Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Le omografie cicliche negli spazi ad n dimensioni

Giornale di Matematiche **XXX** (1892), pp. 311-318. (Scritto del 1890)

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

LE OMOGRAFIE CICLICHE NEGLI SPAZI AD n DIMENSIONI

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES.

1. Come invarianti assoluti di una proiettività π in un F_n assumiamo i rapporti anarmonici delle proiettività subordinate sulle rette unite: questi sono i rapporti $\frac{r_i}{r_h}$ delle radici dell'equazione caratteristica della proiettività: $D(r) = 0$ (*). Come invarianti assoluti di una correlazione Ω in un F_n assumiamo i rapporti anarmonici delle proiettività subordinate di Ω sulle rette unite della proiettività Ω^2; questi sono i rapporti $\frac{\sqrt{r_i}}{\sqrt{r_k}}$ (**), essendo $\frac{r_i}{r_k}$ gli invarianti delle Ω^2 che sappiamo essere a coppie reciproci tranne per le radici ± 1 (***).

Diremo *ciclica d'ordine* m un'omografia tale che nella sua potenza m^a gli elementi corrispondenti si appartengono: se dunque l'omografia è una proiettività π, la π^m è l'identità; se l'omografia è una correlazione Ω, la Ω^m è l'identità o un sistema nullo secondochè m è pari o dispari. Trattiamo separatamente i tre casi i quali ci condurranno ad un medesimo risultato.

(*) Predella (Ann. di Mat. t. 17).

(**) Segre (Tor. Mem. t. 37) introduce come invarianti i quadrati di quelli qui introdotti; ma l'avere assunto gli invarianti d'una correlazione sotto questa forma, ci permetterà di enunciare i risultati seguenti in modo uniforme per tutte le omografie (proiettività e correlazioni).

(***) Kronecher. Monatsberichte. Berlin (1874).

a). Se la proiettività π è ciclica d'ordine m, essa non può essere degenere perchè ogni sua potenza sarebbe degenere, e non può avere punti uniti multipli poichè esisterebbe una retta corrispondente a un punto unito multiplo, unita, su cui si avrebbe una proiettività subordinata ciclica con un punto unito doppio il che è assurdo come si vede facilmente: dunque una proiettività ciclica d'ordine m in F_n ha per equazioni sotto la forma canonica

$$y_1 \equiv r_1 x_1 \dots y_{h_1} \equiv r_1 x_1, \dots, y_{n+1-h_\sigma} \equiv r_\sigma x_{n+1-h_\sigma} \dots y_{n+1} \equiv r_\sigma x_{n+1},$$

ed affinchè π^m sia l'identità,

$$r_1^m = r_2^m = \dots = r_\sigma^m,$$

cioè $\frac{r_i}{r_h}$ è una radice m^a dell'unità (*).

b). Se la correlazione Ω è ciclica d'ordine pari $m = 2\nu$, la proiettività Ω^2 è ciclica d'ordine ν e quindi gli invarianti assoluti di Ω son radici m^e dell'unità.

c). Se la correlazione Ω è ciclica d'ordine dispari m, la Ω^m è un sistema nullo, percui escludendo il caso in cui esso sia degenere (e quindi Ω degenere), bisogna supporre che lo spazio F_n sia di dimensioni dispari n (**); allora la Ω^2 è ciclica d'ordine m, poichè il quadrato del sistema nullo Ω^m è l'identità: gli invarianti assoluti di Ω sono dunque radici ^{me} dell'unità; poichè sulle rette unite di Ω^2 la Ω definisce proiettività subordinate le cui potenze m^e (subordinate di Ω^m) sono l'identità.

Otteniamo dunque il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un' omografia in un F_n *sia ciclica d'ordine* m *è che i suoi invarianti assoluti sieno radici* m^e *distinte dell'unità.*

Questo teorema permette di stabilire le sottoclassi di omografie cicliche appartenenti ad una data classe: così p. e. si trova che ad una classe di proiettività con σ spazi fondamentali semplici, appartengono (se $m \geq \sigma$) $\binom{m-1}{\sigma-1}$ sottoclassi di proiettività cicliche corrispondenti ai diversi gruppi di $\sigma - 1$ radici di-

(*) Questo teorema è stato dimostrato da Frobenius (Crelle LXXXIV) appoggiandosi alle forme canoniche delle sost. lineari date da Weierstrass, ed interpretate geometricamente da Segre in una nota alla sua memoria.

(**) Il sistema nullo in uno spazio di dimensioni pari è sempre degenere: Cf. Segre (nota nella sua memoria delle correlazioni pag. 411).

verse da 1 dell'equazione binomia $x^m = 1$; tra queste vi sono $\binom{\varphi(m)}{\sigma - 1}$ sottoclassi di proiettività che definiscono su ciascuna retta unita proiettività subordinate cicliche di ordine non minore di m $(= m)$ corrispondenti alle radici primitive di $x^m = 1$; mentre vi sono invece, se m non è primo, sottoclassi di omografie cicliche di ordine $< m$, o di ordine m ma che definiscono su alcune rette unite proiettività subordinate cicliche d'ordine $< m$. Un calcolo analogo può farsi per le sottoclassi di correlazioni cicliche appartenenti a una data classe.

2. Se applicando successivamente un'omografia ai punti di F_n 1, 1', indipendenti dagli elementi fondamentali (se l'omografia è una proiettività sono indipendenti dai suoi elementi fondamentali quei punti che non appartengono a spazi lineari determinati da alcune delle sue forme fondamentali: se l'omografia è una correlazione diciamo indipendenti dai suoi elementi fondamentali i punti indipendenti dalle forme fondamentali del suo quadrato) se ne deducono gli elementi 2, 3 ..., 2', 3' ..., trasformando proiettivamente (il che è possibile) l'omografia in se stessa, facendo corrispondere i punti 1, 1', si trasformeranno proiettivamente l'una nell'altra le due serie di elementi 1, 2, 3 ..., 1', 2', 3' ...; dunque:

I cicli d'un'omografia ciclica in F_n dati da punti indipendenti dagli elementi fondamentali sono proiettivi.

E si ha pure:

Una proiettività è ciclica d'ordine m *se applicata* m *volte ad un elemento indipendente dei fondamentali, riconduce allo stesso elemento.*

Una correlazione è ciclica d'ordine pari 2m *se applicata* 2m *volte ad un suo elemento indipendente dai fondamentali riconduce allo stesso elemento.*

3. Ci proponiamo ora la questione:

In quanti modi i cicli d'un'omografia ciclica in F_n sono trasformabili omograficamente in sè stessi?

Si abbia un'omografia ciclica d'ordine m, Γ, di cui i cicli $(0, 1, 2, 3 \ldots m)$, sieno trasformati in sè stessi da una omografia π: se π non è una proiettività identica, considerando un numero sufficiente di cicli $0, 1, 2, \ldots m$, di Γ, troveremo sempre $n+2$ di questi cicli nei quali π cambia l'elemento 1 in uno stesso elemento s; se ne conclude che π è la potenza s^a di Γ. Ora se Γ è una proiettività, oppure se essendo una correlazione m è pari, l'elemento m coincide coll'elemento 1 e l'elemento $mk + h$ $(h < m)$ dedotto da 0 coll'omografia Γ^{mk+h}, coincide coll'elemento h, percui ogni omografia Γ^s trasforma in sè stessi i cicli di Γ, spezzandoli in cicli d'ordine t dove t è il minimo numero che moltiplicato per s dia un multiplo di m. Se invece Γ è una correlazione ciclica d'ordine m dispari è facile vedere che la omografia Γ^s non trasforma mai in sè stessi i cicli di Γ.

Ne deduciamo:

Escluso il caso delle correlazioni cicliche d'ordine dispari; tutte e sole le

Omografie che trasformano in sè stessi i cicli di un'omografia ciclica Γ *d'ordine* sk *in* F_n, *appartengono al gruppo ciclico.*

$$\Gamma\ \Gamma^2 \ldots \Gamma^m.$$

I cicli d'una correlazione ciclica di ordine dispari in F_n, *non son trasformati in sè stessi da nessuna omografia.*

Corollario 1.° *In una omografia ciclica d'ordine pari* 2m *in* F_n *gli elementi opposti* 1 m + 1, 2 m + 2, ... *d'un ciclo* 1, 2, 3 ... 2m, *si corrispondono involutoriamente.*

Corollario 2.° *Un ciclo d'ordine* $m > n + 2$ *d'una omografia ciclica (che non sia una correlazione se* m *è dispari) in* F_n, *dà coi suoi elementi tanti cicli di omografie cicliche d'ordine* m, *quanti sono i numeri* $< m$ *e primi con esso.*

Invero se $h < m$ è primo con $m (m > n + 2)$, la potenza h^{ma} della data omografia trasforma in sè stessi i cicli di essa ma non può decomporli in cicli d'ordine inferiore poichè sarebbe h un divisore di m o d'un multiplo di m.

Proiettività cicliche in F_n.

4. Un'involuzione è una proiettività ciclica di 2° ordine, percui (*):

In una involuzione vi sono due forme fondamentali semplici (**)

I punti coniugati sono separati armonicamente dalle forme fondamentali. Poichè vi è un solo invariante assoluto $= -1$.

Tutte le proiettività in F_n *che hanno date forme fondamentali semplici formano un fascio a cui appartiene l'identità e un' involuzione: esse costituiscono pure un gruppo* (***).

Tutte le classi di involuzioni in un F_n *sono:*

se n è *pari*

$$[0\quad n-1]\ [1\quad n-2] \ldots \left[\frac{n}{2}-1\quad \frac{n}{2}\right];$$

se n è *dispari*

$$[0\quad n-1]\ [1\quad n-2] \ldots \left[\frac{n-1}{2}\quad \frac{n-1}{2}\right].$$

(*) Cfr.

(**) Queste omografie sotto il nome di collineazioni sono state studiate dal signor Veronesi (Ann. di Mat. t. XI).

(***) V. la mia nota (Acc. Lincei 1890).

5. *In una proiettività reale ciclica in F_n non vi possono essere più di due forme fondamentali reali.*

Se invero ve ne fossero tre, tra di esse se ne avrebbero almeno due tali che sulle rette reali appoggiantesi ad esse, vi sarebbe una proiettività subordinata ciclica, non involutoria, con due punti uniti reali, il che è assurdo.

6. Se si ha una proiettività ciclica d'ordine m in F_n, che abbia gli spazi fondamentali (che debbono esser semplici)

$$F_{h_1} \dots F_{h_\sigma - 1} \qquad (h_1 + \dots + h_\sigma = n + 1),$$

i suoi cicli apparterranno ad un F_m, allora, ed allora soltanto, quando ogni punto di F_n appartenga ad una F_m unita nella quale vi sia una proiettività subordinata della data: ora proiettando da un punto qualunque di F_n le forme

$$F_{n-h_1} \equiv [F_{h_2 - 1} \dots F_{h_\sigma - 1}], \dots, F_{n-k_\sigma} \equiv [F_{h_1 - 1} \dots F_{h_\sigma - 1}],$$

le $F_{n-h_1+1}, \dots, F_{n-h_\sigma+1}$ proiettanti, hanno comune una forma $F_{\sigma-1}$ che si appoggia in un sol punto a ciascuna delle forme fondamentali $F_{h_1 - 1} \dots F_{h_\sigma - 1}$, ed è perciò la forma di dimensioni minime (anche per la proiettività), a cui apparteenga un punto di F_n indipendente dalle forme fondamentali.

Ne deduciamo:

I cicli d'una proiettività ciclica in F_n, che ha σ spazi fondamentali, appartengono ad $F_{\sigma-1}$.

Più in generale i ragionamenti svolti provano che:

Data una proiettività π con σ forme fondamentali semplici in F_n, le serie finite o infinite di punti 0, 1, 2, 3 ... *che si ottengono applicando ai punti* 0 *di F_n le proiettività $\pi, \pi^2, \pi^3, \dots,$ appartengono ad $F_{\sigma-1}$* (*).

Pertanto lo studio delle proiettività cicliche in F_n, che hanno σ forme fondamentali, è ridotto a quello delle proiettività cicliche con σ punti uniti distinti in una $F_{\sigma-1}$.

In particolare lo studio delle proiettività cicliche (generali) d'ordine $m<n+1$ in F_n si riduce a quello delle proiettività cicliche d'ordine m appartenenti ad una F_{m-1}.

Correlazioni cicliche d'ordine pari in F_n.

7. Le correlazoni cicliche del 2° ordine, o involutorie, sono, come è noto, i sistemi polari reciproci rispetto ad una quadrica.

(*) Cfr. la mia nota c.

Sussiste il teorema:

È condizione necessaria e sufficiente affinchè una correlazione in F_n sia un sistema polare, che esista un $(n+1)$ gono *in cui i vertici corrispondano agli* F_{n-1} *opposti* (*).

La condizione enunciata è necessaria poichè gli infiniti $(n+1)$ goni autoconiugati rispetto alla quadrica fondamentale di un sistema polare vi soddisfano.

Dimostriamo che la detta condizione è altresì sufficiente.

Sieno $A_1 - A_{n+1}$ i vertici della $(n+1)$ gono corrispondenti per ipotesi alle facce opposte $\alpha_1 - \alpha_{n+1}$ nella correlazione: evidentemente i vertici A_i e le facce opposte α_i si corrispondono in doppio modo.

Quindi se supponiamo dimostrato il teorema per gli spazi ad $n-1$ dimensioni, può dimostrarsi per quelli ad n.

Infatti le rette per A_i corrispondono in doppio modo agli F_{n-2} in α_i, essendo per ipotesi doppia la corrispondenza dei punti e degli F_{n-2} in α_i dove si ha lo n − gono $A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_{n+1}$ di cui i punti corrispondono alle facce opposte; quindi preso un punto qualunque H in F_n conduciamo le rette $A_2H, A_3H, \ldots A_{n+1}H$, alle quali corrispondono in doppio modo in $\alpha_n \ldots \alpha_{n+1}$ gli F_{n-2} $\beta_n^{(H)} \ldots \beta_{n+1}^{(H)}$; questi F_{n-2} appartengono necessariamente allo F_{n-1} h corrispondente ad H in F_n, percui h ed H si corrispondono in doppio modo, cioè la correlazione è involutoria c. d. d.

Il teorema è vero per $n=1$, dunque è vero in generale.

8. Diremo in *involuzione parziale* una correlazione di F_n quando vi sono due forme reciproche F_r Φ_r (di sostegno indipendenti, i cui elementi si corrispondono in doppio modo, prospettivamente (cioè si appartengono) (**): la F_r e la F_{n-r-1} sostegno di φ_r, le diremo *forme dell'involuzione parziale*.

Se si ha correlazione ciclica del 4° ordine Ω, la proiettività Ω^2 è una involuzione ed è facile vedere che le sue forme fondamentali F_r, Φ_r si corrispondono appunto in doppio modo e prospettivamente in Ω, cioè che ad ogni punto di F_r corrisponde in doppio modo un F_{n-1} di Φ_r passante per esso, giacchè in generale i punti uniti del quadrato Ω^2 d'una correlazione Ω in F_n, appartengono alla quadrica luogo di Ω.

Ciò risulta p. e. così: Sulla retta congiungente due punti uniti di Ω^2 vi è una proiettività subordinata di Ω il cui quadrato è una proiettività subordinata di Ω^2 cogli stessi punti uniti, dunque questi punti uniti appartengono agli F_{n-1} corrispondenti in Ω.

Dunque:

Una correlazione ciclica del 4° ordine è in involuzione parziale: i due

---

(*) Sannia. Geometria Proiettiva.

(**) Cfr. In proposito una monografia del sig. Porchiesi sulle forme di 2ª specie.

punti (e i $2\,F_{n-1}$*) d'un suo ciclo sono separati armonicamente dalle forme dell'involuzione parziale.*

9. Se in un F_n si ha una correlazione Ω ciclica di ordine $2m$ con $m \geq n+1$, gli m punti e gli $m\,F_{n-1}$ d'un suo ciclo formano due cicli di Ω^2 e per il teorema del n° 6 potremo supporre che gli m punti non appartengano ad un F_{n-1} e quindi gli $m\,F_{n-1}$ non appartengano ad un punto: diremo allora che la Ω è *generale*.

Gli m punti e gli $m\,F_{n-1}$ costituiscono un poligono ed un poliedro che diremo *coniugati*.

Per i risultati del n° 3 si ha:

Tutte e sole le correlazioni che trasformano l'uno nell'altro un poligono ed un poliedro coniugati in una correlazione ciclica d'ordine pari, sono le sue potenze dispari: mentre le potenze pari ed esse sole li trasformano ciascuno in sè stesso.

Invero tali correlazioni trasformano in se stessi i cicli della data.

Sieno A , B un poligono ed un poliedro coniugati nella correlazione Ω; il 1° di m vertici, il 2° di m facce: in A vi saranno $\binom{m}{n}$ facce, in B $\binom{m}{n}$ vertici, che danno due gruppi di elementi $A'\,B'$: poichè $A'\,B'$ son trasformati l'uno nell'altro dalle correlazioni che trasformano A in B, e in sè stessi dalle proiettività che trasformano in sè stessi A e B, si ha che i gruppi di elementi di $A'\,B'$ indipendenti dagli elementi fondamentali di Ω si distribuiscono in coppie di poligoni e poliedri coniugati in Ω.

Gli $\binom{m}{n}$ F_{n-1} di A', di cui $\binom{m-1}{n-1}$ passano per ciascun vertice di A, danno $\binom{\binom{m}{n}}{n} - m\binom{\binom{m-1}{n-1}}{n}$ punti (*diagonali di* A) costituenti un gruppo A'': analogamente possiamo ottenere un gruppo di F_{n-1} B'', e proseguendo gruppi $A^{(v)}\,B^{(v)}$ di elementi il cui numero (per $m > n+1$) và crescendo oltre ogni limite, e che costituiscono quelli che diremo *sistemi coniugati* in Ω dati da A B.

Per la dipendenza di due sistemi coniugati dal poligono e poliedro coniugati che li individuano, deduciamo:

Le potenze dispari di Ω e queste sole correlazioni trasformano l'uno nell'altro due sistemi coniugati, le potenze pari, e non altre proiettività, li trasformano in sè stessi.

Ne segue, come per A', B', la proprietà caratteristica seguente di due sistemi coniugati $A\,A'\,A''\,A''' \ldots A^{(v)} \ldots$, $B\,B'\,B'' \ldots B^{(v)} \ldots$;

Gli elementi di $A^{(v)}\,B^{(v)}$ indipendenti dagli elementi fondamentali di Ω si distribuiscono in coppie di poligoni e poliedri coniugati.

Dunque:

Se un gruppo $A^{(\nu)}$ $(B^{(\nu)})$ *ha un numero di elementi non multiplo di* m, *alcuni dei suoi elementi sono dipendenti dagli elementi fondamentali di* Ω.

Nel piano una correlazione generale Ω ha un punto ed una retta che non si appartengono e si corrispondono in doppio modo in Ω, detti *polo* e *polare* (Porchiesi l. c.); si ottiene subito:

Se un quadrangolo A *ed un quadrilatero* B *sono coniugati in una correlazione generale ciclica d'ordine* 4, *dei tre punti diagonali di* A *uno è il polo e due sono sulla polare di* Ω; *delle tre rette diagonali di* B *una è la polare e due passano per il polo di* Ω..

Se B appartiene ad $A^{2\nu+1}$, A appartiene a $B^{2\nu+1}$ e i due sistemi coniugati coincidono: se essi coincidono B deve appartenere ad un gruppo $A^{2\nu+1}$.

Dunque:

Perchè due sistemi coniugati coincidano è necessario e sufficiente che ciascuno dei poligoni coniugati fondamentali appartenga ad un gruppo d'ordine $2\nu+1$ *dedotto dall'altro.*

Otterremo allora un sistema che potremo dire *autoconiugato d'ordine* ν.

10. Sia ora $m = n + 1$ Se la correlazione ciclica Ω d'ordine m in F_n è generale, non si hanno più sistemi coniugati in Ω, ma solo $(n+1)$ goni e $(n+1)$ edri coniugati A, B, che danno un $(n+1)$ edro ed un $(n+1)$ gono coniugati A' B'.

Se A coincide con B' e quindi A' con B, si ha un $(n+1)$ gono *autoconiugato in* Ω.

Dato un $(n+1)$ gono autoconiugato in Ω, (indipendente dagli elementi fondamentali), non può un vertice corrispondere alla faccia opposta, poichè la corrispondenza sarebbe doppia, cioè il vertice un punto unito di Ω^2 (e la faccia opposta un F_{n-1} unito di Ω^2).

Se ne deduce facilmente che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un $(n+1)$ gono, *ciclo generale di* Ω^2, *sia autoconiugato in* Ω *è che sia iscritto nella quadrica luogo e quindi circoscritto alla quadrica inviluppo* (*e viceversa*).

Vi sono ∞^{n-1} $(n+1)$ goni *autoconiugati.*

Agosto 1890.