ENRIQUES, FEDERIGO

Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad n-dimensioni

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (IV) **VI** (1890), pp. 63-70.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 20 luglio 1890.
Estratto dal vol. VI, 2° Semestre, fasc. 2.

ALCUNE PROPRIETÀ
DEI FASCI DI OMOGRAFIE NEGLI SPAZI LINEARI
AD n DIMENSIONI

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1890

Matematica. — *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazî lineari, ad* n *dimensioni.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Corrispondente De Paolis.

« Espongo in questa Nota alcune proprietà dei fasci di omografie tra due spazî lineari ad n dimensioni F_n, F'_n.

« Indico con F_r, F'_r gli spazî lineari a r dimensioni rispettivamente immersi in F_n, F'_n, e con Φ_r, Φ'_r gli spazî ad essi duali, generati quindi da F_{n-1}, F'_{n-1}.

« 1. Date due omografie π_1, π_2, tra F_n, F'_n, che ad un punto 0 di F_n facciano corrispondere i punti 1, 2 di F'_n, l'omografia (12) in F'_n ha in generale un gruppo di σ spazî di punti uniti *semplici*, indipendenti,

$$F'_{h_1-1},\ F'_{h_2-1},\ \dots,\ F'_{h_\sigma-1} \quad (h_1+h_2+\dots+h_\sigma=n+1),$$

o di σ spazî di punti uniti *multipli* $F'_{h_{11}-1}$, $F'_{h_{21}-1}$, ... $F_{h_{\sigma 1}-1}$, nei quali sono contenuti rispettivamente uno nell'altro gli spazî

$$F'_{h_{12}-1},\dots,F'_{h_{1\rho}-1};\ F'_{h_{22}-1},\dots,F'_{h_{2\rho_2}-1};\dots;\ F'_{h_{\sigma 2}-1},\dots,F'_{h_{\sigma\rho_\sigma}-1},$$

con

$$h_{11}+h_{12}+\dots+h_{1\rho_1}+h_{21}+h_{22}+\dots+h_{2\rho_2}+\dots+h_{\sigma 1}+h_{\sigma 2}+\dots+h_{\sigma\rho_\sigma}=n+1\ (^1),$$

(1) Predella, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.* Annali di mat. Serie 2.ª, Tomo XVII, Fasc. 2.

a questi punti uniti della (12) corrisponde in π_1^{-1} (o in π_2^{-1}) un analogo gruppo di spazî F_{h_1-1}, F_{h_2-1}, ..., $F_{h_\sigma-1}$, semplici o multipli, ai punti dei quali spazî corrispondono i medesimi punti di F'_n in tutte le omografie del fascio determinato da π_1, π_2.

« I due gruppi di punti suddetti in F_n, F'_n, si diranno rispettivamente il 1° e il 2° *gruppo di punti base del fascio*: diremo F_r *base*, gli F_r cui corrisponde uno stesso F'_r (*base*) in tutte le omografie del fascio.

« È evidente che:

« È individuato un fascio di omografie subordinato del dato fascio, tra due F_r base corrispondenti, rispettivamente del 1° e del 2° gruppo.

« 2. Possiamo costruire come segue un fascio di omografie tre F_n, F'_n individuato da due omografie non degeneri π_1, π_2. Omettiamo il caso $n=1$ trattato dal Segre (¹), e ci riferiamo alla proprietà che le omografie d'un fascio trasformano un punto non base di F_n nei punti di una retta di F'_n.

« Se al punto 0 di F_n corrispondono in π_1, π_2, i punti 1, 2, di F'_n, preso un punto 0_i di F_n cui corrispondano in π_1, π_2, i punti, 1_i, 2_i, ed un altro punto $0'$ della retta 00_i cui corrispondano i punti $1'$, $2'$ sulle rette 11_i, 22_i, avremo tre casi:

a) Le rette 11_i, 22_i non s'incontrano; allora possiamo costruire la omografia π_x del fascio nella quale a 0 corrisponde un punto x preso ad arbitrio sulla retta 12, costruendo la retta che passa per x ed incontra le $1_i 2_i$, $1' 2'$, e facendo corrispondere a 0_i, $0'$, ... i punti x_i, x', ... in cui essa si appoggia alle rette $1_i 2_i$, $1' 2'$. ....

b) Le rette 11_i, 22_i, s'incontrano; allora per costruire la π_x basta condurre alla conica che tocca le rette 12, $1' 2'$, $1_i 2_i$, 11_i, 22_i, la tangente che passa per x, ed è distinta dalla 12, e quindi far corrispondere a 0_i, $0'$, ... i punti x_i, x', ... in cui la detta tangente incontra le rette $1_i 2_i$, $1' 2'$, ...

c) Le rette 11_i, 22_i coincidono colla 12; allora 0_i è un punto d'una retta base e quindi la costruzione si riduce a quella di un fascio d'omografie tra due rette.

« Da questa costruzione geometrica deduciamo:

« I punti d'una retta non base di F_n sono trasformati dalle omografie di un fascio nelle generatrici di un sistema d'un iperboloide, o nelle tangenti d'una conica; la retta è trasformata dalle omografie del fascio nelle generatrici del l'altro sistema dell'iperboloide, o nelle tangenti della conica stessa: se la conica determinata da una retta si spezza in due punti, le trasformate della retta generano un fascio di raggi col centro in uno dei punti, e le rette corrispondenti

(¹) *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux.* Crelle, vol. C.

ai punti della retta data generano il fascio di raggi che col 1° compone la conica, col centro nell'altro punto; il centro del 1° fascio è un punto base del 2° gruppo corrispondente ad un punto base del 1° gruppo, che appartiene alla data retta.

« L'ultima parte del teorema enunciato risulta dal fatto che se la conica considerata si spezza, le punteggiate $11_i 1' \ldots, 22_i 2' \ldots$, sono prospettive.

« 3. Il caso in cui l'omografia (12) individuata da π_1, π_2 in F'_n ha spazî di punti uniti multipli (il fascio ha punti base multipli), si può considerare come caso limite di quello in cui essa abbia σ spazî (indipendenti) di punti uniti semplici

$$F_{h_1-1} \ldots F_{h_\sigma-1}, \quad (h_1 + \cdots + h_\sigma = n + 1)$$

quando alcuni di questi vengano a sovrapporsi fra loro (1): ci riferiremo dunque al caso in cui la (12) abbia spazî fondamentali semplici. Allora è noto (2) che le rette 12 incontrano i sostegni delle forme fondamentali Φ di F_{n-1} dell'omografia

$$F_{n-h_1} \equiv [F_{h_2-1} \ldots F_{h_\sigma-1}] \ldots F_{n-h_\sigma} \equiv [F_{h_1-1} \ldots F_{h_{\sigma-1}-1}],$$

in σ punti che dànno con 1, 2 rapporti anarmonici costanti; e segue dalla costruzione esposta del fascio che facendo corrispondere questi σ punti al punto 0 di F_n si ottengono *tutte e sole le* σ omografie degeneri del fascio. Vediamo dunque che tutte le ∞^n rette di F'_n corrispondenti nel fascio ai punti di F_n sono le ∞^n rette che si appoggiano ad $F_{n-h_1} \ldots F_{n-h_\sigma}$ in σ punti di cui i $\sigma - 3$ rapporti anarmonici indipendenti hanno valori costanti. Queste rette si riducono ad ∞^{n-1} solamente nel caso in cui si abbiano due spazî di punti base in ciascun gruppo ($\sigma = 2$), ed allora una di tali rette è data da tutti i punti di una retta di F_n che si appoggia pure ai due spazî di punti base. Il sistema di queste ∞^n rette diremo che costituisce il *complesso* C, complesso che è intimamente collegato col fascio di omografie, e per $n = 3$ è (nel caso generale) un complesso tetraedrale (3). La caratteristica dell'omografia (12) (4) la diremo pure *caratteristica del fascio* e del *complesso* C; il 2° gruppo base del fascio lo diremo *gruppo fondamentale* del complesso C. Si ha quindi: Gli invarianti assoluti indipendenti d'un complesso C di data caratteristica sono i $\sigma - 3$ rapporti anarmonici indipendenti delle σ intersezioni d'una sua retta coi sostegni delle forme Φ di F_{n-1} del gruppo fondamentale.

(1) Predella l. c.
(2) Predella, l. c.
(3) Reye, *Geometrie der Lage.*
(4) Predella, l. c.

« 4. Per un punto di F'_n passano ∞^1 rette del complesso C che generano un cono di cui vogliamo determinare l'ordine, supposto $n > 2$.

« Sia dapprima il gruppo fondamentale un $(n+1)$gono. Se prendiamo un punto P d'una faccia F'_{n-1} dello $(n+1)$gono fondamentale, si ha in questo F'_{n-1} un cono relativo ad un analogo complesso C_1 in F'_{n-1} d'ordine incognito; se consideriamo un raggio r del complesso C fuori di F'_{n-1}, il piano per esso e per il vertice O dello $(n+1)$gono opposto ad F'_{n-1}, sega le facce dello $(n+1)$gono per O in un fascio di n raggi per O di cui i rapporti anarmonici sono uguali a quelli delle intersezioni di r colle dette facce, sicchè si vede che dal cono del complesso C si stacca un fascio piano di raggi fuori di F'_{n-1}, e non si hanno altri raggi del complesso fuori di F'_{n-1} perchè si avrebbe per P un piano fuori di F'_{n-1} e non passante per O che segherebbe le facce dello $(n+1)$gono fondamentale secondo i lati di un $(n+1)$gono piano $(n > 2)$ tale che per un punto di un lato passerebbero due rette fuori di questo lato incontranti i lati in gruppi di punti proiettivi. Dunque l'ordine del cono del complesso C in F'_n, è uguale a quello del cono del complesso C_1, in F'_{n-1}, aumentato di 1. Ne segue che i coni complessi C per i punti di F'_n sono d'ordine $n-1$. Osservando poi che se il gruppo fondamentale del complesso C, cioè il 2° gruppo base del fascio corrispondente, è costituito di σ spazî semplici indipendenti $F'_{h_1-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$, ogni punto di F'_n appartiene ad un $F'_{\sigma-1}$ base (poichè per ogni punto passa un $F'_{\sigma-1}$ che si appoggia rispettivamente in σ punti ad $F'_{h_1-1}, \dots, F'_{h_\sigma-1}$) (1), ed osservando inoltre che i raggi del complesso C per il punto (appoggiandosi ad $F'_{n-h_1}, \dots, F'_{n-h_\sigma}$) debbono appartenere al detto $F'_{\sigma-1}$ deduciamo che: Il cono complesso C per un punto di F'_n, quando il gruppo fondamentale è costituito di σ spazî di punti base semplici, è un cono d'ordine $\sigma-2$ appartenente ad un $F'_{\sigma-1}$.

« Per un punto dipendente dal gruppo fondamentale che appartenga ad un $F'_{\sigma-r-1}$ determinato da $\sigma-r$ punti fondamentali (appartenenti a diverse forme fondamentali), si staccano dal cono complesso C, r fasci piani.

« Sono raggi del complesso C le rette per un punto fondamentale di F'_{h_i-1} che si appoggiano al sostegno F'_{n-h_i} della forma fondamentale coniugata Φ'_{h_i-1}.

« 5. Il complesso C di F'_n è rappresentato mediante il fascio di omografie nei punti di F_n; vediamo che cosa corrispondono agli elementi lineari nei due spazî.

« I punti di un F_r $(r < n-1)$ son trasformati dalle omografie del fascio

(1) Lo $F'_{\sigma-1}$ per un punto di F'_n che si appoggia ad $F'_{h_1-1}, \dots, F'_{k_\sigma-1}$, si determina come intersezione delle forme proiettanti dal punto le $F'_{n-h_1}, \dots, F'_{n-h_\sigma}$.

in ∞^r rette di F'_n che generano in generale uno spazio algebrico ∞^{r+1}. I punti $x_i = \lambda_1 x_i^{(1)} + \cdots + \lambda_{r+1} x_i^{(r+1)}$ son portati dalle omografie del fascio nei punti $y_i = \Sigma_k (a_{ik} + \lambda b_{ik}) (\lambda_1 x_k^{(1)} + \cdots \lambda_{r+1} x_k^{(r+1)})$: risolvendo rispetto a λ si ha

$$\lambda = \frac{y_i - \Sigma_k a_{ik} (\lambda_1 x_k^{(1)} + \cdots + \lambda_{r+1} x_k^{(r+1)})}{\Sigma_k b_{ik} (\lambda_1 x_k^{(1)} + \cdots + \lambda_{r+1} x_k^{(r+1)})} \quad (i = 1, \ldots, n+1),$$

sicchè uguagliando i 2^i membri si ottengono tutte le y_i legate linearmente p. e. alla y_1 con coefficienti di 2° grado in $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$; segando quindi questo spazio algebrico ∞^{r+1} con la F_{n-r-1} data da $y_1 = 0, \ldots, y_{r+1} = 0$, si ottengono r equazioni omogenee di 2° grado in $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$, sicchè l'intersezione è costituita da 2^r punti. Dunque:

« Agli F_r corrispondono ∞^r rette del complesso C in F'_n generanti in generale spazî algebrici razionali ∞^{r+1} d'ordine 2^r. Ossia:

« I punti d'un F_r sono trasformati in generale dalle omografie del fascio nelle generatrici d'uno spazio algebrico ∞^{r+1} razionale rigato d'ordine 2^r in F'_n.

« Invertendo le relazioni:

$$y_i = \Sigma_k (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x_k,$$

si trova che un punto di F'_n in generale è trasformato dalle inverse delle omografie d'un fascio nei punti di una linea razionale d'ordine n in F_n, ed un punto d'un F'_r base è trasformato in una linea razionale d'ordine r della F_r base corrispondente (poichè fra due spazi base vi è un fascio subordinato di omografie), dunque:

« Un punto di F'_n è trasformato dalle inverse delle omografie d'un fascio che ha due gruppi base semplici di σ spazi ciascuno, nei punti d'una linea razionale d'ordine $\sigma - 1$ appartenente ad un $F_{\sigma-1}$. E quindi:

« Ai raggi d'un cono complesso C corrispondono i punti d'una linea razionale d'ordine $\sigma - 1$ appartenente ad un $F_{\sigma-1}$.

« Ai raggi del complesso C che si appoggiano ad un F'_r corrispondono i punti di ∞^r linee razionali, d'ordine $\sigma - 1$, appartenenti ciascuna ad una $F_{\sigma-1}$ in F_n.

« Ne segue in particolare che: La condizione necessaria e sufficiente affinchè le inverse delle omografie di un fascio formino un fascio, è che in F_n, F'_n si abbiano rispettivamente due soli spazî di punti base. Allora il complesso C si riduce ad un sistema ∞^{n-1} di rette, e per ogni punto di F'_n passa uno ad un sol raggio del sistema.

« Poichè i raggi del complesso C per un punto P di F'_n corrispondenti ai punti d'un F_{n-1} sono dati dall'intersezione di F_{n-1} colla linea razionale d'ordine $\sigma - 1$ corrispondente a P in F_n, si ha infine: Agli F_{n-1} corrispondono in generale ∞^{n-1} raggi del complesso C, tali che per un punto di F'_n ne passano $\sigma - 1$.

« 6. Le rette di F_n determinano in generale in un fascio di omografie, iperboloidi in F'_n.

« Ponendo la condizione che le trasformate di una retta in due omografie del fascio s' incontrino, si trova che:

« In generale per ogni punto di F_n vi è un cono ∞^1 d'ordine 2^{n-2}, di rette che determinano coniche nel fascio.

« Si è pure veduto al n. 2 che le rette pei punti base del 1° gruppo e queste sole determinano coniche che si spezzano in due fasci di raggi uno dei quali (quello delle trasformate delle rette) ha il centro in un punto base del 2° gruppo.

« È interessante determinare la condizione perchè tutte le rette di F_n determinino coniche nel fascio (per $n > 2$). Ciò equivale alla condizione che due rette qualunque del complesso C s' incontrino. Allora tutti i raggi del complesso C dovendo incontrare tutti i raggi per un punto base P della forma F'_{h_1-1}, che si appoggiano ad F'_{n-h_1}, si hanno due casi:

a) Per P passa un solo raggio del complesso C; allora la F'_{n-h_1} è un punto, per cui F'_{h_1-1} è un F_{n-1}.

b) Per P passa almeno un fascio di raggi del complesso C; allora dovendo questi essere incontrati da tutti i raggi del complesso, i raggi del complesso non appartenendo tutti al piano del fascio (essendo $n > 2$), appartengono tutti al centro del detto fascio; quindi il complesso C ha tutti i suoi raggi per P; questi sono quindi ∞^{n-1}, ed F_{n-h_1} è un F_{n-1}.

« Chiamando *omologico* un fascio di omografie di cui i gruppi base son costituiti ciascuno di un punto e d'un F_{n-1}, abbiamo dunque:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le rette di F_n determinino coniche in un fascio di omografie è che il fascio sia omologico, ossia che il complesso C si riduca ad una stella di raggi. Le coniche determinate dalle rette di F_n si spezzano in due fasci di raggi coi centri nel punto base isolato, e in un punto base dello F_{n-1} di punti base, del 2° gruppo.

« Si ha poi: Le inverse delle omografie d'un fascio omologico formano un fascio omologico.

« 7. Sieno F_n, F'_n sovrapposti e cerchiamo la condizione perchè le omografie d'un fascio formino un *gruppo*.

« Se ad un punto O corrisponde nel fascio la retta p, e P è un punto di p, l'omografia (OP) moltiplicata per un'altra omografia qualunque del fascio porta O in un punto di p, ossia P da un' omografia qualunque del fascio è portato in un punto di p: dunque ogni punto appartiene alla retta corrispondente nel fascio, al fascio appartiene l'identità, i due gruppi base coincidono. Ora la retta p per P incontra in P_1 il sostegno F_{n-h_1} della forma base Φ_{h_1-1}, ed il punto P_1 da un' omografia del fascio deve essere trasformato in un punto di p e di F_{n-h_1}, per cui è un punto base (essendo P indipendente dagli spazî di punti base): ne segue che ogni punto P appartiene ad una retta base; questa condizione è altresì sufficiente.

« Dunque: La condizione necessaria e sufficiente perchè le omografie d'un fascio formino un gruppo è che vi sieno due gruppi base coincidenti in uno costituito di due soli spazî di punti base F_h, F_{n-h}: cioè che il fascio sia individuato dall'identità e da un'involuzione.

« In particolare: La condizione necessaria è sufficiente perchè le omografie d'un fascio omologico in F_n formino un gruppo, è che il fascio sia costituito di tutte le omologie con uno stesso centro e F_{n-1} d'omologia.

« 8. Consideriamo il fascio di omografie subordinato fra due rette base di F_n, F'_n. Ad esso appartengono due omografie degeneri; i loro punti singolari sono i punti base delle due rette; se questi coincidono, le due omografie coincidono in una con un punto singolare doppio, questo caso corrisponde all'esistenza di punti base multipli.

« Un' omografia subordinata degenere tra due rette base è data da un'omografia degenere del dato fascio; per tal modo si ottengono le omografie degeneri del fascio.

« Se il fascio ha due $(n+1)$goni di punti base $(1,2,...,n+1)$,$(1',2',...,(n+1)')$; vi sono nel fascio $n+1$ omografie degeneri di caratteristica n coi rispettivi punti singolari $1, 2, ... n+1$.

« Se invece il fascio ha due gruppi di spazî di punti base semplici $F_{h_1-1}, ..., F_{h_\sigma-1}$; $F'_{h_1-1}, ..., F'_{h_\sigma-1}$, $(h_1+\cdots+h_\sigma=n+1)$, consideriamo una retta base che si appoggia in 1, 2, ad F_{h_1-1}, F_{h_2-1}, e la corrispondente che si appoggia ad F'_{h_1-1}, F'_{h_2-1} in $1'$, $2'$: si ha un fascio di omografie subordinate fra le rette 12, $1'2'$, al quale appartiene un'omografia degenere in cui il punto 1 è singolare e il punto 2 no; questa è data da un'omografia del dato fascio, degenere, in cui ad $F_{h_2-1}, ..., F_{h_\sigma-1}$ corrispondono rispettivamente $F'_{h_2-1}, ..., F'_{h_\sigma-1}$ e non appartengono punti singolari: in essa vi è un F'_{n-h} $(h \geq 1)$ sostegno d'una Φ'_{h-1} singolare, contenente $F'_{h_2-1}, ..., F'_{h_\sigma-1}$ e non F'_{h_1-1} (poichè $F'_{h_1-1}, ..., F'_{h_\sigma-1}$ sono indipendenti), per cui tutti i punti di F_{h_1-1} sono singolari, cioè F_{h_1-1} è lo spazio singolare della detta omografia del fascio: vi son dunque nel fascio σ omografie degeneri di caratteristiche: $n - h_1 + 1, \dots, n - h_\sigma + 1$, cogli spazî singolari $F_{h_1 - 1}, \dots, F_{h_\sigma - 1}$.

« Finalmente considerando il caso in cui i gruppi base hanno punti base multipli come caso limite del precedente, perveniamo al teorema:

« Un fascio di omografie tra F_n, F'_n di caratteristica:

$$[(h_{11} - 1, \dots, h_{1\rho_1} - 1) \dots (h_{\sigma 1} - 1, \dots, h_{\sigma\rho_\sigma} - 1)]$$

ha ρ_1 omografie degeneri coincidenti di caratteristiche

$$n - h_{11} + 1, \dots, n - h_{1\rho_1} + 1,$$

ρ_2 omografie degeneri coincidenti di caratteristiche

$$n - h_{21} + 1, \dots, n - h_{2\rho_2} + 1,$$

....., ρ_σ omografie degeneri coincidenti di caratteristiche

$$n - h_{\sigma 1} + 1, \dots, n - h_{\sigma\rho_\sigma} + 1;$$

e gli spazî singolari di queste omografie son quelli di punti base del 1° gruppo: fra gli spazî base determinati (1) da due corrispondenti spazî di punti base multipli di F_n, F'_n, sono individuate omografie subordinate degeneri, che hanno per spazî singolari multipli gli spazî di punti base del 1° gruppo».

(1) Predella, l. c.