Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Le omografie armoniche negli spazi lineari ad n dimensioni

Giornale di Matematiche **XXX** (1892), pp. 319-325. (Scritto del 1890)

L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

LE OMOGRAFIE ARMONICHE NEGLI SPAZI LINEARI AD n DIMENSIONI

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

---

1. È facile rappresentare le omografie tra due spazi ad n dimensioni $F_n F'_n$, nei punti di uno spazio $S'_{n(n+2)}$ lineare ad $n(n+2)$ dimensioni prendendo come coordinate di questi punti i coefficienti delle equazioni di queste omografie (*): allora le omografie degeneri tra $F_n F'_n$ son rappresentate dai punti d'uno spazio algebrico ad $n(n+2)-1$ dimensioni, d'ordine $n+1$ ($S^{n+1}_{n(n+2)-1}$).

Il rapporto anarmonico costante dei quattro punti d'una retta di F'_n trasformati di un punto di F_n in quattro omografie $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$ di un fascio, lo diremo *rapporto anarmonico* $(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4)$ delle quattro omografie; esso è uguale al rapporto anarmonico dei quattro punti rappresentanti le $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$ sulla retta di $S'_{n(n+2)}$ che rappresenta il fascio.

Le omografie degeneri di caratteristica $n-h+1$ corrispondono a punti h-pli di $S^{n+1}_{n(n+2)-1}$.

Rispetto ad m omografie di un fascio possiamo considerare *il gruppo* r^0 *polare di una data del fascio, che contiene* $m-r$ *omografie.*

Dicendo polari l'una dell'altra, due omografie, senza dire rispetto a che gruppo di omografie, intenderemo sempre rispetto alle omografie degeneri del loro fascio.

2. Dico *armoniche* due omografie $\pi_1 \pi_2$ l'una tra $F_n F'_n$, l'altra tra $F'_n F_n$, quando la π_1 sia la polare n^a di π_2^{-1} ossia questa appartiene al 1^0 gruppo polare di π_1.

(*) Cfr. Stephanos: Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace, avec application à l'étude des rotations sphériques. M. Annalen, vol. XXII. Aschieri, Ist. Lomb. XII.

Se le due omografie sono

$$\pi_1 \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, v_k = 0 \qquad\qquad \pi_1 \equiv \Sigma\, a_{ik}\, y_i\, u_k = 0\,,$$

si ha

$$\pi_2^{-1} \equiv \Sigma\, a'_{ik}\, x_i\, v_k = 0$$

dove

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial\,|\,a'_{ik}\,|}{\partial a'_{ik}}\,,$$

sicchè la relazione di armonia fra $\pi_1\,\pi_2$ è

$$a_\alpha = \Sigma\, a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0\,,$$

e quindi è reciproca e bilineare tra le omografie.

Dunque: *Due omografie tra* $F_n\,F'_n$. $F'_n\,F_n$ *sono armoniche se l'una è la* n^a *polare dell'inversa dell'altra, ossia l'inversa dell'una appartiene al* 1° *gruppo polare dell'altra. Le omografie armoniche ad una tra* $F_n\,F'_n$ *compongono un sistema lineare* $\infty^{n(n+2)-1}$ *(armonico associato) di omografie tra* $F'_n\,F_n$, *che è il sistema lineare polare dell'inversa di quella.*

Ad un fascio generale di omografie tra $F_n\,F'_n$, *appartengono* n *omografie le cui inverse sono armoniche ad una data omografia del fascio, ed insieme a quelle fanno corrispondere ad un punto qualunque di* F_n, $n+1$ *punti d'una retta componenti un gruppo armonico a quello delle* $n+1$ *intersezioni della retta colle facce del* 2° $(n+1)$ *gono base* (*).

L'armonia tra due omografie che qui consideriamo, è una estensione di quella considerata dal sig. Segre (Crelle C) per le binarie, e dai signori Pasch e Rosanes (risp. Math. Ann. XXIII e Crelle LXXX e XC). (Quando scrissi questa nota ignoravo che un'estensione era già stata data pel caso generale dal sig. Segre in una lettera al sig. Rosanes (Math. Ann. t. 24) la quale comprende il nostro teorema del n.° 3).

Un'altra dimostrazione di questo è data dal sig. Castelnuovo (« Su certi gruppi associati di punti » Rend. Palermo t. III) — Decembre 1892.

2. L'equazione di un'omografia π_1 tra $F_n\,F'_n$ riferita a $2\,(n+1)$ goni coniu-

---

(*) Cfr. la mia Nota su: Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi ad n dimensioni. (Acc. Lincei 90). Citando questa nota colgo l'occasione per avvertire che omisi là di rammentare la memoria del sig. Segre sulle omografie dello spazio (Acc. Lincei 1884) sebbene in essa vi sieno alcuni dei risultati dati nei §§ di quella nota.

gati come fondamentali per le coordinate è

$$(1) \qquad c_1 x_1 v_1 + c_2 x_2 v_2 + \ldots + c_{n+1} x_{n+1} v_{n+1} = 0 ;$$

se l'omografia tra $F'_n F_n$

$$(2) \qquad \pi_2 \equiv y_1 \alpha_u^{(1)} + y_2 \alpha_u^{(2)} + \ldots + y_{n+1} \alpha_u^{(n+1)} = 0$$

è armonica a π_1, per la collineazione prodotto

$$\pi_2 \pi_1 \equiv f = \sum_{ik} c_i \alpha_k^{(i)} x_i u_k = 0$$

l'invariante lineare

$$i = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_i} = 0$$

Questo invariante per le collineazioni piane è stato considerato dal Clebsch (Vol. III. Integrali Abeliani e Connessi. Cap. VI. Il Connesso di 1° ordine e di 1ª classe). Il significato del suo annullarsi quando la $f = 0$ è una collineazione generale in F_n è (come si vede estendendo quello dato dal Clebsch per $n = 2$) che la serie dei punti $0 , 1 , 2 \ldots n-1 , n+1$, dedotta da un punto 0 di F_n applicando la $f = 0$, il suo quadrato, ... la sua potenza $n-1$, e la sua potenza $n+1$, appartiene ad un F_{n-1} essendo $a_\alpha = 0$; quindi se diciamo in *posizione lineare* una collineazione in F_n che ha l'invariante $i = 0$, si ha:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due omografie tra $F_n F'_n$, $F'_n F_n$ *sieno armoniche è che la collineazione prodotto, in* F_n *(o in* F'_n*), sia in posizione lineare.*

3. Riprendiamo le equazioni (1) (2) delle omografie armoniche $\pi_1 \pi_2$: ai punti $v_r = 0$ di F'_n (vertici dello $(n+1)$gono fondamentale in F'_n) corrispondono in π_1^{-1} i punti $x_r = 1$ (vertici dello $(n+1)$gono fondamentale delle coordinate in F_n); se ai detti punti $v_r = 0$ (cioè $y_r = 1$) per $r = 1 , 2 , \ldots , n$, corrispondono in π_2 punti appartenenti alle facce $u_r = 1$ del poliedro fondamentale di F_n, avremo

$$\alpha_1^{(1)} = 0 \qquad \alpha_2^{(2)} = 0 \ldots\ldots \alpha_n^{(n)} = 0 ,$$

e perciò essendo $\pi_1 \pi_2$ armoniche

$$\Sigma c_i \alpha_i^{(i)} = c_{n+1} \alpha_{n+1}^{(n+1)} = 0 ,$$

e poichè

$$c_{n+1} \gtrless 0 ,$$

$$\alpha_{n+1}^{(n+1)} = 0 ,$$

per cui anche il corrispondente in π_2 del vertice $v_{n+1} = 0$ (cioè $y_{n+1} = 1$) appartiene alla faccia $u_{n+1} = 1$ del poliedro fondamentale di F_n. Ne risulta:

Se in $F_n F'_n$ *si hanno* $2(n+1)$ goni *coniugati in una omografia tali che ad* r *vertici del* 2^o *corrispondano a una omografia armonica alla data, n punti appartenenti alle n facce del* 1^o *opposte ai vertici che loro corrispondono nella inversa della* 1^a *omografia, allo* $(n+1)^o$ *vertice del* 2^o $(n+1)$ gono *corrisponde nella* 2^a *omografia un punto della* $(n+1)^a$ *faccia del* 1^o *: viceversa se questa proprietà sussiste per due omografie, queste sono armoniche.*

Dati n punti $1, 2, 3 \ldots n$ in F'_n, ed n punti $1_1, 2_1, 3_1, \ldots n_1$ di F_n, sieno $1', 2', 3' \ldots n'$ i corrispondenti di $1, 2, 3 \ldots n$ nell'inversa π_1^{-1} d'un omografia π_1 tra $F_n F'_n$; gli F_{n-1} $(1'2' \ldots n')\,(1_1 2' \ldots n')\,(1'2_1 3' \ldots n') \ldots (1'2' \ldots (n-1)'n_1)$ sono le facce di un determinato $(n+1)$ gono di F_n avente n facce passanti per gli n punti $1_1, 2_1, 3_1 \ldots n_1$, opposte ai corrispondenti dei punti $1', 2', \ldots n)$ in π_1^{-1}: allora se $1_1, 2_1 \ldots n_1$ sono i corrispondenti di $1', 2' \ldots n'$ in una omografia π_2 tra $F'_n F_n$, armonica a π_1, si ottiene un $(n+1)$ gono di F'_n i cui coniugati rispetto alle due omografie armoniche sono iscritto l'uno nell'altro.

Dunque:

In due omografie armoniche esistono ∞^{n2} *coppie di* $(n+1)$ goni *coniugati di un medesimo rispetto ad un* $(n+1)$ gono *dell'altro spazio, iscritti e circoscritti fra loro: l'esistenza di tali coppie di* $(n+1)$ goni *è condizione necessaria e sufficiente per l'armonia delle due omografie.*

Le proprietà dimostrate sono la estensione di quelle di Pasch e di Rosanes (l. c.) per le correlazioni nel piano e nello spazio a tre dimensioni, e danno per le proiettività binarie le proprietà fondamentali trovate dal Segre (l. c.): la definizione che ho data di armonia tra due omografie in generale, riferita alla rappresentazione delle omografie nello $S'_{n(n+2)}$, estende quella di Stephanos (*) per le proiettività binarie, che rappresenta le proiettività binarie armoniche in una coppia di punti del nostro spazio coniugati rispetto alla quadrica rappresentante le proiettività degeneri.

4. Riferendosi alla rappresentazione delle omografie nei punti dello $S'_{n(n+2)}$ si ottiene subito:

(*) Stephanos (l. c.).

Le omografie armoniche a se stesse sono le omografie degeneri. Le omografie più di una volta degeneri tra $F_n F'_n$ *sono armoniche a tutte le omografie tra* $F'_n F_n$.

5. Si ha evidentemente:

Un sistema lineare ∞^m *di omografie tra* $F_n F'_n$, *ne individua uno armonico (associato) tra* $F'_n F_n$ $\infty^{n(n+2)-m-1}$: *la relazione fra due sistemi armonici è reciproca: i prodotti di tutte le omografie dell'uno per tutte quelle dell'altro sono le* $\infty^{n(n+2)-1}$ *collineazioni in posizione lineare in* F_n *(o in* F'_n*), che costituiscono il sistema armonico all'identità.*

Se due sistemi lineari di omografie uno in F_n, *l'altro in* F'_n, *sono proiettivi (trasformabili l'uno nell'altro mediante un'omografia non degenere tra* $F_n F'_n$*) i loro sistemi armonici sono pure proiettivi (e viceversa), e trasformabili l'uno nell'altro mediante la medesima omografia tra* $F_n F'_n$.

Così la classificazione dei sistemi lineari $\infty^{n(n+2)-1}$ è ridotta a quella delle omografie; quella dei sistemi $\infty^{n(n+2)-2}$ a quella dei fasci, ecc.

In particolare deduciamo:

Tutte le omografie permutabili con un sistema lineare di omografie in F_n, *sono permutabili col sistema armonico.*

E poichè tutte le omografie sono permutabili coll'identità:

Tutte le omografie in F_n *trasformano in se stesso il sistema* $\infty^{n(n+2)-1}$ *delle collineazioni in posizione lineare in* F_n: *ed è questo l'unico sistema lineare* $\infty^{n(n+2)-1}$ *di collineazioni in* F_n, *che goda di questa proprietà.*

7. Un'altra estensione dell'armonia considerata dal Segre per le proiettività binarie, si ha definendo come *armoniche* una collineazione π tra $F_n F'_n$ e una correlazione Ω tra $F'_n F_n$ il cui prodotto $\Omega\pi$ è un sistema polare. In tal caso

$$\Omega\,\pi\,\Omega\,\pi = 1$$

$$\Omega\,\pi\,\Omega\,\pi = \pi^{-1}$$

$$\pi\,\Omega\,\pi\,\Omega = 1\ ,$$

percui la relazione di armonia tra π, Ω, è reciproca.

Moltiplicando una collineazione π tra $F_n F'_n$ per un sistema polare in F'_n, si ha una correlazione Ω tra $F_n F'_n$ armonica a π^{-1}, quindi essendo i sistemi polari in F'_n $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$, e componenti un sistema lineare, si ha:

Tutte le correlazioni (o collineazioni) tra $F_n F'_n$ *armoniche ad una collineazione (o correlazione) tra* $F'_n F_n$, *compongono un sistema lineare armonico*

(*coniugato*) *alla data omografia,* $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$, *che moltiplicato per la data omografia dà il sistema lineare dei sistemi polari in* F_n (*o in* F'_n).

In un F_n *il sistema lineare armonico coniugato all'identità è quello dei sistemi polari.*

Ne deduciamo:

Ad un fascio di collineazioni è coniugato armonico un sistema lineare in generale ∞^n *di correlazioni (in casi speciali un sistema più ampio): la relazione fra due tali sistemi armonici è che i prodotti delle collineazioni dell'uno per le correlazioni dell'altro compongono il sistema lineare* $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$ *dei sistemi polari in* F_n (*o in* F'_n).

In generale non vi sono correlazioni armoniche a tre collineazioni non appartenenti ad un fascio.

Si ha poi:

Se due sistemi lineari di omografie, l'uno in F_n, *l'altro in* F'_n *sono proiettivi, anche i sistemi coniugati armonici sono proiettivi e viceversa.*

Le omografie permutabili con un sistema son permutabili col coniugato.

Considerando il sistema armonico al fascio dell'identità e di una collineazione qualunque in F_n si ottiene:

Una collineazione qualunque in un F_n *può sempre decomporsi in* ∞^n (*o più*) *modi nel prodotto di due sistemi polari, e questi sistemi polari suoi fattori compongono un sistema lineare ad* n (*o più*) *dimensioni.*

8. Se la collineazione π e la correlazione Ω sono armoniche,

$$(\Omega\,\pi)^2 = (\pi^{-1}\,\Omega^{-1})^2 = 1\,,$$

dunque:

Le inverse di una collineazione e d'una correlazione armoniche son armoniche.

9. Sieno π, Ω una collineazione tra $F_n F'_n$, e una correlazione tra $F'_n F_n$, armoniche fra loro; i punti e gli F_{n-1} di F'_n corrispondenti in π, Ω^{-1} ad un punto di F_n si corrispondono in un sistema polare, e la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa correlazione così ottenuta sia un sistema polare è che esistano per essa infiniti $(n+1)$ goni auto-coniugati.

Dunque

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una collineazione tra $F_n F'_n$ *e una correlazione tra* $F'_n F_n$ *sieno armoniche, è che in ciascuno dei due spazi esistano infiniti* (n + 1) goni *cui corrispondano nella collineazione* (*o correlazione*)

e *nell' inversa della correlazione* (o *collineazione*) *i medesimi* $(n+1)$ goni o $(n+1)$ dri.

10. Se π, Ω sono una involuzione ed un sistema polare in F_n, armonici,

$$\Omega\,\pi = \pi^{-1}\,\Omega^{-1} = \pi\,\Omega\,,$$

percui:

Un'involuzione e un sistema polare armonici sono permutabili e viceversa.

Siccome poi

$$\pi\cdot\pi\,\Omega = \pi^2\,\Omega = \Omega \qquad , \qquad (\pi\,\Omega)^2 = \pi^2\,\Omega^2 = 1$$

si ha:

Il prodotto d' un' involuzione e di un suo sistema polare armonico, è un sistema polare armonico alla data involuzione.

Agosto 1890.