Enriques, Federigo

Ricerche di geometria sulle superficie algebriche

Clausen, Torino, 1893.

RICERCHE DI GEOMETRIA

SULLE

SUPERFICIE ALGEBRICHE

MEMORIA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1893

Estr. dalle *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino,*
SERIE II, TOM. XLIV.
Approvato nell'adunanza del 25 Giugno 1893.

Torino, Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

INTRODUZIONE

1. La geometria che studia le proprietà degli enti algebrici (curve, superficie, varietà) invariabili per trasformazioni birazionali dell'ente dicesi *geometria sull'ente* (1).

Il concetto di questa geometria scaturisce per la prima volta dalla teoria delle funzioni algebriche di una variabile nella capitale memoria di Riemann sulla *Theorie der Abelschen Functionen* (2). Da un altro lato la geometria sul piano (e sulle superficie razionali) nasce dai classici lavori sulle corrispondenze algebriche di Cremona e Clebsch (trasformazioni del piano, rappresentazione delle superficie omaloidi).

Nello sviluppo della geometria sull'ente sono da distinguersi due momenti caratterizzati da due diversi indirizzi (3).

a) In primo luogo si presenta la ricerca delle condizioni perchè due enti possano riferirsi in corrispondenza birazionale: questa ricerca è il naturale resultato della provata fecondità di quelle trasformazioni. Essa si presenta sotto due aspetti. Da un lato la determinazione di caratteri numerici invariantivi (legati alle singolarità dell'ente) come nei lavori del signor Zeuthen (4). Dall'altro lato lo studio delle funzioni collegate all'ente algebrico (in modo invariantivo). Sotto questo secondo aspetto (che può anche considerarsi come collocato fra il primo momento della geometria sull'ente ed il secondo nel quale si ricercano le proprietà dell'ente stesso) la questione della possibilità di trasformare birazionalmente un nell'altro due enti al-

(1) Le notizie storiche che seguono sono in parte tolte dalle lezioni litografate del sig. Klein sulle " Riemannsche Flächen " (1892) e dalle " Vorlesungen " di Clebsch-Lindemann (Bd. I), che si possono consultare per maggiori dettagli.

(2) Crelle, t. 64.

(3) Naturalmente la differenza tra i due indirizzi non è netta, ed alcune ricerche partecipano dell'uno e dell'altro, ma questa osservazione è soltanto un corollario della gran legge di continuità che governa le produzioni scientifiche (come ogni altra produzione organica).

(4) " Mathematische Annalen ", t. III e IV. Appartengono a questa categoria varie dimostrazioni della conservazione del genere per le curve tra le quali una del sig. Bertini. Cfr. Clebsch-Lindemann. Bd. I (3ª parte).

gebrici, venne trattata nei lavori fondamentali di Clebsch (1), che stabilì così il concetto di genere per le curve e per le superficie; questi resultati generalizzati alle varietà comunque estese furono ritrovati algebricamente dal signor Noether (*Mathematische Annalen,* II e VIII), dove insieme al genere di Clebsch (*Flächengeschlecht*) viene introdotto per le superficie il *Curvengeschlecht.*

La determinazione dei moduli per le curve (2) e per le superficie (3) rientra pure nel primo momento dello sviluppo della geometria sull'ente.

Accanto a queste ricerche sono ancora da porsi quelle che studiano la classificazione di certi enti mediante la riduzione a *tipi* (irreducibili per trasformazioni birazionali), così le ricerche sulla riduzione (all'ordine minimo) dei sistemi lineari di curve piane (4) mediante trasformazioni cremoniane, e sotto un punto di vista non molto dissimile possono riguardarsi le ricerche sulla razionalità delle superficie fra cui sono classiche quelle del signor Noether (5).

b) Nel secondo momento la geometria sull'ente diviene essenzialmente studio delle proprietà invariantive dell'ente (6). Nella geometria sopra una curva questo studio si riattacca all'applicazione delle funzioni abeliane di Clebsch (l. c.) e riceve stabile assetto geometrico nell'importante memoria dei signori Brill e Noether (7).

In questo lavoro si trovano riuniti i principali teoremi di geometria sopra una curva che hanno più tardi numerose ed utili applicazioni nella teoria delle curve gobbe dello spazio (8).

Ma una nuova idea caratterizza uno sviluppo nuovo della geometria sopra una curva rendendola indipendente (come si richiedeva per la sua perfezione) da una particolare varietà cui la curva può supporsi appartenere. Intendo parlare dell'uso degli iperspazi, i quali introdotti da Grassmann nel 1844 (come pure espressioni analitiche) e da Riemann, furono usati dal Cayley nel 1867 e 1869 (come varietà di elementi di arbitraria natura (9)) e con successo applicati allo studio delle curve dal Clifford (10) (1878).

Il signor Veronese raccogliendo questi vari materiali di geometria iperspaziale scrisse nel 1881 il suo classico lavoro (11) che fu il punto di partenza dello svolgi-

(1) *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie* (Crelle, t. 63). Cfr. anche Clebsch e Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen* (Leipzig, 1866) e Clebsch (" Comptes rendus " 1868) dove è stabilito il concetto di genere per le superficie.

(2) Riemann, l. c., § 12. *Waierstrass,* cfr. Brill e Noether (" Math. Ann. ", VII) o Clebsch-Lindemann, Bd. I (2ª parte).

(3) Noether, *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* (" Sitzungsberichte von Berlin ", 1888).

(4) Noether (" Math. Ann. ", Bd. V); Bertini (" Annali di Mat. ", serie 2ª, t. VIII); Guccia (" Circolo Mat. di Palermo ", t. I); Jung (" Istituto lombardo ", 1887-88 e " Annali di Mat. ", serie 2ª, t. XV e XVI); Martinetti (" Istituto lomb. ", 1887 e " Circolo di Palermo ", t. I); Castelnuovo (" Circolo di Palermo ", 1890 e " Accademia di Torino, Atti ", 1890).

(5) " Mathem. Ann. ", III.

(6) Un progresso analogo ha subìto la geometria proiettiva nel passaggio da Poncelet a Staudt.

(7) *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (" Mathem. Ann. ", Bd. VII).

(8) Cfr. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (" Journ. für Mathem. ", Bd. 93); Halphen, *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (" Comptes rendus ", t. 70, 1870).

(9) Questo modo di vedere fu introdotto da Pluecher.

(10) *On the Classification of Loci* (" Phil. Transactions ").

(11) *Behandlung der proiectiwische Verhältnisse,* ecc. (" Math. Ann. ", XIX).

mento di quella geometria avvenuto specialmente in Italia per opera del signor Veronese stesso e del signor Segre (1).

Fu allora che si pensò di rendere indipendente la geometria sopra una curva dalla rappresentazione di essa nel piano e di sostituire così in quello studio i concetti di curve aggiunte, ecc. coi procedimenti più semplici e generali proprî delle considerazioni iperspaziali. Il signor Segre ed il signor Castelnuovo (2) riuscirono ad elevare con questo concetto una nuova teoria della geometria sopra una curva che alla semplicità ed armonia delle basi congiunge una potenza per la quale si fecero in questo campo nuovi ed importanti acquisti.

La geometria sopra una superficie non ha progredito in proporzione alla geometria sopra una curva, anzi si può dire che essa non è ancora entrata nel 2° momento del suo sviluppo, poichè la teoria generale dei sistemi lineari di curve sopra una superficie di arbitrario genere (fatta nel senso della geometria sopra una superficie) non è ancora avviata. Il lavoro fondamentale nell'argomento resta ancora quello (citato) del signor Noether del 1874-75 (*Mathem. Ann.*, VIII) nel quale le funzioni invariantive appartenenti ad una superficie vengono studiate in modo profondo. Successivamente si ha un lavoro del signor Picard (3) dove in particolare sono studiate le superficie con trasformazioni in sè stesse, e due note del signor Castelnuovo (4) contenenti notevoli esempi di particolari classi di superficie. Invece la geometria sul piano è entrata nel secondo periodo del suo sviluppo col noto lavoro del sig. Castelnuovo (5) il quale contiene concetti originali ed importanti a cui sembra possa darsi maggiore estensione coll'applicarli allo studio delle superficie di genere > 0 (6).

2. Delineato rapidamente lo svolgimento che ebbe fino ad oggi la geometria sull'ente ed in particolare sopra una superficie, debbo esporre quali contributi porti questo lavoro alla nominata teoria e quali concetti mi abbiano guidato nella ricerca.

Lo scopo principale del lavoro è lo studio dei *sistemi lineari* ∞^r di curve (algebriche) appartenenti ad una superficie (algebrica). Li definisco come sistemi tali che per r punti della superficie passi una curva di essa, e di cui gli elementi (curve) possono riferirsi proiettivamente ai punti di uno spazio lineare S_r (7).

(1) Per maggiori dettagli cfr. la Monografia storica del sig. Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* („ Accad. di Torino, Memorie „, serie 2ª, t. 38). Cfr. pure Segre, *Su alcuni indirizzi*, ecc. („ Rivista di Mat. „, 1891).

(2) Cfr. specialmente: Segre, *Sulle curve normali di genere* p *dei varii spazii* („ Istituto lomb. „, 1888 e *Courbes et surfaces réglées* („ Mathem. Ann. „, t. XXXIV e XXXV); Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* („ Accad. di Torino, Atti „, 1889).

(3) *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* („ Journal de Lionville „, 1889).

(4) „ Istituto lombardo „ (1891).

(5) *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* („ Accad. di Torino, Memorie „, 1891). Tra i lavori precedenti si possono considerare come facenti parte di questo 2° momento della geometria sul piano, la nota del sig. Segre („ Circolo di Palermo „, t. I) e quella del sig. Castelnuovo („ Ann. di Mat. „, 1890).

(6) Per la geometria sulle superficie rigate cfr. il citato lavoro del sig. Segre („ Mathematische Annalen „, XXXV).

(7) La 2ª proprietà è una conseguenza della 1ª pr. $r > 1$, se le curve del sistema non si spezzano. Cfr. la mia nota: *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* („ Accad. dei Lincei „, giugno 1893) e la successiva del sig. Castelnuovo („ Accad. di Torino „, giugno 1893) in cui quel teorema è dedotto da un altro più generale relativo alle involuzioni sopra una curva.

Dopo avere premesso alcuni lemmi (noti) sui sistemi di curve riduttibili passo ad esporre il concetto di *sistema normale* e di *sistema completo*, cioè di sistema non contenuto rispettivamente in un altro dello stesso grado o dello stesso genere, e stabilisco che un sistema di dato grado D (cioè di cui due curve s'incontrano in D punti variabili) appartiene ad un determinato sistema normale dello stesso grado; e risulta poi che sopra una superficie di genere > 0 una curva appartiene ad un determinato sistema completo dello stesso genere. Ne deduco la 1ª parte del teorema del resto (*Restsatz*) (1), (cap. I).

Nel cap. II considero le curve le quali godono la proprietà di segare un gruppo residuo (nel senso di Brill e Noether) della serie *caratteristica* (2) sulla curva generica d'un sistema lineare ∞^r (dotato di curve fondamentali distinte) ed un gruppo contenuto nel residuo della serie caratteristica sopra la curva generica di un sistema ∞^{r-1} contenuto nel primo: siffatte curve, sommate con curve fondamentali del dato sistema, godono le medesime proprietà rispetto ad ogni altro sistema della superficie (anche non dotato di curve fondamentali distinte) e sono segate sopra una superficie d'ordine n in S_3 da superficie aggiunte d'ordine $n - 4$: perciò le dette curve formano un sistema lineare (se esistono) e le componenti variabili del sistema (che denomino curve *canoniche*) hanno un carattere invariantivo rispetto alla superficie il quale risulta fissato molto semplicemente dalla loro definizione (3). Nasce quindi una distinzione dei sistemi appartenenti ad una superficie in sistemi *puri* ed *impuri* secondochè le curve canoniche segano sulla loro curva generica un gruppo residuo della serie caratteristica o un gruppo contenuto in un tal gruppo residuo: sopra una superficie convenientemente trasformata (facendo segare dai piani le curve d'un sistema puro), i primi sistemi non hanno punti base, i secondi sì; la questione si riattacca alle curve eccezîonali (*ausgezeichnete*) di Noether. Un sistema puro normale è necessariamente completo.

Nel cap. III introduco il concetto di *sistema aggiunto* ad un sistema lineare (C) di dimensione $r \geq 2$; se (C) ha curve fondamentali distinte, le curve del detto sistema aggiunto sono definite dal segare un gruppo canonico sulla curva generica di (C) e dal segare sopra la curva generica d'un sistema ∞^{r-1} contenuto in (C), un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e di quella differenza fra la serie segata sulla curva da (C) e la serie caratteristica del sistema ∞^{r-1} (o il gruppo dei punti base semplici se $r = 2$).

La definizione data del sistema aggiunto esclude che (C) contenga in sè un sistema ∞^{r-1} di curve razionali (il che è impossibile se la superficie non è razionale); sotto tale restrizione il sistema aggiunto a (C) coincide coll'aggiunto puro definito dal signor Castelnuovo pei sistemi di curve piane, quando la superficie è

(1) Noether, " Mathem. Ann. ", VIII. Come ognun vede quest'ordine di idee è una conveniente estensione alle superficie dei concetti che, come ho detto, il sig. Segre ed il sig. Castelnuovo introdussero a fondamento d'una teoria della geometria sopra una curva.

(2) Con questo nome (introdotto dal sig. Castelnuovo pei sistemi di curve piane) indico la serie che tutte le curve di un sistema segano sopra la curva generica di esso.

(3) L'invariantività è dimostrata analiticamente dal sig. Noether (" Mathem. Ann. ", VIII). Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti è il genere (geometrico) p della superficie.

razionale. Quando ∞^3 curve C sono sezioni piane d'ordine n d'una superficie F di S_3 il sistema aggiunto a (C) viene segato sulla F dalle superficie aggiunte d'ordine $n-3$.

Per le superficie di genere $p > 0$ (a cui ci riferiamo) il sistema aggiunto è il *sistema normale somma* del sistema canonico di (C) e dei suoi punti base (se (C) è impuro) e questa proprietà serve a definirlo nel caso in cui (C) non abbia curve fondamentali distinte.

Stabilire la dimensione del sistema aggiunto ad un sistema (C) di genere π, è questione della massima importanza per le molteplici applicazioni cui conduce la considerazione del sistema aggiunto. Indicando con δ (C) il difetto di completezza (≥ 0) della serie (canonica) che il sistema aggiunto sega sulla curva generica C di (C), la dimensione del detto sistema aggiunto è $p+\pi-1-\delta(C)$.

Se (C) è un sistema puro *semplice* (cioè in cui il passaggio d'una curva per un punto non trae di conseguenza il passaggio per altri punti) si dimostra che la quantità $\delta(C_1)$ relativa ad un arbitrario sistema puro (C_1) è $\leq \delta(r\,C)$ (essendo $(r\,C)$ il sistema rplo di (C)) per r assai grande. Se dunque il $\delta(r\,C)$ invece di crescere indefinitamente con r ha un massimo K (come avviene certo se la superficie ha singolarità ordinarie), K è un *vero carattere invariantivo della superficie.* Importante è il caso in cui $K=0$; indipendentemente da qualsiasi restrizione relativa alle singolarità della superficie, si prova che è $K=0$ se $\delta(2\,C)=0$, e viceversa; quindi se (C) è un sistema puro semplice per cui $\delta(2\,C)=0$ per ogni altro sistema (anche impuro) di genere π, la dimensione del sistema aggiunto è $p+\pi-1$: se in particolare la superficie è così trasformata da avere soltanto singolarità ordinarie, il genere geometrico p di essa è uguale al suo genere numerico p_1 definito da Zeuthen e Noether, e viceversa è $K=0$ se $p=p_1$. La restrizione $K=0$ è ammessa nel seguito per le superficie che si considerano (fino all'ultimo cap. escl.); e nel § 7 del cap. III ho creduto opportuno (vista l'importanza della cosa) di richiamare altre circostanze che permettono di concludere la sussistenza di tale fatto.

Servendomi del sistema aggiunto dimostro quindi che ogni sistema impuro (con punti base distinti) può dedursi coll'aggiunta dei suoi punti base da un sistema puro o (forse) da un sistema con soli punti base semplici: dimostro poi la 2ª parte del Restsatz (§ 3), e nei §§ 5 e 6, do esempi relativi alle superficie di genere 0, 1 (cap. III).

Il maggiore interesse si concentra nello studio dei sistemi puri (C) (completi); il sistema aggiunto permette di dedurre che la loro serie caratteristica è completa se tale è quella del sistema canonico (o se il sistema canonico non ne ha alcuna) (cap. IV): in siffatta ipotesi per l'intersezione di due curve C di (C) passano $2p+\omega-i$ curve (linearmente indipendenti) del sistema aggiunto a (C), essendo p il genere della superficie, $i-1$ la dimensione del sistema residuo di (C) rispetto al canonico (l'*indice di specialità* $i=0$ se (C) è *non speciale* cioè non contenuto nel canonico) ed $\omega \geq 0$; designo ω col nome di *sovrabbondanza* di (C) perchè (come risulta più tardi) se si suppone la superficie in S_3 e si fa segare (C) mediante aggiunte in modo arbitrario, la sua dimensione *virtuale* ρ calcolata in base alle formole di postulazione di Noether è tale che (indicando con r la dimensione *effettiva* di (C)) si ha:

$$r-\rho=\omega-i.$$

Se π è il genere di (C) ed n è il suo grado, si ha la relazione

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

(dove $i = 0$ se (C) è non speciale).

Questa relazione costituisce un'estensione del noto teorema di Riemann Roch della geometria sopra una curva: essa fu data sotto forma di disuguaglianza dal signor Noether (1), ma la relativa dimostrazione mi sembra presentare una lacuna.

Definendo ω mediante l'uguaglianza $r - \rho = \omega - i$, la relazione precedente sussiste ancora se (C) è impuro (dedotto coll'aggiunta di punti base da un sistema puro) ed è ancora $\omega \geq 0$.

Infine la relazione stessa sussiste anche prescindendo dalla restrizione invariantiva per la superficie che la serie caratteristica del sistema canonico sia completa, ma allora non risulta dimostrato che sia sempre $\omega \geq 0$; si ha però certo $\omega \geq 0$ se $r \geq \frac{p^{(1)}+1}{2}$ essendo $p^{(1)}$ il 2° genere (*Curvengeschlecht*) della superficie.

L'utilità della precedente relazione si presenta nel cap. V trattando delle curve fondamentali. Poste alcune limitazioni per queste curve si dimostra una relazione fra i caratteri d'un sistema (C), il *genere* d'una curva fondamentale e i caratteri del sistema residuo (C'): se ne deduce alcune notevoli proprietà dei sistemi *regolari* ($\omega = 0$) e del sistema canonico; p. e. un sistema regolare di dimensione $> p$ non ha curve fondamentali di genere > 0. Così se di un sistema puro (C), senza curve fondamentali di genere > 0, si considera il multiplo secondo m, per m assai grande questo è regolare: si può in tal modo trattare un caso semplice delle formule di postulazione relative alle varietà che passano per una superficie negli iperspazi.

Infine le curve fondamentali di genere 0 dei sistemi lineari sono degne di attenzione perchè conducono ad un nuovo carattere invariantivo per le superficie ($p > 0$): in particolare si troverà dimostrato un teorema sui punti doppi che una superficie può acquistare (per trasformazione) in S_3.

Nel cap. VI do un rapido sguardo alle involuzioni. Estendo per quelle irrazionali un teorema fondamentale stabilito dal signor Castelnuovo (2) per le involuzioni appartenenti ad una curva.

Finalmente determino una espressione invariantiva per le involuzioni razionali sopra una superficie, formata coi caratteri di una rete di cui due curve si segano in un gruppo dell'involuzione.

Questo in breve è il tessuto del mio lavoro, di cui i numerosi mancamenti spero mi si vorranno perdonare in vista degli ostacoli che ad ogni passo s'incontrano; io sarò lieto se queste ricerche varranno ad invogliare taluno allo studio di un così bello argomento di cui le difficoltà esercitano una meravigliosa attrattiva.

1° giugno, 1893.

FEDERIGO ENRIQUES.

---

(1) " Comptes rendus ,, 1886.
(2) " Accad. dei Lincei ,, 1891.

I.

Generalità sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica.

1. *Definizioni.* — *Teoremi preliminari.* — Si dirà *sistema lineare* ∞^k *di curve* (algebriche) sopra una superficie algebrica S, un sistema di curve tale che per k punti della superficie in posizione generica passi una ed una sola curva del sistema, e tale che gli elementi (curve) di esso possono riferirsi proiettivamente agli elementi generatori (punti o iperpiani S_{k-1}) di una forma lineare S_k (in modo che ad un S_{k-1} o ad un punto corrisponda un sistema lineare immerso in quello ∞^k e viceversa) (1).

Sopra una superficie appartenente ad uno spazio S_r un sistema lineare ∞^k di varietà (ad r—1 dimensioni) non contenenti la superficie, sega sempre un sistema lineare ∞^k di curve; vedremo più tardi come in tal modo si possa ottenere qualunque sistema lineare d'una superficie S, ad es. segandola con sistemi lineari di superficie se essa appartiene allo spazio S_3 (o è stata proiettata in quello); ma noi vogliamo anzitutto ricavare le proprietà generali dei sistemi lineari dalla definizione che ne abbiamo data, senza occuparci del modo con cui sono stati costruiti.

Se si ha un sistema lineare ∞^k di curve di cui le parti variabili si segano due a due in D punti variabili, diremo che il sistema è di *dimensione* k, e *grado* D: se le curve del sistema sono irreduttibili e la curva generica ha il genere π, diremo che il sistema ∞^k è di *genere* π.

Se $k = 1$ non si può parlare di grado del sistema. Non vi sono altri casi in cui non si può parlare di grado d'un sistema irreduttibile.

Infatti se $k > 1$ per un punto della superficie deve passare più d'una curva del sistema e quindi il punto è comune a due curve; perciò l'unico caso in cui non si possa parlar di grado del sistema è quello in cui due curve aventi un punto comune abbiano comuni altri infiniti punti ossia abbiano comune una linea, l'insieme di tutte queste linee è tale che per un punto della superficie ne passa *una* ossia è ciò che dicesi un *fascio;* allora *le curve del sistema si compongono d'un certo numero* m *di curve del fascio e non sono più irreduttibili.* Per ogni sistema lineare irreduttibile di dimensione $k > 1$ i caratteri k, D, π hanno dunque un significato ben definito.

Può darsi che tutte le curve d'un sistema ∞^k passanti per un punto, debbano

(1) Il secondo fatto per $k > 1$ è una conseguenza del primo quando la curva generica del sistema è irreduttibile. Cfr. la mia nota: *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (" Accad. dei Lincei ", giugno 1893). Il teorema è stato nuovamente dedotto dal sig. Castelnuovo come corollario di una importante proposizione sulle involuzioni appartenenti ad una curva algebrica (" Accad. di Torino ", giugno, 1893).

in conseguenza passare per altri punti della superficie in numero finito $m-1$ variabili con esso, e si ha allora sulla superficie una serie ∞^2 di gruppi di m punti tale che un punto appartiene ad *un* gruppo della serie, ossia ciò che può dirsi una *involuzione* I_m; possiamo dire che il sistema *appartiene* all'involuzione I_m; diremo *semplice* un sistema in cui il passaggio d'una curva generica per un punto non trae di conseguenza il passaggio per altri punti variabili con esso.

Un sistema ∞^2 (*rete*) appartiene ad una involuzione I_D, se D è il suo grado. Tranne per le superficie omaloidi un sistema semplice ha sempre la dimensione $k>2$.

Si riferiscano proiettivamente le curve del sistema semplice (C) agli iperpiani (S_{k-1}) di S_k; ogni punto della superficie S è *base* per un sistema lineare ∞^{k-1} costituito da tutte le curve di (C) che passano per esso; a questo sistema ∞^{k-1} corisponde in S_k la ∞^{k-1} degli iperpiani per un punto P, ossia la stella di centro P: in questo modo nascono in S_k ∞^2 punti P i quali generano una superficie F, e poichè, per ipotesi, (C) è un sistema semplice, la *superficie* F *è riferita alla* S *punto per punto.* Indicheremo brevemente la trasformazione eseguita dicendo che si è *trasformata la* S *in un'altra superficie* F *di* S_k *su cui le curve del dato sistema* (C) *sono segate dagli iperpiani* od anche dicendo che *facciamo segare sulla saperficie le curve del sistema* (C) *dagli iperpiani di* S_k.

La trasformazione indicata non riesce più biunivoca se il sistema (C) non è semplice. In tal caso possiamo sempre costruire un sistema lineare ∞^1 di curve (fascio razionale) che non appartenga all'involuzione I_m cui appartiene (C); invero basta considerare il fascio segato da un fascio di iperpiani (o di piani) nello spazio S_r a cui la superficie S appartiene, escludendo (tutt'al più) posizioni particolari dello S_{r-2} base. Ciò posto si riferiscano proiettivamente le curve del sistema (C) agli iperpiani (S_k) di un S_{k+1} per un punto O e le curve del fascio razionale agli iperpiani per un S_{k-1} in S_{k+1} non contenente O: un punto della superficie S è base per un sistema ∞^{k-1} di curve in (C) ed appartiene ad una curva del fascio; al sistema ∞^{k-1} corrisponde la forma degli iperpiani aventi una retta base per O, ed alla curva un iperpiano per lo S_{k-1} che incontra la detta retta in un punto P; il luogo dei punti P così costruiti *è una superficie* F *di* S_{k+1} *riferita biunivocamente alla* S *su cui le curve del sistema* (C) *sono segate dagli iperpiani per* O.

Questa 2ª trasformazione riesce biunivoca per tutti i sistemi (C) (naturalmente anche per quelli semplici) tali che il passaggio di una curva di essi per un punto non tragga di conseguenza il passaggio per infiniti punti. Infine anche *un fascio razionale di curve può farsi segare dai piani d'un fascio in* S_3 (o dagli iperpiani d'un fascio in un iperspazio), adoprando una rete (od altro sistema) ausiliaria e compiendo la trasformazione indicata innanzi. È utile che ci fermiamo a considerare alcune particolarità di queste trasformazioni ottenute partendo da una rete e da un fascio (nel seguito si sottintenderà razionale salvo avviso in contrario), come pure di un'altra trasformazione analoga che può ottenersi partendo da tre fasci, poichè nel seguito ci occorrerà di richiamare queste proprietà.

Si abbia una rete di grado D, ed un fascio di cui una curva generica seghi in n punti variabili una curva della rete e che non appartenga all'involuzione I_D che la rete determina; riferiamo proiettivamente le curve della rete ai piani per un punto O e le curve del fascio ai piani per una retta r (non contenente O), compiendo così la trasformazione della data superficie. Sulla nuova superficie F i piani per r segano (fuori di r) curve d'ordine n (aventi n punti comuni coi piani per O); ad un punto della r corrispondono i D punti base d'un fascio appartenente alla rete, e quindi la r è D pla per la F, la quale risulta d'ordine $n + D$; una retta per O sega la F in D punti (base d'un fascio immerso nella rete), quindi O è n plo per la superficie F: inoltre la superficie contiene curve multiple secondo $h_1, h_2,...$ (in generale una curva doppia) i cui punti corrispondono risp. a gruppi di $h_1, h_2,...$ punti contenuti in un gruppo della involuzione I_D cui appartiene la rete ed appartenenti ad una stessa curva del fascio; vi sono poi in generale rette multiple per O della F e punti multipli isolati corrispondenti a curve che non hanno intersezioni variabili con quelle della rete (*fondamentali*), ed infine la F potrà presentare anche altre singolarità in corrispondenza a singolarità della primitiva superficie. È anche d'uopo avvertire che dalla superficie F può eventualmente staccarsi un certo numero di volte il piano O r, ed allora soltanto la parte residua dovrà considerarsi la trasformata propria della superficie data; il caso accennato si verifica se il fascio e la rete hanno una curva comune cui corrisponda il piano Or sia considerato come appartenente alla stella di centro O, sia come appartenente al fascio di asse r.

In modo analogo potranno vedersi le proprietà, che ora accenno, della trasformazione in cui si fanno segare 3 fasci dai piani risp. per 3 rette r_1, r_2, r_3 (non passanti per un punto). Se le curve del 1° fascio incontrano quelle del 2° risp. in n_2, n_3 punti e quelle del 2° e del 3° s'incontrano in n_1 punti (e 3 curve di ciascuno dei fasci per un punto non han comuni altri punti variabili con esso), riferendo proiettivamente le curve dei 3 fasci risp. ai piani per r_1, r_2, r_3, la superficie si trasforma in una F di ordine $n_1 + n_2 + n_3$, che ha le rette r_1, r_2, r_3, multiple risp. secondo n_1, n_2, n_3, ecc. È da osservarsi che due rette ad es. r_1, r_2 possono essersi scelte passanti per un punto O, ed allora può ancora accadere che si stacchi il loro piano (un certo numero di volte) dalla superficie F.

Stabiliamo ora il seg. teorema: *Se in un sistema lineare la curva generica si spezza, o il sistema si compone delle curve irriduttibili d'un altro sistema a cui si sono aggiunte delle curve (componenti) fisse, o le componenti irriduttibili delle curve del sistema formano un fascio (razionale o no)* (1).

Facciamo segare le curve del sistema (C) (in cui si può supporre $k > 1$) dagli iperpiani di S_{k+1} per un punto O sulla superficie F riferita in modo semplice o multiplo alla primitiva; la F non può essere spezzata (poichè tale non si suppone la primitiva), quindi dico che le sue sezioni iperpianali per O non possono tutte spezzarsi tranne in rette per O. Basta vedere il fatto per $k = 2$ potendosi altrimenti proiettare la F in S_3. Ora ricordiamo che la F può supporsi riferita semplicemente alla primitiva superficie se la F stessa non è un cono di vertice O (ossia la rete (C) ha un grado): escluso che la F sia un cono, consideriamo un fascio di piani seganti la F il cui asse r passi per O e non appartenga alla F; le curve C sezioni dei piani per r formano un fascio cioè un sistema che sulla superficie irreduttibile F non può

(1) Cfr. pei sistemi lineari nel piano: Bertini (" Istit. lomb. ", 1882), e per quelli su una qualunque superficie: Noether, " Math. Ann. ", III, pag. 171; VIII, p. 524.

spezzarsi in più sistemi; se in ogni piano per r la sezione della F è spezzata in $s\,(>1)$ curve K, sulla varietà ∞^1 che ha per elementi le curve K (componenti un fascio) i gruppi di s curve costituenti le C formano una serie lineare g_s^1 la quale possiede almeno $2\,(s-1)$ elementi di coincidenza: si arriverebbe così alla conclusione che per un'arbitraria retta r per O vi sono dei piani tangenti alla F lungo una linea (una K), e poichè vi sarebbero infiniti di tali piani la F sarebbe contata più volte, ciò che è assurdo.

Ciò posto nel 1° caso (cioè se le sezioni generiche della F per O sono irreduttibili) alla curva generica di (C) corrisponde una parte variabile irreduttibile sezione della F con un iperpiano per O, ed il punto O che non può esser dato se non da componenti fisse; nel 2° caso le curve del sistema (C) si compongono con quelle del fascio, rappresentato dalle ∞^1 rette per O sulla F. Così ogni sistema riduttibile di cui le curve non si compongono delle curve d'un fascio definisce un sistema irreduttibile di ugual dimensione ottenuto staccando le componenti fisse: diremo genere e grado del primitivo sistema quelli del sistema irreduttibile così definito, ed *escluderemo nel seguito la considerazione dei sistemi di cui la curva generica si compone di* m *curve d'un fascio.*

Sussiste pure il teorema:

In un sistema lineare di curve irreduttibili la curva generica non può avere punti multipli fuori dei punti base, e delle linee multiple della superficie (1).

Nel sistema lineare si consideri un fascio (razionale); basterà dimostrare che non può esistere una linea, non singolare per la superficie, luogo di punti multipli delle curve del fascio; ne seguirà allora immediatamente il teorema enunciato. Ora la dimostrazione si farà per assurdo.

Supposto che esista una tal curva C luogo dei punti multipli delle curve del fascio, si può immaginare sulla superficie una rete di curve per la quale il passaggio per un punto della C non porti di conseguenza il passaggio per altri punti della C stessa (in modo cioè che la C non sia luogo di coppie appartenenti a gruppi dell'involuzione definita dalla rete), ed allora si può trasformare la superficie in una F su cui le curve della rete sien segate dai piani per un punto O, quelle del fascio dai piani per una retta r, ed alla curva C venga a corrispondere sulla F una curva C′ non singolare; ora la sezione piana generica della F per r non può avere punti multipli fuori della curva multipla della F stessa e della retta multipla r la quale contiene i punti di contatto con F del piano generico per r; è dunque assurdo che le sezioni piane per r della F abbiano dei punti multipli i quali descrivano la C′ come avverrebbe per conseguenza della nostra ipotesi sulla C.

2. *Sistemi normali e sistemi completi.* — Come è noto una superficie si dice *normale* in un S_n a cui appartiene, quando essa non può ritenersi come proiezione di una superficie dello stesso ordine (ossia da un punto esterno) di S_{n+1}; traducendo questa definizione in linguaggio invariantivo diremo *normale un sistema lineare (avente un grado) che non può esser contenuto in un altro dello stesso grado.* È chiaro, appunto

---

(1) Cfr. pei sistemi piani: Bertini (l. c.).

per la considerazione proiettiva da cui siamo partiti, che se un sistema semplice è contenuto in un altro dello stesso grado, anche i generi dei due sistemi debbono essere uguali. Non sussiste però la proprietà inversa, giacchè proiettando una superficie normale da un suo punto semplice (da S_n in S_{n-1}) si ottiene una nuova superficie normale le cui sezioni sono curve dello stesso genere, ma di cui l'ordine è diminuito di una unità. Questa osservazione fa nascere l'idea di considerare accanto ai sistemi normali quei sistemi (che diremo *completi*) *i quali non possono esser contenuti in altri di ugual genere;* il concetto di sistema completo è dunque più largo di quello di sistema normale, poichè, per quanto abbiamo osservato, *un sistema completo è sempre un sistema normale* (anche se non è semplice come risulta da un successivo teorema), *ma non viceversa.* È anche opportuno rilevare con esattezza ciò che può intendersi dicendo che un sistema *è contenuto* in un altro. Dato un sistema (K) di curve K, un sistema (C) di curve C è contenuto in (K) in modo *totale* se ogni curva C è da sola una K; ma può anche darsi che invece ogni curva C non costituisca da sola una K, mentre una curva composta di una C e di un'altra C′ sia una K; si dirà allora che il sistema (C) è contenuto in (K) in modo *parziale* (ossia che le C sono curve parziali di (K)). Ora io dico che *un sistema non può essere contenuto parzialmente in un altro di ugual grado.*

Infatti se un sistema ∞^h (K) ne contiene uno ∞^r (C), facendo segare le curve K di (K) dagli iperpiani di S_{h+1} per un punto O, sulla superficie F, le curve C di (C) risulteranno segate dagli iperpiani per un S_{h-r} contenente O: se ora le C sono contenute in (K) in modo parziale il detto S_{h-r} sega F secondo una curva C′ (o in un gruppo di punti) che insieme a ciascuna C dà una K ed allora si può considerare un sistema ∞^{r+1} immerso in (K) contenente parzialmente (C). Si facciano segare le curve del nuovo sistema dagli iperpiani di S_{r+1} sulla superficie F′ (la quale potrebbe essere anche in corrispondenza $[1\ m]$ colla F); alla curva C′ corrisponde su F′ un punto, in generale multiplo, e proiettando la F′ da questo punto si ottiene certo una superficie d'ordine minore; dunque il sistema (K) ha il grado maggiore di (C). Dalle considerazioni occorse risulta pure che, ove si voglia attribuire un senso invariantivo al fatto che un sistema sia contenuto parzialmente o totalmente in un altro, bisogna intendere che una curva C′ la quale insieme ad una C costituisce una curva K di (K), possa anche esser rappresentata da un punto; così se in un sistema lineare se ne considera un altro contenuto con qualche punto base di più (in modo che il grado diminuisce), il secondo sistema è contenuto parzialmente nel primo.

Per il resultato precedente si vede che la definizione di sistema normale come di sistema non contenuto in altro di ugual grado è indipendente dalla larghezza di significato che voglia attribuirsi alla parola *contenere,* dicendo contenuto in un altro anche un sistema che vi è contenuto parzialmente, giacchè è inutile cercare un sistema di ugual grado che ne contenga un altro parzialmente. Invece non accade lo stesso per rispetto alla definizione di sistema completo, ed un esempio varrà ad illuminare meglio la cosa. Si abbia sopra una superficie F un sistema (C) del genere π; le curve C per un punto semplice O costituiscono un sistema contenuto in esso dello stesso genere; ora si trasformi la superficie in modo che al punto O corrisponda una curva semplice K della superficie trasformata F′; alle curve C corrispondono sulla F′ le curve C′ d'un sistema (C′), ed alle curve C per O curve C′ spezzate nella K ed in altre curve d'un sistema lineare (C''); *il sistema* (C'') *è contenuto parzialmente in quello* (C') *dello stesso genere.* Da questa osservazione scaturisce la necessità di fissare bene il senso della parola *contenere* nella definizione di sistema completo, e noi fissiamo di chiamare *completo un sistema che non può essere contenuto in altro di ugual genere nemmeno parzialmente;* questa definizione più larga è assolutamente necessaria (come appare dal prec. esempio) ove si voglia che il carattere d'un sistema di essere completo (invariantivo per trasformazioni birazionali della superficie) esprima qualcosa di differente da quello di esser normale.

Si considerino ora due fasci di curve irreduttibili di ugual genere aventi comune una curva totale dello stesso genere e sulla superficie F si facciano segare le curve di essi risp. dai piani per le rette r, r' che s'incontrano nel punto O; se la trasformazione è fatta nel modo generale indicato, alla curva comune dei due fasci, secondochè si considera appartenente all'uno o all'altro fascio, corrisponde la retta multipla r o la r' sulla F; abbiamo già notato però che se si fa corrispondere, nella proiettività posta tra ciascuno dei due fasci ed il fascio di piani omologo, la curva comune al piano rr', questo si stacca (un certo numero di volte) dalla superficie F; dico che alla rimanente F non appartengono le rette r, r'. Un punto infinitamente vicino alla curva comune C dei due fasci individua in generale una curva in ciascun fascio, e quindi alla curva comune dei due fasci corrisponde punto per punto la sezione della F col piano $r\,r'$ fuori di r ed r'; se la retta r appartiene (come semplice o multipla) alla F, le corrisponde una curva che insieme alla C compone una curva del fascio segato sulla F dai piani per r'; quindi nell'ipotesi fatta che la C sia una curva totale per i due fasci, le rette r, r' non appartengono alla F, e su questa i piani per O segano una rete di curve dello stesso genere dei due fasci, in cui questi sono contenuti totalmente.

Supponiamo ora che la curva C comune ai due fasci sia contenuta parzialmente in uno di essi o in ambedue, ma abbia però il genere comune dei due fasci. Compiendo la trasformazione eseguita prima, sulla F (da cui è staccato quante volte occorre il piano $r\,r'$) alla C corrisponde la sezione del piano $r\,r'$ fuori di r ed r'.

Le rette r, r' (ambedue o una sola di esse) apparterranno ora alla F con molteplicità i, i' risp. Sia n l'ordine della F, m la molteplicità del punto O, δ il numero dei punti doppi a cui equivalgono (rispetto alle formule pluecheriane) i punti multipli di una sezione generica per O fuori di O, π il genere di tale sezione; si avrà:

$$\pi = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \delta.$$

La r potrà incontrare la curva multipla di F in qualche punto, in modo che una sezione piana per r da cui sia tolta la r avrà $\delta - \delta_1$ punti doppi fuori di O (o molteplicità equivalenti) essendo $\delta \geq \delta_1$; indicando con π_1 il genere di una tale curva si avrà dunque

$$\pi_1 = \frac{(n-i-1)(n-i-2)}{2} - \frac{(m-i)(m-i-1)}{2} - \delta + \delta_1:$$

dando a π_1', δ_1' gli analoghi significati di π_1, δ_1, rispetto alle sezioni piane della F per r' da cui è tolta la r', si ha pure

$$\pi'_1 = \frac{(n - i' - 1)(n - i' - 2)}{2} - \frac{(m - i')(m - i' - 1)}{2} - \delta + \delta_2.$$

La curva C di genere π_2 sezione della F col piano $r\ r'$ da cui sieno tolte le r, r', è d'ordine $n - i - i'$, ed ha $\delta - \delta_1 - \delta_2$ punti doppi (almeno) fuori di O (o moltеplicità equivalenti), poichè la curva composta $C + r + r'$ ha δ punti doppi (o molteplicità equivalenti) sulla curva doppia (o multipla) della F fuori di O, di cui δ_1 dipendono dal fatto che il piano della C passa per la retta multipla r, δ_1' dal fatto che passa per r_1'. Il genere della C vale dunque

$$\pi_2 \leq \frac{(n - i - i' - 1)(n - i - i' - 2)}{2} - \frac{(m - i - i')(m - i - i' - 1)}{2} - \delta + \delta_1 + \delta'_1,$$

dove il segno $<$ dovrebbe prendersi se la C avesse ulteriori punti multipli accidentali (di cui potrebbe escludersi l'esistenza).

Ora dalle uguaglianze scritte segue:

$$\pi - \pi_1 = i(n - m - 1) - \delta_1$$
$$\pi - \pi'_1 = i'(n - m - 1) - \delta'_1$$
$$\pi - \pi_2 \geq (i + i')(n - m - 1) - \delta_1 - \delta'_1,$$

ossia

$$\pi - \pi_2 \geq 2\pi - \pi_1 - \pi'_1.$$

Ma secondo le nostre ipotesi

$$\pi_2 = \pi_1 = \pi'_1,$$

quindi

$$\pi - \pi_2 \geq 2(\pi - \pi_2)$$
$$\pi \leq \pi_2.$$

Dico che ne segue

$$\pi = \pi_2 \text{ e perciò } \pi = \pi_1 = \pi'_1.$$

Infatti π è il genere d'una sezione piana generica della stella di centro O su F, se questa sezione si particolarizza comunque spezzandosi in s parti di genere k_1, $k_2 \ldots k_s$ di cui due parti di genere k_r, k_ρ si segano in $i_{r\rho}$ punti, si ha, secondo una formula di Noether (1),

$$\pi \geq k_1 + \ldots + k_s + \Sigma i_{r\rho} - 1$$

(1) " Acta Mathematica ", 1886. È da prendersi il segno $=$ quando nessuna delle componenti della curva spezzata acquista punti multipli accidentali.

dove la somma è estesa a tutte le combinazioni di r, ρ; siccome la curva composta spezzata è connessa perchè limite di una curva irreduttibile connessa, almeno s fra le $i_{r\rho}$ non possono essere o, quindi

$$\pi \geq k_1 + k_2 + \ldots + k_s;$$

perciò nel nostro caso:

$$\pi \geq \pi_2 \qquad \pi = \pi_2 = \pi_1 = \pi'_1.$$

Si deduce che i piani per O segano ancora sulla F una rete di curve dello stesso genere dei due fasci e della loro curva comune parziale, nella quale i due fasci sono contenuti (tutti e due parzialmente o uno parzialmente e uno totalmente). Si conclude:

Due fasci di curve dello stesso genere aventi comune una curva di ugual genere, sono contenuti in una rete dello stesso genere, e sono contenuti totalmente in una tal rete se la loro curva comune è totale.

Questo teorema è suscettibile di una immediata generalizzazione. Infatti, sia estendendo il metodo qui seguìto, sia mediante le più elementari proprietà dei sistemi lineari di enti si deduce che:

Se due sistemi lineari ∞^r, ∞^s di curve sopra una superficie hanno comune un sistema ∞^σ di curve dello stesso genere comune ai due sistemi (per $\sigma = 0$ s'intende una curva), vi è un sistema lineare $\infty^{r+s-\sigma}$ che ha pure il detto genere in cui i due sistemi sono contenuti.

Il sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ si costruisce prendendo risp. nei due sistemi ∞^r, ∞^s due fasci che abbiano comune una curva del sistema ∞^σ e costruendo la rete che contiene i due fasci come prima abbiam visto.

Supponiamo che i sistemi ∞^r, ∞^s e quello ∞^σ comune abbiano il grado D ($\sigma \geq 2$); ossia che il sistema ∞^σ sia contenuto totalmente nei due. Facendo segare le curve del sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ dagli iperpiani per un punto O in $S_{r+s-\sigma+1}$, si vede che questo sistema ha pure il grado D, giacchè altrimenti gli $S_{r-\sigma}$, $S_{s-\sigma}$ base dei sistemi d'iperpiani seganti i due sistemi ∞^s, ∞^r conterrebbero qualche curva o punto della superficie F ed il sistema ∞^σ segato dagli iperpiani per lo $S_{r+s-2\sigma}$ a cui $S_{r-\sigma}$, $S_{s-\sigma}$ appartengono, avrebbe un grado minore di quello dei due sistemi ∞^r, ∞^s. Tanto basta per concludere che un sistema di dato grado non può appartenere a due diversi sistemi normali (s'intende dello stesso grado), giacchè questi sarebbero contenuti in un altro di ugual grado. Ora poichè la dimensione d'un sistema lineare non può superare il grado aumentato di una unità, concludiamo:

Un sistema lineare di dato grado appartiene ad un determinato sistema normale dello stesso grado.

Quando si ha una sola curva (od un fascio) non si può parlare di sistema normale individuato da essa, mancando per essa la nozione di grado: bisogna quindi ricorrere al concetto di sistema completo.

Noi possiamo per ora asserire (in modo analogo al prec. teor.) che:

Una curva non può appartenere a due diversi sistemi completi dello stesso suo genere.

Non possiamo però trarne la conclusione generale che esista un sistema completo (con un numero finito di dimensioni) individuato da una data curva: occorre perciò fissare un massimo della dimensione d'un sistema di dato genere, e questo massimo manca ad es. pei sistemi di curve razionali nel piano e di curve di genere più alto sulle rigate di genere > 0: queste classi di superficie verranno escluse nei cap. che seguiranno, e dopo aver parlato del genere p delle superficie vedremo come per $p > 0$ il teorema accennato sussista senza eccezione (cap. II). *Intanto una curva appartiene ad un determinato sistema completo se si sa che essa è contenuta (anche parzialmente) in un sistema completo.*

3. *Sistemi residui. — Teorema del resto.* — Tutte le curve C′ d'un sistema lineare (K) che insieme ad una stessa C formano una curva totale C + C′ di (K) costituiscono *il sistema residuo della curva* C *rispetto al sistema* (K): è da avvertire che la C potrà essere una curva composta e tra le sue componenti potranno esservi dei punti base per (C′).

Sia (K) un sistema completo e (C′) il residuo della curva C rispetto ad esso. Si consideri (se vi è) un sistema contenente (C′) e dello stesso genere di esso, ed in quel sistema un fascio contenente una curva generica C′ di (C′); il detto fascio venga fatto segare sulla superficie F dai piani per una retta r', mentre un fascio di curve K di (K) contenente la C + C′ venga segato dai piani per una retta r intersecante la r' in un punto O: inoltre il piano $r\,r'$ considerato come appartenente ai due fasci corrisponda risp. alle curve C′ e C + C′, di guisa che esso si stacchi (un certo numero di volte) dalla superficie F. Staccato il detto piano la curva C′ vien rappresentata dalla sezione di esso sulla F fuori di $r\,r'$.

Sia π il genere d'una sezione piana generica della F per O, π_1 il genere d'una sezione per r, π_1' quello d'una sezione per r', π_2 il genere della C′; si ha per ipotesi $\pi_2 = \pi_1'$: come abbiam visto nel precedente §, sussiste la relazione

$$\pi - \pi_2 \geq 2\pi - \pi_1 - \pi'_1$$

e quindi, posto in esso $\pi_1' = \pi_2$, segue $\pi \leq \pi_1$ e però $\pi = \pi_1$.

Si deduce che le sezioni per O della F sono curve del sistema completo (K) di genere π, e poichè la C + C′ è una curva totale di questo sistema la r non appartiene ad F.

Il fascio delle sezioni piane per r' (contenente C′) appartiene dunque parimente a (K) ed esso è il residuo della componente della C rappresentata dalla r'; le altre componenti debbono necessariamente essere curve razionali giacchè se il genere di una curva spezzata (connessa) è uguale al genere di una componente, le altre componenti sono di genere 0 (avendosi il genere della curva composta maggiore od uguale della somma dei generi delle sue parti): si vede così che nel caso più generale possibile la C si spezza in due parti C_1, C_2 (la 2ª delle quali composta di parti razionali) in modo che il sistema residuo di C_1 rispetto a (K) è il sistema completo a cui appartiene il residuo (C′) della C ($= C_1 + C_2$).

Così si ha intanto:

Il sistema residuo d'una curva C, *senza componenti razionali (o punti), rispetto ad un sistema completo* (K) *è completo.*

Supponiamo che (C′) abbia un grado e consideriamo il sistema normale di ugual grado ∞^s a cui appartiene: questo è contenuto nel sistema completo residuo di C_1 rispetto a (K).

Si consideri (se esso non è completo) un sistema ∞^{s+1} di curve generiche del sistema completo residuo di C_1 che contenga in sè il sistema normale ∞^s e si facciano segare queste curve dagli iperpiani di S_{s+1} sulla superficie (semplice o multipla) F′. Il sistema ∞^s vien segato dagli iperpiani per un punto O in generale multiplo per F′, ed al punto O corrisponde sulla data superficie una curva C_3 (composta forse anche di punti) tale che il residuo della $C_1 + C_3$ rispetto a (K) è il sistema normale a cui appartiene (C′). Perciò la C_3 fa parte della C_2 (la quale insieme con C_1 costituisce la C che ha per residuo (C′)), e siccome il sistema (C′) deve esser contenuto totalmente nel sistema normale di ugual grado che esso determina, si deduce che C_3 coincide con C_2, e però (C′) col sistema normale residuo di $C_1 + C_3 = C_1 + C_2 = C$.

La deduzione sussiste ancora se il sistema (K) non è completo ma soltanto normale purchè appartenente ad un sistema completo. Infatti in tal caso se la dimensione di (K) è r, possiamo considerare un sistema ∞^{r+1} che lo contenga appartenente al sistema completo (U) che (K) determina; le ∞^{r+1} curve posson farsi segare dagli iperpiani di S_{r+1} sulla superficie (semplice o multipla) F′; su di essa si ha allora un punto (in generale multiplo) O rappresentante una curva L il cui residuo rispetto al sistema completo (U) è il sistema normale (K); basta aggiungere alla C la L e considerare il residuo di $L + C$ rispetto al sistema completo (U) per trarne la conclusione che il sistema residuo (C′) è normale. Dunque:

Il residuo d'una curva rispetto ad un sistema normale (appartenente ad un sistema completo) è un sistema normale (se ha un grado).

Nel sistema completo (K) sieno contenuti parzialmente i due sistemi irreduttibili (C) e (C′) tali che (C′) sia il residuo di una curva generica C rispetto a K, e (C) il residuo di una generica C′. Supposto (per brevità) che la superficie non sia razionale, le C, C′ generiche non sono razionali, quindi (C′) e (C) (residui di esse rispetto al sistema completo (K)) sono completi (la deduzione sussiste anche per le superficie razionali). Poichè una curva generica di un sistema completo lo determina in modo unico, si trae la conclusione che (C′) è il residuo d'ogni altra curva C di (C), e (C) è il residuo di ogni altra curva C′ di (C′). Dunque:

Se in un sistema completo (K) *sono contenuti parzialmente due sistemi irreduttibili* (C), (C′), *tali che ciascuno di essi sia il residuo rispetto a* (K) *di una curva generica dell'altro, ciascuno dei due sistemi è il residuo rispetto a* (K) *di ogni curva dell'altro; così tra i sistemi* (C), (C′) *è stabilito un tal legame reciproco che ogni curva dell'uno insieme ad una curva dell'altro costituisce una curva totale di* (K).

Questo teorema è noto sotto il nome di teorema del resto (*Restsatz* (1)), i due sistemi (C), (C′) diconsi residui uno dell'altro.

4. *Sistema somma di due sistemi.* — Sieno dati due sistemi ∞^r, ∞^s e si facciano segare le curve di essi sulla superficie F in S_{r+s} risp. dagli iperpiani per un S_{r-1} e

(1) Noether, " Math. Ann. ", 8.

per un S_{s-1} riferendo le dette curve proiettivamente ai nominati iperpiani; le quadriche di S_{r+s} per S_{r-1}, S_{s-1} segano sulla F un sistema contenente tutte le coppie di curve composte con una curva d'un sistema e uno dell'altro, e contenente totalmente le dette coppie: così accade che se n, n', sono i gradi dei due sistemi e la curva generica dell'uno incontra in D punti quella dell'altro, il sistema segato su F dalle quadriche per S_{r-1}, S_{s-1} è di grado $n + n' + 2$ D. Il detto sistema apppartiene ad un determinato sistema normale; non possono esistere due sistemi normali diversi contenenti tutte le coppie di curve dei due dati sistemi poichè essi avrebbero comune un sistema dello stesso grado. Dunque:

Esiste un determinato sistema normale irreduttibile contenente totalmente tutte le coppie di curve composte con una curva d'un sistema normale e una d'un altro (irreduttibili): esso si dirà il sistema somma dei due nominati.

Il sistema somma d'un sistema (C) con se stesso si dirà il suo *doppio;* il sistema *rplo* di (C) risulta definito come somma di (C) col sistema $(r - 1)$ *plo* di (C) ed *è un determinato sistema normale contenente totalmente tutti i gruppi di* r *curve di* (C).

Si può considerare il sistema somma di (C) con una curva (che in una trasformazione può essere sostituita da un punto), ma le curve di questo possono anche esser spezzate in quelle di (C) e nella curva nominata.

II.

Il sistema canonico.

1. *Superficie aggiunte.* — Una superficie F di S_3 ha in generale una o più curve multiple e dei punti multipli particolari che diremo *isolati* appartenenti in vario modo alle curve multiple. Se si considera una retta r non appartenente alla F che passi per un suo punto multiplo o, può darsi che la sezione piana generica della F per r abbia in o una singolarità superiore di quella competente alla sezione generica della stella di centro o; si dirà in tal caso che sulla retta r vi è un punto multiplo infinitamente vicino ad o; se la r è tangente ad una curva ipla per o, vi è certo su di essa un punto iplo infinitamente vicino ad o, ma questo non è un punto iplo isolato. Se non vi sono punti multipli isolati infinitamente vicini a qualche punto multiplo (isolato) della F si dirà che *la* F *ha punti multipli isolati distinti:* introduciamo per ora tale restrizione. Diremo *superficie aggiunta* alla F (1) ogni superficie che gode delle due proprietà caratteristiche seguenti:

(1) Cfr. Noether (“ Math. Ann. „ 2, 8).

a) sega un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana della F;

b) sega un piano passante per un punto multiplo isolato secondo una curva che insieme ad una retta arbitraria per il punto costituisce una linea aggiunta alla detta sezione piana.

Segue che se la F è dotata solo di singolarità ordinarie una sua superficie aggiunta è sottoposta alla condizione di avere come $(i-1)$pla ogni curva ipla della F e come $(n-2)$plo ogni punto $n$plo di essa: ma non possiamo escludere che per effetto delle condizioni imposte ogni superficie di un dato ordine aggiunta alla F possa avere nei punti singolari della F molteplicità superiori di quelle assegnate, o (come diremo più brevemente) delle *ipermolteplicità*.

Quando poi si tratta di singolarità straordinarie, per questo solo fatto può avvenire che le aggiunte debbano avere nei punti (o curve) multipli molteplicità superiori di quelle indicate: così p. e. un punto doppio isolato ordinario non appartiene in generale alle aggiunte della superficie F, ma se il punto è un *contatto della superficie con sè stessa* (tacnodo) (1), in guisa che in ogni piano per esso la sezione ha ivi un tacnodo, segue dalla definizione che le superficie aggiunte alla F debbono passare (semplicemente) per quel punto.

Se n è l'ordine della superficie F, una sua aggiunta ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ (se esiste) sega un piano qualunque secondo una curva C_{n-4} aggiunta alla sezione C_n della F, (la quale insieme ad una retta dà una C_{n-3} aggiunta alla C_n) e quindi se la ψ_{n-4} non ha ipermolteplicità nella linea singolare della F, la sua curva sezione colla F (fuori della linea multipla) sega una C_n sezione piana generica in un gruppo residuo (2) di quelli segati dalle rette del piano: per togliere ogni caso d'eccezione noi possiamo osservare che, allorquando la ψ_{n-4} e quindi la C_{n-4} ha delle ipermolteplicità nei punti singolari della C_n, si debbono riguardare come cadute in quei punti alcune delle intersezioni della ψ_{n-4} colla C_n, giacchè in una trasformazione della C_n a quei punti in quanto sono ipermultipli corrispondono punti della curva trasformata che completano su di essa il gruppo residuo di quello corrispondente all'intersezione di una retta colla C_n. Un riguardo analogo deve aversi per le sezioni piane passanti per un punto multiplo della F.

Così si abbia una superficie F d'ordine n dotata di un punto $i$plo O (ordinario) e si supponga che O abbia una molteplicità $> i-2$ (per precisare $i-1$) per le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F: allora ciascuna di esse sega sopra una sezione piana per O *fuori dei punti multipli* un gruppo residuo di quello segato da una retta generica del piano, e *contenuto* nel residuo di quello segato da una retta per O; secondo le nostre convenzioni riguardo alle ipermolteplicità dobbiamo però considerare il gruppo segato da una ψ_{n-4} sulla sezione piana di F per O *fuori dei punti multipli come la somma del gruppo considerato e di quello degli* i *punti infinitamente*

(1) Cfr. ad es. la superficie del 4° ordine con tacnodo di Cremona (" Collectanea mathematica ") e Noether (" Göttinger Nachrichten ", 1871 e " Math. Ann. ", 33).

(2) Nel senso dei signori Brill e Noether (" Math. Ann. ", 7), cioè rispetto alla serie speciale g_{2p-2}^{p-1} della curva che (seguendo una denominazione del sig. Segre) si dirà serie *canonica* della curva.

vicini ad O: trasformando la superficie si ha come corrispondente alla sezione della ψ_{n-4} in F la curva che corrisponde alla sezione propria della ψ_{n-4} e quella luogo dei punti corrispondenti ai punti infinitamente vicini ad O, ed allora questa curva composta delle due nominate sega proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sopra una curva generica della rete trasformata di quella delle sezioni piane per O della F.

Per chiarire riferiamoci ad un esempio. Si consideri un sistema lineare ∞^r, ($r > 2$) ed in esso le curve d'una rete che hanno $r-2$ punti fissi: si può costruire (fissando una curva del sistema fuori della rete) un sistema ∞^3 che contenga la rete, e supporremo che esso sia semplice: facendo segare le sue curve dai piani sulla superficie F d'ordine n le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F segano sulla F una curva C la quale determina un gruppo residuo della serie segata dai piani sopra una sezione piana generica, per modo che la linea corrispondente C′ sulla prima superficie sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema ∞^3; supponiamo inoltre che la F abbia solo una curva doppia e non di molteplicità superiore, cioè non esistano infinite terne di punti presentanti una sola condizione alle curve del sistema ∞^3. Al gruppo base di $r-2$ punti per la rete contenuta nel sistema ∞^3 che stiamo considerando, corrisponde sulla F un punto O $(r-2)$plo che è $\frac{(r-2)(r-3)}{2}$plo per la curva doppia: si vede quindi che il punto O è $(r-3)$plo per le ψ_{n-4} aggiunte alla F (anzichè $(r-4)$plo); questo fatto porta che la C′ sega sulla curva generica della rete un gruppo residuo della serie caratteristica aumentata del gruppo base (di $r-2$ punti) della rete, ciò che è d'altra parte una conseguenza del modo con cui la C′ è stata costruita: la C′ aumentata degli $(r-2)$ punti base della rete sega quindi un gruppo residuo della serie caratteristica sopra la curva generica della rete; essa gode dell'analoga proprietà anche rispetto al sistema ∞^3 contenente la rete, poichè i punti base della rete sono curve senza intersezioni colle linee del sistema che non passano per essi.

Ciò posto possiamo dire che:

Una superficie ψ_{n-4} *d'ordine* n-4 *aggiunta ad una* F *d'ordine* n *sega sopra una sezione piana generica (fuori dei punti multipli) un gruppo residuo di quello segato da tutte le rette del piano, e sopra una qualunque sezione piana per un punto multiplo isolato un gruppo residuo di quello segato dalle rette per il punto.* Così pure *sega un gruppo speciale, contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici, sopra la sezione piana generica di un fascio il cui asse contenga quanti si vogliano punti multipli o sia una retta multipla.*

Infatti una retta r ipla della F è $(i-1)$ipla per una ψ_{n-4} aggiunta e quindi la sezione della ψ_{n-4} con un piano generico passante per la retta si compone di una curva C_{n-i-3} e della retta r contata $(i-1)$ volte; la C_{n-i-3} ha come punto $(\rho-1)$plo un punto ρplo della sezione C_{n-i} della F fuori di r, e così pure come punto $(\rho-1)$plo un punto $(\rho+i)$plo della C_{n-i} sulla r, giacchè questo punto $(\rho+i)$plo per la sezione totale di F, è $(\rho+i-2)$plo per la curva composta di C_{n-i-3} e di r contata $i-1$ volte.

Se invece la r non appartiene alla F, essa, insieme alla sezione C_{n-4} della ψ_{n-4} con un piano per essa, dà una curva C_{n-3} aggiunta alla sezione piana della F.

Le proprietà che secondo il teorema precedente competono ad una curva sezione della ψ_{n-4} sulla F (tolta la curva multipla) sono caratteristiche per questa curva, anzi due sole di esse bastano a definirla, dico cioè (per limitarmi a ciò che qui occorre) che:

Se si ha una superficie F (*non rigata*) *e si considera una stella di sezioni piane di essa tale che pel suo centro non passino rette multiple infinitamente vicine, e si ha una curva* C *la quale seghi un gruppo residuo di quello segato dai piani della stella sulla sezione generica di essa e seghi un gruppo speciale contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva sezione generica d'un fascio contenuto nella stella, la* C *è sezione della superficie* F (*d'ordine* n) *con una determinata superficie aggiunta d'ordine* n — 4 (ψ_{n-4}).

Sia O il centro della stella ed r una qualunque retta per esso, la quale supporremo non incontri la curva in questione C: un piano per r sega la F secondo una curva K, su cui la C sega un gruppo che insieme al gruppo segato da una retta per O dà un gruppo canonico, cioè un gruppo sezione di una determinata curva d'ordine $n-3$ aggiunta alla K: questa aggiunta d'ordine $n-3$ si spezza per altro necessariamente (anche se O è multiplo) nella retta per O ed in una curva χ d'ordine $n-4$ aggiunta alla K tranne tutt'al più nel punto O che risulta $(i-2)$plo almeno per essa se è iplo per la F $(i>2)$: ora il luogo della curva χ variando il piano scelto per r è una superficie (contenente la data curva C) che si comporta nel punto O e rispetto alla curva multipla della F (tranne eventualmente rispetto a rette multiple per O) come una superficie aggiunta: se questa superficie contenesse r essa dovrebbe segare F in qualche curva passante per le intersezioni di r con F, ma poichè (la r essendo una retta arbitraria per O) per queste non passa C nè la curva multipla, e la ulteriore curva intersezione non ha con un piano per r altri punti comuni fuori di C e dei punti multipli, la detta ulteriore intersezione dovrebbe comporsi di rette incontranti la retta arbitraria r fuori di O, mentre la F non è rigata. Dunque la superficie luogo della curva χ è una ψ_{n-4} di ordine $n-4$ come la χ. Resta a vedersi che questa superficie ψ_{n-4} si comporta come una aggiunta anche rispetto alle rette multiple (eventuali) per O ed ai punti multipli isolati fuori di O e che essa è determinata in modo unico dalla C, ossia è indipendente dalla r.

Sia a una retta hpla della F per O $(h>0)$: se la ψ_{n-4} contiene la a con una molteplicità $<h-1$ (o non la contiene), essa sega un piano per a secondo una curva d'ordine $>n-h-3$ (oltre la a) la quale è aggiunta della sezione piana della F (fuori di a) tranne forse rispetto a punti su a; per conseguenza in tale ipotesi la ψ_{n-4} segherebbe sopra la sezione piana del fascio di asse a un gruppo non speciale, mentre il gruppo sezione appartenendo alla C è per ipotesi un gruppo speciale: così risulta che la ψ_{n-4} ha come $(h-1)$pla (almeno) la retta hpla a della F.

Si consideri ora un punto multiplo isolato O$'$ della F, ρplo per essa: la retta $a \equiv$ OO$'$, sarà in generale $h$pla per F con $h \geq 0$. Suppongasi dapprima $h=0$: la ψ_{n-4} sega (come la C) un gruppo speciale sopra una sezione piana generica della F per a, contenuto nel residuo del gruppo sezione di a (fuori dei punti multipli), quindi la curva d'ordine $n-4$ sezione della ψ_{n-4} con un tal piano dà insieme alla a una curva d'ordine $n-3$ segante la sezione piana di F in un gruppo speciale, la quale si comporta come un'aggiunta rispetto ai punti multipli della detta sezione fuori di a, dunque essa ha la molteplicità $\rho - 1$ (almeno) nel punto ρplo $0'$ della F e perciò questo è $(\rho - 2)$plo (almeno) per la ψ_{n-4}: la conclusione permane se vi sono più punti multipli isolati sulla a, giacchè le ipermolteplicità che la ψ_{n-4} potrebbe avere in qualcuno di essi rappresenterebbero soltanto dei punti del gruppo segato da C caduti nell'intorno di un punto multiplo. Suppongasi invece $h > 0$: allora la a è $(h - 1)$pla per la ψ_{n-4} e la ψ_{n-4} sega sopra un piano per a una curva d'ordine $n - h - 3$ la quale si comporta come un'aggiunta rispetto alla curva d'ordine $n' - h$ sezione della F col piano (fuori di a) nei punti multipli della curva multipla; poichè essa sega sulla detta curva un gruppo speciale si vede (analogamente al caso precedente) che ogni punto $0'$ ρplo su a deve essere $(\rho - 1)$plo (almeno) per essa, ossia la ψ_{n-4} ha come $(\rho - 1)$plo (almeno) ogni punto ρplo sulla retta hpla a.

Finalmente la superficie ψ_{n-4} (che si è dimostrato essere aggiunta alla F) è unicamente determinata dalla condizione di contenere la curva C. Infatti l'intersezione della ψ_{n-4} colla F si compone della curva multipla, della C ed eventualmente di rette per O; queste rette per O non possono variare al variare della retta r che ha servito per la costruzione della ψ_{n-4} giacchè altrimenti la F sarebbe un cono, quindi l'intersezione della ψ_{n-4} colla F è fissa al variare della r: tanto basta per affermare che la ψ_{n-4} stessa è indipendente dal variare della r, giacchè altrimenti si avrebbe un fascio di superficie ψ_{n-4} aventi fissa l'intersezione colla superficie F d'ordine n $(> n - 4)$, ciò che è assurdo.

Così rimane stabilito il teorema enunciato in principio.

Escluderemo nel seguito le superficie F *rigate e le loro trasformate per le quali d'altra parte si può stabilire che non esistono superficie aggiunte* ψ_{n-4}.

Se è data una superficie F d'ordine n in S_3 e si considera la stella delle sezioni piane per un punto fuori di essa si deduce:

Se una curva C *sega un gruppo residuo di quello segato da una retta arbitraria sopra una sezione piana generica della* F, *ed un gruppo contenuto nel residuo di quello segato da una retta pel punto multiplo sopra una sezione piana generica per un punto multiplo isolato, la detta curva* C *è la sezione colla* F *di una determinata superficie* ψ_{n-4} *d'ordine* n — 4 *aggiunta alla* F.

2. *Il sistema canonico.* — I teoremi del precedente § sono suscettibili d'una più vasta estensione conducendo ad un resultato generale che possiamo enunciare sotto forma invariantiva.

A tal fine diremo *curva fondamentale* per un sistema lineare ogni curva parziale del sistema (cap. I), la quale presenti una sola condizione ad una curva del sistema che debba contenerla; se la curva è irreduttibile basta assegnare la condizione che la curva fondamentale non abbia intersezioni variabili colle curve del sistema, non così se è composta: intendiamo per altro di includere sempre in una curva fondamentale composta tutte le linee parziali (o punti) che si staccano da una linea del sistema in conseguenza dello staccarsi di una parte di essa.

Allora una linea fondamentale d'una rete di curve, quando questa venga segata dai piani d'una stella, è rappresentata o da una retta (multipla) pel centro della stella, o da uno o più punti multipli isolati sopra una retta pel detto centro ed eventualmente anche dalla retta stessa; nel 1° caso la curva non è fondamentale per il sistema ∞^3 segato dai piani, nel 2° sì se si tratta d'un solo punto multiplo isolato.

Una linea fondamentale d'un sistema semplice viene sempre rappresentata da un punto multiplo sopra la superficie F trasformata facendo segare dagli iperpiani (o piani) le curve del sistema: diremo che il sistema *ha curve fondamentali distinte* se la superficie F ha punti multipli isolati distinti (cfr. § prec.). Fisseremo l'analoga definizione per una rete dicendo che essa *ha curve fondamentali distinte quando è impossibile fare segare le curve di essa sopra la superficie dai piani per un punto* (*in* S_3) *per cui passano due rette multiple infinitamente vicine:* è facile vedere che una rete generica immersa in un sistema semplice ∞^3 con curve fondamentali distinte ha curve fondamentali distinte, poichè non contiene due fasci infinitamente vicini residui di curve fondamentali.

Ciò posto noi stabiliamo ancora di definire come *serie caratteristica* di un sistema lineare la serie g_D^{r-1} che le curve del sistema (di dimensione r e grado D) segano sopra una curva generica del sistema stesso (1): i piani d'una stella (ossia le rette pel centro) segano sopra una sezione piana la serie caratteristica della rete delle sezioni piane della stella stessa, ecc.

Si abbia sopra una superficie una rete con curve fondamentali distinte e si consideri un arbitrario sistema lineare ∞^k ($k \geq 1$) ed in esso un fascio generico avente m punti base semplici: facciamo segare sulla superficie F (d'ordine n) le curve della rete dai piani per un punto o, e le curve del fascio dai piani per una retta r non passante per o; ai punti base semplici del fascio corrispondono rette per o semplici per F (curve fondamentali della rete aventi una intersezione con ciascuna curva del fascio).

Sia c una curva la quale seghi un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica della rete, ed un gruppo speciale contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva d'un fascio contenuto nella rete; come nel prec. § si prova che la c è sezione della superficie F d'ordine n con una superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ la quale si comporta come un'aggiunta rispetto alle linee multiple della F (quantunque forse la F possa non avere punti multipli isolati distinti): dico inoltre che la ψ_{n-4} contiene le rette semplici per o corrispondenti ai punti base del fascio fatto segare dai piani per r. Infatti un piano per una tal retta a sega la F secondo una curva K_{n-1} d'ordine $n-1$ (fuori di r) e la c sega la K_{n-1} secondo un gruppo che insieme ad una retta per o, p. es. insieme alla r, costituisce un gruppo canonico, sicchè la curva sezione della ψ_{n-4} fuori di r è una curva d'ordine $n-5$ che insieme alla r costituisce un'aggiunta d'ordine $n-4$ alla K_{n-1}, perciò la r appartiene alla ψ_{n-4}, cdd. Ne segue che la c aumentata delle rette per o analoghe ad a sega sopra la curva sezione della F con un piano per r, un gruppo appartenente a quello segato dalla ψ_{n-4}, ossia dalla curva d'ordine $n-i-3$ sezione della ψ_{n-4} col piano fuori della r (supposta ipla per F) ed aggiunta alla sezione piana di F: in altre parole la c sega un gruppo contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva del fascio fatto segare dai piani per r, e sommata (ove occorra)

(1) Cfr. pei sistemi di curve piane, Castelnuovo (" Accad. di Scienze Torino, Memorie ", 1891).

con curve fondamentali della rete (ulteriore sezione della ψ_{n-4} con F fuori delle rette analoghe ad a) sega proprio un tal gruppo residuo sulla curva generica del detto fascio. Si deduce che la c insieme ad eventuali curve fondamentali della data rete sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema ∞^k.

Il ragionamento precedente patisce eccezione se il fascio preso ad arbitrio nel sistema ∞^k sulla superficie appartiene alla involuzione che la rete determina; in tal caso sussiste ancora la conclusione precedente perchè la c (completata ove occorra) gode della stessa proprietà fissata per la primitiva rete rispetto ad altre reti non appartenenti alla stessa involuzione.

Così possiamo enunciare il teorema:

Se una curva C *sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'un sistema* ∞^r (*con* $r \geq 2$) *dotato di curve fondamentali distinte, ed un gruppo contenuto nel residuo della serie caratteristica* (*che si riduce al gruppo dei punti base semplici per un fascio*) *sulla curva generica di ogni sistema* ∞^{r-1} *contenuto nel primo, residuo d'una curva fondamentale, la curva* C *sola o insieme a qualche curva fondamentale pel dato sistema sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'un sistema* ∞^s ($s \geq 2$) (*semplice o no*) *arbitrariamente fissato sulla superficie.*

Da questo teorema risulta che le curve C definite dalle proprietà indicate rispetto ad un sistema ∞^r ($r \geq 2$) non dipendono dalla natura del sistema ove si prescinda da certe componenti fisse di esse (*curve eccezionali*): le curve C si ottengono come sezioni della superficie F d'ordine n in S_3 colle superficie aggiunte d'ordine $n-4$ quando la F sia stata preventivamente trasformata in modo da avere punti multipli isolati distinti (come supponiamo), e perciò compongono un sistema lineare; segue che *le componenti variabili del sistema lineare segato sopra una superficie d'ordine* n *dalle superficie d'ordine* $n-4$ *aggiunte ad essa, si trasformano in curve analoghe quando si trasforma birazionalmente la superficie*; queste curve, legate invariantivamente alla superficie, che diremo *curve canoniche, segano sulla curva generica d'ogni sistema lineare un gruppo contenuto in un gruppo residuo della serie caratteristica o proprio residuo di essa* (1): dovremo poi distinguere quando si presenti l'uno o l'altro caso.

Il *sistema canonico* (costituito dalle curve canoniche) conduce in generale a due caratteri invariantivi della superficie; cioè il *1° genere* p (o semplicemente genere) cioè *la dimensione del sistema canonico aumentata di 1* (Flächengeschlecht) (2), ed il *2° genere* $p^{(1)}$ cioè il *genere del sistema canonico* (Curvengeschlecht di Noether); un terzo carattere, il *grado* $p^{(2)}$, è legato al 2° genere $p^{(1)}$ dalla relazione

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

stabilita dal Noether (Mathem. Ann. VIII), di cui ora dovremo discorrere.

---

(1) L'invariantività delle curve canoniche è stata dimostrata per la prima volta dal sig. Noether (" Math. Ann. ", II, VIII) con un lungo procedimento analitico. Il sig. Castelnuovo (" Istituto lomb. ", 1891) ne ha dedotto la proprietà qui enunciata di queste curve, la quale sotto le restrizioni del precedente teorema risulta ora caratteristica di quelle curve.

(2) Il concetto del genere per le superficie, fu dapprima stabilito da Clebsch (" Comptes rendus ", 1868), quindi il detto concetto fu stabilito dal sig. Noether (" Mathem. Ann. ", II) per tutte le varietà algebriche più volte estese.

Se il 1° genere $p = 1$, mancano le curve canoniche propriamente dette (secondo la nostra definizione), ma ogni sistema lineare ha la serie caratteristica speciale: manca il secondo carattere $p^{(1)}$: esiste *una* superficie d'ordine $n - 4$ aggiunta alla superficie supposta d'ordine n in S_3.

3. *Curve eccezionali.* — Consideriamo un sistema semplice ∞^r (C) ($r \geq 3$) con un punto base iplo (isolato) in un punto semplice O della superficie F e trasformiamo la superficie in una F′ di S_3 su cui ∞^3 curve generiche C di (C) vengano segate dai piani: al punto O corrisponde sulla F′ una curva d'ordine i (che può anche ridursi ad una curva d'ordine $\frac{i}{j}$ contata j volte) la quale deve essere aggiunta ad ogni curva canonica (insieme forse ad altre curve) per segare un gruppo residuo della serie caratteristica sulla sezione piana generica di F′; infatti la curva composta di una curva canonica e del punto O sulla F sega un gruppo residuo della serie caratteristica sopra la curva generica di ogni sistema non avente il punto base O e quindi pel teorema principale del precedente § sega un gruppo residuo della serie caratteristica anche sopra la curva generica d'un arbitrario sistema avente il punto base O. Dunque *la curva d'ordine* i *che corrisponde al punto* O *su* F′ *appartiene a tutte le superficie d'ordine* n — 4 *aggiunte alla* F′ *supposta d'ordine* n; per questa proprietà la detta curva dicesi (secondo il Noether Math. Ann. VIII) una *curva eccezionale* della F′ (ausgezeichnete).

Viceversa si supponga l'esistenza di una curva eccezionale C d'ordine i sulla F′: il sig. Noether (op. cit., § 514) ha indicato una trasformazione della superficie F′ in una F su cui alla C corrisponde un punto semplice per la F e base iplo per il sistema delle curve corrispondenti alle sezioni piane della F′.

La curva eccezionale C su F′ può eventualmente essere sostituita da un punto; la trasformazione della F′ in una superficie F su cui la C è rappresentata da un punto O semplice (per F) e base (con data molteplicità) per il sistema delle curve C′ corrispondenti alle sezioni piane della F′ continua a sussistere, ma nel punto O le curve C′ hanno le tangenti fisse altrimenti ad O corrisponderebbe una linea su F′: reciprocamente se sopra una superficie F si considera un sistema (semplice) ∞^3 (almeno) di curve C′ con un punto base O semplice per F e con data molteplicità per le C′, dove le C′ hanno le tangenti fisse, facendo segare le curve C′ dai piani (di S_3) sopra la superficie F′, si ha su F′ un punto O′ multiplo eccezionale, ossia un punto ipermultiplo di cui un intorno rappresenta una curva appartenente a tutte le curve canoniche; in particolare si può considerare l'esempio in cui le C′ tocchino in O una data retta, O′ è allora un punto doppio eccezionale per la F′.

Risulta di qua che non vi può essere sulla F′ un punto eccezionale semplice (per F′), ossia un punto base pel sistema canonico (semplice per la F′). Infatti sulla superficie trasformata F il punto O corrispondente ad O′ non potrebbe essere un punto base isolato per le C′, altrimenti gli corrisponderebbe una curva sulla F′, e d'altra parte se in O le C′ hanno una tangente fissa il punto O′ risulta doppio almeno per la F′.

Ora si consideri una trasformata F della F′ senza curve (nè punti) eccezionali, come è possibile con successive trasformazioni che mutino in punti semplici le curve eccezionali della F′; sulla F, supposta d'ordine n, le superficie aggiunte ψ_{n-4} (d'ordine $n-4$) segano fuori della curva multipla *soltanto* curve canoniche (e non componenti fisse eccezionali), e quindi le curve canoniche segano sulle sezioni piane della F proprio un gruppo residuo della serie segata dai piani (non un gruppo contenuto in un gruppo residuo).

Se si considera sulla F un sistema semplice (∞^3 almeno) senza punti base e si fanno segare le sue curve dai piani di S_3, sulla superficie trasformata non nascono curve eccezionali (che corrisponderebbero necessariamente a punti sulla F) e quindi la proprietà indicata compete alle curve canoniche anche rispetto alle curve del nuovo sistema.

La proprietà di una superficie di S_3 di non possedere curve eccezionali si traduce in una proprietà invariantiva pel sistema delle sezioni piane che può enunciarsi dicendo che il *sistema è privo di punti base,* intendendo che il sistema non può acquistare punti base (semplici per la superficie) sopra una superficie trasformata, e scegliendo per tipo fra le trasformate una superficie senza curve eccezionali sulla quale il sistema avrebbe necessariamente punti base se li avesse sopra un'altra superficie riferita ad essa biunivocamente: con questa scelta della superficie tipo rimane pure fissato che cosa si deve intendere quando si dice che un sistema ha certi punti base con certe molteplicità; nella scelta medesima evitiamo di riferirci a quelle superficie su cui accidentalmente i punti base del sistema cadano infinitamente vicini a punti multipli. Infine queste definizioni non esigono che il sistema di cui si tratta sia semplice.

Con queste convenzioni *l'esistenza di punti base d'un sistema costituisce una proprietà invariantiva di esso che compete evidentemente al sistema normale definito dal dato sistema* (altrimenti il grado aumenterebbe).

Diremo per brevità *puro* o *impuro* un sistema secondochè non ha o ha punti base; diremo pure *curva eccezionale* sopra una superficie in S_n la curva che corrisponde ad un punto base pel sistema delle curve trasformate delle sue sezioni iperpianali.

Ora sopra una superficie F senza curve eccezionali si abbia un sistema puro (semplice o no): se una curva canonica non segasse proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema (supposto di dimensione ≥ 2), tale proprietà competerebbe alla somma di essa con una curva eccezionale su F; questa curva non potrebbe essere che un punto base pel sistema, ciò che contrasta all'ipotesi che il sistema sia puro. Concludiamo:

Una curva canonica sega proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'ogni sistema puro (∞^2 *almeno*) *ed è caratterizzata da questa proprietà.*

Parimente:

Se un sistema impuro (∞^2 *almeno*) *ha* s *punti base isolati di molteplicità* $i_1\, i_2 \ldots i_s$, *una curva canonica sega sulla curva generica di esso un gruppo che aumentato dei gruppi di* $i_1\, i_2 \ldots i_s$ *punti infinitamente vicini ai rispettivi punti base dà un gruppo residuo della serie caratteristica.*

Il sistema canonico non ha punti base (come abbiamo osservato), quindi *la serie caratteristica del sistema canonico è autoresidua e perciò*

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

(cfr. citaz. precedente): va fatta eccezione per il caso che il sistema canonico si spezzi nelle componenti d'un fascio (o per $p = 1$ in cui il teorema non ha significato) giacchè tali sistemi sono stati esclusi dalle nostre considerazioni nel § 1°, cap. I; nondimeno il signor Noether ha stabilito che in tale ipotesi le curve componenti le curve canoniche sono ellittiche, sicchè $p^{(2)} = 0$, $p^{(1)} = 1$, e la relazione è ancora verificata.

Possiamo ora estendere il concetto di superficie aggiunta anche al caso in cui la superficie F sia stata trasformata in modo da non avere più punti multipli isolati distinti, basandoci sulla invariantività del sistema canonico ($p > 0$). Invero una curva canonica C insieme alle curve eccezionali sega un gruppo residuo della serie caratteristica del sistema ∞^3 segato dai piani sulla sezione piana generica della F, ed un gruppo residuo di quello segato dai piani per il punto sopra la sezione piana per un punto multiplo isolato, perciò col ragionamento del § 1 si prova che la curva composta della C e delle curve eccezionali (corrispondenti ai punti base del sistema ∞^3 segato dai piani) è sezione di una determinata superficie ψ_{n-4} d'ordine $n - 4$ (essendo n l'ordine della F) la quale soddisfa alle condizioni $a)$ $b)$ del § 1 richieste dalla definizione di superficie aggiunta rispetto ad una superficie con punti multipli isolati distinti; inoltre la ψ_{n-4} si comporta nei punti multipli isolati della F in un modo particolare pienamente determinato (p. e. si può vedere che essa ha come $(i - 2)$plo }almeno{ un punto iplo infinitamente vicino ad un punto multiplo); noi assumiamo il modo di comportarsi della ψ_{n-4} nei punti multipli come definizione del modo di comportarsi delle superficie aggiunte alla F, con riguardo però al fatto che debbono considerarsi come ipermoltiplicità della F i punti multipli rappresentanti una curva eccezionale; per evitare discussioni troppo minute diciamo che *sono aggiunte alla superficie* F *dotata di arbitrarie singolarità e di curve eccezionali distinte, le superficie che segano un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana e si comportano nei punti multipli isolati come le* ψ_{n-4}; invero nessuna curva eccezionale (immagine d'un punto base isolato) può in questo caso ridursi all' intorno d'un punto multiplo.

Osserviamo che la costruzione delle ψ_{n-4} riesce per $p = 1$ anche se mancano le curve eccezionali, essendovi in ogni piano *una* curva d'ordine $n - 4$ aggiunta alla sezione piana: va fatta eccezione per le superficie del 4° ordine (genere 1) a cui sono aggiunte tutte le superficie.

4. *Applicazioni.* — Una conclusione emerge subito dai resultati del § 2°. Se il genere p di una superficie è > 0, la dimensione r d'un sistema lineare di genere π è $\leq \pi$ (poichè la serie caratteristica è speciale), quindi ricordando gli ultimi resultati del cap. precedente si ha:

Sopra una superficie di genere > 0 *una curva appartiene ad un determinato sistema completo.*

E parimente (poichè allora ogni sistema normale è contenuto in un sistema completo):

Il residuo d'una curva rispetto ad un sistema normale è sempre un sistema normale (se ha un grado).

Si consideri ora un sistema normale di grado n (C), appartenente ad un sistema completo puro di grado $n + \delta$ ($\delta > 0$), sopra una superficie di genere $p > 0$. Una curva canonica sega la curva generica del sistema completo di genere π in $2(\pi - 1) - n - \delta$ punti, ed insieme ai punti base di (C) sega una curva generica C (di (C)) in $2(\pi - 1) - n$ punti; i detti punti base non possono essere multipli perchè (C) ha lo stesso genere π del sistema completo a cui appartiene, quindi (C) ha almeno δ punti base semplici, e precisamente ne ha δ perchè è δ la differenza fra il suo grado e quello del sistema completo.

Si deduce che se $\delta = 0$ (C) coincide col sistema completo a cui appartiene. Dunque:

Un sistema puro normale è necessariamente completo ($p > 0$).

III.

Il sistema aggiunto.

1. *Definizione del sistema aggiunto.* — In S_3 si abbia una superficie F d'ordine n; una superficie ψ_{n-3} d'ordine $n - 3$ aggiunta alla F sega la F (fuori dei punti multipli) secondo una curva K la quale gode delle due proprietà seguenti:

a) sega una sezione piana generica della F secondo un gruppo canonico,

b) sega una sezione piana generica (non razionale) per un punto multiplo O della F secondo un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma di quella canonica e della serie differenza di quella segata sulla curva dai piani generici di S_3 e di quella segata su di essa dai piani per O. Escludiamo che la F abbia una stella di sezioni piane razionali (nel qual caso sarebbe razionale).

Se il punto O è un punto $i$plo ordinario la serie differenza di quella segata dai piani generici di S_3 sopra una sezione piana per O e di quella segata sulla curva stessa dai piani per O, è la serie determinata dal gruppo degli i punti della curva in questione infinitamente vicini al punto O.

In modo analogo a quello con cui è stato dimostrato il teorema principale del § 1°, cap. II si stabilisce che:

Se la F *è dotata solo di punti multipli isolati distinti, una curva la quale goda delle proprietà* a), b), *è la sezione della* F *con una determinata superficie aggiunta* ψ_{n-3} *d'ordine* $n - 3$.

Le proprietà *a*), *b*) di una curva K rispetto alla F, si traducono in proprietà della K rispetto alle sezioni piane di una stella col centro fuori della F o in un punto semplice di essa, le quali d'altra parte (per la dimostrazione analoga a quella citata) sono caratteristiche per la K. Si ha dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la K *sia la sezione della* F (*dotata di punti multipli isolati distinti*) *con una superficie* ψ_{n-3} *d'ordine* n — 3 *aggiunta alla* F *stessa, è che la* K:

α) *seghi un gruppo canonico sopra ogni sezione generica della* F *con un piano appartenente ad una stella il cui centro* O *è fuori della* F *o è semplice per essa,*

β) *seghi un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della canonica colla serie differenza di quella segata dai piani per* O *e di quella individuata dal gruppo dei punti base semplice del fascio, sopra la curva generica d'un fascio segato da piani per* O.

Si supponga che le sezioni piane della F di genere π sieno le curve di un sistema generico ∞^3 immerso in un sistema completo (C) di dimensione $r > 3$ (e necessariamente semplice). Le curve C si facciano segare sulla superficie trasformata φ dagli iperpiani di S_r: il sistema delle sezioni piane della F viene segato dagli iperpiani per un S_{r-4} di S_r non incontrante la φ. Dato un altro S_{r-4} non incontrante la φ in S_r si può sempre costruire una serie di S_{r-4} in S_r (avente per estremi i due dati) tale che due S_{r-4} consecutivi giacciano in un S_{r-3} senza intersezioni colla φ. Allora una curva K che gode delle proprietà *a*), *b*) rispetto al primo sistema ∞^3 (quando le sue curve sieno fatte segare dai piani di S_3), gode delle proprietà α), β) rispetto alle curve della rete data dagli iperpiani per S_{r-3} (che vien segata dai piani d'una stella col centro fuori di F, quindi gode delle proprietà *a*), *b*) rispetto al 2° sistema ∞^3 immerso in (C) e così via fino all'ultimo (supposto che tutti questi sistemi sieno semplici).

Allora traducendo in linguaggio invariantivo le proprietà α), β), *a*), *b*) si può enunciare il teorema:

Sia (C) *un sistema completo semplice di dimensione* $r \geq 3$ *dotato di curve fondamentali distinte, e sia* K *una curva la quale goda delle due proprietà seguenti:*

α) *di segare un gruppo canonico sopra la curva generica di una rete generica immersa in* (C),

β) *di segare sopra la curva generica di un fascio contenuto nella rete un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e di quella differenza tra la serie segata dalla rete e quella individuata dal gruppo dei punti base semplici del fascio; allora la curva* K *gode le due proprietà caratteristiche seguenti:*

a) *sega un gruppo canonico sopra ogni curva generica di* (C),

b) *sega sopra la curva generica d'un sistema* ∞^{r-1} *residuo di una curva fondamentale di* (C) *un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e della serie differenza fra quella segata sulla curva da* (C) *e la serie caratteristica del sistema* ∞^{r-1}.

La curva K *è caratterizzata dal fatto di essere la sezione (fuori della linea multipla) della superficie* F *d'ordine* n *ottenuta facendo segare dai piani di* S_3, ∞^3 *curve generiche di* (C), *con una superficie* ψ_{n-3} *d'ordine* n — 3 *aggiunta ad essa* F. *Perciò le curve* K *compongono un sistema lineare che si dirà il sistema aggiunto di* (C).

Se si tratta di una superficie di genere $p > 0$, le proprietà *a*), *b*) rispetto ad un sistema (C) con punti base *distinti* (1), competono alle curve composte di una curva C (di (C)) e di una curva canonica aumentata dei punti base di (C) (cfr. cap. II, § 3),

(1) Ossia tali che in nessuno di essi le curve C hanno una tangente fissa. Sebbene introduca costantemente questa ipotesi per non entrare in una analisi troppo minuta, non sarebbe difficile estendere molti resultati anche al caso in cui (C) abbia punti base di arbitraria natura, come si fa nel piano colla considerazione delle singolarità straordinarie delle curve.

e quindi evidentemente anche alle curve del sistema (normale) somma di (C), del canonico, e delle curve rappresentate dai punti base di (C).

Viceversa consideriamo il sistema (K) aggiunto di (C). Sulla curva generica C di (C) una K di (K) sega un gruppo canonico per il quale passano oltre la K ∞^{p-1} curve del sistema aggiunto spezzate nella C ed in una curva canonica aumentata dei punti base (o curve eccezionali corrispondenti) di (C), quindi pel detto gruppo canonico passano almeno ∞^p curve di (K); ma per il gruppo non possono passare più di ∞^p curve K giacchè altrimenti vi sarebbero più che ∞^{p-1} curve di (K) spezzate nella C ed in una curva residua, la quale per le proprietà *a*), *b*) di (C) possiede necessariamente le proprietà caratteristiche (indicate nel cap. II, §§ 2, 3) proprie di una curva canonica e delle linee eccezionali (o punti base) di (C); dunque per un gruppo canonico sezione d'una curva irreduttibile K con una curva generica C passano appunto ∞^p curve K. Il sistema (K) è dunque il sistema normale somma di (C) col sistema canonico e colle curve eccezionali (distinte) di (C), e *questo fatto si assumerà come definizione per* (K) *se* (C) *non ha curve fondamentali distinte* (per $p > 0$): risulta ancora (per la convenzione del cap. prec.) che (K) viene segato dalle superficie d'ordine $n - 3$ aggiunte sulla superficie d'ordine n le cui sezioni piane sono curve generiche di (C).

Come ora abbiamo osservato le curve di (K) residue di una C sono curve canoniche aumentate dei punti base di (C); allora consideriamo un punto base O iplo isolato di (C) (sopra una superficie senza curve eccezionali) e supponiamo per pura semplicità di ragionamento che (C) non abbia altri punti base.

Staccando da (K) una curva C generica si ha un sistema residuo somma del sistema canonico e del punto O, ciò vuol dire che il punto O ha come residuo rispetto a (K) il sistema somma di (C) e del canonico; poichè il sistema canonico non ha punti base (è puro) il detto sistema somma ha il punto O come base iplo; ora si possono fare due ipotesi; o il sistema (K) è spezzato nel detto sistema somma e nel punto O (se si vuole curva eccezionale corrispondente), oppure il punto O ha una tale molteplicità s per le curve K che imponendo ad una di esse di avere un altro punto infinitamente vicino ad O oltre agli s tenuti fissi (ossia staccando O, o se si vuole la curva eccezionale corrispondente, da (K)) il punto O diviene iplo per le curve K residue; il punto O facendo parte *una sola volta* delle curve K spezzate in una C in una canonica ed in O, segue che $s = i - 1$, ossia il punto O è $(i - 1)$ plo per (K). D'altra parte (K) non può avere altri punti base fuori di quelli di (C) poichè un punto base O di (K) è base pel residuo del canonico e pel residuo rispetto al nuovo sistema di curve o punti non contenenti O. Deduciamo:

Sopra una superficie di genere > 0 *il sistema* (K) *aggiunto a* (C) (∞^2 *almeno*) *è il sistema normale somma di* (C), *del sistema canonico e dei punti base (supposti isolati) (o curve eccezionali) di* (C): *un punto base iplo di* (C) *o si stacca (forse) da tutte le curve di* (K) *ed allora è iplo per le componenti irreduttibili di esso, o è base* (i — 1) *plo per* (K); (K) *non ha punti base fuori di quelli di* (C).

2. *Dimensione del sistema aggiunto.* — Le curve del sistema (K) aggiunto a (C) segano sulla curva generica C (di (C)) gruppi canonici; sorge la questione " la serie segata da (K) sulla curva C è la serie canonica completa? ".

Con effettivi esempi (di superficie aventi il genere geometrico diverso dal numerico che avrò occasione di menzionare) si vede che può avvenire l'uno o l'altro caso; importa però a noi di stabilire che questo fatto è legato invariantivamente alla superficie e non dipende dal particolare sistema (C) considerato.

Intanto notiamo che la questione posta equivale a quella di determinare la dimensione del sistema (K) aggiunto al sistema (C) di genere π sopra una superficie di genere p, infatti abbiamo avuto occasione di osservare nel precedente § che per un gruppo canonico della C sezione di una K (di cui la C non fa parte) passano ∞^p curve K, quindi la dimensione di (K) è $p + \pi - \omega - 1$ essendo ω (≥ 0) il difetto di completezza della serie che (K) sega sulla C. Questa quantità $\omega \geq 0$ che esprime la differenza fra la dimensione virtuale (per dir così) $p + \pi - 1$ dell'aggiunto a (C) e la dimensione effettiva del detto sistema aggiunto, si designerà nel seguito con $\mathfrak{d}$ (C).

Il sistema (C) sia un sistema puro semplice (quindi ∞^3 almeno, essendo $p > 0$), e ∞^3 delle sue curve generiche sieno segate sulla superficie F dai piani di S_3; la F risulta senza curve eccezionali; s'indichi con (C′) il sistema canonico e con (C + C′) il sistema normale somma di (C), (C′), ossia il sistema aggiunto a (C); analogamente con (r C + C′) il sistema aggiunto ad (r C); infine $\pi^{(r)}$ designi il genere di (r C) ($\pi^{(1)} = \pi$). Il sistema (r C) contiene in sè (totalmente) quello segato sulla F da tutte le superficie φ_r di ordine r; dato un arbitrario sistema (C_1) si può prendere r così grande che per la curva generica C_1 passino delle φ_r, e quindi (C_1) sia contenuto (parzialmente) in (r C); anzi per r assai elevato le φ_r passanti per C_1 non passeranno in conseguenza per altri elementi fissi e perciò il residuo di (C_1) rispetto ad (r C) sarà un sistema puro (C_2); supponiamo ancora che (C_1) stesso sia un sistema puro.

Indicando con π_1, π_2 i risp. generi di (C_1), (C_2), la curva spezzata $C_1 + C_2$ non ha fuori dei punti multipli per le curve di (r C), altri punti multipli che i D punti doppi intersezioni di C_1, C_2 (essendo (C_1), (C_2) due sistemi puri residui un dell'altro rispetto ad (r C)), quindi secondo la formola di Noether che dà il genere d'una curva spezzata si ha:

$$\pi^{(r)} = \pi_1 + \pi_2 + D - 1.$$

Ora il sistema aggiunto di (r C), ossia (r C + C′) è anche la somma (C_2 + (C_1 + C′)) ossia è la somma di (C_2) e dell'aggiunto a (C_1). Sopra la curva generica C_2 (di genere π_2) il sistema (C_2 + (C_1 + C′)) = (C_1 + (C_2 + C′)) sega una serie g (forse scompleta) di grado

$$D + 2\,\pi_2 - 2$$

e però di dimensione

$$D + \pi_2 - 2 - \omega_2 \qquad (\omega_2 \geq 0):$$

se
$$p + \pi^1 - 1 - \omega_1 \qquad (\omega_1 = \mathfrak{d}\,(C_1) \geq 0)$$

è la dimensione di (C_1 + C′), per un gruppo della serie g passano $\infty^{p+\pi_1-\omega_1}$ curve di ($C_2 + C_1$ + C′) tra cui $\infty^{p+\pi_1-1-\omega_1}$ spezzate nella C_2 ed in una curva arbitraria di (C_1 + C′); dunque la dimensione del sistema aggiunto ad (r C), cioè di (r C + C′) = ($C_2 + C_1$ + C′) vale

$$p + \pi_1 + \pi_2 + D - 2 - \omega_1 - \omega_2;$$

ma
$$\pi_1 + \pi_2 + D - 1 = \pi^{(r)},$$
quindi è
$$\delta(r\,C) = \omega_2 + \delta(C_1) \qquad (\delta(C_1) = \omega_1)$$
ossia
$$\delta(r\,C) \geq \delta(C_1).$$

Dunque la quantità $\delta(C_1)$ relativa ad un qualunque sistema puro (C_1) non supera l'analoga quantità calcolata per $(r\,C)$ dove si prenda r assai elevato. Perciò se il $\delta(r\,C)$ anzichè crescere indefinitamente con r assume un valore massimo (che sarà pur quello di $\delta((r+s)\,C)$ per $s \geq 0$), questo valore è un *vero carattere invariantivo della superficie;* effettivamente se la F ha singolarità ordinarie in guisa che si possano applicare da un certo punto in poi le formule di postulazione di Noether per calcolare le dimensioni dei sistemi delle superficie (di dato ordine) aggiunte alla F (di ordine n), si verifica con un semplice calcolo che la dimensione del sistema aggiunto ad $(r\,C)$ che contiene quello segato dalle aggiunte d'ordine $n - 4 + r$ è (per r assai elevato)
$$\geq p_1 + \pi^{(r)} - 1$$
dove p_1 è un numero indipendente da r che esprime il numero *virtuale* delle superficie aggiunte d'ordine $n - 4$ (linearmente indipendenti) e dicesi *genere numerico* della F; si ha dunque:
$$\delta(r\,C) \leq p - p_1,$$
e perciò il $\delta(r\,C)$ *ha un massimo* K *che esprime il massimo difetto di scompletezza della serie segata sulla curva generica di un arbitrario sistema dal suo sistema aggiunto* (e si stabilirebbe essere $= p - p_1$ dimostrando che è completo il sistema segato sulla F da tutte le aggiunte di ordine assai elevato) (1). Ma ciò che a noi interessa è la considerazione del caso in cui $K = 0$, e delle condizioni che permettono di trarre tale conclusione, a cui vogliano giungere *senza occuparci della natura delle singolarità che la* F *possiede.*

Occorre premettere un lemma di geometria sopra una curva la cui dimostrazione si compie facilmente usando di un ragionamento adoperato dal signor Castelnuovo in un suo recente lavoro (2). Il lemma è il seguente:

Sopra una curva piana d'ordine n *e genere* π *la minima serie* g *di grado* $(r+1)\,n + 2\,(\pi - 1)$ *contenente tutti i gruppi composti dell'intersezione d'una curva aggiunta d'ordine* $n - 3 + r$ *e dell'intersezione d'una retta, è la serie completa somma della* $g^{rn+\pi-2}_{rn+2(\pi-1)}$ *segata dalle curve aggiunte d'ordine* $n - 3 + r$, *e della* g^2_n *segata dalle rette.*

(1) Così risulterebbe fissata in ogni caso la invariantività di p_1 che i signori Zeuthen (" Math. Ann. ", IV) e Noether (" Mathem. Ann. ", VIII) hanno stabilito soltanto con restrizioni alle singolarità nascenti sulla superficie nelle trasformazioni considerate. Effettivi esempi di superficie aventi il genere geometrico diverso dal numerico (comunque elevato) sono stati dati dal sig. Castelnuovo (" Istituto lomb. ", 1891).

(2) " Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica " (" Circolo Mat. di Palermo ", t. VII).

Per dimostrare questo lemma osserviamo anzitutto che la serie g in questione è certo contenuta nella serie completa segata sulla nostra curva C_n dalle $C_{n-3+(r+1)}$ aggiunte d'ordine $n-3+(r+1)$; basta quindi stabilire che è completo il minimo sistema lineare contenente tutte le curve composte d'una C_{n-3+r} (d'ordine $n-3+r$) aggiunta alla C_n e d'una retta: infatti il sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ che sega la g sulla C_n (comprese in esso sistema tutte le $C_{n-3+(r+1)}$ per un gruppo della g) è appunto tale che contiene in sè *tutte* le curve composte d'una retta e d'una C_{n-3+r} e non può essere completo se è scompleta la detta serie g. Ora per ipotesi fra le curve $C_{n-3+(r+1)}$ vi sono quelle composte di una retta fissa a e di una C_{n-3+r} che sono

$$\infty^{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}}$$

e così pure quelle composte di una retta fissa a' e di una C_{n-3+r}; i due sistemi hanno comune il sistema delle $C_{n-3+(r-1)}$ la cui dimensione è

$$\pi-1+(r-1)\,n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}$$

e però il loro minimo sistema somma ha una dimensione

$$\geq 2\left\{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}\right\}-\left\{\pi-1+(r-1)\,n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}\right\},$$

cioè

$$\geq \pi-2+(r+1)\,n+\frac{(r+1)(r-2)}{2},$$

ma questo sistema è contenuto o coincide con quello delle $C_{n-3+(r+1)}$ passanti per il punto comune ad a, a', e poichè le $C_{n-3+(r+1)}$ seganti la g sulla C_n non passano tutte per quel punto, la dimensione del sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ in questione è

$$\geq \pi-1+(r+1)\,n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

e quindi è appunto la dimensione

$$\pi-1+(r+1)\,n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

del sistema completo di *tutte* le $C_{n-3+(r+1)}$ *c d d.*

Ritornando alla questione precedente si ha come immediata applicazione del lemma ora stabilito, che se il sistema $(r\,C+C')$ aggiunto ad $(r\,C)$ (dove $r>1$) sega sulla curva generica C una serie completa, lo stesso accade per $((r+1)\,C+C')$, e poichè la differenza (≥ 0) fra $\delta\ ((r+1)C)$ e $\delta\ (r\,C)$ è la scompletezza ω della serie segata da $((r+1)\,C)$ sulla C, si ha in tal caso

$$\delta\,(r\,C)=\delta\,((r+1)\,C)=\ldots\ldots=K.$$

Un corollario di questo resultato è il seguente: se per $r > 1$ è $\delta(r\,C) = 0$, la superficie ha il carattere $K = 0$; il resultato più semplice si ha per $r = 2$. Possiamo così enunciare il teorema:

Se sopra una superficie di genere $p > 0$ *esiste un sistema puro semplice* (C) *(quindi* ∞^3 *almeno) tale che il sistema aggiunto a* $(2\,C)$ *seghi la serie canonica completa sulla curva generica di* $(2\,C)$ *(ossia abbia la dimensione* $p + 2\pi + n - 2$ *dove* π *ed* n *sono risp. il genere e il grado di* (C)) *allora sulla curva generica di ogni sistema puro di genere* Π, *appartenente alla superficie, il sistema aggiunto sega la serie canonica completa, ossia esso ha la dimensione*

$$p + \Pi - 1.$$

In altre parole la condizione necessaria e sufficiente affinchè per una superficie sia il carattere invariantivo

$$K = 0$$

è che esista un sistema puro semplice (C) *tale che*

$$\delta(2\,C) = 0.$$

Il teorema verrà poi esteso anche ai sistemi impuri; dobbiamo prima illuminarne meglio il contenuto ponendolo in relazione colle proprietà che si riferiscono al genere numerico della superficie, ed ai sistemi segati su di essa da superficie aggiunte.

3. *Sistemi segati sopra una superficie dalle superficie aggiunte.* — Consideriamo in S_3 la superficie F d'ordine n di genere $p > 0$ senza curve eccezionali, dotata di singolarità qualunque, le cui sezioni piane appartengono ad un sistema puro (C); indichiamo col simbolo ψ_μ le sue superficie aggiunte d'ordine μ. Come nel § 1 per le ψ_{n-3}, si dimostra che le curve appartenenti al sistema (normale) somma di (C) e del sistema aggiunto a (C) sono sezioni della F con una ψ_{n-2}, e però che le ψ_{n-2} segano sulla F un sistema normale; poichè (C) è puro le ψ_{n-2} segano sulla F il sistema puro completo aggiunto a $(2\,C)$ (cioè $(2\,C + C')$ se (C') è il sistema canonico). Parimente si vedrebbe ancora che le ψ_{n-1} segano sulla F il sistema completo $(3C + C')$ (poichè ancora il gruppo sezione sopra una sezione piana C appartiene ad *una* curva aggiunta d'ordine $n - 1$).

Supponiamo che le superficie ψ_{n-3+r} $(r > 1)$ seghino la serie completa sopra una sezione piana generica C della F; per il lemma di geometria sopra una curva stabilito nel precedente §, segue che le $\psi_{n-3+(r+1)}$ segheranno pure sopra la C la serie completa; allora se il sistema segato dalle ψ_{n-3+r} sulla F è il sistema $(r\,C + C')$ completo, quello segato dalle $\psi_{n-3+(r+1)}$ è necessariamente il sistema completo $((r+1)\,C + C')$ e si ha (come si è visto)

$$\delta(r\,C) = \delta((r+1)\,C).$$

Dunque se $\delta(2\,C) = 0$ (poichè le ψ_{n-2} segano sulla F *tutto* il sistema $(2\,C + C')$), le superficie aggiunte alla F ψ_{n-4+r} $(r > 1)$ segano pure sulla F *tutto* il sistema

$(r\,C + C')$. In tal caso le ψ_{n-3+r} segano sulla F un sistema di dimensione $p + \pi^{(r+1)} - 1$ (essendo $\pi^{(r)}$ il genere di $(r\,C)$); per ogni curva sezione passano (se $r \geq 3$) $\binom{r}{3} + 1$ ψ_{n-3+r} linearmente indipendenti fra cui $\binom{r}{3}$ spezzate nella F ed in una arbitraria superficie d'ordine $r - 3$, quindi il numero A_{n-3+r} della superficie ψ_{n-3+r} linearmente indipendenti è dato da

$$A_{n-3+r} = p + \pi^{(r+1)} + \binom{r}{3} \quad \left(\text{dove } \binom{r}{3} = 0 \text{ se } r < 3\right).$$

Se $\pi^{(1)} = \pi$ è il genere di (C) si ha

$$\pi^{(r+1)} = \pi^{(r)} + \pi + rn - 1,$$

quindi

$$A_{n-3+r} = A_{n-3+(r-1)} + \pi + rn - 1 + \binom{r-1}{2},$$

uguaglianza la quale significa che le ψ_{n-3+r} segano sopra un piano il sistema lineare completo delle curve d'ordine $n - 3 + r$ aggiunte alla sezione piana la cui dimensione è $\pi + rn - 2 + \binom{r-1}{2}$.

Ma se la F è dotata di singolarità ordinarie e se i numeri A_{n-3+r}, $A_{n-3+(r-1)}$ sono quelli dati dalle formule di postulazione di Noether si deduce appunto (per differenza) la precedente uguaglianza (come il signor Castelnuovo ha osservato (1)): valendo la detta formula ricorrente (che è stata dimostrata partendo dall'ipotesi $K = \mathfrak{d}(2\,C) = 0$), si conclude dunque che valgono le formule di postulazione di Noether per le ψ_{n-3+r} se valgono per le ψ_{n-3} e poichè esse dànno $p_1 + \pi$, ψ_{n-3} linearmente indipendenti se p_1 è il numero virtuale delle ψ_{n-4} (ossia il genere numerico), è condizione necessaria e sufficiente affinchè valgano per r assai grande le dette formule di postulazione che sia

$$p_1 = p;$$

siccome effettivamente le formule di postulazione di Noether valgono per r assai elevato, l'uguaglianza $p = p_1$ risulta stabilita. Viceversa se $p = p_1$ valendo le formule di postulazione per r assai grande, si ha $\mathfrak{d}(r\,C) = 0$ e quindi $K = 0$.

Si conclude il teorema:

Le superficie di genere p > 0 *per le quali il carattere invariantivo* $K = 0$ *allorchè sieno trasformate in modo da avere soltanto singolarità ordinarie (se è possibile) e non curve eccezionali, hanno il genere numerico* $p_1 = p$, *e viceversa* (2).

Poichè p_1 non è definito per le superficie con singolarità straordinarie assumeremo per esse convenzionalmente $p_1 = p$ quando è $K = 0$.

Possiamo enunciare il teorema (dimostrato mediante le considerazioni precedenti): *Sopra una superficie d'ordine* n *di* S_3 *senza curve eccezionali, dotata di singolarità*

(1) " Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche " (" Circolo Mat. di Palermo ", t. IV, 1890).

(2) Indipendentemente dai ragionamenti fatti che suppongono $p > 0$, tenendo conto dell'osservazione che la differenza virtuale $A_\mu - A_{\mu-1}$ è la dimensione del sistema di tutte le curve d'ordine μ aggiunte ad una sezione piana, partendo dall'ipotesi che le formule di postulazione valgano per μ assai grande (come accade se la superficie ha singolarità ordinarie) si prova che è $p_1 \leq p$ e se $p_1 = p$ le formule di postulazione valgono per le ψ_{n-4+r} $(r \geq 0)$.

qualunque, avente il genere numerico uguale al geometrico > 0, *(ossia* $K \neq 0$), *le superficie aggiunte di arbitrario ordine segano un sistema completo.*

La dimostrazione è stata data soltanto per le ψ_{n-3+r} con $r \geq 0$ (poichè esse segano *tutto* il sistema aggiunto ad un sistema puro il quale è un sistema puro normale e perciò un sistema completo), ma in vista del teorema del resto del cap. I, staccando successivamente sezioni piane si stabilisce la cosa in ogni caso.

Allora adoperando il ricordato teorema del resto del cap. I si ha:

Il sistema completo a cui appartiene una curva C *sopra la superficie* F *viene segato da tutte le superficie aggiunte di arbitrario ordine che passano per una intersezione complementare irreduttibile della* C *e si comportano debitamente nei punti multipli della* C *stessa.*

È questo il complemento del ricordato teorema del resto (*Restsatz*, secondo Noether).

4. *Sistemi impuri.* — Sopra la superficie F di genere geometrico uguale al numerico $p > 0$, le cui sezioni piane appartengono ad un sistema puro (C), si consideri ora un sistema impuro (C_1) avente s punti base multipli risp. secondo $i_1, i_2 \ldots i_s$; possiamo prendere r così grande che (C_1) sia contenuto in (rC) ed abbia come residuo rispetto ad esso il sistema puro (C_2). Indicando con π_1, π_2 i risp. generi di (C_1), (C_2), con $\pi^{(r)}$ quello di (r C), e considerando che un punto jplo d'una curva le cui tangenti stanno in un piano diminuisce di $\frac{j(j-1)}{2}$ il genere della curva, si ha

$$\pi^{(r)} = \pi_1 + \pi_2 + D - 1 + \sum_1^s \frac{i_\rho(i_\rho - 1)}{2}$$

dove D è il numero delle intersezioni di una C_1, con una C_2. Sia (C') il sistema canonico e quindi ($rC + C'$) l'aggiunto di (rC), ed ($rC + C' - C_2$) il residuo di (C_2) rispetto al detto aggiunto; ripetiamo il ragionamento del § 2; ($rC + C'$) sega sulla C_2 una serie di grado $D + 2\pi_2 - 2$ e quindi di dimensione $D + \pi_2 - 2 - \omega$, ($\omega \geqq 0$), sicchè la dimensione di ($rC + C' - C_2$) è

$$p + \pi^{(r)} - D - \pi_2 + \omega,$$

ossia è

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho(i_\rho - 1)}{2} - 1 + \omega.$$

Le curve d'un sistema lineare che hanno un punto jplo in un punto semplice di F soddisfano ad $\frac{j(j+1)}{2}$ condizione lineari al più; quindi le curve di ($rC + C' - C_2$) che hanno un punto ($i_\rho - 1$)plo in ogni punto base i_ρ plo di (C_1) costituiscono un sistema di dimensione

$$\geqq p + \pi_1 - 1 + \omega;$$

questo sistema appartiene evidentemente al sistema somma di (C_1) con (C') e coi punti base di (C_1) ossia all'aggiunto di (C_1), il quale ha una dimensione $\leqq p + \pi_1 - 1$;

segue $\omega = 0$, e la dimensione del nominato sistema aggiunto a (C_1) è quindi proprio

$$p + \pi_1 - 1.$$

Dunque:

Sopra una superficie F *di genere geometrico uguale al numerico* p > 0, *anche ogni sistema impuro di genere* Π *ha il sistema aggiunto di dimensione* p $+ \Pi - 1$ *come ogni sistema puro.*

Se il sistema impuro (C_1) ha i suoi punti base distinti (come supponiamo) non può nessuno di essi staccarsi dal sistema (K) aggiunto a (C_1), poichè (K) deve segare la serie canonica completa sulla curva generica C_1, e questa non ha come punti fissi gli i punti infinitamente vicini ad un punto iplo; quindi (cfr. anche il § 1):

Sopra la superficie F *il sistema aggiunto ad un sistema impuro con punti base distinti è irreduttibile ed ha come* (i — 1) *plo un punto base iplo del nominato sistema impuro.*

Sopra la superficie F senza curve eccezionali di genere geometrico uguale al numerico $p > 0$ di cui le sezioni piane appartengono al sistema (puro) (C), si torni a considerare il sistema impuro (C') di genere π_1 con s punti base distinti di molteplicità $i_1, i_2 \ldots i_s$, e si prenda r così grande che il sistema $(r\,C)$ di genere $\pi^{(r)}$ contenga (C) in modo che (C_1) abbia come residuo rispetto ad esso un sistema puro (C_2) di genere π_2; sia ancora (C') il sistema canonico. Il sistema $(r\,C + C' - C_2)$ residuo di (C_2) rispetto ad $(r\,C + C')$ ha la dimensione

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho\,(i_\rho - 1)}{2} - 1$$

(come abbiamo visto essendo $\omega = 0$); questo sistema non può avere alcun punto base fuori dei punti base di (C_1), poichè un tal punto sarebbe base per l'aggiunto di (C_1); d'altra parte se un punto O base iplo per (C_1) fosse base per $(r\,C + C' - C_2)$, imponendo a questo sistema di avere il punto O come $(i - 1)$ plo si imporrebbe alla curva generica di esso meno di $\frac{i\,(i-1)}{2}$ condizioni lineari e ne conseguirebbe che la dimensione del sistema aggiunto a (C_1) sarebbe $> p + \pi_1 - 1$ mentre ciò è impossibile; si conclude che staccando (C_2) da $(r\,C + C')$ il sistema residuo $(r\,C + C' - C_2)$ non può acquistare punti base, ossia è un sistema puro. Consideriamo il sistema $(r\,C - C_2)$ residuo di (C') rispetto al nominato sistema $(r\,C + C' - C_2)$; il sistema aggiunto ad $(r\,C - C_2)$ è la somma di $(r\,C + C' - C_2)$ coi punti base eventuali di $(r\,C - C_2)$, e però ha la dimensione

$$\geq p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho\,(i_\rho - 1)}{2} - 1$$

(numero esprimente la dimensione di $(r\,C + C' - C_2)$); ma il genere di $(r\,C - C_2)$ è

$$\leq \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho\,(i_\rho - 1)}{2}$$

e precisamente vale

$$\pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2}$$

se $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ non ha punti base multipli e vale meno del detto numero in caso contrario; tenendo conto del fatto che la dimensione del sistema aggiunto ad un dato sistema è uguale al genere di esso aumentato di $p - 1$, si conclude che $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ non ha punti base multipli e quindi è di genere

$$\pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2},$$

ed il suo aggiunto è proprio il sistema $(r\mathrm{C} + \mathrm{C}' - \mathrm{C}_2)$ di dimensione

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2} - 1.$$

Sono dunque possibili due casi:

o il sistema $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ è un sistema puro ed allora (C_1) si ottiene da esso imponendo i punti base colle molteplicità $i_1, i_2 \ldots i_s$ alle sue curve generiche;

o (forse) il sistema $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ ha alcuni punti base semplici (conseguenza dello staccare (C_2) da $(r\mathrm{C})$) i quali cadono in punti base di (C_1), ma però coincide col residuo del sistema canonico (C') rispetto al suo aggiunto (mentre in generale un sistema impuro è contenuto nel residuo del canonico rispetto al suo aggiunto, quando lo staccare il sistema canonico dal detto sistema aggiunto non tragga di conseguenza lo staccarsi dei punti base del primitivo sistema); allora (C_1) si ottiene da $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ imponendo le molteplicità $i_1, i_2 \ldots i_s$ nei punti base di (C_1) sieno essi base o no per $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$.

In ogni caso possiamo dunque concludere:

Ogni sistema impuro (con punti base distinti) può dedursi coll'aggiunta dei suoi punti base, non traenti con sè lo staccarsi di alcuna altra curva, da un sistema che coincide col residuo del canonico rispetto all'aggiunto, il quale è puro o (forse) ha soltanto dei punti base semplici.

5. *Cenno sulle superficie di genere* 0. — Nei precedenti §[i] abbiamo escluso le superficie di genere 0 alle quali non si estende la dimostrazione del teorema fondamentale del § 2. In virtù però delle considerazioni svolte in quel § (cfr. anche una nota di esso) intorno alle formule di postulazione di Noether, ed approfittando del citato teorema di Zeuthen e Noether sulla invariantività del genere numerico nelle trasformazioni che non producono sulla superficie singolarità straordinarie, possiamo concludere che:

Sopra una superficie di genere geometrico uguale al numero 0, *un sistema* (C) *semplice di genere* π, *tale che la superficie su cui gli iperpiani segano le curve di* (C) *ha soltanto singolarità ordinarie, possiede un sistema aggiunto* $\infty^{\pi-1}$.

Ora stabiliremo il seguente teorema:

Se sopra una superficie razionale dotata di punti multipli isolati distinti vi è un sistema semplice (C) (∞^3 *almeno*) *tale che i residui delle sue curve fondamentali sieno sistemi di genere* > 0, *quando la superficie sia rappresentata sul piano, il sistema aggiunto a* (C) *viene rappresentato dal sistema delle curve d'ordine* $n - 3$ *aggiunte alle curve* C'_n *d'ordine* n *immagini di quelle di* (C), *spogliato delle componenti fisse eventuali* (1).

Per la dimostrazione si consideri nel piano il sistema (C'_n) delle C'_n e quello (C'_{n-3}) delle curve aggiunte d'ordine $n - 3$; le curve C'_{n-3} segano anzitutto sopra la curva generica C'_n un gruppo canonico. Sia G una curva fondamentale di (C'_n) e (C'_p) il sistema residuo d'ordine p: sia (C'_{p-3}) il sistema delle curve d'ordine $p - 3$ aggiunte alle C'_p (le quali sono di genere > 0). Fra le C'_{n-3} vi sono le curve composte $G + C'_{p-3}$ le quali segano sopra una C'_p dei gruppi di punti (individuanti la serie segata da C'_{n-3}) che sommati con un gruppo sezione di una C'_p dànno gruppi equivalenti (cioè appartenenti alla stessa serie completa) a quelli segati sulla C'_p dalla curva composta $C'_n + C'_{p-3} = (G + C'_p) + C'_{p-3}$. Dunque le C'_{n-3} segano sulla C'_p gruppi della serie somma della serie canonica (segata dalle C'_{p-3}) e di quella differenza tra la serie segata dalle C'_n e la serie caratteristica di (C'_p). Tanto basta (secondo la definizione del § 1) perchè il teorema risulti dimostrato; giacchè il sistema aggiunto a (C) di genere π è in tal caso $\infty^{\pi-1}$ ed è pure $\infty^{\pi-1}$ quello (C'_{n-3}) nel piano: le componenti fisse delle C'_{n-3} nel piano rappresentano curve che si possono impunemente aggiungere al sistema aggiunto a (C) perchè essendo fondamentali per (C) non ne risultano alterati i caratteri essenziali di esso (§ 1).

6. *Un teorema sulla superficie del 4° ordine.* — Sopra una superficie di genere 1 (geometrico e numerico) si consideri un sistema (C) con s punti base distinti di molteplicità $i_1, i_2 \ldots i_s$ risp., e sia i la più alta molteplicità di un punto base. Indichiamo con (C′) il sistema aggiunto a (C), con (C″) l'aggiunto di (C′) (o, se si vuole, 2° aggiunto di (C)), ecc.; il sistema $(C^{(i)})$ i^{esimo} aggiunto di (C) è un sistema puro da cui (C) è dedotto coll'aggiunta dei suoi punti base.

Sopra una superficie di genere 1 non vi sono curve canoniche (non eccezionali), quindi *un sistema puro di genere* π *è l'aggiunto di sè stesso e però ha la dimensione* π *e il grado* $2(\pi - 1)$.

Si possono classificare le superficie di genere 1 a seconda del sistema puro di dimensione minima che esse contengono. In questa classificazione s'incontra dapprima la superficie del 4° ordine, poi la superficie del 6° ordine di S_4 sezione d'una quadrica con una varietà cubica, poi la superficie di 8° ordine sezione di 3 quadriche in S_5, e così via; l'irreducibilità di queste superficie (generali) a quella generale del 4° ordine seguirà dalle considerazioni che andiamo ad esporre (2).

---

(1) Ossia dal sistema aggiunto puro di quello (C'_n) delle C'_n secondo la definizione di Castelnuovo. La restrizione che i sistemi residui delle curve fondamentali di (C) sieno di genere > 0 dipende solo dal fatto che la definizione data pel sistema aggiunto non si estende al detto caso escluso: siccome una superficie con una rete di curve razionali è razionale, possiamo estendere convenzionalmente il teorema di guisa che il sistema aggiunto risulta definito anche pei sistemi (C) ∞^r contenenti un sistema ∞^{r-1} di curve razionali.

(2) Il sig. Castelnuovo mi segnalò le dette classi di superficie di genere 1 contenenti lo stesso numero di moduli delle superficie del 4° ordine e ad esse irreducibili.

Senza toccare l'interessante questione di assegnare *tutti* i tipi irreducibili di superficie del genere 1, ci limitiamo quà a risolvere il seguente problema:

Quando due superficie generali del 4° ordine possono essere riferite punto per punto?

Si dimostrerà che questo avviene soltanto quando esse sono proiettive.

Invero si immaginino due superficie generali del 4° ordine riferite punto per punto; alle sezioni piane dell'una corrispondono sull'altra le ∞^3 curve d'un sistema lineare, le quali se la superficie è generale debbono essere intersezioni complete di altre superficie (1); se esse non fossero ancora sezioni piane (cioè se le superficie non fossero proiettive), il sistema ∞^3 suddetto (essendo di genere 3) avrebbe dei punti base multipli e quindi non sarebbe puro: ciò è assurdo perchè in una trasformazione birazionale d'una superficie un sistema puro è sempre mutato in un sistema puro. Dunque:

Due superficie generali del 4° ordine riferibili punto per punto sono proiettive.

Si trae pure poichè gli unici sistemi puri sopra una superficie generale del 4° ordine sono quelli segati da tutte le superficie d'ordine n, che:

Una superficie generale del 4° ordine non è riferibile ad altre superficie normali senza curve eccezionali di uno spazio superiore, tranne di ordine $4\,n^2$ *nello spazio* S_{2n^2+1} *(a sezioni iperpianali di genere* $2\,n^2+1$).

Il teorema dato prima per le superficie generali del 4° ordine si estende a quelle generali d'ordine $n > 4$, sia collo stesso metodo, sia (anche più semplicemente) usando qui del sistema canonico; per modo che si conclude:

Due superficie generali d'ordine $n \geq 4$ *(in* S_3*) si possono riferire biunivocamente solo quando sieno proiettive.*

Il teorema non sussiste per $n = 3$.

7. *Osservazioni sui resultati contenuti in questo capitolo.* — I resultati fondamentali di questo capitolo fondati sopra l'esistenza d'un sistema $\infty^{p+\pi-1}$ aggiunto ad un sistema di genere π sopra una superficie di genere geometrico $p > 0$ son fatti dipendere dalla restrizione $K = 0$ che si è trovata verificata se esiste un sistema puro semplice (C) tale che $\mathfrak{d}\,(2\,C) = 0$.

Poichè si tratta d'un punto fondamentale nella teoria delle superficie è interessante stabilire come la uguaglianza $\mathfrak{d}\,(2\,C) = 0$ segua da quella $\mathfrak{d}\,(C) = 0$ ove si sappia che la serie caratteristica di (C) è completa. Invero nel seguente capitolo verrà dimostrato che ogni sistema puro ha la serie caratteristica completa se tale proprietà compete al sistema canonico; sebbene non sembri possa dedursi un tal fatto dalla restrizione già ammessa per la superficie $(K = 0)$, pure il fatto stesso appare così legato alla restrizione medesima per effetto del teorema accennato che vogliamo dimostrare.

Premettiamo le seguenti considerazioni fondate sullo stesso concetto che ha servito per il lemma del § 2°:

Sopra una superficie si abbiano due sistemi (C), (K); sia r_0 la dimensione di (C), r_1 quella di $(C+K)$, r_2 quella di $(C+2\,K)$.

(1) Cfr. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, § 11, " Abhandl. d. Akad. d. Wiss. ", Berlin, 1883.

Al sistema $(C+2K)$ appartiene il sistema ∞^{r_1} costituito da una curva fissa K' di (K) presa insieme con tutte le curve di $(C+K)$, cioè (simbolicamente) il sistema

$$(C+K)+K':$$

parimente se K'' è un'altra curva di (K) a $(C+2K)$ appartiene il sistema

$$(C+K)+K'';$$

i due sistemi (∞^{r_1} ciascuno) hanno comune un sistema di dimensione r_0 (cioè $(C)+K'+K''$) e però il loro sistema somma ha la dimensione

$$\geq 2r_1 - r_0.$$

Ora questo sistema è contenuto nel sistema delle curve di $(C+2K)$ che passano per le D intersezioni delle curve K', K''; se dunque sono ν_2 le condizioni imposte dal gruppo $K'\,K''$ alle curve di $(C+2K)$ che debbono contenerlo, si ha:

$$r_2 \geq 2r_1 - r_0 + \nu_2.$$

Indichiamo con ν_1 il numero delle condizioni che il gruppo K'_0K'' impone alle curve di $(C+K)$, e sia r la dimensione di (K); allora per ν_1-1 tra i D punti del gruppo $K'K''$ passa una curva di $(C+K)$ non contenente tutti i D punti del gruppo, e per $r-2$ punti del gruppo medesimo (appartenente alla serie caratteristica g_D^{r-1} di (K)) si può condurre una curva K''' di (K) non contenente tutti i D punti, la quale insieme con una curva di $(C+K)$ pei detti ν_1-1 punti compone una curva di $(C+2K)$ non contenente tutto il gruppo $K'\,K''$; ne segue che

$$\nu_2 \geq \nu_1 + r - 2 \quad \text{o} \quad \nu_2 \geq D - 1$$

(l'ultima disuguaglianza valendo nel caso che sia $\nu_1 + r - 3 > D - 1$). Si deduce

$$\nu_2 \geq 2r_1 - r_0 + \nu_1 + r - 2,$$

o
$$r_2 \geq 2r_1 - r_0 + D - 1.$$

Ora sia (C) il sistema canonico (supposto irreduttibile, con $r_0 = p - 1 \geq 2$), e (K) sia un sistema puro semplice ∞^r di genere π e grado D, la cui serie caratteristica sia (per ipotesi) completa; inoltre il sistema $(C+K)$ aggiunto a (K) abbia la dimensione $p+\pi-1$.

Il gruppo della serie caratteristica completa g_D^{r-1} di (C), impone (pel teorema di Riemann Roch)

$$\nu_1 = D - r + 1$$

condizioni alle curve del sistema aggiunto $(C + K)$ che debbono contenerla; in questo caso è dunque:

$$\nu_2 \geq D - 1, \quad (r_1 = p + \pi - 1),$$

e perciò

$$r_2 \geq 2\,(p + \pi - 1) - (p - 1) + D - 1$$

$$r_2 \geq p + 2\,\pi + D - 2;$$

e poichè $2\,\pi + D - 1$ è il genere π_2 di $(C + K)$ si ha proprio

$$r_2 = p + \pi_2 - 1$$

(non potendo essere $r_2 > p + \pi_2 - 1$).

Dunque (poichè è ora $\delta(K) = \delta(2\,K) = 0$) si ha il teorema:

Se sopra una superficie di genere $p > 2$ *(a sistema canonico irreduttibile) si ha un sistema puro semplice di genere* π *avente la serie caratteristica completa, e di cui l'aggiunto è* $\infty^{p+\pi-1}$, *per ogni altro sistema di genere* Π *appartenente alla stessa superficie la dimensione del sistema aggiunto è*

$$p + \Pi - 1,$$

cioè la superficie ha il genere geometrico uguale al numerico.

IV.

Sistemi puri. — Estensione del teorema di Riemann-Roch.

1. *La serie caratteristica.* — In seguito al teorema del capitolo precedente § 4°, il nostro maggior interesse si rivolge allo studio dei sistemi puri, poichè dalle proprietà di questi potranno dedursi quelle di tutti i sistemi impuri ottenuti coll'aggiunta di punti base, non avendo in complesso a superare difficoltà maggiori di quelle che s'incontrano nello studio dei sistemi lineari di curve piane e di una indole non molto diversa. In questo capitolo parlando di un sistema (C) (ove non si avverta espressamente il contrario) intendiamo senz'altro che sia un sistema puro irreduttibile di dimensione ≥ 2 (completo); supponiamo inoltre che la superficie di cui si tratta abbia il genere geometrico uguale al numerico $p > 0$, e intendiamo che il *sistema* (K) *aggiunto a* (C) *sia semplice,* e per ciò basta che sia semplice (C) o il sistema canonico.

Dato il sistema (C) se ne designerà con π *il genere,* con n *il grado,* con r *la dimensione,* e diremo senz'altro che (C) ha i *caratteri* π, n, r. Sia (K) il sistema aggiunto di (C) (necessariamente puro) e Π, N, R i suoi caratteri. Vi sono curve K di (K) spezzate in una C di (C) ed in una C′ del sistema canonico (C′); una curva generica C o una generica C′ (poichè (C), (C′) son sistemi puri) non hanno punti multipli in punti semplici della superficie (o ipermolteplicità nei punti multipli) dimodochè per la formula di Noether (1)

$$\Pi = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n:$$

due curve spezzate ciascuna in una C ed una C′ si segano come due K in N punti quindi:

$$N = p^{(1)} - 1 + 4(\pi - 1) - n;$$

si ha poi (Cap. III, § 2):

$$R = p + \pi - 1.$$

Si riferiscano ora le curve K del sistema (K) aggiunto a (C) agli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ e si consideri la superficie F così trasformata.

Una curva C sta sulla F in un $S_{\pi-1}$ poichè vi sono ∞^{p-1} K spezzate in una C ed in una curva canonica, ossia ∞^{p-1} iperpiani per la C. Invece una curva canonica C′ sta in un $S_{p+\pi-2-r}$, poichè vi sono ∞^r K spezzate in una C′ fissa ed in una C. Le curve K ossia gli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ segano sulla C la serie canonica completa (la C è curva canonica in $S_{\pi-1}$). Consideriamo gli iperpiani che passano per lo $S_{p+\pi-2-r}$ contenente una C′ e la serie che essi segano sopra una curva C; essa viene segata nello $S_{\pi-1}$ della C dagli $S_{\pi-2}$ contenenti l'intersezione dello $S_{p+\pi-2-r}$ di C′ e dello $S_{\pi-1}$ di C; essa è dunque completa se i $2(\pi - 1) - n$ punti comuni alle C, C′, *individuano* l'intersezione dei 2 spazi a cui le C, C′, risp. appartengono; se questo non accade, ed i detti $2(\pi - 1) - n$ punti non individuano quella intersezione, ma uno spazio di dimensione minore, la detta serie è invece necessariamente scompleta. Ma allora per la stessa ragione è scompleta (e con un difetto di completezza non minore) la serie che gli iperpiani ($S_{p+\pi-2}$) passanti per la detta intersezione degli spazi di C, C′, segano sulla C′. Ora la 1ª serie non è altro che la serie caratteristica del sistema (C), la 2ª è quella del sistema canonico (C′) (suppostane l'esistenza). Dunque:

Se la serie caratteristica del sistema canonico è completa, è completa la serie caratteristica di ogni altro sistema puro (2).

Nel seguito considereremo per ora soltanto le superficie aventi la *serie caratteristica del sistema canonico completa* (se $p > 2$). Così su tali superficie *ogni sistema puro ha la serie caratteristica completa;* ciò accade anche se $p = 1$ (cfr. cap. III), e se le curve canoniche si compongono di quelle d'un fascio ($p \geq 2$) bastando ripetere in questo caso il precedente ragionamento; *anche questi casi nei quali non esiste serie caratteristica del sistema canonico sono tra quelli che consideriamo.*

---

(1) " Acta Mathematica ", 1886.

(2) Il teorema si estenderebbe colla medesima dimostrazione anche ai sistemi impuri che coincidono col residuo del canonico rispetto all'aggiunto, notando che una curva eccezionale non ha intersezioni con una curva canonica.

2. *Estensione del teorema di Riemann Roch.* — Ci proponiamo il seguente problema: Quante curve del sistema aggiunto a (C) passano per un gruppo della sua serie caratteristica, cioè per un gruppo comune a due curve C ?

Supponiamo dapprima il sistema (C) *non speciale* (cioè non contenuto nel canonico), e consideriamo il sistema (K) aggiunto a (C). Sieno $\pi\ n\ r$ i caratteri di (C); e riferiamo le curve K agli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ in guisa da ottenere una superficie trasformata F, sulla quale (come prima abbiam visto) una C sta in un $S_{\pi-1}$.

Due arbitrari $S_{\pi-1}$ contenenti ciascuno una curva C non possono esser contenuti in uno spazio a meno di $p+\pi-1$ dimensioni, altrimenti il sistema *doppio* di (C) (contenente tutte le coppie di curve C) sarebbe contenuto nell'aggiunto (K) di (C) e quindi (togliendo una C da ambedue i sistemi) (C) sarebbe contenuto nel canonico (cioè sarebbe speciale); quindi due tali $S_{\pi-1}$ si segano secondo uno spazio $S_{\pi-1-p}$ per il quale passano ∞^{2p-1} iperpiani. Ognuno degli ∞^{2p-1} iperpiani passanti per $S_{\pi-1-p}$ passa per gli n punti comuni alle due curve C, quindi per gli n punti passano almeno ∞^{2p-1} curve K, ed in generale $\infty^{2p-1+\omega}$ con $\omega \geq 0$.

La quantità ω ha un altro significato notevole; invero poichè gli iperpiani segano sulla C una serie completa, quelli passanti per una C segheranno sopra un'altra C una serie il cui difetto di completezza è ω (cfr. § prec.) poichè gli n punti comuni a due C stanno in un $S_{\pi-1-p-\omega}$ immerso nello $S_{\pi-1-p}$ comune ai due $S_{\pi-1}$ che contengono le dette C.

Ora questa serie è quella che le curve canoniche segano sulla curva C, la quale (poichè (C) è non speciale) è una $g^{p-1}_{2(\pi-1)-n}$ immersa dunque in una serie completa $g^{p-1+\omega}_{2(\pi-1)-n}$. Si vede intanto che per il gruppo di punti comune a due curve C d'un sistema non speciale passano $\infty^{2p-1+\omega}$ curve del sistema aggiunto, essendo ω il difetto di completezza della serie che le curve canoniche segano sulla C.

Sia ora (C) un sistema speciale, e sia r' la dimensione del *residuo* (s'intende residuo di esso rispetto al canonico), designeremo la quantità $i=r'+1$ col nome di *indice di specialità* del sistema. (Quando $i=0$ il sistema è non speciale). Allora il doppio di (C) è contenuto nell'aggiunto (K) ed il residuo di questo doppio rispetto a (K) è il residuo di (C) (rispetto al canonico) e quindi è di dimensione r'; due $S_{\pi-1}$ contenenti ciascuno una C sulla F in $S_{p+\pi-1}$, sono ora immersi in un $S_{p+\pi-1-i}$ e quindi han comune un $S_{\pi-1-p+i}$ per il quale passano ∞^{2p-1-i} iperpiani. Quindi si conclude come nel caso precedente che pel gruppo comune a due curve C passano $\infty^{2p-i-1+\omega}$ curve del sistema aggiunto, dove $\omega \geq 0$ è ancora il difetto di completezza della serie segata sopra una C dalle curve canoniche, la quale serie è dunque una $g^{p-1-i}_{2(\pi-1)-n)}$ (poichè essendo r' la dimensione del sistema residuo di (C) per un gruppo della serie passano $\infty^{i}=\infty^{r'+1}$ curve canoniche giacchè una C fa parte di ∞^{-1} curve canoniche) immersa in una serie completa $g^{p-1-i+\omega}_{2(\pi-1)-n}$. Così possiamo concludere:

Per un gruppo comune a 2 curve C *d'un sistema non speciale, sopra una superficie di genere* p, *passano* $2\,\mathrm{p}+\omega$ *curve linearmente indipendenti del sistema aggiunto; e se il sistema è speciale coll'indice di specialità* i *ne passano* $2\,\mathrm{p}-\mathrm{i}+\omega$; *la quantità* $\omega \geq 0$ *è in ambi i casi il difetto di completezza della serie segata dalle curve canoniche sopra una curva* C (1).

(1) Il teorema può anche enunciarsi dicendo che in S_3 vi sono per una retta $2p+\omega-i$ super-

Diremo ω la *sovrabbondanza* del sistema (C); questa denominazione è intanto giustificata dal fatto che per $p=0$ (quindi anche $i=0$) la ω è la ordinaria sovrabbondanza dei sistemi lineari di curve piane (1) (supposta la superficie razionale); ma la denominazione stessa verrà meglio giustificata quando considereremo il sistema (C) come segato da superficie aggiunte sopra una superficie in S_3 ed esamineremo la differenza fra la sua dimensione effettiva e quella *virtuale* data dalle formule di postulazione di Noether.

D'ora innanzi parlando di un sistema dovremo considerare insieme ai caratteri π, r, n già definiti anche la sua sovrabbondanza ω; se $\omega=0$ diremo il sistema regolare. I caratteri π, r, n, ω (ed i, cioè l'indice di specialità, se si tratta d'un sistema speciale) di un sistema (C) sono legati da una relazione nella quale figura il genere p della superficie. Invero sopra una curva C la serie caratteristica g_n^{r-1} (che è completa), è residua di una serie completa $g_{2(\pi-1)-n}^{p-1+\omega-i}$ a cui appartiene quella $g_{2(\pi-1)-n}^{p-1-i}$ segata dal sistema canonico, quindi per il teorema di Riemann Roch si ha

$$\pi-1-n+r=p+\omega-i$$

dove è $i=0$ se (C) è non speciale.

Questa relazione dà un'estensione alla superficie (e per ora soltanto pei sistemi puri) del teorema di Riemann Roch relativo alle serie lineari appartenenti alle curve algebriche. Si può enunciare il resultato sotto la forma seguente:

Per un sistema puro non speciale di caratteri π, r, n, ω *si ha:*

$$\pi-1-n+r=p+\omega \text{ (2)}.$$

Se un sistema speciale puro di caratteri π, r, n, ω *ha un sistema residuo di dimensione* r' *si ha:*

$$r'=p-\pi+n-r+\omega \text{ (3)}.$$

---

ficie linearmente indipendenti d'ordine $n-3$ aggiunte ad una d'ordine n e genere p, quando le sezioni piane appartengono ad un sistema (puro) d'indice di specialità i e sovrabbondanza ω, essendo ω il difetto di completezza del sistema delle curve d'ordine $n-4$, segato sopra un piano dalle aggiunte d'ordine $n-4$.

(1) Cfr. Castelnuovo, " Accademia di Torino, Memorie ", 1891.

(2) Enunciando questo resultato sotto forma proiettiva si ha l'estensione del noto teorema di Clifford per le curve (" Phil. Transactions ", 1878).

(3) Non si creda che possa prendersi sempre in queste formule $\omega=0$. Basta per ciò considerare gli esempi seguenti: 1° il sistema segato dalle quadriche sopra la superficie del 5° ordine dotata di un punto triplo; 2° il sistema segato dei piani sulla superficie del 7° ordine con due punti tripli ed il residuo segato dalle quadriche per i due punti.

Il 2° teorema sotto la forma

$$r'\geq p-\pi+n-r$$

è stato dato dal sig. Noether (" Comptes rendus ", 1886) con una dimostrazione non differente da quella qui usata: mancano solo là le restrizioni da noi introdotte, che appariscono necessarie per dimostrare come la serie caratteristica di un sistema (C) sia completa (ciò che viene omesso), ed il teorema appare qua completato essendosi assegnato il significato di ω.

I due teoremi enunciati vengono poi estesi anche ai sistemi impuri.

3. *Sistemi speciali residui uno dell'altro.* — La relazione precedentemente trovata permette di esprimere in funzione dei caratteri di un sistema speciale la dimensione del residuo, nell'ipotesi che il dato sistema sia puro; la restrizione stessa è in generale soddisfatta quando si considerano due sistemi residui uno dell'altro di dimensione ≥ 2 in relazione reciproca (C), (C').

Sieno (C), (C') due sistemi puri residui uno dell'altro (di dimensione ≥ 2), esprimiamo tutti i caratteri π', r', n', ω' dell'uno (C') in funzione di quelli π, r, n, ω dell'altro (C), o viceversa.

Sia al solito $p^{(1)}$ il 2° genere della superficie, e sia D il numero dei punti comuni ad una curva C ad una C'. Poichè il sistema canonico è la somma di (C), (C') usando di note formule già adoperate, si ha:

$$p^{(1)} = \pi + \pi' + D - 1$$

$$(p^{(2)} =)\ p^{(1)} - 1 = n + n' + 2D,$$

e, poichè una curva canonica incontra una C in $2(\pi - 1) - n$ punti,

$$2n + D = 2(\pi - 1).$$

Mediante l'ultima relazione eliminando D si deduce

$$D = 2(\pi - 1) - 2n$$

$$p^{(1)} = 3(\pi - 1) + \pi' - 2n$$

$$p^{(1)} - 1 = n' + 4(\pi - 1) - 3n;$$

siccome poi sottraendo segue

$$n - \pi = n' - \pi'$$

e si ha

$$r + r' = p - \pi + n + \omega = p - \pi' + n' + \omega',$$

così si deduce:

$$\omega = \omega'.$$

Dunque: *Fra i caratteri* π, r, n, ω, π', r', n', ω', *dei due sistemi speciali (puri),* (C), (C') *residui uno dell'altro, di dimensione* > 1, *sussistono le relazioni*

$$\left\{\begin{aligned} r' &= p - \pi + n - r + \omega \\ \pi' &= p^{(1)} - 3(\pi - 1) + 2n \\ n' &= p^{(1)} - 1 - 4(\pi - 1) + 3n \\ \omega' &= \omega \qquad (n - \pi = n' - \pi'). \end{aligned}\right.$$

4. *La sovrabbondanza. Dimensione virtuale d'un sistema.* — Il concetto della sovrabbondanza d'un sistema (C) cui siamo giunti partendo dalla considerazione delle curve del sistema aggiunto a (C) che passano pel gruppo comune a due curve C, è suscettibile di ricevere un'altra interpretazione, cui già ho accennato, la quale rende meglio ragione della denominazione scelta.

Si consideri un sistema (K) di caratteri Π, R, N, Ω, I (dove l'indice di specialità $I = 0$ se (K) è non speciale) ed un sistema (C) contenuto in esso e residuo di una curva C'; sieno π, r, n, ω, i i caratteri di (C), e la curva C' sia di genere π' incontrata in D punti da una curva C.

Supponiamo che la C' non abbia punti multipli in punti semplici della superficie (o ipermolteplicità nei punti multipli) di guisa che, essendo (C) un sistema puro, una curva $C + C'$ non abbia altri punti multipli che non siano tali per le K eccetto i punti doppi intersezioni di una C e di una C', allora si ha:

$$\Pi = \pi + \pi' + D - 1.$$

Una curva K incontra una curva K spezzata in una C e nella C' in N punti; d'altra parte una curva K spezzata in una C ed una C' incontra una C in $n + D$ punti, quindi una K incontra la C' in D' punti dove:

$$N = n + D + D'.$$

Ora il sistema (K) sega su C' una serie $g_{D'}^{R-r-1}$; se indichiamo con ϵ il difetto di completezza della serie e con h il suo indice di specialità si ha dunque:

$$R - r - 1 + \epsilon = D' - \pi' + h$$

ossia:

$$R = D' - \pi' + h - \epsilon + r + 1.$$

Ne segue:

$$\Pi - 1 - N + R = (\pi + \pi' + D - 1) - 1 - (n + D + D') + (D' - \pi' + h - \epsilon + r + 1)$$

ossia:

$$\Pi - 1 - N + R = \pi - 1 - n + r + (h - \epsilon):$$

d'altra parte è:

$$\Pi - 1 - N + R = p + \Omega - I$$

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

quindi

$$\Omega - I = \omega - i + (h - \epsilon)$$

ed

$$\omega - i = \Omega - I + (\epsilon - h).$$

Dunque:

Se da un sistema (K) *se ne deduce un altro puro* (C) *come residuo di una curva* C' *che non abbia punti multipli in punti semplici della superficie (nè ipermolteplicità nei suoi punti multipli), la differenza fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità di* (C) *è uguale all'analoga differenza per* (K) *aumentata dalla differenza fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie che le curve* K *segano sulla* C'.

Di questo teorema è utile il corollario:

La differenza fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità d'un sistema (C) *residuo della curva* C' *rispetto ad un sistema regolare non speciale* (K) *è uguale alla differenza fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie segata dalle curve* K (*di* (K)) *sulla* C'.

Per il nostro scopo occorre ancora dimostrare il lemma:

Il sistema aggiunto ad un sistema puro (C) *è regolare.*

Questo si verifica immediatamente. Infatti se π, r, n, sono i caratteri del sistema (C), e Π, R, N, Ω quelli del suo aggiunto, si ha:

$$\Pi = \pi + p^{(1)} + 2(\pi - 1) - n - 1$$

$$R = p + \pi - 1$$

$$N = n + p^{(1)} - 1 + 2\{2(\pi - 1) - n\}$$

e quindi:

$$\Pi - 1 - N + R = p,$$

ed

$$\Omega = 0. \quad \text{c d d.}$$

Deduciamo che sopra una superficie F di S_3 d'ordine n, senza curve eccezionali, le superficie aggiunte d'ordine $\geq n - 3$ segano un sistema regolare; infatti abbiamo già avuto occasione di osservare che le aggiunte d'ordine $n - 3 + r$ segano sulla F il sistema aggiunto a quello rplo delle sezioni piane.

Ora si consideri sulla F un sistema (C) segato da superficie aggiunte d'ordine $> n - 4$. Sappiamo che il sistema segato da tutte le superficie aggiunte d'ordine $> n - 4$ ha la dimensione che si può calcolare in base alle formule di postulazione di Noether, le quali in base alla convenzione $p_1 = p$ (cap. III, § 3) ed al corollario di Castelnuovo secondo il quale si ha l'espressione della differenza fra il numero delle superficie aggiunte di un dato ordine e quello delle superficie aggiunte dell'ordine consecutivo, debbono riguardarsi come valevoli anche per le superficie dotate di singolarità straordinarie. Se vogliamo calcolare secondo queste formule di postulazione la dimensione che dovrebbe competere al sistema (C), dobbiamo far passare per una curva C (di (C)) un'aggiunta d'ordine $n - 3 + l$ ($l \geq 0$), ψ_{n-3+l}, la quale seghi ulteriormente la F in una curva C' (che possiamo supporre non avente punti multipli in punti semplici della superficie) e vedere quante condizioni la C', unita al gruppo base, imponga ad una ψ_{n-3+l} che debba contenerla. Possiamo dire che il numero così calcolato (che, per così dire dovrebbe esprimere la dimensione del sistema (C)) è la dimensione *virtuale* del sistema (C); ma può sorgere il dubbio che questo numero vari con l, o muti rifacendo la costruzione per una superficie trasformata.

A questa questione rispondono i risultati precedenti. Infatti quando uniamo la C' al gruppo base delle ψ_{n-3+l}, e vogliamo calcolare l'effetto prodotto sulle formule di postulazione, noi veniamo in sostanza a considerare la serie g_n segata da tutte le ψ_{n-3+l} sulla C' (di genere π') come completa e non speciale, ed allora la sua dimensione vien data dal teorema $n - h = \pi'$; il numero ρ così calcolato è la dimensione virtuale di (C), ed in base al calcolo precedente (poichè il trinomio ($\pi - 1 - n + \rho$ non differisce dall'analogo calcolato per il sistema regolare non speciale segato dalle ψ_{n-3+l}) si ha:

$$\pi - 1 - n + \rho = p.$$

Se vogliamo la dimensione effettiva r dobbiamo introdurre la differenza θ fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie che le ψ_{n-3+l} (ossia le curve del sistema regolare non speciale che esse segano sulla superficie) segano sulla C', e si avrà:

$$r = \rho + \theta,$$

dove $\theta = \omega - i$; cioè si avrà appunto come abbiamo trovato

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i.$$

Concludiamo:

La dimensione ρ *(virtuale) di un sistema puro* (C) *calcolata facendo segare il sistema* (C) *da superficie aggiunte d'ordine* $> n - 4$ *sopra una superficie d'ordine* n (*in* S_3) *priva di curve eccezionali, è un carattere invariantivo del sistema* (C) *e coincide colla dimensione effettiva se il sistema è regolare non speciale, in modo che si ha:*

$$\pi - 1 - n + \rho = p.$$

La differenza $(\omega - i)$ *fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità di* (C) *è uguale alla differenza* $(r - \rho)$ *tra la dimensione effettiva e quella virtuale del sistema stesso.*

Così la denominazione di sovrabbondanza data alla quantità ω (definita nel § 2) appare pienamente giustificata. Di più è interessante notare che *il teorema stabilito sussiste indipendentemente dalla completezza della serie caratteristica del sistema canonico* (1) (da cui segue quella di (C)) *e quindi anche prescindendo da quella ipotesi si ha la relazione:*

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

dove la sovrabbondanza ω *è definita dalla uguaglianza*

$$\omega - i = r - \rho.$$

Solo non risulta così che sia sempre $\omega \geq 0$ come si è riconosciuto sotto la precedente restrizione, ma questo resultato sarà stabilito nel successivo § al di là di un certo limite per r.

Il teorema stesso si estende ai sistemi impuri (C') *normali, dedotti da* (C) *coll'aggiunta di* s *punti base di molteplicità* $h_1, h_2 \ldots h_s$; infatti i caratteri $\pi', n', r', \omega', i'$ di (C') si esprimono per quelli di (C) mediante le formule:

(1) Infatti nel dimostrarlo non si è tenuto conto di quella ipotesi.

$$\pi' = \pi - \Sigma \frac{h(h-1)}{2}, \; n' = n - \Sigma h^2, \; r' = r - \Sigma \frac{h(h+1)}{2} + \theta$$

(dove $\theta \geq 0$ è il numero dei legami tra i detti punti base) dimodochè risulta

$$\pi' - 1 - n' + r' = \pi - 1 - n + r + \theta;$$

d'altra parte $i' = i$ (poichè (C') e (C) hanno lo stesso sistema residuo) e la dimensione virtuale ρ' di (C') vale

$$\rho' = \rho - \Sigma \frac{h(h+1)}{2},$$

sicchè si conclude:

$$\pi' - 1 - n' + r' = p + \omega' - i' \quad (\omega' = \omega + \theta) \; (1).$$

Ora è opportuno rilevare una differenza peculiare che si presenta fra lo studio delle serie complete lineari di gruppi di punti sopra una curva e quello dei sistemi lineari di curve sopra una superficie. Nella geometria sulle curve di genere π si presentano accanto alle serie g_n^r non speciali la cui dimensione è data dal teorema $n - r = \pi$ quelle speciali la cui dimensione è, per così dire, superiore a quella virtuale, quindi per una g_n^r completa il binomio $n - r$, che di regola può considerarsi uguale al genere π della curva sostegno, non supera mai questo genere π, ed è $n - r < \pi$ solo quando la g_n^r è contenuta in una data serie (la canonica $g_{2(\pi-1)}^{\pi-1}$). Nel piano la dimensione di un sistema lineare normale può superare quella virtuale (se vi sono legami tra i punti base), ma non può esserle inferiore; per così dire una sola causa perturbatrice opera anche qui in un solo senso sulla dimensione del sistema, ma a differenza di quel che avviene sulle curve la causa perturbatrice non cessa con lo elevarsi dalla dimensione del sistema (ma solo coll'elevarsi della dimensione in confronto al genere).

Sulle superficie, di genere qualunque, vi sono in generale due cause perturbatrici opposte per le quali la dimensione effettiva può differire dalla virtuale; l'una dipende dall'esser il sistema contenuto nel canonico ed opera quindi limitatamente (come per le curve, ma in senso opposto), l'altra opera invece (come vedremo) su sistemi comunque elevati (come nel piano) ed è legata (pure come nel piano) alle curve fondamentali del sistema (2). Per ciò la opportunità di dare due nomi diversi (sovrabbondanza e indice di specialità) ai caratteri modificatori della dimensione che provengono dalle due cause nominate, giacchè introducendo soltanto la loro differenza ($\omega - i = r - \rho$) si avrebbe un termine correttivo algebrico, ma si presenterebbe allora come regolare un sistema speciale sovrabbondante in cui $\omega = i$, un sistema cioè che (dal punto di vista geometrico) apparisce doppiamente irregolare.

---

(1) Pei sistemi di curve piane sussiste pure la relazione $\pi - 1 - n + r = \omega$ ($p = 0$; $i = 0$) contenuta essenzialmente nel teorema del sig. Segre (" Circolo Mat. di Palermo ", t. I) o in quello del sig. Castelnuovo (" Accad. di Torino, Memorie ", 1891, pag. 24).

(2) Così anche segando sopra una superficie un sistema mediante le superficie per una curva, l'errore nell'applicazione delle formule di postulazione dipende dall' esser scompleta o speciale la serie che le superficie postulabili segano sulla curva.

5. *Un teorema sulla sovrabbondanza.* — Per un sistema puro o impuro (C) di caratteri π, r, n, ω, i, sopra una superficie di genere p, siamo pervenuti alla relazione

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i,$$

o, introducendo la dimensione virtuale ρ, all'altra

$$\pi - 1 - n + \rho = p,$$

ed abbiamo visto che $\omega \geq 0$ supponendo che la serie caratteristica del sistema canonico fosse completa, poichè di là abbiamo dedotto che la serie caratteristica di un sistema puro doveva pure esser completa; si sono esclusi soltanto i sistemi impuri dedotti coll'aggiunta di punti base da un sistema con soli punti base semplici coincidente col residuo del canonico rispetto al suo aggiunto (anzichè puro), ma anche per quelli sarebbe facile dimostrare come sussista la relazione precedente lievemente modificata (aggiungendo al grado il numero dei detti punti base semplici).

Quando non si sa nulla circa la completezza della serie caratteristica del sistema canonico e quindi del sistema puro da cui (C) è dedotto, rimane incerto il segno di ω, che soltanto può asserirsi essere non minore della sovrabbondanza del corrispondente sistema puro.

Vediamo cosa possa dirsi del segno di ω prescindendo dalla detta ipotesi; possiamo supporre (senza restrizione), che (C) sia un sistema puro (di caratteri π, n, r, ω, i); indichiamo con (K) l'aggiunto a (C) di caratteri Π, N, R, Ω ($I = 0$).

Secondo quel che abbiamo dimostrato, se è θ il difetto di completezza della serie $g^{p+\pi-1-(r+1)}_{2(\pi-1)-n+p^{(1)}-1}$ segata da (K) sopra una curva canonica (generica) C' diminuito dell'indice di specialità della medesima serie g, sussiste la relazione

$$\Pi - 1 - N + R = \pi - 1 - n + r - \omega + i = \pi - 1 - n + r - \theta \; (= p):$$

poichè $i \geq 0$ se anche $\theta \geq 0$ segue necessariamente $\omega \geq 0$.

Basta dunque perchè si possa concludere che $\omega \geq 0$, sapere che la serie g segata da (K) sulla C' è non speciale, come ad esempio se

$$2(\pi - 1) - n > p^{(1)} - 1.$$

È notevole il fatto che questa circostanza può essere accertata soltanto col prendere r abbastanza grande. Appunto la determinazione di questo limite per r forma l'oggetto di questo §.

Per ciò che abbiamo notato alla fine del § 1 si può supporre qui che sia $p > 2$ e che il sistema canonico sia irreduttibile.

Supponiamo dapprima che il passaggio per un punto di una curva canonica tragga di conseguenza il passaggio di essa per un altro punto coniugato della detta curva supposta iperellittica; allora (secondo Noether) (1) è

$$2p - 2 = p^{(1)} + 1.$$

(1) " Math. Ann. ", VIII.

Sia (C) un sistema puro di dimensione

$$r \geq \frac{p^{(1)}+1}{2}.$$

Se (C) è speciale deve essere

$$r = p - 1$$

e però (C) è il sistema canonico per il quale $\omega = 0$.

Se (C) è non speciale ($i = 0$), ma contiene il sistema canonico, la serie segata dall'aggiunto (K) sulla curva canonica C' è non speciale o è (forse) la serie canonica; nel 1° caso $\omega \geq 0$; il 2° caso è impossibile giacchè (C) conterrebbe totalmente il sistema canonico (poichè la C e la C' hanno $p^{(1)} - 1$ punti comuni) e quindi avrebbe lo stesso grado di esso (cap. I) mentre esso è normale (anzi completo). Infine se (C) non contiene il sistema canonico pur essendo non speciale, la serie segata da (C) sulla C' è una serie g di dimensione r e però (secondo un noto teorema di Clifford) di grado $\geq 2r$, cioè di grado $\geq p^{(1)} - 1$; ma la serie g potrebbe avere soltanto il grado $2r$ se fosse $r = p^{(1)} - 1$, quindi la detta serie ha il grado $> p^{(1)} - 1$; ne segue che l'aggiunto (K) di (C) sega sulla C' una serie di grado $> 2p^{(1)} - 2$ e quindi non speciale, ed in conseguenza è

$$\omega \geq 0.$$

Suppongasi invece che il sistema canonico sia semplice; allora è (sempre secondo Noether):

$$2p - 2 < p^{(1)} + 1$$

(anzi, secondo Castelnuovo (1) $p^{(1)} \geq 3p - 6$); perciò se la dimensione r di (C) soddisfa alla disuguaglianza

$$r \geq \frac{p^{(1)}+1}{2}$$

si ha $r > p - 1$ ossia (C) è non speciale, e col ragionamento precedente segue

$$\omega \geq 0.$$

Dunque:

Pur prescindendo dalla completezza della serie caratteristica del sistema canonico, per ogni sistema lineare appartenente ad una superficie di 2° genere $p^{(1)}$, *avente una dimensione*

$$r \geq \frac{p^{(1)}+1}{2}$$

la sovrabbondanza

$$\omega \geq 0,$$

(*e se il sistema non è il sistema canonico esso è non speciale, sicchè* $\pi - 1 - n + r \geq p$).

---

(1) " Istituto lombardo ", 1891 (Nota II).

V.

Le curve fondamentali.

1. *Preliminari.* — Mi propongo ora di esaminare le proprietà dei sistemi lineari in relazione alle loro curve fondamentali; siccome capiterà qui sempre di considerare la differenza tra la sovrabbondanza e l'indice di specialità (cioè quella $r - \rho$ tra la dimensione effettiva e la virtuale) indicherò qui con θ questa quantità (che prima avevo designata con $\omega - i$), e così θ *sarà ora la sovrabbondanza* ($= \omega$) *quando si tratta d'un sistema non speciale;* indicherò ancora con π, r, n, gli altri caratteri d'un sistema (C) e supporrò che (C) sia un sistema *semplice* ($r \geq 3$) dedotto coll'aggiunta di punti base distinti da un sistema puro. Supporrò inoltre la superficie avente il genere geometrico uguale al numerico $p > 0$.

Come già abbiamo detto, una *curva fondamentale* di (C) è una curva K che presenta una sola condizione ad una C che debba contenerla; *escluderò che essa possa essere rappresentata da un gruppo di punti semplici sopra una superficie trasformata;* per la definizione il sistema residuo della K rispetto a (C) è ∞^{r-1}; noi supporremo che esso soddisfi alla restrizione di avere punti base distinti e di esser dedotto mediante l'aggiunta di essi da un sistema puro. Le curve C si facciano segare sulla superficie F dagli iperpiani di S_r: alla K corrisponde un punto multiplo O, quindi *una curva fondamentale non ha intersezioni variabili col dato sistema ma ha qualche intersezione variabile col residuo.* Gli iperpiani per O non hanno altri punti fissi sulla F, quindi includendo in K il gruppo di tutte le curve (e punti) che corrispondono ad O, lo staccarsi della K da (C) non trae di conseguenza lo staccarsi di altre curve; è quanto dire che *lo staccarsi da* (C) *d'una curva fondamentale può trarre solo di conseguenza lo staccarsi di altre curve fondamentali le quali tutte compongono insieme una curva fondamentale* K.

Quando si fan segare sulla F le curve C di (C) dagli iperpiani di S_r, nella trasformazione che così viene ad eseguirsi ad ogni punto della primitiva superficie che sia base iplo per (C) viene a corrispondere una curva eccezionale d'ordine i sulla F. Ora una curva eccezionale d'ordine i che abbia il punto O come ρ plo viene proiettata da O in una curva d'ordine $i - \rho$ eccezionale per la superficie proiezione della F, e si deve notare che la curva d'ordine i (che corrisponde ad un punto) non può essere spezzata e però è $i > \rho$ tranne per $i = \rho = 1$; così si deduce: *Il sistema residuo della curva fondamentale* K *rispetto al sistema* (C) *ha come punto base iplo ogni punto iplo di* (C) *fuori della* K; *la curva* K *può avere una molteplicità* $\rho < \mathrm{i}$ *in un punto base iplo per* (C) *con* $\mathrm{i} > 1$, *e solo un punto semplice* ($\rho = \mathrm{i} = 1$) *in un punto base semplice di* (C), *ed allora il residuo della* K *ha un punto base* $(\mathrm{i} - \rho)$ *plo (e non di molteplicità più elevata) nel detto punto base iplo di* (C).

Questa deduzione (importa notarlo) è fondata sull'ipotesi fatta che il sistema (C') residuo di K rispetto a (C) abbia solo punti base distinti, e quindi i tangenti variabili in un punto iplo.

2. *Una relazione fra i caratteri d'un sistema, il genere d'una sua curva fondamentale ed i caratteri del residuo.* — Se una curva K è comunque composta con parti irreduttibili distinte $C_1 \ldots C_s$ di generi $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_s$, e se C_r, C_ρ hanno $i_{r\rho}$ punti comuni, il genere della curva composta è (secondo Noether)

$$\Pi = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s + \Sigma i_{r\rho} - s + 1$$

dove la Σ va estesa a tutte le combinazioni di valori diversi r e ρ (come già abbiamo avuto occasione di ricordare).

La curva $K = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$ sia una curva fondamentale per il sistema (C) (nella quale per convenzione sono incluse tutte le componenti, anche punti, che si staccano da (C) quando si stacca una componente); i generi $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_s$ sieno calcolati prescindendo dalle molteplicità delle curve $C_1, C_2 \ldots C_s$ fuori dei punti base di (C), inoltre il genere di un punto h plo (componente K) sia o come quello della curva razionale d'ordine i che gli corrisponde sulla superficie su cui gl'iperpiani segano le curve C' residue di K rispetto a (C). Diremo Π *il genere della curva fondamentale* K *di* (C), *che non ha (per ipotesi) componenti multiple, calcolato in base alle convenzioni precedenti.*

Sieno π, r, n, θ i caratteri di (C), π', r', n', θ' quelli del residuo (C') di K. Una curva composta $C' + K$ ha (per il teorema del § precedente) le stesse molteplicità d'una curva generica C nei punti base di (C); allora se indichiamo con i il numero delle intersezioni variabili della K con una C' cioè (come diremo) *il grado della* K, si avrà:

$$\pi = \pi' + \Pi + i - 1;$$

d'altra parte se si fan segare le curve C da iperpiani, il punto O che viene a corrispondere a K sulla superficie trasformata è iplo per quella superficie, quindi

$$n = n' + i$$

(infatti nel numero i sono comprese le intersezioni che una C' ha con ogni componente di K ed in particolare anche coi punti che risultano hpli per (C')).

Si deduce:

$$\pi - 1 - n + r = \pi' - 1 - n' + r' + \Pi;$$

ma

$$\pi - 1 - n + r = p + \theta$$

$$\pi' - 1 - n' + r' = p + \theta',$$

quindi

$$\theta = \theta' + \Pi.$$

Dunque si può enunciare il teorema:

Se il sistema (C) *possiede una curva fondamentale* K *di genere* Π (*priva di componenti multiple*), *ed avente come residuo il sistema* (C′), *fra i caratteri* θ, θ', *dei sistemi* (C), (C′) *sussiste la relazione*

$$\theta - \theta' = \Pi$$

(ossia $\omega - i - (\omega' - i') = \Pi$).

3. *Sistemi regolari.* — Suppongasi in questo § che se il sistema canonico è irreduttibile con $p > 2$, la *sua serie caratteristica sia completa;* i resultati più restrittivi a cui si perviene prescindendo da questa ipotesi si stabiliranno facilmente in modo analogo riferendosi al cap. IV, § 5.

La relazione stabilita nel precedente § stabilisce un interessante legame fra la sovrabbondanza d'un sistema ed i generi delle sue curve fondamentali quando p. es. il sistema residuo delle curve fondamentali sia non speciale, e perciò basta che la sua dimensione sia $> p - 1$, o il suo grado $> p^{(1)} - 1$. Noi vogliamo trarre da quella relazione alcuni utili corollari.

Se un sistema (C) di dimensione $> p$ ha una curva fondamentale K di genere Π, il residuo (C′) ha la dimensione $> p - 1$ e quindi è non speciale; allora i caratteri θ, θ', di (C), (C′) sono le loro sovrabbondanze ω, ω' (sempre positive); in questo caso *la relazione precedente ci dà:*

$$\omega \geq \Pi.$$

Di qui il corollario:

Un sistema regolare di dimensione $> \mathrm{p}$ *non ha curve fondamentali di genere* > 0.

Per trarre la deduzione enunciata bastava conoscere in qualsiasi modo la non specialità di (C′), e quindi sapere per es. che il suo grado è $> p^{(1)} - 1$; per ciò basta che il grado di (C) superi $p^{(1)} - 1$ aumentato del grado di K.

Di qui il teorema:

Se un sistema regolare (C) *ha una curva fondamentale* K, *tale che il grado di* (C) *supera il grado di* K *aumentato di* $\mathrm{p}^{(1)} - 1$, *la curva fondamentale* K *è di genere* 0.

Se un sistema regolare ha una curva fondamentale di genere Π, il residuo (C′) ha il carattere

$$\theta' = \theta - \Pi,$$

ma

$$\theta = \omega - i, \ \omega = 0,$$

e quindi $\theta \leq 0$, sicchè $\theta' \leq - \Pi$; ora

$$\theta' = \omega' - i' \ (\omega' \geq 0),$$

quindi

$$i' - \omega' \geq \Pi, \ i' \geq \Pi.$$

Dunque:

Se un sistema regolare ha una curva fondamentale di genere Π, *il residuo è speciale con un indice di specialità maggiore del precedente almeno di* Π.

Ora si consideri un sistema speciale ∞^{p-2}; sulla superficie canonica (ottenuta facendo segare dagli iperpiani di S_{p-1} le curve del sistema canonico supposto semplice) esso è segato dagli iperpiani per un punto, e però ha come residua una curva, ossia il suo indice di specialità è 1 come quello del sistema canonico (∞^{p-1}).

Si deduce:

Il sistema canonico, se è semplice, non ha curve fondamentali di genere > 0.

In modo analogo si dimostrano i corollari:

Un sistema regolare ∞^p *non può avere altre curve fondamentali di genere* > 0, *tranne tutt'al più una sola curva fondamentale di genere 1* (*che ha per residuo il sistema canonico*).

Un sistema regolare ∞^{p-1} *non può avere altre curve fondamentali di genere* > 0 *tranne curve fondamentali di genere 1* (*ed allora è non speciale*).

4. *Sistemi multipli d'un sistema.* — Se si hanno sopra una superficie F due sistemi (C), (C′), che possono supporsi segati da due sistemi lineari di superficie, il sistema *somma* dei due sistemi di superficie sega sulla F un sistema lineare di curve contenente tutte le curve composte $C + C'$; questo sistema appartiene ad un determinato sistema normale che si è detto *il sistema somma di* (C), (C′) e si è indicato con $(C + C')$; si è detto poi mplo di (C) ed indicato con $(m\,C)$ il sistema somma di m sistemi (C), cioè il sistema normale contenente tutti i gruppi di m curve C.

Enuncio alcuni lemmi di facile dimostrazione:

Se una curva irreduttibile è fondamentale per il sistema (C) *essa è fondamentale per* $(m\,C)$.

Se una curva irreduttibile è fondamentale per $(m\,C)$ *essa è fondamentale per* (C).

Se una curva irreduttibile è fondamentale per (C) *ma non per* (C′) *essa non è fondamentale per* $(C + C')$.

Le dimostrazioni di questi lemmi si fondano sulla considerazione che una curva irreduttibile non avente intersezioni variabili con quelle d'un sistema è fondamentale per esso e viceversa.

Come abbiamo avuto occasione di osservare nel cap. III se (C) è puro, il sistema $(m\,C)$ per m assai grande contiene un altro arbitrario sistema, in particolare il canonico, in modo che il residuo di questo rispetto ad $(m\,C)$ (disposto convenientemente di m) è un sistema puro (K) di dimensione elevata quanto occorre.

Se si suppone che (C) abbia solo curve fondamentali irreduttibili di genere 0 (distinte), lo stesso avverrà per uno dei precedenti lemmi pel sistema $(C + K)$. Si facciano segare ∞^3 curve generiche di $(C + K)$ dai piani di S_3 sulla superficie F e si supponga per semplicità che essa sia dotata soltanto di curva doppia e punti multipli ordinari; ad una curva fondamentale (di genere 0) del sistema corrisponde un punto multiplo secondo d a cono osculatore irreduttibile di genere 0; un tale cono ha $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ generatrici doppie (o generatrici multiple equivalenti), le quali rappresentano altrettanti rami della curva doppia della F passanti per esso, giacchè una generatrice doppia del cono non tangente alla curva doppia rappresenterebbe un punto doppio della curva fondamentale del sistema $(C + K)$ che non andrebbe computato nel genere della curva (§ 2). Allora si considerino le curve del sistema $((m+1)\,C)$, e si supponga che (C) e quindi $((m+1)\,C)$ sia puro. Esse segano su quelle di $(C+K)$ (sezioni piane della F) un gruppo canonico, e quindi sono segate da una superficie ψ_{D-3} aggiunta alla F (supposta d'ordine D) salvo forse nei punti multipli (cfr. capitolo II, III), e poichè i punti dpli della F sono $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$pli per la curva doppia la ψ_{D-3} ha la molteplicità $d-2$ (almeno) in un punto dplo e quindi è aggiunta alla F. Ne segue che il sistema $((m+1)\,C)$ è aggiunto a $(C+K)$ e però è regolare capitolo IV, § 4).

Dunque:

Per m *assai grande il multiplo* (m C) *del sistema puro irreduttibile* (C) *non dotato che di curve fondamentali irreduttibili di genere* 0, *è regolare.*

5. *Sulla postulazione d'una superficie di* S_r *rispetto alla varietà d'ordine* m. — Si abbia in S_r una superficie F non dotata di curve eccezionali, ed avente soltanto punti multipli a cono osculatore di genere 0. Quante varietà V_m (linearmente indipendenti) d'ordine m contengono la F in S_r?

Se le sezioni iperpianali della F segano sulla F ∞^r curve appartenenti ad un sistema (C), le V_m segano sulla F curve appartenenti al sistema $(m\,C)$.

Indichiamo con π_m, n_m, r_m i caratteri del sistema normale $(m\,C)$; $(\pi_1 = \pi,\ n_1 = n)$; abbiamo allora le relazioni:

$$\pi_m = \pi_{m-1} + \pi + (m-1)\,n - 1$$

$$n_m = n_{m-1} + 2(m-1)\,n + n$$

e quindi

$$\pi_m = m\pi + \frac{m\,(m-1)}{2}\,n - m + 1$$

$$n_m = m^2 n:$$

al crescere di m la dimensione di $(m\,C)$ cresce oltre ogni limite (e quindi oltre $\frac{p^{(1)}-1}{2}$), di guisa che come nel § precedente si deduce che in ogni caso la sua sovrabbondanza $(\omega_m \geq 0)$ è $=0$; perciò quando m è assai grande,

$$r_m = p + \frac{m\,(m+1)}{2}\,n - m\,(\pi - 1).$$

Se indichiamo con

$$N_m = \binom{m+r}{r} - 1$$

la infinità delle V_m, per ogni curva sezione della V_m colla F passano $\infty^{N_m - r_m}$, V_m e perciò la *postulazione* della superficie rispetto alle V_m è

$$\leq r_m + 1 = p + \frac{m\,(m+1)}{2}\,n - m\,(\pi - 1) + 1;$$

dove vale il segno = se (come avviene, si può dire, nel caso generale) il sistema segato dalle V_m su F, per m assai grande, è completo (e per ciò, poichè esso è puro, basta che sia normale).

Dunque, *per la superficie* F *di* S_r *passano* (*per* m *assai grande*)

$$L \leq N_m - p - \frac{m(m+1)}{2} n + m(\pi - 1)$$

varietà V_m *linearmente indipendenti.*

Facciamo ora una breve digressione determinando il numero delle quadriche di S_r passanti per una superficie F a sezioni normali (sulla quale non si fa nessuna altra ipotesi).

Se per la F di S_r passa una quadrica la sezione iperpianale C_π di F e gli n punti sezione d'un S_{r-2} stanno pure sopra una quadrica (risp. in S_{r-1} e in S_{r-2}). Suppongasi ora che gli n punti sezione della F con un S_{r-2} sieno sopra una quadrica q; in un S_{r-1} per lo S_{r-2} le quadriche Q per q sono ∞^r e segano sulla C_π la serie (completa) segata dagli iperpiani (g_n^{r-1}), quindi vi è una ed una sola quadrica Q per la q contenente la curva C_π; in modo analogo può costruirsi un'altra quadrica Q' contenente la sezione C'_π della F con un altro S_{r-1} per lo S_{r-2}, e contenente pure la q; ora le due quadriche Q, Q' risp. appartenenti ai 2 S_{r-1} ed aventi comune la sezione q con un S_{r-2}, appartengono ad un fascio di quadriche Γ in S_r; la quadrica Γ del fascio contenente un punto fissato ad arbitrio sulla F, contiene quindi la F, poichè ne contiene già due sezioni iperpianali. Ora giacchè ogni quadrica per la F sega un S_{r-1} in una quadrica contenente la sua curva sezione, e vi è una quadrica determinata che contiene la F passante per una quadrica che contiene una sua sezione iperpianale, si conclude:

Il numero delle quadriche linearmente indipendenti, che contengono una superficie qualunque a sezioni normali di S_r, *è uguale a quello delle quadriche in* S_{r-1} *che contengono una sua sezione iperpianale, o di quelle in* S_{r-2}, *che contengono il gruppo di punti sezione della superficie.*

6. *Curve fondamentali di genere* 0. — Abbiamo già avuto occasione di notare (§ 4) che alle curve fondamentali di genere 0 d'un sistema lineare (C) corrispondono, sulla superficie F di S_3 di cui le ∞^3 sezioni piane sono curve C, punti multipli che non impongono condizioni alle superficie aggiunte e però non esercitano influenza sul genere; a questo fatto si collega l'altro che tali curve non hanno effetto sulla sovrabbondanza del sistema (C). Una analisi più minuta di siffatte curve fondamentali porta alla conseguenza che esse (a differenza delle curve fondamentali di genere > 0) sono più intimamente legate alla natura della superficie, che a quella del sistema (C) che su di essa si considera.

Il caso più semplice è quello delle curve fondamentali di grado 2, le quali vengono ad essere rappresentate da punti doppi isolati (non eccezionali) (1) sulla superficie F di S_3 (di cui le sezioni piane appartengono al sistema (C)), o sulla superficie normale F' ottenuta facendo segare dagli iperpiani d'un iperspazio tutte le curve C.

(1) Poichè si è esclusa la considerazione delle curve fondamentali costituite da coppie di punti.

Se n è l'ordine della F, le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F, segano su di essa il sistema canonico: non può darsi che tutte passino per un punto doppio della F non eccezionale, e però ad un tal punto doppio corrisponde un punto doppio della *superficie canonica* su cui le curve canoniche sono segate dagli iperpiani (supposto semplice il sistema canonico, $p > 3$).

Viceversa un punto doppio della superficie canonica dà una curva fondamentale di grado 2 per un sistema (C) che, su di essa, non ha il punto doppio come punto base.

Concludiamo:

Una superficie in S_3 *può acquistare per trasformazione tanti punti doppi isolati non eccezionali quanti sono i punti doppi isolati della corrispondente superficie canonica. Il numero di questi punti doppi è un nuovo carattere invariantivo per le superficie di genere* $p > 3$.

Il resultato precedente si esprime sotto forma invariantiva dicendo:

Sopra una superficie un sistema lineare (C) *non può avere altre curve fondamentali di grado 2 tranne quelle che sono tali pel sistema canonico.*

Consideriamo ora una curva fondamentale irreduttibile di genere 0 e di grado i pel sistema (C): si facciano segare ∞^3 curve C sulla superficie F dai piani di S_3, e supponiamo (per semplicità) che la F sia solo dotata di curva doppia. Alla curva fondamentale per (C) corrisponde sulla F un punto iplo a cono osculatore razionale, per il quale passano quindi (come già abbiamo notato al § 4) $\frac{(i-1)(i-2)}{2}$ rami della curva doppia. Se n è l'ordine della F, le ψ_{n-4} (d'ordine $n-4$) aggiunte ad essa hanno il detto punto come $(i-2)$ plo, come conseguenza del contenere la curva doppia della F; una curva canonica ha dunque un tal punto come $(i-2)$ plo (essendo $i-2 = i(i-2)-(i-1)(i-2)$) ed ivi ha le $i-2$ tangenti variabili giacchè il sistema canonico non ha punti base. Dunque ad un tal punto corrisponde una curva razionale d'ordine $i-2$ sulla superficie canonica.

Concludiamo:

Le curve fondamentali di genere 0 *e di grado* i *per il sistema lineare* (C), *corrispondono a curve d'ordine* i — 2 *sulla superficie canonica.*

Così si vede che ad una superficie appartengono 3 categorie di curve razionali che corrispondono ai punti doppi della superficie canonica, alle sue curve razionali, e ad i suoi punti (le curve eccezionali); le prime due categorie forniscono caratteri invariantivi della superficie; invece le curve della 3ª categoria sono in numero arbitrario poichè se ne crea quante si vuole con trasformazioni della superficie.

VI.

Le involuzioni.

1. *Estensione d'un teorema di Castelnuovo. — Relazione fra i secondi generi di due superficie in corrispondenza* [1 *m*]. — Rivolgiamoci ora ad un breve studio dei sistemi lineari (C) in cui il passaggio per un punto trae di conseguenza il passaggio per altri punti della superficie.

Lasciamo da parte, come non offrente interesse, il caso in cui le curve C (di (C)) si spezzino in quelle di un fascio; allora (cap. I, § 1) le curve C che passano per un punto O_1 passeranno in conseguenza per un numero finito di punti $O_2, O_3 \dots O_m$, ed i gruppi analoghi ad $O_1, O_2 \dots O_m$ formano un'*involuzione* I_m, cioè una serie ∞^2 di gruppi di m punti tale che un punto generico della superficie determina un gruppo della serie. Lo studio del sistema (C) (che abbiamo denominato *appartenente all'involuzione* I_m) si annoda strettamente allo studio dell'involuzione. Ad ogni involuzione appartengono sistemi (C) come ora facilmente vedremo.

Si riferiscano biunivocamente i gruppi della I_m (elementi di una varietà ∞^2) ai punti d'una superficie F'; ad un sistema (C') di F' corrisponde su F un sistema (C) appartenente all'involuzione I_m. La F' ossia *l'involuzione* I_m *abbia il genere geometrico* $p > 0$ (1); allora possiamo fissare come sistema (C') quello delle sezioni piane di F' che supponiamo avente curve fondamentali distinte come il suo corrispondente su F, e possiamo considerare una curva canonica K' (completata colle curve eccezionali della F') la quale è definita dal segare un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica di (C') ed un gruppo contenuto nella serie analoga sulla curva generica di ogni sistema ∞^2 contenuto in (C') (cap. II, § 2). Sia K la curva corrispondente alla K' sulla F, H la *curva di coincidenza* della involuzione I_m (luogo dei punti in cui ne coincidono due di un gruppo di I_m) e sieno le C le curve corrispondenti su F alle C' di F'. Una curva composta $K + C + H$ sega sopra una curva generica C un gruppo che è il trasformato di un gruppo canonico di C' aumentato del gruppo delle coincidenze dell'involuzione i cui gruppi corrispondono ai punti di C', quindi per un teorema di Castelnuovo (2) il detto gruppo è un gruppo canonico della C, ossia la curva $K + H$ sega sulla curva C un gruppo residuo della serie caratteristica di (C); parimente si prova che la $K + H$ gode l'analoga proprietà rispetto ad ogni sistema ∞^2 contenuto in (C) (come rispetto ad ogni altro sistema appartenente alla I_m), dunque sussiste il teorema:

---

(1) Non imponiamo nè per la F nè per la F' alcuna restrizione di uguaglianza del genere geometrico al numerico.

(2) *Alcune osservazioni sulle serie irrazionali*, ecc. (" Accad. dei Lincei ", 1891).

Se le superficie F′, F *sono in corrispondenza* [1, m], *alle curve canoniche della prima (supposta di genere* > 0) *corrispondono curve speciali della seconda, componenti curve canoniche insieme alla curva di coincidenza dell'involuzione* I_m *i cui gruppi corrispondono sulla* F *ai punti della* F′.

È questa, come si vede, l'estensione del teorema già adoperato del signor Castelnuovo sulle involuzioni irrazionali appartenenti ad una curva, teorema che apparisce come fondamentale nella teoria appena avviata di quelle involuzioni.

Sia P il genere (geometrico) della F, e p il genere (geometrico) della F′, ad ogni curva canonica della F′ corrisponde una curva che insieme ad H costituisce una curva canonica di F, quindi $P \geq p$: in particolare non può essere $P = 0$ se non è anche $p = 0$.

Sia ora $p > 1$, e quindi anche $P > 1$, e indichiamo con $p^{(1)}$, $P^{(1)}$ *risp. i secondi generi delle* F′, F, *con* δ *il numero dei punti d'incontro d'una curva canonica di* F′ *colla curva di diramazione* (ossia quello delle intersezioni della curva di coincidenza H con una curva residua), *con* τ *il genere della curva di diramazione su* F′ (o di quello di coincidenza H su F), sia infine π il genere delle curve corrispondenti sulla F a quelle canoniche di F′.

Per il teorema di Castelnuovo, o per la formula di Zeuthen, si ha:

$$2m\,(p^{(1)} - 1) + \delta = 2(\pi - 1);$$

per il teorema prima dimostrato si ha invece, in generale (adoperando la formula che dà il genere d'una curva spezzata)

$$P^{(1)} = \pi - 1 + \tau + \delta,$$

quindi *sussiste in generale la relazione*

$$P^{(1)} = m\,(p^{(1)} - 1) + \tau + \frac{3}{2}\,\delta,$$

la quale può considerarsi come un'estensione della nota formula di Zeuthen per le corrispondenze [1 m] tra due curve.

In qualche caso può essere $P^{(1)}$ maggiore del numero indicato dalla formula scritta se le curve corrispondenti su F a quelle canoniche di F′ aumentate della H non sono curve generiche (spezzate) del sistema canonico della F ossia una delle componenti ha qualche punto multiplo in un punto semplice della superficie (o qualche ipermolteplicità in un punto multiplo).

2. *Involuzioni razionali.* — Diamo ora un breve cenno delle involuzioni I_m razionali; la superficie F sui punti della quale i gruppi della I_m sono rappresentati è un piano (superficie razionale) e ad ogni rete omaloidica di esso corrisponde sulla data superficie F una rete di curve di cui due s'intersecano in un gruppo della I_m; restringeremo a tali reti il nome di *reti appartenenti all'involuzione.*

Una rete (C) appartenente all'involuzione I_m sia di genere π (il grado è m) e possieda s curve fondamentali $C_1 \ldots C_h, \ldots C_s$ aventi come residui s fasci risp. di genere $\pi_1 \dots \pi_h \dots \pi_s$; introdurremo i caratteri $\delta_1 \dots \delta_h \dots \delta_s$ definiti dall'uguaglianza

$$\delta_h = \pi - \pi_h$$

e diremo δ_h la *volenza della curva fondamentale* C_h. Il carattere δ_h è legato semplicemente a quelli, altre volte introdotti, cioè il genere (virtuale) ρ_h della C_h ed il suo grado i_h (numero delle intersezioni con una curva residua); infatti è

$$\pi = \pi_h + \rho_h + i_h - 1$$

quindi

$$\delta_h = \rho_h + i_h - 1.$$

Si facciano ora segare le curve C della rete dai piani di una stella col centro O, sulla superficie F, e sieno $a_1 \dots a_s$ le rette per O (multiple o contenenti punti multipli per la F) che corrispondono alle curve fondamentali $C_1 \dots C_s$. Nell'involuzione I_m ci sieno α gruppi dotati di due coincidenze staccate (di due punti doppi), e τ gruppi dotati d'un punto triplo (dove ne coincidono 3): le α rette che proiettano da O i primi α gruppi sono corde per la curva di coincidenza di I_m, le τ che proiettano i τ gruppi secondi sono tangenti per essa.

Ora la curva di coincidenza sega un piano generico per O in $2(\pi + m - 1)$ punti fuori di O ed un piano per a_h (fuori di a_h) in $2(\pi_h + m - 1)$ punti, ossia la a_h ha colla curva δ_h intersezioni. Proiettando dunque la detta curva di coincidenza da O sopra un piano, si avrà il suo genere dato da

$$P = (2\pi + 2m - 3)(\pi + m - 2) - \sum_1^s \delta_h (2\delta_h - 1) - \alpha - \tau.$$

Si conclude che *la quantità*

$$(2\pi + 2m - 3)(\pi + m - 2) - \Sigma\, \delta_h (2\delta_h - 1) \; (= \alpha + \tau + P)$$

ha lo stesso valore per tutte le reti appartenenti all'involuzione I_m ed è quindi essenzialmente un carattere della I_m anzichè delle dette reti. Invero si osserverà che, prendendo nel piano multiplo rappresentativo della I_m una rete omaloidica le cui curve abbiano assai intersezioni con quella di diramazione, si avranno sulla F reti di genere grande quanto si vuole, appartenenti alla I_m, e quindi separatamente i caratteri π, δ_h non sono caratteri della I_m.

Esaminiamo brevemente il caso $(m = 2)$ di una involuzione razionale I_2 sopra una superficie F.

Le curve d'una rete (C) appartenente alla I_2 sienò segate dai piani per O sulla F. Se n è l'ordine della F, le aggiunte d'ordine $n - 4$ alla F sono coni col vertice in O (che è $(n - 2)$ plo per la F), quindi:

Se sopra una superficie vi è un'involuzione I_2, *le curve canoniche che passano per un punto passano per il coniugato* (1).

(1) Questa proprietà è nota; infatti il sig. CASTELNUOVO (" Istituto lombardo „, l. c.) ha dimostrato che se vi è un fascio di curve iperellittiche sopra una superficie d'ordine n, le aggiunte d'ordine $n - 4$ per un punto passano per il coniugato sulla curva iperellittica che lo contiene. Il tipo di superficie di cui stiamo trattando è stato considerato per la prima volta dal sig. NOETHER (" Math. Ann. „, VIII, l. c.).

Secondo la relazione precedentemente scritta il genere della curva di coincidenza della I_2 è

$$P = (2\pi - 1)\pi - \sum_1^s \delta_h (2\delta_h - 1)$$

dove π è il genere d'una rete appartenente alla I_2 (composta di curve iperellittiche) e δ_h è la valenza d'una sua curva fondamentale C_h $(h = 1 \dots s)$.

La rete (C) sia segata sulla F dai piani per O; una curva canonica sega una C in $2(\pi - 1) - 2$ $(m = 2)$ punti, e quindi se n è l'ordine della F i coni aggiunti d'ordine $n - 4$ si spezzano nel cono (fisso) proiettante la curva doppia della superficie, e in coni variabili d'ordine $\pi - 2$.

Se la a_h è una retta per O multipla secondo θ_h (o semplice) per la F contenente arbitrari punti multipli, un piano per la a_h è segato da una superficie d'ordine $n - 4$ aggiunta alla F secondo una curva d'ordine $n - \theta_h - 3$ aggiunta alla sezione d'ordine $n - \theta_h$ della F (tolta la a_h) (cfr. cap. II, § 1); questa sezione è dunque segata in $2(\pi_h - 1)$ punti da una curva canonica (essendo π_h il genere di essa), e però il cono d'ordine $\pi - 2$, facente parte d'una aggiunta d'ordine $n - 4$ alla F, ha la retta a_h come multipla secondo $\pi - 2 - (\pi_h - 1) = \delta_h - 1$.

Ora ogni curva C_h fondamentale per la rete (C) viene rappresentata da una tal retta a_h, o da una retta per O contenente un punto doppio isolato per la F; in questo 2° caso il detto cono d'ordine $\pi - 2$ non contiene in generale la retta congiungente il punto doppio, e quindi si può dire ancora che la contiene colla molteplicità $\delta_h - 1 = \pi - \pi_h - 1$ poichè $\pi_h = \pi - 1$. Dunque i coni d'ordine $\pi - 2$ col vertice O seganti sulla F le curve canoniche sono assoggettati ad avere come $(\delta_h - 1)$ pla ogni retta per O che corrisponde ad una curva C_h fondamentale per la rete (C), di valenza δ_h.

Indicando con p il genere (geometrico uguale al numerico) della F *sussiste dunque la relazione*

$$p = \frac{\pi(\pi - 1)}{2} - \sum \frac{\delta_h(\delta_h - 1)}{2};$$

di qua si ricava

$$4p = 2\pi(\pi - 1) - \sum 2\delta_h(\delta_h - 1)$$

e confrontando coll'altra relazione trovata

$$P = (2\pi - 1)\pi - \sum (2\delta_h - 1)\delta_h,$$

si ha

$$P - 4p = \pi - \sum \delta_h$$

dove il secondo membro è uguale per tutte le reti che appartengono alla involuzione I_2.