Enriques, Federigo

Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **II** (1893), pp. 3-8.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 2 luglio 1893.
Estratto dal vol. II, 1° Sem., Serie 5ª, fasc. 1.

UNA QUESTIONE SULLA LINEARITÀ DEI SISTEMI DI CURVE

APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. Dicesi *sistema lineare* ∞^n di curve algebriche sopra una superficie algebrica F, un sistema di curve che può esser segato sulla F dalle superficie d'un sistema lineare con n parametri

$$\sum_{1}^{n+1} \lambda_i f_i(xyz) = 0.$$

« Questa definizione analitica è equivalente alla seguente definizione geometrica: dicesi sistema lineare ∞^n sopra F un sistema di curve tale che

a) per n punti generici della F passi *una* curva del sistema,

b) gli elementi (curve) del sistema sieno riferibili *proiettivamente* ai punti d'uno spazio lineare S_n.

« S' intende che il sistema ∞^n di curve è riferito proiettivamente ad S_n, quando fra gli elementi (curve) del sistema ed i punti di S_n è stabilita una corrispondenza biunivoca siffatta che alle curve del sistema per un punto della F, corrispondano i punti d'un iperpiano (S_{n-1}) in S_n; da questa proprietà che definisce la rappresentazione proiettiva del sistema su S_n segue l'altra che ad un iperpiano di S_n corrisponde un sistema lineare ∞^{n-1} di curve sulla F, immerso nel dato.

« Per brevità chiamo *sistema* un insieme ∞^n di curve algebriche appartenenti alla superficie F, il quale soddisfi alla condizione *a*); chiamo *rete* e *fascio* rispettivamente un *sistema* ∞^1 e ∞^2. Sorge la questione:

« Esistono *sistemi* non lineari?

« In altre parole: La condizione *b*) è indipendente dalla *a*) o invece è una conseguenza di essa?

« Posta così la questione si risponde subito assegnando effettivi esempi di *sistemi* non lineari: è notissima la esistenza di superficie contenenti un fascio *irrazionale* (il che equivale a non lineare) di curve, e basta considerare sopra una tale superficie i gruppi di n curve del fascio per ottenere un *sistema* ∞^n di curve certo non lineare. Ma questi esempi si riferiscono a *sistemi* di curve o ∞^1 (fasci), o ∞^n di cui la curva generica si spezza (nelle n curve d'un fascio). È interessante di stabilire che questi sono gli unici casi di *sistemi* non lineari, cioè che sussiste il teorema:

« *Un sistema algebrico* ∞^n (*con* $n > 1$) *di curve algebriche irreduttibili appartenenti ad una superficie* F, *tale che* n *punti generici di* F *individuino una curva del sistema che li contiene, è un sistema lineare, segabile quindi mediante un sistema lineare* ∞^n *di superficie.*

« 2. Consideriamo sulla superficie F un *sistema* algebrico ∞^n (con $n>1$) di curve algebriche irreduttibili C; dico che due curve C generiche si segano in un numero finito m di punti variabili coi parametri delle curve C. Infatti, essendo $n > 1$, per un punto arbitrario della F passano due curve C (tra le ∞^{n-1}), e quindi due curve C hanno almeno una intersezione variabile; esse hanno quindi (per la algebricità) un numero finito di punti comuni (variabili) o un numero infinito; ma nel 2° caso esse hanno comune una curva componente e però si spezzano contro l' ipotesi fatta: dunque due curve C hanno comune un numero finito m di punti (variabili). Questo numero m che rimane costante al variare delle due curve C (per la continuità), si dirà il *grado* del sistema delle curve C.

« 3. Sopra la superficie F si abbia una rete di curve irreduttibili C di grado m. Per definizione due punti generici della F individuano una curva C che li contiene, quindi tutte le curve C per un punto formano un fascio (§ 1): due curve di un fascio hanno comuni gli m punti comuni a due di esse, giacchè per due punti della F passa in generale una sola curva C e se ve ne passano due ve ne passano infinite ed inoltre un fascio non può spezzarsi in più sistemi. Dunque tutte le curve C della rete che passano per un punto di un gruppo di m punti comuni a due curve C, passano per gli altri $m-1$; questi gruppi di m punti in numero di ∞^2 formano così una *involuzione*, cioè un tale insieme che un punto appartiene ad *un* gruppo della involuzione. Due curve C hanno comune un gruppo della involuzione; due gruppi della involuzione individuano una curva C che li contiene, cioè la curva C individuata da un punto d'un gruppo insieme ad un punto dell'altro gruppo.

« Allora si consideri una ∞^2 di punti corrispondenti biunivocamente ed algebricamente agli elementi (gruppi) della involuzione: il luogo di questi punti è una superficie algebrica F' riferita in corrispondenza [1. m] alla F: alle curve C della rete appartenente alla F corrispondono sulla F' le curve K d'una rete; infatti per due punti della F' passa la curva K corrispondente alla curva C di F individuata dai gruppi dell' involuzione che corrispondono ai due punti. Sulla F due curve C hanno comune un gruppo dell' involuzione, quindi sulla F' due curve K si segano in un punto. La corrispondenza fra le curve C e le K è proiettiva, cioè ad un fascio di curve C corrisponde un fascio di curve K e viceversa.

« Dunque è sempre possibile di riferire proiettivamente gli elementi (curve) d'una rete appartenente alla superficie F, agli elementi (curve) d'una rete di grado 1 sopra una superficie F'.

« 4. Sieno α, β, due arbitrarie curve K della rete stabilita su F': sieno A, A' due arbitrari punti della curva α, B, B' due arbitrari punti della β. Vi è una curva K della rete che passa per A, A' ed analogamente una per B, B'; queste s' incontrano in un punto O: vi è un fascio di curve K passanti per O. Le curve di questo fascio segano ciascuna in un punto le curve α, β, rispettivamente; le curve α, β, vengono così riferite punto per punto (in modo prospettivo) in tal modo che ai punti A, A' di α corrispondono i punti B, B' di β. Dunque tra le curve (algebriche) α, e β, vi sono ∞^2 corrispondenze algebriche biunivoche ed anzi vi è una tale corrispondenza in cui a due punti (arbitrari) A A' di α corrispondono risp. due punti (arbitrari) B B' di β.

« Si deduce (facendo il prodotto d'una corrispondenza per l' inversa di un'altra) che ciascuna delle due curve α, β, ossia ciascuna curva K, ammette ∞^2 trasformazioni biunivoche in sè stessa: tanto basta per affermare (¹) che le curve K sono razionali. Parimente ogni fascio di curve K (di cui le curve vengono riferite biunivocamente ai punti di intersezione con un'altra curva K) è un fascio razionale (ossia lineare).

« Allora si fissino sulla F' due fasci di curve K i cui centri sieno risp. due punti A', B', e si riferiscano proiettivamente a due fasci di rette coi centri A, B nel piano, in modo che alla curva K che passa per A', B' considerata come appartenente all'uno o all'altro fascio corrisponda sempre la retta A B. Così nasce una rappresentazione biunivoca della superficie F' sul piano; il punto sezione d'una curva K per A' e d'una per B' su F' corrisponde al punto sezione delle due rette del piano omologhe a quelle curve, passanti risp. per A, B.

(¹) Cfr. Schwartz, « Crelle's I., 87, p. 140; e Noether », Mathem. Ann., Bd. XX.

« In questa rappresentazione alle curve K di F′ corrispondono nel piano le rette generate dai fasci di raggi prospettivi coi centri A, B. Così si ottiene una rappresentazione proiettiva della rete di curve K sulla rete delle rette del piano, e quindi anche la rete delle curve C sulla F (la quale, secondo il § 3, è riferita proiettivamente alla rete delle curve K su F′) viene ad esser riferita proiettivamente alla rete delle rette del piano.

« 5. Il teorema enunciato in principio è stato dimostrato per le reti: ogni rete di curve irreduttibili è una rete lineare. Non sarà difficile estendere questo resultato ai *sistemi* ∞^n (con $n > 2$). Supponiamo vero il teorema pei *sistemi* ∞^{n-1} e dimostriamo che esso è vero per quelli ∞^n.

« Si consideri dunque sulla superficie F un *sistema* ∞^n di curve C irreduttibili. Due curve C del *sistema* individuano un fascio (cfr. § 3) composto di tutte le curve che hanno comuni gli stessi m punti comuni alle due (essendo m il grado del *sistema*); ma per n punti ad arbitrio sulla F passa una curva C del *sistema*, e per $n-1$ un fascio di curve C, quindi $m \geq n-1$: tra gli m punti comuni a due curve C $n-2$ indipendenti individuano una rete composta delle curve C che li contengono, quindi, (poichè la rete è riferibile proiettivamente al piano (§ 4)) ogni fascio di curve determinato da due curve C del *sistema* ∞^n è razionale (ossia è lineare).

« Ciò posto si consideri una curva C_0 del *sistema* ∞^{n-1} costituito da tutte le curve C per un punto: ogni fascio di curve C contenente la C_0 ha *una* curva comune col *sistema* ∞^{n-1} cioè quella curva del fascio che passa pel punto scelto; ogni curva C del *sistema* ∞^{n-1} determina colla C_0 un fascio di curve C (razionale) contenente la C_0.

« Il *sistema* ∞^{n-1} di curve C si riferisca proiettivamente (come è possibile per ipotesi) ad un S_{n-1} di S_n; la curva C_0 si faccia corrispondere ad un punto O di S_n (fuori dello S_n). Ad ogni fascio di curve C contenente la C_0 su F corrisponde in S_n una retta per O (quella che proietta il punto di S_{n-1} corrispondente alla curva C del *sistema* ∞^{n-1} appartenente al fascio) e viceversa. Un altro *sistema* ∞^{n-1} di curve C per un punto di F si faccia corrispondere ad un altro S'_{n-1} di S_n: ogni sua curva C determina un fascio colla C_0; a questo corrisponde in S_n una retta per O che incontra lo S'_{n-1} in un punto che diciamo corrispondente della C. Ora sopra ogni fascio di curve C su F, contenente la C_0, si hanno 3 curve C determinate, cioè la C_0, e le due curve C appartenenti ai due *sistemi* ∞^{n-1} scelti; sulla retta corrispondente per O in S_n si hanno tre punti che ordinatamente corrispondono alle tre curve, cioè il punto O e le intersezioni coi due S_{n-1}: tanto basta perchè sia fissata una corrispondenza proiettiva tra gli elementi (curve) del fascio (che è razionale) ed i punti della retta. Per tal modo nasce una corrispondenza biunivoca tra le curve C del dato *sistema* ∞^n su F ed i punti di S_n. Una curva C determina un fascio insieme con C_0, a cui corrisponde in S_n una retta per O; tra il fascio e la retta risulta individuata una proiettività che alla curva C fa corrispondere un punto di S_n; colla costruzione inversa ad un punto di S_n corrisponde una curva C su F.

« Nella corrispondenza fissata al *sistema* ∞^{n-1} delle curve C su F, che passano per un punto, corrisponde una varietà: il *sistema* ∞^{n-1} ha comune un *sistema* ∞^{n-2} con quel *sistema* ∞^{n-1} di cui le curve furono *proiettivamente* riferite ai punti di un S_{n-1} in S_n; infatti sono comuni ai due *sistemi* le curve che passano per i due punti comuni risp. alle curve dell'uno a quelle dell'altro: dunque al *sistema* ∞^{n-1} delle curve C di F per un punto, corrisponde una varietà che sega un S_{n-1} in un S_{n-2}. Una tale varietà deve comporsi di iperpiani (S_{n-1}); ma essa non può essere spezzata poichè il *sistema* ∞^{n-1} di curve C corrispondente su F non può esser spezzato, invero per $n-1$ punti passerebbero altrimenti più curve C di esso appartenenti alle varie ∞^{n-1} costituenti il sistema; dunque al *sistema* ∞^{n-1} delle curve C di F per un punto, corrisponde un iperpiano in S_n.

« Dunque la corrispondenza stabilita tra le curve C del dato *sistema* ∞^n su F ed i punti di S_n è proiettiva; ossia, come appunto abbiamo enunciato in principio, ogni *sistema* ∞^n ($n > 1$) di curve irreduttibili su F è un sistema lineare.

« 6. Il teorema dimostrato si estende senz' altro ai *sistemi* di varietà M_{K-1} a $K-1$ dimensioni contenuti in una varietà M_K a $K > 2$ dimensioni. Basta infatti considerare una superficie sezione della M_K con un'altra qualunque varietà (avente un numero di dimensioni opportuno), ed il *sistema* di curve che sulla superficie vien segato dalle M_{K-1}.

« Così si ha il teorema generale:

« *Se sopra una varietà algebrica* M_K *si ha un sistema algebrico* ∞^n (*con* $n > 1$) *di varietà algebriche irreduttibili* M_{K-1}, *tale che per n punti generici della* M_K *passi una* M_{K-1} *del sistema, il sistema stesso è un sistema lineare* (segabile quindi mediante un sistema lineare di varietà ad $r-1$ dimensioni dello spazio S_n cui la M_K appartiene).

« 7. Mi sembrano opportune alcune considerazioni tendenti a mettere in luce la natura del risultato stabilito in questa Nota.

« Come è noto nella geometria proiettiva del piano il teorema dei triangoli omologici viene dimostrato o usando dello spazio S_3 in cui il piano è contenuto, o usando della teoria delle similitudini, e sembra difficile che possa dimostrarsi facendo a meno di questi elementi o di altri equivalenti.

« In altre parole sembra debba ritenersi che i postulati fondamentali del piano che ordinariamente vengono ammessi (cioè « la continuità » « due rette determinano un punto » « due punti determinano una retta ») non sieno sufficienti a fondare la comune geometria proiettiva del piano, mentre gli analoghi nello spazio bastano a fondare la geometria proiettiva ordinaria dello spazio. Se questa supposizione è giusta si potrebbe dire che in certo modo la geometria si completa nello spazio di tre dimensioni come l'analisi nel campo di due dimensioni (variabili complesse).

« Ora, conservando la nomenclatura adottata, la questione posta può enunciarsi domandando se (prescindendo dalla algebricità ma ammettendo la continuità) esistono superficie contenenti una rete di curve di grado 1 non lineare, od anche se esistono superficie contenenti una rete non lineare di curve di cui due arbitrarie si segano nei gruppi di punti (in numero finito o infinito) d'una involuzione (cfr. § 3). Infatti se si chiamano *rette* le curve della rete e *punti* i gruppi della involuzione, la linearità della rete porta con sè la sussistenza del teorema analogo a quello dei triangoli omologici: viceversa se sussiste un tal teorema si può fondare sulla superficie la geometria analoga alla geometria proiettiva del piano ed ottenere quindi la rappresentazione proiettiva della rete sul piano (colla costruzione della proiettività tra due forme di 2^a specie). Il risultato stabilito consiste dunque essenzialmente in ciò che *la algebricità della rete e delle sue curve basta a provare la sussistenza del teorema dei triangoli omologici nella geometria fondata* (*come ho detto*) *sulla superficie* (la quale risulta algebrica).

« Guardando le cose da questo punto di vista si riconosce che invece *l'algebricità non è necessaria per stabilire il teorema del* § 6 *relativamente ai sistemi* ∞^3 *di varietà* M_2 *su* M_3 *quando tre* M_2 *abbian comune un gruppo di punti variabile* (da cui segue la cosa per gli analoghi sistemi ∞^n, con $n > 3$, di M_{K-1} su M_K, con $K \geq 3$), poichè appunto denominando *piani* le varietà M_2 e *punti* i gruppi di punti (generanti un' involuzione) comuni a tre M_2 si può fondare sulla M_3 una geometria analoga alla proiettiva dello spazio e quindi riferire proiettivamente al sistema dei piani di S_3 il sistema delle M_2 ».