Enriques, Federigo

Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **II** (1893), pp. 468-473.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali

Estratto dal vol. II, 1° Semestre, fasc. 10°, — Seduta del 21 maggio 1893.

SUI GRUPPI CONTINUI

DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE NEL PIANO

NOTA

FEDERICO ENRIQUES

XII Enriques

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Secondo il sig. Lie (¹) dicesi *gruppo continuo* di trasformazioni sopra n variabili (o in un S_n) un insieme continuo di trasformazioni, dipendenti da un numero finito di parametri, tale che il *prodotto* $T\pi$ di due trasformazioni del gruppo sia ancora una trasformazione di esso, ed insieme ad una trasformazione π comparisca nel gruppo anche l'inversa π^{-1}.

« Io prendo in esame i gruppi continui di trasformazioni birazionali (o cremoniane) del piano e dimostro che essi possono trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti *tipi*:

« 1.° *Gruppo* ∞^8 *delle omografie e suoi sottogruppi.*

« 2.° *Gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè il sistema lineare delle coniche con due punti base distinti e quindi i due fasci di raggi coi centri in quei punti base, e suoi sottogruppi* (*o*, se si vuole, *gruppo delle inversioni rispetto ai circoli del piano e suoi sottogruppi).*

« 3.° *Gruppo* ∞^{n+5} *delle trasformazioni di Jonquières (d'ordine* n) *che mutano in sè il sistema lineare* ∞^{n+1} *delle curve d'ordine* n *con un punto* (n — 1)*plo ed in esso le* n — 1 *tangenti fisse, e suoi sottogruppi.*

« 2. Si abbia nel piano un gruppo continuo ∞^n di trasformazioni cremoniane, di cui π,T sieno due trasformazioni generiche. Un sistema lineare ∞^k ($k \geq 1$) di curve algebriche viene trasformato da π in un altro sistema ∞^k di curve d'un certo ordine n; la T trasforma il nuovo sistema in un altro pure di curve d'ordine n che è il trasformato del primitivo nella trasformazione del gruppo $T\pi$; l'insieme di tutti i trasformati del primitivo sistema nelle trasformazioni del gruppo costituisce un sistema continuo (in generale non lineare) trasformato in se stesso da tutte le trasformazioni del gruppo, ossia costituisce ciò che dicesi un *corpo* del gruppo stesso. Questo sistema di curve d'ordine n è immerso nel sistema lineare di tutte le curve d'ordine n,

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig-Teubner, 1888. 90).

e quindi appartiene ad un sistema lineare di dimensione minima di curve del detto ordine, che resulta da esso individuato; un tal sistema lineare deve pure esser trasformato in se stesso dalle trasformazioni del gruppo, giacchè altrimenti il corpo di curve prima costruito risulterebbe comune ad esso e ad un suo trasformato e quindi appartenente ad un sistema lineare (comune ai due) di dimensione minore. In questo modo partendo da un sistema ∞^k ($k \geqq 1$) di curve algebriche, si può ottenere un sistema lineare di curve (di genere maggiore od uguale del primitivo) trasformato in se stesso dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo ∞^r. Un tal sistema appartiene ad un sistema determinato dai suoi punti base (colle date molteplicità) che è pure trasformato in se stesso; infatti soltanto dalle molteplicità della curva generica di un sistema lineare nei punti fondamentali di questo e dal suo ordine, dipendono l'ordine e la molteplicità della curva corrispondente in una trasformazione cremoniana.

« 3. Il sistema lineare delle curve d'ordine $n-3$ *aggiunte* alla curva generica d'ordine n d'un sistema lineare C, dicesi *sistema aggiunto* di C; dal sistema aggiunto si possono forse staccare delle curve fisse (fondamentali pel dato sistema) ed il sistema residuo dicesi aggiunto *puro* di quello dato: il sig. Castelnuovo [1] ha stabilito che quando un sistema lineare viene birazionalmente trasformato in un altro, l'aggiunto puro del primo si trasforma nell'aggiunto puro del secondo.

« Dato un gruppo continuo di trasformazioni cremoniane si costruisca nel piano (come ho indicato) un sistema lineare, di genere p arbitrariamente grande, trasformato in se stesso; anche il sistema aggiunto puro di esso (che è ∞^{p-1}) dovrà essere un corpo per il gruppo. Si consideri poi l'aggiunto puro di questo sistema aggiunto e così via; gli ordini dei successivi sistemi vanno decrescendo e quindi il procedimento deve avere un termine; d'altra parte ciò non può avvenire, finchè non si giunga ad un sistema di curve razionali od ellittiche, poichè una curva di genere >1 ha almeno un fascio di curve aggiunte. Si perviene così a trovare un sistema lineare (∞^1 almeno) di curve razionali o ellittiche trasformato in se da tutte le trasformazioni del gruppo.

(1) *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (Acc. Torino M. 1891). Il procedimento (qui brevemente esposto) con cui dato un sistema lineare trasformato in sè da una trasformazione birazionale si deduce un sistema di genere 0,1 pure trasformato in se stesso, è stato usato dal sig. Castelnuovo (Acc. Lincei 1892). Lo enunciò nel 1885 il sig. S. Kantor (Comptes rendus) chiamandolo: *Principio della diminuzione delle funzioni* φ, senza però dimostrare il teorema citato sulla invariantività del sistema aggiunto che non è affatto incluso nel noto teorema del sig. Noether sull'invariantività (rispetto a trasformazioni biunivoche della curva e non del piano) della serie g^{p-1}_{2p-2} segata sopra una curva d'ordine n e genere p dalle sue aggiunte d'ordine $n-3$ (cfr. anche Castelnuovo, Acc. Tor. M. c, pag. 6).

« 4. Un sistema lineare di curve ellittiche può sempre trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti d'ordine minimo [1]:

« *a*) sistema lineare di quartiche con due punti base doppi;

« *b*) sistema lineare di cubiche;

« *c*) fascio di curve d'ordine $3r$ con 9 punti base *rpli*.

« Se un sistema *a*) viene trasformato in se dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo, anche il sistema delle coniche per i due punti base (che è l'unico la cui curva generica incontra in 4 punti mobili la curva generica del sistema) deve essere trasformato in se stesso; le trasformazioni che mutano in se questo sistema di coniche (contenente la rete delle rette del piano) sono quadratiche e corrispondono alle trasformazioni proiettive in se d'una quadrica o d'un cono quadrico; perciò sono ∞^6 o ∞^7 secondochè i punti base del sistema sono distinti o infinitamente vicini; nel loro gruppo è contenuto un sottogruppo di ∞^4 omografie aventi i due punti base uniti [2].

« Se un sistema *b*) senza punti base o con un punto base è trasformato in se dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo, queste trasformazioni sono omografie poichè ogni altra trasformazione eleva l'ordine della curva generica del sistema.

« Dico che accade egualmente per ogni altro sistema *b*) o per un sistema *c*).

« Si possono trattare insieme i due casi dicendo che il sistema trasformato in se è un sistema lineare di curve d'ordine $3r$ ($r \geq 1$) con punti base *rpli* in numero di due almeno. Consideriamo le coniche per due punti base (*rpli*) del sistema e le curve trasformate nella trasformazione generica π del gruppo: sia n l'ordine di queste curve ed $h_1\, h_2 \ldots$ le moltiplicità che esse hanno nei punti base del sistema, $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots$ quelle che eventualmente esse possono avere in altri punti fissi fuori dei detti punti base. Le curve d'ordine n d'un tal sistema segano (come le coniche di cui sono le trasformate) in $4r$ punti mobili le curve d'ordine $3r$ del sistema primitivo; avremo dunque:

$$3rn = r\Sigma h_i + 4r$$

cioè:

$$3n = \Sigma h_i + 4.$$

« Siccome poi le curve del sistema sono razionali deve aversi:

$$n(n-3) - \Sigma h_i(h_i - 1) - \Sigma \varrho_h (\varrho_h - 1) = -2\,,$$

ossia (tenendo conto della relazione precedente):

$$n^2 - \Sigma h_i^2 - \Sigma \varrho_h(\varrho_h - 1) = 2.$$

[1] Cfr. Guccia (Circ. di Palermo, t. 1887). Il caso del fascio era stato anteriormente rattato dal sig. Bertini (Ann. di Mat. 3. 9).

[2] Per la letteratura relativa alle trasformazioni proiettive d'una quadrica in se, cfr. Clebsch-Lindemann 2° Bd. s. 356 e segg.

« D'altra parte le curve del sistema s'incontrano (due a due) in due punti variabili, quindi:

$$n^2 - \Sigma h^2{}_i - \Sigma \varrho^2{}_h = 2 ;$$

si deduce dunque:

$$\Sigma \varrho_h = 0,$$

e perciò tutte le quantità ϱ_h sono nulle, cioè il sistema ∞^3 trasformato di quello delle coniche per due punti base *rpli* del primitivo sistema C, non ha punti base fuori di quelli di C. Ora un tal sistema ∞^3 (come quello di cui è il trasformato) è determinato dai punti base, e poichè le quantità intere h_i non mutano variando la trasformazione scelta nel gruppo continuo, si conclude che il sistema ∞^3 è fisso; siccome poi al gruppo appartiene la trasformazione identica (per la definizione di gruppo), così si deduce che il sistema delle coniche per due punti base di C è trasformato in se da tutte le trasformazioni del gruppo. Queste trasformazioni sono dunque (come abbiam notato) quadratiche ed in particolare omografiche; ma le trasformazioni quadratiche che mutano in se il sistema delle coniche elevano il grado delle curve d'ordine $3r$ aventi solo due punti *rpli* in due punti fondamentali, perciò il gruppo non può esser composto che delle omografie contenute nel detto gruppo di trasformazioni.

« Così dall'esistenza d'un sistema lineare di curve ellittiche mutato in se dalle trasformazioni d'un gruppo continuo, si trae che le trasformazioni sono omografie (casi *b*), *c*)), o trasformazioni quadratiche mutanti in se il sistema delle coniche per due punti (caso *a*)).

« 5. Dobbiamo ora esaminare il caso d'un gruppo continuo di trasformazioni cremoniane che mutino in se un sistema lineare di curve razionali, il quale sistema può sempre supporsi determinato dai punti base colle date molteplicità (per un'osservazione del § 2).

« Cominciamo dal mostrare che se il sistema è un fascio può sempre costruirsi un altro sistema più ampio di curve razionali pure trasformato in se stesso. Basta per ciò trasformare birazionalmente il fascio in quello delle rette per un punto O ([1]) ed allora il gruppo si muta in un gruppo di trasformazioni di Jonquières d'un certo ordine n in cui alle rette corrispondono le curve (d'ordine n) d'una rete omoloidica col punto base O $(n-1)$plo, quindi le curve d'ordine n con O $(n-1)$plo aventi come punti semplici i punti base (fuori di O) comuni alle dette reti omoloidiche, formano un corpo per il gruppo.

([1]) Cfr. Noether (Math. Ann. Bd. III).

« Ciò posto un sistema lineare di curve razionali (di dimensione > 1) determinato dai punti base può sempre trasformarsi in uno dei seguenti d'ordine minimo ([1]):

([1]) Cfr. Guccia (Circ. di Palermo, t. I, 1886). La riduzione con trasformazioni quadratiche della rete era stata anteriormente trattata dal sig. Noether (Math. Ann. Bd. V).

« a) rete delle rette del piano;

« b) sistema ∞^5 delle coniche del piano;

« c) sistema lineare ∞^{m+1} delle curve d'ordine $\frac{m+2}{2}$ con un punto base $\left(\frac{m}{2}\right)$plo ed un punto base semplice a distanza finita;

« d) sistema lineane ∞^{m+1} delle curve d'ordine $\frac{m+n}{2}$ $(0 \leq n \leq m)$ con un punto base $\left(\frac{m+n}{2}-1\right)$plo con $n-1$ tangenti fisse comuni a tutte le curve.

« Un sistema a) o b) non può ammettere altre trasformazioni cremoniane in se, che trasformazioni omografiche.

« Se un sistema c) o d) è trasformato in se stesso dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo, anche il fascio delle rette per un punto base è trasformato in se stesso, giacchè è immerso nel dato sistema e con un semplice calcolo si vede che non vi sono nel sistema altri fasci di curve seganti quella generica in egual numero di punti mobili. Dunque nel caso c) si hanno due fasci uniti di raggi, ossia il gruppo è costituito da trasformazioni quadratiche che mutano in se il sistema delle coniche pei due punti base (distinti) (cfr. § 3).

« Resta che esaminiamo il caso d'un sistema d) trasformato in se dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo.

« Il fascio delle rette per il punto multiplo O (trasformato in se) presenta due condizioni ad una curva generica del sistema che debba contenerlo, giacchè basta per ciò costringere una curva del sistema ad avere due punti sopra una retta generica del fascio: il sistema residuo ∞^{m-1} (ottenuto staccando dal sistema d) il detto fascio) deve essere pure mutato in se dalle trasformazioni del gruppo. Staccando successivamente il medesimo fascio da questo sistema residuo ∞^{m-1} e così via, perveniamo ad un sistema di curve d'ordine n col punto O $(n-1)$plo e le $n-1$ tangenti fisse per O, il quale è pure mutato in se dalle trasformazioni del gruppo. Qui l'operazione ha un termine poichè il sistema residuo del fascio rispetto al detto sistema di curve d'ordine n, è riduttibile.

« Il sistema stesso è ∞^{n+1}, rappresentativo del cono razionale normale d'ordine n dello spazio ad $n+1$ dimensioni (S_{n+1}): un tale cono ammette ∞^{n+5} trasformazioni proiettive in se, giacchè per una di esse può scegliersi ad arbitrio un iperpiano (S_n) unito, una proiettività binaria a cui corrisponde un'omografia di S_n che muta in se la sezione (curva razionale normale) del cono, ed infine il rimanente invariante assoluto dell'omografia. Corrispondentemente si hanno nel piano ∞^{n+5} trasformazioni di Jonquières (formanti gruppo) in ciascuna delle quali corrispondono alle rette le curve d'ordine n d'una rete omoloidica con O $(n-1)$plo le tangenti fisse in O, ed altri $n-1$ punti base semplici.

« Dunque se un sistema di curve razionali è mutato in se dalle trasformazioni d'un gruppo continuo, queste sono omografie (casi *a*) o *b*)) oppure mutano in se il sistema delle coniche per due punti (caso *c*)), o il sistema ∞^{n+1} delle curve d'ordine n con un punto $(n-1)$plo e le tangenti fisse in esso (caso *d*)).

« 6. Riassumendo le conclusioni dei §§ 4 e 5, e pensando a quella del § 3, otteniamo appunto il resultato enunciato nel § 1, cioè riconosciamo l'esistenza di 3 tipi di gruppi di trasformazioni cremoniane:

« 1° gruppo ∞^8 delle omografie;

« 2° gruppo ∞^6 delle trasformazioni quadratiche che mutano in se due fasci di raggi;

« 3° gruppo ∞^{n+5} delle trasformazioni di Jonquières (d'ordine n) che mutano in se il sistema lineare ∞^{n+1} delle curve d'ordine n con un punto $(n-1)$plo e le $n-1$ tangenti fisse.

« Ogni gruppo di trasformazioni cremoniane appartiene come sottogruppo ad uno di questi 3 gruppi o ad un suo trasformato. I 3 gruppi 1°, 2°, e 3° sono irreducibili fra loro (non si può dir lo stesso per i loro sottogruppi); ciò si riconosce facilmente rammentando che il solo gruppo ∞^6 d'omografie è quello delle omografie con un punto unito, e che non esistono gruppi ∞^7 d'omografie piane (1).

« Il resultato stabilito può anche enunciarsi così:

« *La geometria nel piano che ha come gruppo principale di trasforzioni* (2) *un gruppo continuo di trasformazioni cremoniane (dipendente da un numero finito di parametri), coincide colla geometria proiettiva nel piano o sulla rigata quadrica* (3) *o sul cono razionale normale dello spazio ad* $n+1$ *dimensioni, o con un caso particolare di una di queste tre geometrie* ».

(1) Cfr. Lie, op. c. Bd. I, s. 569.

(2) Per il concetto di gruppo principale di trasformazioni, cfr. il *Programma* del sig. Klein (Università di Erlangen 1872) tradotto in italiano dal sig. Fano (Ann. di Mat. s. 2a, t. XVII).

(3) Dicendo rigata quadrica intendo di escludere le trasformazioni proiettive di 2a specie che mutano le generatrici d'un sistema della quadrica in quelle dell'altro, aggiungendo (come corpo) un sistema di generatrici al gruppo totale delle trasformazioni proiettive della quadrica in sè (che non è continuo).