[erficie]) un sistema non lineare se la V_3^3 è raz[iona]le.

La rappresentazione che ti proponevo come mezzo di studio per quella congruenza nel caso $V \equiv x_5^3 - f_3(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = 0$, non mi pare così inabbordabile perché basta in fondo studiare 2 sup[erficie] una F_3 2-pla con curva par[ametric]a di diramazione, e una F_3 3-pla, ciclica, con curva di dir[amazio]ne costituita dalle 27 rette.

Quest'ultima ha tutta l'apparenza di essere irregolare, ma non vedo come su di essa possa venir fuori un sist[em]a continuo non lineare.

Cordiali saluti

Ghigo

[1] A questo proposito in Severi 1903a, 119, nota 1 si legge: «Mentre stavo redigendo questo scritto, ho saputo indirettamente che il sig. M. De Franchis, verso la fine del 1901, si era occupato della stessa questione e che aveva determinato i caratteri invarianti delle superficie in discorso, senza però pubblicare i suoi risultati, che io non conosco affatto. Pensando che un lavoro del sig. De Franchis sull'argomento, per la indipendenza delle nostre ricerche, potrebbe differire dal mio nei metodi ed in qualcuna delle questioni trattate, non stimo inopportuno la pubblicazione di questa Nota». Cfr. anche De Franchis 1903a, presentato al Circolo Matematico di Palermo il 18 gennaio 1903.

546.

10 gennaio [1]903

Carissimo Guido,

mi hanno fatto piacere le notizie che mi hai comunicato circa l'Astronomia.[1] Speriamo che tutto si risolva presto nel miglior modo.

Quanto alla var[ie]tà cubica ho capito come tratti la questione, considerando le rette incidenti ad una data. Ma appunto perché quella congruenza contiene un sistema alg[ebric]o ∞^1 non si può sperare di trarne nulla rispetto alla raz[ionalit]à della V_3^3. Il resultato è ad ogni modo elegante.

Per Amaldi siamo qui in grande agitazione.[2]

Ormai vedo che giornalmente le decisioni del Cons[iglio] vengono comunicate ai giornali; ma il ritardo a decidere questa questione, dopo la notizia della contestazione, non è un buon sintomo, o almeno non incoraggia ad interpretare nel senso migliore i sintomi del fatto. Tra i quali c'è la notizia che Giudice e Ciani si adoprino per l'annullamento. Questi avrebbe scritto al Bianchi, ricevendo però da lui e dal Bert[ini], una lavata di capo.

Hai più veduto il Sella? E ti ha egli parlato della *mia* pressione osmotica?

Saluti affettuosi, a te e all'E[lbina]

tuo

Ghigo

[P.S.] Qual è l'indirizzo di De Franchis?

[1] Cfr. p. 510, P.S. a let. 543 (12.12.1902).

[2] Ugo Amaldi, vincitore del concorso per la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica all'Università di Cagliari, fu nominato nel corso del 1903.

547.

16 gennaio 1903

Carissimo Guido,

sono assai dispiacente delle notizie che mi comunichi, e trovo scorrettissimo il contegno del Consiglio d'Amministrazione il quale aveva il dovere di mandare al Cons[iglio] di Stato il nostro pro-memoria, sia pure accompagnandolo con un voto contrario.[1] Ora bisognerebbe trovare il modo di mostrare quel pro-memoria a qualcuno del Cons[iglio] di Stato, affinché quel corpo venga illuminato sulle nostre ragioni. Non arrivo a capire da chi partano le difficoltà nel Cons[iglio] dell'Accademia visto che il Cerruti era in passato (e giova credere sia tuttora) nel nostro ordine di vedute.

Quanto all'annullamento del concorso di Cagliari è molto supponibile che l'opposizione del Dini muova dal desiderio di sostenere il Ciani.

Mi è stato detto anzi che questi avrebbe scritto in termini risentiti al Bianchi, e ne avrebbe avuto una risposta nella quale il B[ianchi] pur trattandolo assai benevolmente gli comunicava nettamente il suo giudizio. Aggiungesi che il Bert[ini] avrebbe dato al C[iani] una lavata di capo.

D'altra parte Ciani e Giud[ice] andavano dicendo che il concorso non poteva stare e doveva essere annullato.

Tanti saluti affettuosi Ghigo

[1] Il riferimento è al concorso per il Premio Reale: cfr. p. 509, nota 3 a let. 542 (11.12.1902).

548.

17 gennaio [1]903

Carissimo Guido,

ti sottopongo la seg[uen]te dimostrazione della raz[ionali]tà della V_3^3

$$x_5^3 = f_3(x_1\ x_2\ x_3\ x_4):$$

spazio 3-plo con F_3 di diramazione.

Sopra F_3 prendo una retta r_1 ed una conica C_2 con *un* p[un]to comune, e considero le C_3 residue di $r_1 + C_2$ rispetto al sistema segato dalle quadriche Q_2.

Si può costruire un sistema lineare di F_6 che passino

per la r_1 tripla
per la C_2 2-pla (di p[ia]no α)
per la C_2' conica ∞ [infinitamente] vic[in]a a C_2, su F_3,
per tre C_3.

P[er] es[empio] $(Q_2^3 + \{F_3 + \alpha + 2$ p[ia]ni per $r_1\})$.

Queste F_6 sono *raz[ional]i* e *raz[ionalment]e rappresentabili sul piano*, perché le corde della $r_1 + C_2$ l'incontrano in punto.

Ora facciamo variare le tre C_3 in un fascio ed imponiamo alla F_6 altre condiz[ion]i lineari generiche, in guisa che se ne abbia *una* per ogni terna di C_3. Le suddette F_6 daranno quindi un sistema lineare ∞^3, entro al quale c'è una serie ∞^1 d'indice 3 di F_6 che toccano F_3 secondo C_3, contenendo 3 C_3 ∞ [infinitamente] vicine.

Ciascuna di queste F_6 è come un p[ia]no 3-plo con curva di diram[azione] 3-pla, quindi rappresenta 3 sup[erficie] raz[ional]i e raz[ionalmen]te rappresentabili sul piano, e tali sup[erficie] (entro la varietà cubica) variano in un fascio.

Raina mi scrive che non soltanto il Cons[iglio] Sup[eriore] ha proposto la nomina del Di Legge a Roma, ma anche ha fatto voto perché il M[inistr]o in base al concorso di Bologna nomini qui il Raina.[1]

Ce[rruti] si è dunque portato molto bene in questa questione mantenendo lealmente ciò che si era convenuto, e gliene sono grato.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. p. 510, P.S. a let. 543 (12.12.1902).

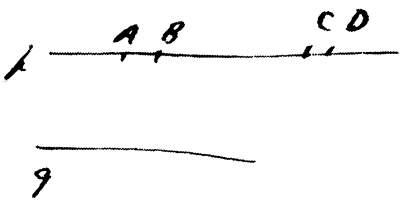
549.

19 gennaio 1903

Carissimo Guido,

da ieri sto elaborando il concetto della dimostrazione che ti ho comunicato. La quale in varii modi mi sembra estendibile alle V_3^3 generali ed anche allo S_3 2-plo con F_4 di diramazione. Ci sarà probabilmente un baco ch'io non vedo; ad ogni modo ecco il ragionamento semplicissimo:

Occorre costruire una serie ∞^1 di F_6, *raz[ional]i* e *raz[ionalmen]te rappresentabili sul p[ia]no*, che tocchino F_4 ovunque l'incontrano. Per ciò si prenda una retta p bitangente ad F_4, ed una q sghemba a p, qualsiasi.



Consideriamo le F_3 con $A^2\ C^2$, (passanti quindi per p) che contengono q. S'indichino con K le sez[ion]i di F_4 colle F_3.

Il sistema minimo $|2K|$ può essere segato dalle F_6 con A^3B^3, e C^3D^3 aventi come rette 2-ple p e q.

Ora ogni curva $2K$ è comune ed ∞ F_6 e fra queste ad F_6 con $p^3\ q^2$, occorrendo una sola condizione perché la p divenga 3-pla per le nostre F_6.

Dunque le $[\infty^{30}]$[1] F_6 per $p^3\ q^2$ segano su F_4 $|2K|$. Posso costruire in $|F_6|$ una rete secante le coppie di curve K d'un fascio; le F_6 tang[en]ti secondo una K formano una serie ∞^1 d'indice 2, quindi ecc.

Mi pare di capire che queste F_6 vengano ad avere in A, C due punti 4-pli. Ma se questa circostanza facesse sì che quei p[un]ti dovessero esser contati come curve eccez[ional]i di diramazione, basterà supporre che A, B, C, D sieno ∞ [infinitamente] vicini, cioè che la p abbia con F_4 un contatto quadripunto.

Il curioso è che, se il metodo sta bene, sembra estendibile allo S_3 2-plo con F_6 di diramaz[io]ne.

Il Fleischer mi scrive che Klein ha riferito favorevolmente dei miei Elementi di Geometria[2] in un Mathematische Verein, e lo ha incoraggiato a tradurla.[3]

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] La precisazione ∞^{30}, da noi racchiusa tra parentesi quadre, è stata aggiunta a matita da Castelnuovo.
[2] Enriques-Amaldi 1903a.
[3] Così nell'originale.

550.

20 gennaio [1]903

Carissimo Guido,

ti sarai accorto che il ragionamento della mia lettera di ieri è sbagliato, perché le F_6 ch'io costruisco sono spezzate in due F_3. A quest'inconveniente, come a quello che tu mi segnali relativamente alla V_3^3 particolare,

non vedo come si possa rimediare. O sotto una forma o sotto un'altra si presenta sempre un punto debole in tutti i mezzi che si mettono in opera per rappresentare la V_3^3. In linea di probabilità crescono così le ragioni per ritenere che si tratti di varietà irrazionali. Ma chi sa quando e come si potrà riuscire a vederlo!

Mi dispiace che il tuo colloquio col Villari[1] non si sia prolungato. Il V[illari] avrebbe capito come il Cons[iglio] d'Amm[inistrazione] si sia portato male verso di noi, e forse avrebbe potuto mandare di sua iniziativa il nostro pro-memoria alla 1ª sez[io]ne del Cons[iglio] di Stato. Giacché in fin dei conti la nostra lettera era diretta a lui, ed era un modo riguardoso verso l'Accademia di esercitare il nostro diritto di essere rappresentati al Consiglio di Stato.[2]

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Pasquale Villari era a quest'epoca presidente dell'Accademia dei Lincei.
[2] Il riferimento è al concorso per il Premio Reale: cfr. p. 513, let. 547 (16.1.1903).

551.

22 gennaio [1]903

Carissimo Guido,

Amaldi è stato consigliato da più parti ad adoprarsi perché il M[inistr]o non accetti l'annullamento del concorso[1] proposto dal Cons[iglio] Sup[eriore].

Il Levi-Civita ha scritto al Siacci pregandolo di occuparsene, e ne ha avuto in risposta un racconto con particolari piccanti.

Pare che il Ce[rruti] avesse proposto una formula conciliativa per accordare il Dini e il Siacci, nella quale si diceva di sorvolare sulla irregolarità pel primo della mancanza di veri titoli specifici e si proponeva l'annullamento della ineleggibilità del Pirondini, perché negata in base al criterio della specificità, cioè in contraddizione alla massima seguita pel primo.

Ora (dice il S[iacci]) che il D[ini], il quale pareva avesse accolto questa formula, all'ultimo momento mutò parere e chiese al Cons[iglio] l'annullamento totale del concorso. Il S[iacci] allora lesse la formula concordata, scritta dal Ce[rruti] (l'autografo è ora in mano di L[evi]-C[ivita]); ma il Ce[rruti] disse aver proposto quella formula soltanto per conciliare D[ini] e S[iacci], [senza] del resto propendere per l'opinione del D[ini]; nella votazione poi il Ce[rruti] si astenne.

Il S[iacci] dice che avendo combattuto fieramente il D[ini] in consiglio non può ora ricorrere al M[inistr]o, ma è lieto che altri lo faccia. E suggerisce a L[evi]-C[ivita] di pregare il Volt[erra] cui egli S[iacci] ha raccontato tutto.

Ora prima di lasciare che L[evi]-C[ivita] preghi Volt[erra], io ho sollevato ad Am[ald]i il dubbio che V[olterra] abbia entratura presso il M[inistr]o e voglia prendersi a cuore la cosa. Perciò ho pensato di domandarne a te. Credi che il Volt[erra] possa facilmente parlare col M[inistr]o, e sia uomo da trovare il modo di parlargli personalmente? credi che la parola di Volt[erra] possa influire sul M[inistr]o?

Perché, se credi di no, è meglio scegliere un'altra via. Il L[evi]-C[ivita] ha un amico (il Tedeschi) che è consigliere ed intimo del M[inistr]o, e se questi acconsentisse ad occuparsi con calore della cosa, credo sarebbe più efficace.

Nota che mi han detto essere Coppola molto intimo del D[in]i; per conseguenza bisognerebbe assolutamente condurre la pratica *saltando la Divisione*, pel tramite del capo-gabinetto di S[ua] E[ccellenza].

In attesa dunque che si espletino dal L[evi]-C[ivita] i passi verso il Ted[esch]i, dimmi (pel caso d'insuccesso) che cosa pensi che possa valere per la pratica in questione l'intervento del Volt[erra].

Quanto ai nostri spazi 2-pli, ho visto anch'io per lo S_3 2-plo con F_4 *generale* di diramazione, che la var[ie]tà obiettiva del 4° ordine non contiene che intersezioni complete; ma per la V_3^3 la cosa non mi riesce così chiara. Ricorri forse allo spazio 3-plo?

Pensando un po' in generale alla costruzione dei piani multipli, ho visto bene come si ponga il problema. Ma è tanto complicato!

Però sarebbe utile avere risolto prima indipendentemente da Hurwitz il problema per la retta multipla. Qui la posizione del problema è meno netta. Eppure si può domandare data in S_{2p-2} una C_{2p-2} raz[ional]e normale, e su questa $2n + 2p - 2$ p[un]ti di dir[amazion]e, costruire le var[ie]tà ∞^{p-1} degli iperpiani secanti le serie can[onich]e delle curve n-ple rappresentate su C_{2p-2}.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. p. 512, let. 546 (10.1.1903).

552.

27 gennaio [1]903

Carissimo Guido,

Amaldi è dovuto andare l'altro giorno ad Este, per la morte di una sua Zia, ed è ritornato ieri sera passando per Padova, come ti dirò. Ho atteso il suo ritorno per rispondere alla tua lettera. Della quale, e delle gentili profferte A[mald]i ti è molto grato. Tuttavia, io non credo che il Bianchi s'indurrebbe a fare un passo verso il Batt[ell]i col quale non è in buona armonia per ragioni politiche. Nota che il Batt[elli]i è un avversario, e, dato l'ambiente di Pisa, si può dire un nemico del D[in]i, quindi Am[ald]i teme che la cosa possa prendere un'intonazione troppo acuta.

Amaldi passando da Padova ha parlato con Tedeschi, a cui L[evi]-C[ivita] lo ha presentato. T[edesch]i ha promesso di scrivere caldamente al M[inistr]o, ma dice che con Nasi[1] si ottiene molto più a voce che per iscritto. Quindi L[evi]-C[ivita] ha presentato Am[ald]i al sen. De Giovanni, e questi ha promesso di parlarne al M[inistr]o. Il De Giov[anni] si è pienamente convinto della giustezza della causa per quanto L[evi]-C[ivita] gli ha spiegato. Speriamo dunque che riesca!

Intanto a facilitare la riuscita si è mosso il rettore dell'Un[iversit]à di Cagliari, spintovi dalle sollecitazioni di un amico di Am[ald]i e, indirettamente, da quelle di Arzelà al Fais.

Come vedi l'affare è avviato; tutto sta a vedere come il M[inistr]o prende la cosa.

Abbiamo parlato in passato delle *condizioni di spezzamento* di una curva di gen[ere] p. Tu osservavi che il problema non è determinato. Ma mi sembra che lo divenga se ci si riferisce alla C_{2p-2} can[onic]a e si domanda che essa si spezzi in due curve di dati ord[in]i e gen[er]i.

Cercando così le condiz[ion]i perché si spezzi la C_p su una sup[erficie] di gen[ere] 1, tenuto conto che ogni parte di gen[ere] $\pi < p$ appartiene ad un ∞^{π}, si trova che *manca* una condizione, cioè non si arriva a nessuna conclusione.

Ma il curioso è che (a prima vista almeno) parrebbe si dovessero trovare curve spezzate su una sup[erficie] di bigenere 1. Se si trovano ∞^1 curve di gen[ere] 2, la classe di queste sup[erficie] viene determinata.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Nunzio Nasi era allora ministro dell'Istruzione Pubblica nel governo presieduto da Giuseppe Zanardelli.

553.

1 febbraio [1]903

Carissimo Guido,

il computo di costanti dal quale si dovrebbe desumere l'analisi della sup[erficie] di bigenere 1, sembra esigere che una curva di gen[ere] π appartenga sempre ad un sistema $\infty^{\pi-1}$ e non più ampio, anche per $\pi = 1$. Ora, appunto per $\pi = 1$, pare che la cosa non stia, e che ogni sup[erficie] di big[enere] 1 riferibile al p[ia]no 2-plo contenga un fascio di curve ellittiche. Questa circostanza domanda almeno una correzione del metodo e temo possa infirmare il resultato.

Avrai sentito parlare a Roma del progetto di conversione delle obbligazioni di quel Municipio, ma forse avendo pochi di quei titoli non te ne sarai preoccupato. Ad ogni modo ti riuscirà forse possibile di avere qualche informazione in proposito. Io non so capire come la conversione si voglia fare al tasso attuale delle obbligazioni, che, tenuto conto del cupone, superano di poco la pari. Ma dato che si progettasse una conversione forzosa a danno dei detentori del titolo, vorrei provvedere in tempo per la dote di Luisa.

Disgraziatamente è un momento brutto per investire capitali; le obbligazioni meridionali sono oggi sopra a 346, sicché la conversione delle Roma in questo titolo rappresenta per me una perdita di £ 160 all'anno o più.

Mi hanno parlato delle obbligazioni della società immobiliare di Roma; rendita al netto 4%, prezzo £ 245, nominale £ 250. Il frutto è buono; ma ci sarà la solidità del titolo?

Se hai qualche modo di procurarmi informazioni intorno a questi argomenti, domandandone p[er] es[empio] a tuo zio Luzzatti, o ad altri che tu creda adatto, mi farai un vero piacere, perché sono molto imbarazzato circa la decisione da prendere.

Il Ministero non ha ancora provveduto per la nostra Astronomia,[1] e il Raina sta ancora aspettando. Frattanto giungono voci di pettegolezzi: che il Venturi tenda a far riguardare come esaurito il nostro concorso. Mercoledì ci aduniamo e credo faremo un voto pro Raina. Se ti venisse nell'orecchio qualche notizia avvisamene. Ma io spero e credo che, dopo l'esplicito voto per il Raina fatto dal Consiglio Superiore il 13 Gennaio, il Ministro non devierà dalla soluzione più diritta.

Ti sono gratissimo dell'invito che mi fai di venire a Roma per il congresso storico.[2] Ora è un po' presto per parlarne, ma se Luisa andasse a Firenze in quell'epoca durante il parto di Nella chi sa che non mi risolva?

Grazie intanto dell'affettuosa proposta.

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. p. 510, P.S. a let. 543 (12.12.1902).

[2] Si tratta del Congresso Internazionale di Scienze storiche tenutosi a Roma dal 2 al 9 aprile 1903; per un resoconto cfr. «Boll. Bibl. St. Sci. Mat.», 6 (1903), 92-94. Gli atti furono pubblicati in quattro volumi dall'Accademia dei Lincei (Roma 1905).

554.

8 febbraio 1903

Carissimo Guido,

spiacemi il ritiro di Segre dalla nostra commissione; ma a quel che vedo dalla tua lettera anche il Bianchi non ne farebbe più parte, ed invece vi sarebbe il Cremona.[1] Come mai questi cambiamenti mentre c'è una questione giuridica, necessariamente sospensiva, davanti al Consiglio di Stato?

La nostra Fac[ol]tà ha fatto (Merc[oled]ì) voto unanime per la nomina del Raina, e a questo voto, trasmesso telegraficamente, il M[inistr]o risponde di interpellare il Raina se accetta. Questi poi mi scrive una cartolina annunziandomi di essere stato interpellato con telegramma ieri e di avere accettato.

Ho avuto informazioni un po' incerte circa le obbl[igazion]i immobiliari di Roma e tanto basta perché rinunzi a quell'idea. Prenderò dunque le obbl[igazion]i meridionali, che, pur rappresentando una diminuzione di rendita, offrono grande tranquillità e vantaggio per l'avvenire.

Cordiali saluti anche all'E[lbina].

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Il riferimento è alla commissione per l'assegnazione del Premio Reale. I commissari saranno in realtà: Luigi Bianchi, Valentino Cerruti, Ulisse Dini, Enrico D'Ovidio e Giuseppe Veronese.

555.

22 febbraio 1903

Carissimo Guido,

ciò che mi scrivi sulla V_3^3 è assai interessante, sebbene non ci veda quale profitto ritrarne. Anche applicando il tuo metodo ai sistemi lineari ad intersezioni ellittiche in S_3 (fra cui c'è, se esiste, quello rappr[esentativ]o di V_3^3) si arriva a qualcosa di analogo.

Per andare un po' più avanti sembra però che si debba tener conto di altri elementi. Alle V_3 appartengono due invarianti relativi: il genere $P^{(1)}$ delle sup[erficie] canoniche, e il loro genere lineare $p^{(1)}$. Ora questi due caratteri sono diversamente modificati dalla presenza nelle trasformazioni

di sup[erficie] *eccezionali di 1ª o 2ª specie*, nascenti da punti o da curve base del sistema trasformante.

Per il $P^{(1)}$ si può vedere la modificazione notando che il gen[ere] di una sup[erficie] spezzata vale

$$p + p' + \pi$$

p, p' = gen[er]i delle 2 sup[erficie], π gen[ere] dell'intersez[io]ne.

Segue da ciò che una sup[erficie] ecc[ezional]e di 1ª sp[eci]e nascente da un p[un]to semplice non ha influenza sul $P^{(1)}$; ma temo che se il p[un]to ad essa corrispondente è i-plo pel sistema trasf[ormant]e con $i > 1$, la sup[erficie] entri *due* volte nel sistema canonico, ed allora non so più come il $P^{(1)}$ venga alterato.

Le sup[erficie] ecc[ezional]i di 2ª sp[eci]e rispondenti ad una curva di gen[ere] π e ord[ine] i sembra diminuiscano il $P^{(1)}$ di $\pi + i - 1$.

Quanto al $p^{(1)}$ lo studio della sua variazione è un po' meno semplice.

Ad ogni modo se si sieno determinate le formule occorrenti si potrà avere una relazione fra i caratteri delle curve base del sist[em]a $|F|$ rappr[esentativ]o di V_3^3 e quelli del sistema omaloidico su V_3^3, cioè delle sup[erficie] che compongono l'unica aggiunta a $|2F|$. E purtroppo non si andrà molto avanti.

Domani mi recherò a Piacenza per assistere domani l'altro mattina alle nozze di Amaldi. Egli farà il suo viaggio, andando a Cagliari, e credo che ai primi di Marzo passerà per Roma e verrà a trovarti.

Saluti affettuosi, anche all'E[lbina], tuo

Ghigo

[P.S.] Mi viene il dubbio che combinando opportunamente per differenza $P^{(1)}$ e $p^{(1)}$ si arrivi ad un invariante *semi-assoluto*, cioè invariante per le trasf[ormazion]i che introducono soltanto sup[erficie] ecc[ezional]i di 2ª sp[ecie]. Allora si sarebbe a cavallo!

556.

13 Marzo 1903

Carissimo Guido,

la *gran notizia* mi ha fatto tanto piacere, quanto meno aspettata data la voce dell'incaglio della pratica al Ministero. È stata dunque una bella sorpresa; quantunque non si possa certo gridare «evviva», avremo almeno la soddisfazione di essere giudicati.[1] Il retto senso giuridico del Cons[iglio] di Stato pare abbia visto la soluzione della questione, nonostante la forma in cui gli fu presentata.

Quanto al Silberstein, posso dirti che uno dei suoi corsi di Fisica-matematica (assai seguiti) è stato frequentato da Amaldi, che me ne parlava molto bene specialmente per lo spirito fisico a cui quelle lezioni erano informate.

Io conosco personalmente l'uomo, e intellettualmente ne ho molta stima; è colto ed ha idee larghe. Sotto l'aspetto morale ho sentito anch'io fargli qualche appunto; pare che avesse qui qualche debito. Io non saprei se tale ragione sia sufficiente per negargli il trasferimento della libera docenza, visto in ispecie che non si tratta di dargli alcun posto ufficiale. Ma questo valuterete voi stessi.

Saluti affettuosi anche all'E[lbina]. Ghigo

[1] In un'adunanza del 23 gennaio 1903 il Consiglio di Stato si era espresso in merito al quesito posto dalla commissione per il Premio Reale: cfr. la *Relazione* citata a p. 473, nota 5 a let. 505 (s.d., 1901).

557.

23 marzo 1903

Carissimo Guido,

anche senza vedere il testo della decisione del Consiglio di Stato, mi pare che l'importante sia l'accettazione della tesi di massima da noi sostenuta. Ma non sono affatto tranquillo circa quel che sia per fare l'Accademia, trovandosi nell'imbarazzo che voleva evitare.

Gli studii di Severi sulle corrispondenze sopra le curve,[1] lo hanno condotto alla seg[uente] interpretazione dei resultati di Hurwitz:[2]

Sopra la sup[erficie] rappresentante le coppie ordinate di una curva, possedente 2 fasci unisecantisi C, C', tutti i sistemi di curve si ottengono *per somma* e *sottrazione* di curve C e C' da un numero finito di sistemi lineari.[3]

In sostanza si tratta di un caso particolare di un teorema che dovrebbe sussistere per tutte le sup[erficie] (e che inutilmente abbiamo provato a dimostrare), teorema che dice un po' meno di quello che noi tentammo dedurre dai resultati di Hilbert:

Sopra ogni sup[erficie] tutti i sistemi di curve si ottengono per *somma* e *sottrazione* dalle curve di un numero finito di sistemi continui.

Se non vi sono integrali, per somma e sottrazione di un numero finito di sistemi lineari.

Il lavoro di Sev[er]i sulle corrispondenze riuscirà assai interessante anche pel modo semplice come egli ricostruisce la teoria delle corrispondenze a valenza pos[itiv]a e neg[ativ]a, e per l'interpretazione funzionale del relativo principio di corrispondenza.

Cordiali saluti anche all'E[lbina] che spero di apprendere presto essersi alzata in buone condizioni.

Ghigo

[1] Severi 1903a, presentato il 25 gennaio 1903.
[2] Cfr. in particolare Hurwitz 1887.
[3] Cfr. Severi 1903b, 176.

558.

10 Aprile 1903

Carissimo Guido

Vorrei pregarti di un incarico un po' delicato presso Pittarelli.

Insieme ad Amaldi abbiamo fatto una riduzione dei nostri Elementi di Geometria per le Scuole Normali,[1] la cui prima parte pensiamo possa andare bene per gli ultimi due [anni] del Ginnasio (pei quali ne faremmo un estratto).

Ora Zanichelli è informato che fra pochi giorni dovranno uscire i nuovi programmi, e per ciò vorrebbe attendere a cominciare la pubblicazione, sebbene sia già tardi per uscire in tempo debito col libro.

Dicono che Pittarelli abbia avuto le mani in pasta in questi nuovi programmi, e ciò rende naturalmente delicata la sua posizione.

Bisognerebbe dunque dirgli anzitutto apertamente lo scopo della domanda, e dopo ciò, se credi, potresti rivolgergli le seg[uenti] domande di ordine generale:

1) Se egli può dire se nel programma di Geometria delle Scuole Normali sieno introdotte modificazioni radicali, o soltanto modificazioni nella distribuzione della materia fra i varii anni.

2) Se nel Ginnasio sup[eriore] sia conservato l'attuale programma di Geometria razionale.

Ove tu creda di poter fare queste domande a mio nome al Pittarelli, mi farai molto piacere, affinché io possa vincere i tentennamenti di Zan[ichell]i persuadendolo a cominciare subito la pubblicazione.

Scusa della noia, e rispondimi francamente se la mia domanda non ti pare opportuna.

Tante cose affettuose all'E[lbina], e tanti saluti cordiali a te,

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques-Amaldi 1903b.

559.

18 Aprile 1903

Carissimo Guido

Ieri è passato di qui Levi-Civita, ripartito stamani per Padova.

Egli mi ha portato, da Pisa, due notizie o, se vuoi, due indiscrezioni relative al premio R[eale].[1] La più brutta è che il Bianchi (e già prima Veronese) gli ha accennato alla difficoltà della nostra posizione di concorrenti associati: o non è dunque risolutiva la riposta del Consiglio di Stato? La migliore è che il B[ianchi] stesso si è lasciato sfuggire la questione scientifica essere tra noi e R[icc]i; P[asca]l lo stimano dunque, a quel che sembra, virtualmente eliminato.

L[evi]-C[ivita] mi ha detto poi che la Fac[ol]tà di Padova ha chiesto il concorso per la Geom[etri]a descrittiva,[2] ed ha soprasseduto sulla conferma di Favaro nell'incarico di G[eometria] pr[oietti]va, proponendo al F[avar]o la storia delle Matematiche. L'incarico della pr[oietti]va verrebbe dato poi al titolare di descr[ittiv]a.

Avremo dunque probabilmente in Ottobre un concorso importante, a cui prenderanno parte indubbiamente Bordiga, Ciani, De Franchis, Severi, questi ultimi due in condizioni buone sotto l'aspetto scientifico.

Ed avremo anche certo una fioritura di lavori di G[eometria] descr[ittiv]a, un periodo aureo per questa scienza come non vi fu mai in Italia!

Ultima notizia: per le elezioni al Cons[iglio] Sup[eriore] i padovani portano candidato il Veronese. Io ho aderito a questa candidatura ed ho promesso a L[evi]-C[ivita] di comunicartela. Gli altri candidati, per quanto so, sono Roiti e Camerano.

Affettuosi saluti, anche all'E[lbina], tuo

Ghigo

[1] La commissione per il Premio Reale, riunitasi il 5 aprile, prese in esame il parere del Consiglio di Stato e ritenne che in questo non era contemplato «il caso Castelnuovo-Enriques. Il Consiglio crede infatti [...] che si tratti di un lavoro fatto in comune, mentre tre sole delle pubblicazioni di Castelnuovo ed Enriques sono fatte effettivamente in comune, delle quali la principale è quella stampata nel 1901, nell'anno in cui scadde il concorso, e le altre, per essere state fatte dagli autori separatamente ed indipendentemente l'uno dall'altro, non si possono considerare come un lavoro fatto in comune» (p. 545 della *Relazione* citata a p. 473, nota 5 a let. 505, s. d. 1901). Cfr. anche p. 521, let. 556 (13.3.1903).

[2] Come si chiarirà dalle lettere di Enriques nell'arco di questo anno, tale concorso sembra essersi effettivamente tenuto ed essere stato poi annullato. Tuttavia sul «Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica» non abbiamo trovato pubblicato né il bando di concorso, né la relazione della commissione giudicatrice, né il decreto di annullamento. In effetti, in data 12 gennaio 1904 (scadenza 20 febbraio) sarà ribandito il concorso per professore straordinario di Geometria descrittiva e in data 10 maggio 1904 (scadenza 15 giugno) sarà bandito un concorso per professore straordinario di Geometria proiettiva presso l'Università di Padova (cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXXI, 1, n. 3, 121 e n. 20, 980). In seguito, in data 1 ottobre 1904, il ministro decreterà contestualmente la revoca e la riapertura di questi due concorsi, assegnando come nuova scadenza dei termini il 15 febbraio 1905 (cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXXI, 2, n. 41, 2066-68).

560.

26 Aprile 1903

Carissimo Guido,

dunque il concorso di Descr[ittiv]a a Padova si chiude il 15 di Giugno! pertanto temo mi si riservi nelle vacanze un bel divertimento di dover studiare i lavori dei concorrenti, e forse di andare a Roma, a mezzo Agosto.

Farei molto volentieri a meno di questa briga, specialmente per i miei rapporti amichevoli col Ciani, di cui, come sai, ho poca stima scientifica. Ma che cosa avverrà poi se tutti ci ritiriamo?

Questo concorso è importante per la cattedra e pel numero dei concorrenti.

Fra questi ve ne sono che mi sembrano scientificamente superiori agli altri: Severi e De Franchis. Ed al primo, che ha indubbiamente più *forza*, si potrebbe forse dare la vittoria. Naturalmente parlo così liberamente *con te*, poiché sarebbe imprudente far trapelare troppo presto ad altri ciò che pensiamo in proposito.

La difficoltà da superare è la questione della Descr[ittiv]a. Sev[er]i ha solo un piccolo lavoretto[1] (se potrà ne farà un altro), di nessun valore... come quelli degli altri concorrenti. A me pare che sarebbe il caso di approfittare dell'art[icolo] del reg[olamen]to, per cui è lecito alla commissione indire un esame *per tutti* i concorrenti.[2] Che cosa ne dici?

Se quest'idea ti persuade, potresti al caso suggerirla anche ad altri, affinché comunque sia composta la commissione, si trovi modo di opporsi alle vedute eccessivamente particolariste che non mancherà di portarvi il D[el] R[e].

Tanti saluti affettuosi anche all'E[lbina] e ai bimbi.

Ghigo

[1] Severi 1902.

[2] L'eventualità di una prova orale, alla quale si fa riferimento anche nei bandi di concorso, era prevista dall'articolo 34 del regolamento generale universitario emanato con Regio Decreto n. 465 il 22 ottobre 1903.

561.

5 Maggio 1903

Carissimo Guido,

non sono molto consolanti le notizie circa il nostro premio,[1] ma convengo con te che non vi sia nulla da fare. Fra un mese ne sapremo qualcosa!

Ho piacere che tu condivida i miei apprezzamenti intorno all'opportunità di portare il Sev[er]i come candidato alla cattedra di descr[ittiv]a. Io almeno potrò dargli il mio voto nel referendum che sarà indetto fra i prof[essor]i della materia; mi pare di doverlo fare coscienziosamente.

Quanto all'assoggettare i concorrenti ad un esame, il senso e lo scopo della mia proposta non era quello di subordinare i titoli scientifici ai didattici; ma di dar mezzo, a chi venga ritenuto privo di questi ultimi (per riguardo al carattere speciale della G[eometria] descr[ittiv]a), di dimostrare la sua capacità nell'insegnamento. Invero mi sembra evidente che le due condizioni, del valore scientifico e didattico, abbiano questo carattere diverso: la 1ª è un titolo positivo che giustifica di portare uno ad una cattedra; la 2ª è soltanto una condizione negativa, senza la quale la cattedra non può essere concessa, ma che, da sola, è affatto insufficiente per meritarla.

La memoria di Sev[er]i[2] è stata poi accolta a Torino, ma S[egre] raccomanda che *non si deve dire*, perché c'è il caso che essa (stampata ora in bozze) debba figurare come accettata a Novembre.

Intanto Sev[er]i lavora a rappresentare la rigata cubica e a dimostrare descrittivamente, come gli ho suggerito, la sua unilateralità.[3]

Saluti cordiali, all'E[lbina] ed a te, dal tuo

aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. p. 524, nota 1 a let. 559 (18.4.1903).

[2] Severi 1903b, presentato il 24 maggio 1903.

[3] Francesco Severi (1903c, 863, nota 1) riconosceva infatti che «l'idea di questo studio mi è stata suggerita dal Prof. F. Enriques che sento il dovere di ringraziare pubblicamente». Cfr. anche p. 392, let. 429 (s.d., 1898).

562.

14 Maggio 1903

Carissimo Guido

La posta mi ha portato il tuo bel regalo.[1] Da una scorsa data al volume lo veduto che contiene cose interessantissime, in particolare le memorie classiche sulla Geom[etri]a non euclidea.

Ora ho da comunicarti una proposta seducente di Picard.

Egli mi scrive che sta attendendo alla fine del t[omo] II del suo libro[2] sulle funz[ion]i di due variabili, nel quale si limiterà ormai ai suoi propri lavori e a cose, più o meno classiche, sulle funz[ion]i abeliane.

Ma alla fine del volume vorrebbe mettere qualche nota complementare e propone a noi di redigere noi stessi una o due note (da firmarsi da noi) «résumant l'état *actuel* de vos recherches sur les fonctions alg[ébriques] de deux variables ... L'ensemble pourrait faire une *quarantaine* de pages ... Je crois que cette addition, fournie par vous, augmenterait beaucoup la valeur de mon Traité ...

Dans vos notes ou votre note, vous pourriez viser les points de mon texte qu'elles complètent, quand il y aura lieu; et vous donneriez la bibliographie de vos mémoires les plus fondamentaux».

Come ti dicevo la proposta è seducente, e sarebbe peccato di non accettarla. Tuttavia il Pic[ard] non dice in quanto tempo il nostro lavoro dovrebbe essere compiuto (je deviens paresseux et je ne finis pas de rédiger la fin du t[ome] II ...); suppongo però che avremmo qualche mese a nostra disposizione.

Vorresti dunque fare con me la nota[3] richiesta? io domanderei in tal caso al Pic[ard] il tempo che ci concede.

E noi ci accorderemmo poi facilmente per la divisione del lavoro.

Ricordami affettuosamente all'E[lbina] e coi più cordiali saluti abbimi per

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Si tratta del primo volume di Beltrami 1902-20, «pubblicato per cura della R. Facoltà di Scienze». La Facoltà affidò a Castelnuovo, Luigi Cremona e Alberto Tonelli l'incarico dell'effettiva realizzazione dell'opera.

[2] Picard-Simart 1897-1906; cfr. p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).

[3] Enriques-Castelnuovo 1906b.

563.

Martedì [s.d.][1]

Carissimo Guido,

da qualche giorno, come saprai, sono a Torino (presso mio cognato Isaia Levi - Corso Vitt[orio] Emanuele 44). Qui ho veduto Segre, Fano e Peano; sono stato a far visita a D'Ovidio ma non era in casa, e (data la sua attuale condizione di nostro giudice)[2] non credo opportuno di ricercarlo di nuovo.

Con Segre ho parlato del premio Reale; per dir meglio egli mi ha domandato le ultime notizie, giacché pare ne sappia meno di noi.

Le commissioni si riuniranno Giovedì e Sabato l'Accademia prenderà la gran decisione, ponzata da un anno e mezzo; e, dice S[egre], «non mi meraviglierebbe che si prorogasse il conferimento del premio per *pensarci su* ancora»!

Io non vedo come una proroga possa risolvere la questione.

Prevedendo l'ipotesi che il premio possa esserci conferito, giova considerare anche la supposizione più rosea, io verrei volentieri a Roma per la seduta reale. Ma come potrò essere informato delle decisioni prese?

Poniamo pure che Giovedì sera o Venerdì mattina tu possa sapere le

conclusioni della commissione, potresti comunicarmele magari telegraficamente; ma ci sarà da fidarsi che l'Accad[emi]a accolga poi queste proposte? E quando si avrà la seduta plenaria dell'Acc[ademi]a?

Avrai forse saputo che a Parma è morto il Vecchi; così ci sarà un altro posto di G[eometria] Pr[oiettiv]a e Descr[ittiva].[3]

Anche a Cagliari, secondo quel che mi scrive Am[ald]i, la stessa cattedra è vacante e si farà un concorso.[4]

Una vera cuccagna pei geometri fuori di posto!

Fra questi non dovrebbe mancare un collocamento anche al De Franchis. Sarebbe perciò opportuno ch'egli facesse un lavoretto di G[eometria] Descr[ittiv]a.

Io avrei un tema adatto da proporgli:[5] studio del toro in proiez[ion]e di Monge, determinazione dei cerchi che gli appartengono (rappresentati sul p[ia]no, 2-plo, da certe ellissi tang[ent]i ai due cerchi del contorno apparente), confronto colla rappresentazione univoca della sup[erficie] sul piano.

Ma è tanto tempo che non sono in corrispondenza con lui, e non so se sia opportuno in questo momento un tal passo da parte mia. Se tu credi di poterlo fare, credo gli renderesti un servigio.

Tanti saluti affettuosi, anche all'E[lbina]. Ghigo

[1] La lettera dovrebbe essere del 2 giugno 1903.

[2] Enrico D'Ovidio faceva parte della commissione per l'assegnazione del Premio Reale.

[3] Stanislao Vecchi morì il 23 maggio 1903. Con decreto approvato il 5 marzo 1904 sarà aperto il concorso per professore ordinario alla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva dell'Università di Parma, con scadenza 20 luglio (cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXXI, 1, n. 11, 531-32).

[4] Filippo Vivanet sarà confermato per l'anno accademico 1903-04 come professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva dell'Università di Cagliari.

[5] Cfr. De Franchis 1904a.

564.

7 giugno [1]903

Carissimo Guido

Sono arrivato un po' stanco dal viaggio e così ho aspettato a stasera a scriverti. Imposterò domani ciò che mi permetterà forse di aggiungerti qualche notizia, poiché spero domani mattina di parlare con Emery.

Sono rimasto assai scontento della deliberazione che mi comunichi.[1] Ritengo che l'Accad[emia] accettando il parere del Consiglio di Stato, e pur negando l'unità scientifica dell'opera nostra, non aveva assolutamente il diritto di metter fuori le nostre memorie comuni, ma doveva interpellarci se volevamo esser giudicati anche mettendo fuori le altre. Se noi ricor-

ressimo al Consiglio di Stato credo si potrebbe far annullare facilmente questa parte della decisione, ma naturalmente non ci conviene farlo e di ciò i sig[nor]i lincei hanno abusato.

La fiche de consolation contenuta nella tua lettera mi affida poco. Vorrei ingannarmi, ma temo che questi vaghi discorsi sieno fatti per persuaderci a digerire tranquillamente la pillola. E, prevedendo la difficoltà del nostro stomaco, ci lasciano un anno per questo... prima di darcene una seconda!

La commissione trovandosi questa volta di fronte a Ricci e a Pascal, soli, non avrà il coraggio di metterli fuori tutti e due, specie per riguardo al primo. D'altra parte diranno che è troppo dare l'intero premio al R[icc]i, mentre non fu mai dato intero a nessuno. Quindi il partito che vedo sull'orizzonte è la divisione del premio fra R[icc]i e P[asca]l.

I sostenitori di quest'ultimo non debbono essere stati estranei alla soluzione adottata!

Posso ingannarmi, ma da chi e in quali termini precisamente hai ricevuto le informazioni che mi comunichi?

Intanto, come ti dicevo, spero di avere altri particolari da Emery sulla discussione avvenuta ieri nella seduta plenaria dell'Accademia.

8 giugno [1]903

Ho veduto ora Emery. Egli mi ha detto che la questione della unità scientifica dell'opera nostra era posta in termini tali che a lui pure parve dover accogliere il parere della commissione, giacché anche dalla difesa di Segre non risultò esservi stato fra noi un accordo prestabilito fin dal principio delle nostre ricerche.

Comunque Emery avrebbe voluto che noi fossimo interpellati circa i lavori comuni, se accettare o no il giudizio su questi soli. Ma altri a noi favorevoli (p[er] es[empio] Pincherle) dissero che non era opportuno comunicare coi concorrenti, e Veronese opinò di pregiudicarci meno in questa maniera.

Emery poi mi ha aggiunto: «Quel che mi è dispiaciuto è il colore che ha preso la discussione, nei discorsi dopo la seduta. Colore di antisemitismo. Io stesso, per le ragioni accennatele, avevo creduto di seguire il parere della commissione, ma mi dolsi di vedere altri avere dato questo voto quasi con un senso di risentimento, come se le questioni di scienza non fossero al di sopra delle questioni di nazionalità e di religione».

L'intervento di Segre e di Volterra in nostro favore, e più ancora il fatto

che i premi furono conferiti quasi sempre a semiti deve aver determinato questa corrente.

Riguardo al merito Emery, mi ha detto che il relatore Veronese, ha fatto elogi dei nostri lavori, ma non si è lasciato trascinare da Segre a confronti cogli altri concorrenti, intorno ai quali la commissione ha serbato il più grande mutismo.

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] La commissione per l'assegnazione del Premio Reale presentò la sua relazione nell'adunanza dell'Accademia dei Lincei del 6 giugno, deliberando che le pubblicazioni di Castelnuovo ed Enriques non potevano essere riguardate come «un'opera unica fatta in comune», che «per la domanda stessa dei due autori» non si potevano giudicare i loro lavori separatamente «considerandoli come due concorrenti distinti» e che il giudizio sugli altri concorrenti fosse rinviato all'anno successivo (p. 547 della *Relazione* citata a p. 473, nota 5 a let. 505, s.d. 1901). Il Premio Reale non fu conferito e fu prorogato al 1905 quando sarà vinto *ex aequo* da Castelnuovo e Cesare Arzelà. Enriques (*ex aequo* con Tullio Levi-Civita) vincerà il premio nel 1907.

565.

[s.d.]

Ti trasmetto questa lettera di Segre che ha voluto fare un estremo tentativo per noi, forse inutile, ma prova della sua bontà ed elevatezza.

Saluti affettuosi

Ghigo

Torino 10 giugno [19]03

Carissimo Enriques,

Avrai saputo da Guido la «dolorosa istoria». Né occorre che io ne faccia commenti!

Appena tornato qui da Roma, ho scritto una lettera al Presid[ent]e dell'Acc[adem]ia dei Lincei. Ne ho fatto fare una copia, che qui accludo. Leggila; e poi spediscila subito a Guido (Aquila, fermo in posta: per questa settimana!). Digli che me la rinvii poi, perché forse la comunicherò anche ad altri. Se credi, puoi risparmiar tempo trasmettendogli senz'altro questa mia letterina.

Come vedrete, nella lettera al Presidente io tento ancora una soluzione,

quasi *vostro malgrado*: che si prenda in esame il vostro comune lavoro[1] degli Annali 1901. Il tentativo essendo *mio*, non impegna *voi*! Voi rimanete liberi di agire in qualunque altro modo che vi paresse più opportuno. Riflettete, ed informatemi poi della vostra decisione. Forse potrete aspettare tanto da sapere quale risposta sarà data alla mia lettera, per regolarvi poi in base ad essa.

Sono lieto che il libretto del mio corso[2] ti sia piaciuto. Ebbi molto piacere dalla tua cara visita; e spero che mi procurerai spesso questo piacere! Tanti affettuosi saluti a te, e ossequî alla gentile Signora

Tuo aff.mo
C[orrado] S[egre]

Carissimo

Ricevo in questo momento la tua. Ti dirigo perciò la presente a Roma, affinché non vada perduta.

Dati gli umori di cui mi scrivi potrebbe essere che il passo di Segre sortisse qualche effetto. Aspettiamo ad ogni modo a sentire che cosa gli verrà risposto.

Saluti affettuosi Ghigo

[P.S.] Non ho ancora veduto nessuno.

[1] Enriques-Castelnuovo 1901.

[2] *Lezioni di Geometria non euclidea* tenute per il corso di Geometria superiore nel 1902-03: cfr. Terracini, *I quaderni di Corrado Segre* cit., 257.

566.

13 Giugno 1903

Carissimo Guido,

questi prof[essor]i fiorentini sono introvabili, ed io li ho cercati inutilmente al caffè ove sogliono passare la serata. Mi sono deciso finalmente ad andare a casa da Tocco; il solo con cui abbia relazioni un po' più strette. Col Villari avrei parlato volentieri, ma per andare da lui bisognava chiedergli qualcosa di determinato, e questo non abbiamo ancora deciso di fare; ed a me pare poco conveniente, in ogni caso, decidere prima di sapere quale esito sortirà il tentativo del Segre. Giacché mi sembra assai pericoloso che noi insistiamo e forziamo la commissione a giudicarci sui nostri lavori comuni; irritata dalla nostra opposizione al voto dell'Accademia, essa dirà

che i suddetti lavori comuni, staccati dal resto e prescindendo dalla parte riassuntiva della nostra memoria, non valgono il premio! E noi resteremo peggio.

Così almeno siamo noi i creditori.

Tocco mi ha accolto colle parole «per uno scrupolo giuridico è stata fatta contro di voi un'ingiustizia».

Mi ha rinarrato la storia; e mi ha detto che tutti i membri della commissione da lui appositamente interpellati gli hanno confermato la nostra superiorità, onde egli appunto li ha rimproverati per avere posposto una questione di sostanza ad uno scrupolo di forma.

Mi ha detto poi che il Villari non ha capito nulla della questione.

Ma è inutile illudersi, la commissione o meglio Veronese, non ha *voluto* darci il premio; ed essi resteranno sempre i padroni se noi forziamo oggi le cose.

Invece se ci rassegnamo, la reazione che si manifesta a nostro favore finirà per trionfare. Già anche Tocco mi ha detto che nessuno probabilmente sarà premiato (e Fano mi ha ripetuto ciò come una cosa ben nota).

Io credo dunque che, se non ci viene offerto il destro da altri per effetto del tentativo di Segre, a noi conviene non far nulla.

Frattanto io ho scritto a Levi-Civita affinché parli con Veronese, allo scopo principalmente di protestare contro l'ingiurioso movente attribuito alla nostra coalizione; gli ho narrato perciò come essa ebbe origine *prima* di sapere che R[icc]i e P[asca]l avrebbero concorso (e lui lo sa); per un sentimento tuo di modestia che non volesti aspirare ad un premio intero mentre fu sempre diviso, e per tua generosità a mio riguardo, dati gli stretti vincoli esistenti fin da principio nell'opera nostra. L'opposto dei sentimenti speculatori che alcuni ci hanno attribuito!

E lo stesso, alla prima occasione, scriverò a Bertini, perché ripeta al Bianchi e al Dini.

Ho avuto invito dal M[inister]o di andare in ispezione a Perugia, ma a causa degli esami non potrei andarci prima del 22, perciò probabilmente mi surrogheranno con altri.

Saluti cordiali

tuo
Ghigo

567.

20 giugno [1]903

Carissimo Guido,

ho scritto a Levi-Civita, come ti dissi. Egli ha parlato con Veronese, secondo il mio desiderio. V[eronese] dichiara che nessuno, per quanto si sa, e lui stesso meno che mai, ha attribuito alla nostra associazione uno

scopo di speculazione; che anzi tutti compresero la cosa stante i nostri rapporti. V[eronese] dice aver dovuto insistere, a malincuore (?), nella questione formale, per non creare precedenti pericolosi, e ripete il ragionamento, che ben sai, da cui discende come conclusione il resultato parimenti noto.

Intanto anche qui mi è stato riportato, come impressione, che V[eronese] sia riuscito ad escluderci, con compiacimento.

I miei progetti sono di andare a Varallo-Sesia ai primi di Luglio. Di là potrò fare, nell'Agosto, una gita a Alagna o a Macugnaga di una quindicina di giorni.

Dovresti venirmi a trovare, e si andrebbe insieme.

Staremmo un po' in compagnia, giacché non ci vedremo in Autunno; ben inteso, in riposo, salvo a concretare, tutt'al più, la relazione per Picard,[1] che non ci costerà troppa fatica.

Che cosa fate per la successione del povero Cr[emona]?[2]

Chiamate il Bi[anchi], oppure ti assumerai tu stesso l'incarico? Tienmi informato, ché la cosa m'interessa assai.

Tanti saluti cordiali anche all'E[lbina] tuo

Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1906b; cfr. p. 526, let. 562 (14.5.1903).
[2] Luigi Cremona morì a Roma il 10 giugno 1903.

568.

28 giugno [1]903

Carissimo Guido,

la lettera di Blaserna[1] mi fa l'impressione che egli sia sfavorevolissimo *a noi*, non dico soltanto alla questione giuridica.

Il nostro Segre è veramente ammirabile, ma combatte una battaglia perduta!

Ho scritto a Niccoletti pregandolo di dire al Bianchi, ciò che per mezzo di L[evi]-C[ivita] ho fatto dire al Ver[onese].

Identica risposta. Del resto, a mio avviso, il B[ianch]i e il D'O[vidio] non possono in alcun modo essere sospettati di malevolenza verso di noi.

D'altronde mi risulterebbe che il D[in]i e il C[errut]i non se ne sono molto occupati, almeno all'ultimo. Il vero autore dell'ostracismo inflittoci, l'inventore della procedura adottata contro di noi, sarebbe dunque il Ver[onese]!

E qui non posso tacerti il dubbio di essere stato io la causa, certo involontaria. Pare che Ver[onese] se la sia presa per la pubblicazione dei miei Elementi di Geom[etria].[2] Bene spese le parole di alta deferenza spese nella prefazione verso di lui, da cui non ho tolto nulla!

Al Conti, che nel Boll[ettin]o per le Sc[uol]e Norm[al]i, ha pubblicato una recensione favorevole di Vannini[3] (in cui V[eronese] non è pur nominato), Ver[onese] ha scritto una lettera addirittura insolente; ed ora è uscita nel Boll[ettin]o di Loria la recensione di Palatini[4] al mio libro, da cui si desume che per farne uno studio profondo, bisogna parlare del Veronese!

Forse il mio sospetto è ingiusto, ma in *stretta confidenza* non ho potuto non accennarvi con te. Spero che qualche indizio mi permetta al più presto di smentirlo.

Sono molto lieto di apprendere dalla tua lettera l'intenzione di venire da noi a Varallo.

Vieni e trattieniti liberamente quanto ti fa piacere, come in casa tua, sicuro di non recarci alcun disturbo, giacché la casa è larga. E poi faremo, se vorrai, una gita in montagna.

Sai che a Varallo si fa la cura idroterapica; se ti fa piacere di profittarne sarà una buona ragione per trattenerti più lungamente con noi.

Saluti affettuosi

Ghigo

[P.S.] Dal 1° Luglio a Varallo-Sesia Via Scarognini 6.

[1] Pietro Blaserna, a quest'epoca vicepresidente dell'Accademia dei Lincei.
[2] Enriques-Amaldi 1903a.
[3] Vannini 1902.
[4] Palatini 1903.

569.

5 luglio [1]903

Carissimo Guido,

sono lieto delle migliori notizie che mi comunichi, e, come già sai, sarò sempre contento di ritirarmi, ove sia il caso, dal concorso; infatti assai mi dispiace che, per causa mia, tu resti sacrificato.

Se, prima di partire, puoi rivedere Grassi o Volterra (meglio il primo) credo che una cosa sarebbe da dirsi: ove sieno dichiarati non meritevoli del premio R[icci] e P[asca]l, il giudizio sui nostri lavori resta ad una commissione in cui per ragione di affinità di materia avrà sempre parte preminente il Ver[ones]e.

Ora noi abbiamo ragione di ritenere che egli ci sia ostile; io segnatamente, pel motivo che ti ho accennato, e mi rincalza in questa idea la recensione dei miei Elementi, ipocrita e tendenziosa, fatta dal Palatini[1] nel boll[ettin]o di Loria, ed evidentemente ispirata dal Ver[ones]e (leggila!). Noi non possiamo dir questo, ma almeno si può accennare ad un amico il dubbio che Ver[onese] abbia ragioni di non benevolenza verso di noi, e la presidenza dell'Acc[ademia] avrà ben potuto constatarne gli effetti. Sarebbe dunque giusto di allargare la commissione comprendendovi altri geometri, anche Bertini se fosse possibile.

Oggi p[er] es[empio] si è fatto credere che il nostro lavoro comune[2] consti specialmente di un sunto; e si dice «che cosa ne resterà se si considerano i lavori precedenti *come fatti da altri*?»

Ma ciò non è giusto. Astrarre dai lavori singoli vuol dire giudicare il nostro lavoro comune *come se non esistessero*[3] *i lavori non utilizzati nelle premesse*. Ed allora il nostro teorema generale (da cui essi si traggono nuovamente) non può essere giudicato indegno del premio da chi accordi che ne sia degna l'opera nostra.

Tutto ciò un altro geometra posto nella commissione potrebbe ben dirlo, e riuscirebbe a muovere forse gli altri commissari (p[er] e[sempio] Bianchi) fuori di V[eronese], ai quali si è fatto credere che dare il premio al nostro lavoro comune sia un espediente non leale, quando si scartino le precedenti memorie.

Ho saputo da Niccoletti un particolare commovente. Il Cremona due giorni prima di morire ha scritto al Dini esortando la commissione a non rifugiarsi dietro questioni di forma, e ad ispirare il suo giudizio a ragioni di merito.

Tanti saluti in fretta, perché tengo ad impostare subito questa affinché ti giunga prima della partenza.

Cordialmente tuo Ghigo

[1] Palatini 1903.
[2] Enriques-Castelnuovo 1901.
[3] Nell'originale «se non esistessero» è sottolineato due volte.

570.

21 luglio 1903

Carissimo Guido,

ricevo da Levi-Civita il testo della relazione di Veronese, dalla quale appare come il parere del Cons[iglio] di stato fosse a noi favorevolissimo. Ma la commissione non l'ha voluto intendere! Non manca poi l'insi-

nuazione che il nostro lavoro comune del 1901, è dell'anno stesso del concorso![1]

Come ti trovi a Marina?

E quando hai intenzione di venir qui? Sarà per i primissimi d'Agosto, m'immagino.

Dovresti portare con te il Baedecker (Svizzera) ch'io ho dimenticato. Credo si possa andare di qua nella valle di Macugnaga, con gita non troppo lunga, per il colle di Baranca, facendoci condurre dalla diligenza a Fobello.

Il tempo è stato pessimo fino ad ora; ma oggi pare cambiato in buono.

Affettuosi saluti

Ghigo

[P.S.] Vuoi leggere la relazione di Ver[onese]? Ho chiesto a L[evi]-C[ivita] il permesso di mandartela.

[...][2]

[1] In Enriques-Castelnuovo 1901 la data riportata è «autunno 1900»; cfr. p. 524, nota 1 a let. 559 (18.4.1903).

[2] Seguono nell'originale tredici righe di saluto da parte di Luisa.

571.

24 ottobre 1903

De Boek's Family Hotel - Brussels[1]

Carissimo Guido

La notizia della riuscita di Sev[er]i[2] contenuta nella tua lettera mi ha recato un gran piacere, tanto più vivo quanto più inaspettato.

Il viaggio attraverso la Germania mi ha interessato moltissimo: splendida Monaco per le costruzioni moderne stile rinascimento; magnifiche le rive del Reno che ho contemplato in battello, da Coblenza a Colonia ecc. A Gottinga ho avuto un'accoglienza cordialissima: quattro pranzi (o cene) in tre giorni! Klein e le sue Signore[3] sono stati cordialissimi, e Klein mi ha commosso con un brindisi in forma poetica, detto in francese, nel quale ha ricercato tutti i punti di contatto fra lui e me, fra Luisa e la sua Signora. Quanto alla conversazione di Klein sai già quanto era interessante; oltre che delle questioni sui principii abbiamo discorso molto di questioni didattiche e da lui solo in poche ore ho imparato tante cose interessanti, di cui non avevo mai avuto notizia, sullo sviluppo dell'istruzione matematica in Inghilterra e in Germania.

Le conversazioni più particolarmente matematiche sono state quelle con Hilbert. H[ilbert] ignorava completamente le nostre cose ed ha cominciato col dirmi che la Geom[etria] algebrica non lo interessava punto; ma si è completamente ricreduto ed ha preso nota di molte delle questioni più importanti per noi insolute, ha capito e apprezzato pienamente lo spirito e la determinatezza delle nostre ricerche.

Ricordami all'E[lbina] ed abbiti i più affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] Lettera su carta intestata dell'albergo.

[2] Enriques si riferisce all'esito del concorso di Geometria descrittiva di Padova: cfr. p. 524, nota 2 a let. 559 (18.4.1903).

[3] Così nell'originale.

572.

4 Nov[embre] 1903
De Boek's Family Hotel - Brussels[1]

Carissimo Guido

Apprendo da Levi-Civita alcuni particolari interessanti sul concorso di Padova. Pare che Ver[one]se abbia sostenuto dapprima la tesi che per una cattedra di G[eometria] descr[ittiv]a conveniva dare più importanza ai titoli didattici che scientifici, ma accortosi che questa tesi sarebbe andata a beneficio di C[ian]i invece che di B[ordig]a ha mutato parere; quindi V[eronese], Mart[inett]i e Asch[ier]i (questi ultimi due già animati da criterii scientifici) han dato il loro voto a Sev[er]i; Pitt[arell]i e Mont[esan]o a C[ian]i.[2]

L[evi]-C[ivita] mi dice che la Fac[oltà] di Padova sarebbe lieta di avere Sev[er]i, ma non vorrebbe ad ogni modo perdere il B[ordig]a. Dice che potrebbero forse offrire a Se[ver]i l'inc[aric]o della Pr[oiettiv]a e fare subito il relativo concorso. Io gli ho risposto che in tali condizioni Sev[er]i potrebbe sentirsi legato verso Pisa, e accettando si potrebbe trovar fuori da tutte le parti qualora non riuscisse nel concorso di Pr[oiettiv]a. Piuttosto si dia ora a Sev[er]i la cattedra di Descr[ittiv]a e lo si faccia passare poi alla Pr[oiettiv]a mediante concorso, ciò che è probabile egli gradisca.

Ma non capisco questa ostinazione a voler mandare innanzi il B[ordig]a a tutti i costi!

Il nuovo ministro dell'Istruzione[3] è un'incognita, ma forse non sarà impossibile di arrivare a fargli capire che il Cons[iglio] Sup[eriore] ha preso una cantonata, e questa mi pare la via più diritta, anche per dare una lezione ai consiglieri che vogliono imporre le loro vedute meschine.

Io parto di qua domani l'altro. Ormai, se non mi hai scritto, dirigi a Firenze; che cosa si dice a Roma di questo annullamento?

Sev[er]i mi ha scritto una cartolina; è assai dispiacente, ma ti è molto grato della tua lettera. Spero di vederlo a Firenze fra qualche giorno.

Affettuosi saluti anche all'E[lbina]

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Lettera su carta intestata dell'albergo.

[2] La commissione del concorso di Geometria descrittiva (cfr. p. 524, nota 2 a let. 559, 18.4.1903) sembra dunque essere stata composta da: Ferdinando Aschieri, Vittorio Martinetti, Domenico Montesano, Giulio Pittarelli e Giuseppe Veronese.

[3] A seguito della crisi di governo, Nunzio Nasi si dimise da ministro il 29 ottobre 1903 e Vittorio Emanuele Orlando gli subentrò il 3 novembre 1903 nel successivo governo presieduto da Giovanni Giolitti.

573.

19 Nov[embre] 1903

Carissimo Guido,

un po' occupato nei primi giorni del mio ritorno a Bologna, non ho trovato ancora il tempo di rispondere alla tua.

Mi ha interessato e mi è piaciuto il programma del tuo corso[1] (salvo, dal punto di vista subiettivo, la poca simpatia per le formule di Pluecker per le superficie); ottima l'idea di considerare in quel modo la Geom[etria] differenziale!

Date le condizioni della questione Sev[er]i, la risposta che hai avuto dal M[inister]o non è tanto cattiva; almeno l'affare non sarà sepolto, e, nella peggiore ipotesi, si avrà un nuovo concorso. Sarebbe bene che per giudicarlo si costituisse una commissione, magari di 7 o di 9 membri, comprendente tutti i geometri, onde ne uscisse un'autorevole risoluzione della questione di principio.

Ricevo ora la tua cartolina. È giusto quanto mi scrivi rispetto alla pg. 382 dell'Appendice della mia G[eometria] p[roiettiv]a;[2] quantunque ivi non sia affermato come evidente che le tangenti coniugate sono coniugate per una trasf[ormata] conforme di S_3, la forma lo lascia credere, ed io lo credevo quando scrissi quelle linee. Poi me ne accorsi e cambiai la dicitura nell'edizione tedesca;[3] è stato per una svista che il più antico manoscritto fu mandato in stamperia in luogo dell'ultimo.

Ho saputo che le tue lezioni di Geom[etria] analitica[4] hanno incontrato tutta l'approvazione del Bianchi, il quale ha avuto luogo di addurle come argomento a prova dell'attitudine didattica di coloro che coltivano i più alti problemi della scienza.

Affettuosi saluti

tuo
Ghigo

[P.S.] Il M[inistr]o Nasi prima di lasciare il ministero mi ha conferito l'incarico di Mat[ematich]e per chimici colla retribuzione di £ 800. A me pare che questo sia ingiusto e indecoroso, e se non mi prometteranno una retribuzione uguale a quella degli altri incarichi affidati a prof[essor]i sono disposto a rinunziare. Che cosa te ne pare? Si deve lasciar stabilire un principio che verrebbe a diminuire sempre più la tariffa consueta dell'inc[aric]o? Chi fa quel corso a Roma? e sai quanto viene retribuito?

[...][5]

[1] Si tratta del corso di Geometria superiore, la cui cattedra si era resa vacante con la morte di Luigi Cremona: cfr. p. 533, let. 567 (20.6.1903).

[2] Enriques 1898f, la cui seconda edizione è del 1904.

[3] Enriques 1903b.

[4] Castelnuovo 1902.

[5] Seguono nell'originale cinque righe di saluto a Elbina da parte di Luisa.

574.

25 Dec[embre] 1903

Carissimo Guido,

ho parlato delle tue vedute circa le prossime elezioni del Cons[iglio] Sup[eriore] con Amaldi, e con Levi-Civ[it]a; ambedue sono disposti a votare pel Volt[erra] ove sia posta la sua candidatura.

Ciò che mi dici circa le probabilità in favore di Sev[er]i non mi riesce nuovo; a Padova mi hanno raccontato che la Divisione appoggia tanto la nomina, da aver già presentato al M[inistr]o il decreto da firmare; questi però ha preso tempo a riflettere. Ieri sera poi ho visto qui il Nasini, reduce da Roma, il quale mi ha riferito che il M[inistr]o è molto propenso a nominare il Sev[er]i ma non si sa decidere ad andare contro il Cons[iglio] Sup[eriore]. Giova sperare che si faccia coraggio.

Intanto però, a quel che capisco di quanto non si dice, Ver[onese] prima e Nas[in]i poi, parlando col M[inistr]o non avranno probabilmente facilitato la decisione che noi desideriamo. Ma il M[inistr]o non può non essere stato impressionato dalla richiesta stessa di Padova di dare un incarico al Sev[er]i.

Tanti saluti cordiali a te e all'E[lbina].

tuo aff.mo
Ghigo

575.

28 Dec[embre] 1903

Carissimo Guido

Ricambio anzitutto affettuosamente gli auguri migliori per te, per l'Elbina e per i vostri cari bimbi, in occasione dell'anno che sta per incominciare.

Sono pienamente d'accordo con te quanto al premio reale, che a noi non convenga di muoverci. Se il Cons[iglio] d'Amministrazione pensa che ci sia stata fatta un'ingiustizia, non potendo ritornare sulle decisioni prese, proponga che la somma ci venga assegnata come premio straordinario ((ciò fu fatto in parte pel De Paolis));[1] questa proposta sarebbe giustificata se la commissione dichiarasse non assegnabile il premio agli altri, e nello stesso tempo dicesse che lo avrebbe conferito a noi ove non ci fosse stata la questione giuridica. In questo modo e solo in questo modo potremmo uscirne bene tutti, poiché l'Accad[emia] mostrerebbe così di essere coerente con sé stessa e di volerci dimostrare come soltanto un timore giuridico la trattenne dal premiarci.[2]

Ho visto pochi minuti Ver[onese] a Padova; è stato gentile con me, come L[evi]-C[ivita] mi aveva predetto; pare infatti ch'egli abbia capito di essersi portato male a mio riguardo e di non aver fatto buona figura lasciando trapelare la sua stizza per il mio libro.[3]

Con tutto ciò io ritengo che Ver[onese] sia sempre per noi l'elemento ostile della commissione, molto più che ora l'avrà anche con te per l'incarico della Geom[etria] Sup[eriore].[4]

La mia conferenza di Padova è stata fatta a viva voce; non l'ho scritta, né ho idea di pubblicarla poiché ciò mi porterebbe via troppo tempo. Ho piacere che ti sia parsa non priva affatto d'interesse.

L'indirizzo di Rignano è: Foro Bonaparte 52 - Milano; quello di Della Torre: Via S. Giuseppe, Banca Pisa.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Riccardo De Paolis ottenne il Premio Reale con lo scritto *Fondamenti di una teoria puramente geometrica delle linee e delle superficie*, che fu in parte pubblicato in De Paolis 1890 e 1892. Cfr. la *Relazione sul concorso al Premio Reale per la Matematica per l'anno 1887* (relatore Eugenio Beltrami), «Rend. Acc. Lincei», (4), 5 (2° sem.), 1889, 300-08.

[2] Cfr. in particolare p. 530, nota 1 a let. 564 (7.6.1903).

[3] Enriques-Amaldi 1903a; cfr. p. 533, let. 568 (28.6.1903) e p. 534, let. 569 (5.7.1903).

[4] Cfr. p. 539, nota 1 a let. 573 (19.11.1903).

576.

10 gennaio 1904

Carissimo Guido,

dinnanzi al fatto compiuto[1] sono inutili le recriminazioni! Ben hai ragione piuttosto che è il caso di muoversi onde assicurare il trionfo della giustizia.

Per parte mia non rifiuterò certo di fare quanto sta in me ove mi si voglia chiamare nella commissione, ad un posto che sarà probabilmente di battaglia.

Nessun dubbio circa la convenienza di dare il voto al Bert[in]i; gli altri due voti io sono disposto a darli al S[egre] e a te, se non si ritiene più opportuno di votare per prof[essor]i della materia; in quest'ultimo caso a Mart[inett]i e ad Asch[ier]i (che si è portato bene, come sai) o Pitt[arell]i; lascerei da parte Lor[i]a e P[ier]i dei cui umori poco sappiamo. Quanto alla questione dirò così di massima, se comporre una commissione di prof[essor]i di Descr[ittiv]a o no, non mi nascondo il pro e il contro. Sta in favore della tesi, la maggiore plausibilità dell'esclusione di Ver[onese], la più facile riuscita, e il compito speciale segnato alla commissione di risolvere una questione di principio circa i titoli per una cattedra di Descr[ittiv]a; ma contro a ciò vi è la conseguenza di una minore autorevolezza scientifica nei membri della commissione.

Insomma scrivi a Bert[in]i e a S[egre], che alla loro volta potranno acquistare aderenti a Pavia, a Messina e in altre Un[iversit]à; io mi rimetterò a ciò che avrete deciso per il meglio. E scriverò a suo tempo all'Am[ald]i a Cagliari.

Quando poi le elezioni saranno compiute sarà bene che tu cerchi di esserne informato, per tentare, occorrendo, di portare a 7 o anche a 9 il numero dei membri della commissione.

Il Klein mi fa premura perché metta a posto (secondo il fissato) l'art[icolo][2] per l'Enciclopedia sui «Principii». Ma ciò mi è quasi impossibile qui per mancanza di libri. Perciò sto accarezzando l'idea di una gita a Roma per Carnevale, che mi procurerebbe, insieme al modo più facile di raggiungere lo scopo, il piacere di rivedervi.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Enriques allude alle vicende concorsuali di Francesco Severi e in particolare all'annullamento del concorso di Geometria descrittiva di Padova: cfr. p. 524, nota 2 a let. 559 (18.4.1903) e le ultime lettere del 1903.

[2] Enriques 1907d.

577.

Lunedì 16 febbraio 1904

Carissimi Elbina e Guido,

da ieri ho finito la mia vita nomade, ed oggi soltanto sono un po' riposato del viaggio. Il mio pensiero torna a voi e all'accoglienza affettuosa che mi avete fatto nei giorni scorsi.

Mi è dispiaciuto di avervi trovato sul principio non perfettamente tranquilli, e temo anzi di avervi dato un po' noia in quelle circostanze; fortunatamente le cose non sono andate al di là dell'inquietudine di un momento. Il vostro bel piccino[1] del resto, col suo viso paffuto color di rosa, colla sua espressione gioconda e tranquilla, sembra avere avuto più spirito dei medici, non dando mai ascolto ai loro dubbii. Dategli un bacione per me insieme a Mario e a Maria, che ho trovato molto buoni ed affettuosi. La loro spontanea generosità mi ha commosso; sono stati proprio carini colle mie bimbe, e ad Alma li ho citati ad esempio. I loro regali sono stati molto apprezzati, ed in particolare Alma non si stanca di guardare e riguardare il bel libro.

A Pisa ho visto il Bert[ini], il B[ianch]i, il Sev[er]i. Ho saputo che giorni sono è passato di là il Ver[ones]e, a quel che sembra, collo scopo di saggiare il Bert[ini] riguardo al concorso di Pad[ov]a.[2] Gli intrighi probabilmente non sono finiti; si cercherà forse di far nominare la commissione dal M[inistr]o, o di rimandare in lungo la cosa; ciò che riuscirà facile date le condizioni del bilancio.

Il B[ianch]i mi ha parlato del premio reale,[3] questione che egli ritiene esaurita quanto a noi; ma mi ha espresso il suo dispiacere pel modo come è andata (e, secondo lui, doveva andare) la cosa, con vera cordialità. Io non ho potuto trattenermi dal dirgli che, quanto a lui, non mi era certo passata per la mente l'idea di attribuirgli del malanimo, ma non potevo dir lo stesso del Ver[ones]e. Ed egli allora ((di discorso in discorso)) mi ha raccontato come il Ver[ones]e se la sia presa un po' anche col Niccoletti per la recensione[4] dei miei Elementi.

Di nuovo tante grazie per l'affetto di cui mi avete circondato durante il mio soggiorno a Roma, e per le brighe che vi siete presi. Cordialissimi saluti

Ghigo

[...][5]

[1] Gino, terzogenito di Castelnuovo, nato il 27 settembre 1903.

[2] Cfr. p. 524, nota 2 a let. 559 (18.4.1903).

[3] Cfr. p. 473, nota 5 a let. 505 (s.d., 1901) e per la conclusione di questa vicenda si vedano in particolare p. 528, let. 564 (7-8.6.1903) e p. 540, let. 575 (28.12.1903).

[4] Niccoletti 1903.

[5] Seguono nell'originale ventotto righe di saluto di Luisa a Elbina.

578.

1 marzo 1904

Carissimo Guido

Abbiamo avuto ieri le elezioni per la nota commissione.[1]

Il nostro amico V[eronese] aveva lavorato per mezzo del R[igh]i, ma egli non è riuscito ad avere che *due* voti: 8 ne ha avuti Bert[in]i, 7 Martinetti, 4 Asch[ier]i e 3 Pitt[arell]i.

E come sono andate le cose a Roma?

Disgraziatamente, come sai, il M[inistr]o non si tiene legato ai voti delle Fac[ol]tà per la minoranza: quindi il V[eronese] si farà scegliere anche se non trovasi tra i primi 5, e cercherà di intrigare.

Ho preparato il discorso commemorativo[2] su Cr[emona] per la nostra Accad[emi]a. Il merito di Cr[emona] appare nel grande cammino ch'egli ha percorso dai principii della Geom[etria] proiett[iv]a alla Poncelet alla Geom[etria] delle trasf[ormazion]i bir[azional]i, e mi pare che si possa bene caratterizzare il valore dell'opera sua attribuendogli appunto rispetto a quest'ultima un posto analogo a quello che ha Poncelet rispetto alla G[eometria] proiettiva.

Ho avuto occasione di ripensare un po' a questioni sulle trasf[ormazion]i cremoniane di S_3, di cui già abbiamo discorso. Mi par d'intravedere che le trasf[ormazion]i generatrici del gruppo sieno di Jonquières, o con una congr[uenz]a kummeriana di raggi uniti, o di un ordine assai basso.

Per arrivare ad un resultato di questo genere può giovare la considerazione dei sistemi aggiunti $|\varphi_{n-3}|$ $|\varphi_{n-6}|$ ... al sistema omaloidico. Colle φ_{n-4} ecc., si arriva come sai a trovare una curva mult[ipl]a d'ord[ine] <16, ma colle φ_{n-3}, φ_{n-6} ..., si arriverebbe a molto di più quando si potesse dimostrare che queste segano su un p[ia]no curve di un sistema completo (il che d'altronde non sarà sempre vero).* Ed appunto in questa ipotesi dovrebbe scaturire qualcosa come il teor[ema] su accennato sulle trasf[ormazion]i generatrici.

Affettuosi saluti anche all'E[lbina].

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ricevo in questo momento la tua cartolina. Vedo, come m'immaginavo, che il V[eronese] ha lavorato anche da voi.

* Ma se la cosa cadesse in difetto solo quando si trova un fascio di rigate, si avrebbe la trasf[ormazion]e kummeriana.

[1] Si tratta della commissione per il concorso di Padova. Cfr. p. 524, nota 2 a let. 559 (18.4.1903). In applicazione dell'articolo 28 del regolamento universitario, il ministro aveva chiesto alle facoltà di votare tre nomi fra i professori e cultori delle scienze per le quali occorreva provvedere alla nomina di commissioni giudicatrici di concorsi e di promozioni a professore ordinario.

[2] Enriques 1904b.

579.

7 marzo 1904

Carissimo Guido

Hai perfettamente ragione che pei sistemi omaloidici le φ_{n-3} φ_{n-6} ... non servono a nulla. Non so perché mi era parso che l'ultimo sistema dovesse contenere in qualche modo la curva base!

Sono ritornato in questi ultimi giorni sulla mia comunicazione[1] di Zurigo e mi pare che al problema del gruppo di una g_n^1 sopra una C a moduli generali si possa dare una risposta, mostrando che esso è per qualunque g_n^1, non composta, il gruppo totale.

Anzitutto se una g_n^1 non è composta il suo gruppo è primitivo e perciò è il gruppo totale se contiene una trasposizione. Segue che una g_n^1 il cui gruppo non sia totale, deve avere tutti i punti di diramazione almeno doppi. E da ciò in particolare risulta il teor[ema] di Kneser[2] che afferma essere totale il gruppo per la g_n^1 generica contenuta in una g_n^2.

Ora per una g_n^1 sopra la curva C^p si possono prendere ad arbitrio almeno $2n - p - 2$ punti di dir[amazion]e; i rimanenti $3p$ coi loro invarianti di posizione (birapporti) rispetto ai primi danno i moduli della curva; di questi $3p - 3$ sono indipendenti e perciò se la curva è generale non sembra possibile che quei punti coincidano tutti a coppie o a terne ecc.

Il ragionamento non è un modello di rigore, ma mi pare persuasivo.

Ed il resultato è singolare: qualunque particolarizzazione nel gruppo di una g_n^1 si traduce in qualche relazione fra i moduli.

La nomina del V[erones]e a sen[ator]e ha destato anche qui una certa meraviglia.

A Pisa le elezioni per la nota commissione han dato 10 voti a Mart[inetti], 10 Pitt[arelli], 8 a me, 1 a te e 1 a S[egre].

Sai quando sarà convocata quella commissione?

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1898e e 1899a. Per i risultati qui accennati cfr. Enriques 1904a.

[2] Cfr. Kneser 1887a.

580.

[s.d.]

Carissimo Guido,

ieri appunto è stato qui Guccia, che ci ha dato un pranzo e ci ha intrattenuto delle questioni del Circolo. Egli crede che il Circolo si scioglierà presto, ed allora si potrebbe fondare la Soc[iet]à mat[ematic]a it[alian]a...

Un telegramma ministeriale mi avverte che la riunione della commissione per Padova è rinviata a tempo indeterminato.

Fin quando abuserà Catilina della nostra pazienza?

Si capisce assai facilmente il giuoco. Se il concorso di Parma va innanzi, si troverà modo di annullare quello di Padova e di nominare chi abbia ottenuto una qualsiasi eleggibilità ad ordinario.

Come si potrebbe evitare questo pericolo? Come trovar modo di far convocare la commissione surrogando eventualmente chi non voglia venirvi per fare dell'ostruzionismo? Il Ministro dovrebbe capire che questa è la sola via ch'egli ha per mantenere seriamente la sua parola!

Cordiali saluti anche all'E[lbina]

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Hai presentata la mia Nota[1] ai Lincei?

Galeotti è stato chiamato dalla Fac[ol]tà di Napoli.[2]

[1] La nota Enriques 1904a fu presentata da Castelnuovo all'Accademia dei Lincei il 10 aprile 1904.

[2] Gino Galeotti, professore straordinario di Patologia generale, si trasferì dall'Università di Siena a quella di Napoli: il decreto di trasferimento è datato 20 maggio 1904 (cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXXI, 2, n. 33, 1541).

581.

23 Aprile 1904

Carissimo Guido

Ho avuto successivamente le tue lettere, ma in questi giorni sono stato occupatissimo per l'ispezione che ora ho compiuto.

Le bozze della nota lincea[1] mi sono pervenute oggi nella nuova redazione, umile resto di un teorema che sarà forse vero, ma che, quanto più ci penso, tanto più mi sembra difficile di stabilire.

Quanto al premio reale,[2] sarei lieto se l'Acc[ademi]a venisse almeno al resultato di accogliere le proposte della commissione, le quali, dopo tanta

sottigliezza giuridica, rappresentano una reazione nel senso dell'equità, la più antigiuridica che si possa immaginare. Che l'Acc[ademi]a vada ancora più oltre, nel senso cui tu accenni, pare anche a me poco probabile, perché troppo razionale; ma almeno non sia tolta a te la via pel futuro!

Basta, stiamo a vedere.

Cordiali saluti anche all'E[lbina] tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1904a.
[2] Cfr. p. 542, let. 577 (16.2.1904).

582.

30 Apr[ile] 1904

Carissimo Guido

Ricevo dal Segre la lettera che ti accludo.[1] Come sai sono dispostissimo alla *sostanza* della cosa; ma ti dirò francamente che la *forma* della proposta mi pare assurda, e poco bella per tutti e due. Dì ad ogni modo tu ciò che ne pensi, senza alcun ritegno. Se l'Acc[ademia] decidesse d'interpellarci circa la nostra partecipazione al concorso come «separati», inutile ripeterti ch'io mi ritirerei con tutto il piacere. Temo anche che il S[egre] collo scrivere a Ver[ones]e commetta un'imprudenza.

Anche qui si è rivotato pel Cons[iglio] Sup[eriore], ma io non ci sono andato.

Al De Fr[anchis] bisognerebbe consigliare un lavoretto di G[eometria] descr[ittiv]a un po' più decoroso del pasticcetto[2] ch'egli ha fatto.

Se ci fosse modo p[er] es[empio] di trattare descrittivamente il problema d'Apollonio dei cerchi t[an]g[ent]i? oppure anche la questione che ti ho già accennata delle sez[ion]i circolari del toro (per la quale tuttavia bisognerebbe guardare La Gournerie).[3]

Affettuosi saluti anche all'E[lbina] tuo
Ghigo

[P.S.] Martedì sgomberiamo.

[1] Questa lettera non è stata conservata: si veda in proposito la lettera di Corrado Segre a Castelnuovo del 22 aprile 1904 riportata in Appendice (pp. 677-78).
[2] De Franchis 1904a. Cfr. p. 528, let. 563 (s.d., 1903).
[3] De La Gournerie 1860-64.

583.

11 Luglio 1904

Carissimo Guido,

mi disponevo a scriverti prima della partenza, ed intanto ricevo la tua. Sono lieto del bel progetto che mi procurerà il piacere d'incontrare a Heidelberg anche l'Elbina.

Per fissare un piano e restare d'accordo, come tu scrivi, mi manca il foglio colle indicazioni sul congresso[1] che ho dimenticato a Bologna. Perciò debbo chiederti *a chi* si deve mandare l'adesione al congresso e la tassa di 40 Mk, e a quale albergo tu fisseresti la camera (Forse non si può indicare tassativamente un albergo ma soltanto dare un limite di prezzo, in tal caso si potrebbe esprimere il desiderio che ci venisse assegnato lo stesso luogo).

Io mi rimetto fin d'ora a ciò che tu proponi.

Quanto al viaggio io penso di non legarmi fin d'ora con un itinerario fissato. Ora vado a Chamonix (parto domani), ma chi sa non mi venga poi voglia di cambiare residenza?

Credo tuttavia che prenderò al ritorno la via più rapida, Basilea-Gottardo, come mi pare sia anche nei tuoi progetti.

A Heidelberg io andrò soltanto all'ultimo momento, al più presto il 7 Agosto.

A Chamonix sarò Giovedì o Venerdì e lì attendo la tua risposta (posta restante). Credo che ormai non si possa tardare molto a decidersi, data anche la distanza che rende le nostre comunicazioni sempre più difficili.

Tanti saluti affettuosi

tuo

Ghigo

[1] Si tratta del terzo Congresso Internazionale dei Matematici, tenutosi a Heidelberg dall'8 al 13 agosto 1904. Nella lista dei partecipanti figura Castelnuovo ma non Enriques.

584.

Giovedì [s. d.]

Carissimo Guido

Ho ricevuto la tua lettera e gradito le notizie del congresso, ma fino ad oggi non ho trovato un momento per scriverti avendo avuto qui, al mio arrivo, varie cose da sbrigare.

Conosco nelle sue linee fondamentali la dimostrazione di Severi,[1] che è semplice nel concetto generale; le complicazioni dipendono dal volere escludere tutti i dubbi, che forse Sev[er]i ha messo fin da principio troppo in vista.

Della memoria sui principii di B[eppo] Levi,[2] il S[egre] mi aveva parlato a Torino con gran favore. Io l'ho letta solo un po' rapidamente, ma confesso che non ne ho riportato una grande impressione: c'è certo dentro molta cultura e maneggio di metodi elevati, ma non molta originalità; né salta fuori qualche criterio direttivo nuovo e apprezzabile. Il concetto di prendere i due soli conc[ett]i primitivi «p[un]to» e «coppie ug[ual]i», non è certo nuovo, ed il riferirsi al sistema delle catene ecc. è in fondo una traduzione metrica del sistema armonico. Qualcosa di elegante si vorrebbe trovare nelle configurazioni (analoghe a quelle di Fano)[3] che l'A[utore] considera, ma io non sono riuscito ad acquistare una veduta dell'interesse delle questioni che con questi esempii vogliono risolversi.

Avrei piacere che tu leggessi il lavoro con attenzione (io lo farò appena sbrigato il da fare che mi dà la traduzione dei collectanea),[4] e mi comunicassi il tuo giudizio. È un curioso giovane questo Levi, non si può negare che abbia una critica sotto certi aspetti penetrante, ma manca sempre la limpidità e direi quasi che si prova l'impressione piuttosto di una critica negativa che di una critica costruttiva e feconda.

Cordialissimi saluti tuo
Ghigo

[1] Cfr. Severi 1904b, presentato «prima del 4 settembre 1904».
[2] B. Levi 1904.
[3] Cfr. Fano 1892.
[4] Enriques 1900c e, per la traduzione tedesca, 1907e e 1910b.

585.

9 settembre 1904

Carissimo Guido

Ho letto nella «Tribuna» che sei chiamato il 12 a Roma nella commissione pei Ginnasii. Nella tua lettera (che ora mi perviene) non me ne fai cenno. Hai rinunziato? o la riunione è stata rimandata?

Ho piacere che i tuoi giudizii concordino coi miei. Per me non è dubbio questo punto che il De Fr[anchis] merita il 2° posto, dopo il Sev[er]i. Egli ha lavorato in questi anni seriamente, se pure non con grande attività, ed ha fatto da sé senza aiuto. Merita dunque scientificamente e moralmente di ottenere una delle cattedre vacanti.[1]

Quanto al B[eppo] Levi mi rincresce moltissimo che non ci troviamo d'accordo col S[egre], il quale subisce a mio avviso senz'accorgersene l'influenza dell'affetto per uno scolaro, che conosciuto personalmente dà veramente una migliore impressione di sé.

A mio avviso non soltanto non è possibile di confrontare oggi il B[eppo] L[evi] col De Fr[anchis], ma il B[eppo] L[evi] di oggi mi sembra avere titoli inferiori a quelli che il De Fr[anchis] aveva nel prec[eden]te concorso di Torino,[2] in cui fu posposto al C[ian]i.

Di quest'ultimo sai che, quantunque gli voglia bene, non sono mai stato grande estimatore, tantoché pel concorso di Descr[ittiv]a sono incerto circa la posizione sua rispetto al B[ordig]a (e mi piacerebbe fare dipendere la scelta fra i due da un esame); ma fra il C[ian]i e il B[eppo] L[evi] non mi parrebbe giusto anteporre quest'ultimo, ciò che avrebbe il significato di attribuirgli un merito scientifico che per lo meno egli non ha ancora dimostrato. Piuttosto sarebbe il caso di esaminare se non ci convenga d'invitare tutti i candidati ad un esame, dopo averli graduati per titoli in guisa che alcune differenze sieno sorpassabili, altre no. In tal caso ammetterei che il L[ev]i potesse superare il C[ian]i, dando prova di una notevole superiorità, ed in ispecie di chiarezza, nella lezione.

Queste vedute che ti espongo sono ancora suscettibili di essere modificate. Spero anch'io che potremo scambiarci a voce le nostre idee, e soprattutto vorrei che la commissione per la Pr[oiettiva] di cui tu fai parte, e che è composta tutta di amici e di uomini coscienziosi e d'idee larghe fosse riunita la prima.

Io ho avuto da pochi giorni l'invito anche pel concorso di Parma, ma senza precisare il giorno, come per le altre.

Tanti saluti affettuosi Ghigo

[P.S.] Non sarebbe opportuno di esporre al S[egre] prima della riunione ciò che pensiamo, in ispecie dove temiamo non trovarci d'accordo con lui?

[1] Enriques allude ai concorsi a cattedra di Padova e Parma. Cfr. p. 524, nota 2 a let. 559 (18.4.1903) e p. 528, nota 3 a let. 563 (s.d., 1903).

[2] Cfr. p. 472, nota 3 a let. 505 (s.d., 1901) e p. 478, let. 512 (26.4.1901).

586.

21 Nov[embre] 1904

Carissimo Guido

Ricevo la tua e rispondo. Credo potermi difendere dalle tue obiezioni.

Anzitutto dalla prima.

Io affermo difatti che: data sopra una sup[erficie] una serie continua di curve con p[un]ti 2-pli variabili, non può darsi che una curva particolare si spezzi senza acquistare nuovi p[un]ti 2-pli. E giustifico la cosa osservando che la sup[erficie] di Riemann spezzata dovrebbe riguardarsi *sconnessa*, per-

ché si suppone impedito il passaggio da una falda all'altra nei p[un]ti 2-pli variabili della curva generica.

Come corollario di ciò affermo che una curva piana $C_3 + C_1$, *ove* C_3 *non ha p[un]ti 2-pli*, non può presentarsi come caso particolare in una serie di C_4 con 3 p[un]ti 2-pli. Effettivamente le C_4 suddette sono ∞^{11} e così pure ∞^{11} le $C_3 + C_1$; la varietà comune è il sistema ∞^{10} di $C_3 + C_1$ per cui C_3 ha un p[un]to 2-plo. La stessa cosa vedo anche riguardando le C_4 come proiez[ion]i di quartiche sghembe.

Spero che questo esempio valga a convincerti. Si potrebbe del resto formare un esempio più generale in cui si veda che una curva piana non può spezzarsi contro a ciò ch'io affermo, in modo che una parte sia una retta o una curva eccezionale. Ma mi permetto invece d'insistere sul ragionamento della connessione, facendoti notare che se un p[un]to comune a C, K, viene considerato come p[un]to 2-plo di $C + K$, limite d'un p[un]to 2-plo, d'una curva irriducibile L, non si può riguardare ivi connesse C e K; fare ciò equivarrebbe a riguardare il p[un]to 2-plo come virtualmente inesistente.

Passo alla 2ª obiezione.

Prendiamo anche qui un esempio. Si vuol provare che sopra una sup[erfi-cie] F esistono ∞^1 punti soddisfacenti *una* certa condizione assegnata. Il luogo di questi p[un]ti è una curva C intersezione di F con una sup[erficie] φ per la curva 2-pla; ora C esiste o non esiste; ma se φ ha un p[un]to comune con F fuori della curva 2-pla, la sega proprio secondo una curva.

Del resto guarda anche la spiegaz[ion]e algebrica della cosa: r equaz[ion]i fra n variab[il]i indipendenti, definiscono una effettiva varietà (almeno) ∞^{n-r} di soluzioni, *se esse sono compatibili*.

Tieni pure il manoscritto;[1] me lo renderai quando ci saremo messi d'accordo.

Ho avuto ieri qui la visita di B[eppo] Levi. Siamo stati insieme discutendo di varie cose più di dodici ore. Ho parlato con lui molto francamente, ed egli pure con me. È naturale sia dolente dei giudizii che si danno di lui, ma dimostra nel suo contegno una notevole elevatezza morale.

Quanto alla sua intelligenza, essa ha pure lati notevoli. Disgraziatamente egli confessa apertamente un criterio della scienza che chiama *individuale* (in contrapposto ad una valutazione di essa come prodotto *sociale*). Ha poco interesse pei fatti e per le questioni determinate, vuole soltanto illuminare le *sue* idee; le quali però, ove si tratti di argomenti circoscritti e modesti, sono chiare.

Quanto ai suoi lavori il Levi non è riuscito a cambiare il mio apprezzamento generale sulla memoria «Fondamenti».[2] Mi ha fatto solo scorgere in essa qualche altra osservazione acuta, oltre quelle notate, ed in partico-

lare un resultato, che vi è disgraziatamente affogato. Hilbert dimostra che il teor[ema] di Pappo nel p[ia]no si deduce dai post[ulat]i di appartenenza, teor[ema] di Desargues e postulati della congruenza.[3] Levi dimostra che, nel caso non euclideo, l'ufficio di questi ultimi può essere surrogato dall'esistenza della polarità assoluta (non importa dare a priori il gruppo delle trasf[ormazion]i proiett[iv]e di questa).

Circa il lavoro sulle singolarità[4] sono riuscito niente meno che a questo: capirne il concetto, vedere che esso è semplice e naturale, e che tutta l'oscurità dipende in parte da qualche minuta complicazione necessaria, in parte da difetti di forma e più precisamente dal modo paradossale come egli presenta alcune osservazioni acute.

Mi risulta ad ogni modo che:

1) avevo ragione di ritenere che la lacuna lasciata esplicitamente dal Segre[5] si supera subito;

2) ma il lavoro del S[egre] è viziato in un punto prec[eden]te più grave, perché non soltanto l'affermazione presa dal Kobb[6] non è dimostrata, ma *è falsa*;

3) perciò bisognava rifare tutto, ed il Levi ha fatto ciò in modo minuto,[7] mostrando soprattutto in un punto, uno spirito acuto.

Anche ciò che avevo scritto per l'art[icolo] dell'Enciclopedia[8] sarà da rifare.

Aggiungi che il Levi pensa potere ridimostrare il teor[ema] dimostrando che c'è una sup[erficie] raz[ionale] che ha *le stesse* sing[olari]tà di una data sup[erficie], e ciò appoggiandosi agli sviluppi in serie, in un modo luminoso.

In definitiva la mia impressione è che se il Levi fosse stato frenato energicamente nelle sue tendenze all'indeterminato avrebbe potuto far meglio; e forse c'è da sperare ancora che faccia cose utili, in ispecie in argomenti elementari.

P[er] es[empio] il L[ev]i mi ha parlato di un contributo[9] interessante ch'egli dà alla Geom[etria] non euclidea, stabilendo in modo indipendente dal post[ulato] d'Eucl[ide] la trigonometria sferica.

Vedo che il concorso di Parma è contestato. Perché?

Cordialissimi saluti

tuo aff.mo
Ghigo[10]

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1905a, presentato all'Accademia delle Scienze di Bologna l'11 dicembre 1904.

[2] B. Levi 1904.

[3] Cfr. Hilbert 1899, dove il teorema di Pappo è chiamato teorema di Pascal.

[4] Per i contributi di Beppo Levi allo studio e risoluzione delle singolarità delle superficie algebriche si vedano gli articoli: B. Levi 1897a, 1897b, 1899, 1899-1900, 1902, nonché l'articolo B. Levi 1904-05, che sarà presentato da Corrado Segre il 18 dicembre 1904.

[5] Si veda quanto è riferito in Segre 1897a, nota 42.

[6] Cfr. Segre 1897a, 330-31; Kobb 1892, 407.

[7] Cfr. in particolare B. Levi 1897a e 1899.

[8] Il problema delle singolarità delle superficie algebriche sarà trattato in Enriques-Castelnuovo 1914, § 3. Si veda inoltre p. 362, let. 404 (13.3.1898), p. 364, nota 2 a let. 405 (s.d., 1898) e p. 410, let. 447 (s.d., 1899).

[9] B. Levi 1905.

[10] Nell'originale, «Ghigo» risulta sovrapposto a un preesistente «F Enriques».

587.

22 Nov[embre] 1904

Carissimo Guido

Ricevo la tua lettera ed una cartolina del Sev[er]i che è informato del fatto.[1]

L'errore non può essere avvenuto che nella trascrizione dei verbali (ricopiati da Asch[ier]i due volte) perché io ho preso nota volta per volta delle discussioni fatte, e ricordo che il rendiconto di una seduta diceva: Si esaminano i lavori di B[eppo] Levi e ... (di un altro). Ciò non toglie che abbia la responsabilità di non essermi accorto della cosa rileggendo la copia fatta dall'Asch[ier]i, la quale fu anche riletta da altri!

Con tutto ciò mi pare che risulti abbastanza la *materialità* dell'errore. Il C[orrado] S[egre] non può ritenere che non si sieno esaminati e discussi i lavori del L[ev]i di cui si riferisce ampiamente nella relazione, e su cui ogni commissario esprime il suo parere.

Dunque emerge evidente che non esiste un vero vizio di procedura e il C[orrado] S[egre], segnalando l'irregolarità formale, dovrebbe esprimere il suo convincimento che questa è soltanto apparente, come si vede dagli altri documenti.

Io penso tuttavia che si miri a questo: dare al concorso il suo effetto, ma impedire che venga pubblicata la relazione,[2] pei giudizii sugli altri conc[orrent]i e pei criterii espressi.

Il Be[rtini] ha scritto al D[in]i e al Ce[rruti], io al Mart[inett]i dichiarandogli che l'errore avvenuto è puramente materiale di copia.

Se si potesse essere interpellati ufficialmente, ogni irregolarità verrebbe sanata.

Speriamo!

Grazie intanto dell'informazione.

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques allude all'esito del concorso di Parma. Cfr. p. 528, nota 3 a let. 563 (s.d., 1903).

[2] A quanto ci consta, la relazione non fu pubblicata. Del concorso risultò vincitore Gino Fano, che fu nominato con Regio Decreto, in data 15 dicembre 1904, professore ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Parma.

588. [c.p.]

[Bologna] 2 Dec[embre] 1904

Carissimo Guido,

risponderò un altro giorno alle altre parti della tua lettera.

Per oggi mi rallegro della semplificazione che hai introdotto nel mio ragionamento, dalla quale segue in più (per $p_g > 0$) la completezza della s[eri]e caratt[eristic]a. Io vorrei pubblicare intanto il resultato (o prima ancora annunziarlo qui all'Acc[ademia] l'11 Dec[embre]), lasciando poi a te se vorrai esporre le semplificazioni e le ulteriori conseguenze che potranno derivarne. Vorresti rimandarmi il manoscritto?[1]

Cordiali saluti tuo

Ghigo[2]

[P.S.] La tua semplificazione, se ben vedo, consiste in questo, che: mentre io facevo il computo della dimensione del sistema delle C (sul p[ia]no) imponendo prima i contatti e poi i p[un]ti 2-pli, tu procedi in ordine inverso. È certo che ciò è più rapido. Parmi però che anche per $p_g > 0$, una piccola aggiunta al mio procedimento darebbe la s[eri]e completa: basterebbe contare le curve del sist[em]a infinitamente vic[in]e a C, che segano su C la g^r_m.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1905a.

[2] Nell'originale, «Ghigo» risulta sovrapposto a un preesistente «F Enriques».

589.

2 Dec[embre] 1904

Carissimo Guido,

faccio seguito alla cartolina per dirti come si vede che «*ogni* sistema continuo sulla sup[erficie] ha la serie caratt[eristic]a completa».[1]

Si tratti di un sistema di curve, le cui immagini K sul piano mult[ipl]o sono tutte diverse dalla C di diramaz[io]ne. Secondo tu osservi le K infinitamente vicine ad una di esse K_1 segherebbero su questa la s[eri]e completa, se le sole condizioni imposte alle K consistessero nell'avere un certo n[umer]o di p[un]ti 2-pli. Ma esse hanno di più m contatti con C. Ora

vedi cosa succede? Questi m p[un]ti sono comuni a tutte le K infinitamente vicine a K_1, quindi (staccati questi p[un]ti fissi che non corrispondono a intersez[ion]i sulla sup[erficie]) resta completa la s[eri]e caratt[eristic]a segata (ulteriormente) dalle K infinitamente vicine sulla K_1.

Di nuovo cordiali saluti, in fretta tuo

Ghigo

[P.S.] In una nota[2] del Circolo di Palermo, che ricorderai, ho fatto vedere che se c'è un sistema continuo sulla sup[erficie] F non può $|C'|$ segare la serie can[onic]a completa su una C di $|C|$. Emergerà ora di qui la più semplice dimostrazione possibile del tuo teor[ema][3] che per $p_n = p_g$ la serie caratt[eristic]a di ogni sist[em]a lineare è completa.

Discorrendo col Sev[er]i si diceva essere desiderabile di stabilire che un sistema continuo è *individuato* da una sua curva (seguono le operaz[ion]i ecc.).

Ora mi sembra che anche ciò risulti dalla costruzione sul p[ia]no multiplo.

Potendo operare sui sist[em]i continui come sui lineari, si avrà un'aggiunzione in senso esteso ed un teor[ema] fondamentale: di qui il significato del sist[em]a cont[inu]o cui appartiene il canonico.

Supponendo che le curve can[onich]e seghino sulla C di dir[amazion]e del p[ia]no mult[ipl]o una serie completa ($|C|$ regolare) il significato del $p_g - 1$ sarà la dimensione di questa serie ((metà come osservi di quella segata su C_n dalle agg[iunte]te C_{n-6})), mentre il p_n si potrà calcolare aritmeticamente dati i p[un]ti 2-pli e le cuspidi della C.

Si arriverà poi facilmente a calcolare anche il big[ener]e del p[ia]no multiplo, quindi le condizioni di raz[ionalit]à ecc.

Insomma tutto un campo nuovo di ricerche ci si apre d'un tratto!

[1] Cfr. Enriques 1905a.
[2] Enriques 1899b.
[3] Cfr. Castelnuovo 1897a, 411.

590.

7 Dec[embre] 1904

Carissimo Guido,

ciò che mi scrivi intorno alla rappresentazione con funz[ion]i θ dei sist[em]i cont[inu]i mi pare molto interessante. Però non c'è bisogno di ricorrere ad un resultato così elevato pel nostro scopo delle sup[erficie] coi plurigeneri nulli.

La formula

$$\delta + 4(\rho - 1)(\rho' - 1) - 4 = -12p - p^{(1)} + 9,$$

dà (come tu osservi)

$$\rho' = 1 \quad \rho \text{ qual[unqu]e} \quad \text{o} \quad \rho = 1 \quad \rho' > 1$$

e $p = 1$ $(p^{(1)} = 1)$.

Ora il caso $\rho' > 1$ (fascio irr[azionale] non ell[ittic]o di curve) conduce, secondo Severi[1] ha dimostrato, a

$$p_g - p_a \geq \rho' > 1,$$

quindi $p_g > 0$.

Quanto basta per noi; possiamo dunque limitarci al caso di un fascio ellittico di curve di gen[ere] ρ.

E qui bisogna riprendere la nostra via, la quale dimostra che non sono esatte le previsioni a cui accenni.

Con un po' di sforzo sono riuscito a ricostruire il concetto fondamentale, che ormai non ci resta se non da svolgere:

Una sup[erficie] con un fascio ellittico di curve di gen[ere] π si rappresenti sopra una rigata del 4° ord[in]e ell[ittic]a F, n-pla. Si avrà una curva di dir[amazion]e K sec[ant]e le gen[eratric]i in $2n + 2\pi - 2$ p[un]ti.

Ora si consideri il sistema di C_8^5 segato su F dalle quadr[ich]e. Il sistema agg[iun]to è costituito sulla F semplice da certi gruppi di 4 gen[eratric]i r_4. Quindi sulla rigata multipla abbiamo che l'agg[iunt]o a $|C_8^5|^n$ è dato da $|r_4|^n + K$. Bisogna dunque dimostrare che per $\pi > 1$, il sistema continuo delle curve $K + |r_4|^n$, contiene $|C_8^5|^n$, oppure che si può determinare un s tale che

$$s\{K + |r_4|^n\} \quad \text{contenga} \quad s\{|C_8^5|^n\}.$$

Per $\pi = 1$ si trova invece un s tale che

$$s\{K + |r_4|^n\} = s\{|C_8^5|^n\} \qquad \text{(esempii dati a Pic[ard]).}^2$$

Questa è la via a cui eravamo giunti. Il calcolo occorrente, lo avevamo anche effettuato. Credo che per ciò tenessimo conto del n[umer]o di intersezioni di K colle C_8^5 e dell'ord[ine] di K (formula di Segre).[3] Ma riterrei che ciò sia superfluo e che l'ipotesi restrittiva che così si introduce nel calcolo, conduca al caso *più sfavorevole* da trattare.

Ritornando alla tua considerazione (bellissima) dei sistemi di curve rappresentati da funz[ion]i θ, hai guardato se da essa si tragga[4]

$$\text{n[umer]o integrali di } 1^{\text{a}} \text{ sp[ecie]} = p_g - p_a ?*$$

* Se sì (come credo) dovrà anche seguire che il n[umer]o degli integrali è $\frac{1}{2}$ di quello dei periodi, resultato cui il Pic[ard] attacca molta importanza.

Ho redatto la nota[5] che presenterò Domenica all'Acc[ademia]. Ho trattato addirittura il caso di sistemi diversi da quello della curva di dir[amazione] K (ci rientra anche [−][6] considerando la s[eri]e caratt[eristica] sopra una curva diversa), giacché il ragionamento riesce assai più semplice che quando si prende la s[eri]e caratt[eristic]a di $|K|$ su K.

In fine ho anche accennato al teor[ema] che un sist[em]a cont[inu]o è individuato da una sua curva. Ciò risulta dal processo di costruzione attesoché «se per 2 varietà (sist[em]i di curve) l'aver comune un elemento porta di conseguenza aver comuni gli elementi infinitamente vicini, le due var[ie]tà coincidono (teor[ema] di unicità degli integrali di sist[em]i d'eq[uazion]i diff[erenzial]i)».

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Cfr. Severi 1904a.

[2] Enriques si riferisce a esempi contenuti in un manoscritto inviato a Picard (cfr. p. 526, let. 562, 14.5.1903 e p. 533, let. 567, 20.6.1903) che, come appare dal seguito di questa corrispondenza, fu ampiamente rielaborato prima di essere pubblicato come Enriques-Castelnuovo 1906b.

[3] Cfr. Segre 1887-89, 127.

[4] Cfr. Castelnuovo 1905a e 1905b.

[5] Enriques 1905a.

[6] Parola illeggibile nell'originale a causa di una macchia d'inchiostro.

591.

[s.d.]

Carissimo Guido,

le rigate ellittiche multiple ($p^{(1)} = 1$) che noi abbiamo considerato, e per cui siamo riusciti a dimostrare l'esist[enz]a di curve pluricanoniche (ellittiche), sono quelle di cui la curva di diramaz[ione] K è priva di p[un]ti 2-pli e quindi (non avendo contatti colle gen[eratric]i) è ellittica. In questo caso, se essa seca le gen[eratric]i (n-ple) in $2n + 2\pi - 2$ p[un]ti ha l'ord[ine] $4n + 4\pi - 4$ (sulla F_4). Per la sua esistenza occorre che F_4 soddisfi alle condiz[ion]i da noi determinate; se essa esiste si trova un fascio di curve ell[ittich]e (che non la segano) a cui appartiene e si vede che queste sono imm[agin]i di curve pluricanoniche.

Io credo che fermandosi al 1° caso delle rigate 2-ple F_4 con curva di dir[amazione] 6-sec[ante] (fascio di curve di gen[ere] 2) si debba riuscire a vedere che la K di dir[amazione] è appunto ellittica d'ord[ine] 12. Ma occorrono per ciò le formule sulle inter[sezion]i di curve di dati ord[in]i

sopra rigate, ch'io non conosco. Ma per $\pi > 2$ hai ragione di dire che c'è una vera difficoltà da superare.

Si tratta in sostanza di questo: non dobbiamo arrivare ad una rigata n-pla *qualunque* ma ad una rigata n-pla con K di dir[amazione] di gen[ere] 1. E perciò occorre provare che «tutte le curve del fascio hanno gli stessi moduli».

Sarà questo una conseguenza del fatto che non hanno p[un]ti 2-pli? Io credo di sì. ((La cosa si dimostra per le curve)).

Se si ammette ciò, si può sopra ogni C del fascio costruire una g_n^1 per modo che le varie g_n^1 sieno trasformabili una nell'altra, e allora la serie dei gruppi di diram[azion]e fornisce una curva ellittica. Ma mi accorgo che forse si potrebbe fare di più, cioè un costruire un fascio di unisecanti,* e ciò non mi pare si accordi coi nostri esempii. Come va questa faccenda?

Intanto il 1° caso da esaminare mi sembra quello del fascio di gen[ere] 2 ($p^{(1)} = 1$). Se la curva di dir[amazione] K non venisse ell[ittic]a per la rigata 2-pla, si avrebbe esempio di sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$ con tutti i plurigen[er]i nulli. Ma appunto per ciò K deve risultare ell[ittic]a perché questi esempii sono proprio quelli da noi costruiti.

Affettuosi saluti Ghigo

[P.S.] Mi pare che sopra una sup[erficie] ogni sistema lineare di dim[ensione] virtuale $(r = n - \pi + 1 + p_a) > 0$ $(o > 1)$ abbia la def[icienz]a della serie caratt[eristic]a $= p_g - p_a$, appartenendo ad un sist[em]a $\infty^{p_g - p_a}$ di sistemi lineari.

Sulla rigata ell[ittic]a n-pla *qualunque* che rappresenta una sup[erficie] con $p^{(1)} = 1$, si può nondimeno cercare se il sistema lineare det[erminat]o dalla K di dir[amazion]e e dalla serie delle gen[eratric]i agg[iun]ta alle sez[ion]i quadriche, contata 2 v[olte], contenga il doppio del sistema segato dalle quadr[ich]e, o se ciò avvenga per due multipli dei sistemi considerati. A ciò credo si potrà rispondere di sì, e sarà un primo passo verso la risoluzione del problema, forse anche conclusivo.

Prendiamo come moduli gl'invarianti della C^p_{2p-2} di S_p, che possono esprimersi mediante birapporti relativi alla config[urazio]ne degli S_{p-1} $(p-1)$-tangenti. Se la config[urazione] non acquista elementi 2-pli (p[un]to 2-plo per C^p_{2p-2}) pare che quei birapporti debbano rimanere costanti.

* A meno che la curva non ammetta un gruppo finito di trasf[ormazion]i in sé. I nostrii esempii effettivamente costruibili sono veramente di questo tipo.

592.

13 dicembre 1904

Carissimo Guido,

sono lietissimo che la tua considerazione sulle funz[ion]i θ conduca effettivamente a mostrare che il n[umer]o integrali $= p_g - p_a$, n[umer]o periodi $= 2(p_g - p_a)$.[1] Ciò farà grande impressione al Picard e allo Humbert.

Ripigliando la formula $\omega + 4(\rho - 1)(\rho' - 1) - 4 = 12p_a - p^{(1)} + 9$, mi sono accorto che se ne deduce subito che le condizioni per la riferibilità ad una rigata di genere $p > 1$ sono semplicemente

$$p_g = 0 \quad p_a = -p \qquad \text{con} \quad p > 1.$$

Viene per assurdo utilizzando il nostro resultato sul $p^{(1)}$. Ed è già una conseguenza molto notevole, perché ai plurigeneri non si dovrà ricorrere in sostanza che per $p = 1$, o $p = 0$. Ed intravedo che anche per $p = 1$ dovrebbe bastare la considerazione del *bigenere*, tranne le nostre rigate multiple ($n = 2\pi - 2$, $P_i = P_{2i} = \ldots = 1$).

Per arrivare a questo resultato, cioè esaurire la nostra questione del $p^{(1)} = 1$, la via cui ti accennavo, e che tu pure hai provato, non riesce. Sembra non sia vero, che dal non esservi p[un]ti 2-pli nelle curve di gen[ere] π del fascio ell[ittic]o, si possa concludere all'uguaglianza dei moduli (eccepito il caso iperell[ittic]o). Avrei pensato ad un'altra considerazione.

Sopra ogni C_π abbiamo una $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, orbene si possono costruire delle curve secanti le C_π in gruppi $G_{2\pi-2}$. Queste curve K esistono almeno di gen[ere] ρ assai alto. E tutto starebbe nel determinare il loro grado in funzione di ρ. Si tratta in sostanza di questo: abbiamo una ∞^1 ellittica di S_{p-1}, ed in ogni S_{p-1} una varietà V (duale di quella degli iperp[ian]i t[an]g[ent]i ad un curva can[onic]a), si debbono studiare, su questa le curve unisecanti per determinare fra queste (o fra le bisec[an]ti ecc.) qualche curva che non sega la var[ie]tà luogo delle V. È una questione analoga a quella delle direttrici minime di una rigata.

Nota questo: le K (a cui si può sommare curve del fascio) formano un sistema continuo non lineare, ma segano su ogni C *una serie lineare* ($g^{\pi-1}_{2\pi-2}$). Ed è questa proprietà che le distingue dalle C' e le fa più utili pel nostro caso. S'intravede anche qualche relazione fra queste K e le agg[iun]te C' (o $C' + rC$). Relazione da cui dovrebbe forse seguire che queste $C' + rC$ non differiscono da quelle (almeno per un qualche r) e quindi segano su C una serie lineare invece che non lineare come a priori dovrebbe supporsi. Se ciò accade anche per $2|C' + rC|$, attesa la non specialità della serie segata, è facile che si arrivi a concludere che il big[enere] $P = 0$ porta già alle rigate. E non rimarrebbe quindi altro caso all'infuori

di quello $\pi = 1$, cui si riferiscono i nostri esempii, perché sugli altri esempii per $\pi > 1$ mi sono nati dei dubbii.

Che bella conclusione da conseguire!

Il teor[ema]: $P = 0$ caratterizza le rigate all'infuori delle sup[erficie] con f[asci]o ell[ittic]o di curve ell[ittiche] $P_i = P_{2i} = \ldots = 1$, sarebbe proprio un degno coronamento dei nostri sforzi!

Le osservaz[ion]i dette innanzi si possono semplificare così: Prendo su F le C (di gen[ere] π) formanti f[asci]o ell[ittic]o. Una $\overline{C}$ dà un sist[ema] agg[iun]to $|\overline{C}'|$ che sega parte della $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$. Ora le curve $rC + C'$ segano su $\overline{C}$ sempre gruppi canonici; quindi il più ampio sistema continuo a cui appartiene $|\overline{C}'|$ sega su $\overline{C}$ la serie canonica (e non una serie non lin[ear]e).

Da ciò segue che il suddetto sist[em]a continuo sega la s[eri]e can[onic]a su ogni C, perché esso può costruirsi coll'operaz[ione] $C - \overline{C}$.

La stessa conclusione vale per $|C''|$. E allora mi pare che siamo a posto, perché la serie segata su una C non è più speciale, e la dim[ensione] virt[ual]e del sist[em]a supera dunque di 1 quella della serie.

Ne segue che il bigenere $P > 0$.

Il ragionamento è nato ora e potrebbe quindi non reggere. Ma credo ad ogni modo che siamo sulla buona strada.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Castelnuovo 1905a e 1905b.

593.

14 dicembre 1904

Carissimo Guido,

ritornando sulla questione per la strada che ti ho accennata in fine alla mia lettera di ieri ho visto che tutto viene in modo semplicissimo, anche nel caso del fascio ellittico di curve ellittiche; anzi in questo caso se la sup[erficie] non è rigata $p_g > 0$. I nostri esempii sono demoliti; credo che l'errore consistesse in ciò: due sistemi lin[ear]i $|C|$ e $|K|$ possono non essere contenuti uno nell'altro sopra una rig[a]ta multipla, ciò non prova che il sistema obiettivo di $|C|$ non sia contenuto nell'obiettivo di $|K|$ sulla sup[erficie].

Ti esporrò ora a brevi tratti la dimostrazione della cosa sopra enunciata:

1) Osservaz[ione] fondamentale. Se una sup[erficie] contiene un fascio ell[ittic]o di C_π ($\pi \geq 1$) il sistema continuo $\{K\}$ a cui appartiene un $|K|$ sega su ogni C_π una serie lineare. Infatti

$$\{K\} = \{K + C - \overline{C}\}.$$

Di qui se $\pi > 1$ segue che il $\{C'\}$ sega sulle C la $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, e $\{C''\}$ contiene $\{C\}$. Ma $\{C'' - C\}$ consta di curve ellittiche, e queste non possono

variare in un sistema non lineare (se no si arriva a $p_g > 0$). Si conclude $\{C'' - C\} = |C'' - C|$:

$$P > 0.$$

2) Sia $\pi = 1$, $p = 1$, $p^{(1)} = 1$.
Per ogni sis[em]a di gen[ere] ρ,

$$n = 2\rho - 2 + d \qquad d \geq 0 \text{ ecc.}$$

Ora costruisco col teor[ema] fond[amentale] l'agg[iun]to ad $|nC|$ (che è una g_n^{n-1} nel f[asci]o ell[ittic]o). Se $d > 0$,

$$|(nC')| = |(n + b)C|$$

con $b > 0$, quindi

$$p_g > 0.$$

Sia $d = 0$.

Allora costruisco un sistema lineare $|K|$ di m sec[an]ti le C, e suppongo sia ridotto al minimo sicché non sia più possibile toglierne una C. Questo $|K|$ si compone (come risulta dal considerare il gr[ad]o di un suo fascio) di curve ellittiche, oppure di una curva isolata di gen[ere] 1, o 2.

In quest'ultimo caso occorre un piccolo artifizio (raddoppiare la curva e togliere C). In ultima analisi arrivo ad un sist[em]a lineare (di dim[ensione] ≥ 0) di curve ellittiche, il quale (*se* $p_g = 0$) non può esser contenuto in un sistema continuo.

Ma per la sup[erficie] è sempre $\{K'\} = \{K\}$, quindi in questo caso $|K'| = |K|$ e

$$p_g = 1.$$

L'ultima parte della dimostrazione si potrà probabilmente semplificare, eliminando il piccolo artifizio. L'importante è che tutto viene con grande naturalezza, e che il resultato sorpassa tutte le nostre speranze:

$P = 0$ dà la condizione di riferibilità a rigata!

Mi sono giovato (come hai visto) di osservaz[ion]i sui sistemi continui di curve ellittiche che ti ho altra volta comunicati, e dell'operaz[ione] di aggiunz[ion]e sui sist[em]i continui. Spero anzi che si possa arrivare alla massima semplicità dimostrando addirittura che se $\{K'\}$ contiene $\{K\}$, anche $|K'|$ cont[ien]e $|K|$, e $p_g > 0$. Tenterò di farlo, ma non oggi, perché ho una seduta a cui debbo andare.

Picard mi scrive scusandosi perché non ci ha ancora mandato le bozze del nostro scritto;[1] lieto del teor[ema] di Sev[er]i[2] domanda se è vero l'inverso e dice che quel teor[ema] riprodurrà nel suo III fasc[icolo] che spera pubblicare entro l'anno.[3] Pic[ard] richiama la nostra attenz[ion]e sulle sue

ultime note dei C[omptes] R[endus].[4] Aggiunge che è seccato della teoria delle funz[ion]i alg[ebrich]e, che ha fatto un bel viaggio a St Louis ecc.

Ti saluto in fretta, cordialmente.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques-Castelnuovo 1906b. Cfr. p. 556, nota 2 a let. 590 (7.12.1904).
[2] Cfr. Severi 1904b.
[3] Cfr. Picard-Simart 1897-1906. Per le date di pubblicazione del secondo volume del trattato si veda p. 351, nota 5 a let. 388 (4.12.1897).
[4] Picard 1904a e 1904b.

594.

15 dicembre 1904

Carissimo Guido,

ritorno sulle cose scritte ieri. Pel caso del fascio ell[ittic]o di C_π con $\pi > 1$ non ho altro da dirti.* Invece nel caso $\pi = 1$ nasce una difficoltà perché non si può assicurare *a priori* l'esistenza dell'agg[iun]to $|C'|$ o $|rC'|$. Mentre pensavo al modo di superare la cosa, mi si è presentata quest'altra via che conduce più rapidamente al resultato finale.

Se sopra una sup[erficie] vi è un fascio ell[ittic]o di C_1, esiste un 2° fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e (non dico unisecanti le C_1); quindi $p_g = 1$. Si può stabilire il teor[ema] come segue:

Supponiamo, per semplicità, che sopra ogni C_1 possa determinarsi razionalmente una g_2^1 (fascio di bisecanti). I gruppi G_4 di coincidenze forniscono una curva ell[ittic]a, e due G_4 (avendo le C_1 = [stesso] modulo) possono riferirsi in 4 modi dando luogo a 4 trasf[ormazion]i delle 2 C_1. Ora in queste trasf[ormazion]i si corrispondono i gruppi di 2 inv[oluzion]i ell[ittich]e, γ_4^1 sulle due C_1, per modo che da ogni G_4 della γ_4^1 sopra la C si passa univocamente ad un G_4 analogo sopra ogni altra C; quindi esiste un fascio ell[ittic]o di quadrisecanti.

Non vi è difficoltà ad estendere la cosa.

Se p[er] es[empio] sopra ogni C (cubica) è data raz[ionalmen]te una g_3^2, si ha un G_9 di flessi, ed un gruppo di non so quante trasf[ormazion]i proiett[ive] in sé che da ogni p[un]to conduce su C ad un G_9, quindi una γ_9^1 ell[ittic]a. E le γ_9^1 ell[ittich]e di due C qualunque risultano riferite biunivocamente onde ecc.

In conclusione:

Le sup[erficie] con un f[asci]o ell[ittic]o di curve ellittiche hanno $p_g = 1$.

Quelle con un f[asci]o ell[ittic]o di curve di gen[ere] > 1 hanno $P > 0$;

* C'è in fine una difficoltà che spero superabile.

non è detto però che non sia anche per queste $p_g > 0$. Però non sembra facile dimostrarlo. Invece se la cosa non è, un esempio di rigata doppia potrà mostrarcelo. Forse conduce allo scopo la stessa rigata 2-pla con seisecante di dir[amazione]?[1]

Ad ogni modo è questa una questione ulteriore di secondaria importanza.

L'importante è che il teor[ema] «se $P = 0$ la sup[erficie] è rif[eribil]e a rigata» sembra stabilito.

La semplice rinunzia di F[an]o non basterà, io credo, perché Sev[er]i possa andare ord[inari]o; la Corte dei Conti muoverà probabilmente degli ostacoli. La cosa è diversa se il decreto venga revocato. In quel caso evidentemente Sev[er]i non sarebbe danneggiato.[2]

Tanto saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Se le cose esposte ti sembrano giuste non c'è altro, mi pare, che redigere la nostra nota,[3] ciò che permetterà meglio di esercitarvi la critica.

[1] Seguono nell'originale tre righe cancellate.

[2] Enriques si riferisce all'esito del concorso di Parma: cfr. p. *553*, nota 2 a let. *587* (22.11.1904). Con un decreto del 29 dicembre, fu accettata la rinuncia di Gino Fano e fu nominato ordinario Francesco Severi (cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXXII, 1, n. *5*, 221 e 223). Fano restò professore straordinario di Geometria descrittiva e proiettiva all'Università di Torino, dove fu promosso ordinario con decreto del 24 novembre 1905.

[3] Per le questioni qui trattate si veda Enriques 1905c, 1905d ed Enriques-Castelnuovo 1906b.

595.

15 dicembre 1904

Carissimo Guido,

come ieri ti ho accennato, con un breve richiamo, restava una difficoltà nel trattare le nostre sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di C_π ($\pi > 1$), cioè di dedurre l'esistenza di $|C'' - C|$ da quella di una o più curve residue del fascio $\{C\}$ rispetto al sist[ema] continuo $\{C''\}$.

Credo di aver superato questa difficoltà, riuscendo di più a costruire un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e sulla sup[erficie], da cui segue (non solo $P > 0$, ma anche) $p_g > 0$.

Sappiamo che $\{C''\}$ sega su una $\overline{C}$ la serie lineare bic[anonic]a $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$. Dico che *ogni* sist[em]a lineare $|C''|$ sega sulla data $\overline{C}$ una serie deficiente, quindi si ha un fascio* ell[ittic]o di curve ell[ittich]e residue $\{C'' - \overline{C}\}$.

La dimostrazione procede per assurdo: si suppone dunque che un $|C''|$

* perché due di queste curve si segano in $p^{(1)} - 1 = 0$ p[unt]i.

gen[eric]o seghi su $\overline{C}$ la s[eri]e completa. Prendo allora su $\overline{C}$ una $g^1_{4\pi-4}$, ed ho ∞^2 curve di $\{C''\}$, ∞^1 per ogni gruppo generico, costituenti una serie ell[ittic]a (come il f[asci]o delle C). Questa serie ∞^2 di curve contiene qualche curva spezzata in $\overline{C}$ e in una residua K di genere $p^{(1)} = 1$. Posso ritenere che il numero di queste curve spezzate $\overline{C} + K$ sia *finito*; allora due di queste K non si segheranno fra loro (avendo $p^{(1)} - 1$ intersez[ion]i), e saranno *non* equivalenti.

Ora io voglio provare:

1) che vi sono almeno due curve del sist[ema] ∞^2 di $\{C''\}$ spezza[te] in $\overline{C} + K$;

2) che due K *sono equivalenti*, quindi assurdo.

Per dimostrare l'affermaz[io]ne 1), considero le ∞^2 C'' per i $G_{4\pi-4}$ di $g^1_{2\pi-2}$ come «punti» di una rigata ellittica F, ed ho che ai $G_{4\pi-4}$ corrispondono le curve ellittiche di un fascio lin[ear]e che ha *almeno un* p[un]to base (corr[ispondente] a $\overline{C} + K$). Si dimostra che esso deve avere almeno *due* punti base. Forse la dim[ostrazion]e è superflua. Ritengo infatti che un fascio di curve ell[ittich]e su una rigata debba avere almeno due p[un]ti base (*È vero?*).

Ora abbiamo dunque due curve K, K_1 ell[ittich]e senza intersezioni, secanti le C in $G_{4\pi-4}$ di una $g^1_{4\pi-4}$. Di qui si va ad una rigata ell[ittic]a multipla con due unisecanti, senza intersezioni. Queste due unisecanti appartengono dunque ad un fascio, *non è vero?*

Quindi K, K_1 sono equivalenti: assurdo.

Nel disordine in cui sono tuttora dopo lo sgombero non ho trovato a mano i lavori del Segre[1] sulle rigate ell[ittiche]. Avrei bisogno del lemma, sopra adoperato: Su una rigata ellittica, due unisecanti (di = [ugual] ord[ine]?) non equivalenti, hanno sempre qualche intersezione. Due unisec[an]ti equi[valent]i che si segano, hanno almeno due intersezioni (quest'ultimo fatto riesco a stabilirlo nel caso che occorre, ma la cosa si può forse evitare).

Come vedi il resultato riesce ancora più espressivo: ogni sup[erficie] con $p_g = 0$ $p_a < 0$ è riferibile ad una rigata!

Io sono convinto che tutto vada bene, o almeno che se in qualche punto del ragionamento si scopra (andando a svilupparlo in iscritto) qualche lacuna, questa non debba portare a difficoltà essenziali.

Che impressione ne hai tu?

Cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

[1] Segre 1886b e 1887-89.

596. [c.p.]

[Bologna] 16[1] dicembre 1904

Carissimo Guido,

alla tua obiezione relativa al caso $\pi > 1$ ho già risposto ancipatamente. Nel caso $\pi = 1$ ho corso ad affermare che si costruisce un 2° fascio ell[ittico], e vedo invece che il procedimento darà in generale un 2° fascio lineare di curve ell[ittiche]. Si ricade così sui nostri esempii, ai quali, avendoci un po' ripensato presto maggior fiducia.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 18, dal timbro postale.

597. [c.p.]

[Bologna] Domenica [18 dicembre 1904]

Carissimo Guido

Ti ho scritto stamani delle sup[erficie] con f[asci]o ell[ittic]o di curve ell[ittich]e e ricevo ora la tua cartolina, dalla quale vedo che avevi rilevato l'errore del mio ragionamento. Questo però serve lo stesso, ed è questo l'importante, per condurre a termine la questione che c'interessa. Infatti il f[asci]o lineare che si costruisce è sempre composto di curve ellittiche, e per conseguenza si cade sulle nostre rigate ell[ittich]e multiple. Attendo ora il tuo giudizio sul caso del fascio di C_π con $\pi > 1$.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

598.

19 dicembre 1904

Carissimo Guido,

sta bene, come osservi, che «due curve di = [ugual] ord[ine], unisecanti, su una rigata ellittica possono essere *non* equivalenti»: ma come potrebbe accadere ciò se le curve in questione fossero *tre*? A me sembra che in tal caso esse dovrebbero essere equi[valent]i.

Ora già quando ti scrissi[1] intorno a quel procedimento, mi era parso che spingendolo più oltre si potesse provare che esistono almeno 3 curve $C_1'' - C$, $C_2'' - C$, $C_3'' - C$; e soltanto mi pareva inutile di farlo.

Guarda infatti: consideriamo un fascio di C_1'' secante su C una $g^1_{4\pi-4}$; per ogni $G_{4\pi-4}$ passa una ∞^1 ell[ittic]a di curve seconde agg[iun]te ad una

del nostro fascio C_π e ripetendo il ragionamento dell'altro giorno si prova che tra le ∞^2 curve ell[ittich]e così costruite *due* almeno contengono C, e *pare* che queste debbano essere distinte da $C_1'' - C$.

D'altronde se si hanno sulla sup[erficie] tre curve ell[ittich]e secanti su ogni C_π tre $G_{4\pi-4}$ di una $g^1_{4\pi-4}$ (mi sembrano essere le $C_1'' - C$, $C_2'' - C$, $C_3'' - C$), e se queste curve non si secano (come nel nostro caso), mi sembra che si possano riferire le varie $g^1_{4\pi-4}$ delle C in guisa da costruire un fascio lin[ear]e di curve ellittiche $(4\pi - 4)$-secanti.

Ho ripreso in esame i nostri esempii. Pel caso del f[asci]o ell[ittic]o di C ell[ittich]e, la rigata F_4 n-pla con C_{4n}, $2n$-secante, ell[ittic]a irriducibile, conduce effettivamente (se esiste) a sup[erficie] con $P_n = P_{2n} = \ldots = 1$ e tutti gli altri plurigeneri nulli.

Tutto sta a provare che una tale rigata multipla esiste per n qualunque. Io credo di sì, ma non si può ricorrere per dimostrarlo al caso ciclico, perché questo caso non si riscontra per $n > 3$. Tuttavia costruendo le curve ell[ittich]e n-ple con $4n$ p[un]ti di dir[amazione] assegnati è probabile si possa vedere che i loro moduli sono *diversi*, e quindi per un valore del modulo individuare raz[ionalmen]te la curva ell[ittic]a corr[isponden]te ad una generatrice multipla della nostra rigata.

Se questo modo generale non riesce credo si potrà ad ogni modo ricorrere ad esempii ottenuti con successive opportune trasf[ormazion]i [1, 2].

Pel caso del fascio ell[ittic]o di C_π con $\pi > 1$, fermiamoci sull'esempio della rigata F_4 2-pla con C_{12} di diramaz[ione] 6-sec[ante] ellittica.

A me non sembra affatto provato che la sup[erficie] abbia il $p_g = 0$ (e non dovrebbe averlo se va bene il ragionamento accennato in principio); anzi inclinerei a credere che sia $p_g = 1$ e la curva can[onic]a costituita dall'insieme delle due direttrici 2-ple di F_4.

Per contro non mi riesce di vedere sulla sup[erficie] un fascio ell[ittico] di curve, come occorrerebbe. Anzi la presenza stessa di un tal fascio (data la formula $\delta = 12p_a - p^{(1)} + 9$) sembrerebbe produrre un assurdo.

Perciò mi viene il dubbio che la rigata 2-pla suddetta non esista, o almeno che quando la si costruisca si trovino nel fascio delle C_π alcune C_π che si riducono a curve 2-ple, o qualcosa di simile.

Si potrebbe forse sfuggire a questa conclusione (che non mi pare plausibile) in altro modo, supponendo cioè che le ∞ curve $C_1'' - C$ (supposte esistenti al variare di C_1, mentre C resta fissa), fossero riducibili in due o più curve ellittiche di un fascio irraz[ional]e di gen[ere] > 1.

Ma anche questa conseguenza mi sembra un po' strana.

Cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

[P.S.] Prova un po' a sommare una gen[eratric]e e sottrarre un'altra gen[eratric]e da una C_8 ell[ittic]a quadrisec[ante] sopra la rigata F_4. Che cosa si ottiene? La questione ha molta analogia colla nostra.

[1] Cfr. p. 562, let. 595 (15.12.1904).

599.

20 dicembre 1904

Carissimo Guido,

ti sarai accorto che dall'esistenza delle *tre* curve $C'' - \overline{C}$ non si trae nulla, perché esse segano su una C gruppi equi[valent]i ma non di una $g^1_{4\pi-4}$.

Io persisto tuttavia a ritenere che le sup[erficie] col fascio ell[ittic]o di C_π ($\pi > 1$), contengano un 2° fascio irraz[ionale] di curve ell[ittiche].

Consideriamo anzitutto una delle nostre rigate multiple, p[er] es[empio] la F_4 2-pla con C_{12} ell[ittic]a di dir[amazione] 6-secante le generatrici. La C_{12} appartiene su F_4 ad un fascio lineare di curve tricanoniche.

Orbene consideriamo la sup[erficie] obiettiva ϕ con un f[asci]o ell[ittic]o di C di gen[ere] 2. Su questa esistono: un fascio di $C''' - C$ ell[ittich]e e almeno un'altra $C''' - \overline{C}$ pure ell[ittic]a e non secante le $C''' - C$; la cosa, per quanto io vedo, non si può conciliare se non supponendo le $C''' - C$ composte colle curve d'un fascio irraz[ional]e.

E lo stesso accade per le rigate ell[ittich]e multiple con curva di dir[amazione] di genere (virtuale = effettivo 1), secanti le gen[eratric]i in $2n + 2\pi - 2$ punti ($\pi > 1$).

Resta da provare che ogni sup[erficie] ϕ con un fascio ell[ittic]o di C_π ($p^{(1)} = 1$) si può rappresentare sopra una rigata multipla cosiffatta.

A tal fine prendiamo a considerare su di essa, due curve ellittiche (non equi[valent]i) $C'' - C_1$, $C'' - C_2$, le quali non han p[un]ti comuni. Si è condotti ad una rigata $(4\pi - 4)$-pla F con K di diram[azione] sec[ante] in $10(\pi - 1)$ p[un]ti le gen[eratric]i. Bisogna provare che K ha il gen[ere] $\omega = 1$.

Per ciò paragoniamo i generi di due sistemi lineari che se esiste il bigenere ($C_1 \equiv C$) coincidono, e se no appartengono allo stesso sistema continuo; dico: il sistema rappresentato su ϕ dalle sez[ion]i con sup[erficie] quartiche + la curva $C'' - C_1$, e due v[olte] il sistema K + due v[olte] il gruppo di gen[eratric]i agg[iun]te alle sez[ion]i quadriche di F_4. I generi di questi due sistemi debbono coincidere, e ciò deve portare che K abbia il gen[ere] 1. c.d.d.

Il concetto della dimostrazione come vedi sta in questo: che l'esistenza d'una curva parabicanonica deve portare alle stesse relazioni numeriche che quella di una bicanonica.

Speriamo che la cosa vada bene, e di essere così finalmente a posto, anche perché comincio a sentirmi un po' stanco.

Cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

600.

[s. d.]

Carissimo Guido,

cercherò di spiegarmi più chiaramente. Sopra F abbiamo un fascio di C_π ($\pi > 1$) e due curve ell[ittich]e $(4\pi - 4)$-secanti K_1, K_2, che su ogni C individuano una $g^1_{4\pi-4}$.* Ora prendiamo un sistema $|L|$ che seghi ogni C in due $S_{4\pi-4}$ di $g^1_{4\pi-4}$.**

Il sistema $|L'|$ si ottiene sommando a K un certo n[umer]o r di curve C, che dipende dal gen[ere] della serie di coppie $G_{4\pi-4}$. Ora confrontiamo $|2L'| = |2K + 2rC|$ e $|2L|$: il 1° sistema è *virtualmente* somma di $2L$ con una curva bicanonica ell[ittic]a senza intersezioni con K (come la curva parabican[onic]a K_1). Da ciò mi sembra debba seguire che K ha il gen[ere] 1, e se ciò è, è $= 1$ il gen[ere] *virtuale* di K_1 quindi non si possono avere su di essa p[un]ti 2-pli.

Quando dico che un sistema è *virtualmente* somma ecc., vuol dire che sono valide le uguaglianze aritmetiche conseguenti all'ipotesi che sia somma ecc.; e di ciò possiamo accertarci osservando che la relazione di somma intercede fra i sistemi continui cui appartengono i sistemi lineari dati.

L'altra parte del mio ragionamento, a cui nulla rispondi, tendeva a mostrare che le sup[erficie] rif[eribil]i alle nostre rigate ell[ittich]e multiple F_4 con K di dir[amazione] ell[ittic]a (eccepito il caso corrispondente al f[asci]o ell[ittic]o di curve ell[ittich]e ($\pi = 1$) contengono un 2° fascio irrazionale di curve ellittiche.

La cosa riposa su ciò. Noi abbiamo in tal caso (come si vede dalla rigata multipla), un fascio lineare di curve pluricanoniche p[er] es[empio] bic[anonich]e ell[ittich]e ($p^{(1)} = 1$). Ma abbiamo anche delle curve parabicanoniche di $=$ [ugual] ord[ine], e di gen[ere] 1 che non secano quelle del fascio. Ne segue che almeno una curva bic[anonic]a è spezzata in due curve ell[ittich]e senza intersezioni, ma ciò è impossibile in un fascio lineare se non accade per tutte le curve di esso, ed è poi facile vedere che le componenti irriducibili formano un fascio *irrazionale*.

* I p[un]ti di diramaz[ion]e di questa descrivono una curva K.

** Tali sono p[er] es[empio] le curve $2(C + K_1)$, $2(C + K_2)$ ed il loro fascio; le $2(2C + K_1)$, $2(2C + K_2)$ ecc.

Rispondendo al Pic[ard] gli ho comunicato il mio teor[ema]. A ciò Picard ha replicato in modo molto gentile chiedendomi che glie lo esponga in una nota[1] pei C[omptes] R[endus] e che gli dia qualche schiarimento.* Mi ricorda inoltre ch'egli dirige gli Annales de l'Ecole Normale, e m'invita a collaborarvi.

Ho avuto la sua lettera ieri e gli risponderò appena posso, promettendogli la nota pei C[omptes] R[endus] per la quale però prenderò un po' di tempo.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

* In particolare se risulta una relazione fra $p_g - p_a$ e il n[umer]o degli integrali di 1ª specie.

[1] Enriques 1905b, presentato il 16 gennaio 1905.

601.

24 dicembre 1904

Carissimo Guido,

la tua cartolina di Lunedì mi è giunta soltanto stamani. Ho piacere che tu sia persuaso della giustezza della mia osservazione che la K di dir[amazione] è ellittica. Al dubbio che muovi una nota a piè di p[a]g[ina] della mia lettera di ier l'altro risponde implicitamente. Alle due curve parabicanoniche K_1, K_2 si possono sommare due fasci lineari convenienti $2C$ e $2\overline{C}$ per modo che sia

$$2C + K_1 \equiv 2\overline{C} + K_2 .$$

Questi due fasci determinano un sistema lineare ∞^3 di gr[ado] 4, quindi si ha la rappresentazione sulla F_4 multipla.

Del resto credo non occorrerà neppure di ricorrere a questa per stabilire la 2ª parte del teorema: l'esistenza del fascio irraz[ionale] di curve ell[ittich]e sulla sup[erficie] ϕ.

Poiché la K di coinc[idenza] su ϕ è ell[ittic]a, la involuzione $\gamma^1_{10(\pi-1)}$ segata su K dalle C non ha coincidenze. Segue da ciò che tutte le C hanno gli stessi moduli (non possono variare i birapporti dei punti di diramazione della retta $(4\pi - 4)$-pla che rappresenta una C variabile).

Ora due casi sono possibili:

1) la C non ammette trasf[ormazion]i in sé, esiste quindi un fascio di unisecanti;

2) la C ammette trasf[ormazioni] in sé, anzi trasf[ormazion]i che mutano in sé la $g^1_{4\pi-4}$. In questo caso si arriva subito ad un fascio (raz[ionale] o no) di curve ell[ittich]e. Ma io ritengo che questo caso non debba neppure potersi presentare, perché la $g^1_{4\pi-4}$ è una $g^1_{4\pi-4}$ *arbitraria* contenuta nel doppio della serie canonica, a meno che le C'' seghino tutte sopra una $\overline{C}$ una serie incompleta, il che ci dà subito un fascio irraz[ionale] di $C'' - \overline{C}$.

Queste osservazioni mi pare che portino una semplificazione notevole nella trattazione delle cose, confermando il resultato sulle sup[erficie] con un fascio di C_π $(\pi > 1)$.

Spiego meglio perché dico che la $g^1_{4\pi-4}$ deve essere una serie lineare *arbitraria* contenuta nella bicanonica su C. Ciò mi sembra conseguire dal fatto che[1] partendo da una $g^1_{4\pi-4}$ arb[itrari]a su C, e dalle $|\overline{C}''|$ che ne segano i gruppi si deduce che le due curve parabican[onich]e contenute entro questo sistema segano gruppi della medesima serie $g^1_{4\pi-4}$ (a prima vista la cosa non sembra evidente, ma mi pare debba potersi giustificare).

Del resto se anche si suppone un gruppo di trasf[ormazion]i di C che muti $g^1_{4\pi-4}$ in sé è facile vedere che esso deve mutare in sé ogni gruppo $G_{4\pi-4}$, onde si arriva ad un fascio ell[ittic]o.

Io credo insomma che il resultato resti ormai confermato per più vie concordanti, e importi soltanto di sviluppare il tutto sia per accertarsi di ogni particolare, sia per scegliere la via più semplice.

Ho risposto al Pic[ard], e in particolare intorno alle relazioni di cui egli mi chiedeva gli ho accennato al tuo studio[2] da cui si prevede che esse potranno scaturire, dicendogli che forse tu stesso gliene avresti parlato.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.]
Come va la questione Severi?[3]
E come la questione dei nostri reg[olamen]ti antigeometrici?[4]

[1] Seguono nell'originale sette righe cancellate. Anche in altri punti la lettera è tormentata da correzioni e cancellature, di minore entità.

[2] Castelnuovo 1905a, presentato il 23 gennaio 1905, e 1905b.

[3] Cfr. p. 562, nota 2 a let. 594 (15.12.1904).

[4] Il 22 ottobre 1903 erano state approvate le modifiche apportate al regolamento generale universitario e ai singoli regolamenti speciali. Cfr. anche p. 496, nota 1 a let. 530 (20.4.1902). In seguito, nell'aprile 1905, venne abrogato implicitamente il regolamento generale universitario e stabilita al 1° novembre 1904 l'applicazione dei nuovi regolamenti speciali.

602.

25 Dec[embre] 1904

Carissimo Guido

Vedo dalla tua lettera d'oggi che non sono riuscito a spiegarmi interamente, e temo che la lettera di ieri in cui ho abbozzato nuove vie di dimostrazione, dicendo alcune cose non giuste, valga ad aumentare la difficoltà d'intenderci piuttosto che facilitare l'intesa.

Intanto tu ammetti che si trovi un s per cui

$$sK_1 \equiv sK_2,$$

e noti anzi che la formula di Segre[1] (ch'io non posseggo ma che in fin dei conti ricostruivo per quel caso) semplifica la cosa mostrando che la curva di dir[amazione] K è ell[ittic]a.

Ma soggiungi, non è detto che il fascio $|sK_1|$ sia di curve pluricanoniche; io credo invece che la cosa si dimostri facilmente sulla rigata multipla, costruendo l'agg[iun]to delle sez[ion]i quadriche.

Ma non è questo per me il più interessante. Tu affermi che il ragionamento con cui costruisco due o più curve parabican[onich]e (o paraplurican[oniche]) non equivalenti cessa di valere se esiste un fascio di curve parabic[anonich]e (o paraplurican[oniche]). Ora ciò non mi par giusto, ed è qui per me la cosa essenziale.

Consideriamo un sist[em]a ∞^2 di $C'' + C_1 - C_2$, secanti su C una $g^1_{4\pi-4}$, alla quale appartenga un gruppo segato da una curva irriducibile di un sist[em]a contenente C e rispetto a cui C abbia un fascio residuo. In questo caso quel sistema ∞^2 si spezza in due: una rete, e un sistema ∞^2 non lin[ear]e, ed in quest'ultimo si trova almeno una curva parabican[onic]a non equivalente a quelle del fascio dato.

Da ciò, come vedi, segue l'esistenza del fascio irraz[ionale].

I tentativi a cui alludevo ieri per costruire in altro modo questo fascio esigerebbero almeno qualche complemento; ripensandoci dubito se si arriverà così in sostanza ad una via più semplice.

Aggiungi che se il ragionamento provante l'esistenza d'un f[asci]o irraz[ionale] riesce poco luminoso quando c'è un fascio lineare di curve para-i-canoniche ed una curva para-i-can[onic]a fuori di esso, il rag[ionamen]to diventa invece molto più chiaro, quando si scelga un i così grande che si abbiano *due* fasci lin[ear]i (non equiv[alent]i) di curve para-i-canon[ich]e.

Aspetto con interesse la notizia diffusa che mi prometti intorno al resultato sugli integrali.[2]

In proposito sarebbe utile che tu guardassi ciò che dice Humbert delle sup[erficie] iperellittiche in un certo senso degeneri, in cui se ben ricordo

il n[umer]o dei periodi si riduce da 4 a 3.[3] Io son persuaso che ciò non porti un'eccezione essenziale al teorema; ma può influire sul modo di enunciarlo.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] È firmato il decreto Sev[er]i?[4]

[1] Cfr. Segre 1887-89, 127; Enriques 1905d, 176, nota 10.
[2] Cfr. Castelnuovo 1905b.
[3] Il caso *degenere* è trattato in realtà in Picard 1889, cap. 3, § 12; a questo proposito si veda anche Painlevé 1897, «Seizième Leçon. Deuxième hypothèse».
[4] Si tratta del decreto di nomina di Francesco Severi a professore ordinario all'Università di Parma: cfr. p. 562, nota 2 a let. 594 (15.12.1904).

603.

26 dicembre 1904

Carissimo Guido,

per esaurire la questione delle sup[erficie] col fascio di C_π, nel senso già indicato, si presenta la seg[uen]te via semplicissima:

Esiste sulla sup[erficie] un fascio di curve ellittiche K, che, come tu stesso osservi, debbono avere lo stesso modulo. Quindi si può applicare il ragionamento che già ti esposi pel caso del fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e. Se p[er] es[empio] le K sono cubiche, i loro flessi danno origine ad una curva χ che contiene una γ_9 *senza coincidenze*, quindi χ (e il fascio delle K) è irraz[ionale]; qui non è neppure necessario di ricorrere alle trasformazioni fra le K che ci darebbero curve con una γ_{18} senza coincidenze.

Però questo ragionamento ha un inconveniente che si presenta anche per le sup[erficie] col f[asci]o ell[ittic]o di curve ell[ittich]e.

Noi sappiamo infatti che nessuna K ell[ittic]a acquista un p[un]to 2-plo; ma ci sono delle K che si riducono ad una curva ell[ittic]a contata 2 v[olte] $K = 2\theta$.

Si presenta perciò una questione un po' delicata. Quando la K ell[ittic]a variando con continuità si riduce a 2θ, si può considerare la K degenere come una curva ell[ittic]a doppia senza p[un]ti di diramaz[ione] *irriducibile*? Mi spiego

data una θ ell[ittic]a coi per[iod]i ω, ω', vi sono 3 curve irr[azional]i rappresentate dalla θ 2-pla, ed hanno come per[iod]i i valori incongrui di $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$. La nostra $K = 2\theta$ si può identificare con una di queste?

Parrebbe di sì perché nel passaggio al limite la sup[erficie] di Riemann connessa K, deve restare connessa. Ma, come vedi, la questione è delicata.

Sarebbe desiderabile di poterla illuminare sotto un altro aspetto, p[er] es[empio] di poter mostrare che le coppie di una (o di ciascuna?) γ_2^1 ell[ittic]a su K, al limite si riducono ai punti di θ contati due volte; allora forse non vi sarebbe più dubbio (?).

Ammettiamo che la difficoltà accennata si superi nel senso in cui io la vedo; allora lo stesso ragionamento applicato alle sup[erficie] con un f[asci]o ell[ittic]o di curve ell[ittich]e ci dirà che anche questo 2° fascio è ellittico: $p_g > 0$.

Rinascono quindi i dubbi sugli esempii comunicati a Picard.[1]

Riprendiamo dunque la nostra rigata F_4 2-pla con C_8 di dir[amazione] 4-secante. È il solo esempio che veramente possiamo tentare di costruire coll'operazione $\sqrt{\ }$; nota che con $\sqrt[p]{\ }$ non si costruisce alcuno dei nostri es[emp]i superiori.

Ma non basta neppure l'operazione $\sqrt{\ }$. Bisogna che la C_8 di dir[amazione] sia segata su F da una φ_4 che abbia come ulteriore intersezione 4 gen[eratric]i di contatto. Ora, s'io non erro, questa condizione porta o che le due g_2^1 costruttrici sieno identiche (e C_8 composta di 4 unisecanti?), o che la somma dei valori dell'integrale per le loro coppie sien legate dall'equaz[ione] $2a \equiv 2b$ (invece che $4a \equiv 4b$), e perciò (mi sembra) che la C_8 si spezzi in due bisecanti; ed allora proprio viene $p_g > 0$ (ed anche un 2° fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e semibicanoniche).

Ripenserò alle sup[erficie] col fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e, riprendendo le considerazioni di cui già altra volta ti accennai.

Attendo la tua lettera annunziata ieri.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. p. 556, nota 2 a let. 590 (7.12.1904).

604.

27 dicembre 1904

Carissimo Guido,

ho ricevuto stamani la tua lettera e poi la cartolina. Ti rispondo in breve perché mi sento sempre un po' depresso in seguito ad un leggero disturbo avuto ieri sera, motivato (credo) da un po' di disordine del Ceppo.[1]

Sono convinto che la via da te percorsa debba condurre al resultato desiderato, ma non mi sorprenderebbe che vi fosse qualche caso d'eccezione da interpretarsi convenientemente.

Tu dici che la varietà $V\ \infty^d$ di curve ammette d integrali con $2d$ per[iod]i; come ti accennavo l'altro giorno,[2] sembra possibile una diminuzione nel n[umer]o di questi per[iod]i (forse di 1 soltanto?).

Che le somme $I_0 + \ldots + I_d$ relative ad un p[un]to della sup[erficie] non possano essere tutte cost[anti] mi pare dovrebbe risultare da ciò che altrimenti i gruppi di curve del nostro sistema individuati dai p[un]ti della sup[erficie] starebbero tutti in una serie lineare (teor[ema] d'Abel).

Non capisco bene ciò che mi accenni nella cartolina d'oggi. Qual è il caso particolare del gruppo imprimitivo? A me sembra che un gruppo permutabile sia *sempre* imprimitivo, salvo che gli ∞^1 fasci d'imprimitività possono essere tutti trascendenti.

Dalla tua cartolina non capisco nemmeno le osservaz[ion]i che muovi a ciò ch'io dicevo per le sup[erficie] col fascio di C_π.

A quelle con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e ho ripensato un po' ieri stesso, dopo averti scritto. Ho visto qualcosa e spero anzi di arrivare in fondo, ma c'è qualche difficoltà, volendo evitare la via di cui ieri ti facevo notare gl'inconvenienti.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] Intendi: feste natalizie.
[2] Cfr. p. 570, let. 602 (25.12.1904).

605.

29 dicembre 1904

Carissimo Guido,

ho piacere di ciò che mi scrivi intorno alla tua questione. Nota che l'esistenza di un integrale con 2 per[iod]i (sulla sup[erficie]) porta un fascio ellittico di curve.

Quanto alle sup[erficie] con un fascio di curve ell[ittich]e C senza punti base ($p^{(1)} = 1$), il caso in cui ci sia una curva C che si riduce ad una χ contata 2 v[olte] o qualche altro pasticcio non sembra potersi escludere, e complica necessariamente la trattazione.

Prendi p[er] es[empio] una riga[t]a F_4 cui appartenga una C_8 ell[ittic]a quadrisecante, sezione di una φ_4 che contiene 8 gen[eratric]i.

La rigata considerata come 2-pla $\{\sqrt{F_4}\}$, dà una sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e, cui appartengono 8 curve (?) corrispondenti alle 8 generatrici sopra nominate.

Io credo tuttavia di avere ricostruito una dimostrazione relativa al caso delle sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e, in cui si fa

vedere che almeno qualche plurigenere è 1. Però se si potesse eliminare la difficoltà delle curve ell[ittich]e multiple, facendo vedere che esse possono trattarsi come semplici (il che avviene nell'es[empio] sopra citato) si potrebbe dimostrare addirittura che $p_g > 1$.

Pel caso del fascio di C_π con $\pi > 1$ l'esistenza del fascio di curve ellittiche non è dubbia. Solo la 2ª parte del ragionamento (in cui si conclude $p_g > 1$) non l'ho ripresa in esame; io credo che la conclusione sussista e che vada anche il ragionamento, ma come si farebbe più presto anche qui se si potesse superare la difficoltà delle curve ell[ittich]e multiple, o almeno mostrare che queste non possono presentarsi in un fascio *razionale*!

Ti riscriverò volentieri diffusamente di tutto. Intanto però ti prego (se non le hai già distrutte) di conservare le mie lettere ultime, soprattutto quelle ove è accennato alla dimostrazione che per $\pi > 1$ il fascio delle curve ell[ittich]e è irraz[ional]e.[1]

Prima di questo riordinamento della dimostrazione, a scanso di fare fatiche inutili o sovrabbondanti, vorrei porre in chiaro due punti:

1) Che cosa si deve pensare dei nostri esempii dati a Picard?[2] Tutto mi porta a *negare* l'esistenza d'una sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di curve di gen[ere] 2 rappresentata sulla rigata F_4 2-pla con C_8 di diram[azione] quadrisecante *irriducibile* e *nessuna generatrice di diramazione*. Hai fermato la tua attenzione su ciò?

2) Se in un fascio (raz[ionale] o ell[ittic]o) di curve ell[ittich]e C, c'è qualche curva ell[ittic]a multipla, ed è $p^{(1)} = 1$, la costanza del modulo mi pare sussista sempre. Si domanda: quando io riferisco raz[ionalmen]te due C generiche (in un n[umer]o finito di modi), e vado così razionalmente da un certo G_n di una C ad un G_n su ogni altra C, che cosa accade sulla C spezzata? se p[er] es[empio] c'è una $C = 2\chi$ si trova su di essa un G_n o un $G_{n/2}$?

Più grave imbarazzo ci produrrebbe se in un fascio di curve ell[ittich]e ($p^{(1)} = 1$) fosse possibile uno spezzamento di natura più complicata, p[er] es[empio] una curva composta di una parte razionale (contata magari due v[olte]) e di un'altra.

Come si farà ad eliminare il sospetto di tali pasticci? (Credo però che questi si eliminino, e resti forse solo la curva ell[ittic]a 2-pla).

Tanti cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

[P.S.] Amaldi mi avverte che è stato firmato il suo decreto di trasferimento da Cagliari a Modena. Però egli teme fortemente che la Corte dei Conti arresti la cosa, dato il cambiamento di cattedra.[3] Perciò è bene non parlare della cosa.

[1] Cfr. in particolare p. 566, let. 599 (20.12.1904), p. 568, let. 601 (24.12.1904) e p. 570, let. 602 (25.12.1904).

[2] Cfr. p. 556, nota 2 a let. 590 (7.12.1904).

[3] Ugo Amaldi, allora professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica all'Università di Cagliari, fu trasferito alla cattedra di Geometria analitica e proiettiva presso l'Università di Modena con decreto 1° giugno 1905.

606.

31 gennaio[1] 1904

Carissimo Guido

anzitutto i più cordiali augurî a te, all'Elbina, ai bimbi, pel nuovo anno!

Ho ripensato durante questi giorni alle sup[erficie] con un fascio di curve ellittiche. Il caso che una curva C si riduca ad una K contata 2 v[olte] non pare possa escludersi a priori; basta vedere il caso dei fasci di sestiche piane di Halphen.[2] Tuttavia, mi sembra che se il gen[ere] del fascio è 0 o 1, e $p^{(1)} = 1$, la presenza di $C = 2K$, non invalidi la costanza del modulo; ed è di questa soltanto che mi servo nelle considerazioni che ti espongo.

Teorema Se una sup[erficie] contiene un fascio (raz[ional]e o irraz[ional]e) di curve C, tutte collo stesso modulo, ed esiste una curva K unisecante le C, esiste un fascio (ell[ittic]o) di unisecanti le C.

Osserverò anzitutto (e sarà utile per le applicaz[ion]i che si faranno del teor[ema]) che un fascio di curve ell[ittich]e di $=$ [stesso] modulo non esiste sopra una sup[erficie] razionale, e che il teorema è vero sopra le rigate ellittiche, dove un fascio di curve ell[ittiche] plurisecanti (tutte di $=$ [stesso] mod[ul]o) non ammette alcuna (generatrice) unisecante K.

Ciò posto osservo: facendo corrispondere i punti A, A' di due C sez[ion]i di K, si dà luogo a *due* corrispondenze, per le quali si corrispondono le due g_2^1 individuate risp[ettivamente] da $2A$, $2A'$. Ne segue che si corrispondono in modo univoco le coincidenze di queste g_2^1. Dunque insieme a K si hanno altre 3 unisecanti le C (K_1, K_2, K_3), e si ha un fascio di bisecanti cui appartengono $2K = 2K_1 = 2K_2 = 2K_3$; bisecanti che dico essere necessariamente spezzate.

Osservo anzitutto che queste bisecanti sono ellittiche senza p[un]ti comuni. Infatti una di esse si riduce per continuità a $2K$, ed il grado di K deve essere 0, altrimenti $(n > 2\pi - 2)$ la nostra sup[erficie] F è riferibile ad una rigata, *caso già trattato.*

Ciò posto consideriamo sopra ogni C la γ_2^1 ell[ittic]a individuata dalle coppie segate da K K_1, K_2 K_3. La serie delle γ_2^1 si può considerare come una sup[erficie] ϕ con un fascio di curve ell[ittich]e di $=$ [stesso] mod[ul]o; con una unisecante (p[er] es[empio] K K_1); ci sono dunque altre 3 unise-

canti. Una di queste (diversa da K_2 K_3) dà su F una curva θ bisecante le C che sega le C in coppie della γ_2^1; la θ non sega $2K$, quindi neppure le bisec[an]ti del nostro fascio, perciò deve appartenere al medesimo (assurdo) oppure comporsi di due componenti di quello. Da ciò segue che le bisec[an]ti del nostro fascio sono spezzate. c.d.d.

Ti avverto poi che a questo resultato son giunto con altre riflessioni non probanti ma convincenti, perché non sapevo ammettere che una rigata 2-pla con 4 unisec[an]ti di diramaz[ion]e potesse rappresentare due sup[erficie] così essenzialmente diverse (una con *due* fasci irraz[ional]i e l'altra no).

Corollario Se una sup[erficie] contiene un fascio (raz[ionale] o irraz[ionale]) di curve ell[ittich]e C di = [stesso] modulo, ed esiste una curva n-secante, esiste un fascio ell[ittic]o di curve n^2-secanti le C.

Ragionerò nell'ipotesi di una bisecante.

Considero le g_2^1 appartenenti ad una C generica come i *punti* di una curva ell[ittic]a C_1. Ho una sup[erficie] con un fascio di C_1 di = [stesso] mod[ul]o su cui vi è una unisecante, quindi (teor[em]a) un fascio di unisecanti.

Tornando alla nostra F si ha dunque che ad ogni g_2^1 su una C si può associare *razionalmente* una g_2^1 di un'altra C generica, quindi al G_4 delle coincidenze della prima g_2^1 il G_4 analogo della 2ª. Segue l'enunciato.

Se questi resultati, che sottopongo al tuo esame stanno, la nostra questione resta risolta nel modo più completo e più facile: condizione di riferibilità a rigata $p_g = 0$ $p_a < 0$.

Implicitamente restano demoliti i nostri esempii.

Cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

[P.S.] Sev[er]i mi comunica la sua avvenuta nomina,[3] della quale sono lietissimo.

[1] Evidente lapsus per dicembre, come risulta dalla formula augurale con cui si apre la lettera.

[2] Cfr. Halphen 1882.

[3] Cfr. p. 562, nota 2 a let. 594 (15.12.1904).

607.

1 gennaio 1905

Carissimo Guido,

la mia di ieri risponde anticipatamente almeno ad una parte della tua di oggi, recandoti l'esempio indiscutibile del fatto che una curva ell[ittic]a può degenerare in una curva 2-pla (fascio di sestiche piane di Halphen).[1]

Ritorno ora sulle sup[erficie] col fascio ell[ittic]o di C_π $(\pi > 1)$ e ti faccio notare anzitutto che le due curve parabicanoniche ch'io costruisco non possono coincidere perché sono *non equivalenti*. Pertanto l'esistenza del fascio di curve ellittiche mi pare fuori di dubbio.

Più delicata è la questione di dimostrare che questo fascio è irrazionale. Io credo di aver confermato questa conclusione anche per una via diversa da quella che ti comunicai. Ma in fin dei conti questi ragionamenti sono sempre un po' sforzati, e siccome io stesso arrivo in fondo a seguirli con molta fatica, così non mi rimarrebbe la convinzione sicura del fatto, se del fatto stesso non fossi persuaso per intuizione.

Ma ho pensato che, in fin dei conti, la cosa essenziale per noi, non è di stabilire l'irraz[ionali]tà di quel fascio, bensì che $p_g > 0$. Ed a questa conclusione (anzi a $p_g > 1$) si arriva direttamente se si fa l'ipotesi di un fascio raz[ional]e di K ell[ittich]e n-secanti le C_π. In questo caso infatti rappresentiamo la sup[erficie] F sopra una rigata ell[ittic]a multipla φ. Avremo una curva di dir[amazione] θ, e un fascio di unisecanti K_1 immagini delle K. Ora si può costruire il sistema agg[iun]to a $2K$, dimostrando che esso è costituito da θ più 0 gen[eratrici]. Sulla sup[erficie] F il 2-plo del fascio di curve ell[ittich]e K ha dunque un sistema agg[iun]to individuato da θ. Orbene è facile persuadersi che θ si compone di più che due K del fascio, e quindi $p_g > 1$. La discussione esige soltanto di considerare i varii casi di spezzamento delle K; può ben darsi che θ si componga di un certo numero di componenti delle K, ma potrai persuaderti almeno di questo che

«sommando a $|2K|$ delle curve convenienti, il cui insieme designerò con χ, l'agg[iun]to $|\theta + \chi|$ contiene $|2K + \chi|$».[2]

Del resto la θ non può comporsi che di curve $\frac{K}{2}$.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ho ricevuto il bel volume delle conferenze di Picard[3] fatte in America.

Pare che le condizioni $p^{(1)} = 1 \quad p_n < p_g$ definiscano la classe delle sup[erficie] con un fascio di gen[ere] $p_g - p_n$ di curve ell[ittich]e, eccepito il caso $p_g = 1 \quad p_n = -1$.

[1] Cfr. Halphen 1882.
[2] Seguono nell'originale sette righe cancellate.
[3] Picard 1905a.

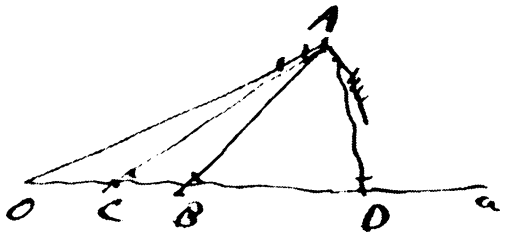
608.

2 gennaio 1905

Carissimo Guido

È giustissima la tua osservazione che il caso delle curve ellittiche armoniche non rientra nel mio ragionamento ed esige un esame a parte. Ma persisto a credere che si arrivi in fondo anche in quel caso.

Sieno C le curve armoniche di un fascio ell[ittic]o e si abbia una unisecante A. Mi è lecito supporre che le C sieno cubiche piane aventi un flesso nel punto sezione di A. Nella figura annessa si vede il flesso A, il punto B che descrive una unisecante (B), i punti C, D che descrivono due unisecanti o una bisecante (CD). Si ottiene, nella peggiore ipotesi, un fascio raz[ionale] di quadrisec[an]ti a cui appartengono A^4, B^4, $(CD)^2$; perciò queste quadrisecanti sono ellittiche.



Consideriamo ora la retta a polare armonica del flesso A; essa descrive una rig[at]a ellittica φ su cui B ed O descrivono due unisecanti, e C, D una bisecante di cui resta a provare la riducibilità. Perciò faccio appello alle considerazioni utilizzate per l'estensione del teor[ema] di Noether[1] (riferibilità a rigata di una sup[erficie] con un fascio di coniche).

Si hanno due bisecanti armoniche (BO), (CD), si riesce quindi ad associare a coppie le generatrici (di una g_2^1) di φ, per modo da avere due bisecanti armoniche di una rigata raz[ional]e 2-pla φ', e resta a provare che se una di queste è spezzata, lo è pure l'altra (cioè l'immagine di (CD) su φ', e quindi (CD)).

La cosa si riduce a ciò:

se nel piano si hanno in un fascio di curve iperellittiche (C_n con O^{n-2}) due curve doppie, tutte le curve del fascio sono spezzate (in coppie di curve del fascio determinato dalle due curve raz[ional]i $C_{n/2}$).

Capisco del resto che noi partiamo da una presunzione opposta. Tu ritieni infatti che gli esempii dati a Picard[2] sieno validi, ed io invece non ci credo, anche indipendentemente dall'essere questi esclusi come conseguenza di un altro ragionamento.

Ciò che oggi mi scrivi in proposito si riduce a questo: si prenda una F_4 con una C_8 quadrisecante, la quale sia sezione di una φ_4 che ha con F_4 4 generatrici comuni, ciascuna contata 2 v[olte], e si costruisca quindi la F_4 2-pla (della quale risulta allora dimostrata l'esistenza). Orbene, come si può fare in modo che le 8 gen[eratric]i sez[ion]i di φ_4 per C_8 si riducano a 4 2-ple? Questo mi pare il punto essenziale della questione.

Ed io non vedo che due modi:

1) Supporre che le gen[eratric]i uscenti dai 4 punti cuspidali di una retta 2-pla a di F_4 vadano a passare pei 4 p[un]ti cusp[idal]i sulla retta 2-pla b; ciò porta l'identità delle due g_2^1 con cui si costruisce F_4.

2) Supporre che la φ_4 per C_8 sia bitangente tanto ad a che a b. Ciò mi sembra portare che le due g_2^1 non differiscano più per quarti di periodo, ma per metà, e da ciò intravedo debba seguire che la C_8 si spezzi in due bisecanti. Ma in tal caso nasce su F_4 un fascio di bisecanti (cui appartengono le dir[ettric]i contate 2 v[olte]), e, per quanto vedo, le curve obiettive ci danno un fascio ellittico pure di bisecanti.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Se non erro il caso equianarmonico si potrà trattare in modo analogo a quello armonico.

[1] Cfr. Noether 1871c ed Enriques 1899c.
[2] Cfr. p. 556, nota 2 a let. 590 (7.12.1904).

609. [c.p.]

[Bologna] 3 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido

Nel caso $\pi > 1$ le due curve parabicanoniche ch'io costruisco possono effettivamente resultare infinitamente vicine; non però debbono considerarsi come coincidenti perché, neppure in quel caso, sono equi[valen]ti.

Ad evitare però la noia di questo caso e le complicazioni di tutto il ragionamento sto pensando ad un'altra via. Le ∞^1 C'' passanti per un $G_{4\pi-4}$ su $\overline{C}$ formano una serie d'indice > 1 (anzi > 2); associando ad ogni p[un]to della sup[erficie] le C'' che vi passano, si rappresenta la sup[erficie] sopra una serie di G_n di una curva ell[ittic]a, e mi pare si possa escludere che i G_n variino in una serie lineare. Si ottiene quindi una rappresentaz[ion]e della super[ificie] data sopra un'altra, che presenta circostanze assai curiose. Non vedo però in modo sicuro che ne scaturisca un assurdo.

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 1905, dal timbro postale.

610.

4 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

convengo dell'esistenza di una rig[at]a F_4 2-pla con C_8 quadrisecante irriducibile, ma credo di poter provare che le analoghe quadrisecanti del fascio individuato dalla C_8 sono immagini di curve spezzate, e quindi $p_g = 1$; d'altronde la conclusione $p_g = 1$ mi sembra debba scaturire dal ragionamento stesso dato a Picard, ripreso in esame.

Anzitutto la nostra F_4 2-pla rappresenta una φ con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e K. Sopra ogni K (armonica) abbiamo un'involuzione γ_4^1 ell[ittic]a, costituita dalle coincidenze delle g_2^1; considerate le γ_4^1 come curve K_1, si ha una sup[erficie] φ_1 (con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e K_1) sulla quale esiste *una unisecante* rappresentata dalla C_8.

Da ciò si desume che su φ_1 esiste almeno una 2ª unisecante, armonica alla 1ª. Che cosa sarà l'immagine di questa sulla F_4? Evidentemente una curva ell[ittic]a quadrisecante, del fascio determinato da C_8; la quale curva ell[ittic]a (non di dir[amazione]) è dunque immagine di due curve spezzate.[2] Il mio ragionamento dell'altro giorno (che difenderò poi contro la tua obiezione) prova quindi che altrettanto accade per tutte le curve del fascio.

Ma perché affermavamo noi che per la F_4 2-pla è $p_g = 0$? Si prendeva sulla F_4 una sez[ion]e quadrica θ; il sistema agg[iun]to è costituito dalla C_8 (di dir[amazione]) + 4 gen[eratric]i (r) da contarsi 2 v[olte]. Ora come si può affermare che $C_8 + 2(4r)$ e 2θ sieno curve non equivalenti? Ciò avverrebbe se le due quaterne di gen[eratric]i $4r$ e la quaterna residua di C_8 (sez[io]ne della φ_4 per C_8) dessero delle g_8 2-ple non equivalenti; ma non mi sembra che ciò accada, ed anzi mi par di vedere che proprio $C_8 + 2(4r)$ e 2θ sieno equivalenti, cioè $p_g = 1$.

Ecco ora la difesa del mio ragionamento. Ricordo che tutto seguiva dal teor[ema]: se esiste un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e C di = [stesso] modulo, dotato di una unisecante, esiste un fascio di unisecanti.[3] L'ipotesi del teor[ema] è dunque l'esistenza di *una unisecante* K; ma tu mi rimproveri di supporre addirittura che la K sia il luogo di un flesso. Orbene questa supposizione è lecita, perché essendo raz[ionalmen]te dato sopra ogni C un punto A_c, è data una g_3^2 individuata da A_c^3, e si può quindi trasformare raz[ionalmen]te tutte le curve ell[ittich]e C in cubiche di cui un flesso descriva la unisecante K.

Insomma io credo che ciò che ti scrivevo intorno alle sup[erficie] col fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e regga intieramente, e che l'esempio dato a Picard[4] (di cui tu dai oggi la costruzione effettiva) sia una conferma del resultato.

Quanto al caso del fascio ell[ittic]o di C_π (con $\pi > 1$), avevo già visto ieri che avevi ragione nel ritenere non possa escludersi il caso di due curve parabic[anonich]e infinitamente vicine, caso che a dir il vero (come tu stesso osservi) non può infirmare il resultato. Ti ho anche accennato ieri ad un nuovo tentativo per superare la difficoltà in altro modo. Ma i pasticci a cui sono stato condotto mi hanno portato ad intuire un fatto che, ove sia provato, condurrebbe rapidamente al resultato. Te ne riscriverò domani se la cosa si concreterà.

Ritorno ancora sul tuo esempio. Voglio fornirti una nuova prova indiretta che quella sup[erficie] possiede un 2° fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e quadrisecanti le prime.

Non avrai difficoltà ad ammettermi che esista una sup[erficie] φ con due fasci ell[ittici] di curve ell[ittich]e armoniche quadrisecanti, per modo che, detta C la curva di un fascio, le curve K dell'altro fascio seghino su C le quaterne della γ_4^1, luogo delle coincidenze delle g_2^1. Ciò posto, fissata una K, si costruisce raz[ionalmen]te sopra ogni C *una* g_2^1, che ha come coincidenze le intersezioni di K. La φ si rappresenta quindi sopra una rigata ell[ittic]a 2-pla con curva di dir[amazion]e ell[ittic]a quadrisecante! e si ricade proprio sul tuo esempio!

Io ho intenzione di redigere a giorni la notina[5] per i C[omptes] R[endus] promessa a Pic[ard], e potrò affrettare la cosa se tu lo desideri.

Aspettavo soltanto per potere accennare ai nuovi risultati di cui stiamo discutendo; ma ciò non è essenziale.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.
[2] Seguono nell'originale tre righe cancellate.
[3] Si tratta del teorema enunciato a p. 575, let. 606 (31.12.1904).
[4] Cfr. p. 556, nota 2 a let. 590 (7.12.1904).
[5] Enriques 1905b.

611.

5 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

ringrazio anzitutto te e l'Elbina degli augurî affettuosi, e del gentile ricordo.[2]

Ho ripensato alla questione delle sup[erficie] col fascio ell[ittic]o di C_π ($\pi > 1$). La nuova via che avevo escogitata non mi sembra condurre a nulla. Ma ho ripreso in esame il ragionamento che ti ho comunicato, e lo credo inattaccabile; della difficoltà nascente dalle curve parabicanoniche infinitamente vicine, ti discorrerò poi.

Prima mi preme di rispondere al tuo esempio: se una sup[erficie] possiede un fascio ell[ittic]o di C_π di = [stesso] modulo, dotate d'una trasformaz[io]ne T in sé ($T^p = 1$), *esiste un fascio di unisecanti le* C_π. Per vederlo costruisco anzitutto il fascio raz[ionale] di curve ellittiche K p-secanti le C. Tra queste ci sono le curve descritte dai punti (p-pli) di coincidenza che sono unisecanti, ogni punto p-plo descrivendo *una* K che dirò $\overline{K}$. Ciò posto confronta la sup[erficie] data F colla sup[erficie] φ costituita dalle coppie di p[un]ti di C e di $\overline{K}$; la φ contiene un fascio ell[ittic]o di $\overline{K}$, ed un fascio di unisecanti. La φ e la F si rappresentano sulla medesima rigata ell[ittic]a (ciclica d'ord[ine] p), colla stessa curva di diram[azion]e, quindi coincidono.

Questo esempio suggerisce anzi l'idea che le sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di C_π ammettano sempre un fascio di unisecanti. Non è prudente però di affermarlo, potendosi presentare forse qualche eccezione, almeno nel caso iperellittico. Invece la mia affermazione che la sup[erficie] contiene un fascio irraz[ionale] di curve ellittiche $C'' - \overline{C}$ è per me a priori fuori di dubbio. E voglio parteciparti le ragioni, dirò così *morali*, della mia convinzione, ragioni per cui ho affermato subito che il bigenere è ≥ 1, appena visto che il parabig[enere] ≥ 1, ed ho affermato poi l'esistenza delle curve $C'' - \overline{C}$, per ogni C, $\overline{C}$, appena vista l'esistenza di una curva parabican[onic]a (non bicanonica).

Queste ragioni divengono anzi quasi una dimostrazione, se si ammette che le C_π abbian = [stesso] modulo.

Come si costruisce una sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di C_π di = [stesso] modulo? Assegnando ad arbitrio l'ente ellittico «fascio», dirò f, e la curva C_π. Orbene quando noi diamo l'ente ell[ittic]o f, p[er] es[empio] un fascio di p[iani] in S_4, e (in ogni piano) una curva C_π di dati mod[ul]i, non veniamo ad aggiungere *alcuna irrazionalità* all'equazione di f; ma se invece supponiamo l'esistenza di curve parabi[canonich]e in n[umer]o finito, resta individuata entro f *una corrispondenza*, il che non può essere fatto razionalmente. (A stretto rigore di qua seguirebbe soltanto $P \geq 1$).

Ragioni analoghe mi han guidato nel caso del fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e. Ora poi ti dirò: ti pare possibile che le sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e abbian sempre $p_g \geq 1$, e che il p_g possa essere 0 per sup[erficie] con un fascio di C_π?

Colle considerazioni precedenti ho voluto soltanto scuotere la tua convinzione con elementi d'ordine intuitivo, più facili ad essere accolti. Ora poi ti dirò: se ammetti costruito sulla sup[erficie] col f[asci]o di C_π, un fascio di curve ell[ittich]e, il ragionamento che ti ho comunicato prova irrefutabilmente che è $p_g \geq 1$ (e segue quindi l'esistenza del fascio irraz[iona-

le]); e quel ragionamento non è davvero complicato; basta costruire il sistema agg[iun]to ad una coppia di curve ell[ittiche] del fascio!

Nella dimostrazione che la sup[erficie] F possiede un fascio di curve ell[ittiche], c'è un solo punto da approfondire: il caso di due curve parabic[anonich]e coincidenti. È permesso in questo caso di trattare le 2 curve come curve infinitamente vicine, e ragionare come nel caso generale? Credo di sì, ma convengo che la cosa esigerebbe qualche giustificazione.

Tuttavia penso che la difficoltà si superi dimostrando che esistono sempre *almeno due curve parabic[anonich]e distinte*, nel seg[uen]te modo:

Se esiste la curva parabic[anonic]a $C'' - \overline{C}$, vuol dire che $|C_1''|$ sega su $\overline{C}$ una serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-5}$ di def[icienz]a 1. Per ogni $G_{4\pi-4}$ di questa serie, vi è un fascio di C_1'' e una serie ell[ittic]a di C'' (C var[iabil]e nel fascio). Allora vi è nella serie una curva (almeno) spezzata $C_2'' - \overline{C}$. Poniamo che essa coincida con $C_1'' - \overline{C}$. Ne segue che C_2 è infinitamente vic[in]a (coincidente) a C_1, e quindi C_2'' sega su $\overline{C}$ la stessa $g_{4\pi-4}^{3\pi-5}$ scompleta, che $|C_1''|$. Perciò la serie delle C'' per un $G_{4\pi-4}$ di $g_{4\pi-4}^{3\pi-5}$, si spezza nel fascio $|C_1''|$ *contato 2 v[olte]*, ed in una serie ell[ittic]a di C''.

Come vedi si può andare avanti, e se si ammette che per un $G_{4\pi-4}$ passi un fascio ($|C_1''|$) contato ρ v[olte], dopo ρ operazioni si troverà una nuova curva parabic[*anonic*]*a distinta da* $C_1'' - \overline{C}$.

Anzi si otterranno almeno $3\pi - 4$ curve parabic[anonich]e distinte.

Troverai forse strano che dalle considerazioni prec[eden]ti *appaia crescere il numero delle curve parabic[anoniche] ogni volta che due di esse coincidono*. Potrei rispondere che in fin dei conti si tratta d'un ragionamento per assurdo, giacché le curve parabic[anoniche] sono ∞. Ma, se non si arrivasse in fine all'assurdo, la cosa potrebbe interpretarsi nel senso che «due curve parabic[anoniche] non posson coincidere».

Avevo fatto anch'io un'osservazione simile a quella della tua lettera di ieri, ma essa è ben lungi dal provare che la coincidenza è effettivamente possibile.

Prendi invero il sistema d'indice ν delle C'' per un gruppo $G_{4\pi-4}$ della serie bic[anonic]a di $\overline{C}$. Ci sarà una curva inviluppo, luogo dei p[un]ti per cui passano due C'' coincidenti. Ora a questa curva inviluppo I deve aggiungersi o no la $\overline{C}$? Tu vedi che no, se si provasse che I ha la molteplicità 2ν in ogni punto O di $G_{4\pi-4}$ (base pel fascio C''). Infatti l'intorno di O è una retta ν-pla ell[ittic]a con 2ν coincidenze; se ad I si aggiunge $\overline{C}$ si ha una molt[eplicit]à $> 2\nu$ in O.

Io spero che le mie lettere di ieri e di oggi valgano a convincerti del resultato che

«ogni sup[erficie] con $p_g = 0 \quad p_n < 0$ è riferibile a rigata».[3]

Comprendo la difficoltà ad accogliere questo resultato che, nelle condizioni delle nostre conoscenze attuali, si presenta come inaspettato; ma, io credo che la proprietà trovata per le sup[erficie] irregolari, porterà un grande ristringimento di tutte le nostre previsioni. Questo è già apparso subito p[er] es[empio] nel fatto che si potesse avere $p_a \geq 0$ e quindi $P > 0$ per $p^{(1)} > 1$, mentre tre anni fa vedevamo soltanto che in questo caso esistono curve *pluri*canoniche.[4]

Tanti saluti cordiali tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Mi accorgo in ultimo che ogni sup[erficie] con un fascio di C_π di = [stesso] mod[ul]o contiene un fascio di unisecanti. Non ho fatto la dimostrazione che tuttavia credo non difficile, ma rilevo la cosa da un conto di costanti che non può fallare.

Domani ti discorrerò di una semplificazione che ho in vista nel caso del f[asci]o ell[ittic]o di curve ell[ittich]e.

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.
[2] Il 5 gennaio era il compleanno di Enriques.
[3] A questo proposito cfr. Enriques 1905c e 1905d.
[4] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1901, § 24.

612.

5 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

mi sono accorto che il ragionamento con cui ieri trattavo il caso delle curve parabic[anonich]e infinitamente vicine, è vizioso. Si può invece trattare direttamente quel caso, costruendo su $\overline{C}$ la $g^1_{4\pi-4}$ individuata dalle sez[ion]i infinitamente vicine delle due curve parabic[anonich]e. Questa serie si costruisce, senza considerazioni infinitesimali, ma il caso in cui le curve parabic[anonich]e fossero bic[anonich]e esigerebbe una considerazione speciale. Tutto sommato è una noia, sebbene si comprenda che l'ostacolo non è essenziale.

Ma io credo si possa evitare ogni difficoltà ricostruendo la trattazione nel modo seg[uen]te:

Ammetto solo data una curva ell[ittic]a $(4\pi - 4)$-secante le C, K di gr[ad]o 0 (quale è una curva parabic[anonic]a).

Costruiamo il sistema $2i$-esimo agg[iun]to $|C^{2i}|$ e consideriamo la serie che esso sega su $\overline{C}$. Sia questa, se è possibile, completa.

$|C^{2i}|$ ha la dim[ensione] $i(4\pi - 4) - \pi$; sega K in $G_{4\pi-4}$. Per ogni

$G_{4\pi-4}$ passano almeno $\infty^{i(4\pi-4)-\pi-(4\pi-4)+1}$ C^{2i}. Quindi le serie segate su $\overline{C}$ dai sistemi di C^{2i} individuati da due $G_{4\pi-4}$ (eq[uivalent]i) di K, hanno gruppi comuni per i assai grande. Uno di questi gruppi appartiene a due C^{2i} e quindi ad un fascio: C^{2i} contiene $\overline{C}$. Esistono perciò curve $C^{2i} - \overline{C}$ qualunque sieno C, $\overline{C}$, e si ottiene il fascio irraz[ional]e di curve ellittiche!

Rettifico ciò che ti dissi ieri in postscritto: mi pare che vi sieno esempii di sup[erficie] con un fascio di curve C_π di $=$[stessi] mod[ul]i, non dotate di un fascio di unisecanti (e possedenti un n[umer]o di moduli inferiore a quello del caso generale).

Ricevo ora la tua cartolina; rilevo in essa la correzione del resultato di Hurwitz, che invero mi pareva incompatibile con certe considerazioni su quelle sup[erficie].

Vedo però che la tua cartolina è scritta prima di ricevere la mia lettera di ieri l'altro, alla quale attendo risposta.

Ho cercato di semplificare il ragionamento pel fascio di curve ell[ittich]e armoniche, da ciò mi sono nati dei dubbi sulla cosa stessa.

È possibile che esista una rig[at]a ell[ittic]a F_4 2-pla che abbia come curva di diram[azion]e una bisecante ell[ittic]a + le due dir[ettric]i 2-ple? Se sì, si ottiene una sup[erficie] con $p_g = 0$ $P = 1$.

Ma con tale questione mi sono fatto il capo grosso, sicché ci ripenserò domani.

Trovo opportunissimo di dare a quelle varietà il nome di Picard.[2]

Se vuoi dopo redatta la mia nota[3] per Pic[ard] te la manderò affinché tu possa regolarti pel riattacco.

Penserei di non enunciare la completezza della s[eri]e caratt[eristica] per sistemi cont[inu]i, ma limitarmi a dire che un sist[em]a lin[ear]e appartiene *in generale* a una serie di sist[em]i lin[ear]i $\infty^{p_g - p_a}$. Ti va bene? o in quale altro modo desideri presenti la cosa?

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.

[2] È questo il nome con cui sono note oggi nella letteratura: cfr. Castelnuovo 1905a, 221.

[3] Enriques 1905b.

613. [c.p.]

[Bologna] 6 [gennaio 1905] sera

Carissimo Guido,

sono quasi convinto dell'esistenza di sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e armoniche $p_g = 0$ $P = 1$. Ad ogni modo questa sup[er-

ficie] su cui è data raz[ionalmen]te *una* g_2^1 (quadrato della tras[formazione] $z' = iz$) si riduce al solo esempio noto. Forse esiste anche un tipo di sup[erficie] con curve ell[ittich]e equianarmoniche, la quale sembra pure debba ridursi ad un tipo ben determinato. Così il teor[ema] «$p_g = 0 \quad p_a < 0$ dà la condiz[ion]e di rif[eribilit]à a rigata» subirebbe soltanto due eccezioni nettamente caratterizzate.[1] Mi occuperò domani della costruzione del caso equianarmonico.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1905d, §§ 2-3.

614.

7 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

tu ricostruisci, in modo irrefutabile, il ragionamento (che, se non erro, facemmo insieme a Firenze) per provare che la rig[at]a F_4 2-pla con C_8 quadrisec[ante] di dir[amazione] ha $p_g = 0 \quad P = 1$.

In una forma poco diversa, sono stato condotto anch'io ieri sera e stamane, a riconoscere la cosa, osservando che una sez[ion]e quadrica (immagine d'una quadrisecante C della sup[erficie]) e la curva di dir[amazione] $C' +$ gen[eratric]i, segano sulle curve ell[ittich]e del fascio quaterne non equivalenti.

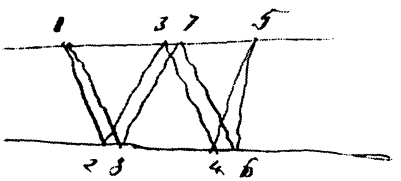
Non vi è dunque più alcun dubbio in proposito. Ho avuto torto di negar fiducia a quel nostro vecchio ragionamento; avrei potuto risparmiare molti sforzi. Forse però questi non sono perduti, perché intanto ne risulta che i soli casi possibili in cui $p_g = 0$ corrispondono a curve ell[ittich]e armoniche (unico tipo la F_4 2-pla), o forme equianarmoniche. Anzi quest'ultimo caso riterrei di poterlo escludere.

Tu dici che ciò che vale per la F_4 2-pla con C_8 quadrisec[ante] di dir[amazione] vale anche per la F_4 2-pla con C_{12} seisecante ecc. Questo infatti noi ritenevamo allora, ed io stesso credo aver redatto l'esempio corrispondente a $\pi = 2$, nello scritto inviato a Picard.[2]

Questo esempio non è stato però sviluppato, ed è naturale che io abbia dei dubbii, visto che il ragionamento (in ispecie l'ultimo di ieri) per le sup[erficie] con un fascio di C_π ($\pi > 1$) mi pare esente da obiezioni. (Invece ieri scoprii il baco in quello pel fascio di curve ell[ittich]e armoniche).

Fissando l'attenzione sul caso $\pi = 2$, e sulla F_4 2-pla corrispondente, come si può escludere che le due direttrici 2-ple, prese insieme, o una di esse, rappresentino in qualche modo la curva canonica della sup[erficie]?

Noterò anche che per mostrare l'esistenza effettiva della sup[erficie] tu ti vali di due punti cuspidali sopra una direttrice 2-pla; ma di punti cuspidali ce n'è 4 soltanto, dunque non sembra che si possa proseguire indefinitamente la costruzione. E se si adoperano i 4 p[un]ti cuspidali di una direttr[ic]e non ne seguirà che l'immagine di questa sulla sup[erficie] obiettiva sia spezzata?



Anzi cercando di costruire il gruppo di gen[eratric]i per la F_4 2-pla con C_{12} di dir[amazione] (senza gen[eratric]i di dir[amazione]) mi pare, salvo errore, che si dovrebbero avere più di 4 p[un]ti cuspidali su una direttrice! o, per dir meglio, mi sembra impossibile la costruzione della sup[erficie] già per $\pi = 2$!

Il caso del fascio di curve ell[ittich]e equianarmoniche credo si possa trattare così:

Esiste una trasf[ormazione]

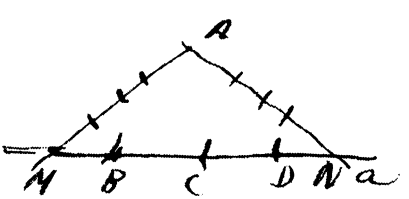
$$z' = \varepsilon z \qquad \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi i cicli z, εz, $\varepsilon^2 z$, appartengono ad una serie lineare ($z\{1 + \varepsilon + \varepsilon^2\} \equiv 0$). Questa serie, resa completa, è una g_3^2. Ho dunque raz[ionalizza]ta una cubica con una trasf[ormazion]e proiettiva in sé, ciclica del 3° ord[ine], omologica. Sono uniti i tre flessi

$$0, \qquad \frac{2\omega + \omega'}{3}, \qquad \frac{2\omega' + \omega}{3}$$

$\left(\text{essendo } \frac{\omega'}{\omega} = \varepsilon\right)$.

Sia A il centro d'omologia, a l'asse che contiene i 3 flessi uniti B, C, D. Vi sono per A due rette contenenti ciascuna tre flessi AM, AN.



Che cosa succede al variare della cubica C?

A me sembra che B, C, D descrivano tre unisecanti, (da cui credo si tragga poi che ogni p[un]to descriva una unisecante). Intanto credo si veda che AM, AN non possono essere permutate... A me basterebbe del resto far vedere che se c'è una unisecante ve n'è un fascio, per concludere che in questo caso vi è un fascio irraz[ional]e di 9-secanti (e forse di 3-secanti). Ci ripenserò.

Ho abbozzato la nota pei C[omptes] R[endus].[3] Te la manderò domani con preghiera di rimandarmela per copiarla. C'è un punto su cui occorre restiamo d'accordo. Sev[er]i mi pregò a suo tempo di accennare alla sua via diretta dalla quale emergerà «una relazione fra $p_g - p_a$ e il n[umer]o degli integrali».

Debbo chiudere la Nota così, o debbo dire che tu sei pervenuto a trovarla studiando quei sistemi continui? o posso dire che un'altra via potrebbe scaturire dallo studio di quei sist[em]i continui?*

Senza alcun complimento, ti prego dirmi ciò che desideri, indicandomi un modo di finire la nota,[4] perché venendo essa presentata insieme o quasi alla tua[5] non può supporsi ch'io non sia affatto informato di ciò che tu hai ottenuto.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

* Avrei scritto «M. Cast[elnuovo] pense qu'une relation pourra être établie en poursuivant l'étude des systèmes non lin[éaires] de courbes tracées sur la surf[ace]».

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.

[2] Cfr. p. 556, nota 2 a let. 590 (7.12.1904).

[3] Enriques 1905b.

[4] In chiusura della sua nota Enriques (1905b, 135) scriveva:

> Peut-on aller plus loin? Peut-on trouver une relation numérique entre la difference $p_g - p_a$ et le nombre des intégrales de première espèce attachées à la surface?
> M. Severi croit pouvoir y parvenir en démontrant par le procédé direct la réciproque de son théorème cité ci-dessus [cfr. Severi 1904b]. Il m'a même communiqué le résultat suivant: $p_g - p_a$ est égal à la différence entre le nombre des intégrales de Picard de seconde et de première espèce attachées à la surface.
> M. Castelnuovo pense que la relation entre $p_g - p_a$ et le nombre des intégrales de première espèce pourra être établie en poursuivant l'étude des systèmes non linéaires de courbes tracées sur la surface.

[5] Le note Enriques 1905b e Castelnuovo 1905a furono rispettivamente presentate il 16 e il 23 gennaio 1905.

615.

9 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

ieri, uscito per impostare, ho trovato chiuso l'ufficio, perciò il manoscritto[2] è partito stamani.

Ricevo ora la tua lettera.

Capisco l'errore del mio ragionamento pel caso $\pi > 1$ e la giustezza del tuo es[empio]; e comincio quindi a convincermi che non si possa andare al di là del resultato che «i plurigen[er]i nulli dan la condiz[ion]e di rif[eribilit]à a rigata».

Occorre però andare in fondo alle questioni d'esistenza. Ora a tale scopo mi pare si possano seguire due vie.

Anzitutto noi abbiamo a fare soltanto con rigate mult[ipl]e *cicliche*, e questa è una fortuna perché restringe il campo, e rende possibile una effettiva rappresentazione dei tipi.

1) Supponiamo che sopra una rig[at]a ell[ittic]a ci sia una n-secante ell[ittic]a C; fissiamo sulla C una g_2^1, che sarà permutabile coll'involuzione γ_n^1 ell[ittic]a segata su C dalle gen[eratric]i. Otteniamo quindi un piano multiplo ciclico $2n$-plo $\sqrt[2n]{\ }$. Ho provato a costruire il p[ian]o 4-plo corrispondente al caso del fascio di curve ell[ittich]e arm[onich]e. Si presenta qualche difficoltà di particolare, che però deve essere superabile.

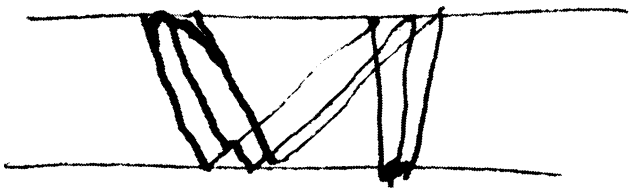
Questa via avrebbe il vantaggio di darci la forma più semplice delle eq[uazion]i tipiche.

Risolte le questioni particolari anzidette nel caso noto del fascio di curve arm[onich]e, si potrebbe forse agevolmente discutere dell'esistenza di altri tipi.

2) La 2ª via consiste nell'adoprare invece della F_4 2-pla, altre rigate ellittiche.

Si tratti p[er] es[empio] del fascio di curve ell[ittich]e equianarmoniche. La curva di dir[amazione] della rigata è una 3-secante. Ma sulla sup[erficie] obiettiva non si hanno ora delle *bisecanti* le curve ell[ittich]e del fascio, bensì delle *trisecanti*. Appare dunque naturale di considerare una F_6 (3-pla) con due rette 3-ple a, b, (e tre doppie). A me sembra che in questo caso si potrà scegliere le g_3^1 corr[ispondent]i ad a, b in guisa che le somme $z_1 + z_2 + z_3$ differiscano di $\frac{\omega}{3}$, ed ottenere una C_9 (3-sec[ant]e) ell[ittic]a sezione di una φ_3, la quale seghi poi la F_6 in 9 gen[eratric]i ridotte a 3. Il dubbio sta nell'esistenza di una φ_3 per C_9, ma se non vi è si potrà ricorrere ad una sup[erficie] d'ord[ine] maggiore?

Se questo modo di ragionamento è proseguibile, si dovrebbe arrivare



per n assai grande a rig[at]e ell[ittich]e cicliche n-ple con una m-secante ell[ittic]a di dir[amazione], m qualunque.

Più semplice forse è di ricorrere agli iperspazii, ciò che pure abbiam fatto quando ci occupavamo di quelle sup[erficie] ma senza approfondire le questioni d'esistenza.

Sembra p[er] es[empio] che la rig[ata] ell[ittic]a F_6 di S_5 possa contenere una C_9 trisecante sezione di una V_3 che ha tre contatti 3 p[un]ti (corrispondentisi) colle due cubiche piane direttrici (caso equianarm[onic]o). E qui la cosa si proseguirebbe più facilmente.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.
[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1905b.

616.

10 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

per la costruzione delle nostre sup[erficie] mi pare si possa procedere in generale come segue:

Vi è su F un fascio raz[ionale] di curve ell[ittich]e C di = [stesso] modulo.

Supponiamo C di modulo generale. Allora si può costruire un fascio irraz[ionale] di curve K secanti su C i p[un]ti d'una inv[oluzione] ell[ittic]a $\gamma_{n^2}^{1}$. Vale infatti il ragionamento che altra volta ti ho esposto. (Il fascio ell[ittic]o delle K non può differire dal fascio irr[azionale] di curve che supponevamo dato su F).

Consideriamo i gruppi delle suddette γ_n^1 come i «punti» di ∞^1 curve ell[ittich]e C_1. Le C_1 genereranno una rigata ell[ittic]a, su cui costituiranno un fascio di unisecanti. Vi sarà un certo n[umer]o di C_1 di diramazione.

È da notare che l'eq[uazio]ne da cui dipende il distacco degli n^2 p[un]ti di $\gamma_{n^2}^{1}$ è abeliana; si potrà concludere che, anche nel passaggio da una C

ad un'altra, il distacco degli n^2 punti rappresentati in un p[un]to della rig[at]a multipla dipenderà da un'eq[uazio]ne abeliana? Mi pare di sì, e quindi che la sup[erficie] data abbia una rappresentazione della forma $z^2 = \ldots$

Resta poi da esaminare più profondamente l'effettiva esistenza di queste sup[erficie], che però non mi pare dubbia.

Invero supponiamo che le C_1 della rig[at]a ell[ittic]a multipla (φ_6 di S_5) sieno cubiche sez[ion]i piane. Ognuna di esse si può considerare come intersezione di un iperpiano S_4 secante φ_6 in 3 gen[eratric]i, che posso supporre coincidenti. Prendendo invece di φ_6 la φ_8 di S_7 ho delle C_1 del 4° ord[ine] sez[ion]i di iperp[ian]i che incontrano ulteriormente la rigata in 4 gen[eratric]i coincidenti. E così di seguito.

Mi sembra quindi che basti scegliere le C_1 di dir[amazione] in tal modo.

Per stabilire l'esistenza del fascio di curve ell[ittich]e sopra una sup[erficie] con un fascio di C_π ($\pi > 1$), quando le curve parabic[anonich]e coincidono, io facevo così:

Poniamo che C'' contenga $\overline{C}$, $C'' - \overline{C} = K$ (curva parabic[anonica]). È facile vedere che fra C e $\overline{C}$ intercede entro il fascio, una corr[ispondenz]a di 1ª specie

$$u' = u + \text{cost.}$$

Ora per il gruppo $G_{4(\pi-1)}$ sezione di K e $\overline{C}$, passa un sistema ∞^1 di $C'' + C_1 + C_2$ che deve essere *d'indice* > 1. Ma per $G_{4(\pi-1)}$ passano le curve $K + C_1$ (al variare di C_1 nel fascio) che formano un fascio *ell[ittic]o*; resta dunque pei $G_{4(\pi-1)}$ almeno un fascio di 2^c agg[iunt]e. Questo può essere un fascio di C''; allora *esso sega su C la* $g_{4(\pi-1)}$ *determinata da K e dalla curva parabic[anonic]a infinitamente vic[in]a.*

Almeno si ha su ogni C una $g^1_{4(\pi-1)}$ le cui coincidenze descrivono una curva senza intersez[ion]i con K, quindi ell[ittic]a (non è vero?).

Osserverai che il ragionamento non vale più se $C = \overline{C}$, cioè nel caso del big[enere] $P = 1$. Il male non è troppo grave, è però spiacevole che questo caso sfugga, tanto più che si prevede ciò non debba essere.

C'è un'altra osservazione da fare. A quel che mi sembra si può supporre che il sistema ∞^1 di $C'' + C_1 - C_2$ per un $G_{4(\pi-1)}$ della s[ezion]e bic[anonic]a di $\overline{C}$ sia *d'indice* > 2. Se così è si avranno per il $G_{4(\pi-1)}$ segato da K, *due fasci* di 2^c agg[iun]te corrispondenti a due curve *diverse* del fascio, a meno che questi due fasci non vengano a coincidere.

Veramente ciò non può escludersi, ma la cosa comincia a diventare un po' strana, e forse si potrà approfittare di una tale circostanza, tanto curiosa, per costruire su $\overline{C}$ *una* $g^1_{4(\pi-1)}$ cui appartenga il $G_{4(\pi-1)}$ segato da K.

Si può forse anche ricorrere a qualche altra risorsa di cui non ho però una chiara veduta.

Affettuosi saluti tuo

Ghigo

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.

617.

11 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

credo di poter concretare l'idea di ieri costruendo tutte le sup[erficie] non rig[at]e di gen[ere] $p_n < 0$.

Esse sono rappresentabili sopra un cono cubico multiplo, avente come curva di dir[amazion]e un certo n[umer]o di sez[ion]i piane di un fascio.

Ecco come si può fare la costruzione pel caso iperellittico. Comincio da un'osservazione che mi rende ragione di tutti i pasticci incontrati.

Ci sono più curve ell[ittich]e rappresentate su una cubica C_3 doppia (o mult[ipl]a) senza p[un]ti di dir[amazion]e. La loro costruzione dipende in generale dal problema della trasf[ormazion]e delle funz[ion]i ellittiche. Geometricamente si può fare così: si costruisca una C_6 di Halphen[2] che abbia i 9 p[un]ti 2-pli su C_3. Essendo $f_3 = 0$ $f_6 = 0$ le eq[uazio]ni di C_3, C_6, una cubica 2-pla C_3 senza p[un]ti di dir[amazion]e viene rappresentata dalle eq[uazion]i

$$z^2 = f_6(x\ y) \qquad f_3(x\ y) = 0.$$

Le f_6 sono 3, e 3 sono le C_3 2-ple irriducibili.

Ciò posto prendi $2p + 2$ piani

$$z = a_1 \quad z = a_2 \quad \dots \quad z = a_{2p+2}.$$

Le eq[uazio]ni

$$\begin{cases} u^2 = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2p+2}) f_6(x\ y) \\ f_3(x\ y) = 0 \end{cases}$$

rappresentano nello S_4 $(x\ y\ z\ u)$ una delle *tre sup[erficie]* di gen[ere] $p_g = 0$ rappresentate sopra il cilindro doppio $f_3 = 0$ con curva di dir[amazion]e costituita dalle $2p$ cubiche $z = a_1 \dots$

È chiaro come si costruiscano analogamente i cilindri n-pli per n n[umer]o primo. Quando n non è primo, occorre una distinzione relativa alle cubi-

che di dir[amazione] lungo le quali si può fissare che coincidano soltanto una parte dei rami della fun[zione] alg[ebric]a.

Osserverai che per $p = 1$ si costruiscono sup[erficie] con un f[asci]o ell[ittic]o di curve ell[ittich]e, di modulo qualunque, ciò che mostra come il mio ragionamento in proposito vada corretto (nel senso di non escludere l'irr[azionalit]à quadratica proveniente dalle due specie di trasf[ormazion]i).

Le sup[erficie] costruite ammettono una rappresentazione parametrica mediante funz[ion]i ell[ittich]e, che dovrà costruirsi in base alla teoria della trasformazione delle funz[ion]i ell[ittich]e.

Ricevo la tua cartolina.

Spero che tu riesca a superare le difficoltà cui mi accenni, relativamente al n[umer]o degli integrali.[3] Debbo dire però che non mi stupirebbe eccessivamente una restrizione nel teor[ema]. Ti ricordi che altra volta avemmo occasione di osservare come di contro al $p_g - p_a$ massima def[icienz]a della serie segata da $|C'|$ su C, vi sia luogo a considerare il *minimo di quella deficienza*. Sarebbe possibile che il n[umer]o degli integrali si riducesse a quel minimo?

Nota che un minimo analogo (eccepito qualche partic[olare] sistema p[er] es[empio] un fascio) dovrebbe presentarsi per la def[icienz]a della serie caratt[eristic]a di $|C|$, e forse i due minimi saranno uguali.

Se $|C|$ ha una serie caratt[eristica] di def[icienz]a $< p_g - p_a$, p[er] es[empio] $p_g - p_a - \delta$, esso varia in un sistema continuo che potrà essere costituito di $\infty^{p_g - p_a - \delta}$ sistemi lineari (è per questo ch'io dicevo, «*in generale* si hanno $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari»). Ora a questa varietà $\infty^{p_g - p_a - \delta}$ si potrà applicare il tuo ragionamento... Capisco però che probabilmente si otterranno così soltanto dei casi di *riducibilità dei periodi*; resultato interessante per la determinazione dei sistemi sovrabbondanti (o di una classe di essi).

Saluti affettuosi tuo

Ghigo

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.
[2] Cfr. Halphen 1882 e p. 575, let. 606 (31.12.1904) e p. 576, let. 607 (1.1.1905).
[3] Cfr. Castelnuovo 1905a e 1905b.

Lettera di Castelnuovo a Enriques

Roma 12 Genn[aio 19]05

Carissimo Ghigo

La costruzione che dai di quelle superficie col fascio ellittico di C_π è molto semplice. Ben inteso che sulle superficie così ottenute la corrispon-

denza birazionale fra due C_π è razionalmente staccata. Come si procederà in generale nel caso opposto (che comprende i nostri esempi dati a Picard)?[1]

Sono sempre occupato colla varietà V_d di Picard ∞^d annessa ad una superficie irregolare. Avrei bisogno ora del teorema, certo vero, che sulla V_d le varietà algebriche a $d-1$ dimensioni dello stesso ordine si distribuiscono in ∞^d sistemi lineari succedentisi per continuità, e trasformati l'uno nell'altro dalle trasformazioni della V_d in sé stessa (che quei sistemi lineari siano *almeno* ∞^d è evidente; mi farebbe comodo sapere che non sono di più, come non sono certamente). Ammesso il teorema e considerati gli ∞^2 sistemi lineari cui appartengono queste ∞^2 varietà a $d-1$ dimensioni rappresentanti i punti della superficie data, si avrebbero ∞^2 trasformazioni di V_d in sé stessa che porterebbero uno degli ∞^2 sistemi sugli altri; queste trasformazioni applicate ad un punto di V_d lo muterebbero nei punti di una superficie F contenuta entro a V_d e birazionalmente identica alla superficie data. Ottenuto ciò si sarebbe in porto. Perché la F possiede $p_g - p_a$ integrali di Picard come la V_d cui appartiene; o se ne potesse possedere meno, $p_g - p_a - \delta$, allora il gruppo di Picard dovrebbe essere algebricamente imprimitivo, ché altrimenti considerando le ∞^d superficie in cui F si muta e passando dall'una all'altra si troverebbero solo $p_g - p_a - \delta$ integrali sulla varietà V_d. Nota poi che la imprimitività del gruppo di Picard farebbe ricomparire da altra parte i δ integrali che si erano perduti.

Per quanto riguarda i sistemi sovrabbondanti (non speciali) di una superficie irregolare, credo giusta la previsione di Severi il quale crede che mediante una di queste trasformazioni $+A \quad -B$, un sistema sovrabbondante si muti in un sistema regolare, generalmente parlando. Dunque fra gli ∞^d sistemi lineari succedentisi con continuità sulla superficie, alcuni possono dirsi sovrabbondanti, non tutti; e corrisponderebbero per dir così (secondo che la sovrabbondanza è 1, 2 ...) a curve, superficie... eccezionali entro la varietà di Picard. Ma la corrispondenza non ha nemmeno un senso preciso perché questa varietà è definita a meno di una trasformazione birazionale. Severi crede che la sovrabbondanza di un sistema dipenda (come nel piano) da legami tra i punti base del sistema considerato sopra la superficie priva di curve eccezionali.

Non ti ho scritto ieri, ma ti dico oggi che se mandi la tua Nota[2] a Picard, puoi lasciarvi l'allusione alla mia ricerca.[3] Infatti è certo che col mezzo della varietà di Picard si deve arrivare a un risultato intorno al n[umer]o degli integrali di 1ª specie, sia il risultato previsto o no.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo Guido

[1] Cfr. p. 556, nota 2 a let. 590 (7.12.1904).
[2] Enriques 1905b.
[3] Cfr. p. 588, nota 4 a let. 614 (7.1.1905); Castelnuovo 1905a e 1905b.

618. [c.p.]

[Bologna] 12 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido

Quando il tuo teor[ema] sugli integrali venga stabilito,[2] ne seguirà un corollario assai notevole: ogni sup[erficie] con $p_g = 1$ $p_a = -1$ è una sup[erficie] iperellittica di Picard.[3]

La cosa è tanto più notevole in quantoché per le sup[erficie] con $p_g = 0$ $p_a = -1$ si ottiene una rappresentazione caratteristica per mezzo di una funz[ione] ell[ittic]a con periodi fissi (un integrale di Pic[ard] con 2 periodi), per cui quelle sup[erficie] meritano il nome di *ellittiche*.[4]

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 1905, dal timbro postale.
[2] Cfr. Castelnuovo 1905a e 1905b.
[3] Cfr. in particolare Castelnuovo 1905c; Enriques 1905e.
[4] Cfr. Enriques 1905c e 1905d.

619.

12 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

ricevo i manoscritti. Il mio[2] lo manderò domani a Picard, e aggiungerò volentieri ciò che mi dici di Sev[er]i.[3]

Ho letto con interesse il tuo ragionamento; nella 2ª parte procede come una estensione di quello di Humbert,[4] sicché quando tu pubblichi la cosa[5] mi parrebbe giusto di accennare, nella prefazione, che in seguito al mio teor[ema] il ragionamento di Humbert dà già degli integrali di 1ª sp[ecie] (ciò che d'altronde hai visto già detto nella mia Nota).

Mi sono reso conto della difficoltà che incontri, e mi pare non facile di superarla abbordandola per via diretta. Mi sembra tuttavia che potresti forse utilizzare con vantaggio la seguente considerazione:

sia $\{C\}$ un sistema d'indice n ∞^1 corrispondente ad una curva generica contenuta nella φ di Picard. La difficoltà sorge se fra le somme di integrali relative alle C_1 C_2 ... C_n per il p[un]to generico O di F, ve n'è una costante.

Orbene consideriamo «i gruppi di n curve di $\{C\}$», anche questi danno elementi di una var[ie]tà di Picard ϕ, un elemento nascendo ugualmente da gruppi equivalenti. Abbiamo quindi in ϕ una sup[erficie] i cui punti corrispondono a quelli di F. Può essere che su questa sup[erficie] uno degli integrali di ϕ sia cost[ante], ma basta prendere in ϕ un'altra curva generica

fuori di quella sup[erficie] per avere su F un nuovo sist[em]a ∞^1 di gruppi di n C; mi pare quindi che se, surrogando alle C altre curve equivalenti si riesce ad ottenere gruppi di curve aventi comune un punto della sup[erficie], lo scopo venga raggiunto. E questo dovrebbe essere possibile.

Delle sup[erficie] *ellittiche* posseggo ormai la rappresentazione algebrica e la rappresentazione trascendente. Si ottengono di fatto anche sup[erficie] con un fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e di modulo generale.

Voglio provare ormai a scrivere il tutto,[6] che ti manderò poi, affinché si possa meglio giudicare. La questione delle curve parabic[anoniche] infinitamente vicine mi pare non dia alcuna noia, essendomi persuaso (per mezzo della rappres[entazio]ne sul p[ia]no multiplo) che esse possono proprio trattarsi come *due curve infinitamente vicine* individuanti su ogni C una $g^1_{4\pi-4}$.

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.
[2] Si tratta del manoscritto di Enriques 1905b, presentato il 16 gennaio 1905.
[3] Cfr. p. 588, nota 4 a let. 614 (7.1.1905).
[4] Cfr. Humbert 1893b e 1894c, 195.
[5] Cfr. Castelnuovo 1905a e 1905b, § 10.
[6] Cfr. Enriques 1905c e 1905d.

Lettera di Castelnuovo a Enriques

Roma 13 Genn[aio 19]05

Carissimo Ghigo

Stamane prima di ricevere la tua cartolina di ieri, avevo già visto come nel caso $p_g - p_a = 2$ si possa stabilire, con quello che ora si sa (la varietà di Picard essendo una sup[erficie] iperellittica) il risultato seguente abbastanza naturale:

Una superficie avente l'irregolarità 2, *o contiene un fascio di genere* 2 *di curve* (ad es[empio] rigate di genere 2) *od è rappresentabile sopra una superficie iperellittica semplice o multipla* (la superficie iperellittica potendo contenere due fasci ellittici di curve ellittiche in casi particolari).[1] Segue di qua che il n[umer]o degli integrali di Picard di 1ª specie che la superficie possiede è esattamente 2, giacché una superficie multipla possiede un numero di integrali superiore od uguale a quello della superficie semplice, e nel caso presente quel numero non può superare l'irregolarità 2. Seguirà poi anche il tuo lemma[2] sulle sup[erficie] con $p_g = 1$, $p_a = -1$.

L'idea che mi dai nella tua lettera di stasera è ottima, e te ne sono gratissimo; non giova forse servirsene nel senso che tu suggerisci, perché

potrebbe condurre a pasticci. Ma essa mi serve a costruire subito entro la varietà di Picard una superficie che, contata una o più volte, è birazionalmente identica alla proposta. Il *più volte* dipende dal fatto che fissato sulla superficie proposta un sistema ∞^1 di curve C, può accadere che i gruppi di n curve del sistema che escono da due o più punti della superficie siano equivalenti. (Vedrò se questo può succedere per ∞^1 punti, ma non credo ne verrebbero inconvenienti, perché si riuscirebbe a tracciare un fascio (di genere d?) di curve sulla superficie. Mi accorgo anzi che questo accade sulle rigate di genere d, e probabilmente sulle sup[erficie] che posseggono un fascio di genere d). Ora col ragionamento che ti accennavo ieri, una superficie immersa in una varietà di Picard ha d integrali di 1ª specie se il gruppo è algebricamente primitivo; nel caso opposto i d integrali si ritrovano lo stesso servendosi del gruppo che trasforma una divisione di imprimitività in sé stessa e del gruppo che permuta le divisioni di imprimitività. Insomma con un po' di pazienza, mi pare si arrivi a fondo.

Vedo volentieri redatto il lavoro[3] sulle superficie $p_g = 0, p_a = -1$; giacché con tanti metodi e risultati diversi non mi raccapezzo più. Anch'io ritengo che due curve parabicanoniche infinitamente vicine possano trattarsi come due curve staccate.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo Guido

[1] Cfr. Castelnuovo 1905b, 497.
[2] Cfr. p. *595*, c.p. 618 (12.1.1905).
[3] Enriques 1905c e 1905d.

620.

13 gennaio 1904[1]

Carissimo Guido,

quei cilindri cubici multipli danno sup[erficie] con fasci di C_π per cui la corrispondenza fra due C_π *non* è razionalmente staccata (altrimenti sarebbe $p_g \geq 1$). La F_4 2-pla che tu hai costruito si può rappresentare sopra uno di quei cilindri 8-plo.[2] D'altronde ciò è naturale; quei cilindri multipli non sono *esempii*, ma danno *tutti i tipi* di sup[erficie] con $p_g = 0 \;\; p_a = -1$. Infatti si ha sopra una tale sup[erficie] un fascio raz[ionale] di curve ell[ittich]e n-secanti le C_π (curve del f[asci]o ell[ittic]o), e quindi un cilindro cubico n-plo in cui a quelle curve corrispondono le sez[ioni] piane $z = \text{cost}$.

Ho spedito a Picard la mia Nota[3] conservando l'accenno alla tua ricerca, come desideri.[4]

Baloccandomi coi sistemi continui ho visto che:

1) la serie caratt[eristic]a del sistem[a] can[onic]o ha sempre la def[icienz]a $p_g - p_a$;

2) per ogni sistema lineare di curve d'ord[ine] > delle curve can[onich]e si ha la medesima def[icienz]a $p_g - p_a$;

3) sui sistemi $|C|$ predetti, $|C'|$ sega una serie (can[onic]a) di def[icienz]a $p_g - p_a$; in particolare se $n > \pi - 1$, le sup[erficie] agg[iun]te d'ord[ine] $n - 2$ alla F_n segano sul piano la serie completa.

La veduta di Sev[er]i intorno ai sistemi sovrabbondanti,[5] non è giusta; ho dato esempii in contrario nelle «Ricerche».[6]

Di Sev[er]i non ho saputo più nulla. È stato registrato il suo decreto?[7]

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Per dimostrare il resultato che cerchi sulla varietà di Picard bisognerebbe realizzarla proiettivamente, e verificare quindi che le sup[erficie] sezioni hanno l'irreg[olarit]à $p_g - p_a$.

A proposito delle varietà ho pensato, in passato, che l'esistenza su di esse di sist[em]i continui non lineari è in rapporto coll'essere disuguali i due generi sup[erficiali]. In particolare da queste osservazioni (del resto ovvie) segue che non esiste nello spazio un sist[em]a lin[ear]e semplice di sup[erficie] irregolari, come prevedevamo.

Del resto quanto agli integrali credo che la considerazione che ieri ti ho comunicato, permetta di esaurire la questione.

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] 1905, in realtà, in ragione del contenuto.
[2] Cfr. Enriques 1905d, 202.
[3] Enriques 1905b.
[4] Cfr. p. 588, nota 4 a let. 614 (7.1.1905).
[5] Cfr. la lettera di Castelnuovo del 12 gennaio 1905 (p. 594).
[6] Cfr. Enriques 1893f, cap. 4 «Sistemi puri. Estensione del teorema di Riemann-Roch», in particolare nota 52.
[7] Si tratta del decreto di nomina a ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Parma: cfr. p. 562, nota 2 a lett. 594 (15.12.1904).

Lettera di Castelnuovo a Enriques

Roma 14 Genn[aio 19]05

Carissimo Ghigo

Hai ragione per le superficie col fascio ellittico di curve. Quanto agli altri risultati di cui mi parli ci sarà tempo di esaminarli con calma; su qualcuno avrei dei dubbi.

La questione delle varietà di Picard ha fatto, grazie alla tua osservazione,

un passo notevole, ma è lungi ancora dall'essere esaurita. Si vede precisamente che se di queste d somme di integrali che indico con $I_m(x, y, z)$, alcune, d_1, sono costanti, la varietà di Picard V_d contiene una serie ∞^{d_1} di varietà di Picard V_{d_2} $(d_1 + d_2 = d)$ ciascuna delle quali è permutata in sé da un sottogruppo ∞^{d_2} del gruppo ∞^d, mentre le altre trasformazioni del gruppo permutano tra loro quelle V_{d_2}. Allora colla costruzione da te indicata si viene a generare una superficie che (semplice o multipla) rappresenta la data e sta in una divisione di imprimitività V_{d_2}. Restano però a trovare d_1 integrali della superficie data. Perciò avrei l'idea di tracciare una curva γ' sulla varietà di Picard la quale seghi in un sol punto ∞^1 V_{d_2}. Ciò è sempre possibile anche quando $d_2 = d - 1$, nel qual caso quella curva risulta ellittica; e proprio in questo caso si riesce a trovare, colla solita considerazione, quell'unico integrale (ellittico) che manca. Sicché il risultato che in questo caso ho enunciato nella Nota[1] preparata per i C[omptes] R[endus] è giusto.

Ma se $d_1 > 1$, la cosa non si vede più così chiaramente. Non si riesce a escludere a priori che le d_1 somme di integrali relative alla curva γ' non possano essere costanti, per quanto la cosa appaia strana. Sotto altra forma, c'è il rischio che cercando di rappresentare secondo il tuo metodo la superficie data sopra una superficie contenuta nella varietà di Picard, questa superficie si riduca ad un *punto*.

Per evitare i pasticci bisognerebbe poter costruire nella varietà di Picard oltre le divisioni di imprimitività V_{d_2}, altre divisioni algebriche V_{d_1} ciascuna delle quali segasse in un sol punto le V_{d_2}. Esisteranno? In altre parole: data l'esistenza di un sottogruppo algebrico G_{d_2} del gruppo G_d, seguirà l'esistenza di un secondo sottogruppo algebrico G_{d_1}, tale che risulti $G_d = G_{d_1} \cdot G_{d_2}$? È una bella questione gruppale che ti sottopongo.

La via che tu suggerivi di deformare la curva γ fino ad ottenere che tutte le somme $I_m(x, y, z)$ siano variabili, sembra direttamente impraticabile. Mentre coll'aiuto delle V_{d_1}, se esistono, si risolverebbe facilmente.

In ogni modo, a parte le difficoltà che ancora si potranno incontrare, ho acquistato la certezza che il teorema è vero, e che colla varietà di Picard si riesce a dimostrarlo nel modo forse più *penetrante*.

Il decreto di Severi è alla Corte dei Conti da uno o due giorni soltanto, sicché non fu ancora registrato.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo Guido

[P.S.] Una sup[erficie] generica contenuta nella varietà di Picard V_d ha almeno d integrali di Picard e quindi ha l'irregolarità $\geq p_g - p_a$.

[1] Castelnuovo 1905a.

621.

15 gennaio 1905

Carissimo Guido,

la questione sulla varietà di Picard di cui mi parli nella tua lettera d'oggi, dovrebbe potersi trattare con un ragionamento analogo a quello ch'io adopero per le sup[erficie] col fascio di curve ellittiche:

In una V_d di Pic[ard] è contenuta una serie ∞^{d_2} di V_{d_1} di Pic[ard]. È facile vedere che le V_{d_1} hanno gli stessi moduli, e quindi sono proiettive in un n[umer]o finito di modi (ciò non è evidente ma par facile a stabilirsi). Ciò posto su V_{d_1} è individuata una involuzione γ_n, e date due V_{d_1} possono essere riferite raz[ionalmen]te le loro γ_n. Segue l'esistenza di una serie di V_{d_2} n-secanti le V_{d_1}; e credo anche che si concluderà $n = 1$ non essendovi nel gruppo alcun sottogruppo ciclico invariante.

La Mamma di Luisa, venuta qui da tre giorni, è ripartita oggi per Firenze con Alma che ha una tosse *dubbiosa*, cosa contrariante in questo momento.

Hai visto che Levi-Civ[it]a è stato nominato corrispondente dell'Acc[ademi]a di Pietroburgo? È una cosa che onora non soltanto lui ma anche quell'Acc[ademi]a, che ha scelto all'infuori dei soliti criterii di cercare nella persona onorata prima ancora che l'esser degno, la qualità di aver ricevuto altri onori. Ed io ne sono stato lietissimo.

Tanti cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Il teor[ema] in cui ci siamo incontrati[1] «$p_g = 1$ $p_a = -1$ condizione perché una sup[erficie] sia iperellittica» è particolarmente notevole messo in confronto con quello che «$p_g = 0$ $p_a = -1$ dà la condizione perché la sup[erficie] sia ellittica». Nota che è conveniente chiamare iperell[ittic]a e non ell[ittic]a la sup[erficie] con due fasci ell[ittic]i di curve ell[ittich]e.

La mia dimostrazione si basa su ciò: sopra F ($p_g = 1$ $p_a = -1$) si prenda un sistema ∞^2 identico a una sup[erficie] di Picard F'; i punti di F corrispondono a curve di F' le quali formano un sistema identico alla sup[erficie] F![2]

[1] Cfr. in particolare p. 595, c.p. 618 (12.1.1905) e la lettera di Castelnuovo del 13 gennaio 1905 (p. 596).

[2] Cfr. Enriques 1905e, §§ 4-9, pp. 211-16.

622. [c.p.]

[Bologna] 19 gennaio 1905

Carissimo Guido,

sembra proprio che le sup[erficie] ellittiche non possano avere insieme $P_4 = P_6 = 0$. Dunque $P_4 = P_6 = 0$ sono le condiz[ion]i di rif[eribilit]à a rigata![1]

Aggiungi che le sole sup[erficie] (ellittiche) per cui $P_2 = 0$ sono riferibili al cilindro cubico m-plo con *tre* sezioni z = cost[ante] di diramaz[ion]e, a cui debbono attribuirsi molteplicità convenienti.

Tutto ciò risulta da una discussione aritmetica cui ho trovato modo di dare una forma non troppo inelegante. I tipi corrispondenti a $P_3 = 1$, o $P_4 = 1$, o $P_6 = 1$ sono assai curiosi.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1905c e 1905d.

623. [c.p.]

[Bologna] 20 gennaio 1905

Carissimo Guido

Pic[ard] mi scrive aver presentato Lun[ed]ì all'Acc[ademia] la mia Nota,[1] ed una sua[2] ove arriva alle relaz[ion]i che ti ha comunicato.[3]

Quanto al mio lavoro seppellendolo negli atti della soc[iet]à dei XL[4] non intenderei che fosse la sua tomba definitiva, ma mi riserverei a redigerlo in una nuova forma più completa, p[er] es[empio] pei Math[ematische] Ann[alen], rifacendo colle semplificazioni che oggi sono possibili anche il nostro lavoro degli Ann[al]i.[5]

Credi dunque che la soc[iet]à dei XL mi stamperebbe rapidamente? Questa pubblicazione clandestina è appunto ad hoc per giustificare una nuova pubblicazione.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo[6]

[1] Enriques 1905b.
[2] Picard 1905b.
[3] Cfr. le lettere di Emile Picard del 5 e 21 gennaio 1905 riportate in Appendice (pp. 667-68).
[4] Si tratta di Enriques 1905d, che fu invece pubblicato nei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo».
[5] Enriques-Castelnuovo 1901.
[6] Nell'originale, al di sotto della firma, cancellato con un tratto di penna, si legge «F Enriques».

624.

30 gennaio 1905

Carissimo Guido,

mi è pervenuto pel tramite dell'Un[iversit]à il 2° vol[ume] delle opere di Beltrami. Immagino che mi sia stato mandato da te, che già hai voluto regalarmi il 1°, e te ne ringrazio cordialmente.[1]

In questi giorni non ho dimenticato il problema che mi occupa. La costruzione effettiva di quelle sup[erficie] ell[ittich]e mi presentava ancora qualche difficoltà che credo ormai di aver superato. E ne risulta questa conseguenza notevole: le sup[erficie] con $p_g = 0$ $p_a = -1$ ammettono un gruppo ∞^1 ellittico di trasf[ormazion]i biraz[ional]i in sé; le traiettorie formano il fascio raz[ional]e di curve ell[ittich]e.[2]

A questo resultato io giungo con un ragionamento sostanzialmente algebrico, ma esso riceve una conferma pel fatto che la rappresentazione parametrica ottenuta appartiene al tipo determinato da Painlevé.[3] La famiglia delle sup[erficie] di Painlevé è più generale solo in quanto le traiettorie del gruppo G possono formare un fascio irraz[ionale]. Ma per l'appunto il caso del fascio raz[ionale] (che porta $p_g = 0$) permette una determinazione ulteriore della rappres[entazione] parametrica, consistente in ciò che una certa funz[ione] alg[ebric]a ν (2° parametro) viene a dipendere da un'eq[uazione] *abeliana*.

Salutami Elbina; essa sarà stata dispiacente come me della morte della povera Zia Rosa, nuovo e più grave dolore pel Babbo! A me è rincresciuto di non potere andare a Pisa, lasciando Luisa in questo momento; Paolo è partito stamani.

Ti saluto affettuosamente Ghigo

[P.S.] Chi si oppone alla candidatura V[erones]e pel C[onsiglio] S[uperiore]? Avevo sentito fare il nome di Siacci. Se non v'è altri perché non lanciare il nome del Volt[erra]?

[1] Beltrami 1902-20, II. Cfr. p. 526, let. 562 (14.5.1903).
[2] Cfr. Enriques 1905d, 181.
[3] Cfr. Painlevé 1897, 282-86.

625.

1 febbraio 1905

Carissimo Guido,

guarderò la memoria di Painlevé[1] negli Acta Mathematica. Io però non mi sono servito del ragionamento un po' complicato di Painlevé ma

l'ho rifatto per conto mio. In quanto alle sup[erficie] col gruppo discontinuo esse avranno $p_g > 0$, perché per $p_g = 0$ (all'infuori delle rigate) si trovano soltanto le sup[erficie] con un gruppo ellittico ∞^1.

Il mio studio volge verso la fine, ma ho dovuto fare una digressione nel campo della teoria delle funzioni per la costruzione di funz[ion]i alg[ebrich]e con dati p[un]ti di diramazione.

Di qui sono stato indotto a ripensare alla questione analoga di «costruire i piani multipli con data curva di dir[amazione]» che come sai è un mio antico desiderato.[2]

Ho visto come questo problema si può risolvere in generale, con una piccola restrizione che «la curva di dir[amazione] debba appartenere essa stessa a un sistema lin[ear]e di dim[ensione] > 0». Suppongo naturalmente questa curva C_{2n} irriducibile e dotata soltanto di δ nodi e k cuspidi.

Consideriamo tutte le analoghe $\overline{C}_{2n}$ con $\delta + k$ p[un]ti 2-pli; le infinitamente vicine a C_{2n} segano una serie completa g_{2m} $2m + 2\delta + 2k = 4n^2$. Bisechiamo, se è possibile, $g_{2m} = 2g^{\rho}_{m}$, e sia $\rho > 0$. Allora consideriamo ∞^1 $\overline{C}_{2n}$ toccanti C_{2n} nei G_m di una g^1_m; *questa serie conduce ad una sup[erficie] rappresentata sul piano s-plo*. Per determinare s bisogna trovare delle relazioni fra $p^{(1)}$, p_a, n, s, δ, K. Ce ne sono appunto *tre* come occorre per avere p_a, $p^{(1)}$, s.

Queste osservazioni sono molto ovvie, ma credo avranno conseguenze importanti per la teoria delle sup[erficie]. E mi farebbe molto piacere se anche tu volessi occupartene con me.

Secondo la via che tu abbozzavi in una lettera passata, sarebbe facile determinare anche il bigenere dei p[ia]ni multipli, le curve bican[oniche] ((i moduli per $p^{(1)} > 1$)) ecc. Si avrebbero quindi le condiz[ion]i di raz[ionalit]à ecc.

Si potrebbe poi fare un'applicazione concreta cercando di determinare tutte le sup[erficie] di gen[ere] $p_a = p_g = P_2 = 1$.

L'idea del congresso mi pare ottima.[3] Per prendere l'iniziativa basta un nucleo di matematici i quali, invitando, si potrebbero far promotori di una società matematica che nella riunione potrebbe essere oggetto di studio.

Cordiali saluti all'E[lbina] e a te

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Painlevé 1903.

[2] Cfr. in particolare p. 340, let. 375 (5.6.1897) e p. 400, let. 438 (26.2.1899). Sul problema d'esistenza dei piani multipli con una data curva di diramazione si veda Enriques 1912a, § 4, e 1924a.

[3] Enriques si riferisce forse ad aspetti legati all'organizzazione del IV Congresso Internazionale dei Matematici che si tenne a Roma nel 1908. Durante il III Congresso (ad Heidelberg, nel 1904) venne deciso di affidare all'Accademia dei Lincei (sezioni di Matematica e di Meccanica) e al Circolo Matematico di Palermo l'organizzazione del successivo Congresso Internazionale. Il comitato organizzatore fu perciò composto sia da soci dell'Accademia dei Lincei che da membri del consiglio direttivo del Circolo. A Castelnuovo venne poi affidato l'incarico di segretario. Per i contrasti e le rivalità tra i matematici e tra le istituzioni scientifiche italiane causati dall'organizzazione del Congresso di Roma si veda A. Brigaglia e G. Masotto, *Il Circolo Matematico di Palermo*, Dedalo, Bari 1982, in particolare capp. 12 e 15.

626.

2 febbraio 1905

Carissimo Guido,

il Segre mi scrive che a Torino portano candidato al C[onsiglio] S[uperiore] il D'O[vidio].[1] Il D'O[vidio] non è il mio ideale, non è abbastanza combattivo. Tuttavia nelle circostanze presenti potrebbe essere opportuno di votare per lui ((Altrimenti temo che faremo tutti fiasco)) e far propaganda giacché altrimenti la candidatura non riuscirà. Che cosa ne dici? Se sì, sarebbe forse il caso di trattare con Tor[in]o e avere fin d'ora la promessa di appoggio al Volt[erra] per l'anno prossimo in cambio di quello dato ora al D'O[vidio].

Ho quasi finito la redazione del lavoro[2] sulle sup[erficie] di gen[ere] $p_g = 0$. Ma intanto la mia mente salta di palo in frasca.

Oggi è la giornata degli S_4 2-pli con F_4 di dir[amazione].

Si può forse dimostrarne l'irraz[ionalit]à. Bisogna però ammettere il lemma seg[uente], che sembra intuitivo:

Se $F\ F'$ sono due sup[erficie] di S_3 e $2F\ 2F'$ appartengono ad un sistema lin[ear]e,

$$2F \equiv 2F'$$

si deduce

$$F \equiv F'.$$

Ammesso ciò si trovano facilmente sulla var[iet]à V

$$u^2 = f_4(x\ y\ z)$$

due sup[erficie] $F\ F'$ tali che

$$2F \equiv 2F'$$

ma *non*

$$F \equiv F'.$$

Sono tali la sup[erficie] che ha come proiezione una quadr[ic]a 2-pla (con C_8 di dir[amazione]), e la sup[erficie] di dir[amazione] $f_4 = 0$, le quali hanno il gen[ere] 1 ma sono biraz[ionalment]e distinte.

Osserverai veramente che in S_3 c'è da tener conto di una sup[erficie] fondamentale ψ immagine del tacnodo della var[ie]tà V; ma sembra che questa si stacchi *due* volte dalle immagini delle sez[ion]i quadriche di V, il che dovrebbe accomodare le cose. Insomma sono ben lungi dal credere la irraz[ionalit]à di V dimostrata senz'altro, ma mi sembra almeno che questa strada non sia da buttar via senza esame.

La cosa dovrebbe poi estendersi alle var[ie]tà cubiche, ma con qualche maggiore complicazione.

Affettuosi saluti Ghigo

[1] Si veda p. 602, P.S. a let. 624 (30.1.1905).

[2] Enriques 1905c, presentato il 27 febbraio 1905, ed Enriques 1905d, che porta la data 3 marzo 1905.

627. [c.p.]

[Bologna] 4 febbraio 1905

Carissimo Guido,

ti scrivo in fretta essendo stato occupato da Sev[er]i qui di passaggio.

Il ragionamento relativo allo S_3 2-plo pecca in ciò che le due sup[erfi-cie] di gen[ere] 1 non sono ugualmente generali; una è caso particolare dell'altra.

Mi si è presentata un'altra via per dimostrare l'irraz[ionalit]à della V_3^3, ma è soggetta a qualche restrizione; te ne scriverò domani.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

628.

7 febbraio 1905

Carissimo Guido,

ripensando alle curve parabic[anonich]e infinitamente vicine mi pare di aver trovato un modo assai semplice di trattare la cosa.

Fra la serie bicanonica di $\overline{C}$ e gli ∞^1 sistemi $|C''|$ intercedono delle omografie che costituiscono una ∞^1 (ell[ittic]a) di omografie tra due S_r ($r = 3\pi - 4$). Ora in questa serie ci sono n (> 1) omografie degeneri, essendo n l'indice della serie delle C'' per un $G_{4\pi-4}$ di $\overline{C}$; non escludo la

coincidenza di tali omog[rafi]e degeneri. Ad una omografia deg[ener]e corrisponde un $|C''|$ secante su $\bar{C}$ una g^{r-1}; si trova poi *un* punto singolare del primo S_r, questo dà il $G_{4\pi-4}$ segato su $\bar{C}$ dalla curva parabic[anonic]a K $|C''| = |\bar{C} + K|$. Consideriamo le ∞^1 C'' per questo $G_{4\pi-4}$, il sistema si spezza in quello delle ∞^1 curve $K + C$, ed in $n-1$ fasci; la residua di C rispetto ad uno di questi fasci è una delle altre $n-1$ curve parabic[anoniche], diciamo K_1. Ora K_1 potrebbe essere infinitamente vicina a K; vuol dire che nello S_r si han due punti sing[olar]i per due om[ografi]e deg[ener]i infinitamente vic[in]e, A e A', infinitamente vicini tra loro. Ma ciò che a noi importa è di individuare la $g^1_{4\pi-4}$ determinata su $\bar{C}$ dalle sez[ion]i di K e K_1; ora questa serie corrisponde alla retta AA', la quale non cessa di esistere se A e A' sono infinitamente vicini.

Aggiungi che *a posteriori* $n > 2$ e il caso delle curve parabic[anonich]e infinitamente vicine sembra impossibile, si dovrebbe dunque poter dimostrare che

1) $n > 2$, (e ciò mi pare risulti dall'essere $r \geq 2$)

2) gli $n-1$ fasci di C'' per il $G_{4\pi-4}$ segato da K su $\bar{C}$ sono distinti (e ciò si può dire risulti dal fatto che essi non sono equivalenti?).

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

629. [c.p.]

[Bologna] 8 febbraio 1905

Carissimo Guido,

ho piacere che tu riveda il mio lavoro[1] prima di pubblicarlo, anche se ciò debba produrre un piccolo ritardo. In particolare, come ti ho detto, non potrò stare tranquillo sui calcoli dei plurigeneri fino a che essi non abbiano la tua sanzione.

La questione dei piani multipli[2] presenta delle difficoltà. Spero di superarle anche coll'aiuto di Sev[er]i a cui ho parlato della cosa; il problema ha degli aspetti interessantissimi; te ne riparlerò quando avrò visto qualcosa di chiaro.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1905d.

[2] Cfr. p. 603, let. 625 (1.2.1905).

630.

10 febbraio 1905

Carissimo Guido,

ti sono gratissimo del ragionamento che mi comunichi relativo alle curve parabicanoniche.

Veramente il concetto che ti esponevo nella lettera[1] non mi sembrava eccessivamente complicato, ma il tuo certo è molto più semplice e quindi gli darò volentieri la preferenza. Mi ricordo che mi avevi scritto di una considerazione di quel genere e forse anche a me era occorsa, ma soltanto come un modo di vedere che le curve parabic[anoniche] sono $n > 1$. La parte utile sta invece in ciò che vengono costruite su ogni C le intersezioni delle curve parabic[anoniche] e le $g^1_{4\pi-4}$ da esse determinate.

Alla fine del mio lavoro[2] troverai le rigate R_4 2-ple, con C_{2n} di diramaz[ione]. Ma per tutte queste sup[erficie] si trova $P_4 = 1$. Il ragionamento che nel caso del fascio ell[ittic]o di curve ell[ittich]e ($\pi = 1$) dava $P_{2n} = 1$ come 1° plurig[enere] non nullo, non vale quando $\pi > 1$. ((E per $\pi = 1 \quad 2n = 4$)) La curva quadricanonica è costituita dall'insieme delle due direttrici 2-ple di R_4 contate ciascuna $n - 4$ volte.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Mi pare che, proseguendo il tuo procedimento, si arrivi a escludere *a priori* le curve parabic[anoniche] infinitamente vicine nel modo seg[uen]te:

Consideriamo le ∞^1 C'' per un $G_{4\pi-4}$ di $\overline{C}$, esse formino un sistema d'indice n (> 1). Allora la curva inviluppo χ ha in ogni p[un]to di $G_{4\pi-4}$ un punto $2n$-plo, e ciò che importa escludere è che χ contenga $\overline{C}$. Basta perciò far vedere che χ incontra le altre C in $2n(4\pi - 4)$ punti, e non *in meno*.

Ora su ogni C il sistema ∞^1 delle C'' dà luogo ad una serie ell[ittic]a d'indice n di $G_{4\pi-4}$. Prendo la curva bicanonica immagine di C in $S_{3\pi-4}$, ed ho da intersecarla con una varietà generata da un inviluppo di classe n ell[ittic]o, che è una $V_{3\pi-5}$ d'ord[ine] $2n$; dunque χ sega C in $2n(4\pi - 4)$ p[un]ti. c.d.d.

Il curioso è che avevo provato altra volta un ragionamento di questo genere, e non so ricordarmi che cosa mi mancava, ma non ero riuscito a valutare le intersezioni di χ con C.

[1] Cfr. p. 605, let. 628 (7.2.1905).
[2] Enriques 1905d, § 9.

631.

13 febbraio 1905

Carissimo Guido,

la questione dei p[ia]ni multipli è molto più difficile di quel che pareva, e precisamente ciò che non vedo come possa farsi è di superare la questione *d'esistenza*, cioè il punto essenziale.[1] Altre cose vedo, ma d'interesse secondario rispetto a quella.

Lasciamo da parte i p[ia]ni multipli; voglio intrattenerti oggi di un altro problema, più modesto se vuoi, ma dove penso di poter giungere ad un resultato preciso. Si tratta delle sup[erficie] di bigenere 1 ($p_g = p_a = 0$, $P = 1$). Mi si è presentato un processo di riduzione, col quale sembra si giunga a rappresentare tutte queste sup[erficie] sul piano doppio (con C_{12} di dir[amazione]) e forse addirittura sulla F_6 che passa 2 v[olte] per gli spigoli d'un tetraedro.[2]

L'osservazione fondamentale è che la $g^{\pi-2}_{2\pi-2}$ caratt[eristic]a di un sist[ema] $|C|$, è somma ($G_{\pi-1} + G'_{\pi-1}$) di due metà della serie can[onic]a (in più modi diversi).

Consideriamo la C' che tocca C nei punti di $G_{\pi-1}$. Le ∞^1 C per $G_{\pi-1}$ segano su C' ∞^1 gruppi can[onic]i cui app[artien]e $G^2_{\pi-1}$, tranne nel caso in cui C' si spezzi. Escluso questo caso (che conduce ad una riduzione progressiva del sistema di partenza) si ha su C' una $g_{\pi-1}$ autoresidua. Mi basta di avere un fascio di C' su cui esista una tal serie per costruire un sistema di curve d'ordine $n(2\pi - 2) + \pi - 1$ (rispetto a $|C'|$ o a $|C|$). È poi facile vedere che da questo sistema si può staccare $|nC|$.

In ogni caso dunque si ha la riduzione voluta, i cui effetti (che ho sommariamente vagliati) mi sembrano esaurire la questione nel senso sopra accennato.

Il metodo di riduzione potrebbe estendersi alle sup[erficie] di gen[ere] $p_g = p_a = 1$ ($P = 1$)? Io credo di sì. L'essenziale è di trovare delle curve C su cui vi sia una $g^1_{\pi-1}$ autoresidua; basterebbe forse determinarne una. Il modo di costruire una tal curva impiegato pel caso del big[enere] 1, qui non vale, ma intravedo un'altra via. Però metto in serbo la questione per non cumulare troppe cose.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ho ricevuto la tua Nota.[3]

Ricevo ora la tua cartolina. A me sembra che dare i lavori a Noether sia poco cortese verso Picard, che ci ha invitato a collaborare agli Annales de l'Ec[ole] Norm[ale] già da tempo, e nuovamente in occasione di questi

lavori.[4] Per parte mia anzi mi credo impegnato dalla risposta data a Picard. Per te esiste, è vero, la ragione del premio;[5] ma a questa, credo tu provveda meglio pubblicando la tua ricerca negli Atti dei Lincei,[6] e così non soltanto in italiano ma in Italia. Oltre a ciò la successiva pubblicazione in francese,[7] per la quale non esiste alcuna frétta, è più vantaggiosa per la diffusione.

Non capisco perché ti ponga dei dubbii a quel ragionamento sulle curve parabicanoniche.

[1] Cfr. p. 603, nota 2 a let. 625 (1.2.1905).
[2] I risultati di questi studi saranno pubblicati in Enriques 1907a.
[3] Castelnuovo 1905a.
[4] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1906a e p. 568, let. 600 (s.d., 1904).
[5] Enriques allude al Premio Reale per la Matematica scadente il 31 dicembre 1905, che sarà assegnato a Castelnuovo. Cfr. p. 530, nota 1 a let. 564 (7-8.6.1903). Per la precedente domanda di Castelnuovo ed Enriques per il Premio Reale cfr. p. 473, nota 5 a let. 505 (s.d., 1901).
[6] Così sarà: cfr. Castelnuovo 1905b.
[7] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1906a.

632. [c.p.]

[Bologna] 14 febbraio 1905

Carissimo Guido,

sono lieto che i tuoi riscontri confermino i miei resultati, e ti sono grato della revisione e delle semplificazioni proposte; a queste ripenserò col manoscritto[1] alla mano. Intanto mi pare di vedere che la tua formula dei plurigeneri coincida colla mia, come deve essere.

In questi giorni sono stato (e sono ancora) assorbito dal grande lavoro di mettere in ordine la mia libreria, disponendo le memorie in ordine alfabetico; perciò non sono andato avanti nello studio delle sup[erficie] di big[enere] 1.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Avevo notato anch'io che certi plurig[ener]i delle sup[erficie] ell[ittich]e risultano negativi. D'altra parte ho visto altra volta che i plurig[ener]i aritmetici sono invarianti relativi come il $p^{(1)}$; la loro importanza non mi pare molto grande.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1905d.

633.

17 febbraio 1905

Carissimo Guido,

ho finito oggi l'ordinamento della mia libreria.

Ripensando alle formule di trasformazione

$$\Omega = \omega \qquad \Omega' = -\nu\omega + n\omega'$$

adoperate nel mio lavoro[1] (e prese dal Bianchi),[2] mi pare che esse conducano per $\nu = 0, 1 \ldots n-1$, sempre alla stessa trasf[ormazion]e, e debbano perciò essere cambiate in

$$\Omega = \omega - \nu\omega' \quad \Omega' = n\omega.$$

Ho scritto al Bianchi per schiarimento.

Sopra le sup[erficie] di bigenere $P = 1$ ($p_g = p_a = 0$) la serie caratteristica di $|C|$ è una $g^{\pi-2}_{2\pi-2}$, metà della serie bicanonica. Ora dimezzando quest'ultima cogli integrali abeliani, si vede appunto che la $g^{\pi-2}_{2\pi-2}$ è (in più modi), la somma di due metà della serie canonica:

$$g^{\pi-2}_{2\pi-2} = G_{\pi-1} + G'_{\pi-1}.$$

Ciò posto considera la C' per 2 $G_{\pi-1}$. Le ∞^1 C per $G_{\pi-1}$ segano su C' una serie ∞^1 (canonica), oppure la toccano tutte secondo $G_{\pi-1}$. Nel 1° caso $G_{\pi-1}$ varia su C' in una serie autoresidua; nel 2° siccome $|C|$ non contiene $|C'|$, la C' è spezzata.

Nel 1° caso, supposto realizzato per un fascio di C', si arriva a costruire una curva C_1 che sega le C' in

$$r(2\pi - 2) + \pi - 1$$

punti, $r(2\pi - 2)$ costituendo un gruppo caratteristico, o canonico r-plo. E mi pare si deduca che $|C_1|$ contiene $|rC|$ o $|rC'|$, onde ecc.

Questo è lo schema del processo riduttore a cui ti accennavo,[3] e del cui svolgimento spero potermi occupare in questi giorni. Ti esporrò allora ragionamenti e costruzioni, cui sopra ho alluso, che mi sembra proprio conducano alla F_6.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1905d, 190.
[2] Cfr. Bianchi 1897b, in particolare § 167, 438 ed. a stampa.
[3] Cfr. p. 608, let. 631 (13.2.1905).

634.

18 febbraio 1905

Carissimo Guido,

cercando di superare alcune difficoltà del procedimento cui ieri ti accennavo, mi sembra poter giungere allo scopo nel seguente modo semplicissimo, ove non è più traccia del punto di partenza:

Sia F una sup[erficie] di S_{p-1} a sez[ioni] C, di gen[ere] p (big[enere] 1 ecc.). Per una C' vi sono (almeno) $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}-3(p-1)}$ quadriche, Q_2, le quali segano F in un'altra C'. Si han dunque $\infty^{\frac{(p-1)(p+2)}{2}-2(p-1)}$ Q_2 secanti F in coppie di C'. Ora in questo sistema di Q_2 vi sono delle Q_2 spezzate (essendo il sistema di queste $\infty^{2(p-1)}$). Una di queste Q_2 spezzate consta di due iperpiani, ciascuno dei quali sega F secondo una curva spezzata.

Si ha così un processo di riduzione, e il solo caso che mi sembra esigere un esame particolare è quello in cui si è condotti ad una rete di curve di gen[ere] 3.

Mi viene anche un dubbio, cioè che Fano abbia trovato una sup[erficie] di big[enere] 1 diversa dalla mia.[1] Ricordi la cosa?

Affettuosi saluti

tuo
Ghigo

[1] Cfr. Fano 1901, § 14; p. 475, nota 4 a let. 508 (1.4.1901).

635.

19 febbraio 1905

Carissimo Guido.

grazie di nuovo della revisione del mio lavoro.[1] Mi son fatto mandare dal S[egre] le sue memorie ed ho visto appunto che il resultato *del fascio* non c'è,[2] se non in un caso particolare, ma sembra venga fuori facilmente.

In seguito alla tua cartolina avevo visto anch'io che le sup[erficie] con $p_g = 1$ $p_a < 0$ posseggono ∞^2 corrispondenze involutorie; non vedo però che queste sieno involuzioni (corrispondenze [1, 1]). Se lo sono, c'è un gruppo ∞^2 di trasf[ormazion]i, quindi $p_a = -1$, e la sup[erficie] è iperell[ittica].

In tal caso il resultato dovrebbe essere estendibile, cioè in generale ogni sup[erficie] irregolare ($p_g - p_a \geq 2$, escluso *un* caso) dovrebbe rappresentarsi sopra una sup[erficie] regolare ($p_g + 1$)-pla.

Osserva poi che si hanno subito i seg[uen]ti resultati:

1) Se $p_g - p_a = 1$ esiste un fascio ell[ittic]o di curve.

2) Se $p_g - p_a = 2$

a) esiste un fascio di gen[ere] 2,

oppure

b) la sup[erficie] si rappresenta sopra una sup[erficie] iperell[ittic]a multipla.

3) Se $p_g - p_a > 2$, e gli integrali sono funz[ion]i uno dell'altro, esiste un fascio di gen[ere] $p_g - p_a$.

4) Se $p_g - p_a > 2$ e gli integrali sono funzioni di *due* di essi, la sup[erficie] è ancora una sup[erficie] iperell[ittic]a multipla.

Il 1° caso essenzialmente nuovo da caratterizzare sarebbe dunque $p_g - p_a = 3$: p[er] es[empio] $p_g = 2$ $p_a = -1$.

Anche qui il tuo procedimento conduce a curve (coordinate di punti di F) contenenti una γ_2^1, quindi ad ∞ corrispondenze involutorie $[n, n]$. Anzi la stessa conclusione pare sussista in generale; ma il resultato non mi pare molto espressivo, se non si arrivi a determinarlo ulteriormente.

Il male in tutto ciò è il difetto di conoscenze intorno alle serie di gruppi di punti sulle sup[erficie]. Sappiamo noi che cos'è l'analogo di una serie lineare o involutoria di una curva?

Il caso delle reti di gen[ere] 3 sulle sup[erficie] di big[enere] 1 si esaurisce, pare, facilmente.

Il processo che ieri ti esponevo esige soltanto (se va bene) un'analisi dello spezzamento, per accertarsi che in fine, arrivando a curve ell[ittich]e, queste si segano a due a due in *un* punto al più.

Una difficoltà di diversa natura è questa: se per $p_g = p_a = 0$ $P = 1$ esiste una curva can[onic]a d'ord[ine] > 0, si potrà affermare che fra i plurigeneri P_4, P_6 ... qualcuno è > 1?

Io crederei di sì, ma la dimostrazione della cosa che avevo abbozzato, non mi soddisfa.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ripensando al ragionamento che esclude *a priori* le curve parabic[anoniche] infinitamente vicine, mi parrebbe più chiaro pel lettore di esporlo, almeno in succinto: e non vedo quali obiezioni possano farglisi.

[1] Enriques 1905d.

[2] Cfr. p. 570, let. 602 (25.12.1904).

636. [c.p.]

[Bologna] 20 febbraio 1905

Carissimo Guido,

il ragionamento relativo alle sup[erficie][1] $p_g = p_a = 0 \quad P = 1$, non è un *conto* di *costanti*; si tratta di cercare le quadriche comuni a due var[iet]à nel sistema lineare di tutte le quadr[iche] di S_r. Per $r = 3$, si hanno le coppie di piani del tetraedro. Credo che tutto verrà semplicemente. Mi sembra anche di poter dimostrare che se esiste una curva bic[anonica] d'ord[ine] > 0, si ha un $P_{2r} > 1$, ma per altre ragioni questo sarebbe un assurdo. Su ciò ti riscriverò.

Ora sono occupato col manoscritto. Ho messo a posto facilmente la deduzione dalle cose di Segre.[2]

Cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1907a.
[2] Cfr. Enriques 1905d, 176-77.

637. [c.p.]

[Bologna] 22 febbraio 1905

Carissimo Guido,

procedo nella nuova redazione del mio lavoro,[1] cercando, secondo i tuoi consigli, di rendere più chiaro il passaggio al trascendente.

Intanto esporrò i principali risultati in una notina[2] che manderò a Pic[ard], cui ho scritto in proposito.

Cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

[1] Enriques 1905d.
[2] Enriques 1905c, presentato il 27 febbraio 1905.

638.

24 febbraio 1905

Carissimo Guido,

ricevo la tua qui a Firenze.

Veramente non ho capito molto bene il tuo ragionamento; ma quelle considerazioni mi fan pensare ad un modo, che non vedo bene quali punti di contatto abbia col tuo, di trattare la questione delle sup[erficie] con $p_a < -1$.

Bada che si tratta di un abbozzo d'idea.

A me sembra che la prima cosa da fare sia di definire bene in che senso debba intendersi la dipendenza degli integrali.

Se un integrale I_1 è funz[ion]e di $I_2 \ldots$, si avrà

$$I_1 = \varphi(I_2 \ldots I_r),$$

$$dI_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial I_2}\, dI_2 + \ldots$$

D'altra parte

$$dI_1 = P dx + Q dy;$$

quindi

$$1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial I_2}\, dI_2 + \ldots = P dx + Q dy.$$

Questa è in sostanza un'eq[uazio]ne diff[erenzial]e la quale, se (come mi sembra) non è identica, ha come integrali delle curve $y(x)$. E, sebbene non saprei darne ragioni chiare, intravedo che essa dia (per opportuna trasf[ormazion]e) curve $I_1 = \text{cost}$ algebriche e quindi un fascio irraz[ionale]. ((Mi pareva aver visto la cosa, ma temo sia un pasticcio)).

L'importanza del considerare un tal genere di dipendenza degli integrali, mi pare risulti da ciò:

Se nessuno dei d integrali è funz[ione] degli altri, combinandoli a due a due (col metodo di Nöther)[1] si debbono ottenere $d-1$ integrali 2-pli; $p_g \geq d-1$.

Se dunque $p_a < -1$, andiamo incontro alla dipendenza suindicata.

Sarebbe perciò importante di poterne trarre l'esistenza di un fascio irraz[ionale]. E sarebbe qui la vera generalizzazione del processo relativo a $p_g = 0$.

Bisognerebbe poter mostrare che la sussistenza di eq[uazio]ni del tipo 1), conduce in generale ad un gruppo di integrali riducibili (p con $2p$ per[iod]i) funz[ione] uno dell'altro.

Ho avuto anch'io la circolare per l'associaz[ione] universitaria. L'iniziativa (che parte da un prof[esso]re reazionario di Padova) si presenta come antagonistica alla nostra; può darsi che la cosa riesca bene, ma naturalmente io me ne tengo fuori... a meno che non si faccia qualcosa a Bologna dal gruppo di prof[essor]i con cui mi trovavo d'accordo l'anno scorso, in ispecie dall'Emery.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Noether 1873; Picard-Simart 1897-1906, I, 137-38.

639.

[s.d.]

Carissimo Guido,

il ragionamento della tua lettera mi riesce tanto più chiaro in quantoché s'inquadra nella veduta che t'accennavo, felicemente completata dalla tua osservazione.

Infatti la cosa si può spezzare in due parti.

a) fra $p_g + 2$ integrali esiste una relazione funzionale

1) $$\varphi(I_1\ I_2 \dots I_{p_g+2}) = 0, \quad \text{o} \quad I_{p_g+2} = \varphi(I_1 \dots)$$

derivante dal fatto che l'accoppiamento degli integrali secondo il processo di Nöther ((chiamavo appunto così il teor[ema] che $AB_1 - A_1B = 0$ dà una φ_{n-4})) porta solo a p_g integrali doppi indip[endent]i;

b) tutti gli integrali sono funz[ion]i di 2

2) $$I_3 = \psi(I_1\ I_2) \dots,$$

perché ci sono 2 variabili indipendenti.

L'aggiunta che tu fai, di relazioni 2) alla 1), permette di esprimere tutti gli integrali per uno di essi.

La conclusione è assai interessante.

Ma c'è anche il caso che essa possa spingersi più oltre. L'ipotesi che i d integrali dieno luogo (accoppiati) a $p_g = d - 1$ integrali 2-pli indipendenti, è un'ipotesi estrema che sussisterà probabilmente in circostanze assai limitate, e forse soltanto nel caso delle sup[erficie] iperellittiche ($p_g = 1$ $p_a = -1$) e delle ellittiche ($p_a = -1$, $p_g \geq 0$ qualunque) possedenti un fascio ell[ittic]o ed un fascio di gen[ere] p_g oppure per le sup[erficie] con 2 fasci di gen[ere] 2.

Per giustificare una conclusione di tal genere, bisognerebbe approfondire di più il concetto della dipendenza degli integrali; pur essendo i d integrali *indipendenti* (cioè funz[ion]i di 2 di essi), può esservi una relazione funzionale fra $d - h$ di essi; allora questi sono tutti funz[ion]i un dell'altro, e vi è un fascio di gen[ere] $d - h$.[1]

Ora per dedurre una siffatta relazione funzionale, basterebbe provare che, per $p_g > 1$, vi è qualche integrale doppio che non nasce dagli integrali di Pic[ard] col processo di Noether* (Qua forse potrebbero soccorrere le tue considerazioni sulla varietà dei gruppi di punti).

Scrivendo le linee antiprec[eden]ti mi accorgo che ad una discussione di

* Sembra che gli stessi integrali di Pic[ard], combinati in altro modo, dien luogo a più integrali (2-pli), ma ciò vedo solo in casi particolari.

codesto genere si andrà già incontro per trattare l'ipotesi di $p_g + 2$ integrali, quando sia $p_g > 1$, quantunque sembri che la cosa non produca grave disturbo.

Venerdì dobbiamo eleggere le commissioni di concorso.[2] Le disposizioni circa l'entrata dei prof[essor]i *affini* nell'elenco dei prof[essor]i della materia sono assai larghe. Perciò si potrà dare il voto a Bert[ini] e Segre, facendo forse entrare il primo nel primo elenco; ha egli insegnato in passato la Geom[etria] pr[oiettiv]a e descr[ittiva]) oppure basta la sua attuale qualità d'inc[arica]to?

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. anche Castelnuovo 1905c.

[2] Si tratta dei concorsi per le cattedre di Geometria proiettiva e Geometria descrittiva presso l'Università di Padova. Cfr. p. 524, nota 2 a let. 559 (18.4.1903).

640.

1 Marzo 1905

Carissimo Guido,

ritornando sulle cose di ieri, mi par di vedere che tutto possa precisarsi molto di più; credo che abbiamo gli elementi per andare molto innanzi.

Anzitutto consideriamo i d integrali

$$I_k = A_k dx + B_k dy \qquad k = 1, 2 \ldots d,$$

e formiamo la matrice

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_d \\ B_1 & B_2 & \ldots & B_d \end{vmatrix}.$$

I minori di questa sono $\frac{d(d-1)}{2}$ (non $(d-1)^2$ come ho scritto ieri sulla busta). Essi danno $\frac{d(d-1)}{2}$ integrali 2-pli. Se però questi non sono linearmente indipendenti, abbiamo che due combinazioni lineari *distinte* degli I_k sono integrali funzioni uno dell'altro. Basta ciò per venire al fascio irraz[ionale] di curve sulla sup[erficie]?

A me pare di sì, credo che la cosa segua da un confronto dei due integrali secondo la teoria delle funzioni; ma probabilmente la cosa stessa può vedersi più facilmente.

Ammettiamo per il momento la cosa. Avremo:
1) o fascio irraz[ionale]

2) o $p_g \geq \frac{d(d-1)}{2}$; $d = p_g - p_a$.

Di qui conseguenze importanti:

a) Le sup[erficie] con $p_a = -1$ *sono ellittiche* (p_g qual[sias]i) *o iperellittiche* ($p_g = 1$).[1]

Basta infatti applicare la nostra relazione

$$\Delta + 4(\rho - 1)(\rho' - 1) - 4 = 12p_a - p^{(1)} + 9,$$

per dedurre $p^{(1)} = 1$ e $\rho = 1$, o $\rho' = 1$; ma se è dato un fascio ell[ittic]o si costruisce un fascio di curve ell[ittich]e canoniche; viceversa se è dato un fascio irr[azionale] di curve ell[ittich]e (con = [stesso] mod[ulo]) si costruisce un 2° fascio, che nelle nostre ipotesi dovrà risultare ell[ittic]o; infine si applicano i ragionamenti e le conclusioni del mio lavoro[2] per provare l'esistenza del gruppo ∞^1 di trasf[ormazion]i.

b) Si possono determinare tutte le sup[erficie] irr[egolari] con $p_a = 0$, le quali (a differenza delle prec[eden]ti) sembrano condurre a un numero limitatissimo di tipi.

Forse la cosa si prosegue e c'è un teor[ema] generale:

le sup[erficie] irr[egolar]i contengono fasci irraz[ionali], oppure sono riferibili alla sup[erficie] delle coppie di punti d'una curva di gen[er]e p, semplici o multiple.

Se non proprio a questa, ad una conclusione simile si arriverà certamente.

Si vede chiaro che le sup[erficie] irr[egolar]i sono assai meno di quel che si credeva!

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1905e, 206.
[2] Enriques 1905d.

641.

[s. d.]

Carissimo Guido,

parto stasera per Firenze, dove passerò la notte, giungerò quindi costà domani sera alle $9\frac{1}{4}$. Questa lettera mi precederà dunque di poche ore.

Dalla tua cartolina di ieri rilevo:

1) che tu superi facilmente la questione di mostrare che quando un integrale I_2 = funz[ione di] I_1 (s'intende non $I_2 = aI_1 + b$) esiste un fascio irraz[ionale];[1] per me è semplice soltanto di mostrare che in tal caso le curve I_1 = cost I_2 = cost si spezzano in ∞ parti, ma l'algebricità di queste non mi risulta altrettanto chiara, ed è perciò che invocavo consideraz[ion]i sugli integrali delle equaz[ioni] $Pdx + Qdy = 0$ nel campo complesso, le quali non sono del tutto soddisfacenti;

2) che alla mia osservazione sui determinanti tratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_d \\ B_1 & B_2 & \dots & B_d \end{vmatrix},$$

obietti (giustamente) che ad una relaz[ione] funz[ionale] fra

$$\int(\lambda_1 A_1 + \dots)\,dx + (\lambda_1 B_1 + \dots)\,dy \qquad \text{e} \qquad \int(\mu_1 A_1 + \dots)\,dx + \dots$$

non corrisponde (per d grande) una relaz[ione] lineare a coeff[icient]i *generici* fra i suddetti minori. Ciò è vero, e quindi quel ragionamento dà soltanto (e questo in modo immediato) che, ove non si abbia la relaz[ione] funz[ional]e suddetta, è $d \geq 2p_g$ (o $2p_g - 1$ salvo il vero).

Le conclusioni per $p_a = -1$ sussistono dunque, e si ha il teor[ema] veramente cospicuo che «la condiz[ion]e nec[essaria] e suff[iciente] perché una sup[erficie], non raz[ionale], ammetta un gruppo di trasf[ormazioni] è $p_a < 0$».[2] Di ciò discorreremo.

Anche per $p_a = 0$ si va assai bene.

Quanto al resultato più generale che avevamo in vista, io non credo facile di superare la diff[icolt]à alg[ebric]a da te messa in luce. Però si può tentare, forse proficuamente, un'altra strada, partendo dalla rappres[entazione] delle sup[erficie] irr[egolari] sopra una serie di gruppi appartenenti ad una curva. Questa rappres[entazione] conduce in sostanza a studiare le inv[oluzion]i sopra le sup[erficie] rappresentanti le coppie di punti di una curva.

D'altra parte prima di tutto s'impone di risolvere definitivamente la questione delle sup[erficie] iperellittiche multiple, che più volte abbiamo incontrato, e che corrisponde alla determinaz[ione] delle sup[erficie] per cui[3] $p_g - p_a = 2$.*

Io temo tuttavia che il resultato definitivo delle nostre ricerche lascerà sempre fuori un certo numero di sup[erficie] irr[egolar]i per cui $p_g - p_a$ è

* Sembra stieno alle sup[erficie] delle coppie di punti d'una curva conten[ent]e una inv[oluzione] di gen[ere] 2, come le sup[erficie] ell[ittiche] con $p_g = 0$ alle sup[erficie] ell[ittich]e di det[erminante] 1.

assai piccolo, a meno che non si riesca a rappresentarle su sup[erficie] multiple con un p_a molto basso.

Come vedi avremo da discorrere!

Cordiali saluti e... a rivederci, tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Castelnuovo 1905c, 501-02.
[2] Cfr. Enriques 1905e, 206.
[3] Cfr. Castelnuovo 1905b, 497.

642. [c.p.]

[Vallombrosa] 19 marzo 1905

Carissimo Guido,

mi pare giusto e semplice il modo con cui stabilisci[1] che la var[iet]à di Pic[ard] ha $p_g - p_a$ integrali di 1ª specie. Anzi credo che osservando la composizione di quelle somme $\int u(x_i)$ possa dedursi che esse nascono da integrali abeliani della curva sezione i cui periodi si riducono a $2(p_g - p_a)$. Ciò semplificherebbe notevolmente la 2ª parte della dimostrazione.

Grazie dell'informazione, può darsi che abbia occasione di riparlati della cosa.

Domani sarò a Firenze, Mercoledì a Bologna.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Castelnuovo 1905b.

643.

2 aprile 1905

Carissimo Guido,

ho varie novità da raccontarti:

Ho avuto una spiegazione col Ver[onese] venuto qui l'altro giorno colla moglie, e siamo riconciliati! Il V[eronese] mi ha dichiarato che le sue parole allusive ai miei Elementi[1] erano ispirate soltanto da un amor proprio di autore, che crede di non vedere sufficientemente apprezzata l'opera propria. Egli ritiene di essere stato il primo a concepire la Geometria come una serie di sviluppi logici basati su osservazioni elementari, o almeno a portare questa concezione nell'insegnamento, e si è lagnato per ciò che questo merito non gli veniva riconosciuto esplicitamente.

Posta la questione su questo terreno, scientifico, non vi è più motivo ad animosità personale.

Sono stato ieri l'altro a Parma a trovare Severi. Egli ti avrà già scritto

a quest'ora, come dall'estensione alle sup[erficie] del teor[ema] d'Abel sia stato tratto in modo molto semplice al computo degli integrali di Picard. Questa dimostrazione è nell'ordine d'idee, di cui parlavamo a Roma, di considerare le somme di integrali relative ai punti d'incontro di una curva C con un'altra.

Sev[er]i ha mandato una nota[2] a Pic[ard] pei Comptes rendus.

È qui a Bologna Bonnesen, dopo aver passato il semestre d'inverno a Gottinga; mi pare poco soddisfatto di quel soggiorno, e temo poco preparato alle ricerche di Geom[etri]a algebrica, alle quali ora (lasciando da parte le questioni sui «Principii») sembra vorrebbe rivolgersi.

Gli ho proposto di estendere la relaz[io]ne funzionale tra i sistemi jacobiani, considerando il luogo dei punti tripli delle curve d'un sis[tem]a lineare ∞^5 ecc.

Tanti saluti cordiali tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques-Amaldi 1903a; cfr. in particolare p. 542, let. 577 (16.2.1904).
[2] Severi 1905b, presentato nella seduta del 3 aprile 1905.

644.

7 Aprile 1905

Carissimo Guido,

sono un po' stanco e ti rispondo in fretta. Scrivi pure al De Fr[anchis] come dici; del resto tu che hai avuto corrispondenza con lui su questi argomenti puoi meglio di me giudicare come regolarsi.

Non ho alcuna difficoltà che tu proponga anche al De Fr[anchis] di completare il teor[ema][1] per $p_a < -1$. Se egli non ha la mia Nota di Tolosa[2] digli che me la richieda, e ad ogni modo ricordagli la mia ultima nota dei C[omptes] R[endus][3] ove è enunciato il teor[ema] per $p_g = 0 \quad p_a < -1$ (il lavoro è sotto stampa al Circolo di Palermo).[4]

Soltanto penso, se il De Fr[anchis] adopera i binomi di Nöther,[5] che cosa resterà a noi[6] su questo soggetto?

Vedo sfumare tutta la prima parte del lavoro, e ridursi la cosa ad una estensione di ciò che ho fatto pei gruppi nel caso $p_g = 0$. Poco male del resto.

Saluti cordiali tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Sev[er]i si scusa, essendo occupato, di non averti scritto secondo la promessa. Posso dirti però che la sua dimostraz[ione][7] differisce dalla

tua[8] in un punto essenziale; egli non fa uso dei periodi degli integrali e gli basta contare il n[umer]o dei gruppi non equi[valenti] e quindi delle costanti $(p_g - p_a)$ date dalle somme abeliane per avere il n[umer]o degli integrali.

[1] Cfr. De Franchis 1905a, presentato al Circolo Matematico di Palermo il 23 aprile 1905.

[2] Enriques 1901a.

[3] Enriques 1905c.

[4] Enriques 1905d.

[5] Cfr. p. 614, let. 638 (24.2.1905) e p. 615, let. 639 (s.d., 1905).

[6] A questo proposito si vedano in particolare Enriques 1905e e Castelnuovo 1905c, entrambi presentati il 14 maggio 1905 al Circolo Matematico di Palermo. L'articolo di Castelnuovo fu scritto sotto forma di lettera indirizzata a Michele De Franchis.

[7] Cfr. Severi 1905b, presentato il 3 aprile 1905, e la più ampia versione Severi 1905c.

[8] Cfr. Castelnuovo 1905b, presentato nelle sedute dell'Accademia dei Lincei del 21 maggio e 4 e 18 giugno 1905.

645.

9 Aprile 1905

Carissimo Guido,

la tua proposta è molto gentile, ma si potrebbe anche adottare un'altra soluzione, che consisterebbe in questo.

Tu potresti dare il teor[ema] generale[1] sulle sup[erficie] con $2d > p_g$, come corollario del teor[ema][2] sugli integrali ((notando pure ciò che si ottiene per $p_a < 0$)), ed io completare il mio lavoro[3] con una notina[4] sulle sup[erficie] che ammettono un gruppo; ciascuno di noi direbbe che ci siamo incontrati nel vedere che per questa via si potevano caratterizzare le sup[erficie] di genere negativo, ma che frattanto venuti a conoscenza che il De Fr[anchis] era giunto indipendentemente ad una parte dei nostri resultati,[5] gli abbiamo lasciato la precedenza.

Rispondi a questa proposta senza complimenti, ((colla stessa mia franchezza; non vorrei in alcun modo ti dispiacesse)).

Se ti va potremmo far uscire insieme i lavori, e per parte mia la redazione della nota non richiederebbe che pochi giorni. Nota che in fin fine la questione del fascio entra per me essenzialmente soltanto per questo che ho bisogno di sapere: $p^{(1)} = 1$.

Coll'altro lavoro[6] sugli integrali questo non ha in sostanza alcun rapporto, e perciò non capirei la fusione.

Quanto al ragionamento sui binomi di Nöther ti raccomanderei in caso di seguire la via più semplice di cui parlammo:[7] se fra i minori estratti

dalla matrice

$$\begin{vmatrix} A_1 & \dots & A_d \\ B_1 & \dots & B_d \end{vmatrix}$$

intercedono r relaz[ioni] lineari $\left(r > \frac{d(d-1)}{2} - 2d\right)$, si ha una relaz[ione] della forma

$$\Sigma(\lambda_i\mu_k - \mu_i\lambda_k)(A_iB_k - B_iA_k) = 0$$

cioè un

$$\det \begin{vmatrix} \Sigma\lambda_iA_i + \dots \Sigma\mu_kA_k + \dots \\ \Sigma\mu_iA_i + \dots \Sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ecc.}$$

salvo errore di scrittura.

Ogni altra considerazione è superflua.

Il ragionamento sulle sup[erficie] irr[egolari] rappresentabili su una sup[erficie] reg[olare] doppia è assai semplice e potrà condurre a qualche cosa.

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Castelnuovo 1905c.
[2] Cfr. Castelnuovo 1905a.
[3] Enriques 1905d.
[4] Enriques 1905e.
[5] Cfr. De Franchis 1905a.
[6] Enriques-Castelnuovo 1906a.
[7] Cfr. p. 616, let. 640 (1.3.1905) e p. 618, let. 641 (s.d., 1905).

646.

12 Aprile 1905

Carissimo Guido,

siamo in massima d'accordo; sarà facile accordarsi sui particolari, del resto ti manderò la Nota[1] quando l'avrò redatta. Per redigerla mi fa mancanza il lavoro[2] mandato a Guccia; non vorrei che questi mi facesse un tiro, mandando avanti il lavoro del De Fr[anchis];[3] infatti mi aveva promesso le bozze pei primi di Aprile.

Io partirò dal fatto che per $p_a = -1 \quad p_g > 1$ c'è un fascio irraz[ionale], cor[ollari]o del teor[ema] più generale per $p_g > 2p_a + 3$. La formula del S[egre][4] dà, come tu dici, che il fascio è di curve ell[ittich]e oppure el-

l[ittic]o, e dà anche $p^{(1)} = 1$. Servendomi di questa circostanza e dell'analisi svolta nel caso $p_g = 0$, riesco a stabilire che sulla sup[erficie] vi sono simultaneamente *due* fasci: uno ell[ittic]o di curve qualsiasi, e uno di genere p_g di curve ell[ittich]e di = [stesso] modulo.

Questa è la proprietà caratt[eristic]a delle sup[erficie] con un gruppo ell[ittic]o ∞^1.

Nel caso $p_a = -1$ $p_g = 1$ ricorderai che ci siamo incontrati[5] dapprima nel vedere che si han sup[erficie] iperell[ittich]e semplici o multiple o (tu aggiungevi) fascio di genere due. Ora questo resultato appartiene già a Pic[ard] e a Painlevé[6] ((i quali però suppongono implicitamente gli integrali indipendenti)). Ma io vorrei spingere avanti l'analisi di cui ti parlavo a Roma; rettificato un punto essa conduce a questo:[7]

1) il caso del fascio di gen[ere] 2 non esiste (perché una sup[erficie] con un tal fascio risulta ell[ittic]a con $p_g = 2$, per l'analisi precedente del caso ellittico);

2) si hanno sup[erficie] iperellittiche (semplici) e sup[erficie] ellittiche, contenenti due fasci ell[ittic]i: uno di curve di genere 1, l'altro di curve di gen[ere] > 1. Questo 2° caso si distingue dal 1° perché il quadrigenere $P_4 > 1$ (per le sup[erficie] iperell[ittiche] $P_4 = 1$).

Tale caso è sfuggito a Pic[ard] perché egli suppone che manchi la curva canonica; del resto io non sarei neppure convinto del rag[ionamen]to di Pic[ard] nell'ipotesi che manchi la curva can[onic]a, se non lo avessi rifatto per conto mio.

Dunque per intenderci sul caso $p_a = -1$ $p_g = 1$, vorresti limitarti ad avvertire che avendosi due integrali si ricade in una classe di sup[erficie] per cui si ha una rappres[entazione] parametrica studiata da Pic[ard] e da Painlevé?[8]

(Painl[evé] dà il teor[ema] giusto cioè la rappres[entazione] su sup[erficie] iperell[ittic]a multipla: la curva di dir[amazione] manca o ha il genere 1: questo lo desumo io dal teor[ema] di Sev[eri]).[9]

Dicono che le commissioni di concorso[10] sieno tutte annullate per varie irregolarità.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques 1905e.
[2] Enriques 1905d, presentato il 5 marzo 1905.
[3] De Franchis 1905.
[4] Cfr. Segre 1896; Enriques 1905e, 209.
[5] Cfr. in particolare p. 600, P.S. a let. 621 (15.1.1905).
[6] Cfr. Picard 1889; Painlevé 1903.
[7] Cfr. Enriques 1905e, § 4.
[8] Cfr. Castelnuovo 1905c, 506.
[9] Cfr. Severi 1903d, 171.
[10] Cfr. p. 616, let. 639 (s.d., 1905).

647.

15 Aprile 1905

Carissimo Guido,

il teor[ema] di Painlevé sulle sup[erficie] con due integrali di 1ª sp[ecie], cui alludevo, rientra nel teor[ema] II della nota[1] dei C[omptes] R[endus] 30 marzo 1896, che tu pure possiederai. Mi pare probabile che nella memoria di P[ainlev]é, da te citata,[2] egli ritorni sull'argomento.

Non vi è nulla di strano che tra le sup[erficie] ellittiche con un fascio di gen[ere] p_g di traiettorie (ell[ittich]e) e un altro fascio ell[ittic]o di curve di gen[ere] π qualsiasi, si trovino famiglie di sup[erficie] per cui $p_g = 1$ e π qualsiasi > 1 (se si fa $\pi = 1$ la sup[erficie] viene ad ammettere un 2° gruppo ∞^1 ed è quindi iperellittica). D'altra parte le suddette sup[erficie] ell[ittich]e sono rappresentabili su sup[erficie] iperellittiche multiple (e *non* su sup[erficie] iperellittiche semplici) con curva di diramaz[ione] ellittica.

Ti avverto poi che nel ripetere il resultato sul fascio da cui prendo le mosse, dirò «un fascio di *gen[ere]* > 1»; se dunque tu applichi la formula del S[egre] concludi addirittura ad un fascio di curve ell[ittich]e non ad un fascio ell[ittic]o di curve, poiché questa ipotesi è già scartata prima pel modo di costruzione del fascio. Ad ogni modo io ripeterei questo breve ragionamento, che credo ricorrerà in più punti del mio studio, il quale del resto riuscirà brevissimo; non c'è danno in una così piccola interferenza.

Resta da fissare il luogo di pubblicazione. Temo che il Circolo ci manderà alle calende greche, visto che non ho ancora avuto le bozze della mia memoria;[3] si potrebbe perciò pubblicare le Note[4] nei Lincei, se tu volessi presentarle in una medesima seduta quando saranno fatte e dopo la pubblicazione della tua nota[5] sul numero degli integrali.

Vengo ora alla questione del De Fr[anchis]. Dalle ultime conversazioni avute col Sev[er]i mi parve di capire che egli creda di avere un vantaggio personale col concorrere alle due cattedre, nel senso che sarebbe più facile riunire i due insegnamenti facendo un posto d'ordinario, o un posto d'ord[inari]o e un incarico. Ad ogni modo non ho alcuna difficoltà a parlare col Sev[er]i esplicitamente comunicandogli i timori del De Fr[anchis]; preferirei però *parlare* anziché *scrivere* e perciò aspetterei una prossima occasione, tanto più che nel momento attuale non vi è più alcuna fretta.

Quanto alle conseguenze pratiche della partecipazione di Sev[er]i ai due concorsi, sia detto fra noi, i timori del De Fr[anchis] non credo sieno fondati, perché mi pare difficile che il Bor[diga] possa passare avanti al C[ian]i.[6]

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Credo di potere stabilire che le sup[erficie] con un gruppo discreto di trasf[ormazion]i ammettono un gruppo continuo, e ciò per una via più semplice di quella cui ti accennavo a Roma e che lasciava dubbia l'esistenza di un caso con un fascio di curve ell[ittich]e di mod[ul]i diversi.

Coll'operazione a pompa dimostrerei che i sistemi trasformati di un $|C|$, appartengono ad una serie continua. Allora si hanno ∞ trasformate della sup[erficie] F, componenti una certa serie alg[ebric]a γ, e poiché in γ vi sono ∞ sup[erficie] proiett[iv]e ad F, ve n'è una infinità continua.

Ti pregherei di darmi il titolo del libro che mi mostrasti sulle funzioni abeliane, dove in specie vorrei cercare il teor[ema] (di Poincaré?) sulla riducibilità dei periodi degli integrali.[7]

[1] Painlevé 1896.

[2] Painlevé 1903, citato in Castelnuovo 1905b, 506, nota **.

[3] Enriques 1905d.

[4] Castelnuovo 1905c ed Enriques 1905e saranno pubblicate nei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo». Cfr. anche p. 621, nota 6 a let. 644 (7.4.1905).

[5] Castelnuovo 1905b. Cfr. anche p. 621, nota 8 a let. 644.

[6] Il ministro aveva decretato la revoca dei concorsi per le due cattedre di Padova per professore straordinario di Geometria descrittiva e di Geometria proiettiva (cfr. p. 524, nota 2 a let. 559, 18.4.1903) e contestualmente la riapertura dei concorsi con scadenza il 15 febbraio 1905.

Per il concorso di Geometria proiettiva la commissione fu composta da Giuseppe Veronese, Eugenio Bertini, Domenico Montesano, Mario Pieri e Castelnuovo. I concorrenti furono Edgardo Ciani, Michele De Franchis, Beppo Levi, Francesco Severi. Il concorso si concluse il 20 ottobre 1905 con la seguente graduatoria: 1° Severi, 2° De Franchis, 3° Ciani (cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXXIII, 2, n. 31, 2183-90).

La commissione del concorso di Geometria descrittiva fu composta dagli stessi Veronese, Bertini, Montesano, Pieri e da Enriques. I concorrenti furono Enrico Amaturo, Giovanni Bordiga e gli stessi Ciani, De Franchis, Beppo Levi, Severi. Il concorso si concluse il 23 ottobre 1905. La commissione dichiarò vincitore Severi e, non avendo trovato un accordo per la nomina di un secondo e terzo, si limitò a proporre un solo nome (cfr. «Boll. Uff. Min. Istr. Pubbl.», XXXIII, 2, n. 39, 2738-48).

Severi fu nominato (Regio Decreto 11 e 13 gennaio 1906) straordinario stabile di Geometria proiettiva e incaricato di Geometria descrittiva all'Università di Padova. Con decreto 25 gennaio 1906, Severi fu reintegrato nel grado di ordinario di Geometria proiettiva dal 1° febbraio 1906 e dalla stessa data Bordiga, libero docente di Geometria proiettiva e descrittiva e titolare negli Istituti tecnici, fu confermato nel comando per l'insegnamento di Geometria descrittiva presso l'Università di Padova. De Franchis, in seguito a concorso, fu nominato il 15 gennaio 1906 professore straordinario di Algebra complementare e Geometria analitica all'Università di Cagliari. Alla fine dello stesso anno De Franchis risultò vincitore della cattedra di professore ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Parma, resa vacante per il trasferimento di Severi.

[7] Il teorema è citato in Enriques 1905e, 211. Per i risultati di Poincaré cfr. i lavori Poincaré 1884a, 1884b, 1886a e 1886b.

648. [c.p.]

[Bologna] 18 Aprile 1905

Carissimo Guido,

hai avuto la mia lettera del 14?[1]

Ho rettificato ciò che ti scrivevo in fine sulle sup[erficie] con un gruppo discreto di trasf[ormazion]i. Il tipo con un fascio di curve ellittiche esiste veramente, e si può caratterizzare bene la famiglia in questione, pervenendo anche a qualche proposizione sulla base.

Ma per ora non voglio pensarci per non mettere troppa carne al fuoco.

Tanti saluti cordiali tuo aff.mo

Ghigo

[1] Dovrebbe invece trattarsi della lettera precedente datata 15 aprile 1905.

649.

24 aprile [1]905

Carissimo Guido,

ho ricevuto le tue due lettere, di ieri l'altro e di ieri.

Rispondo anzitutto a quest'ultima. La questione che incontri è veramente un punto delicato della cosa, tant'è vero che essa ha arrestato anche Sev[er]i, il quale ha superato la difficoltà mediante un lemma sulle curve (di cui mi ha esposto la dimostrazione) come vedrai nella sua nota.[1] *Alla peggio* avresti la risorsa di appoggiarti al lemma di Sev[er]i, confessando francamente di non avere approfondito quel punto.[2] Ma prima di ricorrere a tale partito si può riflettere alla cosa con calma.

Una via per superare la difficoltà parmi potrebbe forse esser questa.

Supponiamo che la somma $C_1 + \ldots + C_n$, costituita dalle curve C di una ∞^1 S_1, varii in un sistema lineare $|K|$.

Seghiamo con una curva L, e supponiamo che la serie segata da $|K|$ su L sia una g_m completa (tale ipotesi potrà convenientemente realizzarsi).

Allora, cerchiamo i gruppi di g_m composti con s gruppi della serie γ_ν ($m = s\nu$) segata dalle C, e vediamo se la totalità di questi gruppi formi una serie la cui dimensione sia quella di una g_s sopra S_1.

Ciò deve accadere e sarà sufficiente pel tuo scopo.

Ciò che mi scrivi ieri del De Fr[anchis] è molto delicato da parte sua;[3] perciò cercherò una forma di citazione che metta in luce quanto è di fatto contenuto nel resultato da lui enunciato.[4]

Appena tu abbia letto il mio manoscritto, mi farai piacere a rimandarmelo, perché, per contentare Guccia, dovrò farlo copiare; e dovrò d'altra parte ritornare sul punto della formula di Sev[er]i.[5]

In questa formula entra il gen[er]e effettivo e non virtuale, quindi un pasticcio, che fortunatamente credo aver superato girando un po' la questione.

Tanti saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Severi 1905b, 294.
[2] Cfr. Castelnuovo 1905b, 492, nota **, in cui è citato il lemma di Severi.
[3] Cfr. p. 620, let. 644 (7.4.1905).
[4] In Enriques 1905e, 207-08 si legge: «Frattanto venimmo a conoscere che il sig. De Franchis ci aveva in parte preceduto, stabilendo che una superficie per cui un integrale picardiano è funzione di un altro (algebricamente indipendente) contiene un fascio irrazionale di curve, e deducendone in particolare che ogni superficie di genere $p_a < -1$ possiede sempre un tal fascio». Cfr. De Franchis 1905a.
[5] Cfr. Enriques 1905e, 213; Severi 1903d, 171.

650. [c.p.]

[Bologna] 5 Maggio 1905

Carissimo Guido,

vorrei scriverti più a lungo, ma sono un po' sopraffatto per il lavoro che mi porta l'art[icolo] dell'Enciclopedia,[1] cui si riferiscono sempre nuove domande di Klein.

Rispondo ora alla tua cartolina. Mandami il manoscritto;[2] lo vedrò volentieri. Io non ho poi alcuna difficoltà se vuoi esporre in fine quella questione dei *moduli*[3] (bada che questa forma non mi sembra chiara), e dire in qual senso essa viene risolta in connessione alla estensione del teor[ema] sul sis[tem]a continuo, o anche in base a considerazioni d'Analysis situs.

Cordiali saluti,

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Ho avuto anch'io le bozze di stampa[4] dal Circolo.

[1] Enriques 1907d.
[2] Si tratta del manoscritto di Castelnuovo 1905b.
[3] Cfr. Castelnuovo 1905b, 498-99.
[4] Si tratta delle bozze dell'articolo Enriques 1905d.

651. [c.p.]

[Bologna] 14 maggio 1905

Carissimo Guido,

ho visto il tema nei C[omptes] R[endus][1] e fu anzi in parte la circostanza dei piani 2-pli che mi fece ripensarvi. Credo che le involuzioni *irregolari* si determinino assai facilmente, anzi è probabile si riducano a sup[erficie] iperellittiche ($p_a = -1, p_g = 1$) e ell[ittich]e ($p_a = -1 \quad p_g = 0$). Ma la questione essenziale è lo studio delle inv[oluzioni] regolari, per le quali credo intanto poter stabilire $p_g = p_a = 1$.

Pei piani 2-pli si hanno intanto i miei tipi come punto di partenza. Ma forse (in base ad alcune osservazioni fatte con Sev[er]i) si riuscirà a vedere che tutte le inv[oluzioni] reg[olari] su sup[erficie] iperell[ittich]e sono rappresentabili sul p[ia]no 2-plo. Però alla questione non posso pensare ora di proposito.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] Non ci è stato possibile determinare con certezza a cosa alluda Enriques.

652.

28 maggio 1905

Carissimo Guido,

ti ringrazio della notizia che mi comunichi, dubito però che nella formazione della terna, possa intervenire un cambiamento, perché non son sicuro di godere le simpatie di tutti quei signori.[1]

Quanto a ciò che mi scrivi intorno alla costruzione della V_{p-q} in una V_p ove esistono ∞^{p-q} V_q, l'apprezzamento intorno alla semplicità del metodo può essere questione di gusto, ma ti faccio notare che la mia costruzione dà ∞^q V_{p-q} *che non hanno punti comuni*, e però formano senz'altro una 2ª serie d'imprimitività del gruppo.

Sarà assai interessante di spingere innanzi la questione delle sup[erficie] irregolari. Per conto mio ho fatto *punto* per quest'anno colle ricerche matematiche (salvo a rioccuparmi se occorrerà della questione dei periodi che abbiam detto di trattare insieme[2] e su cui hai un mio manoscritto), rimandando a quest'altr'anno le questioni rimaste in sospeso, fra cui quella delle sup[erficie] di bigen[ere] 1 che ti comunicai[3] come credo riuscire a risolvere. Vorrei invece nelle vacanze *varare* il mio lavoro filosofico.[4]

Bonnesen[5] è partito da Bologna l'altro giorno. Egli ha studiato bene i nostri lavori, e si è occupato di ritrovare le formule numeriche di Zeu-

then e Nöther arrivando in particolare a trovare un nuovo invariante relativo assai semplice delle sup[erficie]:

$$2\delta - \chi,$$

δ = n[umer]o p[un]ti 2-pli in un fascio χ = n[umer]o fasci con un p[un]to 2-plo in un sistema ∞^3 (pinch-points). Credo che potrà mettere insieme un lavoretto[6] sull'argomento, il quale risparmierà a noi la fatica di studiare certi pasticci di Noether, se pure non ci darà cose nuove.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques era stato proposto per l'elezione a socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei, che invece avverrà il 15 luglio 1906.
[2] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1906a.
[3] Cfr. p. 608, let. 631 (13.2.1905) e successive ed Enriques 1907a.
[4] Cfr. Enriques 1906c.
[5] Cfr. p. 620, let. 643 (2.4.1905).
[6] Bonnesen 1906.

653.

7 giugno 1905

Carissimo Guido,

grazie delle particolareggiate informazioni intorno a ciò che è avvenuto nell'Accad[emi]a, e di cui mi ha dato notizia ieri il Pincherle.

La cosa non mi ha recato nessuna meraviglia, bensì non potrei dire di esserne contento, perché in fin dei conti dispiace sempre di essere in qualche modo scartato, ed è la terza volta che ciò si fa verso di me. Se non mi avessero mai portato in terna, non me ne sarei doluto ma l'avversione che mi viene mostrando una parte dell'Accad[emi]a mi riesce inesplicabile.

Ho visto in questi giorni lo Zermelo, con cui abbiamo discorso della sua questione sopra la possibilità di ben ordinare il continuo: egli fa un ragionamento con *infinite scelte* del tipo criticato da Peano.[1]

Domani andrò a Montecatini a salutare Levi-Civita.

Ci vedremo a Pracchia alla fine del mese?

Saluti cordiali anche all'E[lbina]. Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques si riferisce al cosiddetto assioma di scelta enunciato in Zermelo 1904a. Per la critica di Giuseppe Peano, cfr. Peano 1890b, 150.

654.

30 giugno 1905

Carissimo Guido,

parto domani per Pracchia, e andrò Lunedì a Cutigliano.

Spero di vederti presto.

Intanto ho da comunicarti una questione sollevata da Picard, un po' imbarazzante. Picard dimostra[1] che la deficienza del sistema segato sul piano dalle φ_{m-3} agg[iun]te è

$$\omega_{m-3} = p_g - p_n.$$

È una conseguenza delle relazioni

$$r \leq 2\omega_{m-3} \qquad r_0 = r - (p_g - p_n)$$

$$r_0 = \frac{r}{2},$$

(r_0 integrali 1ª sp[ecie], r di 2ª).

Questa conclusione lo ha arrestato perché credeva che noi si avesse qualche esempio di

$$\omega_{m-3} < p_g - p_n.$$

Gli ho risposto che un simile esempio si era costruito in passato, ma non riuscivo a ricostruirlo e può darsi non stesse. Egli si è subito tranquillizzato... anche troppo!

Se è vero che

$$\omega_{m-3} = p_g - p_n,$$

si deve poterlo vedere direttamente, e ciò non sembra facile nemmeno a Severi, che ho visto qui l'altro giorno, e che ha tentato.

Oggi Sev[er]i muove al ragionamento di Picard un'obiezione, per verità un po' sottile.

Ti comunicherò tutto un altro giorno, oggi ho fretta. Ma intanto bisognerebbe vedere se è possibile ricostruire quell'esempio:[2] mi pare che s'intersecassero due varietà (coni di 2ª specie) in S_4.

Ho tentato il caso più semplice e non mi ha dato niente.

Saluti cordiali. Rispondimi a Pracchia o a Cutigliano.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Cfr. Picard 1905c.

[2] A questo proposito si veda quanto riferito in Picard 1905c, 231.

655.

31 Luglio 1905

Carissimo Guido,

il Meyer mi scrive che il mio Art[icolo] sui Principii[1] uscirà pubblicato prestissimo e che ora è tempo di pensare a quello delle superficie, che vorrebbe pronto in mezz'anno circa; egli mi dice di accordarmi a tale scopo con te.

Ora sarebbe l'occasione di chiedere alla Direzione dell'Enciclopedia che l'art[icolo] venga spezzato in uno d'indole proiettiva e nello studio delle proprietà invarianti (come si potrebbe intitolare?); ciò senza pregiudizio di uno speciale art[icolo] sulle trasformazioni che dovrà comprendere altre cose.[2]

Se sei d'accordo con me, farò questa proposta rispondendo al Meyer. In tal caso il tuo manoscritto tolte le ultime parti costituirebbe senz'altro il 1° art[icolo], e il 2° si compirebbe facilmente sulla scorta del Bericht[3] e dell'art[icolo] fatto per Picard.[4] A quello sulle trasf[ormazion]i si potrebbe fors'anche rinunziare proponendo p[er] es[empio] che sia affidato al Severi.

Che cosa ne dici?

Aspetto ad ogni modo la tua risposta.

Ho avuto la gradita cartolina d'Elbina che mi ha recato le prime notizie della Mamma, e poi la cartolina della Mamma stessa.

Vi auguro di stare tutti bene e fare una buona villeggiatura.

Saluti affettuosi Ghigo

[1] Enriques 1907d.

[2] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1908 e 1914. Cfr. anche p. 313, nota 3 a let. 339 (29.1.1897).

[3] Enriques-Castelnuovo 1896.

[4] Enriques-Castenuovo 1906b. Cfr. anche p. 556, nota 3 a let. 590 (7.12.1904).

656.

25 Ott[obre] 1905

Carissimi Elbina e Guido,

sono ormai tanto abituato al vostro affetto ed alla vostra accoglienza che non posso trovare altre parole ad esprimere la mia gratitudine, e sono costretto a ripetermi. In particolare sono gratissimo all'Elbina per tutto ciò che ha fatto per Luisa.

Lasciandovi in questo momento penso molto al vostro piccino; io ho la convinzione che le sue condizioni attuali, da cui siete giustamente preoc-

cupati, si risolveranno nel modo più felice e più semplice, e mi auguro che ciò avvenga il più presto possibile.

Ora dirò a Guido che quanto alla V_3^3 le cose sembra vadano bene. Ho ripensato al primo punto e non vedo obiezioni possibili. Quanto a mostrare che il sistema rappresentativo della V_3^3 con p[un]to 2-plo non è limite d'un altro più generale, osservo che il sistema limite dovrebbe comporsi delle F_3 per C_6 e della Q_2 fondamentale (contata più volte) perché la sup[erficie] fissa da aggiungere alle F_3 non deve rappresentare sulla V_3^3 una sup[erficie]. Ma per la medesima ragione le F_3 e la Q_2 debbono ritenersi *sconnesse* lungo la C_6, altrimenti una sup[erficie] cubica di S_3 in S_4 avrebbe per limite una sup[erficie] cubica + la F_6 proiezione di C_6.

Ora questo serve ad eliminare i miei dubbi, relativi ad un caso in cui sussisterebbe la connessione (la curva 2-pla base del sist[em]a variabile avendo per limite non C_6 ma una curva su Q_2). Un sistema di sup[erficie] connesse non può avere per limite un sistema di sup[erficie] sconnesse, quindi la Q_2 non appartiene al sistema limite e tanto basta.

Se la V_3^3 fosse raz[iona]le essa dovrebbe rappresentarsi come la F_3^2 sul piano. Ed essendo questo impossibile la V_3^3 è irrazionale!

Tanti saluti cordialissimi dal

vostro aff.mo
Ghigo

657.

4 Nov[embre] 1905

Carissimo Guido,

sapevo dal Sev[er]i stesso la sua intenzione di andare a Padova straord[inari]o sotto certe condizioni, di cui parleremo a voce quando egli verrà a trovarmi qui, prossimamente. Il Sev[er]i già si è adoprato presso la Fac[olt]à di Parma perché, partendo lui, venga chiamato il De Fr[anchis]. Ma io, appunto notando le difficoltà che tu pure osservi, ho suggerito appunto l'idea del comando; e De Fr[anchis] mi scrive che l'accetterebbe... sebbene a malincuore.[1]

Quanto agli integrali io ritengo debba esser noto che non ci possono essere ∞^{d+1} integrali con $2d$ periodi. Ciò si troverà nei lavori di Picard sugli integrali riducibili, o nelle memorie classiche (Weierstrass?).

Il ragionamento sulla V_3^3 dopo aver subito varie peripezie è venuto ad incagliarsi ad una difficoltà: la V_3^3 con p[un]to 2-plo e quella con p[un]to 3-plo sono entrambe razionali, è possibile rappresentare la 1ª in guisa che la rappres[entazio]ne non degeneri quando il p[un]to 2-plo diventa 3-plo? A questo si ridurrebbe la questione generale.

Ma per l'appunto sembra che la questione precedente ammetta una risposta negativa.

Tanti saluti cordiali a te e all'Elbina tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Hai ricevuto il vaglia di £ 60?

[1] Cfr. p. 625, nota 6 a let. 647 (15.4.1905).

658.

26 Nov[embre] 1905

Carissimo Guido,

ho ricevuto cartolina e manoscritto.[1] Rispondo anzitutto circa il Sev[er]i, che egli verrebbe chiamato per la sola Pr[oiettiv]a;[2] ma della cosa non ho saputo più nulla.

Ho dato una scorsa al manoscritto; lo leggerò con cura. Osservo intanto che due complementi mi parrebbero indicati:

1) La proprietà di contenere sis[tem]i cont[inu]i di sup[erficie], non lineari, caratterizza le V_3 per cui il genere sup[erficial]e aritmetico è diverso dal geometrico, almeno se vi sono ∞^4 sup[erficie] canoniche ($P > 4$) costituenti un sistema semplice. Si potrà rimuovere la restrizione, sia pur restringendosi al caso di sup[erficie] canoniche irriducibili?

2) La connessione lineare di una V_3 (o V_n) è uguale a quella delle sup[erficie] sezioni F. La cosa si dimostra subito osservando che un ciclo C di una F non può essere permutato con un altro C' attraverso un fascio di F (mentre accade generalmente l'oppposto pei cicli delle sezioni di una sup[erficie]). Infatti C e C' sono equivalenti a due gruppi di cicli irriducibili sopra la curva base del fascio di F.

Segue di qui che il numero degli integrali semplici (di 1ª, 2ª, sp[ecie]) appartenenti ad una var[iet]à è uguale alla connessione lineare ecc.

Se questo invece si sapesse a priori, estendendo p[er] es[empio] la dimostrazione di Pic[ard] per le sup[erficie], il nostro teor[ema] diverrebbe in gran parte inutile.

Questo motivo mi rende dubbioso circa l'interesse che Picard potrà attribuire alla nostra ricerca, e quindi circa l'opportunità di mandare a lui il manoscritto. Ma c'è un'altra ragione personale, ed è ch'io avevo promesso a Pic[ard] una redazione del mio lavoro[3] di Bologna, alla quale non ho ancora potuto attendere. Se si volesse mandargli questo lavoro bisognerebbe gli chiedessi scusa di non aver potuto adempiere finora la promessa. Che cosa ti pare? Sarebbe una scortesia da parte mia?

Insomma, per le ragioni anzidette, propenderei pel Circolo; ma mi rimetterò volentieri al tuo desiderio, se sia diverso.

Il mio lavoro filosofico[4] è ormai sotto stampa, e ciò mi occupa assai. Ma lo lascerò un momento in disparte per occuparmi di questa memoria.

Saluti cordiali

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques-Castelnuovo 1906a, che sarà pubblicato nelle «Annales de l'Ecole Normale».

[2] Così avverrà infatti: cfr. p. 625, nota 6 a let. 647 (15.4.1905).

[3] Enriques 1905a.

[4] Enriques 1906c.

Lettera di Castelnuovo a Enriques

Roma 19 Febb[raio 19]06

Carissimo Ghigo

Ti spedisco oggi le bozze di quella nostra Nota.[1] Per la prima parte ho accettato quasi interamente i consigli che mi hai dato, il che mi ha costretto però ad allungare di due §§ [paragrafi] il manoscritto α. Ora mi sembra che la prima parte vada bene, e possa venir stampata, salvo qualche ritocco che tu volessi introdurvi.

Quanto alla seconda parte, mi son limitato ad accennare qualche correzione qua e là, ma non ho voluto modificare il tuo scritto per timore di sciupare. Però ti consiglierei di riguardare tutta quella seconda parte con molta cura ed attenzione, ed in special modo ciò che riguarda le tue due Note di Palermo.[2] Non si può dire infatti che attualmente la relazione che ne fai (e) ed e')) diano di quelle Note una chiara idea. Non è forse facile spiegare in poche parole il concetto di quelle dimostrazioni; ma se non si potesse raggiungere questo scopo senza allungare eccessivamente la nostra Nota, si dovrebbe sempre riuscire a dare una nitida idea dei risultati, ed a mostrarne, sotto vari aspetti, l'importanza. Ora, sia la rappresentazione analitica del manoscritto e) sia la tabella del manoscritto e') non mi sembra raggiungano pienamente lo scopo. Ti consiglierei perciò di rifare quelle relazioni, cercando di mettere più in rilievo i problemi che ti sei proposto di risolvere ed i risultati cui sei giunto.

Quanto ai piani doppi, non ho creduto di aggiungere un apposito paragrafo. Il teorema di De Franchis[3] entra, come vedrai, nella I parte (manoscritto α); ai tuoi risultati[4] sui piani doppi di genere 1, ecc. potresti anche accennare, se credi, con una nota a piè di pag[ina] aggiunta al § [paragrafo][5] dei piani doppi razionali.

Quando tu abbia compiuto la redazione della II parte, bisognerà certo che tu la faccia copiare integralmente (mi sembra non valga la pena di servirsi di quei ritagli di bozze che farebbero disperare il proto, più che risparmiargli fatica). E poiché temo nessun copiatore potrebbe ritrovarsi in quel labirinto, meglio sarebbe tu dettassi quella seconda parte a Luisa, o a qualche assistente o scolaro che si prestasse gentilmente. La prima parte, mi sembra, è abbastanza leggibile come sta.

Occorrerà poi domandar scusa a Picard per lo scompiglio che abbiamo portato in quella Nota[6] e pregarlo di rimandarci ancora le bozze *in colonna*, giacché saranno necessarie due correzioni almeno, prima di porre il *visto per la stampa.*

Al Min[ister]o mi hanno detto che, per il solito disordine di cui essi stessi si riconoscono colpevoli, le nostre indennità non saranno pagate che fra due o tre mesi al più presto.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo Guido

[1] Enriques-Castenuovo 1906b.
[2] Enriques 1905d e 1905e.
[3] Cfr. De Franchis 1904b e 1905b.
[4] Cfr. Enriques 1896e.
[5] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1906b, § 19.
[6] Castelnuovo allude alla prima stesura del lavoro comune: cfr. p. 556, nota 3 a let. 590 (7.12.1904).

659.

20 febbraio 1906

Carissimo Guido,

ho ricevuto le bozze[1] stamani prima di partire.

Vorrei studiare, secondo i tuoi consigli, un modo d'esposizione più chiaro per alcuni §§ [paragrafi] della 2ª parte, ma sono così sopraffatto di lavoro che mi è impossibile dedicarci molto tempo; e Picard aspetta, avendo finito la tiratura del suo libro![2]

Quanto alla prima parte siamo d'accordo, salvo due punti in cui ho da esprimerti due desiderati, in parte personali.

Il 1° punto si riferisce alla conservazione del mio foglio aggiuntivo dove viene separata la questione dei parametri abeliani dalla proprietà caratteristica delle sup[erficie] irr[egolar]i, e riavvicinata la prima alla nota di Picard[3] che ti ho mandato.

Il 2° riguarda una esposizione più conforme al punto di vista storico delle proprietà del fascio irraz[ionale],[4] giacché lo sviluppo della teoria delle rigate ha bisogno del lemma relativo a $p_g = 0$, e non di altro.

Quanto al 1° punto se mi dai l'autorizzazione di conservare quel foglio su cui hai scritto che ti pare un po' lungo, non vi è altro da fare; quanto al 2° trattandosi di una questione delicata, che concerne anche i nostri rapporti con De Fr[anchis], desidererei che la nuova redazione venisse letta e approvata da te anche prima delle 2ᵉ bozze.

Intanto che aspetto la tua risposta in proposito farò copiare la 2ª parte, colle modificazioni da te introdotte, e colle semplificazioni che una nuova lettura potrà suggerirmi, secondo i tuoi consigli.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] Si tratta delle bozze di Enriques-Castelnuovo 1906b.
[2] Si tratta dell'ultimo fascicolo del secondo volume di Picard-Simart 1897-1906.
[3] Cfr. Enriques-Castelnuovo 1906b, § 5, dove si rinvia a Picard 1895.
[4] Cfr. *ibid.*, § 9.

660.

15 Maggio 1906

Carissimo Guido,

è un pezzo che non ho tue notizie.

Ho ripreso a studiare le sup[erficie] di bigenere 1 ($p_g = p_a = 0$) con curva bicanonica, d'ord[ine] 0, e credo ormai di poter affermare che esse formano una sola famiglia avente come tipo la F_6 passante 2 v[olte] per gli spigoli d'un tetraedro.[1]

Inoltre la mancanza di curva bic[anonica] d'ord]ine] > 0 viene espressa da

$$P_6 = 1.$$

Il procedimento di riduzione che metto in opera è quello che ti accennai l'anno scorso,[2] che si riduce molto semplice.

Ogni C_π ($\pi > 1$) appartiene a un $|C|$ $\infty^{\pi-1}$ di gr[ado] $2\pi - 2$. Il sistema $|2C|$ ha la dim[ensione]

$$4\pi - 4$$

e contiene $\infty^{2\pi-2}$ coppie di curve $2C$, e $\infty^{2\pi-2}$ $2C'$.

Vi sono dunque delle curve spezzate

$$2C \equiv 2C'.$$

Segue che le componenti C del 1° membro sono spezzate.

La riduzione conduce di seguito fino a curve di gen[ere] 1. E qui comincia la parte più delicata della discussione.

Una C ell[ittic]a ha un'agg[iun]ta C' che non sega C, e si ha il fascio det[erminat]o da $2C = 2C'$, composto di curve ell[ittich]e.

Di questi fasci ce n'ho almeno 2, diciamo $|L|$ e $|M|$. ($L = |2C|$).

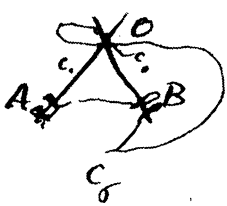
Orbene C e C' segano su M gruppi non equiv[alent]i i cui 2-pli sono equiv[alent]i. Allora l'operazione $+C - C'$ applicata a un p[un]to di M determina su M una γ_2^1 ell[ittic]a.

Si può vedere che l'inv[oluzione] Γ_2 così def[init]a su F, trasforma in sé anche le curve L, e subordina su queste una g_2^1 raz[ional]e. Da ciò si ha la rappresentazione su un p[ia]no 2-plo o anche la costruzione diretta di curve ell[ittich]e bisecanti le L e quindi unisecanti C e C', da cui si ottiene poi per somma un sistema di gen[ere] 4.

Il pasticcio è che si trovano diversi p[ia]ni 2-pli irriducibili fra loro con

1) C_8 di diramaz[ione]:

$$C_8 = C_1 + C_1 + C_6$$
$$C_6 \equiv O^2 A^{33} B^{22}$$



2) $C_8 = C_3 + C_3 + C_2$ dove le due C_3 toccano in 3 p[un]ti C_2.

Ma questi p[ia]ni 2-pli provengono, sembra, da diverse involuzioni sopra F_6.

Ad ogni modo è curioso che non apparisca se non indirettamente che p[er] es[empio] il primo p[ia]no 2-plo, nelle ipotesi più generali, rappresenta la F_6 passante 2 v[olte] per lo spigolo d'un tetraedro, o almeno che F_6 si rappresenta con una facile costruzione su questo p[ia]no 2-plo.

Cordiali saluti a te e all'Elbina,

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Conosci Auronzo?

[1] Cfr. Enriques 1907a.
[2] Cfr. p. 608, let. 631 (13.2.1905).

661.

22 maggio 1906

Carissimo Guido,

grazie delle notizie che mi comunichi circa la villeggiatura.

Sono alle prese con un pasticcio che si presenta nella mia ricerca.[1]

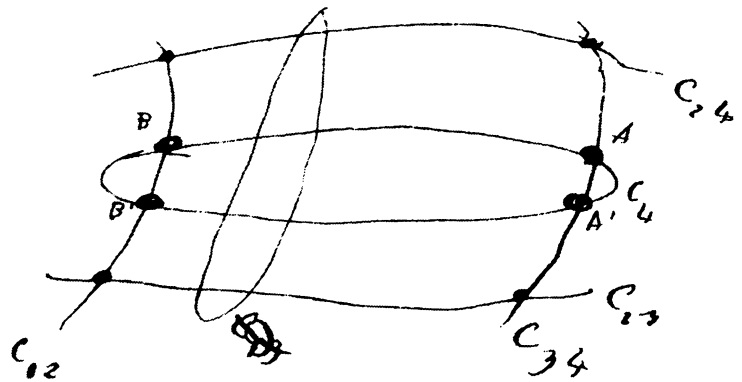
Prendiamo pure la F_6 che passa 2 v[olte] per gli spigoli d'un tetraedro. Ci sono su questa 6 curve ellittiche $C_{12}, \ldots$ (gli spigoli). Consideriamo le Q_2 che passano per 4 spigoli, escluse C_{12}, C_{34}. Esse segano su F_6 delle C_4 e il sistema

$$|C_4| = |2C_{12}| = |2C_{34}|.$$

Su C_4 si ha di fatto una γ_2^1 ell[ittic]a data da un'omolografia biassiale armonica con assi C_{12}, C_{34}.

Dunque le γ_2^1 analoghe sulle C_4 danno una inv[oluzione] I_2 di cui C_{12} e C_{34} sono curve di coincidenza. Tutto ciò sembra molto naturale e d'accordo colle mie deduzioni anteriori. Ma ecco come sorge il pasticcio.

Consideriamo sopra F_6 le curve qui segnate. Una C_4 del sistema $|C_4| = |2C_{24}| = |2C_{34}|$ incontra C_{34} in 2 p[un]ti un[it]i per I_2 quindi è unita. Segue che su C_4 la I_2 subordina una g_2^1 con p[un]ti uniti AA', BB'.



Anche questo avevo previsto. Ma non avevo notato che su C_4 saranno equivalenti le coppie

$$A + A' \equiv B + B'.$$

E ciò è assurdo perché C_{12}, C_{34} non sono equivalenti ma soltanto i loro 2-pli sono equivalenti.

Si arriva così ad una curiosa contraddizione.

E per risolverla non vedo che cosa accada di fatto proiettiv[ament]e sulla F_6. E qual razza di p[ia]no 2-plo venga fuori.

Che cosa ti pare?

Il ragionamento che permette di costruire una γ_2^1 date su una C ell[ittic]a 2 g_n i cui 2-pli sono equiv[alent]i, si potrà poi estendere. E si vede così come si determineranno tutte le sup[erficie] con un'infinità discon-

tinua di trasf[ormazion]i (esse han sempre $p^{(1)} = 0$ e posseggono un fascio di curve ell[ittich]e). Ma di ciò verrà tempo di occuparsi.[2] Per il momento vorrei districare la matassa delle sup[erficie] di bigenere 1, dove sono arrestato da quella - apparentemente - stupida difficoltà.

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] Cfr. Enriques 1907a.
[2] Cfr. Enriques 1906a.

662. [c.p.]

[Bologna] 24 maggio 1906

Carissimo Guido,

ho trovato il *baco* nel ragionamento dell'altro giorno. Curve non equivalenti C e C' segano sulle K ell[ittich]e di un fascio gruppi equivalenti, contrariamente ad una prop[osizione] che Sev[er]i mi aveva dato come generale. Questa circostanza è spiacevole perché distrugge il punto più elegante del mio metodo. Tuttavia penso si possa rimediare la cosa.

Dati 2 fasci di curve ell[ittich]e secantisi in $4x$ punti, si ha una Q_2 $4x$-pla, e ritengo che calcolando il $\delta = 12$ dei due fasci suddetti debba desumersi $x = 1$ o $x = 2$, ciò che mi basterebbe.

Vado a Pavia per una libera docenza, poi a Milano per la Rivista in gestazione.[1]

Cordiali saluti tuo aff.mo
Ghigo

[1] Si tratta di «Scientia» (o «Rivista di Scienza», come fu chiamata all'inizio) di cui Enriques fu uno dei fondatori.

663.

31 Maggio 1906

Carissimo Guido,

ho passato giorni di grande attività a Milano, per gettare le basi della progettata Rivista. Non so se ti ho detto che entrerebbero con Rignano e con me nel comitato direttivo il Bruni, il Dionisi e il Giardina giovane zoologo andato ora a Pavia.

Siamo tutti penetrati della gran difficoltà della cosa. Abbiamo discusso una serie di temi coordinati e ci proponiamo di ricorrere per la collaborazione anche all'estero, retribuendo gli articoli.

La difficoltà scientifica si risolve così in parte in una difficoltà economica.

E ci siamo dati moto per procurarci il fabbisogno, in modo da assicurare la vita del giornale per 5 anni.

A tale scopo si è immaginato di trovare dei sottoscrittori per £ 200 annue, sotto forma di azionisti (azioni di £ 1000 da sborsare per quinti).

Oltre al contributo principale di Rignano abbiamo già *collocato* alcune azioni presso signori e industriali milanesi. Abbiamo così assicurato circa £ 4000 annue, cioè 20 azioni, e speriamo poterne collocare un'altra diecina per rispondere ai bisogni preventivati.

A questo proposito anzi pensa se ti viene in mente qualche idea luminosa di persone a cui si possa rivolgersi per qualche via.

Le quote sono veramente un po' grosse,[1] ma siamo stati consigliati a far così trattandosi di dirigersi a persone con larghi mezzi.

Vedremo se mai più tardi se sia il caso di spezzare ogni azione di £ 1000 in due di £ 500, affinché la sottoscrizione di £ 100 annue sia accessibile a borse più modeste.

Riprenderò ora a pensare alle sup[erficie] di bigenere 1.[2]

Per tua regola, se hai da scrivermi, sarò a Bologna Domenica e Lunedì, Martedì a Firenze.

Picard mi ha scritto una lettera in cui si mostra molto contento del mio libro.[3] Dice poi che il suo t[omo] II[4] era quasi pronto ma è sospeso per lo sciopero dei tipografi, ed è impressionato per l'avvenire.[5]

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo[6]

[1] A titolo di confronto, ricordiamo per esempio che lo stipendio iniziale di un professore ordinario era di 5000 lire annue.

[2] Cfr. Enriques 1907a.

[3] Enriques 1906c.

[4] Picard-Simart 1897-1906, II.

[5] Dal 1906 sino alla vigilia della guerra la Francia fu scossa da un'ondata di scioperi e disordini, il più delle volte repressi violentemente dai vari governi della Terza Repubblica.

[6] Nell'originale, a destra della firma, sulla stessa riga, è cancellato «F Enriques».

664.

4 Giugno 1906

Carissimo Guido,

dalla tua lettera, dalle cartoline di Pincherle e di Segre, e da una lettera di Siacci, apprendo la gradita notizia.[1] Mi ha recato piacere in ispecie che

la mia candidatura non abbia incontrato l'opposizione che immaginavo, e che spero ora non sorga nella votazione definitiva.

Mille grazie intanto.

Accolgo in massima l'invito lusinghiero di Volterra, quantunque esso sia un po' imbarazzante per me.

Domani vado a Firenze, scrivimi o telegrafami là ((avvertimi, se è possibile, per tempo)), partirò subito purché possa essere qua di ritorno il 15 e salvo il caso che un impegno (di cui ti dirò a voce) mi richiamasse qua appunto nei giorni della corsa progettata.

Porterò a Roma anche il programma della progettata Rivista[2] che spero t'interesserà e di cui vorrei anche parlare con Sella.

Ti ringrazio intanto del tuo interessamento per la Rivista stessa.

Credo aver messo a posto le sup[erficie][3] di big[enere] 1.

Se si trovano due curve ellittiche C_1 C_2 n-secanti con $n > 1$, vi sono in $|C_1 + C_2|$ altre curve spezzate in curve ell[ittich]e secanti C_1 e C_2 in meno di n punti. E così la riduzione porta in fondo.

Il curioso è che, contrariamente a quanto credevo, non pare ci sia una base minima da cui tutti i sistemi si ottengano per somma.[4]

Mi occuperò in questi giorni di redigere il lavoro che verrà, relativamente, lunghetto. Vorrei pubblicarlo nelle memorie dei XL perché strettamente legato ai miei due lavori prec[edent]i pubblicati in quella raccolta;[5] anche se bisognerà aspettare un poco aspetterò; naturalmente sarei più contento se mi si stampasse la memoria senza troppo ritardo.

Cordiali saluti e, spero, a rivederci a presto

tuo aff.mo
Ghigo

[1] Enriques sarà eletto socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei il 15 luglio 1906 e socio nazionale il 22 agosto 1925. Cfr. anche p. 628, let. 652 (28.5.1905) e p. 629, let. 653 (7.6.1905).

[2] Cfr. p. 639, nota 1 a c.p. 662 (24.5.1906).

[3] Cfr. Enriques 1907a.

[4] Cfr. *ibid.*, § 20, 272.

[5] Enriques 1896d e 1896e.

665.

21 luglio 1906

Carissimo Guido,

ho ricevuto il manoscritto,[1] e ti ringrazio delle tue correzioni; cercherò di emendare il lavoro e, se sarà possibile, di semplificarlo in quei punti dove, non a torto, trovi la discussione un po' minuta.

Avevo notato, nella tua memoria,[2] quel caso particolare di F_6, ma ho anche visto che in esso continuano a valere i ragionamenti fatti per la riduzione nel caso generale; ma può anche essere opportuno, per chiarezza, di rilevarlo in modo esplicito e di dimostrarlo direttamente;[3] ciò che pare venga subito.

Quanto alle sup[erficie] con gruppo discontinuo l'osservazione fatta, a cui ti alludevo in una mia,[4] è appunto che c'è un fascio di curve ell[ittich]e oppure $P_i = 1$; è una conseguenza quasi immediata del resultato sulle sup[erficie] di big[enere] 1, che vedo tu pure hai notato.

Ma il resultato non è disprezzabile perché in un certo senso s'inverte. Si costruiscano le sup[erficie] con un f[asci]o di curve ell[ittich]e (di dato ord[ine] in S_3) mediante curve dir[ettric]i n-secanti; se due di queste segano gruppi G_n i cui multipli non sono equiv[alent]i (caso generale) si costruiscono ∞ trasf[ormazion]i della sup[erficie] in sé.

Quanto alle sup[erficie] di gen[ere] 1 ($P_i = 1$) non ho visto niente;[5] e sarà interessante il tuo es[empio] in cui manca il f[asci]o di curve ell[ittich]e. Come l'hai costruito?

Cordiali saluti anche all'E[lbina] tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] È arrivato qui Sev[eri] colla moglie.

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1907a.
[2] Cfr. Castelnuovo 1896b, 330, nota *.
[3] Cfr. Enriques 1907a, § 16, 266-67.
[4] Cfr. p. 638, let. 661 (22.5.1906) ed Enriques 1906a.
[5] Cfr. a questo proposito Enriques 1909.

666.

Alagna (Novara) 27 luglio 1906

Carissimo Guido,

ho mandato ieri il manoscritto della mia memoria[1] a Cerr[ut]i, con una lettera in cui gli dicevo essere quello da te annunziato.

Ho largamente rifatto più punti del lavoro, non già per introdurre veri cambiamenti (perché non ho trovato essenziali semplificazioni) ma per spiegare meglio le cose secondo i tuoi consigli. E così la mole del manoscritto è cresciuta a 82 p[a]g[ine]!

Ho ricevuto ieri sera la tua lettera. Pare anche a me assai probabile che la tua F_4 non possegga un fascio di curve ell[ittich]e; si può del resto semplificare la questione prendendo una F_4 con una C_3 e un p[un]to 2-plo O

su C_3 (caso biraz[ionalmente]e identico all'esistenza di *due* curve raz[ional]i con un p[un]to comune). In questo caso si esaminerà più facilmente ciò che accade sul p[ia]no 2-plo ottenuto per proiez[ione] da O; ma intanto si vede subito che le due inv[oluzion]i su F_4 non sono in generale permutabili.

Riguardo al gruppo discontinuo[2] su sup[erficie] con un fascio di C ell[ittich]e, posso aggiungere questo, che: se si hanno tre curve dir[ettric]i p[er] es[empio] unisecanti le C in punti di param[etr]i incommensurabili rispetto ai periodi, si otterrà un gruppo *impropriamente discontinuo* per modo che i trasformati di un p[un]to della sup[erficie] costituiranno un insieme di p[un]ti il cui insieme derivato (p[un]ti lim[it]i) coincide colla superficie.

Infatti sulla C generica si avrà una trasf[ormazione] del tipo

$$z' = z + \alpha m + \beta n$$

con m, n int[er]i, ove per una scelta conveniente si può rendere $\alpha m + \beta n$ piccolo ad arbitrio.

Sev[er]i ti ricambia i saluti; siamo stati stamani con lui a Câ di Ianzo ove abbiamo trovato Gerbaldi.

Picard mi scrive che è a Saas-Fee. Siamo separati dal M[onte] Rosa.

Cordiali saluti all'E[lbina] e a te anche da L[uis]a.

Tuo aff.mo
Ghigo

[1] Si tratta del manoscritto di Enriques 1907a.
[2] Cfr. Enriques 1906a.

667.

21 agosto 1906

Carissimo Guido,

ricevo le bozze[1] e le respingo a Gauthier. Ho introdotto una sola correzione bibliografica, cioè cassato il nome di Picard fra le citazioni relative al teorema $q = p_g - p_a$. Infatti Picard nel trattato[2] ha ritirato la sua dimostrazione; non è dunque il caso di citarlo a meno che non si citino ivi tutti i contributi successivi alla questione.

Sono ritornato ieri l'altro da una gita nel Vallese, a Saas-Fee ove ho visitato Picard insieme a Levi-Civita, ed a Villars ove ho accompagnato quest'ultimo.

Picard ci ha fatto cordiale accoglienza ed abbiamo conosciuto a Saas, per suo mezzo, Lippmann e Valleron.[3]

Con Severi abbiamo proseguito lo studio delle sup[erficie] iperellittiche[4] e crediamo di poter assegnare tutti i tipi d'involuzioni distinte che si trovano in queste, i quali danno origine ad un discreto numero di superficie di genere 1, assai interessanti.

A proposito delle sup[erficie] col gruppo discontinuo (eccetto il caso dei gen[eri] 1) ho fatto l'osservazione che esse possono caratterizzarsi unendo al $p^{(1)} = 1$ una diseguaglianza pel numero degli integrali 2-pli di 2^a specie.[5]

A Meyer ho scritto che cercheremo di fargli avere l'art[icolo][6] sulle sup[erficie] nel tempo che egli desidera.

Tanti saluti affettuosi anche all'E[lbina] e a G[iorgin]a.

Tuo
Ghigo

[1] Si tratta delle bozze di Enriques-Castelnuovo 1906b.
[2] Picard-Simart 1897-1906.
[3] Si tratta in realtà di Georges Valiron.
[4] Per i risultati delle ricerche di Enriques e Francesco Severi sulle superficie iperellittiche si vedano Enriques-Severi 1907, 1908 e 1909-10.
[5] Cfr. Enriques 1906a, 273.
[6] Enriques-Castelnuovo 1908.

668.

2 Dec[embre] 1906

Carissimo Guido,

più volte ti ho accennato alla ricerca che faccio con Sev[er]i sulle sup[erficie] ip[erellittich]e.[1] Essa ha traversato un brutto quarto d'ora. La dimostrazione che avevo costruito che «le inv[oluzion]i (di gen[ere] r) corrispondono a gruppi finiti di trasf[ormazion]i della sup[erficie]» è caduta, e così pure la dimostrazione che Sev[er]i dava del teor[ema] che «ogni trasf[ormazione] muta in sé un sistema ∞^2 di curve di genere 2».

Ma ora speriamo di aver ricostruito quelle dimostrazioni. È essenziale soprattutto di avere il 1° teor[ema], di cui ho discorso anche (a Parigi) con Painlevé, e che egli considerava come una difficoltà essenziale da superare, intorno a cui si è provato invano.

La dimostrazione che ne ho ricostruita è, a dir vero, un po' ardita, tantoché io esitavo ad applicarla senza aver prima escluso a priori una certa circostanza; ma Sev[er]i mi ha spinto a farlo, e mi sono quindi persuaso che debba andare bene.

Te la espongo in breve e te ne faccio giudice:

Premesse:

Sia F la sup[erficie] delle coppie di p[un]ti di una curva di gen[ere] 2. Su F ci sono 3 specie di involuzioni possibili:

1) Inv[oluzion]i senza coincidenza = sono sup[erficie] iperellittiche identiche ad F. Sono anche caratterizzate dall'ammettere ∞^2 trasf[ormazion]i del gruppo.

2) Inv[oluzion]i con ∞ coincidenze = sono sup[erficie] raz[ional]i o rigate (teor[ema] $n > 2\pi - 2$).

3) Inv[oluzion]i con un n[umer]o finito di coincidenze. Sono sup[erficie] regolari $p_g = p_a = 0$ o $p_g = p_a = 1$; nel 1° caso si dimostra che sono razionali (escludendo $P_2 = 1$).

Studiamo le inv[oluzion]i I_n del tipo 3). Ed avvertiamo che a priori potrebbe accadere che ad un p[un]to di coincidenza sia congiunta tutta una curva fondamentale (non ecc[ezional]e). A posteriori questa circostanza verrà esclusa, se si dimostra che in un gruppo di I_n ogni punto x_2 è funz[ione] raz[ionale] di un altro x_1.

Suppongo che l'inv[oluzione] I_n non sia composta coi gruppi di un'inv[oluzione] iperellittica (tipo 1). Considero le ∞^2 curve C di gen[ere] 2 su F. Alle C corrispondono ∞^2 curve congiunte K.

Supponiamo K irriducibile, luogo di una γ^1_{n-1} di gen[ere] 2. Trasformo le K colle ∞^2 trasf[ormazion]i del gruppo iperellittico; due ipotesi:

1) La serie $\{K\}$ è mutata in sé.

2) Una K è mutata in una $\bar{K}$ fuori di $\{K\}$.

Accettiamo la 2ª ip[otes]i. A $\bar{K}$ è congiunta una certa curva L. Se L è irriducibile, mentre un p[un]to x_2 descrive un ciclo su $\bar{K}$ il p[un]to x_1 si scambia con x_3. Se questo non accade la L si spezza ed x_1 descrive una curva $\bar{C}$, che per continuità si riduce a C, quindi è una C; ma allora $\bar{K}$ è una K (ip[otes]i 1).

Ora poniamo che su $\bar{K}$ esista un giro chiuso di x_2 per cui x_1 si scambia con x_3. Per continuità $\bar{K}$ si cambia in K. Che cosa diventa quel giro? È possibile che ((mentre x_2 compie un giro su K)) x_1 (variabile su C) si scambi con x_3 (variabile su K)? È vero che K e C hanno dei p[un]ti comuni, ma il passaggio da x_3 ad x_1 potrebbe avvenire in uno di questi punti solo se ivi ci fosse una coincidenza; e *sopra una C gen[eric]a non vi sono coincidenze*.

Concludo che $\bar{K}$ appartiene a $\{K\}$ (ip[otes]i 1). E ne deduco che due punti congiunti nella γ^1_{n-1} su K (cioè risp[ett]o a I_n) sono mutati in due analoghi, quindi I_n è mutata in sé dalle ∞^2 trasf[ormazion]i, o composta con un'inv[oluzion]e mutata in sé, che è un'inv[oluzion]e iperell[ittic]a (senza coincidenze).*

* Questa contraddizione coll'ipotesi iniziale dipende da ammettere K irriducibile; bisogna che K si spezzi e in $n - 1$ *curve distinte*. Da ciò si trae che i coniugati di x_1 in I_n son funz[ion]i raz[ional]i di x_1. c.d.d.

Che cosa te ne pare?

In ispecie il punto d'Analysis situs è delicato. Si dedurrebbe p[er] es[empio] ragionando in quel modo che: Se un'inv[oluzion]e piana ha *un n[umer]o finito di coincidenze*, nessuno di questi punti è *fondamentale*. Hai esempii in contrario?

Pensando ad assolvere il mio penso accademico qui a Bol[ogn]a, ho trovato che[2] «le sup[erficie] con $p_g > p_a \geq 0$, $p^{(1)} = 1$ contengono un fascio di gen[ere] $p_g - p_a$ di curve ell[ittich]e». E ne deduco che le sup[erficie] $p_g = 1$ *senza* curva can[onic]a sono caratterizzate da $P_4 = 1$.

Cordiali saluti tuo aff.mo

Ghigo

[1] Cfr. p. 644, nota 4 a let. 667 (21.8.1906).

[2] Cfr. Enriques 1907c.

669.

25 Maggio 1908

Carissimo Guido,

ti ringrazio della tua osservazione: è vero quel ragionamento della 2ª parte della mia Nota[1] è errato, e si vede anche dove.

Facendo bene il conto viene sempre per $p_g > p_a$ un sist[em]a paracanonico ∞^{p_g}, composto di $\infty^{p_g - p_a}$ sist[em]i lin[ear]i ∞^{p_a} ($p_a \geq 0$), quindi def[icienz]a della s[eri]e caratt[eristic]a del sist[ema] can[onic]o $= 1$, come da principio avevo supposto.

La cosa si vede così:

Sopra C le curve di $\{C + K\}$ ∞ [infinitamente] vicine a $C + K$ segano la $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ completa; $\{C + K\}$ ha la dim[ensione] $p_g + \pi - 1$, quindi - tolte π condizioni - restano $\infty^{p_g - 1}$ curve infinitamente vic[in]e spezzate in C e in una curva vicina a K; $\{K\}$ è ∞^{p_g}. c.d.d.

Siccome poi esistono, per $p_a \geq 0$, $\infty^{p_g - p_a}$ sist[emi] paracanonici di dim[ensione] $r \geq p_a$, si conclude $r = p_a$ ecc.

La 1ª parte del mio lavoretto non vedo dia luogo a difficoltà; ma se vuoi rimandarmi il manoscritto, mentre correggerò la 2ª cercherò di render più chiara la 1ª secondo i tuoi consigli.

Che cos'è precisamente che ti sembra oscuro?

Fai bene dei segni di lapis sul manoscritto.

Grazie di nuovo e saluti cordiali tuo aff.mo

Ghigo

[1] Dovrebbe trattarsi di Enriques 1908.

670.

Marina di Massa 24 Agosto 1914

Carissimo Guido,

non ti ho più risposto per le bozze[1] ritenendo che la guerra sospenda tutto. Se credi puoi interpellare con cartolina aperta Teubner, avvertendo ad ogni modo che aspettino il licenziamento delle bozze.

Anche qui, come a Cernobbio, come dappertutto si è convinti della necessità di affrontare una prossima guerra coll'Austria. Ma due fatti pare che abbiano mitigato la tensione esistente all'epoca in cui l'ambasciatore nostro tornò a Roma e dopo il modus vivendi che sembra si raggiungesse allora: il conclave e le notizie dei primi successi tedeschi, quest'ultime avendo influito a moderare gli ambienti italiani. Del resto, siccome pare che ai tedeschi non convenga precipitare la cosa, è bene anche per noi aspettare e prepararsi. Io sono convinto che ormai la nostra neutralità andrà avanti almeno fino all'Ottobre, o forse a Primavera.[2]

Quanto a noi, credo che verso il 17 Sett[embre] andremo a Firenze prima di far ritorno a Bologna. Inutile ripeterti quanto già ti scrissi pel caso che Gino venisse consigliato a fare una cura all'Istituto Rizzoli; ma sono assai dispiacente se non ci troveremo ora a casa quando andrete colà per la visita.

La questione sulle sing[olari]tà di cui ti accennai è la seg[uen]te.[3] Un ramo

$$y = a_1 x + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_3 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots$$

d'ordine ν, possiede dei punti multipli successivi; per determinarli bisogna sviluppare $\frac{\nu'}{\nu}$ in frazione continua

$$\frac{\nu'}{\nu} = b + \frac{1}{b_1} + \ddots + \frac{1}{b_\sigma};$$

$$\nu' = b\nu + \nu_1,$$

$$\nu = b_1 \nu_1 + \nu_2$$

$$\dots$$

$$\nu_{\sigma-1} = b_\sigma \nu_\sigma.$$

Ora di seguito all'origine O si avranno

b punti ν-pli,

b_1 punti ν_1-pli

$\dots$

b_σ p[un]ti ν_σ-pli.

Poi bisognerà sviluppare in fraz[ione] continua $\frac{\nu''}{\nu_\sigma}$ e così si determineranno i p[un]ti mult[ipl]i succ[essiv]i, e via di seguito.

Notevole una semplice formula che dà le intersez[ion]i di due rami d'ord[ine] ν, μ ove entrano i termini delle fraz[ion]i cont[inu]e: $\frac{\nu'}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\mu}$ ecc.

Cordiali saluti

tuo aff.mo
Ghigo

[P.S.] Sev[er]i ha subito l'operazione che è stata più grave di quanto credeva. Ora è rimesso, a Arezzo (Via dell'Orto 16).

[1] Si tratta delle bozze dell'articolo Enriques-Castelnuovo 1914.
[2] In effetti l'Italia entrerà in guerra il 24 maggio 1915.
[3] Cfr. Enriques 1916.

Lettera di Castelnuovo a Enriques

Roma 12 Apr[ile] 1919

Carissimo Ghigo

Il risultato sulle curve canoniche che mi comunichi[1] non mi riesce nuovo, ma non ricordo se incidentalmente sia comparso in qualche lavoro mio o di Fano.

Ricordo perfettamente che a questioni analoghe pensavo quando Fano compose la sua dissertazione di laurea: *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi...* (Mem[orie] Torino 1893);[2] ma avendo ora scorso questo lavoro non vi ho trovato il teorema da te enunciato, bensì dei metodi che dovrebbero darne la dimostrazione.

Sulle varietà ∞^2 di spazi lineari (in senso differenziale) vi sono due lavori di Segre[3] nel vol[ume] XXX dei Rendiconti di Palermo, a cui fa seguito un lavoro di Terracini[4] negli Atti di Torino del 1911 o 1912.

Non andrò a Pisa. Sono molto occupato in una Commissione nominata dal Ministro per il miglioramento economico e giuridico degli assistenti.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo

Guido

[1] Cfr. Enriques 1919.
[2] Fano 1893.
[3] Segre 1910a e 1910b.
[4] Terracini 1913.

APPENDICE

1.

Lyon, le 30 décembre 1894

Monsieur le Professeur

Désirant connaître de plus près les importants résultats que vous avez obtenus dans la théorie des surfaces algébriques, je prends la liberté de vous prier de vouloir bien m'envoyer à Lyon vos travaux, principalement ceux qui se rapportent à la théorie des surfaces et des courbes algébriques.

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, avec toutes mes excuses pour mon indiscrétion et mes remerciements à l'avance, l'assurance de ma considération la plus distinguée

L. Autonne

2.

Lyon, le 7 janvier 1895
9 rue Montbernard

Monsieur

Permettez moi de vous remercier tout d'abord tant de votre intéressant envoi que de votre si aimable lettre. Je prends la liberté en même temps de vous adresser aussi mes propres publications; je serais très heureux si vous pouviez y trouver quelque chose qui vous intéressat.

Ce que vous m'annoncez relativement à vos travaux en collaboration avec M. Enriques me paraît très important et tout à fait utile pour mes propres recherches. Si vous jetez les yeux sur les pages 81 et suivantes de mon Mémoire 10 vous verrez que l'intégrante générale algébrique forme sur la surface F un *système linéaire*; les propriétés que vous avez découvertes avec M. Enriques, pour de pareils systèmes, me seraient donc très utiles a connaître et me conduiraient peut-être à des applications intéressan-

tes dans la théorie de l'equ[ation] diff[érentielle] du 1^er ordre et de ses intégrales algébriques.

Ce serait surtout la *singularité en un point* qui serait importante à connaître pour une courbe d'une série linéaire. Je connais à cet égard tout ce qu'ont trouvé Halphen et M.M. Noether et Guccia, mais la question n'est pas encore épuisée.

Je me permettrai donc de solliciter de vous et de M. Enriques un note très succincte sur les propriétés des courbes d'un système linéaire algébrique sur une surface algébrique.

Ayant, comme vous, l'espoir que notre correspondance ne s'en tiendra pas là, pour mon grand plaisir et, [−],[1] pour mon grand profit, je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de ma haute considération.

L. Autonne

[1] Due parole illeggibili nell'originale.

3.

Lyon, le 19 février 1895
9 rue Montbernard

Monsieur

Votre Mémoire: «Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti...» m'intéresse au plus haut degré. J'espère en tirer un excellent parti pour mes recherches. Avez vous depuis 1893 cherché ce que devient votre formule

(II) $$r_k = kn - p - d$$

$$0 \leq d \leq \pi - p$$

pour $k \leq \chi + \pi + p$?

Le problème dont je poursuis la solution est celui-ci: trouver le degré minimum pour une surface contenant une courbe donnée. Je ne parle que de l'espace ordinaire, $r = 3$.

Je profite de cette occasion pour vous prier de vouloir bien transmettre à M. Cremona tous mes remerciements pour la lettre si flatteuse qu'il m'a adressée.

Veuillez agréer, Monsieur, avec tous mes remerciements l'assurance de ma considération la plus distinguée.

L. Autonne

Lettera di Eugenio Bertini a Guido Castelnuovo

Pisa 14 luglio [18]93

Carissimo Castelnuovo

La informo, anche per aderire al desiderio del Dr. Enriques, che questi ottenne nell'esame di abilitazione per l'insegn[ament]o pieni voti e lode e la tesi fu giudicata dalla commissione degna di pubblicazione, il che può essere anche dichiarato in nota al titolo del lavoro quando si stampi. A me è parsa una trattazione ingegnosa ed esauriente, per quanto non si incontrino quei notevoli risultati che l'argomento poteva far sospettare. Da qualche giorno mi sto occupando delle g_n^1. Ho sott'occhio i lavori relativi (per $n = 3$) di Bobek e di Küpper: ma l'estensione incontra, mi pare, non lievi difficoltà. Se la curva è a moduli generali, la Sua formula dà, quando $p = 2(n - 1)$, il numero delle g_n^1. Ma, *in ogni caso*, se questo numero deve essere finito, quale n[umer]o è il valore massimo? Che ne dice delle due recenti pubblicazioni di Amodeo?

Tante cose affettuose

Suo aff.mo
E.B.

1.

Paris, 6 Mars 1895

Monsieur,

C'est avec grand plaisir que j'unirai mes efforts aux vôtres pour les progrès de la théorie des surfaces, et je suis très sensible à votre lettre sur ce sujet. Je dois cependant vous dire qu'en ce moment j'ai tout à fait abandonné cette théorie *au point de vue général*, rebuté par les difficultés terribles qu'on y rencontre. C'est pour cette raison que j'ai entrepris d'étudier des catégories de surfaces *particulières*, comme celles qui représentent les couples de points d'une courbe de genre p et d'autres encore. Mon intention, dans cette direction, était aussi de chercher des vérifications de la formule $p_g - p_n = N$, où N est le nombre des intégrales de première espèce, formule que jusqu'ici je n'ai pas trouvée en défaut. Par exemple, et pour répondre à une de vos questions, dans le cas de $p = 3$, on a $p_g = 3$ et $p_n = 0$; il y a d'ailleurs trois intégrales de première espèce, et trois seulement.

Pour p quelconque, je crois, mais sans avoir révisé mes démonstrations, que $p_n = \frac{1}{2}\, p(p-3)$, ce qui donnerait encore $p_g - p_n = p$. Dans tous les cas je suis en possession d'une méthode pour trouver p_n relativement à ces surfaces et à d'autres plus générales.

D'ailleurs la formule $p_g - p_n = N$ est-elle exacte? J'ai des doutes à ce sujet, et aussi M. Picard, qui prépare en ce moment un nouveau travail analytique sur la théorie des surfaces, où il introduira, à ce que je crois, un autre nombre invariant.

Je serais très heureux de lire le mémoire des Annali dont vous me parlez, peut-être me donnera-t-il quelques idées, dont je vous ferais part le cas échéant: permettez-moi de vous prier, à ce propos, de demander pour moi à M. Enriques, l'envoi de tirages à part de ses mémoires; je lui adresserai les miens s'il veut bien m'indiquer son adresse.

Excusez moi de ne pas vous écrire aujourd'hui plus longuement; il y a quelque temps que j'ai abandonné les surfaces même particulières, m'occupant en ce moment d'un travail d'analyse sur les fonctions abéliennes. Tout ce que je publie maintenant date de six mois et plus; mais vos résultats sur $p_g - p_n$ me paraissent tellement intéressants que je compte bien revenir à ces terribles surfaces.

Veuillez agréer, Monsieur, avec mes remerciements, l'expression de la satisfaction que j'éprouve à entrer en relations, suivies j'espère, avec un géomètre de votre valeur.

G. Humbert

P.S. Je me souviens qu'un des noeuds de la théorie me paraissait être la question suivante: quelle relation y-a-t-il entre le nombre des intégrales de 1 ère espèce (de diff[érentielles] totales) et le nombre de leurs périodes? M. Picard a donné à ce sujet un résultat sur le nombre des intégrales de 1 ère *et de 2 e espèces*; mais cela ne suffit pas.

2.

Le Mesnil, 12 Juin [18]99

Monsieur,

Excusez-moi d'avoir tant tardé à vous répondre; j'étais en voyage et sans documents pour pouvoir vous renseigner. Il est exact que j'ai énoncé à la Soc[iété] Math[ématique] le théorème dont vous me parlez; je n'ai pas donné la démonstration, qui repose sur les formules de mon second mémoire sur le théorème d'Abel. J'ai reconstitué cette démonstration que je publierai (en généralisant le théorème) dans le Bulletin de la Soc[iété] Math[ématique]. Mais en ce moment je suis trop absorbé par les fonctions abéliennes pour penser et surtout pour rédiger autre chose.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments distingués.

G. Humbert

1. [c.p.]

Erlangen, 3. Jan[uar] 1895

Geehrter Herr!

Besten Dank für Ihre Zeilen. Ich bin erstaunt über den Reichthum von Resultaten, welche Sie entwickeln; ganz abgesehen von den Ausblicken, welche Sie auf mögliche zukünftige Resultate weisen, wie auf der wahrscheinlichen Zusammenhang mit Humbert's Sätzen. Hoffentlich wird Ihre Darstellung in den Annali di Matem[atica] auch einige spezielle Beispiele von Flächen mit $p_g\ (>0) > p_n$ enthalten, an denen man Ihre und H. Humbert's Sätze nachprüfenn kann, da nur ganz weniger das Material zur Bildung solcher Beispiele zur Hand ist.

Der Veröffentlichung Ihrer Arbeiten, und Ihrem Auszug für die Math[ematische] Annalen, sehe ich mit grossem Interesse entgegen. Leider werden *vorderhand* nur wenige Mathematikern die Tragweite dieser Untersuchungen verstehen; aber auch dafür wird die Zeit kommen.

Mit Gruss

Ihr

M. Noether

2.

Erlangen, 30. Jan[uar] 1896

Sehr verehrter Herr College!

Ihr und H. Enriques's freundliches Eingehen auf meinen Wunsch, eine Darstellung Ihrer Resultate in der Flächentheorie für die Mathematische Resultaten [Annalen] zu erhalten, begrüsse ich mit grosser Freude. Wollen Sie mir nur das Manuscript zukommen lassen, und ich werde dafür

sorgen, dass die Arbeit möglichst bald bei uns veröffentlicht wird. Ich hoffe, dass sie Anregung zu weiterer Förderung dieser tiefliegenden und so wichtigen Theorien getan wird, obwohl sie nur Resultate, und keine Beweise, erhalten soll. *Möglicherweise* aber sind wir, wegen grossen Materials, genöthigt, die Arbeit in 2 Heften der Annalen, je zur Hälfte, zu publiciren; wenn es jedoch irgend geht, vermeiden wir das.

Besten Dank zugleich für die Zusendung Ihrer beiden preisgekrönten Arbeiten, die ich schon durch Ihre briefliche Mittheilungen kannte, die mich sehr in der Ausarbeitung besonders interessieren werde. Bisher konnte ich aus Mengel an Zeit nur einen Blick hinain werfen; es ist mir dabei aufgefallen, dass Sie zu sagen scheinen: ich hätte den Begriff (oder die Herstellung) der zu einer Fläche F adjungirten Flächen nur für Flächen F mit nicht-singulären vielfachen Curven und Punkten angegeben. Aber sowohl das Princip der rationalen Transformation, schon 1871 in Gött[inger] Nach[richten] von mir dafür verwandt (dass der Process schliesst, auch bei singul[ularen] isolierten Punkten, folgt aus dem Verhalten der $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ohne Weiteres), als die Theorie der *Reihenent*wicklungen (s[ehen] für dieselben z[um] B[eispiel] meine Abhandlung über die totalen algebr[aischen] Differentialausdrücke, Math[ematische] Ann[alen] 29), so angewandt, dass die zugehörigen Differentialausdrücke in Math[ematische] Ann[alen] VIII, bei den Paramentern in Math[ematische] Ann[alen] 29, *endich* worden, liefern die zu F adjungirten Ausdrücken irgend einer Dimension, bei *jeder* Singularität.

Mit Grüssen Ihr

M. Noether

3. [c.p.]

Erlangen, 18 Februar 1896

Verehrter Herr College!

Wie ich eben zu sehen glaube, ist die Manniglaltigkeit M_3 von 3 Dimensionen im Raume S_4 auf unser Raum unter abbildbar, und zwar entsprechen ihren Schnitten mit den ∞^4 S_3: die ∞^4 Flächen 4^{ten} Ordnung F_4 $(g^2, R_7^{(2)})$, welche eine doppelte Gerade g und eine Raumcurve $R_7^{(2)}$, der Ordnung 7, Geschlecht 2, welche 5 Punkte mit $R_7^{(2)}$ gemeinsam hat, als Basis besitzen. Ich muss aber die Sache erst noch weiter verfolgen; die Mitteilung ist also ganz provisorisch.

Ihrer Arbeit für die Annalen sehe ich gespannt entgegen. Ihre beiden Preisarbeiten habe ich durchstudirt, mit immer wachsendem Interesse für

die Zahl δ. Nach dem, was sie in den «Alcuni Risultati...» sagen, könnte die Zahl der linear-unabhängigen endlichen Integrale der Fläche ebensogut mit δ_{n-3}, als mit Δ, zusammenhängen.

Mit Gruss Ihr

M. Noether

4. [c.p.]

Erlangen, 18 Februar 1896

Ich bitte, was ich Ihnen heute über M_3 in S_4 geschrieben, als *un*geschrieben zu betrachten.

M. Noether

5.

Erlangen, 20 Februar 1896

Geehrter Herr College!

Meine vorgestrige Bemerkung über die M_3 in S_4 musste ich zurücknehmen, weil jene M_3 4 Doppelpunkte erhählt. Anders scheint es mir mit derjeniger M_3 zu sein, welche abgebildet wird durch

$$F_4\ (g^2,\ g_1,\ g_2,\ R_4^{(0)})$$

[−][1] Flächen 4^{ter} O[rdnung] mit Doppelgerade g, einfachen Geraden g_1 und g_2, welche g treffen, und mit einer rationalen Raumcurve 4^{ter} O[rdnung], welche g in 3 Punkten trifft.

Abbildung auch durch $F_4\ (g^2,\ A^2,\ R_6^{(0)})$: Fl[ächen] 4^{ter} O[rdnung] mit Doppelgerade g, Doppelpunkt A, und rat[ionaler] Raumcurve 6^{ter} O[rdnung], welche durch A geht und g in 5 Punkten trifft. Aber nächstens Definitiveres.

Kann man aus Ihren Zahlen δ_{n-3} etc. durch Wahl des Curvensystems auf der Fläche nicht invariantive Zahlen erhalten?

Mit Gruss

M. Noether

[1] Parola illeggibile nell'originale.

1.

Paris, le 7 Juillet [18]94
13, Rue Soufflot

Monsieur,

J'ai reçu avec un bien grand intérêt les mémoires que vous m'avez envoyés et qui se rapportent à la théorie des surfaces algébriques. Vos résultats me paraissent extrêmement remarquables et j'attache un grand prix à la démonstration de la propriété des surfaces rationnelles vainement cherchée jusqu'ici.

Ayant à faire un exposé sur les travaux récents dans les mathématiques (dans la Revue Générale des Sciences), je veux cette année parler un peu des travaux faits en Italie et tout particulièrement des vôtres. Aussi je me permets de vous demander si vous pourriez m'envoyer un petit résumé des travaux faits depuis deux ou trois ans en Italie sur la théorie des surfaces algébriques (Castelnuovo, Enriques, etc...), car je ne voudrais rien omettre d'important.

Vous pardonnerez, monsieur, mon indiscrétion où vous verrez une preuve de mes sentiments de vive admiration et de haute estime,

Em. Picard

[P.S.] Je vous serais obligé de présenter à M. Cremona mon affectueux souvenir.

2.

Paris, 21 Janvier 1895

Cher Monsieur,

J'ai lu avec un bien grand intérêt votre lettre; je vois que nos travaux ont bien des points communs et j'aurai beaucoup à profiter des vôtres.

Vous avez pu voir dans les Comptes Rendus (24 Décembre, 1894) les deux invariants ρ et ρ' que j'ai considérés. Je voudrais avoir le temps de rédiger quelques résultats que j'ai sur l'invariant ρ, qui conduit, quand il existe, à une classe intéressante de surfaces. Je suis malheureusement en ce moment de l'année très occupé par mes cours, et je n'ai que peu de temps à moi jusqu'au mois de Mars. Les surfaces admettant des transformations birationnelles en elles-mêmes avec paramètres arbitraires continuent aussi à me préoccuper. Quand l'ensemble de ces transformations forme un groupe (au sens de Lie), j'ai fait l'étude de ces surfaces dans mon ancien mémoire.

Pour le cas où on n'a pas de groupe, la question est différente. Je crois avoir démontré que l'on peut alors certainement exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface par des fonctions uniformes de deux paramètres, fonctions définies pour toutes les valeurs de ces paramètres.

J'espère pouvoir prochainement vous écrire plus longuement qu'aujourd'hui, mais je n'ai pas voulu différer plus longtemps ma réponse à votre aimable lettre. Veuillez croire, cher monsieur, à mes sentiments de haute estime et de vive sympathie,

Em. Picard

[P.S.] Veuillez présenter à M. Cremona mon bien affectueux souvenir.

3.

Paris, 22 Mars 1895

Cher Monsieur,

Voici enfin que j'ai plus de temps à moi pour reprendre la théorie des surfaces algébriques. Relativement aux surfaces admettant un groupe de transformations birationnelles, j'ai donné dans mon ancien mémoire un théorème fondamental (page 88), mais je n'avais pas approfondi à ce moment le cas 1° de l'énoncé. Je l'avais fait depuis, et, sans rien changer à ma méthode de démonstration, j'avais trouvé un théorème qui me semble avoir une grande analogie avec quelques uns des résultats que vous m'annoncez.

Permettez moi de me reporter à mon mémoire.

Tout d'abord si la surface admet un groupe de transformations à *un seul* paramètre, je n'ajoute rien à mon énoncé. Les équations (de la page 84)

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z)$$

admettent alors comme solutions des courbes de genre zéro ou un, et il est clair que dans le second cas le module sera constant. Nous avons donc sur la surface un faisceau de courbes de genre zéro ou un; il en passe une par un point arbitraire de la surface.

Supposons maintenant que la surface admette un groupe à plusieurs paramètres.

Le point que j'avais approfondi est le cas 2° de la page 85. Il se partage lui même en cas (I) et (II). Je n'ai rien à dire de plus du cas (II), mais mes observations roulent sur le cas (I). Les équations

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z$$

admettront alors comme intégrale générale des courbes de genre zéro ou un. De plus, dans le cas du genre un, le module sera constant; ceci est évident puisque d'une intégrale particulière toutes les autres se déduisent par la formule (de la page 85)

$$x' = F(x, y, z, \alpha, \beta), \ldots$$

Ainsi nous pouvons dire que dans notre groupe, nous avons un sous-groupe à un paramètre pour lequel la variable entre d'une manière uniforme et doublement périodique (ou rationnelle). Si, comme nous le supposons, le groupe est à plusieurs paramètres, il y aura un second sous groupe jouissant de la même propriété. La conclusion est que *les paramètres peuvent être regardés comme entrant d'une manière doublement périodique* (avec dégénérescences rationnelles possibles bien entendu), *dans les équations du groupe*. De là résultent immédiatement des expressions de même forme pour les coordonnées d'un point de la surface (le groupe étant transitif).

Toutes ces considérations s'étendent à un nombre quelconque de dimensions. Sous une autre forme, je les avais au fond déjà employées dans l'étude d'une certaine classe d'équations différentielles (Comptes Rendus, 28 avril 1890). Elles donnent notamment encore le théorème suivant sur un sujet dont on s'est déjà occupé, mais non de la manière la plus simple, et sans en remarquer le lien avec mes recherches précédentes: Dans tout groupe de substitutions [de] Cremona à un nombre quelconque de variables, les paramètres peuvent être supposés entrant d'une manière uniforme à la manière des fonctions abéliennes (ou dégénérescences).

Voilà, cher monsieur, les remarques que je voulais vous faire sur cette question qui m'a autrefois beaucoup occupée. J'aurais encore bien des choses à vous dire sur ce sujet ou sur les sujets voisins, mais ce sera pour une autre occasion. Soyez persuadé que je reçois toujours vos lettres avec grand plaisir et profit, et veuillez croire à mes sentiments de haute estime,

Em. Picard

4.

Paris, 24 Juillet 1895

Cher Monsieur,

Je présenterai avec grand plaisir à l'Académie vos intéressantes recherches; vous savez seulement qu'une note de nos Comptes-Rendus ne doit pas dépasser trois pages. Si vous m'envoyez votre travail avant lundi prochain, je pourrai le présenter moi-même; dans le cas contraire, comme je quitte Paris le 1^er^ Août, je le transmettrai au secrétaire perpétuel. Ecrivez moi alors à l'adresse suivante (Pension Bellevue, Ormont-Dessus, Canton de Vaud, Suisse).

Pour les surfaces dont vous approfondissez l'étude, il résulte évidemment de suite du théorème du bas de la page 10 de mon mémoire des Rendiconti que les coordonnées s'expriment *par des fonctions doublement périodiques* (ou dégénérescences) de deux paramètres. C'est de là que j'avais pensé partir pour une étude plus approfondie, mais comme vous m'aviez écrit que vous vous occupiez de ce sujet, je n'ai plus voulu y penser et j'ai seulement rédigé d'une manière plus complète mes anciennes recherches pour les Rendiconti de Palerme.

Je veux maintenant revenir aux notes que j'ai publiées l'hiver dernier dans les Comptes-Rendus sur la grande classe de surfaces pour lesquelles il existe un nombre invariant comparable au genre p des courbes, pris au point de vue de Weierstrass. Malheureusement des travaux d'analyse, et particulièrement mon tome III dont le deuxième fascicule vient de paraître, ne me permettent que de travailler d'une manière intermittente à la théorie des surfaces algébriques.

Croyez, cher monsieur, à mes sentiments de haute et sympathique estime,

Em. Picard

5.

Paris, 23 Mars [18]97

Cher Monsieur,

Vous avez pu voir dans les derniers numéros des Comptes-Rendus que j'avais repris cet hiver l'étude des surfaces algébriques. Je me suis jusqu'ici occupé de cette théorie au point de vue de la géométrie de situation et de la théorie des intégrales de différentielles totales; je rédige en ce moment cette partie et elle formera le tome I d'un ouvrage sur les surfaces algébriques. J'aurai ensuite à m'occuper de vos recherches et de celles de M. Enriques; votre résumé si remarquable des Math[ematische] Annalen m'est extrê-

mement utile, et je puis maintenant admirer en connaissance de cause vos recherches dont l'ensemble est vraiment splendide. Vous avez fait-là, tous les deux, une œuvre considérable.

Peut être aurais-je un peu plus tard quelques renseignements à vous demander; votre langue que je ne sais pas du tout m'a un peu gêné tout d'abord dans la lecture de vos mémoires, mais je commence maintenant à savoir suffisamment votre vocabulaire mathématique.

Vous savez que j'ai beaucoup d'affection pour le point de vue transcendant, étant surtout un analyste. Je voudrais bien pouvoir définir à ce point de vue le genre numérique p_n; auriez vous quelques résultats dans ce sens? Je voudrais aussi avoir votre avis sur deux invariants que j'ai considérés autrefois dans une Note des Comptes-Rendus (premier semestre, 1896); leur étude vous parait-elle utile à poursuivre?

Pardonnez moi, monsieur, cette causerie un peu déconsue. J'ai surtout voulu vous faire part des sentiments d'admiration que m'a causés, ces temps derniers, la lecture de vos travaux.

Votre bien dévoué,
Em. Picard

[P.S.] Veuillez présenter a M. Enriques l'expression de mes sentiments de haute estime; c'est encore avec un bien grand intérêt que j'ai lu son dernier article des Math[ematische] Annalen.

6.

Paris, 5 Nov[embre] 1900

Cher Monsieur,

Je viens de présenter à l'Academie la note que vous m'avez envoyée. Vos résultats m'ont extrêmement frappé, et je vous en fais mes très vifs compliments. Tout particulièrement, le résultat relatif aux surfaces qui admettent une suite continue de transformations sans admettre de groupes de transformations est bien remarquable; j'ai souvent cherché à le démontrer, mais en vain. Vous avez été plus habiles que moi.

Je voudrais arriver à achever l'étude des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales de troisième espèce; les deux sujets sont très liés entre eux. J'ai beaucoup de difficultés dans l'évaluation exacte du nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce; il y a là de très curieuses questions d'algèbre et très délicates.

En vous renouvelant encore, à M. Enriques et à vous, mes affectueuses félicitations, je vous prie de croire à mes sentiments bien dévoués,

Em. Picard

7.

Paris, 12 Nov[embre] 1900
13, Rue Sufflot

Cher Monsieur,

Je viens de recevoir de M. S. Kantor trois notes avec prière de les présenter à l'Académie. Je connais M. S. Kantor pour un singulier personnage qui m'a autrefois envoyé de grossières injures; ansi ai-je été étonné de recevoir une lettre aimable de lui. J'ai présenté aujourd'hui la première note, elle a trait aux surfaces avec des lignes rationnelles; j'ai cru pouvoir la présenter, et vous la lirez dans le prochain Compte-Rendu. Pour les deux autres, je suis embarrassé parce qu'il vous prend à parti Enriques et vous.

Dans l'une d'elles, il traite des surfaces ayant un système linéaire de courbes hyperelliptiques. Il trouve que votre théorème (Rend[inconti] Lincei 1894, et aussi Enriques Math[ematische] Ann[alen] tome XLVI, page 188) sur les systèmes linéaires ∞^2 est inexact. Il prétend qu'il vous manque deux types de surfaces; à savoir:

1° une surface du $n^{ème}$ ordre à droite $(n-4)$-ple avec une courbe double C_m qui coupe cette droite en $m-2$ points.

2° une surface générale M_2^n à point $(n-2)$-ple.

Comme beaucoup de points m'échappent dans sa singulière terminologie, je ne puis me faire idée de la valeur de ses raisonnements; cela me demanderait trop de travail.

Dans une autre note, c'est Enriques qu'il prend à parti, pour un point de son mémoire (Math[ematische] Ann[alen] tome 49). Je copie textuellement: «Enriques dit qu'une M_3 est rationnelle lorsqu'elle contient une congruence linéaire de coniques. Mais ce qu'il dit à la page 17 est entièrement erroné. En effet, il ne peut pas éviter que la détermination de ∞^1 courbes, qui sont les sécantes uniponctuelles de Nöther sur les ∞^1 surfaces, comporte des irrationalités essentielles. Il sous-entend même l'existence d'une M_2 qui rencontre toutes les coniques en des points isolés, et c'est seulement avec une telle M_2 que sa preuve peut s'achever. Mais une telle M_2 n'existe pas toujours, comme par exemple pour la congruence des coniques qui fut étudiée par D. Montesano et dont Enriques lui-même fait mention».

Je suis bien embarrassé de ces deux notes, et je ne veux pas les présenter sans avoir votre avis, et sans savoir ce que vous pensez des affirmations de M. S. Kantor. Je m'en méfie pour ma part, car, quoi qu'il soit réellement fort, il s'est trompé plusieurs fois assez lourdement. Veuillez donc, cher monsieur, me dire ce que je dois faire. Il est bien entendu, que si je mettais les notes dans les C[omptes] R[endus] j'adoucirai quelques ter-

mes qui ne sont pas assez parlementaires, mais M. Kantor ne parait guère connaître les nuances. De plus, vous répondriez si vous le jugiez convenable.

De toutes façons d'ailleurs, je dois m'attendre à recevoir de vigoureuses injures de la part de l'auteur.

Tout cela, cher monsieur et ami, très confidentiellement et bien affectueusement à vous,

Em. Picard

8.

Paris, 4 Mars 1903

Mon cher ami,

Je ne sais si je vous ai dit que j'allais désormais m'occuper un peu activement de la direction *des Annales de l'Ecole Normale*. Je serais bien heureux si, Enriques et vous, vous vouliez bien m'envoyer quelque mémoire pour ce journal, et je vous prie de bien vouloir faire part de ce désir à votre beau-frère. Vous savez combien vos travaux sont appréciés en France, et combien on vous lirait avec plaisir dans un de nos journaux scientifiques. En particulier, en ce moment, on imprimerait très vite ce que vous nous enverriez.

Croyez, cher ami, à mes sentiments d'affectueuse estime,

Em. Picard

9.

Paris, 9 Février 1904
4, Rue Bara (6^{e} Arr.)

Mon cher ami,

Votre lettre m'a beaucoup intéressé. Je pensais bien que l'expression $N - 4p - (m - 1)$ pouvait s'exprimer à l'aide d'invariants déjà signalés, mais je n'avais pas recherché cette expression; il est bien intéressant que les intégrales doubles de seconde espèce et leurs périodes fournissent un nouveau rapprochement entre les points de vue algébrique et transcendant dans la théorie des surfaces algébriques.

Je dois vous avouer que j'ignorais complètement le théorème de Nöther, d'après lequel sur la surface générale d'ordre n (n étant, je pense, supérieur à trois) toute courbe algébrique est l'intersection complète de la surface avec une autre surface. Ce théorème serait capital pour moi, dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce. Ou se trouve-t-il? Serait-ce dans le mémoire de Nöther couronné à Berlin? Vous m'obligeriez beaucoup en me le faisant savoir.

Quand on imprimera votre note, on ne manquera pas de vous envoyer les épreuves, et je serai très content de toutes les additions que vous voudrez bien faire. Je ne sais pas encore quand j'aurai achevé de rédiger le troisième fascicule, car je suis très fatigué en ce moment, et voilà précisément que mon cours à la Sorbonne va commencer et roulera sur des matières (équations fonctionnelles) très éloignées des surfaces algébriques.

Je serai très heureux de toutes les remarques que vous suggérera la lecture de mon fascicule; en ces matières difficiles, personne plus que vous ne peut faire d'utiles rapprochements.

Croyez, mon cher ami, à mes sentiments de vive sympathie,

Em. Picard

10.

Paris, 4 Janvier 1905
4, Rue Bara (6^{e} Arr.)

Cher Monsieur,

Arrêté par la grippe, qui me met le cerveau dans un très triste état, je n'ai pu encore répondre à votre lettre si intéressante. Il y avait bien longtemps que l'on pouvait soupçonner le beau résultat dont vous me parlez, tous les exemples connus répondant à cet énoncé. J'avais cherché dans un temps une démonstration, en utilisant mes méthodes habituelles, mais j'avais été arrêté par une circonstance relative à mes équations différentielles linéaires qui m'avait semblé improbable. Sûr maintenant, grâce à vous, du résultat, je reprendrai la question quand j'en aurais le temps.

Quant à votre démonstration, elle est dans un ordre d'idées auquel je n'aurais jamais songé. Il y a naturellement plusieurs points qui m'échappent dans l'esquisse que vous m'avez envoyée, d'autant plus que j'ai la tête très fatiguée en ce moment. En particulier, je me suis demandé si parmi les $I_1(P)$, ..., $I_d(P)$, il ne pourrait y avoir des quantités identiquement nulles, mais c'est un point auquel vous avez certainement songé.

Il me tarde beaucoup d'avoir plus de détails sur votre beau travail; je ne manquerai pas d'insérer votre résultat dans le dernier fascicule de mon ouvrage.

En vous adressant, cher monsieur, tous mes vœux pour l'année qui commence, je vous prie de croire à mes sentiments de haute et sympathique estime,

Em. Picard

11.

Paris, 5 Janvier 1905

Cher Monsieur,

Nos lettres se sont croisées. En réponse à votre dernière lettre, je m'empresse de vous répondre que je suis tout à votre disposition pour faire insérer dans les Comptes-Rendus les notes que vous désirez communiquer à notre Académie.

J'ai un peu réfléchi depuis hier à la question qui nous occupe. En restant toujours à mon point de vue, j'arrive à démontrer *d'un trait de plume* que, si une surface est régulière, elle n'a pas d'intégrales de seconde espèce (théorème de Severi).

J'établis aussi *en deux lignes* la relation

$$r_0 = r - (p_g - p_a)$$

r étant le nombre des intégrales de *seconde* espèce, et r_0 celui des intégrales de *première* espèce; mais ici je dois supposer que certaines équations linéaires sont distinctes, ce qui a lieu manifestement en général mais laisse encore *à priori* possibles des cas exceptionnels.

Tout ceci résulte toujours de la considération de l'équation linéaire E, sur laquelle roule toute ma théorie. Je réfléchirai encore à tout cela, quand j'en aurai le temps et que la grippe m'aura quitté.

Votre bien dévoué,
Em. Picard

12.

Paris, 21 Janvier 1905

Mon cher ami,

Merci de l'envoi de votre note, qui est bien remarquable. Je la présenterai lundi à l'Académie. Comme je l'ai écrit il y a quelques jours à M. Enriques, j'ai présenté lundi dernier une note contenant les démonstrations des théorèmes que je vous indiquais dans une lettre il y a quinze jours, notamment la relation:

(1) $r_0 = r - (p_g - p_a)$ (r_0 première esp[èce]; r seconde esp[èce])

Vous m'avez dit depuis (et M. Enriques le confirme dans sa note) que M. Severi vous avait aussi communiqué cette formule; aussi dans votre note, je me suis permis de mettre, en parlant de la relation ci-dessus, le théorème de M. Severi et de M. Picard, et j'ai mis un renvoi à ma note en même temps qu'à celle de M. Enriques.

J'admire vraiment beaucoup votre démonstration de la formule

$$r_0 = p_g - p_n;$$

j'espère, de mon côté, trouver un jour une démonstration, avec mes méthodes, de la relation

$$r = 2(p_g - p_n)$$

qui revient au même; pour le moment, j'entrevois la marche à suivre, mais il me faut encore y réfléchir sérieusement.

M. Enriques m'a promis un mémoire pour les Annales de l'Ecole Normale. Si vous voulez bien aussi m'en donner un, ce serait un grand bonheur pour cette publication.

Bien affectueusement à vous,
Em. Picard

[P.S.] Si M. Severi veut donner dans les Comptes-Rendus sa démonstration de la formule (1), je suis à sa disposition pour la faire insérer.

13.

21 Avril 1937

Cher M. Castelnuovo,

Merci pour l'envoi du précieux volume contenant un choix de vos Œuvres et publié à l'occasion de votre Jubilé Scientifique. J'admire la variété de vos travaux, et il sera pour moi très intéressant de relire vos études de géométrie algébrique, qui ont tant de connexion avec celles que j'ai faites jadis sur des sujets voisins.

Avec mon très cordial souvenir, Em. Picard

1. [c.p.]

Ancona 4 agosto [18]93

Carissimo e bravissimo,

Bravo davvero, bravissimo! Se veramente sei riuscito a dimostrare il gran teorema, avrai acquistato un nuovo e non piccolo titolo di gloria! Bravo: io son lieto del tuo successo più di qualunque altro! - E dimmi: posso io in qualche modo aver l'onore di tener a battesimo questo tuo nuovo ed illustre pargolo? E in ogni caso, mi puoi entro queste vacanze far conoscere, manoscr[itt]a o in bozze, la tua dimostrazione perché io veda se è tale che si possa svolgere nel mio prossimo corso? - Se mai, ne parleremo a Torino, ove io ti aspetto dal 9 in poi. D'O[vidio] è a Gressoney St Jean. - In seduta di soli o[rdinari] la nostra Fac[olt]à (prima della mia partenza) aveva fatto voti per la venuta del V[olterr]a: ma questi ancora non ha preso una decisione; così la prendesse favorevole! Ma perché ahimé! non possiamo anche far l'acquisto di un giovane e valente geometra che tu conosci? quanto rammarico di non poterlo sedurre perché venga a Torino...! - Ebbi i tuoi due lavori e te ne ringrazio: data una scorsa a quello Palermitano mi parve contenere risultati molto semplici ed importanti nello stesso tempo. Ah quel G[ucci]a come l'ha capito bene! andare ad aggiungere i *punti* ai *multipli*! - Tanti saluti, anche da parte di questi miei. E a rivederci presto

Tuo aff.mo
S.

2. [c.p.]

Torino 17 agosto [18]93

Carissimo,

Arrivando trovai qui la tua cara lettera che mi ragguagliava sul procedimento da te tenuto per le involuzioni: procedimento ingegnoso e in pari

tempo naturale. Ancora una volta, bravo! - Poi ho avuto la tua cartolina annunziante la partenza pel Tirolo, ove spero ti troverai bene in questi giorni in cui la pianura è così calda. Buone escursioni!

Quanto a Simplicio, il 3 Ag[ost]o mi scrisse (dopo un lunghissimo silenzio) per vantarmi i suoi risultati in corso di pubblicaz[ione] sulle curve che contengono una g_k^1, risultati interessanti, importanti, ecc. che sono piaciuti anche al Prof. Cremona... «La classificazione delle curve in base alle g_k^1, è molto più semplice di quanto potessi credere e le proprietà comuni a tutte le famiglie di curve sono come l'uovo di Colombo». Figurati che roba verrà fuori! - Ancora non gli ho risposto, né so se gli risponderò. Dovrei dirgliene tante!

Ho scritto una trentina di pag[ine] del mio lavoro (il quale arriverà, credo, al centinaio, nel manoscritto almeno): ma ora l'ho messo da parte per redigere la biografia di Bruno. Vi ho introdotto una semplice dimostrazione iperspaziale della formula di Cayley-Brill per le corrispondenze.

T'aspetto con impazienza

Tuo aff.mo
S.

3. [c.p.]

Torino 20 Sett[embr]e [18]93

Carissimo Guido,

Hai risposto bene all'Enr[iques]. Anche il Ciani pare che voglia concorrere. Mi pare però che questi giovani farebbero meglio ad aspettare: l'esame dei loro titoli, la graduazione (pensa che si tratta anche di classificarli rispetto all'A[mode]o), ci daranno occupazioni o pensieri che sarebbe meglio non avessimo, e che a Loro non giovano.

Ho finito di buttar giù quel lavoro; ora trascrivo la biografia di Bruno; oggi riceverò il manoscritto di Bertini (il quale dal 25 in poi sarà a Roma, alb[ergo S[ant]a Chiara). - G[ucci]a m'ha gentilmente inviato le sue (?) Lezioni litograf[at]e... Le vuoi?

Dei posti di perfezionam[ent]o non so nulla.

Va avanti il tuo lavoro sulle involuz[ion]i?

Saluti aff.mi

Tuo
C.S.

4. [c. p.]

Torino 26 Sett[embr]e [18]93

Carissimo,

Se ne sei ancora in tempo, ti pregherei di considerare se, per un riguardo, dirò, nazionale, non ti paja meglio di non dare ai Math[ematische] Ann[alen], ma bensì agli Annali di mat[ematica] (od altra raccolta italiana) il tuo importante lavoro. Mi rincresce di non averci pensato prima, ma credo che tu sia in tempo ancora. Perché quando si dovrà citare la tua scoperta si dovrebbe nominare un periodico estero? Gli stranieri si abituino a leggere le *nostre* raccolte. - Per altre cose, ad es[empi]o per quelle che ti chiese il Klein, non dico. Ma per questa proprio preferirei gli Annali di mat[ematica]. - Nei quali pare che ora non vi sia troppa materia; sicché il ritardo forse non sarebbe grande.

Ti ringrazio dei particolari inviatimi subito sul V[olterr]a. D'O[vidio] gli aveva scritto nel frattempo; e si farà a Roma quel che si potrà nel senso che tu dici. Ho scritto a Bert[in]i a Roma che s'informi dei posti di perfez[ionament]o per Enr[iques] e che me ne scriva.

È uscito e distribuito un 2° Errata-Corrige alle Lez[ion]i litogr[afate] di G[ucci]a. Son corretti i principali errori che ti dissi, ed altri ancora.

Tanti saluti

Tuo
C.S.

5. [c. p.]

Torino 23 Ott[obr]e [18]93

Carissimo,

Ti prego, ricevendo questa mia, di cercare subito di sapere che cosa il C[onsiglio] S[uperiore] abbia deciso sia riguardo alla G[eometria] p[roiettiva] e d[escrittiva] di qui, sia riguardo all'E[nrique]s. Ho bisogno *urgente* di sapere ambe le cose, per poter provvedere riguardo agli assis[tent]i della detta materia.

Non sappiamo nulla del V[olterr]a: e sì che urge che si decida!

Sto facendomi un piano del corso: cagione di ritardo alla mia eterna Memoria.

Tante cose affettuose in fretta

Tuo
C.S.

6.

Torino 27 Ott[obre 18]93

Carissimo,

Leggi le tre lettere che m'han rallegrato nei giorni scorsi, e poi rinviamele raccomandate.

A spiegazione di quella del G[ucci]a ti dirò che scrivendogli gli avevo solo citato *come esempio* un suo ragionamento sbagliato, accennandogli un modo di sostituirlo: ché del resto la relazione (a cui ripetutamente l'avevo rimandato) conteneva un gran numero di critiche. – Della relazione avevo detto, (credo fa parentesi), che credevo non si pubblicasse (perché pare che le relazioni *contrarie* alle promozioni non si pubblichino). Ma rammarico di aver scritto ciò se egli lo interpreta... a modo suo. Sarebbe mio desiderio vivissimo che si pubblicasse!

Né a lui, né a Del Pezzo, scrivo altro. Ti confesso che non m'aspettavo due lettere così..., come chiamarle?

Il bello è che il Cons[igli]o super[ior]e (mosso da G[uccia]?) ha annullato tutti i nostri atti relativi alle promozioni (almeno così scrive Cossa)! Noi avevamo dato dei giudizî dicendo (e firmando) che eravamo tutti unanimi; avevamo votato *cinque* no... Non basta! Bisognava che il segretario trascrivesse nei verbali cinque volte lo stesso giudizio attribuendolo successivamente ai cinque commissari!! –

Quanto all'Enriques, dopo d'aver interpellato il Berzolari, io pensavo di proporlo come assistente alla Proj[ettiv]a e Descr[ittiv]a se egli non aveva quest'anno il posto di perfez[ionament]o: e perciò ritarderò ancora un giorno o due a far le proposte, affine di aspettare notizie in proposito. Dovrei scartare o Gribodo o Savoja: cosa certo gravissima, visto che il 1° non accenna a volersene andare ed il 2° si è raccomandato caldamente perché lo si conservi...

Tanti saluti aff.mi

Tuo
C. Segre

7. [c. p.]

Torino 2 Nov[embre 18]93

Carissimo,

Ricevo la tua, ahi troppo tardi! Nel pomeriggio del 31 s[cors]o visto che un ulteriore ritardo nelle proposte poteva danneggiare la carriera degli assist[ent]i da confermare, e considerate le probabilità grandi che parevano esservi che l'Enr[iques] avesse il posto di perfez[ionament]o, ho proposto

(d'accordo col Berz[olar]i che mi lasciò la più ampia libertà di azione) al Min[istr]o per mezzo del Rettore la conferma di tutti 5 gli assist[ent]i. - Rimane solo una speranza in favore dell'E[nriques]: che il Gr[i]b[o]d[o] a cui ieri ho scritto una lettera diplomatica per annunziargli la proposta fatta mi risponda che non accetterebbe la conferma. Non è probabile, ma è possibile. - In tal caso credo che la nomina dell'E[nriques] sarebbe quasi certa.

Ebbi la tua lettera con le altre, e grazie. Che sia io quel candidato alla promozione che ajutò la Commiss[ion]e relativa? Non lo sapevo.

Tanti saluti aff.mi

Tuo
C.S.

8. [c. p.]

Torino 5 Nov[embre 18]93

Carissimo,

Gr[i]b[o]d[o] mi ha risposto che accetta! All'Enr[iques] di cui ebbi in pari tempo una cartolina in cui mi si raccomandava ho risposto che su ciò che avevo in vista per lui non vi era più da contare; quanto all'Asch[ier]i ho sentito a Roma che prende il Pannelli: dunque nemmeno da quel lato vi è speranza. L'Enriques ebbe torto a non concorrere per gli ist[itut]i tecnici: assai probabilmente avrebbe avuto un posto. Egli non deve mettersi in capo di evitare le scuole secondarie. Anzi io credo che un po' di tirocinio in queste gli gioverebbe. - Quanto a me, non ho colpa alcuna dell'avvenuto. Se Berz[olar]i mi avesse detto esplicitamente di proporre l'Enr[iques] in luogo di Gr[i]b[o]d[o] l'avrei fatto. Invece egli si rimetteva in me dicendomi in pari tempo che non vorrebbe urtare consuetudini, crearsi inimicizie, ecc. Io ho atteso fino al 31 Ott[obr]e ultimo termine prefissomi dall'Un[iversit]à: e nel pomeriggio di quel giorno, dopo molte titubanze mi son deciso.

G[ucci]a è stato a Pisa ad affliggere per due giorni l'ottimo B[ertin]i. Poi fu a Genova con L[ori]a. Spero che non si farà vedere a Torino!

Sono molto disgustato dal modo come Cr[emon]a ha preso la sconfitta del suo protetto. Davvero è sconfortante! Tanto più a pensare che un Cons[iglio] sup[eriore] s'inchina a tali cose!

Tuo aff.mo
C.S.

9. [c.p.]

Torino 23 Nov[embre 18]93

Carissimo,

L'Enri[ques] ti avrà scritto che la Fac[olt]à di Bologna in seguito a domanda del Pieri ha proposto al Min[istr]o la nomina di questo al posto del Montes[an]o. Non sappiamo ancora se tale nomina sarà fatta subito senza interpellare il C[onsiglio] S[uperiore]. In ogni modo appena il P[ier]i abbia lasciato il suo posto, sarà proposto l'Enriques. Così mi disse il Berz[olar]i che è giunto e comincerà domani le sue lez[ion]i. – Un fatto curiosissimo, chiamiamolo così, è questo: che io non ho saputo mai *nulla* dal P[ier]i; furono quasi simultaneamente D'O[vidio] e l'Enr[iques] che mi annunziarono l'avvenuto. Allora ho scritto al P[ier]i due righe di congratulazioni (il 20) e fino ad ora non ne ho avuto risposta! Che mai sarà? Non riesco in alcun modo ad immaginarlo, non so proprio immaginare se, e come, e perché egli pensa avere qualche rancore (recentissimo) con me!

Ah mondo mondo...! Intanto domenica scorsa ho presentato all'Accad[emia] alcune pag[ine] del Kantor, perché si veda che questi fin dall'85 aveva pensato ciò che io pubblicai nell'89! Voglio sperare che dopo ciò e la nota che vi ho messo io a piè di pag[ina] sia fatta la pace fra lui e me. Quanto a te permettimi un consiglio (quantunque tu non sia fra i miei scolaretti): nel tuo lavoro dei Math[ematische] Ann[alen] cita il Kantor con generosità, non solo per quello che ha pubblicato e che si collega al tuo argomento, ma anche per ciò che egli ti scrisse di aver *pensato*. Egli è ammalato, che forse potrebbe migliorare, se non guarire, a foga di trattamenti con la *bontà*. Se anche si esagera nei riguardi verso di lui, non vi è male, e può esservi bene, non solo per lui, ma anche per la scienza a cui egli può dare ancora buone cose. Scusami

Tuo aff.mo
S.

[P.S.] La tua questione appunto fu risolta dal Kronecker che poi non ne pubblicò niente altro che l'annunzio. Pubblica tu la tua dim[ostrazion]e.

10. [c.p.]

Torino 25 Dic[embre 18]93

Carissimo,

Ieri ho spedito al Br[ioschi] per gli Annali una metà o poco più (circa 80 pag[ine]!) del mio lavoro. Mi rimane da metter in buona copia il resto; ed i miei poveri occhi sono un po' stanchi. Ora stamane l'Enriques mi ha espresso il desiderio che io presenti all'Acc[ademi]a per gli Atti la sua

Massima dimensione... Io non posso ora esaminarla attentamente. Gli ho quindi risposto che accetto molto volentieri, se prima tu la esamini minutamente nella sua ultima redazione. Se tu acconsenti, ti prego di far l'esame in modo che io possa star tranquillo che quel lavoro non contenga errori. - In tale ipotesi sarò lieto di presentarlo, perché mi piace che la nostra Acc[ademi]a pubblichi le importanti ricerche geometriche che si vanno facendo da voi. Non occorre quindi ch'io ti ripeta che anche quest'anno tu devi dare alla nostra Accad[emi]a qualche tuo lavoro.

T'ho già detto che il K[antor]... s'è rappacificato con me, e che mi ha regalato il suo gran lavoro? - Non puoi farne la conoscenza... a distanza, quando costì egli va a ritirare le lettere «fermo in posta»?

Saluti aff.mi. Tanti cordiali auguri pel nuovo anno. Tuo
C.S.

11.

Torino 3 marzo [18]94

Carissimo,

Ho una difficoltà da risolvere, su cui desidero consultarti. La dimostrazione di Noether (Mat[hematische] Ann[alen] III) del teorema che una superficie con un fascio razionale di curve razionali è razionale - teorema a cui anche tu nelle tue involuzioni ti riferisci, e che io vorrei esporre nel mio corso - mi sembra incompleta per la solita benedetta difficoltà delle singolarità superiori. Ciò renderebbe incompleta anche la tua dimostrazione della razionalità delle involuzioni piane (nella quale appunto era notevole che non vi fossero difficoltà per le singolarità superiori). Il Noether in fatti, ridotta la questione a quella di una F con retta $(n-2)$-pla determina su questa una curva che incontri in *un* punto ogni conica, mediante un calcolo di cui non si vede bene quali modificazioni esigerebbe in caso che fra i punti doppi che l'A[utore] ammette vi siano fuori della retta multipla ve ne fossero di coincidenti in vario modo. Si vede insomma che il Noether scriveva in un tempo in cui gli bastavano i risultati *generali* e le singolarità non lo impensierivano. Ma ora sarebbe indispensabile di togliere ogni dubbio intorno all'assoluta validità di quel teorema.

Se la F^n si projetta da un punto della retta multipla, si ha un *piano doppio con curva limite d'ordine* $2n-2$ *dotata di un punto* $(2n-4)$*-plo*. E il teorema di Noether sarebbe stabilito se si dimostrasse che un tal piano doppio è sempre razionale. Ora il Clebsch (nello stesso t[omo] III dei Math[ematische] Ann[alen]) dimostra ciò per $n=4$ e, come il Noether osserva nei Math[ematische] Ann[alen] 33, la stessa dimostrazione vale per n qua-

lunque. Ma, dico io, vale... fin che vale. Vale il ragionamento di Clebsch finché quella curva limite (la sua $\Omega = 0$) non presenta accidentalità. Mentre esige nuovo esame in caso contrario. Essa cade ad esempio quando la curva si spezza in $2n - 2$ rette concorrenti; od anche in $2n - 4$ rette concorrenti ed in una retta doppia: casi che corrispondono alla F^n rigata (cono; o rigata con due rette direttrici, $(n - 2)$-pla e doppia). - Ora si domanda se queste siano le sole eccezioni o no. Ecc. ecc.

Desidero sapere che cosa ne pensi tu: tanto più che non mi stupirebbe di essere impedito dal pensarvi io stesso.

E chiudo la lettera in gran furia; quantunque la tua cartolina, ricevuta ora, esigerebbe qualche risposta, che ti darò un'altra volta.

Tanti saluti affettuosissimi Tuo
C.S.

12. [c.p.]

Torino 4 marzo [18]94

Carissimo,

In aggiunta alla lettera frettolosa di ieri ti dirò che non vedo che L[ori]a avesse da offendersi nemmeno per ombra del non averlo tu consultato a proposito del Kr[onecker]. Ho riletto ora le parole, contenute nel tuo lavoro, riguardo al Kr[onecker]: e non vedo che esse contraddicano in nulla a quanto ti scrisse il L[ori]a. Io non ricordavo il «zu erledigen»...: ma poco male!

Nelle litogr[afie] di Enr[iques] ho visto con molto piacere una notevole accuratezza, specialmente nei fondamenti della geom[etria] proj[ettiv]a. Riguardo a questi poi, convengo con te sul dubbio che non si possano esporre ai nostri ragazzi di 1° anno; ma ne convenne anche l'Enr[iques]: ed io voglio considerare quelle pagine più come titolo scientifico che come titolo didattico. Così considerate, esse mi sono piaciute.

Aggiungi alla mia lettera di ieri che il piano doppio *non* è razionale anche quando la curva limite Ω si spezza in una γ^m dotata di un punto $(m - 1)$-plo, contata due volte, ed in $2n - 2 - 2m$ rette concorrenti in quel punto (m potendo variare da 0 a $n - 3$). Ciò corrisponde al caso più generale in cui la F^n sia rigata, cioè per avere oltre la retta $(2n - 2)$-pla una curva doppia d'ordine m appoggiata in $m - 1$ punti a quella retta.

Tanti saluti aff.mi Tuo
C.S.

13. [c.p.]

Torino 24 Dic[embre 18]94

Carissimo,

Ebbi ieri la tua e di E[nrique]s. Vi ho riflettuto; e, come già ne avevo l'intenzione, ho ripreso a pensare all'argomento - che del resto avevo lasciato sospeso da più di un mese! Ecco qua: io spero di potere in questi otto dieci giorni di vacanza che ancora mi rimangono riflettere tanto sui punti più minuti della dimostrazione (che la superficie si può ridurre ad una di S_3 con sola linea doppia ecc.) da acquistare la piena certezza della verità della cosa. Ed allora prenderò, a seconda dei casi, una delle varie risoluzioni che tu saggiamente mi sottoponi: o di darvi da pubblicare un sommario del mio ragionamento, o di pubblicarlo io stesso, ecc. ecc. Insomma in qualche modo spero di soddisfarvi. - E se poi (il che spero non accada) incontrassi difficoltà dove non credo di trovarne, t'informerò ugualmente di tutto, affinché voi possiate regolarvi.

In ogni caso leggerò con molto piacere la vostra prefazione.

Quanto al mio corso, finché si tratta di singolarità ordinarie o straordinarie facili, metto insieme le curve e le superficie. Ma quando passerò alle singolarità superiori dovrò far la separazione: prima le curve e poi le superficie. E a dirtela in confidenza non son sicuro che avanzi poi tempo per queste ultime!

Ti faccio fin d'ora i miei più cordiali auguri pel nuovo anno: e fra le altre belle cose che ti auguro anche quella promozione che ti meriti!

Tuo aff.mo
C.S.

14.

Torino 22 aprile 1904

Carissimo,

Da qualche tempo non ti scrivo, per causa dei miei occhi un po' stanchi (effetto - dice il medico - di stanchezza generale, non di malattia locale). Ora ricevo la tua lettera, di cui ti ringrazio. L'informazione del Grassi è - io credo - prematura. Io mi sono occupato di nuovo quest'inverno, e più recentemente ancora, della questione. Ho scritto ad un commissario, ho parlato con un altro (nessuno dei due era Ver[ones]e), pregando che mi avvertisse se la commiss[ione] concludeva col non premiare i *superstiti*: perché in tal caso volevo suggerire alla Commiss[ione] di tentare qualche maniera per premiare voi due. E detto questo, spiegai anzi la maniera -

che coincide con quella che tu mi scrivi. Dissi che si potrebbe esaminare i vostri lavori, anche staccatamente, per evitare di creare precedenti pericolosi. Svolsi insomma gli argomenti che già avevo scritto al Presidente. E anche dissi - scusami, se ciò ti dispiacerà! - che, se la Comm[ission]e non credesse, dopo il voto del Giugno scorso, di poter esaminare tutti i vostri lavori e proporre che siano premiati, si poteva provocare un fatto nuovo: io avrei cercato un modo di fare intervenire uno di voi due, Enriques, a ritirare sé, coi suoi lavori, dal concorso; sicché la Comm[ission]e si trovasse a dover giudicare te solo (di ciò non scrissi nulla all'Enriques ma ero sicuro che avrebbe accettato). A tutto ciò mi fu risposto da entrambi quei commissari a cui mi ero rivolto che, secondo loro, tutto ciò è impossibile: che il compito della Comm[ission]e sarà finito quando avranno concluso relativamente ai *superstiti*; che la Comm[ission]e non può occuparsi di voi che foste esclusi; che si rammarica...; che voi foste mal consigliati...; che anche l'anno scorso la Commiss[ion]e non poteva fare altrimenti... ecc. ecc. ecc. Insomma la Commiss[ion]e pare più incaponita che mai a non volervi premiare!

Un mese fa, all'incirca, la Commiss[ion]e si riunì a Roma... per non decidere nulla, intorno ai *superstiti*. Che abbian deciso ora qualcosa mi par dubbio.

Io son rimasto molto sconfortato dalle discussioni avute per scritto e a voce. Userei la parola «cretinismo» per indicare lo stato mentale dei commissari... ma non è parlamentare! Son rimasto addolorato, e anche sfiduciato! (il che non mi fa ritirare dalla lotta)

Molto dubbio mi pare che si chiuda un nuovo concorso col 31 Dic[embr]e 1904! Diranno che non vi è tempo sufficiente per produrre un lavoro scientifico importante ecc.!

Dimmi se è vero che costì avete già votato pel Cons[iglio] Super[iore], mentre noi qui siamo invitati a votare lunedì prossimo.

Tanti aff.i saluti Tuo

C.S.

BIBLIOGRAFIA

Scopo della presente Bibliografia è quello di fornire i dati bibliografici delle opere citate nell'apparato critico in forma sommaria, con la sola indicazione del cognome dell'autore e della data di pubblicazione. Per Castelnuovo ed Enriques, l'elenco è completo fino al 1907, anno in cui sostanzialmente si interrompe la corrispondenza tra i due. Per gli anni successivi, e per gli altri autori, vengono invece riportati solo gli scritti menzionati nelle lettere o in nota. Di norma, sotto ciascun anno, l'ordine di successione è cronologico. In particolare, per Castelnuovo ed Enriques esso ricalca, con rare eccezioni, quello stabilito nelle bibliografie che corredano l'edizione delle loro *Memorie* (Castelnuovo 1937, a cura dello stesso autore; Enriques 1955-66, a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei, che riprende la bibliografia pubblicata da Luigi Campedelli e Adriano Barlotti in «Periodico di Matematiche», XXV, 1947).

Pubblicazioni di Guido Castelnuovo

1937 *Memorie scelte*, Zanichelli, Bologna.

1885 *Angoli di due spazi contenuti nello spazio ad n dimensioni*, «Atti Ist. Veneto», (6), 3, 1331-48.

1886a *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale*, «Atti Ist. Veneto», (6), 4, 1167-200.

1886b *Studio sulla teoria della involuzione nel piano*, «Atti Ist. Veneto», (6), 4, 1559-94.

1887a *Studio sulla omografia di seconda specie*, «Atti Ist. Veneto», (6), 5, 1041-115.

1887b *Sopra una congruenza del terzo ordine e sesta classe dello spazio a quattro dimensioni*, «Atti Ist. Veneto», (6), 5, 1249-81.

1888 *Sulle congruenze del terzo ordine dello spazio a quattro dimensioni*, «Atti Ist. Veneto», (6), 6, 525-79.

1889a *Geometria sulle curve ellittiche*, «Atti Acc. Sci. Torino», 24, 4-22 (= *Memorie*, 1-17).

1889b *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, «Atti Acc. Sci. Torino», 24, 346-73 (= *Memorie*, 19-44).

1889c *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 3, 27-37 (= *Memorie*, 45-53).

1889d *Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio a n dimensioni*, «Rend. Acc. Lincei», (4), 5 (2° sem.), 71-79 (= *Memorie*, 55-64).

1889e *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, «Rend. Acc. Lincei», (4), 5 (2° sem.), 130-33 (= *Memorie*, 65-70).

1889f *Su certi gruppi associati di punti*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 3, 179-92.

1890a *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 4, 73-88 (= *Memorie*, 189-202).

1890b *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 18, 119-28 (= *Memorie*, 127-36).

1890c *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3*, «Atti Acc. Sci. Torino», 25, 695-715 (= *Memorie*, 203-21).

1890d *Sopra un teorema del Sig. Humbert*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 4, 195-96.

1891a *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie algebrica. Note I e II*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), 24, 127-37 e 307-18 (= *Memorie*, 245-53 e 255-65).

1891b *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, «Mem. Acc. Sci. Torino», (2), 42, 1-43 (= *Memorie*, 137-88).

1891c *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, «Atti Ist. Veneto», (7), 2, 855-901.

1891d *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, «Rend. Acc. Lincei», (4), 7 (2° sem.), 294-99 (= *Memorie*, 71-77).

1892a *Sulle trasformazioni cremoniane del piano che ammettono una curva fissa*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 1 (1° sem.), 47-50 (= *Memorie*, 267-71).

1892b *Le corrispondenze univoche tra gruppi di p punti sopra una curva di genere p*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), 25, 1189-205 (= *Memorie*, 79-94).

1893a *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 7, 89-110 (= *Memorie*, 95-113).

1893b *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica*, «Atti Acc. Sci. Torino», 28, 727-38 (= *Memorie*, 115-25).

1893c *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 2 (2° sem.), 205-09.

1894a *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, «Math. Ann.», 44, 125-55 (= *Memorie*, 273-306).

1894b *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 3 (1° sem.), 22-25 (= *Memorie*, 223-27).

1894c *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 3 (1° sem.), 59-61 (= *Memorie*, 229-32).

1894d *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 3 (1° sem.), 473-81 (= *Memorie*, 233-43).

1896a *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, «Mem. Soc. It. Sci. XL», (3), 10, 82-102 (= *Memorie*, 335-60).

1896b *Sulle superficie di genere zero*, «Mem. Soc. It. Sci. XL», (3), 10, 103-23 (= *Memorie*, 307-34).

1897a *Alcune proprietà fondamentali sui sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 25, 235-318 (= *Memorie*, 361-442).

1897b *Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 6 (1° sem.), 372-78 e 406-13 (= *Memorie*, 443-57).

1900 *Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari*, in *Questioni riguardanti la geometria elementare* raccolte da F. Enriques, Zanichelli, Bologna, cap. 10, 313-50.

1901 *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, «Atti Acc. Sci. Torino», 36, 861-74 (= *Memorie*, 459-71).

1902 *Lezioni di Geometria analitica*, Dante Alighieri, Roma.

1905a *Sur les intégrales de différentielles totales appartenant à une surface irrégulière*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 140, 220-22.

1905b *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 14 (2° sem.), 545-56, 593-98 e 655-63 (= *Memorie*, 473-500).

1905c *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 20, 55-60 (= *Memorie*, 501-07).

1906 *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 15 (1° sem.), 337-44 (= *Memorie*, 509-17).

1907 *Il valore didattico della matematica e della fisica*, «Scientia», 1, 329-37.

Pubblicazioni di Federigo Enriques

1956-66 *Memorie scelte di geometria*, 3 voll., Zanichelli, Bologna.

1885 *Tavola dei quadrati e dei cubi perfetti interi contenuti in 100000*, Nistri, Pisa (fascicolo in 16° di 10 pagine).

1890 *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad n dimensioni*, «Rend. Acc. Lincei», (4), 6 (2° sem.), 63-70.

1892a *Le omografie cicliche negli spazi ad n dimensioni*, «Giorn. Mat.», 30, 311-18.

1892b *Le omografie armoniche negli spazi lineari ad n dimensioni*, «Giorn. Mat.», 30, 319-25.

1893a *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 2 (1° sem.), 468-73 (= *Memorie*, I, 1-7).

1893b *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 2 (1° sem.), 532-38 (= *Memorie*, I, 9-15).

1893c *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 2 (2° sem.), 3-8 (= *Memorie*, I, 17-22).

1893d *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 2 (2° sem.), 281-87 (= *Memorie*, I, 23-29).

1893e *Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio di 4 dimensioni*, «Giorn. Mat.», 31, 31-35.

1893f *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, «Mem. Acc. Sci. Torino», (2), 44, 171-232 (= *Memorie*, I, 31-106).

1893g *Le superficie con infinite trasformazioni in sé stesse*, «Atti Ist. Veneto», (7), 4, 1590-635.

1893-94a *Lezioni di Geometria proiettiva*, Bologna (litogr.).

1893-94b *Lezioni di Geometria descrittiva*, Bologna (litogr.).

1894a *Intorno alla memoria «Le superficie con infinite trasformazioni in sé stesse»*, «Atti Ist. Veneto», (7), 5, 638-42.

1894b *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 3 (1° sem.), 481-87 (= *Memorie*, I, 125-31).

1894c *Ancora sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 3 (1° sem.), 536-43 (= *Memorie*, I, 132-39).

1894d *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), 27, 550-67 (= *Memorie*, I, 141-57).

1894e *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica*, «Atti Acc. Sci. Torino», 29, 173-95 (= *Memorie*, I, 107-24).

1894-95a *Lezioni di Geometria proiettiva*, Bologna (litogr.).

1894-95b *Lezioni di Geometria descrittiva*, Bologna (litogr.).

1894-95c *Conferenze di Geometria: fondamenti di una geometria iperspaziale*, Bologna (litogr.).

1895a *Alcune proprietà metriche dei complessi di rette ed in particolare di quelli simmetrici rispetto ad assi* (1891), «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», 7, 1-55.

1895b *Sulle irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica* $f(x\ y\ z) = 0$ *mediante funzioni razionali di due parametri*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (2° sem.), 311-16 (= *Memorie*, I, 163-69).

1895c *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva (Corripondenza con G. Fano)*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 9, 79-85 (= *Memorie*, I, 158-62).

1895d *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*, «Math. Ann.», 46, 179-99 (= *Memorie*, I, 171-91).

1896a *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 10, 30-35 (= *Memorie*, I, 321-25).

1896b *Sopra le equazioni differenziali lineari del quarto ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), 29, 257-69 (= *Memorie*, I, 197-209).

1896c *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 5 (1° sem.) 191-97 (= *Memorie*, I, 313-19).

1896d *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, «Mem. Soc. It. Sci. XL», (3), 10, 1-81 (= *Memorie*, I, 211-312).

1896e *Sui piani doppi di genere uno*, con *Aggiunta alla Memoria del Sig. Enriques in relazione ad un resultato enunciato nel n. 7 di G. Castelnuovo*, «Mem. Soc. It. Sci. XL», (3), 10, 201-24 (= *Memorie*, I, 327-54).

1897a *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica* $f(x\ y\ z) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri*, «Math. Ann.», 49, 1-23 (= *Memorie*, I, 435-59).

1897b *Le superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 2$, «Rend. Acc. Lincei», (5), 6 (1° sem.), 139-44 (= *Memorie*, I, 461-67).

1897c *Sulle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 3$, «Rend. Acc. Lincei», (5), 6 (1° sem.), 169-74 (= *Memorie*, I, 469-74).

1898a *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 12, 222-39.

1898b *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. *Note I e II*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7 (1° sem.), 234-40 e 253-57 (= *Memorie*, I, 513-19 e 520-25).

1898c *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7, (2° sem.), 281-86 (= *Memorie*, I, 527-32).

1898d *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7, (2° sem.), 344-47 (= *Memorie*, I, 533-36).

1898e *Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues*, in *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker Kongresses in Zürich (9. bis 11. August 1897)*, Teubner, Leipzig, 145-46.

1898f *Lezioni di Geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna.

1899a *Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues*, «Math. Ann.», 51, 134-53 (= *Memorie*, II, 1-21).

1899b *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 13, 95-98 (= *Memorie*, II, 23-26).

1899c *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, «Math. Ann.», 52, 449-56 (= *Memorie*, II, 27-35).

1899d *Programma del corso di Geometria Superiore, Università di Bologna, anno accademico 1897-98*, «Boll. Bibl. Stor. Sci. mat.», 2, 76-78 (= *Memorie*, II, 37-39).

1900a *Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari*, in *Questioni riguardanti la geometria elementare*, cap. 11, 353-96.

1900b *Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principii della geometria*, in *Questioni riguardanti la geometria elementare*, cap. 1, 1-31.

1900c *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Zanichelli, Bologna.

1900d *Sul preteso raddrizzamento delle immagini nella visione*, «Boll. Mat. Sci. fis. nat.», 1, 113-14.

1900e Recensione di D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig 1899, «Boll. Bibl. Stor. Sci. mat.», 3, 3-7.

1901a *Sur les surfaces algébriques qui admettent des intégrales de différentielles totales de première espèce*, «Ann. Fac. Sci. Toulouse», (2), 3, 77-84 (= *Memorie*, II, 57-64).

1901b *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, «Atti Acc. Sci. Torino», 37, 19-40 (= *Memorie*, II, 65-83).

1901c *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria*, «Riv. filos.», 4, 171-95 (= *Memorie*, II, 145-61).

1901d *Intorno alla seconda soluzione di Laplace del problema dei tre corpi (Estratto da una lettera al prof. T. Levi-Civita)*, «Atti Ist. Veneto», (8), 3, 957-59.

1901e *Remarque au sujet d'une Note de M. S. Kantor*, «C. R. Acad. Sci. Paris», 132, 248-49.

1901f *Relazione sui lavori presentati pel 1° concorso bandito dal «Bollettino» nell'anno 1900*, «Boll. Mat. Sci. fis. nat.», 2, 97-98.

1902a *Lezioni di Geometria descrittiva*, a cura di U. Concina, Zanichelli, Bologna.

1902b *Per ricondurre la filosofia alla scienza (Lettera ad A. Orvieto)*, «Il Marzocco», 7, 19 gennaio, 3.

1903a *Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari*, «Rend. Acc. Bologna», 7, 52-58.

1903b *Vorlesungen über projektive Geometrie*, trad. di H. Fleischer, introd. di F. Klein, Teubner, Leipzig.

1903c Recensione di *Rapport du Jury international de l'exposition universelle de 1900 à Paris, Introduction générale, Deuxième partie, Science, par M. Emile Picard*, «Riv. filos.», 6, 139-41.

1904a *Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche, appartenenti ad una data superficie di Riemann*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 13 (1° sem.), 382-84.

1904b *Luigi Cremona*, «Rend. Acc. Bologna», 8, 37-51.

1905a *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, «Rend. Acc. Bologna», 9, 5-13 (= *Memorie*, II, 163-68).

1905b *Sur les surfaces algébriques irrégulières*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 140, 133-35.
1905c *Sur les surfaces algébriques de genre zéro*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 140, 564-66.
1905d *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 20, 1-33 (= *Memorie*, II, 169-204).
1905e *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sé stesse*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 20, 61-72 (= *Memorie*, II, 205-16).
1906a *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 15 (2° sem.), 665-69 (= *Memorie*, II, 273-77).
1906b *Sui principii della meccanica*, «Rend. Acc. Bologna», 10, 48-53.
1906c *Problemi della scienza*», Zanichelli, Bologna.
1906d *L'ordinamento dell'Università in rapporto alla filosofia*, in *Atti I Convegno della Società filosofica italiana*, 37-42.
1906e *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze: relazione*, in *Atti V Congresso degli insegnanti di scuole medie*, Bologna.
1907a *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, «Mem. Soc. It. Sci. XL», (3), 14, 327-52 (= *Memorie*, II, 241-72).
1907b *Einige allgemeine Bemerkungen über die geometrischen Aufgaben*, in *Fragen der Elementargeometrie*, II, 327-48.
1907c *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, «Rend. Acc. Bologna», 11, 11-15 (= *Memorie*, II, 279-82).
1907d *Prinzipien der Geometrie*, in *Encyklop. d. Math. Wissensch.*, III, 1, 1, 1-129.
1907e *Fragen der Elementargeometrie*, vol. 2 *Die Geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit*, trad. di H. Fleischer, Teubner, Leipzig.
1907f *La scienza eterodossa e la sua funzione sociale*, «Scientia», 1, 323-28.
1907g *Le principe d'inertie et les dynamiques non newtoniennes*, «Scientia», 2, 21-34.
1907h Recensione di V. Pareto, *Manuale di economia politica, con un'introduzione alla scienza sociale*, Società editrice libraria, Milano 1906, «Scientia», 1, 350-52.
1907i Recensione di H. Høffding, *Histoire de la philosophie moderne*, Alcan, Paris 1906, «Scientia», 2, 187-90.
1907l Recensione di A. Rey, *La théorie de la physique chez les physiciens contemporains*, Alcan, Paris 1907, «Scientia», 2, 375-77.
1908 *Sui moduli delle superficie algebriche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 17 (1° sem.), 690-94 (= *Memorie*, II, 307-12).
1909 *Le superficie di genere uno*, «Rend. Acc. Bologna», 13, 25-28 (= *Memorie*, II, 313-15).
1910a *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno*, «Rend. Acc. Bologna», 14, 71-75 (= *Memorie*, II, 519-22).
1910b *Fragen der Elementargeometrie*, vol. 1 *Die Grundlagen der Geometrie*, trad. di H. Thieme, Teubner, Leipzig.
1912a *Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendentes*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 154, 418-21.
1912b *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. 1 *Critica dei principii*, Zanichelli, Bologna.
1914a *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. *Note I e II*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 23 (1° sem.), 206-14 e 291-97 (= *Memorie*, III, 173-82 e 183-90).
1914b *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. 2 *Problemi classici della geometria. Numeri primi ed analisi indeterminata. Massimi e minimi*, Zanichelli, Bologna.

1916 *Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 25 (1° sem.), 607-13 (= *Memorie*, III, 299-306).

1919 *Sulle curve canoniche di genere p dello spazio a p − 1 dimensioni*, «Rend. Acc. Bologna», 23, 80-82 (= *Memorie*, III, 317-18).

1924 *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, «Ann. Mat. pura appl.», (4), 1, 185-98 (= *Memorie*, III, 337-51).

IN COLLABORAZIONE CON UGO AMALDI

1903a *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Zanichelli, Bologna.

1903b *Elementi di Geometria ad uso delle scuole normali*, Zanichelli, Bologna.

IN COLLABORAZIONE CON GUIDO CASTELNUOVO

1895 *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationelles en elles mêmes*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 121, 242-44 (= *Memorie*, I, 193-95).

1896 *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, «Math. Ann.», 48, 241-316 (= *Memorie*, I, 355-433).

1900a *Sur une classe de surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 131, 739-42 (= *Memorie*, II, 41-43).

1900b *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 14, 290-302 (= *Memorie*, II, 45-56).

1901 *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, «Ann. Mat. pura appl.», (3), 6, 165-225 (= *Memorie*, II, 85-144).

1906a *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, «Ann. Ec. Norm. Sup.», 23, 339-66 (= *Memorie*, II, 217-40).

1906b *Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques*, in appendice a E. Picard e G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Gauthier-Villars, Paris, vol. 2.

1908 *Grundeigenschaften der algebraischen Flächen*, in *Encyklop. d. Math. Wissensch.*, III, 2, 1, C, 635-73.

1914 *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus*, in *Encyklop. d. Math. Wissensch.*, III, 2, 1, C, 674-768.

IN COLLABORAZIONE CON ALBERTO CONTI E FRANCESCO SEVERI

1903 *Estensione e limiti dell'insegnamento della matematica in ciascuno dei due gradi, inferiore e superiore, delle Scuole Medie*, «Boll. Mat.», 2, 50-56.

IN COLLABORAZIONE CON GINO FANO

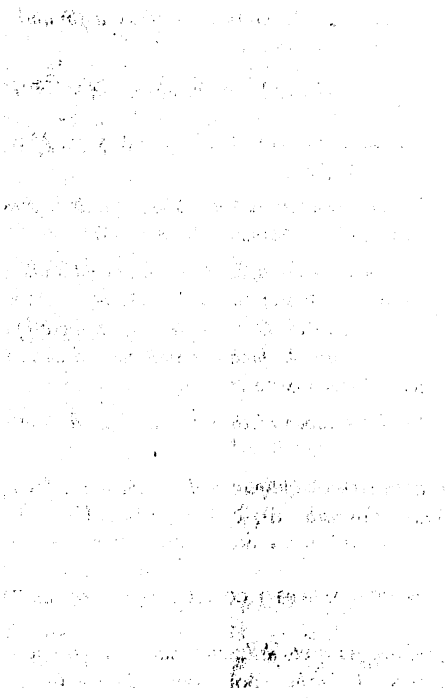
1897 *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 26, 59-99 (= *Memorie*, I, 475-512).

IN COLLABORAZIONE CON FRANCESCO SEVERI

1907 *Intorno alle superficie iperellittiche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 16 (1° sem.), 443-53 (= *Memorie*, II, 283-94).

1908 *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 17 (1° sem.), 4-9 (= *Memorie*, II, 295-301).

1909-10 *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques. Première et deuxième partie*, «Acta Math.», 32, 283-392, e 33, 321-403 (= *Memorie*, II, 317-431 e 431-518).



Scritti di altri autori citati nella corrispondenza

ABEL, NIELS HENRIK

1881 *Œuvres complètes*, a cura di L. Sylow e S. Lie, 2 voll., Grondahl, Christiania.

1826 *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très etendue de fonctions transcendantes*, «Mém. Prés. Sav. Acad. Sci. Paris», 7 (1841), 176-264 (= *Œuvres*, I, 145-211).

AMALDI, UGO

1900 *Sui concetti di retta e di piano*, in *Questioni riguardanti la geometria elementare* raccolte da F. Enriques, Zanichelli, Bologna, cap. 2, 33-64.

1901-02 *Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario*, «Giorn. Mat.», 39, 273-316, e 40, 105-41.

1902 *Tipi di potenziali che, divisi per una funzione fissa, si possono far dipendere da due sole variabili*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 16, 1-45.

AMALDI-ENRIQUES, *vedi* ENRIQUES-AMALDI

AMODEO, FEDERICO

1891 *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno* S_r, «Atti Acc. Sci. Torino», 26, 741-70.

ANDRADE, JULES

1898 *Leçons de mécanique physique*, Liman, Rennes.

BAGNERA, GIUSEPPE

1898a *Sopra i divisori normali di indice primo in un gruppo finito*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7 (1° sem.), 63-67.

1898b *Un teorema relativo agli invarianti delle sostituzioni di un gruppo kleiniano*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7 (1° sem.), 340-46.

1898c *La composizione dei gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo*, «Ann. Mat. pura appl.», (3), 1, 137-228.

BELTRAMI, EUGENIO

1902-20 *Opere matematiche*, 4 voll., Hoepli, Milano.

1865 *Risoluzione del problema: «Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da rette»*, «Ann. Mat. pura appl.», (1), 7, 185-204 (= *Opere*, I, 262-80).

BERNHARD, MAX

1897 *Ueber lineare Scharen von Curven und Flächen*, Dissertation, Tübingen.

BERTINI, EUGENIO

1877 *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 8, 11-23.

1880 *Sulle trasformazioni univoche piane e in particolare sulle involutorie*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), 13, 443-51.

1889 *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), 22, 771-78.

1894 *La geometria delle serie lineari secondo il metodo algebrico*, «Ann. Mat. pura appl.», 22, 1-40.

BERZOLARI, LUIGI

1906 *Allgemeine Theorie der hören ebenen algebraischen Kurven*, in *Encyklop. d. Math. Wissensch.*, III, 2, 1, C, 313-455.

1932 *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, in *Encyklop. d. Math. Wissensch.*, III, 2, 2, B, 1787-2217.

BIANCHI, LUIGI

1952-59 *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, 11 voll., Cremonese, Roma.

1897a *Sur deux classes de surfaces qui engendrent par un mouvement hélicoidal une famille de Lamé*, «Ann. Fac. Sci. Toulouse», 11, 1-8 (= *Opere*, III, 528-36).

1897b *Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*, Gozani, Pisa (litogr.; 1ª ed. a stampa: Spoerri, Pisa 1900).

1898-99 *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, Spoerri, Pisa (litogr.; 1ª ed. a stampa: ivi 1901. Prec. ed. litogr.: *Teoria sulle funzioni ellittiche. Lezioni di Ulisse Dini e Luigi Bianchi*, Fattalini, Livorno, s.d.).

BONNESEN, TOMMY

1906 *Séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique*, «Oversigt Danske Vidensk. Selsk. Forhandl.», 281-93.

BONOLA, ROBERTO

1899-1902 *Bibliografia sui fondamenti della geometria in relazione alla geometria non euclidea*, «Boll. Bibl. Stor. Sci. mat.», 2 (1899), 1-10, 33-40, 81-88; 3 (1900), 2-3, 33-41, 70-73; 5 (1902), 33-41, 65-71.

BOREL, EMILE

1898 *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris.

BOTTARI, AMERIGO

1899 *Sulla razionalità dei piani multipli* $\{x, y, \sqrt[n]{f(x, y)}\}$, «Ann. Mat. pura appl.», (3), 2, 277-96.

BRILL, ALEXANDER VON; NOETHER, MAX

1894 *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit*, «Jahresber. Deutschen Mat. Ver.», 3, 107-566.

BURALI-FORTI, CESARE

1894 *Logica matematica*, Hoepli, Milano (2ª ed. 1919).

BURKHARDT, HEINRICH

1895 *Beiträge zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie*, «Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen», 114-18.

CAPORALI, ETTORE

1888 *Memorie di geometria*, Pellerano, Napoli.

1875 *Sulla superficie del quinto ordine dotata di una curva doppia del quinto ordine*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 7, 149-88 (= *Memorie*, 1-46).

1878 *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado*, «Mem. Acc. Lincei», (3), 2, 749-69 (= *Memorie*, 54-85).

CAYLEY, ARTHUR

1889-97 *Collected Mathematical Papers*, 13 voll., Cambridge University Press, Cambridge.

1868a *On the Curves Which Satisfy Given Conditions*, «Phil. Trans.», 158, 75-143 (= *Papers*, VI, 191-262).

1868b *Second Memoir on the Curves Which Satisfy Given Conditions. The Principle of Correspondence*, «Phil. Trans.», 158, 145-72 (= *Papers*, VI, 263-91).

CLEBSCH, R. F. ALFRED

1871 *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen*, «Math. Ann.», 3, 45-75.

1875-76 *Vorlesungen über Geometrie*, a cura di F. Lindemann, 3 voll., Teubner, Leipzig.

1879-83 *Leçons sur la géométrie*, a cura di F. Lindemann, trad. fr. di A. Benoist, 3 voll., Gauthier-Villars, Paris.

CLIFFORD, WILLIAM KINGDON

1882 *Mathematical Papers*, a cura di R. Tucker, Macmillan, London.

1878 *On the Classification of Loci*, «Phil. Trans.», 169, 663-81 (= *Papers*, 305-31).

DARBOUX, GASTON

1880 *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective (Extrait d'une lettre à M. Klein)*, «Math. Ann.», 17, 55-61.

DE FRANCHIS, MICHELE

1991 *Opere*, a cura di C. Ciliberto ed E. Sernesi, «Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo», 27, Tip. AC, Palermo.

1899 *Riduzione di fasci di curve di genere 2*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 13, 1-27 (= *Opere*, 180-206).

1903a *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 17, 104-21 (= *Opere*, 274-92).

1903b *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve*, «Rend. Acc. Lincei», 12, 303-10 (= *Opere*, 293-300).

1904a *Proiezioni mongiane e stereoscopiche delle curve*, Trimarchi, Messina, pp. 8.

1904b *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 13 (1° sem.), 688-95 (= *Opere*, 301-08).

1905a *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 20, 49-54 (= *Opere*, 309-14).

1905b *Sugli integrali di Picard relativi ad una superficie doppia*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 20, 331-34 (= *Opere*, 315-18).

DE GREGORIO, GIACOMO

1896 *Glottologia*, Hoepli, Milano.

DELAUNAY, NICOLAS

1898 *Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes*, «Bull. Soc. Math. France», 26, 43-52.

DEL PEZZO, PASQUALE

1887 *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 1, 241-47.

1888 *Estensione di un teorema di Noether*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 2, 139-44.

1889 *Sui sistemi di curve e di superficie*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 3, 236-40.

1892 *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 6, 139-54.

1897a *Osservazioni su una memoria del Prof. Corrado Segre e risposta ad alcuni suoi appunti*, «Atti Acc. Pontan.», 27, Adunanza 21.2.1897, 1-13.

1897b *Replica ad una nota del Prof. Corrado Segre in risposta ad alcune mie osservazioni*, «Atti Acc. Pontan.», 27, Adunanza 6.6.1897, 1-7.

1897c *Contra Segrem*, Napoli.

DE PAOLIS, RICCARDO

1875 *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine n con un punto* $(n-1)$*-plo*, «Giorn. Mat.», 13, 226-48, 282-97.

1878 *La trasformazione piana doppia di terzo ordine, primo genere, e la sua applicazione alle curve del quarto ordine*, «Mem. Acc. Lincei», 2, 851-78.

1881 *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, «Mem. Acc. Lincei», 9, 489-503.

1884 *Elementi di geometria*, Loescher, Torino.

1890 *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi*, «Mem. Soc. It. Sci. XL», (3), 7, Mem. 6.

1892 *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di* 1^a *specie*, «Mem. Acc. Sci. Torino», (2), 42, 495-584.

DIRICHLET, P.G. LEJEUNE

1863 *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Vieweg, Brunsweig [trad. it. di A. Faifofer, *Lezioni sulla teoria dei numeri*, Tip. Emiliana, Venezia 1881].

DUMONT, FRANÇOIS

1898 *Sur les surfaces réglées du troisième ordre à un seul côté*, «Bull. Soc. Math. France», 26, 137-38.

EMERY, CARLO

1891 *Compendio di zoologia*, Bologna (litogr.; 1ª ed. a stampa, Zanichelli, Bologna 1899).

ENNEPER, ALFRED

1864 *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, «Zeit. Math. Phys», 9, 96-125.

FANO, GINO

1892 *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*, «Giorn. Mat.», 30, 106-32.

1893 *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque*, «Rend. Acc. Sci. Torino», 41, 335-82.

1894 *Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare*, «Atti Acc. Sci. Torino», 29, 474-93.

1895a *Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (1° sem.), 18-25.

1895b *Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (1° sem.), 51-57.

1895c *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sé stesse*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (1° sem.), 149-56.

1895d *Sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine che definiscono curve contenute in superficie algebriche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (1° sem.), 232-39.

1895e *Ancora sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine che definiscono curve contenute in superficie algebriche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (1° sem.), 292-300.

1895f *Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque che definiscono curve contenute in superficie algebriche*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (1° sem.), 322-30.

1896a *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sé*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 10, 1-15.

1896b *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 10, 16-29.

1896-97 *Aggiunta alla nota «Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare»*, «Atti Acc. Sci. Torino», 31, 708-15.

1898a *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7 (1° sem.), 302-08.

1898b *Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7 (1° sem.), 332-40.

1898c *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7 (2° sem.), 480-504.

1901 *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*, «Mem. Acc. Sci. Torino», 51, 1-79.

FANO-ENRIQUES, *vedi* ENRIQUES-FANO

GOURNERIE, JULES DE LA

1860-64 *Traité de géométrie descriptive*, 3 voll., Mollet-Bachelier, Paris (2ª ed. 1880-91, 3 voll., Gauthier-Villars, Paris).

GOURSAT, EDOUARD

1885 *Réduction des intégrales hyperelliptiques*, «Bull. Soc. Math. France», 13, 113-22.

GUARDUCCI, ALFREDO

1900 *Della congruenza e del movimento*, in *Questioni riguardanti la geometria elementare* raccolte da F. Enriques, Zanichelli, Bologna, cap. 3, 65-82.

GUCCIA, GIOVANNI BATTISTA

1886 *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 1, 165-68.

1887 *Théorème sur les points singuliers des surfaces algébriques*, «C. R. Acad. Sci. Paris», 105, 741-43.

1888 *Un teorema sulle curve singolari delle superficie algebriche*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 2, 79-80.

HALPHEN, GEORGES

1916-24 *Œuvres*, a cura di C. Jordan e altri, 4 voll., Gauthier-Villars, Paris.

1878-79 *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 9, 68-105 (= *Œuvres*, II, 154-96).

1879 *Recherches sur les courbes planes du troisième degré*, «Math. Ann.», 15, 357-79 (= *Œuvres*, II, 319-44).

1882 *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles*, «Bull. Soc. Math. France», 10, 162-72 (= *Œuvres*, II, 547-57).

1884 *Etudes sur les points singuliers des courbes algebriques planes*, in appendice a G. Salmon, *Traité de géométrie analytique (Courbes planes)*, Gauthier-Villars, Paris.

HAMEL, GEORG

1901 *Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Dissertation, Universitäts Buchdruckerei, Göttingen.

1903 *Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, «Math. Ann.», 57, 231-64.

HANKEL, HERMANN

1875 *Die Elemente der projectivischen Geometrie in syntetischer Behandlung*, Teubner, Leipzig.

HILBERT, DAVID

1932-35 *Gesammelte Abhandlungen*, 3 voll., Springer, Berlin (rist. Springer, New York 1970).

1890 *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, «Math. Ann.», 36, 473-534 (= *Abhandlungen*, II, 199-257).

1893 *Ueber die vollen Invariantensystem*, «Math. Ann.», 42, 313-73 (= *Abhandlungen*, II, 287-344).

1899 *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig [trad. it. della 10ª ed. a cura di P. Canetta, *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano 1970].

1901 *Über Flächen von konstanter Gaucher Krümmung*, «Trans. Am. Math. Soc.», 2, 87-99 (= *Abhandlungen*, II, 437-48) [trad. it. *Sulle superficie di curvatura gaussiana costante*, in *Fondamenti della geometria* cit., 226-35].

HUMBERT, GEORGES

1929-36 *Œuvres*, a cura di P. Humbert e G. Julia, 2 voll., Gauthier-Villars, Paris.

1893a *Sur une classe de surfaces à génératrices rationnelles*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 116, 1350-52.

1893b *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 117, 361-63.

1893c *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, «Journ. Math. pures appl.», (4), 9, 29-170, 361-475 (= *Œuvres*, II, 1-231).

1894a *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques. Premier mémoire: Des involutions sur les courbes algébriques*, «Journ. Math. pures appl.», (4), 10, 169-83.

1894b *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques. Deuxième mémoire: Sur une classe de surfaces algébriques à génératrices unicursales*, «Journ. Math. pures appl.», (4), 10, 184-89.

1894c *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques. Troisième mémoire: Des séries de courbes algébriques tracées sur les surfaces algébriques*, «Journ. Math. pures appl.», (4), 10, 190-201.

1894d *Sur la théorie générale des surfaces unicursales*, «Math. Ann.», 45, 428-45.

1897 *Sur une génération géométrique de la surface de Kummer*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 11, 1-11.

HURWITZ, ADOLF

1932-33 *Mathematische Werke*, 2 voll., Birkhäuser, Basel.

1887 *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*, «Math. Ann.», 28, 561-85 (= *Werke*, I, 163-88).

1893 *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, «Math. Ann.», 41, 403-42 (= *Werke*, I, 391-430).

JORDAN, CAMILLE

1882-87 *Cours d'analyse de l'Ecole Polythécnique*, 3 voll., Gauthier-Villars, Paris (2ª ed. 1893-96).

KANTOR, SELIGMANN

1885 *Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des corrispondances univoques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 100, 343-45.

1888 *Premiers fondaments pour une théorie des transformations périodiques et univoques*, «Atti Acc. Sci. Napoli», 1, n. 7, 1-264.

1892 *Premiers fondaments pour une théorie des transformations périodiques et univoques. Quatrième partie*, «Atti Acc. Sci. Napoli», 2, n. 1, 4-74.

1900 *Sur les surfaces qui possedent une série non linéaire de courbes rationnelles*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 131, 791-93.

1901a *Sur une généralisation d'un théorème de M. Picard*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 132, 124-26.

1901b *Die Typen der linearen Complexe rationaler Curven im R_r*, «Am. Journ. Math.», 23, 1-28.

KILLING, WILHELM

1893-98 *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, 2 voll., Schöningh, Paderborn.

KLEIN, FELIX

1921-23 *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, a cura di R. Fricke e altri, 3 voll., Springer, Berlin.

1869 *Eine Abbildung des Linienkomplexes zweiten Grades auf den Punktraum*, «Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen», 306 (= *Abhandlungen*, I, 89).

1872 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Deichert, Erlangen (= *Abhandlungen*, I, 460-97) [trad. it. di G. Fano, *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 17, 1890, 307-43].

1873 *Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie*, «Math. Ann.», 6, 112-45 (= *Abhandlungen*, I, 311-43).

1874 *Nachtrag zu dem «zweiter Aufsatze über nichteuklidische Geometrie»*, «Math. Ann.», 7, 531-37 (= *Abhandlungen*, I, 344-50).

1890 *Zur nichteuklidischen Geometrie*, «Math. Ann.», 37, 544-72 (= *Abhandlungen*, I, 353-83).

1893 *Einleitung in die höhere Geometrie*, 2 voll., Teubner, Leipzig (litogr.).

1895 *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, a cura di F. Tägert, Teubner, Leipzig [trad. it. di F. Giudice, *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*, Rosenberg e Sellier, Torino 1896].

1902 *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Prinzipien*, lezione tenuta nel 1901, semestre estivo, Teubner, Leipzig (litogr.).

KNESER, ADOLF

1885 *Irreducibilität und Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung*, Dissertation, Berlin.

1887a *Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln*, «Math. Ann.», 28, 125-32.

1887b *Zur Theorie der algebraischen Functionen*, «Math. Ann.», 29, 171-86.

KOBB, GUSTAV

1892 *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, «Journ. Math. pures appl.», (4), 8, 385-412.

KRONECKER, LEOPOLD

1895-1931 *Werke*, a cura di K. Hensel, 5 voll., Teubner, Leipzig.

1881 *Über die Discriminante algebraischen Functionen einer Variabeln*, «Journ. reine ang. Math.», 91, 301-34 (= *Werke*, II, 193-236).

1886 *Notiz über eine nicht veröffentlichte Abhandlung: Sulle superficie algebriche irreducibili aventi infinite sezioni piane che si spezzano in due curve*, «Rend. Acc. Lincei», (4), 2 (1° sem.), 323-24 (= *Werke*, V, 403-05).

LACAZE, H.

1901a *Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques*, Thèse, Gauthier-Villars, Paris.

1901b *Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques*, «Ann. Fac. Sci. Toulouse», (2), 3, 151-215.

LE PAIGE, CONSTANTIN

1887 *Recherches sur le pentaèdre*, «Bull. Acad. Royale Sci. Bruxelles», (3), 13, 488-97.

LEVI, ALBERTO

1896a *Sulla singolarità della Jacobiana di quattro superficie*, «Atti Acc. Sci. Torino», 31, 502-06.

1896b *Sulla singolarità della Jacobiana di quattro superficie*, «Giorn. Mat.», 34, 215-49.

LEVI, BEPPO

1897a *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 26, 219-53.

1897b *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche* «Atti Acc. Sci. Torino», 33, 66-86.

1899 *Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche. Appendice alla memoria «Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche*, «Ann. Mat. pura appl.», (3), 2, 127-38.

1899-1900 *Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza birazionale fra due spazi*, «Atti Acc. Sci. Torino», 35, 20-33.

1900 *Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 9 (2° sem.), 72-79.

1902 *Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 134, 222-25.

1904 *Fondamenti della metrica proiettiva*, «Mem. Acc. Sci. Torino», 54, 281-354.

1904-05 *Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche*, «Atti Acc. Sci. Torino», 40, 139-67.

1905 *Sur la géométrie et la trigonométrie sphérique*, «Enseign. math.», 7, 193-206.

LEVI-CIVITA, TULLIO

1954-73 *Opere matematiche*, a cura dell'Accademia dei Lincei, 6 voll., Zanichelli, Bologna.

1896 *Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 24, 255-300 (= *Opere*, I, 207-52).

1898 *Sui numeri transfiniti*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 7 (1° sem.), 91-96, 113-21 (= *Opere*, I, 315-29).

LIE, SOPHUS

1934-60 *Gesammelte Abhandlungen*, a cura di F. Engel, 7 voll., Teubner, Leipzig-Aschenhoug, Oslo.

1888-93 *Theorie der Transformationsgruppen*, 3 voll., Teubner, Leipzig.

1895a *Untersuchungen über unendliche kontinuierliche Gruppen*, «Leipz. Abh.», 21, n. 3, 43-150 (= *Abhandlungen*, VI, 396-493).

1895b *Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche Schar von projektiven Transformationen gestatten*, «Leipz. Ber.», 2, 209-60 (= *Abhandlungen*, VI, 494-538).

LONGCHAMPS, GASTON DE

1883-85 *Cours de mathématiques spéciales*, Delagrave, Paris.

LÜROTH, JACOB

1876 *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, «Math. Ann.», 9, 163-65.

MACH, ERNST

1883 *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, Brockhaus, Leipzig [trad. it. di A. D'Elia, *La meccanica nel suo sviluppo storico e critico*, Boringhieri, Torino 1977; 1ª ed. it., Roma 1909].

MEYER, WILHELM FRANZ

1928 *Flächen dritter Ordnung*, in *Encyklop. d. Math. Wissensch.*, III, 2, 2, B, 1439-1536.

MÖBIUS, AUGUST FERDINAND

1885-87 *Gesammelte Werke*, a cura di R. Baltzer e altri, 4 voll., Hirzel, Leipzig.

1827 *Der barycentrische Calcul*, Barth, Leipzig (= *Werke*, I, 1-388).

MONTESANO, DOMENICO

1895 *Sui vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio. Nota II*, «Rend. Acc. Sci. Napoli», (3), 1-2, 155-81.

NICCOLETTI, ONORATO

1903 *Sugli Elementi di Geometria dei professori Enriques e Amaldi (Lettera del prof. O. Niccoletti)*, «Boll. Mat.», 2, 219-23.

NOETHER, MAX

1869a *Zur Theorie der algebraischen Functionen meherer complexen Variabeln*, «Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen», 298-306.

1869b *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen*, «Math. Ann.», 2, 293-316.

1871a *Ueber algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln*, «Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen», 267-78.

1871b *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 5, 163-76.

1871c *Ueber Flächen welche Schären rationaler Curven besitzen*, «Math. Ann.», 3, 161-227.

1872 *Zur Theorie der eindeutigen Ebentransformationen*, «Math. Ann», 5, 635-39.

1873 *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen*, «Math. Ann.», 6, 351-59.

1875 *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Zweiter Aufsatz*, «Math. Ann.», 8, 495-533.

1878 *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*, «Sitzungsber. phys.-med. Soz. Erlangen», 10, 87-91.

1886a *Über die reduktiblen algebraischen Kurven*, «Acta Math.», 8, 161-62.

1886b *Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 108, 734-37.

1887 *Über die totalen algebraischen Differentiale*, «Math. Ann.», 29, 339-81.

1888 *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flachen*, «Sitzungsber. K. Preuss. Ak. Wiss. Berlin», 26, 123-27.

1889 *Zum Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen*, «Math. Ann.», 34, 450-53.

1897 *Ueber continuirliche Gruppen von Cremona-Transformationen*, «Jahresber. Deut. Mat. Ver.», 5, 68-69.

1898 Recensione di Ch.-E. Picard e G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris 1897, «Zeit. Math. Phys., Hist.-litt. Abt.», 43, 193-94.

PAINLEVÉ, PAUL

1972-75 *Œuvres*, 3 voll., Editions du CNRS, Paris.

1891 *Mémoire sur les equations différentielles du premier ordre*, «Ann. Ec. Norm. Sup.», (3), 8, 9-58, 103-40, 201-26, 267-84; 9, 9-30, 101-44, 283-308 (= *Œuvres*, II, 237-461).

1896 *Sur l'inversion des systèmes de différentielles totales*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 122, 769-72 (= *Œuvres*, II, 528-30).

1897 *Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles, professées à Stockolm. Septembre, Octobre, Novembre 1895*, Hermann, Paris (litogr.) (= *Œuvres*, I, 205-798).

1898 *Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 126, 512-15 (= *Œuvres*, II, 609-11).

1903 *Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition* (1902), «Acta Math.», 27, 1-54 (= *Œuvres*, II, 711-66).

PALATINI, FRANCESCO

1903 Recensione di F. Enriques e U. Amaldi, *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Zanichelli, Bologna 1903, «Boll. Bibl. Stor. Sci. mat.», 6, 71-79.

PASCH, MORITZ

1882 *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig.

PEANO, GIUSEPPE

1957-59 *Opere scelte*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, 3 voll., Cremonese, Roma.

1890a *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, «Math. Ann.», 36, 157-60 (= *Opere*, I, 110-15).

1890b *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, «Math. Ann.», 37, 182-228 (= *Opere*, I, 119-70).

PESCHKA, GUSTAV ADOLF VON

1883-85 *Darstellende und Projective Geometrie*, 4 voll., Gerold, Wien.

PETERSEN, JULIUS PETER CHRISTIAN

1887 *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Host, Kopenhagen [trad. it. di G. Rozzolino e G. Sforza, *Teoria delle equazioni algebriche*, Pellerano, Napoli 1891].

PICARD, CH. EMILE

1978-81 *Œuvres*, 4 voll., Editions du CNRS, Paris.

1878 *Sur une classe de surfaces algébriques*, «Bull. Soc. philomath. Paris», (7), 2, 127-32 (= *Œuvres*, IV, 555-60).

1884a *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 99, 961-63 (= *Œuvres*, III, 53-55).

1884b *Sur les intégrales de différentielles totales et sur un classe de surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 99, 1147-49 (= *Œuvres*, III, 57-58).

1885a *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce*, «Journ. Math. pures appl.», (4), 1, 281-346 (= *Œuvres*, III, 63-128).

1885b *Sur les intégrales de différentielles totales*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 100, 843-45 (= *Œuvres*, III, 59-61).

1885c *Sur les intégrales de différentielles totales de 2^e espèce*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 101, 734-36 (= *Œuvres*, III, 129-31).

1886a *Sur les intégrales de différentielles totales de 2^e espèce*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 102, 250-53 (= *Œuvres*, III, 133-36).

1886b *Sur les intégrales de différentielles totales de 2^e espèce*», «Journ. Math. pures appl.», (4), 2, 329-72 (= *Œuvres*, III, 143-86).

1887 *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales*, «Journ. reine ang. Math.», 100, 71-78 (= *Œuvres*, IV, 561-68).

1889 *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, «Journ. Math. pures appl.», (4), 5, 135-319 (= *Œuvres*, III, 201-385).

1891-96 *Traité d'analyse*, 3 voll., Gauthier-Villars, Paris.

1893 *Sur un nombre invariant dans la théorie des surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 116, 285-87 (= *Œuvres*, III, 393-95).

1894 *Sur la théorie des surfaces algébriques*, «Rev. gén. Sci. pures appl.», 5, 945-49 (= «Rend. Circ. Mat. Palermo», 9, 1895, 159-66).

1895 *Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 9, 244-55 (= *Œuvres*, III, 417-28).

1897 *Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 124, 532-38 (= *Œuvres*, III, 439-45).

1898 *Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 127, 579-84 (= *Œuvres*, III, 467-72).

1899 *Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. Premier mémoire*, «Journ. Math. pures appl.», (5), 5, 5-54 (= *Œuvres*, III, 473-522).

1904a *Sur un théorème générale concernant les surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 139, 835-38 (= *Œuvres*, IV, 165-68).

1904b *Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles de 2^e espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 139, 949-53 (= *Œuvres*, IV, 169-73).

1905a *Sur le developpement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences*, Gauthier-Villars, Paris.

1905b *Sur quelques théorèmes rélatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 140, 117-22 (= *Œuvres*, IV, 175-80).

1905c *Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 141, 5-8 (= *Œuvres*, IV, 229-32).

PICARD, CH. EMILE; SIMART, GEORGES

1897-1906 *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 voll., Gauthier-Villars, Paris.

PIERI, MARIO

1894 *Sulle trasformazioni razionali dello spazio che individuano complessi di tangenti*, «Giorn. Mat.», 33, 167-78.

PINCHERLE, SALVATORE

1895 *Sulle operazioni funzionali distributive*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 4 (1° sem.), 142-49.

POINCARÉ, HENRI

1928-56 *Œuvres*, 11 voll., Gauthier-Villars, Paris.

1879 *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, Thèse, Paris (= *Œuvres*, I, XLIX-CXXIX).

1884a *Sur la réduction des intégrales abéliennes*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 99, 853-55 (= *Œuvres*, III, 352-54).

1884b *Sur la réduction des intégrales abéliennes*, «Bull. Soc. Math. France», 12, 124-43 (= *Œuvres*, III, 333-51).

1884c *Sur les intégrales de différentielles totales*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 99, 1145-47 (= *Œuvres*, III, 355-56).

1885 *Sur un théorème de M. Fuchs*, «Acta Math.», 7, 1-32 (= *Œuvres*, III, 4-34).

1886a *Sur les fonctions abéliennes*, «Am. Journ. Math.», 8, 289-342 (= *Œuvres*, IV, 318-78).

1886b *Sur la réduction des intégrales abéliennes*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 102, 915-16 (= *Œuvres*, III, 360-61).

1895 *Analysis situs*, «Journ. Ec. Polyt.», (2), 1, 1-211 (= *Œuvres*, VI, 193-288).

1902a *Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'analysis situs*, «Bull. Soc. Math. France», 30, 49-70 (= *Œuvres*, VI, 373-92).

1902b *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris [trad. it. di F. Albergamo, *La scienza e l'ipotesi*, La Nuova Italia, Firenze 1949].

PREDELLA, PILO

1892 *Sulla teoria generale delle omografie*, «Atti Acc. Sci. Torino», 27, 270-88.

REYE, THEODOR

1866-68 *Die Geometrie der Lage*, 3 voll., Rumpler, Hannover; 2ª ed. 1877-80 [trad. fr. di O. Chemin, *Leçons sur la géométrie de position*, 2 voll., Dunod, Paris 1881-82]; 3ª ed. 1886-92, 3 voll., Baumgartner, Leipzig.

RIEMANN, BERNHARD

1876 *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig; nuova ed. a cura di R. Narasimhan, Springer, New York 1990.

1854 *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsschrift, Göttingen (= *Werke*, 272-87).

ROHN, KARL FRIEDRICH WILHELM

1883 *Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte*, «Math. Ann.», 22, 124-44.

SCHÖNFLIES, ARTHUR

1910 *Projektive Geometrie*, in *Encyklop. d. Wissensch.*, III, 1, 1, 391-480.

SCHUR, FRIEDRICH

1898 *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Veit, Leipzig.

SEGRE, CORRADO

1957-63 *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, 4 voll., Cremonese, Roma.

1886a *Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica*, «Mem. Acc. Sci. Torino», (2), 38, 3-24 (= *Opere*, II, 208-36).

1886b *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*, «Atti Acc. Sci. Torino», 21, 628-51 (= *Opere*, I, 56-77).

1887 *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 1, 217-21 (= *Opere*, I, 105-09).

1887-89 *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, «Math. Ann.», 30, 203-26, e 34, 1-25 (= *Opere*, I, 80-104, 125-51).

1893 *Relazione intorno alla memoria intitolata «Ricerche di geometria sulle superficie algebriche» del dr. F. Enriques*, «Atti Acc. Sci. Torino», 28, 867-68.

1894 *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 22, 41-142 (= *Opere*, I, 198-304).

1896 *Intorno ad un carattere delle superficie algebriche e delle varietà superiori algebriche*, «Atti Acc. Sci. Torino», 31, 485-501 (= *Opere*, I, 312-26).

1897a *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, «Ann. Mat. pura appl.», (2), 25, 1-54 (= *Opere*, I, 327-79).

1897b *Intorno ad una mia memoria «Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche»*, «Atti Acc. Sci. Torino», 32, 781-89.

1897c *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie*, «Atti Acc. Sci. Torino», 33, 19-23.

1898 Recensione di F. Enriques, *Lezioni di geometria projettiva*, Zanichelli, Bologna 1898, «Boll. Bibl. Stor. Sci. mat.», 1, 11-15.

1901 *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*, «Atti Acc. Sci. Torino», 36, 645-51 (= *Opere*, I, 433-39).

1910a *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 30, 87-121 (= *Opere*, II, 71-114).

1910b *Aggiunta alla memoria «Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi»*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 30, 346-48 (= *Opere*, II, 115-18).

1918 *Mehrdimensionale Räume*, in *Encyklop. d. Math. Wissensch.*, III, 2, 2, A, 769-972.

SEVERI, FRANCECO

1971-77 *Opere matematiche. Memorie e note*, a cura dell'Accademia dei Lincei, 6 voll., Accademia dei Lincei, Roma.

1902 *Risoluzione descrittiva di alcuni problemi spaziali biquadratici*, «Mat. pure appl.», 2, 169-76.

1903a *Sulle superficie algebriche che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*, «Atti Acc. Sci. Torino», 38, 119-34 (= *Opere*, I, 119-31).

1903b *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, «Mem. Acc. Sci. Torino», 54, 1-49 (= *Opere*, I, 173-223).

1903c *Sulla forma delle rigate cubiche*, «Atti Ist. Veneto», (8), 5, 863-79 (Riassunto in *Opere*, I, 118).

1903d *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, «Rend. Ist. Lomb.», (2), 36, 495-511 (= *Opere*, I, 158-72).

1904a *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, «Atti Acc. Sci. Torino», 39, 371-92 (= *Opere*, I, 234-46).

1904b *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2^a specie*, «Rend. Acc. Lincei», (5), 13 (2° sem.), 253-58 (= *Opere*, I, 247-51).

1905a *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2^a specie*, «Math. Ann.», 61, 20-49 (= *Opere*, I, 252-87).

1905b *Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 140, 926-28 (= *Opere*, I, 294-95).

1905c *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche*, «Ann. Mat. pura appl.», (3), 12, 55-79 (= *Opere*, I, 296-316).

SEVERI-ENRIQUES, *vedi* ENRIQUES-SEVERI

STAUDT, K.G. CHRISTIAN VON

1847 *Geometrie der Lage*, Bauer-Raspe, Nürnberg [trad. it. di M. Pieri, *Geometria di posizione*, Bocca, Torino 1889].

TERRACINI, ALESSANDRO

1913 *Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili*, «Atti Acc. Sci. Torino», 48, 297-319.

TISSERAND, FRANÇOIS-FÉLIX

1889 *Traité de mécanique céleste*, 4 voll., Gauthier-Villars, Paris.

VANNINI, TOMMASO

1902 Recensione di F. Enriques e U. Amaldi, *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Zanichelli, Bologna 1903, «Boll. Mat.», 1, 225-26.

VERONESE, GIUSEPPE

1880-81 *Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie*, «Mem. Acc. Lincei», (3), 9, 265-343.

1891 *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Tipografia del Seminario, Padova.

1897 *Elementi di geometria ad uso dei Ginnasi e Licei e Istituti tecnici*, con la collaborazione di P. Gazzaniga, Drucker, Padova (2ª ed. 1901).

VESSIOT, ERNEST

1892 *Sur l'intégration des equations différentielles linéaires*, «Ann. Ec. Norm.», (3), 9, 197-280.

VITALI, GIUSEPPE

1900 *Sulle applicazioni del postulato di continuità nella geometria elementare*, in *Questioni riguardanti la geometria elementare* raccolte da F. Enriques, Zanichelli, Bologna, cap. 4, 83-101.

WIENER, L. CHRISTIAN

1884-87 *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 2 voll., Teubner, Leipzig.

WIMAN, ANDERS

1895a *Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen von Geschlechte p = 3 welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*, «Stockholm Akad. Bihang», 21, 1, n. 1.

1895b *Über die algebraischen Curven von den Geschlechten p = 4, 5 und 6 welche eindeutige Transformationen in sich besitzen*, «Stockholm Akad. Bihang», 21, 1, n. 3.

1896 *Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen*, «Math. Ann.», 47, 531-56.

1897 *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene*, «Math. Ann.», 48, 195-240.

WUNDT, WILHELM

1880-83 *Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntnis und der Methoden wissenschaftlicher Forschung*, 2 voll., Enke, Stuttgart (2ª ed. 1893-95).

ZERMELO, F. F. ERNST

1904 *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet kann*, «Math. Ann.», 59, 514-16.

ZEUTHEN, HIERONYMUS G.

1871a *Nouvelle démonstration des théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes*, «Math. Ann.», 3, 150-56.

1871b *Etudes géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un*, «Math. Ann.», 4, 21-49.

1876a *Sur une classe de points singuliers de surfaces algébriques*, «Math. Ann.», 9, 321-32.

1876b *Revision et extensions des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques*, «Math. Ann.», 10, 446-546.

1898 *Sur le fondement de la géométrie projective*, «C.R. Acad. Sci. Paris», 126, 213-15.

INDICE DEI NOMI

Abel, Niels Henrik (1802-1829), 138, 497-99, 573, 620-21, 655
Albertoni, Pietro (1849-1933), 396
Albicini, Cesare (1825-1891), 402-03, 415-23, 432, 452
Almansi, Emilio (1869-1948), 502
Amaldi, Italo (1864-1940), 430
Amaldi, Ugo (1875-1957), XXIII, 430-31, 433, 458, 472-73, 480-81, 486-87, 489, 496, 502-05, 512-13, 515-18, 521-23, 528, 534n, 539-41, 574-75, 620n
Amante, Bruto (1852-1919), 175n, 420n, 469n, 487n
Amaturo, Enrico (n. 1863), 625n
Amici, Nicola (n. 1865), 348
Amodeo, Federico (1859-1946), 110-11, 143-44, 275, 472n, 653, 670
Ancona, Ugo (1867-1936), 6, 19, 60, 63, 180
Andrade, Jules (1857-1933), 486-87
Appell, Paul Emile (1855-1930), 491, 493
Arzelà, Cesare (1847-1912), XXIV, 38-41, 175, 210, 220, 227, 229-30, 240, 423n, 458, 474, 484, 518, 530n
Aschieri, Ferdinando (1844-1907), 25n, 53, 155, 275n, 372, 537-38, 541, 543, 552, 673
Ascione, Enrico (n. 1869), 11
Auronzo, 637
Autonne, Léon (1859-1916), XVIII, XXIX, XXXV, 163-64, 242, 308, 350, 651-52

Baccelli, Guido (1832-1916), 57n, 63, 69-71, 96-97, 105, 111, 147-48, 173-75, 208-09, 215, 219-20, 225, 228-32, 234-37, 240-41, 251, 402-03, 405, 415-17, 433-34, 452
Badoglio, Pietro (1871-1956), XXVII
Bagnera, Giuseppe (1865-1927), XIII, XVI, 368n, 374, 385, 411-12, 417, 431, 490n
Baratieri, Oreste (1841-1901), 250n
Barlotti, Adriano, 679
Bassani, Anselmo (1856-1911), 66
Battelli, Angelo (1862-1912), 518
Bava Beccaris, Fiorenzo (1831-1924), XXIII
Beltrami, Eugenio (1835-1900), 190n, 310, 324, 458-59, 468, 527n, 540n, 602
Bernhard, Max, 338
Bertelli, Luigi (Vamba, 1858-1920), 353
Bertini, Eugenio (1846-1933), XV, XXIX, 5, 7-12, 21, 25, 34-35, 38, 42, 46, 53, 65n, 67, 78, 130, 146, 155, 174, 193, 217-18, 220, 222, 231-32, 234-35, 275, 307, 342, 353-54, 363, 365, 458, 489-90, 497n, 503-04, 512-13, 532, 535, 541-43, 552, 616, 625n, 653, 670-71, 673
Berzolari, Luigi (1863-1949), 25n, 41, 44, 67, 272n, 313n, 368, 371-73, 386-88, 411-12, 414, 416n, 418, 458, 672-74
Bettazzi, Rodolfo (1861-1941), 458
Betti, Enrico (1823-1829), XII, 198, 294
Bianchi, Luigi (1856-1928), 10, 34-35, 42, 64-65, 78, 146, 193-94, 235, 255, 257-58, 269-70, 360n, 362-63, 385-86, 398, 458, 474, 484, 490-91, 504, 512-13, 518, 520, 524, 532-33, 535, 538, 542, 610
Bigiavi, Carlo (n. 1864), 5, 66
Biolchini, Luigi, 348
Bisconcini, Giulio (n. 1880), 488

Blaserna, Pietro (1836-1918), 533-34
Bobek, Karl Joseph (1855-1899), 653
Bolaffio, Leone (1848-1940), 433
Bolyai, János (1802-1860), 364
Bonaventura, Paolo (n. 1870), 32, 34, 52, 66
Bongi, Cesare, 490n
Bonnesen, Tommy (1873-1935), 620, 628-29
Bonola, Roberto (1874-1911), 397
Bordiga, Giovanni (1854-1933), 524, 537, 549, 624-25
Borel, Emile (1871-1956), 350, 367, 458, 491, 493
Bortolotti, Ettore (1866-1947), 368n, 411-12, 431, 490
Boschi, Pietro (1833-1887), 421
Bottari, Amerigo, 383-84
Bradley, James (1693-1762), 467
Brambilla, Alberto (n. 1858), 368n
Bresci, Gaetano (1869-1901), XXIII
Brigaglia, Aldo, 604n
Brill, Alexander von (1842-1935), 157, 304, 475, 670
Brioschi, Francesco (1824-1897), 142, 181, 183, 190n, 674
Bruni, Giuseppe (1873-1946), 639
Bruno, Giuseppe (1828-1893), 670
Burali-Forti, Cesare (1861-1931), 472
Burkhardt, Heinrich (1861-1914), 178, 266-67, 270, 313-14, 320, 325, 332, 334, 391

Camerano, Lorenzo (1856-1917), 524
Campedelli, Luigi (1903-1978), VIIIn, XXVI, 679
Campetti, Adolfo (1866-1947), 4
Cannizzaro, Stanislao (1826-1910), 495
Cantoni, Carlo (1840-1906), 468
Cantor, Georg (1845-1918), 367
Capelli, Alfredo (1855-1910), 368n, 481, 490n
Capellini, Giovanni (1833-1922), 231-32
Caporali, Ettore (1855-1886), 90, 218, 221n
Casati, Gabrio (1798-1873), XIX, 174-75, 304n, 386n, 402-03, 416, 418, 433, 468-69, 487, 495n
Cassari, 361
Castelnuovo, Bice, sorella di Guido, 365
Castelnuovo, Elbina, *vedi* Enriques Castelnuovo, Elbina
Castelnuovo, Emma, quintogenita di Guido (n. 1913), VI-VII, XXV, XXIX-XXX
Castelnuovo, Emma, *vedi* Levi Castelnuovo, Emma
Castelnuovo, Enrico, padre di Guido, XXI, 160, 274, 365
Castelnuovo, Gina, quartogenita di Guido (n. 1908), XXIV
Castelnuovo, Gino, terzogenito di Guido (1903-1995), XXIII, 542, 575, 631, 647
Castelnuovo, Maria, secondogenita di Guido (1899-1991), XXIII, 395n, 426-27, 429-30, 435, 437, 447, 458, 471, 480, 484, 525, 540, 542, 575
Castelnuovo, Mario, primogenito di Guido (n. 1897), XXII, 283n, 341n, 344-45, 347, 355, 369, 400, 426-27, 429-30, 435, 437, 447, 450, 453, 458, 471, 480, 484, 525, 540, 542, 575
Castelnuovo, nonna di Guido, 188
Cavalieri, Laura, 60
Cavendish, Henry (1731-1810), 467
Cayley, Arthur (1821-1895), 131-32, 170, 392, 670
Cerruti, Valentino (1850-1909), 24, 27, 35, 209, 263, 348n, 365, 434, 446, 458, 468, 488, 513-14, 516, 520n, 533, 552, 642
Cesàro, Ernesto (1856-1906), 65n
Chasles, Michel (1793-1880), 222
Chiarini, Giuseppe (1833-1908), 430-31, 448
Chini, Mineo (1866-1933), 4, 28
Chisini, Oscar (1889-1967), XXV-XXVI
Chizzoni, Francesco (1848-1904), 431
Chrisholm Young, Grace (1868-1944), 365-66, 368
Ciaccio, Francesco Paolo (1821-1901), 219-20, 229, 253, 279
Ciamician, Giacomo (1857-1922), 365-66, 495-96
Ciani, Edgardo (1864-1942), 11, 25n, 64, 66, 275, 368n, 472n, 478-79, 504, 512-13, 524-25, 537, 549, 624-25, 670
Cipriani, Amilcare (1844-1918), 403n
Clebsch, R.F. Alfred (1833-1872), IX, 216-17, 265n, 347, 353-54, 361, 675-76
Clifford, William Kingdon (1845-1879), 9-10

Coen, Achille, padre di Luisa, 430, 452
Coen, famiglia, 482
Coen, madre di Luisa, 600
Coen, Salvatore, 422n
Coen Enriques, Luisa, XXIII, 347, 349-50, 352, 358-60, 364, 366, 369n, 386, 397, 400, 402, 426-27, 430, 452, 462, 479, 509-10, 519, 536, 539n, 542n, 600, 602, 631, 635, 643
Coen Levi, Nella, sorella di Luisa, 519
Concina, Umberto (n. 1874), 479, 488
Conforto, Fabio (1909-1954), XXVII
Conti, Alberto (1873-1940), 534
Coppola, Francesco (n. 1844), 517
Coriat Enriques, Matilde, madre di Federigo, XXI, 158, 259-61, 263, 313, 315-17, 340-45, 356, 477, 631
Cossa, Alfonso (1833-1902), 495, 672
Cosserat, Eugène (1866-1931), 308, 350, 385, 391, 458, 472
Cremona, Luigi (1830-1903), VIII, XV, XXI, XXIX, 3n, 5n, 27, 29-32, 35, 46, 65n, 88, 131, 155, 166n, 171, 173-75, 182-83, 190-91, 196, 198, 204, 206-08, 211n, 215, 220, 222, 225-26, 228-32, 234, 247, 249-54, 257, 259, 263, 265-66, 268-69, 285, 289, 305, 317, 320, 324, 329-30, 353, 364-65, 387, 403, 415, 420-22, 454, 458, 479, 497n, 520, 527n, 533, 535, 543, 652, 659-61, 670, 673
Crispi, Francesco (1818-1901), XXII, 53n, 250n

Dahan-Dalmedico, Amy, VI
Daniele, Ermenegildo (1875-1949), 460, 472n
Danieli, Gualtiero (1855-1917), 433, 460
Darboux, Gaston (1842-1917), 150-51
D'Arcais, Francesco (1849-1927), 313
Dedekind, Julius Wilhelm Richard (1831-1916), 74-75, 77-79, 430
De Franchis, Michele (1875-1946), XIII, XVI, 398-99, 417, 472n, 476, 478, 511-12, 524-25, 528, 546, 548-49, 620-27, 632, 634-36
De Giovanni, Achille (1838-1916), 518
De Gregorio, Giacomo (1856-1936), 325n
Delaunay, Nicolas (1856-1931), 393n
Del Giudice, Modestino, 362
Della Torre, Luigi (1861-1937), 540
Del Pezzo, Pasquale, duca di Caianello (1859-1936), 33-34, 93-94, 117, 122n, 308, 334-36, 340-41, 345, 405n, 410-11, 458, 672
Del Re, Alfonso (1859-1921), 25n, 40, 43n, 171, 173, 175n, 206-09, 212-13, 215, 219-20, 225, 227-32, 251, 273, 276, 348, 363, 368n, 431, 458, 472, 478, 509, 525
De Paolis, Riccardo (1854-1892), 76-78, 131, 219, 221n, 357, 540
De Pretis, Agostino (1813-1887), XXI
De Santillana, Giorgio (1901-1974), XXVI, XXVII
Desargues, Gérard (1593-1662), 551
Dessau, Bernardo (n. 1863), 474
Diena, Giulio (1865-1929), 241, 296
Dieudonné, Jean, XVIII
Di Legge, Alfonso (1874-1938), 510, 514
Dini, Ulisse (1845-1918), 10, 35, 231-36, 365, 419, 446, 449, 497n, 503, 513, 516-18, 520n, 532-33, 535, 552
Dionisi, Antonio (1866-1931), 639
Dirichlet, P.G. Lejeune (1805-1859), 393
Dohrn, Felix Anton (1840-1909), 410
Donati, Luigi (1846-1932), 403
Doro, Egidio, 474-75
D'Ovidio, Enrico (1843-1933), XV, XXI, 4, 25n, 40, 65n, 231-32, 360, 363, 368n, 371, 419, 454, 488n, 490n, 495, 520n, 527-28, 533, 604, 669, 671, 674
Dumont, François, 393n

Einstein, Albert (1879-1955), XXV
Emery, Carlo (1848-1925), 344-45, 410, 503, 528-30, 614
Enneper, Alfred (1830-1885), 7-8
Enriques, Adriana, secondogenita di Federigo (1902-1994), XXIII, 509, 542
Enriques, Alma, primogenita di Federigo (1900-1991), XXIII, 459n, 462, 480, 542, 600
Enriques, famiglia, 252n
Enriques, Federico, nipote di Federigo, VI-VII
Enriques, Giacomo, padre di Federigo, XXI, 180, 332, 334, 400, 455, 602
Enriques, Giorgina, sorella di Federigo, 180, 283n, 294, 313, 315, 317, 448, 450, 453, 644

Enriques, Giovanni, terzogenito di Federigo (1905-1990), XXIV
Enriques, Lorenzo, nipote di Federico, VI-VII
Enriques, Luisa, *vedi* Coen Enriques, Luisa
Enriques, Matilde, *vedi* Coriat Enriques, Matilde
Enriques, Paolo, fratello di Federigo (1878-1932), 354-56, 398, 403, 405, 407, 409-10, 503, 505, 602
Enriques Castelnuovo, Elbina, XXII, 248-50, 252, 254, 257, 259-61, 263, 267, 273-79, 281-83, 286-87, 290-300, 302-04, 307-11, 313, 315, 317, 320-21, 324-27, 329-36, 338-45, 347-50, 352-65, 367-71, 373-75, 377, 379-81, 383-84, 386-87, 389-92, 394-95, 397-400, 403, 405, 407, 409, 412-14, 416-21, 424-26, 429-31, 435, 437, 442-44, 447, 450, 453-54, 458-60, 464, 466, 471-72, 476, 479-80, 483-84, 487-89, 491, 493, 495-97, 499-503, 505-06, 508-09, 512, 520-28, 533, 537-40, 542-43, 545-47, 575, 581, 602-03, 629, 631, 633, 637, 642-44
Euclide, 364, 551

Fabry, Eugène (n. 1856), 309
Fano, Gino (1871-1952), XVI, XXIX, 25, 77-78, 113, 115, 130-32, 145, 147, 163, 166, 170, 172, 177, 179-80, 189, 193, 195, 206, 232, 234, 240, 244, 255, 257, 262, 272, 275, 322-24, 326, 329-31, 335-36, 352, 360, 366-68, 398-99, 401, 411-12, 414, 417-19, 431, 437, 472n, 475, 478, 495, 527, 532, 548, 553n, 562, 611, 648
Farini, Luigi Carlo (1812-1866), 403n, 422n, 425
Fàvaro, Antonio (1847-1922), 509, 524
Ferrando, Giovanni, 147-48, 231, 284, 305
Fiedler, Otto (1832-1912), 310-11
Finzi, Cesare (1836-1908), 496
Fiorini, Matteo (1827-1901), 229, 275, 278, 281, 421
Fleischer, Hermann, 483n, 496n, 515
Fouret, Georges (1845-1921), 312
Frajese, Attilio (1902-1985), XXVII
Francesconi, Stefano, 422n
Fubini, Guido (1879-1943), 472

Galeotti, Gino (1867-1921), 545
Gallucci, Generoso (1874-1941), 472
Galois, Evariste (1811-1832), 337, 345
Gario, Paola, VI, 12n, 80n, 161n, 170n, 181n, 184n, 300n, 304n, 494n
Gattinoni, 354n
Gauss, Karl Friedrich (1777-1855), 430
Genna, Pietro, 490n
Gerbaldi, Francesco (1858-1934), 65n, 336n, 368, 371-72, 386-87, 458, 643
Gianturco, Emanuele (1857-1907), 251-53, 259, 279, 284-85, 290-92, 296, 300, 303-05, 311-12, 314, 317, 348n
Giardina, Andrea (1875-1948), 639
Giolitti, Giovanni (1842-1928), XXIII, 53n, 538n
Giudice, Francesco (1855-1936), 368n, 512-13
Giudice, *vedi* Del Giudice, Modestino
Gournerie, Jules de la, (1814-1883), 546
Goursat, Edouard (1858-1936), 58, 65
Grandi, 66
Grassi, Giovanni Battista (1854-1925), 489, 503, 534, 677
Gribodo, 672-73
Grothendieck, Alexandre (n. 1928), XII, XVIII
Guarducci, Federigo (1851-1931), 426-27
Guccia, Giovanni Battista (1855-1914), XXI, 10, 65n, 74, 93-94, 117, 145, 147, 151, 212, 320-21, 336n, 391, 458, 480, 545, 622, 626, 652, 669-73

Hadamard, Jacques (1865-1963), 493
Halphen, Georges (1844-1889), 62, 66, 280-81, 353-54, 410-11, 575-77, 592n-93n, 652
Hamel, Georg (1877-1954), 486-87
Hankel, Hermann (1839-1873), 150
Helmholtz, Hermann von (1821-1894), 261, 264-65, 364
Hermann, 366
Hermite, Charles (1822-1901), 313
Hilbert, David (1862-1943), XVII, 154-55, 398n, 426-32, 453-54, 474-75, 486, 522, 537, 551
Humbert, Georges (1859-1921), XI, XVIII, XXIX, XXXV, 11-12, 36-37, 84, 148, 159, 164n, 166, 170, 177, 180-82, 238, 361-62, 387-88, 393-94, 444-45, 491, 493, 558, 570, 595n-96n, 654-56

Hurwitz, Adolf (1859-1919), 31, 49-50, 52-54, 138, 310, 341, 343, 466, 517, 522-23, 585

Imbriani, Paolo Emilio (1808-1877), 424-25
Ivo, zia di Castelnuovo, 74

Jahnke, Niels, VI
Jonquières, Jean de (1835-1901), 291, 371, 383, 475, 477, 543
Jordan, Camille (1838-1921), 194, 429-30
Joung, *vedi* Chrisholm Young, Grace e Young, William Henry
Jung, Giuseppe (1845-1926), 308, 474, 478, 480-81

Kant, Immanuel (1724-1804), 264
Kantor, Seligmann (1857-1903), 30, 204, 216-17, 361, 466-67, 470-71, 664-65, 674-75
Kepler, Johannes (1571-1630), 467
Killing, Wilhelm (1847-1923), 428-29
Klein, Felix, (1849-1925), XVII, 25n, 90, 151-54, 364, 401-02, 404, 406, 408, 419-20, 458, 483, 496, 504-05, 515, 536, 541, 627, 671
Kneser, Adolf (1862-1930), 341-42, 544
Kobb, Gustav (n. 1863), 101-02, 110, 130-31, 187-88, 335, 410-11, 551-52
Kronecker, Leopold (1823-1891), 45-47, 49, 51, 57, 59, 62, 93, 338, 340-41, 487, 674, 676
Kummer, Ernst Eduard (1810-1893), 361-62, 543
Küpper, Karl Joseph (1828-1900), 653

Lacaze, H., 486-87, 491n
Larmor, Joseph (1857-1942), 502
Lauricella, Giuseppe (1867-1913), 348n
Lavagna, Giovanni Maria (1812-1870), 35-36
Lazzeri, Giulio (1861-1935), 66-67, 458
Legendre, Adrien-Marie (1752-1833), 364
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), 364
Le Paige, Constantin (1852-1929), 322
Levi, Alberto, 235
Levi, Beppo (1875-1961), XVI, 360, 363, 405n, 410-11, 472n, 476-78, 548-52, 625n
Levi, Isaia, marito di Nella Coen, 527
Levi Castelnuovo, Emma, madre di Guido, XXI, 283n
Levi-Civita, Tullio (1873-1941), XXIV, XXXII, 148, 152-54, 191, 205, 235-36, 240-41, 244, 268-70, 291-92, 311, 313, 324, 331, 343, 348-49, 365-66, 368, 388, 458, 480-81, 488, 503n, 516-18, 524, 530n, 532-33, 535-37, 539-40, 600, 629, 643
Levi Della Vida, Amelia, zia di Castelnuovo, 64, 74
Lie, Sophus (1842-1899), 46-47, 154, 171, 179, 193, 232, 256, 364, 406, 505, 660
Lindemann, Ferdinand von (1852-1939), 361
Lippmann, Gabriel (1845-1921), 643
Lobacevskij, Nikolaj I. (1793-1856), 364
Lobatschewsky, *vedi* Lobacevskij
Lojacono, Domenico, 490n
Lombardo Radice, Lucio (1916-1983), XIXn
Longchamps, Gaston de (1873-1897), 431-32
Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), 502
Loria, Gino (1862-1954), 47n, 274, 355, 383, 397, 458, 484, 534-35, 541, 673, 676
Luciani, Luigi (1842-1919), 410
Lüroth, Jacob (1844-1910), 333, 346-47, 399
Luzzatti, Amelia, zia di Castelnuovo, 283n
Luzzatti, Luigi (1841-1927), padre di Tullio, 283n, 397, 489, 519
Luzzatti, Tullio, marito di Giorgina Enriques, 12, 180, 282-83, 289-90, 294, 296, 337, 339, 396-98

Macaulay, Francis Sowerby (1862-1937), 311, 350
Maccaferri, Eugenio (1870-1953), 177, 222-23, 309
Macdonald, Hector Munroe (1865-1935), 502
Mach, Ernst (1838-1916), 503-05
Maggi, Gian Antonio (1856-1937), 348n, 503
Magini, Ranieri (1875-1968), 495-96
Maisano, Giovanni (1851-1929), 308
Marcolongo, Roberto (1862-1943), 348n, 353-54

Maroni, Arturo (1878-1966), 503-04
Martinetti, Vittorio (1859-1936), 417, 458, 489, 509, 537-38, 541, 543-44, 552
Masotto, Guido, 604n
Matteotti, Giacomo (1885-1924), xxvi
Mattirolo, Oreste (1856-1947), 415, 421
Meyer, Wilhelm Franz (1856-1934), 272, 316n, 460, 466, 470, 631, 644
Ministro dell'Istruzione Pubblica, 40-41, 46, 52, 349, 361, 372, 386-87, 402-03, 410, 416-25, 432, 434-35, 446, 449, 458, 488-90, 496, 502, 514, 516-17
Mittag-Leffler, Gösta (1846-1927), xxxii, 308, 408-10, 493-97
Möbius, Augustus Ferdinand (1790-1868), 149-51, 352, 429
Monge, Gaspard (1746-1818), 528
Montesano, Domenico (1863-1930), 34, 38n, 66, 68n, 72, 172n, 245, 275n, 341-42, 354, 371, 424, 458, 471-72, 537-38, 625n, 664, 674
Monticolo, 304
Morera, Giacinto (1856-1909), 348n, 503n
Morini, 350
Mumford, David (n. 1937), xii
Murri, Augusto (1841-1932), 396
Mussolini, Benito (1883-1945), xxv-xxvi

Nardi Dei, Angiolo (1833-1913), 365
Nasi, Nunzio (1850-1935), 518-21, 538-39
Nasini, Raffaello (1854-1931), 488, 539
Nastasi, Pietro, vi, 494n
Niccoletti, Onorato (1872-1929), 431, 533, 535, 542
Nicoletti, *vedi* Niccoletti, Onorato
Noether, Max (1882-1935), viii-x, xvii, xx, xxix, xxxii, 6, 13-14, 21, 24, 47, 50, 79-81, 85, 87-88, 90, 93-95, 103, 114, 117, 119-27, 130-32, 136-38, 153, 155n, 160-61, 164, 178, 196, 217-19, 221-23, 238-40, 243, 245-48, 250, 265n, 297, 303-04, 325-26, 328, 333, 336, 342, 346-47, 387-88, 399, 404-05, 410-12, 440-41, 449-51, 453-54, 458, 470, 475, 477n, 578-79, 608, 614-15, 620-21, 629, 652, 656-58, 664-65, 675
Nöther, *vedi* Noether, Max

Orlando, Vittorio Emanuele (1860-1952), 537-39, 542-45, 625n, 648, 673-74

Padoa, Alessandro (1868-1937), 240, 270, 432-433, 458, 484
Padova, Ernesto (1845-1896), 24, 251
Painlevé, Paul (1863-1933), xviii, 49-50, 238, 323-25, 328, 330, 333, 346-47, 361-62, 491, 493, 571, 602-03, 623-25, 644
Palatini, Francesco (1865-1940), 534-35
Panebianco, Ruggero (1848-1930), 368
Pannelli, Marino (1855-1934), 472n, 502, 673
Pappo di Alessandria (300-350 d.C.), 357-59, 551
Pascal, Ernesto (1865-1940), 224, 240-41, 349, 408, 490n, 524, 529, 532, 534, 551n
Pasch, Moritz (1843-1930), 76-78, 426-27
Peano, Giuseppe (1858-1932), 66, 429-30, 484, 527, 629
Pell, John (1611-1685), 393
Peschka, Gustav Adolf von (1830-1903), 134-35
Petersen, Julius Peter Christian (1839-1910), 48
Pfaff, Johann Friedrich (1765-1825), 159
Picard, Ch. Emile (1856-1941), viii-ix, xii, xviii, xxiii-xxiv, xxix, xxxv, 5, 62-63, 66, 93-94, 117, 122n, 124, 137-39, 143-44, 146-47, 150, 157-60, 166, 170, 172, 177, 186, 200-02, 238-42, 255-57, 294, 312, 314-15, 325-28, 350-51, 356, 387, 405, 407n, 409, 439, 441, 451, 453-54, 458, 463, 467n, 470-73, 490-91, 493, 526-27, 533, 555-56, 558, 560-61, 568-69, 571-72, 574, 577-78, 580, 585-86, 588n, 594-601, 608-09, 613-15, 619-20, 623, 627n, 630-33, 635-36, 640, 643-44, 654-55, 659-63, 665-68
Piccini, Augusto (1854-1905), 274
Pieri, Mario (1860-1913), 25n, 39-42, 44-46, 48, 52, 57n, 63-64, 66-68, 124, 155, 174, 204, 206, 228, 231n, 275, 354, 418n, 437, 458, 509, 541, 625n, 674
Pincherle, Salvatore (1853-1936), xxv, 35, 37-40, 64, 66-67, 69, 105, 127, 153, 156, 175, 178, 205-10, 212, 215, 217, 219-20, 225, 229-30, 233-34, 236, 335, 348, 350, 363, 368n, 370-73, 375, 383, 387, 401, 411-13, 415, 421-25, 431, 438, 457-58, 481, 503-04, 529, 629, 640

Pio IX, papa (1792-1878), xxi
Pirondini, Geminiano (1857-1914), 516
Pitré, Giuseppe (1841-1916), 360n
Pittarelli, Giulio (1852-1934), 45, 277n, 486, 502, 509, 523, 537-38, 541, 543-44
Pluecker, Julius (1801-1868), 538
Poggi, 421
Poincaré, Henri (1854-1912), xii, xviii-xix, 60-61, 137-38, 294, 313, 327, 343, 349, 492, 503-06, 625
Poncelet, Jean-Victor (1788-1867), 543
Porro, Francesco (1861-1937), 415, 457
Predella, Pilo (1863-1939), 179-80
Preside della Facoltà di Scienze di Bologna, 40, 147
Pugliese, Angelo (n. 1866), 396-98
Puntoni, Vittorio (1859-1926), 284-85, 290, 296, 305, 314, 415, 417-18, 420-21, 423, 432-34, 673

Raina, *vedi* Rajna, Michele
Rajna, Michele (1854-1920), xxxii, 457n, 510, 514, 519-20
Rava, Luigi (1860-1938), 403, 423, 433
Razzaboni, Amilcare (1855-1920), 37, 67-68
Rebeschini, C., 480
Reina, Vincenzo (1862-1919), 6, 156, 180, 206, 208, 281
Rettore dell'Università di Bologna, 70
Rettore dell'Università di Cagliari, 518
Rettore dell'Università di Napoli, 178n
Rettore dell'Università di Roma, 242n
Reye, Theodor (1838-1919), 224, 475n
Riccati, Iacopo Francesco (1676-1754), 179, 315
Ricci Curbastro, Gregorio (1853-1925), 313, 368, 458, 490n, 524, 529, 532, 534
Richiardi, 215
Riemann, G.F. Bernhard (1826-1866), ix, 18n, 52n, 54, 100, 121, 141, 191, 264, 278, 294, 303, 310, 320-21, 328, 341, 347, 364-66, 381, 443-44, 447, 450, 494, 549, 572
Righi, Augusto (1850-1920), 40, 229, 415, 418-19, 423-24, 467, 543
Rignano, Eugenio (1870-1930), xxiv, 540, 639-40
Rindi, Scipione (1859-1952), 67
Roch, Gustav (1839-1866), ix, 18n, 100, 121, 141, 191, 278, 310, 320-21, 381, 443-44, 447, 450, 494
Rohn, Karl Friedrich Wilhelm (1855-1920), 410-11
Roiti, Antonio (1843-1921), 524
Rositi, 489
Rossi, 423-24
Rovighi, Alberto (n. 1856), 396
Rudinì, Antonio Starabba di (1839-1908), xxii, 189n
Ruffini, Ferdinando (1823-1908), 220, 225, 229

Saporetti, Antonio (1821-1900), 452
Savoja, 672
Schilling, Georg Friedrich (1868-1950), 152n
Schläfli, Ludwig (1814-1895), 458
Schönflies, Arthur (1853-1866), 358n, 368-69, 401n
Schoute, Pieter Hendrik (1846-1923), 309n
Schubert, Hermann (1848-1911), xvii
Schur, Friedrich (1856-1932), 408-09, 458
Scorza, Gaetano (1876-1939), 440, 460
Seeber, 407
Segre, Adriana, 348n
Segre, Corrado (1863-1924), vi, xv-xvi, xix, xxi-xxii, xxix, xxxii, 3-4, 7, 11-12, 24-25, 27-28, 31, 33-36, 39, 41, 44-46, 49, 51, 57, 59, 61, 63-67, 72, 74, 77, 79-80, 85-86, 88n, 94, 96, 101-04, 110, 128, 131, 148, 150, 155, 160, 165, 169-70, 174, 176-77, 180-81, 183-84, 187, 190, 193, 195, 198, 209, 220, 222, 224, 230-31, 234, 240-41, 248, 262, 275n, 300, 303-04, 312-14, 334-38, 340-41, 345, 348, 350-51, 355, 362-64, 368, 401n, 405n, 408, 410-11, 413-15, 417, 419, 421, 437-40, 450-52, 455-58, 460, 472n, 475-81, 488, 490, 497n, 503-04, 520, 526-27, 529-33, 541, 544, 546, 548-49, 551-52, 555-56, 563, 570-71, 604, 611, 613, 616, 622-24, 640, 648, 669-78
Sella, Alfonso (1865-1907), 512, 641
Serre, Jean-Pierre (n. 1926), xviii
Severi, Francesco (1879-1961), 488, xii-xiii, xvi, xviii, xxiv-xxv, xxvii, 490, 496-97, 503-06, 511-12, 522-26, 536-39, 541-42,

547-48, 552, 554-56, 560-62, 569, 571, 576, 588, 594-95, 598-99, 605-06, 619-21, 623-28, 630-33, 639, 642-44, 648, 667-68
Severini, Carlo (1872-1951), 109
Sforni Levi, signora, 17
Siacci, Francesco (1839-1907), 28, 348n, 454, 516-17, 602, 640
Silberstein, Ludwick (1872-1948), 522
Simart, Georges (n. 1846), XVIIIn, XXIII-XXIV, 350-51, 407n, 409n, 451n, 453-54, 491n, 527n, 561n, 614n, 636n, 640n, 644n
Simon, Max (1844-1918), 357, 458
Simplicio, soprannome, 670
Somigliana, Carlo (1860-1955), 183n, 234, 503n
Spalazzi, Filippo, 277, 279
Spencer, Herbert (1820-1903), 261, 264
Staudt, K.G. Christhian von (1798-1867), 74-75, 124, 150-51, 429
Stokes, George Gabriel (1819-1903), 399
Study, Eduard (1862-1922), 460

Taylor, Brook (1685-1731), 252
Tedeschi, Enrico (n. 1860), 517-18
Tedesco, conoscente di Luisa Enriques, 366
Tedone, Orazio (1870-1922), 30, 32, 235, 240, 244, 348n
Terracini, Alessandro (1889-1968), 195n, 368n, 401n, 531n, 648
Tisserand, François-Félix (1845-1896), 468
Tizzoni, Guido (1853-1932), 220, 231, 294, 296, 396
Tocco, Felice (1845-1911), 531-32
Tonelli, Alberto (1849-1921), 348, 472, 481, 527n

Ugolini, Giulio, 490n
Umberto I, re d'Italia (1844-1900), XXIII

Vailati, Giovanni (1863-1909), 484
Valiron, Georges (1884-1954), 643
Valleron, *vedi* Valiron
Vamba, *vedi* Bertelli, Luigi
Van der Waerden, Bartel Leenert (1903-1996), XVIII
Vannini, Tommaso, 534
Vecchi, Stanislao (1843-1903), 528
Venezian, Giacomo (1861-1915), 433
Venturi, Adolfo (1852-1914), 457, 481, 519
Veronese, Giuseppe (1854-1917), XV, XXIX, 14-16, 18-20, 25-26, 33-34, 40, 45, 57, 60, 64, 66, 68, 86, 99, 131-32, 159, 170, 260, 262, 275n, 313, 357, 359, 363-66, 428-29, 444-45, 458, 472, 478-79, 484, 520n, 524, 529-30, 532-44, 546, 602, 619, 625n, 677
Vessiot, Ernest (1865-1952), 191
Villari, Pasquale (1826-1917), 516, 530-32, 678
Visalli, Pietro, 311
Vitali, Giuseppe (1875-1932), 426-27, 446n
Viterbi, Adolfo (1873-1917), 472
Vittorio Emanuele II, re d'Italia (1820-1878), XXI
Vivanet, Filippo (1836-1905), 489, 528n
Vivanti, Giulio (1859-1949), 209-10, 213, 234n
Volterra, Vito (1860-1940), XXVI, 10, 24, 27-30, 32, 35, 37-40, 42, 50, 52-53, 55, 58, 64, 146, 193, 232, 240-41, 348n, 414-15, 421, 449-50, 457, 459-60, 490n, 503n, 506-07, 510, 517, 529, 534, 539, 602, 604, 641, 669, 671

Weierstrass, Karl (1815-1897), 662
Wiener, L. Christian (1826-1896), 135, 138, 140-41, 190n
Wiman, Anders (1865-1959), 277, 305, 312-13, 321-22, 383-84
Woess, Wolfgang, VI
Wundt, Wilhelm (1832-1920), 261, 264, 321

Young, William Henry (1863-1942), 365-66, 368

Zanardelli, Giuseppe (1826-1903), 518n
Zariski, Oscar (1899-1986), XVIII
Zermelo, F.F. Ernst (1871-1956), 629
Zeuthen, Hieronymus G. (1839-1920), 13-14, 50, 117, 350, 356, 359, 410-11, 439n, 458, 628
Zia di Livorno, 80
Zia Rosa, 602
Zii di Firenze, 6
Zio di Roma, 6

ELENCO CRONOLOGICO DELLE LETTERE

Il primo numero a sinistra individua la lettera o, se asteriscato, la cartolina postale; accanto, in corsivo, il numero di pagina corrispondente. Il simbolo C. contrassegna le missive di Castelnuovo. Tra parentesi quadre sono racchiuse le indicazioni di data integrate dai curatori.

1892

1.	*3*		6.11
2.	*4*	Torino	9.11
3.	*4*	Firenze	25.11

1893

4.*	*5*	Firenze	31.3
5.	*5*		18.6
6.	*6*		21.6
7.	*8*		23.6
8.	*9*		6.7
9.	*10*		9.7
10.	*12*		11.7
11.	*14*		15.7
12.*	*15*	Livorno	15.7
13.	*15*		21.7
14.	*16*		24.7
15.	*18*		27.7
16.	*20*		5.8
17.	*22*		19.8
18.	*22*		28.8
19.	*24*		8.9
20.	*25*	Firenze	22.9
21.*	*28*	Firenze	24.9
22.*	*28*	Firenze	3.10
23.*	*29*	Firenze	13.10
24.*	*29*	Firenze	17.10
25.*	*30*	Firenze	18.10
26.	*30*		23.10
27.*	*32*	Firenze	26.10
28.	*33*		4.11
29.*	*34*	Firenze	5.11
30.	*35*		7.11
31.*	*36*	Firenze	8.11
32.*	*37*	Firenze	9.11
33.	*37*		11.11
34.*	*38*	Firenze	14.11
35.*	*39*	Firenze	20.11
36.	*39*		20.11
37.	*41*		22.11
38.*	*44*	Firenze	23.11
39.*	*44*	Torino	24.11
40.*	*44*	Torino	26.11
41.	*45*		30.11
42.	*47*		5.12
43.	*48*		9.12
44.	*51*		12.12
45.	*53*		15.12
46.*	*55*	Torino	16.12
47.	*55*		18.12
48.	*57*		21.12
49.	*59*		25.12
50.	*59*		29.12

1894

51.	*61*		1.1
52.	*64*		4.1
53.	*66*		6.1
54.	*67*		9.1
55.*	*69*	Torino	10.1
56.*	*69*	Torino	11.1
57.*	*70*	Torino	12.1
58.*	*70*	Bologna	17.1
59.*	*71*	Bologna	18.1
60.	*71*	Bologna	20.1

61.*	*72*	Bologna	25.1	111.*	*125*	Castiglione	22.7
62.	*73*	Firenze	29.1	112.*	*125*	Castiglione	28.7
63.*	*75*	Bologna	17.2	113.	*126*		1.8
64.	*75*	Bologna	19.2	114.*	*127*	Castiglione	2.8
65.	*77*	[Bologna]	22.2	115.*	*127*	Castiglione	13.8
66.*	*78*	Bologna	27.2	116.*	*128*	Castiglione	18.8
67.	*79*	Bologna	8.3	117.*	*128*	Castiglione	23.8
68.*	*80*	Firenze	16.3	118.	*129*		24.8
69.	*81*		30.3	119.*	*130*	Castiglione	29.8
70.	*81*		1.4	120.*	*130*	Castiglione	31.8
71.	*82*	Bologna	2.4	121.*	*131*	Castiglione	8.9
72.	*83*	Bologna	3.4	122.	*131*		12.9
73.*	*84*	Bologna	4.4	123.*	*132*	Castiglione	15.9
74.	*84*	Bologna	5.4	124.	*133*		21.9
75.*	*88*	Bologna	7.4	125.*	*134*	Castiglione	25.9
76.*	*89*	Bologna	8.4	126.*	*135*	Firenze	3.10
77.	*89*		9.4	127.*	*135*	Firenze	7.10
78.*	*90*	Bologna	12.4	128.	*136*		8.10
79.	*91*		12.4	129.	*137*		16.10
80.*	*92*	Bologna	13.4	130.*	*139*	Firenze	17.10
81.	*93*		14.4	131.*	*139*	Firenze	18.10
82.*	*95*	Bologna	16.4	132.	*140*		20.10
83.*	*95*	Bologna	20.4	133.*	*141*	Firenze	22.10
84.	*96*		21.4	134.*	*142*	Bologna	24.10
85.*	*97*	Bologna	24.4	135.*	*142*	Bologna	27.10
86.	*98*	Bologna	25.4	136.*	*143*	Firenze	30.10
87.*	*99*	Bologna	27.4	137.*	*143*	Firenze	1.11
88.	*99*		30.4	138.*	*144*	Firenze	3.11
89.	*101*		3.5	139.*	*144*	Firenze	4.11
90.	*102*		5.5	140.*	*145*	Firenze	6.11
91.	*103*		8.5	141.	*146*		8.11
92.*	*105*	Bologna	11.5	142.*	*147*	Firenze	11.11
93.*	*105*	Bologna	14.5	143.*	*147*	Bologna	14.11
94.	*106*		16.5	144.*	*148*	Bologna	15.11
95.*	*108*	Bologna	17.5	145.*	*149*	Bologna	16.11
96.	*108*		19.5	146.*	*149*	Bologna	17.11
97.*	*110*	Bologna	23.5	147.*	*150*	Bologna	19.11
98.*	*110*	Bologna	2.6	148.*	*150*	Bologna	20.11
99.*	*111*	Firenze	3.6	149.*	*151*	Bologna	23.11
100.	*112*		9.6	150.*	*151*	Bologna	27.11
101.*	*113*	Firenze	14.6	151.	*152*	Bologna	29.11
102.*	*113*	Firenze	17.6	152.	*155*		1.12
103.*	*114*	Bologna	19.6	153.	*156*		3.12
104.*	*114*	Bologna	24.6	154.	*157*		[s.d.]
105.	*115*		25.6	155.*	*158*	Bologna	11.12
106.*	*116*	Firenze	4.7	156.*	*159*	Firenze	[15.12]
107.	*117*	Castiglione	13.7	157.*	*160*	Firenze	24.12
108.	*122*		14.7	158.*	*160*	Firenze	26.12
109.*	*123*	Castiglione	16.7	159.*	*161*	Firenze	27.12
110.	*123*		17.7	160.*	*161*	Firenze	29.12

1895

161.*	*162*	Firenze	3.1
162.*	*163*	Firenze	4.1
163.*	*163*	Firenze	7.1
164.*	*164*	Bologna	11.1
165.*	*164*	Bologna	13.1
166.*	*165*	Bologna	16.1
167.*	*165*	Bologna	18.1
168.*	*166*	Bologna	20.1
169.*	*167*	Bologna	23.1
170.	*167*		[s.d.]
171.*	*169*	Bologna	26.1
172.*	*169*	Bologna	28.1
173.*	*170*	Bologna	30.1
174.*	*170*	Bologna	31.1
175.	*171*		31.1
176.*	*172*	Bologna	1.2
177.*	*173*	Bologna	2.2
178.	*173*		3.2
179.	*175*		4.2
180.*	*176*	Bologna	5.2
181.*	*176*	Bologna	6.2
182.*	*177*	Bologna	7.2
183.*	*177*	Firenze	13.2
184.*	*178*	Firenze	15.2
185.	*179*		28.2
186.*	*180*	Firenze	3.3
187.*	*181*	Bologna	9.3
188.*	*181*	Bologna	13.3
189.*	*182*	Bologna	14.3
190.*	*183*	Bologna	16.3
191.*	*183*	Bologna	19.3
192.*	*184*	Bologna	22.3
193.*	*184*	Bologna	27.3
194.*	*184*	Firenze	28.3
195.*	*185*	Firenze	1.4
196.*	*185*	Firenze	5.4
197.	*185*		9.4
198.*	*186*	Firenze	13.4
199.	*187*		[14.4]
200.	*188*		16.4
201.*	*189*	Firenze	20.4
202.*	*190*	Bologna	3.5
203.*	*190*	Bologna	7.5
204.*	*191*	Bologna	14.5
205.	*191*		[15.5]
206.*	*192*	Bologna	19.5
207.*	*193*	Firenze	23.5
208.*	*193*	Firenze	28.5
209.	*194*		30.5
210.	*195*		4.6
211.	*196*		6.6
212.*	*198*	Bologna	14.6
213.*	*198*	Bologna	16.6
214.*	*199*	Bologna	18.6
215.*	*199*	Bologna	20.6
216.*	*200*	Bologna	22.6
217.*	*200*	Bologna	26.6
C.	*200*	Venezia	14.7
C.	*203*	Venezia	5.8
C.	*204*		[s.d.]
218.*	*205*	Firenze	23.10
219.*	*206*	Bologna	25.10
220.	*206*	Bologna	28.10
221.*	*208*	Bologna	30.10
222.	*208*		1.11
223.	*208*		5.11
224.*	*209*	Firenze	7.11
225.	*209*	Bologna	9.11
226.	*210*	Bologna	11.11
227.	*212*		13.11
228.	*213*		14.11
229.	*214*		16.11
230.	*215*		17.11
231.*	*217*	Bologna	18.11
232.	*218*		20.11
233.	*221*		22.11
234.	*223*		24.11
235.*	*225*	Bologna	24.11
236.	*225*		28.11
237.*	*227*	Bologna	28.11
238.	*227*		28.11
239.	*228*		30.11
240.	*229*		1.12
241.	*230*		2.12
242.	*231*		4.12
243.*	*232*	Bologna	6.12
244.*	*232*	Bologna	10.12
245.*	*233*	Bologna	11.12
246.*	*233*	Bologna	14.12
247.*	*233*	Firenze	17.12
248.*	*234*	Firenze	27.12
249.	*234*		28.12
250.	*235*		31.12

1896

251.*	*236*	Firenze	3.1
252.*	*236*	Firenze	7.1
253.*	*237*	Firenze	9.1

254.*	*237*	Bologna	10.1
255.*	*238*	Bologna	12.1
256.	*238*		13.1
257.*	*239*	Bologna	15.1
258.	*239*		17.1
259.*	*241*	Bologna	20.1
260.*	*241*	Bologna	21.1
261.*	*242*	Bologna	25.1
262.*	*242*	Bologna	29.1
263.*	*243*	Bologna	30.1
264.	*243*		31.1
265.*	*245*	Bologna	2.2
266.*	*245*	Bologna	4.2
267.*	*246*	Firenze	9.2
268.	*247*		22.2
269.	*248*		26.2
270.*	*249*	Bologna	28.2
271.*	*249*	Bologna	2.3
272.*	*250*	Bologna	5.3
273.*	*250*	Bologna	10.3
274.	*251*		11.3
275.*	*252*	Bologna	13.3
276.*	*252*	Bologna	14.3
277.*	*253*	Bologna	18.3
278.*	*253*	Bologna	19.3
279.	*254*		12.4
280.*	*255*	Bologna	15.4
281.*	*255*	Bologna	20.4
282.	*256*		23.4
283.	*257*		26.4
284.	*258*		1.5
285.	*259*		2.5
286.	*260*		4.5
287.	*261*		5.5
288.*	*263*	Bologna	5.5
289.	*263*		8.5
290.*	*265*	Bologna	9.5
291.	*265*		10.5
292.	*266*		12.5
293.	*267*		14.5
294.*	*268*	Bologna	17.5
295.	*269*		18.5
296.	*270*		19.5
297.	*270*		23.5
298.*	*272*	Bologna	31.5
299.	*272*		9.6
300.	*273*		10.10
301.	*274*		23.10
302.	*274*		5.11
303.*	*276*	Bologna	5.11
304.	*276*		7.11
305.*	*278*	Bologna	8.11
306.	*278*		11.11
307.	*279*		13.11
308.	*282*		14.11
309.	*283*	Bologna	16.11
310.	*284*		21.11
311.	*285*		21.11
312.	*286*		22.11
313.*	*287*	Bologna	22.11
314.	*288*		24.11
315.	*290*		26.11
316.*	*291*	Bologna	27.11
317.	*292*		28.11
318.	*293*		30.11
319.	*295*		4.12
320.*	*296*	Bologna	5.12
321.	*297*		7.12
322.	*298*		8.12
323.	*300*		9.12
324.	*300*		11.12
325.	*302*		16.12
326.	*303*		30.12
327.	*303*		31.12

1897

328.	*304*		2.1
329.	*305*		3.1
330.	*305*		7.1
331.	*307*		9.1
332.*	*308*	Bologna	11.1
333.	*308*		12.1
334.*	*309*	Bologna	13.1
335.*	*310*	Bologna	15.1
336.*	*310*	Bologna	23.1
337.*	*311*	Bologna	23.1
338.*	*311*	Bologna	26.1
339.	*312*		29.1
340.*	*313*	Bologna	1.2
341.	*314*		4.2
342.*	*315*	Bologna	5.2
343.*	*316*	Bologna	7.2
344.	*316*		7.2
345.*	*317*	Bologna	10.2
346.*	*317*	Bologna	12.2
347.	*318*		13.2
348.	*318*		[s.d.]
349.	*319*		16.2

350.	*320*		18.2
351.	*321*		[19.2]
352.	*322*		[s.d.]
353.	*323*		[s.d.]
354.	*323*		26.2
355.*	*324*	Bologna	10.3
356.	*325*		16.3
357.	*326*		27.3
358.	*327*		[s.d.]
359.*	*327*	Bologna	9.4
360.	*328*		[s.d.]
361.	*329*		22.4
362.*	*330*	Bologna	27.4
363.*	*330*	Bologna	3.5
364.*	*331*	Bologna	7.5
365.	*331*		13.5
366.*	*332*	Bologna	14.5
367.	*332*		16.5
368.*	*334*	Bologna	19.5
369.	*334*		20.5
370.*	*336*	Bologna	24.5
371.*	*336*	Bologna	26.5
372.	*337*		29.5
373.	*338*		[s.d.]
374.	*338*		[s.d.]
375.	*340*		5.6
376.*	*341*	Bologna	7.6
377.*	*341*	Bologna	12.6
378.*	*342*	Bologna	15.6
379.*	*342*	Bologna	20.6
380.*	*343*	Bologna	22.6
381.*	*343*	Bologna	25.6
382.	*344*		1.7
383.	*345*		23.7
384.	*347*		[s.d.]
385.	*347*		6.11
386.*	*349*	Bologna	9.11
387.	*349*		26.11
388.	*350*		4.12
389.	*351*		6.12
390.	*352*		9.12
391.	*353*		21.12
392.*	*354*	Firenze	25.12
393.	*355*		29.12

1898

394.	*355*		2.1
395.	*356*		4.1
396.	*356*		6.1
397.	*357*		9.1
398.	*358*		[s.d.]
399.	*359*		21.1
400.*	*359*		30.1
401.	*360*		10.2
402.	*360*		18.2
403.	*361*		7.3
404.	*362*		13.3
405.	*363*		[s.d.]
406.*	*364*	Bologna	27.3
407.	*365*		4.4
408.	*365*		19.4
409.	*367*		28.5
410.	*367*		27.8
411.	*368*		26.10
412.	*369*		29.10
413.	*370*		3.11
414.	*371*		8.11
415.	*373*		13.11
416.	*374*		14.11
417.	*374*		17.11
418.	*376*		20.11
419.	*377*		23.11
420.*	*379*	Bologna	27.11
421.	*380*		28.11
422.	*382*		30.11
423.	*384*		[s.d.]
424.	*384*		4.12
425.	*387*		6.12
426.	*388*		[s.d.]
427.	*389*		14.12
428.	*390*		16.12
429.	*392*		[s.d.]
430.	*393*		22.12
431.	*394*		25.12

1899

432.	*395*		3.1
433.	*396*		12.1
434.	*397*		18.1
435.	*398*		28.1
436.	*398*		[s.d.]
437.*	*399*	Bologna	8.2
438.	*400*		26.2
439.	*401*		2.3
440.	*402*		17.3
441.	*403*		21.3
442.	*404*		28.3
443.	*405*		5.4

444.	*407*		7.4
445.	*408*		12.4
446.	*408*		14.4
447.	*409*		[s.d.]
448.	*411*		28.4
449.	*412*		1.5
450.	*413*		[s.d.]
451.	*414*		15.5
452.	*416*		18.5
453.	*417*		22.5
454.	*418*		25.5
455.	*419*		[s.d.]
456.	*420*		6.6
457.	*421*		9.6
458.	*422*		[s.d.]
459.	*423*		18.6
460.	*424*		[s.d.]
461.	*425*		28.7
462.	*426*		21.9
463.	*427*		2.10
464.	*429*		12.10
465.	*430*		31.10
466.	*431*		3.11
467.	*432*		13.11
468.	*432*		14.11
469.	*434*		16.11
470.	*435*		19.11
471.	*436*		16.12

1900

472.	*437*		5.1
473.	*439*		6.1
474.	*440*		8.1
475.	*441*		13.1
476.	*442*		15.1
477.	*443*		28.1
478.	*445*		2.2
479.	*446*		12.2
480.	*448*		17.2
481.	*448*		8.3
482.	*448*		[s.d.]
483.	*450*		15.3
484.	*452*		21.3
485.	*453*		30.3
486.	*454*		2.4
487.	*454*		16.4
488.*	*456*	Bologna	16.4
489.	*456*		18.4
490.	*458*		[s.d.]
491.	*458*		1.5
492.	*459*		19.6
493.	*460*	Cutigliano	30.8
494.	*461*		5.9
495.	*462*		11.9
496.	*463*		[s.d.]
497.	*464*		[s.d.]
498.*	*465*	Livorno	19.9
499.	*466*		24.11
500.	*467*		1.12
501.	*468*	Firenze	18.12

1901

502.	*469*		8.1
503.*	*470*	Bologna	16.1
504.	*470*		31.1-1.2
505.	*472*		[s.d.]
506.	*473*		18.3
507.	*474*		22.3
508.	*474*		1.4
509.	*475*		5.4
510.	*476*		7.4
511.	*478*		21.4
512.	*478*		26.4
513.	*479*		1.5
514.*	*480*	Bologna	9.5
515.	*480*		17.5
516.	*481*		24.6
517.	*481*		30.6
518.	*482*	Levanto	23.8
519.	*483*		27.8
520.	*484*		30.8
521.	*485*		30.10
522.	*486*		21.11
523.	*487*		5.12
524.	*488*		18.12
525.	*489*		21.12

1902

526.	*490*		7.3
527.	*492*	Bruxelles	11.3
528.	*493*	Bruxelles	13.3
529.	*494*		15.4
530.	*495*		20.4
531.	*496*		3.6
532.	*497*	Mürren	29.8
533.	*499*	Grindelwald	7.9

534.	*500*	Grindelwald	11.9
535.	*501*		17.9
536.	*502*		27.10
537.	*503*		31.10
538.	*504*		2.11
539.	*505*		7.12
540.	*506*		[s. d.]
541.	*506*		[s. d.]
542.	*509*		11.12
543.	*509*		12.12

1903

544.	*510*		1.1
545.	*511*		4.1
546.	*512*		10.1
547.	*513*		16.1
548.	*513*		17.1
549.	*514*		19.1
550.	*515*		20.1
551.	*516*		22.1
552.	*518*		27.1
553.	*519*		1.2
554.	*520*		8.2
555.	*520*		22.2
556.	*521*		13.3
557.	*522*		23.3
558.	*523*		10.4
559.	*524*		18.4
560.	*525*		26.4
561.	*525*		5.5
562.	*526*		14.5
563.	*527*		[2.6]
564.	*528*		7-8.6
565.	*530*		[s. d.]
566.	*531*		13.6
567.	*532*		20.6
568.	*533*		28.6
569.	*534*		5.7
570.	*535*		21.7
571.	*536*	Bruxelles	24.10
572.	*537*	Bruxelles	4.11
573.	*538*		19.11
574.	*539*		25.12
575.	*540*		28.12

1904

576.	*541*		10.1
577.	*542*		16.2
578.	*543*		1.3
579.	*544*		7.3
580.	*545*		[s. d.]
581.	*545*		23.4
582.	*546*		30.4
583.	*547*		11.7
584.	*547*		[s. d.]
585.	*548*		9.9
586.	*549*		21.11
587.	*552*		22.11
588.*	*553*	Bologna	2.12
589.	*553*		2.12
590.	*554*		7.12
591.	*556*		[s. d.]
592.	*558*		13.12
593.	*559*		14.12
594.	*561*		15.12
595.	*562*		15.12
596.*	*564*	Bologna	16.12
597.*	*564*	Bologna	18.12
598.	*564*		19.12
599.	*566*		20.12
600.	*567*		[s. d.]
601.	*568*		24.12
602.	*570*		25.12
603.	*571*		26.12
604.	*572*		27.12
605.	*573*		29.12
606.	*575*		31.12

1905

607.	*576*		1.1
608.	*578*		2.1
609.*	*579*	Bologna	3.1
610.	*580*		4.1
611.	*581*		5.1
612.	*584*		5.1
613.*	*585*	Bologna	6.1
614.	*586*		7.1
615.	*589*		9.1
616.	*590*		10.1
617.	*592*		11.1
C.	*593*	Roma	12.1
618.*	*595*	Bologna	12.1
619.	*595*		12.1
C.	*596*	Roma	13.1
620.	*597*		13.1
C.	*598*	Roma	14.1
621.	*600*		15.1
622.*	*601*	Bologna	19.1

623.*	*601*	Bologna	20.1
624.	*602*		30.1
625.	*602*		1.2
626.	*604*		2.2
627.*	*605*	Bologna	4.2
628.	*605*		7.2
629.*	*606*	Bologna	8.2
630.	*607*		10.2
631.	*608*		13.2
632.*	*609*	Bologna	14.2
633.	*610*		17.2
634.	*611*		18.2
635.	*611*		19.2
636.*	*613*	Bologna	20.2
637.*	*613*	Bologna	22.2
638.	*613*		24.2
639.	*615*		[s.d.]
640.	*616*		1.3
641.	*617*		[s.d.]
642.*	*619*	Vallombrosa	19.3
643.	*619*		2.4
644.	*620*		7.4
645.	*621*		9.4
646.	*622*		12.4
647.	*624*		15.4
648.*	*626*	Bologna	18.4
649.	*626*		24.4
650.*	*627*	Bologna	5.5
651.*	*628*	Bologna	14.5
652.	*628*		28.5
653.	*629*		7.6
654.	*630*		30.6
655.	*631*		31.7
656.	*631*		25.10
657.	*632*		4.11
658.	*633*		26.11

1906

C.	*634*	Roma	19.2
659.	*635*		20.2
660.	*636*		15.5
661.	*637*		22.5
662.*	*639*	Bologna	24.5
663.	*639*		31.5
664.	*640*		4.6
665.	*641*		21.7
666.	*642*	Alagna	27.7
667.	*643*		21.8
668.	*644*		2.12

1908

669.	*646*		25.5

1914

670.	*647*	Marina di Massa	24.8

1919

C.	*648*	Roma	12.4

Bridgman La critica operazionale della scienza
Broué La rivoluzione perduta: vita di Lev Trockij (1879-1940)
Darwin L'espressione delle emozioni nell'uomo e negli animali / Taccuini M e N / Profilo di un bambino
Desmond e Moore Darwin
Gluckman Potere, diritto e rituale nelle società tribali
Grosskurth Melanie Klein: il suo mondo e il suo lavoro
Hodges Storia di un enigma: vita di Alan Turing (1912-1954)
Hund Storia della teoria dei quanti
Kennedy Peano: storia di un matematico
Krüll Nella rete dei maghi: una storia della famiglia Mann
Lombroso Delitto, genio, follia. Scritti scelti
Mayr Storia del pensiero biologico
Pais Einstein è vissuto qui
Pais Il danese tranquillo: Niels Bohr, un fisico e il suo tempo 1885-1962
Pais 'Sottile è il Signore...': la scienza e la vita di Albert Einstein
Portugal e Cohen Un secolo di DNA
Riposte armonie Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo
Searle Atti linguistici: saggio di filosofia del linguaggio
Shea La magia dei numeri e del moto: René Descartes e la scienza del Seicento
Skidelsky John Maynard Keynes
Steward Teoria del mutamento culturale
Whorf Linguaggio, pensiero e realtà
Wiggershaus La Scuola di Francoforte: Storia. Sviluppo teorico. Significato politico
Young-Bruehl Hannah Arendt (1906-1975): per amore del mondo