Enriques, Federigo

Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.

Atti Ist. Veneto Scienze, Lettere, Arti (VII) **IV** (1893), pp. 1590-1593.

FEDERIGO ENRIQUES

LE SUPERFICIE

CON INFINITE TRASFORMAZIONI

PROIETTIVE IN SÈ STESSE

Memoria

VENEZIA — TIP. FERRARI — 1893

Estratto dagli Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.
Tomo IV, Serie VII. — 1892-93.

Il signor Klein nel suo « Programma. Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti » (1) ha delineato la geometria concepita come studio delle proprietà delle figure invariabili in un *gruppo principale di trasformazioni.*

Quando si studia, secondo questo concetto, la geometria proiettiva si ha come gruppo principale quello delle omografie dello spazio. In questa geometria presentano il più grande interesse gli enti (sistemi di elementi) mutati in sè da tutte le trasformazioni del gruppo, cioè i *corpi*, (ad es. i sistemi di tutte le superficie algebriche di dato ordine); accanto a questi sono da porsi gli enti che ammettono un certo numero (finito o infinito) di trasformazioni proiettive in sè (2) (p. e. particolari, curve, superficie ecc.).

(1) Università di Erlangen 1872. Traduzione italiana del signor Fano *(Annali di Mat.*, serie II, t. XVII).

(2) Cfr. il citato *Programma* di Klein, traduz. it., pag. 30.

Appunto in questo ordine d' idee i sigg. Klein e Lie studiavano le curve piane che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive permutabili in sè (1) ed esponevano (nel 1870) un teorema generale (2) sopra le analoghe curve con ∞^1 e superficie con ∞^2 trasformazioni proiettive permutabili in sè, nello spazio.

In questi venti anni il concetto di gruppo ha acquistato sempre maggiore importanza in tutti i rami delle matematiche: in particolare la teoria dei gruppi continui ha ricevuto stabile assetto specialmente per l' opera capitale del sig. Lie, (3) di cui non importa ricordare le straordinarie applicazioni nella teoria delle equazioni differenziali: ma l' interesse dei geometri non mi sembra si sia rivolto abbastanza a siffatte considerazioni.

In questo lavoro mi sono proposto lo studio di tutte le superficie (in particolare le algebriche) con infinite trasformazioni proiettive (non cicliche) in sè (le quali formano un gruppo continuo): ho escluso però la considerazione dei gruppi composti esclusivamente di omografie con punti uniti multipli, per evitare una troppo grande complicazione.

I resultati ottenuti mi sembrano non privi di qualche interesse: li espongo quì brevemente.

Il capitolo I. è dedicato alle superficie algebriche con ∞^1 trasformazioni proiettive in sè. Queste superficie sono razionali o riferibili o rigate: vi è sopra di esse un fascio di curve, ciascuna mutata in sè dalle ∞^1 omografie; se queste curve sono trascendenti la superficie ammette un gruppo ∞^2 di trasformazioni proiettive permutabili in sè

(1) *Math. Ann.*, Bd IV. Sopra queste curve è tornato il sig. Veronese nelle sue memorie. « Sopra alcune notevoli configurazioni di punti rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie » (*Accad dei Lincei-1891*).

(2) *Comptes rendus*, 1870.

(3) *Theorie der Transformations gruppen* (1888-90).

e rientra quindi tra quelle considerate dai sigg. Klein e Lie (loc. cit.).

Abbandono quindi la condizione di algebricità nello studio delle superficie con ∞^2 e più trasformazioni proiettive in sè. Per questo studio mi occorre la costruzione di tutti i gruppi ∞^2 d' omografie spaziali (cap. II.°). Ne deduco nel cap. III. che le sole superficie con ∞^2 (e non più) trasformazioni proiettive in sè, sono:

a) Le superficie

$$y_1^a y_2^b y_3^c = k y_4^{a+b+c}$$

con ∞^2 trasformazioni permutabili in sè (di Klein e Lie).

b) Superficie rigate (particolari) con due direttrici infinitamente vicine.

c) Superficie (particolari) con un fascio di coniche.

d) Superficie algebriche del 6° ordine mutate in sè dalle omografie che trasformano in sè una cubica gobba con un punto unito su di essa.

Tra le superficie *a*) *b*) *c*) (in generale trascendenti) vi sono infinite superficie algebriche.

Di tutte queste superficie vengono date alcune proprietà nel cap. III.

In fine dimostro, nel cap. IV, che le sole superficie che ammettono più di ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, sono:

e) Il piano.

f) Le quadriche.

g) I coni.

h) La sviluppabile cubica.

Farò notare che queste ricerche si potrebbero utilmente riannodare ad altre sui gruppi continui di trasformazioni birazionali nel piano già da me pubblicate. (1) — Partendo da quei resultati sarebbe facile lo studio delle

(1) *Accad. dei Lincei* (Maggio-Giugno 1893).

superficie algebriche razionali normali negli iperspazi con un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in sè, tra le quali sono comprese tutte le algebriche con un gruppo transitivo ∞^2 almeno di trasformazioni proiettive in sè; ma il legame riuscirebbe più difficile a stabilire quando si volessero le analoghe superficie in uno spazio di date dimensioni (come quì nel nostro), oltre di chè la trattazione si limiterebbe solo alle superficie algebriche.

I.

Le superficie algebriche con ∞^1 trasformazioni proiettive in sè.

1. — Le equazioni di un' omografia generale (cioè non dotata di punti uniti multipli) dello spazio, possono notoriamente ricondursi alla forma

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : a\,x_2 : b\,x_3 : c\,x_4 ;$$

allora le equazioni

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : a^n x_2 : b^n x_3 : c^n x_4$$

rappresentano una o più omografie che diconsi potenze n^e della data, e si denotano con π^n se quella è denotata con π. Facendo variare n per continuità, otteniamo un sistema continuo di omografie tale che il prodotto di due di esse appartiene al sistema e che insieme ad una omografia comparisce nel sistema anche l' inversa; per queste proprietà caratteristiche, il sistema ∞^1 delle omografie così ottenute si dice un *gruppo continuo* [1]: le omografie del gruppo possono rappresentarsi colle equazioni

$$(1) \qquad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^\mu x_3 : \rho^\nu x_4$$

dove si è posto

$$\rho = a^n , \quad \mu = \log_a b , \quad \nu = \log_a c ,$$

ed allora le dette omografie dipendono dal parametro ρ. Ad un punto $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ corrispondono nelle omografie del gruppo i punti d' una linea passante per esso, cioè della linea rappresentata dalle equazioni (1). Tutte le ∞^2 linee corrispondenti in tal modo ai punti dello spazio sono proiettive (come è noto) e formano una *congruenza* del *1° ordine* e *razionale* perchè generabile colle intersezioni delle superficie dei due fasci

$$y_3\, y_1^{\mu-1}\, \alpha = y_2^\mu , \quad y_4^\mu\, y_1^{\nu-\mu}\, \beta = y_3^\nu ,$$

dove

$$\alpha = \frac{x_2^\mu}{x_3\, x_1^{\mu-1}} \qquad \beta = \frac{x_3^\nu}{x_4^\mu\, x_1^{\nu-\mu}} .$$

Come tipo di queste linee possiamo scegliere quella che passa per il punto (1111) rappresentata dalle equazioni

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 1 : \rho : \rho^\mu : \rho^\nu .$$

Esse sono *in generale trascendenti ed algebriche (razionali) se* μ *e* ν *sono ambedue razionali*, e noi diremo che il gruppo ∞^1 definito dalla data omografia è rispettivamente trascendente o algebrico e di *invarianti assoluti* μ, ν: se μ e ν sono dati dalle frazioni $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$, dove m,

(1) Cfr. Lie, *Theorie der Transformations gruppen* (1888–90). Cfr. pure per questo caso Klein e Lie, *Comptes rendus* (1870), e *Mathem. Ann.* I.,

n, s sono interi senza fattori comuni ed $n \gtreqless m \gtreqless s$, le dette linee sono d'ordine n, perchè rappresentabili colle equazioni

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 1 : \rho^s : \rho^m : \rho^n .$$

Si vedrebbe facilmente che queste curve passano per i punti

$$1 \equiv (1000) \quad \text{e} \quad 4 \equiv (0001)$$

e non passano per i punti

$$2 \equiv (0100) \quad \text{e} \quad 3 \equiv (0010) ;$$

inoltre che nei punti 1, 4, le dette curve hanno rispettivamente le molteplicità s, $n-m$, ed in ciascuno di essi vi è una sola tangente (rispettivamente 1 2, 3 4) contenente altri $m-s$ punti infinitamente vicini della curva, giacchè un piano per la retta 1 2 ha m intersezioni variabili (fuori del punto 1) con una tal curva, ed un piano per la 3 4 ne ha $n-s$ (fuori del punto 4).

Esempi di tali curve si hanno nella cubica gobba, (1) nella quartica con due flessi di Cayley, (2) in quella con una cuspide di Klein e Lie. (3)

2. — Una superficie algebrica avente l'equazione

$$f = \Sigma\, a_{ikhl}\, x_1^i x_2^k x_3^h x_4^l = 0 \quad (i + k + h + l = n)$$

debba esser mutata in sè dall'omografia non ciclica

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^\mu x_3 : \rho^\nu x_4 ;$$

(1) Cfr. p. e. Sturm. (*Math. Ann.*, t. 26).

(2) *Quartely Journal*, v. 7. Cfr. pure Cremona (*Ist. lomb.*, 1868). Bertini (idem, 72). Weyr (idem, 71). Del Re (*Acc. Torino*, 87) ecc.

(3) *Comptes rendus., Acc. des Sciences*, 1870. Cfr. pure Cremona (idem, t. LIV).

allora eseguendo sulle variabili le sostituzioni lineari indicate, la f muta solo proporzionalmente: ciò deve accadere anche se invece di ρ si pone ρ^2, ρ^3 . . . . ., quindi la f deve mutare proporzionalmente qualunque sia il valore di ρ: così si riconosce il fatto ben noto che una superficie algebrica mutata in sè da un'omografia non ciclica, è mutata in sè da tutte le omografie del gruppo ∞^1 che la data determina. Ora dal termine generale della f, quando si operino le nominate sostituzioni lineari, vien fuori il fattore $\rho^{k+h\mu+l\nu}$; e poichè questo deve esser comune a tutti i termini della forma f, così deve aversi

$$(1) \qquad k + h\mu + l\nu = k^1 + h^1\mu + l^1\nu ,$$

indicando $k^1\ h^1\ l^1$ gli indici di un coefficiente non nullo $a_{i' k' h' l'}$ (con $i' + k' + h' + l' = n$) della f.

Ma la relazione implica un'equazione lineare a coefficienti interi fra le quantità μ, ν; ed una tale equazione non lega in generale due quantità irrazionali arbitrarie; se si pone nella (1) $h = h' = 0$ rimane ν razionale, e se anche $l = l' = 0$ risulta $k = k'$ e quindi $i = i'$, cioè si hanno nella f due termini distinti. Dunque se μ, ν sono arbitrari non vi è nessuna superficie algebrica mutata in sè dalle omografie del gruppo, tranne quelle la cui equazione consta di un solo termine

$$a_{ikhl}\, x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^h x_4{}^l = 0$$

e che si spezzano nei 4 piani uniti contati ciascuno un certo numero di volte.

Vi sono però due casi in cui si perviene ad un risultato diverso. In 1° luogo se μ, ν sono legati da una relazione lineare a coefficienti interi

$$(1) \qquad k + h\mu + l\nu = k' + h'\mu + l'\nu ,$$

le proiettività del gruppo ∞^1 che ha per invarianti assoluti μ, ν, mutano in sè le superficie d'ordine n (costituenti un fascio)

$$f = a_{ikhl}\, x_1^i x_2^k x_3^h x_4^l + a_{i'k'h'l'}\, x_1^{i'} x_2^{k'} x_3^{h'} x_4^{l'} = 0$$
$$(i + k + h + l = i' + k' + h' + l' = n)$$

dalle quali si staccano un certo numero di volte i piani uniti, in guisa che si ha un fascio di superficie mutate in sè di cui l' ordine dipende dalle differenze $k - k'$, $h - h'$, $l - l'$ e dal loro segno. Questo fascio è in generale unico; giacchè se μ e ν non sono razionali, essi non possono soddisfare a due relazioni della forma (1) e quindi la f non può contenere altri termini oltre i due scritti: la cosa è chiara anche geometricamente, giacchè due superficie algebriche mutate in sè dalle omografie d' un gruppo ∞^1 trascendente, e non appartenenti al fascio considerato, avrebbero comune una linea trascendente.

Vi è però un altro caso in cui, pur non essendo μ e ν legati da una relazione lineare a coefficienti interi, esistono superficie algebriche mutate in sè dalle proiettività del corrispondente gruppo ∞^1: questo si presenta se uno dei detti invarianti (ad es. μ) è razionale, giacchè allora sussiste una relazione lineare a coefficienti interi

$$k + h\mu = k' + h'\mu\,,$$

che è della forma (1) dove si sia posto $l = l' = 0$. La forma f non contiene allora la variabile x_4, e quindi la $f = 0$ deve esser un cono proiettante dal punto unito opposto una delle linee algebriche (costituenti un fascio) mutate in sè dal gruppo ∞^1 algebrico delle proiettività subordinate nel piano $x_4 = 0$. (1)

Prima di considerare il caso in cui μ, ν sieno ambedue razionali) il quale dà luogo ad un numero maggiore

(1) Queste linee hanno equazioni della forma

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_1 : \rho x_2 : \rho\mu x_3\,,$$

essendo $x_1\, x_2\, x_3$ le coordinate (fisse) di un punto della curva. Cfr. per esse Klein e Lie (*Math. Ann.*, IV).

di superficie mutate in sè), esaminiamo una conseguenza notevole che si ha nei due casi precedenti.

Nel 1° caso la superficie

$$f = a_{ikhl}\, x_1^{\,i} x_2^{\,k} x_3^{\,h} x_4^{\,l} + a_{i'k'h'l'}\, x_1^{\,i'} x_2^{\,k'} x_3^{\,h'} x_4^{\,l'} = 0$$

è mutata in sè da tutte le proiettività, collo stesso tetraedro unito, aventi equazioni della forma

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^u x_3 : \rho^v x_4$$

dove

$$k + h\,u + l\,v = k' + h'u + l'v\,.$$

Ora questa equazione in u, v permette di determinare una semplice infinità di gruppi ∞^1 (tra cui quanti si vogliono algebrici) di omografie mutanti in sè la $f = 0$; ossia la superficie $f = 0$ ammette ∞^2 trasformazioni proiettive in sè stessa. Queste trasformazioni, avendo lo stesso tetraedro unito, sono (come è noto) due a due *permutabili* ossia il prodotto di due di esse non dipende dall'ordine in cui vien eseguito (o se si vuole l'una trasforma l'altra in se stessa): inoltre esse formano un gruppo, come è facile riconoscere: infatti il prodotto di due omografie π, τ di equazioni

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^u x_3 : \rho^v x_4$$

e

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho^t x_2 : \rho^{tu'} x_3 : \rho^{tv'} x_4$$

è l' omografia

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho^{t+1} x_2 : \rho^{tu'+u} x_3 : \rho^{tv'+v} x_4 \quad ,$$

dove è

$$(t+1)k + (tu'+u)h + (tv'+v)\,l = (t+1)\,k' + (tu'+u)h' + (tv'+v)l'$$

se contemporaneamente è

$$k + hu + lv = k' + h'u + l'v$$

e

$$t\,(k + u'h + v'l) = t\,(k' + u'h' + v'l')$$

Se π, τ sono due omografie del gruppo, non una potenza dell' altra, una qualunque omografia di esso può rappresentarsi con $\pi^m \tau^n$; infatti le equazioni

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : r x_2 : r^\mu x_3 : r^\nu x_4$$

dove

$$k + \mu h + \nu l = k' + \mu h' + \nu l'$$

ricadono nelle equazioni

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho^{1+t} x_2 : \rho^{u+tu'} x_3 : \rho^{v+tv'} x_4$$

se si pone

$$\rho^{1+t} = r \,, \quad u + tu' - (1+t) = \mu \,, \quad v + tv' - (1+t) = \nu$$

disponendo dei valori di ρ, t, il che può farsi per l' equazione lineare da cui sono legate tanto le μ, ν, quanto le u, v e le u', v'.

La suddetta proprietà è la proprietà caratteristica dei gruppi *continui* di trasformazioni che Lie ha dedotto dall' ipotesi che i parametri da cui dipendono le trasformazioni del gruppo figurino in modo analitico (nel senso di Weierstrass); invero è chiaro che il resultato della pag. 66 dell' op. cit. del Lie può enunciarsi dicendo:

Se $\pi_1\, \pi_2 \,.\,.\, \pi_s$ sono s trasformazioni, indipendenti di un gruppo ∞^s, ciascuna trasformazione del gruppo è rappresentabile col simbolo

$$\pi_1^{n_1}\ \pi_2^{n_2} \,.\,.\,.\, \pi^{s_n}_{s} \,.$$

Nel seguito (cap. II, § 1) noi assumeremo questo fatto come definizione di gruppo *continuo* d' omografie (senza fissare il modo con cui debbono figurare i parametri da cui dipendono le omografie del gruppo stesso): allora è chiaro (per ciò che abbiam visto sui gruppi ∞^1) che gli enti (linee, superficie ecc.) generati come luogo dei trasformati d' un punto, d' una retta ecc. nelle omografie d' un gruppo sono analiticamente rappresentabili dipendendo in sostanza da funzioni esponenziali.

Tornando al 2° caso della presente discussione, che abbiamo trovato dar luogo ad un fascio di superficie algebriche mutate in sè dalle ∞^1 omografie d'un gruppo (dove l'invariante μ è razionale), si è visto che le superficie mutate in sè sono coni col vertice nel punto unito

$$4 \equiv (0001).$$

In questo caso dunque la $f = 0$ deve esser mutata in sè, oltrechè dalle omografie

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^\mu x_3 : \rho^\nu x_4 ,$$

anche dalle

$$y_1 : y_2 : y_3 \, y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^\mu x_3 : a \rho^\nu x_4$$

(dove a è arbitrario), giacchè la variàbile x_4 non comparisce nella f.

Le equazioni delle dette omografie possono scriversi più semplicemente sotto la forma

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : \rho x_2 : \rho^\mu x_3 : r x_4 ,$$

e definiscono ancora (come si vede facilmente) un gruppo ∞^2 di omografie permutabili. Però il cono ammette altre trasformazioni proiettive in sè, in cui il piano unito opposto al vertice è un altro piano arbitrario dello spazio: infatti sopra un piano arbitrario la sezione del cono ammette ∞^1 trasformazioni proiettive in sè, e quindi ogni piano (non passante per il vertice) è nelle stesse condizioni rispetto al cono: si deduce così che quel cono ammette in generale ∞^5 trasformazioni proiettive in sè formanti gruppo perchè il prodotto di due trasforma in sè il cono, (e solo, come vedremo, nel caso del cono quadrico, ne ammette di più).

Consideriamo infine un gruppo ∞^1 d'omografie che abbia ambedue gli invarianti assoluti μ, ν razionali, cioè che sia algebrico. Allora nell'equazione $f=0$ d'una superficie algebrica mutata in sè compariscono più termini $a^{ikhl}x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^h x_4{}^l$, dove si ha

$$k+h\mu+l\nu=r$$

essendo r una arbitraria costante razionale; ed una tale equazione (che si riduce ad una equazione d'analisi indeterminata fra 3 numeri interi) ammette in generale infinite soluzioni, tra le quali bisogna scartare quelle per cui resulta

$$k+h+l>n.$$

Così possono costruirsi per ogni valore di n, comunque grande, più sistemi lineari di superficie mutate in sè dalle omografie del gruppo, in modo che tutte le superficie algebriche mutate in sè non formano più un sistema di dimensione finita. Geometricamente possiamo generare una di queste superficie mediante le linee della congruenza di curve unite definita dal gruppo, che si appoggiano ad una arbitraria curva algebrica: ci si convince così che una tal superficie non ammette in generale altre trasformazioni proiettive in sè tranne del gruppo algebrico ∞^1. Naturalmente trovansi però fra queste superficie anche superficie con più trasformazioni in sè; ad es. i coni che si ottengono come nel caso precedentemente trattato in cui uno solo degli invarianti assoluti μ, ν, è razionale.

Possiamo riassumere i resultati ottenuti enunciando il teorema:

Le omografie d'un gruppo ∞^1 non trasformano in generale in sè stessa alcuna superficie algebrica, tranne i 4 piani uniti. I casi in cui le dette omografie mutano in sè altre superficie algebriche sono i seguenti:

1.° *Gli invarianti assoluti μ, ν del gruppo sono irrazionali, ma legati da una relazione lineare a coefficienti* *razionali (che posson supporsi interi). Allora esiste un determinato fascio di superficie unite. Una tale superficie algebrica mutata in sè dalle omografie d'un gruppo trascendente* ∞^1, *è trasformata in sè da* ∞^2 *omografie permutabili componenti un gruppo* (1) *e distribuite in una semplice infinità di gruppi* ∞^1, *tra cui un numero infinito di algebrici.*

1° *Uno degli invarianti del gruppo è razionale e l'altro nò. Allora vi è solo un fascio di coni uniti.*

Un tal cono algebrico mutato in sè dalle omografie d'un gruppo ∞^1 *che scambiano le sue generatrici, ammette un gruppo* ∞^5 *(o più ampio) di trasformazioni proiettive in sè, distribuite in* ∞^4 *gruppi* ∞^1 *tra cui infiniti algebrici.*

3° *Ambedue gli invarianti assoluti* μ, ν *del gruppo sono razionali: il gruppo è algebrico e ammette una infinità incommensurabile di superficie algebriche unite.*

3. — Una superficie che ammetta un gruppo trascendente ∞^1 di trasformazioni proiettive in sè stessa ammette come abbiamo visto un gruppo ∞^2 di trasformazione proiettive permutabili in sè. Abbiamo notato che queste si distribuiscono in una semplice infinità di gruppi ∞^1 (ciò che dipende dalla proprietà peculiare di un gruppo continuo (2) per la quale una trasformazione appartiene ad un determinato sottogruppo ∞^1), e abbiamo riconosciuto che tra quei gruppi ∞^1 ve ne sono infiniti algebrici. Ora un tale gruppo algebrico ∞^1 individua sulla superficie un fascio di curve razionali, e poichè vi sono sulla superficie altri fasci analoghi (dati dagli altri gruppi ∞^1), il fascio è razionale,

(1) Per le citazioni relative a queste superficie cfr. cap. III, § 2.
(2) Lie, op. cit. Bd. I, pag. 66.

sicchè, per un teorema del sig. Noether (1) la superficie stessa è rappresentabile sul piano.

Ciò posto si consideri una superficie algebrica mutata in sè dalla omografia di un gruppo continuo *transitivo* (∞^2 almeno), cioè tale che ad esso appartenga un'omografia in cui si corrispondono due punti generici delle superficie. Come ho ricordato, nel gruppo esistono infiniti sottogruppi ∞^1: se uno di questi è trascendente la superficie è razionale: se questi sottogruppi sono invece tutti algebrici, la superficie è pure razionale poichè esistono su di essa più (anzi infiniti) fasci di curve razionali (come abbiamo detto sopra): la superficie è dunque razionale in ogni caso.

Invece se la superficie ammette un gruppo continuo *intransitivo* di omografie che la trasformano in sè, vi è su di essa un solo fascio di curve unite, le quali sono mutate in sè almeno da un gruppo ∞^1 contenuto nel dato. Quindi se le linee sono trascendenti la superficie è mutata in sè da ∞^2 proiettività ed è razionale; altrimenti vi è sulla superficie un fascio di curve razionali: questo fascio però basta da solo a generare una tal superficie e può quindi assumersi come irrazionale. Però le linee del fascio (come tutte quelle della congruenza delle curve unite per un gruppo algebrico ∞^1) hanno due punti fissi in ciascun dei quali vi è una sola tangente: se col metodo di Noether (2) si facciano segare le curve razionali del fascio dai piani per una retta e si trasformino quindi in rette o coniche, anche nel 2° caso ad uno dei punti fissi nominati corrisponde sulla superficie una curva che incontra in un sol punto le coniche del fascio e quindi si può ancora trasformare la superficie in una rigata.

Così possiamo concludere:

Una superficie algebrica che ammette un gruppo

(1) *Math. Ann.*, Bd. III.
(2) Op. cit.

continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè, è razionale.

Una superficie algebrica mutata in sè dalle omografie di un guppo continuo intransitivo è una rigata o trasformabile in una rigata.

4. — Le omografie di un gruppo ∞^1 mutano in sè infiniti sistemi lineari di superficie (ad es. quello di tutte le superficie di dato ordine n), operando sulle superficie (considerate come elementi) come omografie d' un iperspazio.

In un tal sistema si trovano quindi, sempre, dei fasci mutati in sè stessi.

Ora in generale se una superficie incontra in r (o ∞) punti variabili le linee unite della congruenza definita dal gruppo ∞^1, per un punto passano r (o ∞) superficie trasformate di essa in un'omografia del gruppo; ne passano però meno di r se la superficie è trasformata in sè da qualche omografia ciclica del gruppo (se è mutata in sè da un'omografia non ciclica è mutata in sè da tutte). Escluso però questo caso, l' indice del sistema ∞^1 delle superficie trasformate di una data è eguale al numero delle intersezioni variabili che essa ha colle ∞^2 linee unite: poichè queste formano una congruenza razionale, abbiamo dunque:

Una superficie algebrica che è trasformata nelle superficie d'un fascio dalle omografie d'un gruppo ∞^1 e che non è mutata in sè da alcuna omografia ciclica del gruppo è razionale.

II.

Determinazione dei gruppi ∞^2 d'omografie nello spazio.

1. — Scelte in un gruppo continuo ∞^2 di trasformazioni proiettive due trasformazioni π, τ indipendenti (cioè di cui l'una non sia potenza dell'altra), ogni trasformazione del gruppo si può rappresentare col simbolo $\Omega = \pi^m \; \tau^n$ (1). Non si potrà porre simultaneamente $\Omega = \pi^\mu \; \tau^\nu$ con μ, ν diversi da m, n, poichè seguirebbe

$$\pi^\mu \; \tau^\nu = \pi^m \; \tau^n$$
$$\pi^{\mu - m} = \tau^{n - \nu}$$

ossia se p. e. μ è diverso da m

$$\pi = \tau^{\frac{n-\nu}{\mu - m}}$$

contro l' ipotesi.

Da questa osservazione si può trarre il lemma « *se le omografie d'un gruppo nello spazio hanno 3 punti uniti fissi e non tutte gli stessi punti uniti, il gruppo delle omografie subordinate sul piano dei 3 punti è* ∞^1. »

Infatti se π, τ sono due omografie d'un tal gruppo non una potenza dell'altra, e π', τ' le subordinate sul piano dei tre punti, si avrà

$$\tau' \; \pi' = \pi' \; \tau'$$

d'altra parte può porsi in un sol modo

$$\tau \; \pi = \pi^m \; \tau^n,$$

(1) Cfr. cap. I, § 2, pag. 12.

da cui segue

$$\tau' \; \pi' = \pi'^m \; \tau'^n \; ;$$

dunque o $m = n = 1$ o τ' è una potenza di π'. Nella I.ª ipotesi

$$\tau \; \pi = \pi \; \tau$$

ossia il gruppo è composto di omografie permutabili e quindi cogli stessi punti uniti fissi; nella 2ª ipotesi le omografie subordinate sul piano dei 3 punti uniti formano un gruppo di potenze (∞^1).

2. Se un punto non è unito per tutte le omografie di un gruppo ∞^2 ed è unito per una di esse (non ciclica) (1), esso è unito per tutte le potenze di questa, e quindi per le omografie di un gruppo ∞^1. Segue così che i punti uniti, non fissi, delle ∞^2 omografie d'un gruppo sono portati dalle omografie del gruppo nei punti di una linea che ha ∞^2 trasformazioni proiettive in sè.

I sigg. Klein e Lie (2) hanno determinato mediante le relative equazioni differenziali tutte le linee che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in sè: dalla trasformazione da essi eseguita di quelle equazioni differenziali resulta che una linea dello spazio con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè è necessariamente algebrica ed è una cubica gobba; questo fatto è osservato in una nota di quel lavoro. Collo stesso metodo si deduce che nel piano l'unica linea con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè è una

(1) Qui è opportuno osservare che un gruppo continuo non può esser costituito di sole omografie cicliche perchè generato (secondo Lie) da trasformazioni infinitesimali, le quali definiscono i sottogruppi ∞^1 che abbiam già detto comporre un sistema tale che una trasformazione appartiene ad uno determinato di questi.

(2) *Comptes rendus* (1870, op. cit.).

conica se non è una retta. Possiamo dunque concludere che *« le linee unite che sono luogo di punti uniti per le omografie d'un gruppo ∞^2 sono cubiche gobbe, o coniche o rette. »* (1)

Sopra ognuna di tali linee vi è un gruppo ∞^2 di proiettività subordinate binarie; risulta da un teorema di Lie (2) che « *un tal gruppo è costituito dalle proiettività con un punto unito fisso.* »

Allora si vede come l' esistenza d' una cubica gobba luogo di punti uniti per le ∞^2 proiettività d' un gruppo, trae con sè l'esistenza d'una conica unita (sezione del piano osculatore nel punto unito fisso sulla cubica colla sviluppabile osculatrice), e l'esistenza d' una retta unita (la tangente nel detto punto), pure luogo di punti uniti (3). Così l' esistenza di una conica luogo di punti uniti trae con sè l'esistenza d'una retta luogo di punti uniti, cioè la tangente nel punto unito della conica. Sopra ciascuna di tali curve, che posseggono già un punto unito, non può stare alcun punto unito fisso per le omografie del gruppo.

Infine notiamo che in un gruppo d' omografie assiali non può esservi una cubica gobba unita (poichè questa curva non è trasformata in sè da proiettività assiali non cicliche), e così in un gruppo d'omografie biassali o d'omologie non possono esservi altre curve unite (luogo di punti uniti) che rette.

(1) In generale si ha collo stesso metodo (e quindi può considerarsi come noto) che in un iperspazio S_n non vi è altra linea mutata in sè da ∞^2 omografie (non appartenente ad uno spazio immerso) che la linea razionale normale d' ordine n.

(2) Op. cit., Bd. I, pag. 569.

(3) Occorre tener presente che oltre le linee unite luogo di punti uniti, possono esservi linee unite non luogo di punti uniti (contenenti due punti uniti fissi), come ad es. la retta congiungente due punti uniti.

3. In un gruppo ∞^2 d'omografie spaziali esistono due curve unite luogo di punti uniti C_1 e C_2.

Se si assume come unito un punto della C_1, tutte le omografie del gruppo che hanno il detto punto unito formano un sottogruppo ∞^1; quelle ∞^1 omografie hanno gli stessi punti uniti e quindi un determinato punto unito sulla C_2 (fuori di quello fisso): così ad un punto di C_1 corrisponde un punto di C_2 e viceversa e le rette congiungenti i punti corrispondenti formano una rigata; le ∞^2 omografie del gruppo scambiano fra loro le generatrici della rigata.

Ora gli elementi (rette) dello spazio possono farsi corrispondere proiettivamente ai punti d'una quadrica in S_5; allora alla rigata in questione corrisponde sulla quadrica una linea con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, e però una linea algebrica razionale normale in S_5 o in uno spazio immerso con un numero minore di dimensioni (cfr. la nota al § 2). Si conclude che la rigata luogo delle rette congiungenti i punti corrispondenti delle linee unite C_1, C_2 è algebrica e perciò la corrispondenza fra i punti delle due linee razionali C_1, C_2 è una proiettività binaria.

Una conseguenza immediata della considerazione precedente è che: « *Le omografie d'un gruppo ∞^2 non possono avere due rette unite, luogo di punti uniti, per un punto, senza avere come luogo di punti uniti tutte le rette del fascio iudividuato dalle due dette rette.* » Infatti fra le due rette rimane fissata una proiettività; le congiungenti i punti omologhi inviluppano una conica o un fascio; nel 1° caso la conica tocca ciascuna delle due rette fuori del punto comune e perciò sopra ciascuna retta vi sono i due punti uniti fissi (contro l'ipotesi); nel 2° caso si hanno tre rette unite pel punto comune alle due date e perciò tutte le rette del loro fascio sono unite.

4. — I principii esposti nei §. §. 1, 2, 3, permettono di costruire tutti i gruppi ∞^2 d'omografie senza punti uniti

multipli, ciò che andiamo a fare. Cominciamo dal considerare i gruppi ∞^2 di omografie (generali) con 4 punti uniti (distinti).

I punti uniti o sono fissi per tutte le omografie del gruppo o (se variabili) descrivono curve (cubiche, coniche o rette) su cui è un punto unito fisso ed uno variabile (§. 2): in ogni caso vi è dunque un punto unito fisso.

In 1° luogo si può supporre fissi anche gli altri 3 punti e si ha un caso in cui

a) i 4 punti uniti sono fissi. Due arbitrari gruppi di potenze collo stesso tetraedo unito generano per moltiplicazione un tal gruppo, giacchè se π_1^m, π_2^n (con m, n parametri) sono due siffatti gruppi ∞^1, si ha (per la permutabilità)

$$\pi_1^m \pi_2^n \pi_1^{m'} \pi_2^{n'} = \pi_1^{m+m'} \pi_2^{n+n'} ,$$

e quindi le omografie $\pi_1^m \pi_2^n$ formano un gruppo ∞^2 (del tipo *a*)). Siffatti gruppi (composti d'omografie permutabili) si sono già incontrati nel cap. I. §. 2.

In 2° luogo si potrà supporre che tre soli punti uniti delle omografie del gruppo ∞^2 (da costruirsi) restino fissi; il 3° punto variabile non potrà descrivere che una retta, giacchè se descrivesse un'altra linea (cubica o conica) unita, si dedurrebbe sempre l'esistenza d'una retta (tangente nel punto unito fisso) luogo di punti uniti (§ 2), e perciò almeno due punti uniti delle omografie del gruppo sarebbero variabili. Ora sopra la retta luogo nel punto unito variabile per le omografie del nostro gruppo, vi deve essere un punto unito fisso, quindi la retta stessa deve passare per uno dei tre punti uniti fissi.

Inoltre per il lemma del §. 1, nel piano dei 3 punti uniti il nostro gruppo deve subordinare un sottogruppo ∞^1. Si supponga allora l'esistenza di un tal gruppo, ed in esso si consideri la omografia π cogli invarianti assoluti λ, μ, ν; sieno λ, μ gli invarianti assoluti della omografia subordinata di π sul piano dei 3 punti.

L'omografia π^p ha gli invarianti assoluti λ^p μ^p ν^p. Un altra omografia T del gruppo deve subordinare sul piano dei tre punti uniti fissi una proiettività d' invarianti λ^n μ^n; dico che essa deve avere l' invariante λ^n come 3° invariante appartenente alla retta luogo del punto unito. Per vederlo si consideri la omografia T π^{-n} (e le sue potenze); essa è un'omografia avente come piano di punti uniti il piano dei 3 punti ed avente il centro sulla retta luogo del punto unito; questo centro deve esser mutato in sè (come il gruppo di potenze dell'omologia) dalle omologie del gruppo, e perciò appartiene al piano di punti uniti, quindi la omologia T π^{-n} ha l' invariante assoluto 1. Ora è noto (e si verifica con un semplice calcolo) che il prodotto di due proiettività binarie con un punto unito comune ha come invariante assoluto il prodotto dei due invarianti appartenenti rispettivamente alle proiettività fattori; dunque la T ha appunto ν^n come invariante assoluto appartenente alla retta luogo del punto unito, essendo $\nu^n \nu^{-n} = 1$.

Viceversa tutte le ∞^2 omografie con tre punti uniti fissi, con un punto unito sopra una retta per uno dei detti 3 punti, e cogli invarianti assoluti λ^n μ^n ν^n (dove λ μ ν son costanti ed n un parametro) formano un gruppo per la ricordata legge di moltiplicazione degli invarianti di due proiettività binarie con un elemento comune. Le quantità λ^n μ^n ν^n possono anche esprimersi con ρ, ρ^α, ρ^β dove ρ è un parametro e $\alpha = \log_\lambda \mu$, $\beta = \log_\lambda \nu$. Siamo così condotti al caso:

b) tre punti uniti sono fissi e vi è una retta luogo del 4° punto unito per uno dei tre. Il gruppo ∞^2 è costituito dalle omografie cogli invarianti assoluti ρ, ρ^α, ρ^β (con α, β costanti e ρ un parametro).

In seguito possiamo supporre che le omografie del gruppo ∞^2 da costruirsi abbiamo due soli punti fissi uniti. Ciascuno degli altri descrive una linea (cubica, conica o retta) passante per un punto fisso; si può escludere che uno dei punti uniti variabili descriva una cubica (unita) poichè essa trae con sè l'esistenza di altre due linee (conica e retta) descritte ciascuna da un punto unito variabile (§. 2). Se luogo d'un punto unito è una conica passante pel punto unito fisso 0, l'altro punto unito descrive una retta per 0 (la tangente alla conica): all' infuori di questo caso potranno aversi solo due rette luogo di due punti uniti che non passano per il medesimo punto (§. 3). Analizziamo partitamente le due ipotesi.

Se si hanno due rette unite ciascuna contenente un punto unito fisso, le omografie del gruppo ipotetico debbono mutare in sè una rigata quadrica generata dalle due rette riferite proiettivamente (§. 3). Ora tutte le trasformazioni proiettive in sè d'una rigata quadrica (trasformazioni di prima specie della quadrica) formano un gruppo continuo ∞^6 (1); ciascuna di queste proiettività ha due generatrici unite d'un sistema e due dell'altro. Vi sono dunque ∞^3 omografie (formanti gruppo) che hanno 3 generatrici unite (due in un sistema ed una nell'altra) e tali omografie hanno il medesimo invariante assoluto delle proiettività subordinate sulle due generatrici unite che non s' incontrano giacchè questo è l' invariante assoluto della proiettività binaria che opera sulle generatrici dell' altro sistema. Con considerazioni analoghe a quelle che ci han servito pel caso *b)* vediamo che se un' omografia del gruppo ∞^3 ha rispettivamente gli invarianti assoluti ρ ed r sulle generatrici unite di diverso sistema, un' altra omografia che appartenga con essa ad un sottogruppo ∞^2 di quello ∞^3, deve avere come analoghi invarianti ρ^h ed r^h; tutte le omografie (fra quelle ∞^3 considerate) cogli invarianti ρ^h r^h, o, se si vuole, a a^μ (con μ cost ed a un paramentro) formano reciprocamente un gruppo.

(1) Cfr. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie.* Bd. II,) pag. 356.

Dunque otteniamo un caso:

c) due punti uniti son fissi, gli altri due descrivono due rette per essi e sono le generatrici di uno stesso sistema di una quadrica a cui appartiene la congiungente i due punti. Esiste un effettivo gruppo ∞^2 costituito dalle omografie che mutano in sè una tal quadrica ed hanno invarianti assoluti a, a^μ (μ cost ed a variabile) rispettivamente sulle generatrici unite dei due sistemi.

Sempre avendo due soli punti uniti fissi avevamo vista possibile un'altra ipotesi, quella cioè che vi sia una conica ed una retta (tangente, per uno stesso punto unito fisso. Allora il cono quadrico che proietta la conica dell' altro punto deve essere unito per le omografie dell' ipotetico gruppo ∞^2. Fra le ∞^7 proiettività che mutano in sè il cono quadrico (1), le ∞^3 che mutano in sè una generatrice ed una sezione piana formano un gruppo.

Le omografie di questo gruppo hanno invarianti assoluti ρ ρ^2 (nel piano della conica) ed r. Un sottogruppo ∞^2 si ottiene ponendo $r = \rho^\alpha$ (con α cost) e solo in questo modo (cfr. i casi precedenti).

Dunque vi è il caso:

d) due punti uniti sono fissi, gli altri due descrivono una conica ed una retta (tangente) per uno dei due punti; il cono quadrico che proietta la conica dell'altro punto è mutato in sè stesso. Fra le ∞^3 omografie (formanti gruppo) che soddisfano a tali condizioni formano un gruppo ∞^2 quelle d' invarianti assoluti ρ, ρ^2, ρ^α (con α cost).

Infine le omografie del nostro ipotetico gruppo ∞^2 abbiano un solo punto unito fisso. Per esso non possono passare due rette luogo di punti uniti (§. 2). Due coniche luogo di punti uniti per esso avrebbero la tangente comune unita; se un'omografia che muta in sè due coniche siffatte ha l' invariante assoluto ρ sulla retta unita tangente alle

(1) Cfr. Clebsch-Lindemann, op. cit.

due coniche, essa subordina sulle coniche due proiettività binarie collo stesso invariante assoluto ρ, quindi nei due piani due proiettività cogli stessi invarianti assoluti ρ ρ^2, e però una tale omografia è assiale. Trattando ora delle omografie generali l'unica ipotesi possibile nel nostro caso è dunque che i luoghi dei 3 punti uniti variabili delle omografie del gruppo sieno rispettivamente una cubica, una conica e una retta pel punto unito fisso. Siamo così condotti all'unico caso:

e) un punto unito è fisso. Esiste un effettivo gruppo ∞^2 di omografie che mutano in sè una cubica gobba per il punto (sottogruppo di quello ∞^3 delle trasformazioni proiettive in sè della cubica). Luoghi dei punti uniti delle omografie del gruppo sono la cubica ed in conseguenza (§. 2) una conica e una retta.

5. — Esaurita nel precedente § la considerazione dei possibili gruppi ∞^2 d' omografie generali, andiamo qui a trattare di quelli composti d'omografie assiali.

In una tale omografia oltre l'asse a luogo di punti uniti, vi è la retta unita opposta b inviluppo di piani uniti.

Sia per ipotesi varibile la retta a. Essa descrive una rigata (come un punto unito variabile descrive una linea) mutata in sè dalle ∞^3 omografie del gruppo.

Ora sulla rigata vi è un fascio di linee unite descritte dai punti dell'asse a, le quali sono coniche o rette.

Se le dette linee sono coniche la rigata non può essere un piano, altrimenti si avrebbe nel piano un gruppo di ∞^2 omografie subordinate ed in un tal gruppo non possono esservi altre linee luogo di punti uniti che rette: dunque se quelle linee sono coniche, i piani di due coniche s'incontrano secondo una retta, che non incontra l' asse (variabile) a, la quale è unita per tutte le omografie assiali del gruppo; una tal retta è necessariamente la retta unita b per ciascuna di tali omografie, e però si conclude che la retta b è fissa: del resto ciò emerge anche dal fatto che i piani delle coniche sono uniti per ciascuna omografia assiale del gruppo (non omologica) e però formano un fascio il cui asse è appunto la b. Se invece sulla rigata vi è un fascio di rette unite luogo di punti uniti, su ciascuna di esse deve esservi un punto unito fisso il quale deve esser comune a tutte le rette a, altrimenti il luogo di questi punti sarebbe una linea di punti uniti per tutte le omografie del gruppo e quindi contro il supposto l'asse a sarebbe fisso. Allora il luogo delle rette a è un cono che contiene rette di un'altra schiera oltre le generatrici (cioè quelle luogo di punti uniti) e quindi è un fascio di raggi.

Dualmente si conclude che se la retta b è variabile essa descrive un fascio, se non è fisso l'asse a.

L' ipotesi cho sia fisso l' asse a conduce ad un certo numero di gruppi ∞^2 d'omografie assiali, ed i duali di questi tipi si ottengono supponendo invece che sia fissa la retta b. Così siano condotti ad esaminare le seguenti ipotesi:

f) L'asse e i due punti uniti (isolati) fissi (duale di sè).

g) L'asse ed un punto unito fissi ed il caso duale.

h) L'asse solo fisso ed il caso duale.

l) L'asse e la retta opposta descrivono due fasci uniti (duale di sè).

Come vedremo queste ipotesi conducono tutte ad effettivi gruppi ∞^2 d'omografie assiali. Discutiamo per ordine queste ipotesi.

f) Le omografie assiali che hanno l'asse ed i punti uniti fissi formano un gruppo ∞^2 di omografie permutabili (rete) che può considerarsi come caso particolare del gruppo *a*) d'omografie generali.

g) Se l'asse ed un punto unito son fissi, il luogo dell'altro punto unito è necessariamente una retta pel punto unito o una retta incontrante l'asse: infatti questo luogo è secondo il § 2 una conica o una retta contenente un punto unito fisso ed una conica porterebbe con sè anche l'esistenza d'una retta luogo d'un punto unito variabile.

Si ottengono i due casi *g*) corrispondenti alle due ipotesi che la retta luogo del punto unito variabile passi pel punto unito isolato fisso, o incontri l'asse, come casi particolari di quello *b)* d' omografie generali, ove una delle rette lati del triangolo unito si sostituisca coll'asse di punti uniti.

Gli invarianti assoluti delle omografie assiali del gruppo sono quindi ρ, ρ^α (dove α è cost e ρ un parametro).

Nella 1ª ipotesi la retta unita luogo del punto unito, non incontrando l'asse, è la retta *b* fissa per le omografie del gruppo, sicchè il gruppo è duale di sè stesso.

Nella 2ª ipotesi invece la retta *b* è variabile e descrive il fascio dei raggi che dal punto unito isolato fisso proiettano i punti della retta luogo dell'altro punto unito (variabile). In questo caso dunque il gruppo non è duale di sè stesso (come nella precedente ipotesi) mà si ha un gruppo duale di esso in cui sono fissi i due punti uniti isolati, ed il luogo dell'asse è un fascio col centro in un terzo punto unito fisso il cui piano passa per uno dei tre punti uniti isolati.

h) Se l'asse solo è fisso si avranno due linee luogo di punti uniti, cioè o una conica e una retta che si toccano in un punto dell' asse, o due rette che incontrano l'asse (in punti diversi).

La 1ª ipotesi dà luogo ad un gruppo ∞^2 d' omografie assiali, caso particolare di quello *d*) d'omografie generali.

La 2ª ipotesi dà pure luogo ad un gruppo ∞^2 d'omografie (caso particolare di quello *c)* d'omografie generali) ma queste omografie, che mutano in sè una quadrica ed hanno una generatrice di punti uniti, sono biassali.

l) Supponiamo ora che l'asse e la retta unita opposta *b* descrivano due fasci; questi due fasci debbono avere una retta comune unita. Vi sono così due punti e due piani uniti.

Nel piano unito che non contiene gli assi vi è una retta luogo dell'altro punto unito isolato la quale passa pel centro del fascio degli assi. Così nel detto piano si deve avere un gruppo ∞^2 d'omografie generali con due punti uniti (in cui il luogo dell'altro punto unito è una retta): un tal gruppo si costruisce subito prendendo gli invarianti assoluti ρ, ρ^α delle omografie, (dove ρ è un parametro ed α cost), ed è (nel piano) il gruppo analogo di quello *b*) dello spazio. Fissati così i due invarianti assoluti di due omografie assiali π, τ le quali abbiano gli assi nel fascio assegnato e subordinino due omografie del detto gruppo ∞^2 nell'altro piano unito, si vede subito che le dette omografie generano (per moltiplicazione) un gruppo ∞^2: infatti sieno π_1 τ_1 le omografie che esse subordinano nel piano dei loro assi, π_2 τ_2 quelle subordinate nell'altro piano unito, e sieno rispettivamente ρ r gli invarianti assoluti di π_1 τ_1 e ρ ρ^α, r r^α le coppie di invarianti assoluti di π_2 τ_2 (cioè di π τ), allora si ha che $\pi_1{}^m$ $\tau_1{}^n$ ha l' invariante assoluto ρ^m r^n, $\pi_2{}^m$ $\tau_2{}^n$, ha gli invarianti assoluti ρ^m r^n, $\rho^{\alpha m}$ $r^{\alpha n}$, e quindi π^m τ^n ha appunto gli invarianti assoluti ρ^m r^n, $\rho^{\alpha m}$ $r^{\alpha n}$, e così π^m τ^n . π^a τ^b ha gli invarianti assoluti

$$\rho^{a+m} \, r^{b+n}, \; (\rho^{a+m} \, r^{b+n})^\alpha .$$

Così si vede come il caso *b*) dà luogo ad un gruppo ∞^2 d'omografie assiali duale di sè.

6. — Esaminiamo ora i possibili gruppi ∞^2 di omografie biassiali.

Cominciamo dall'osservare che un gruppo ∞^1 d'omografie biassiali (o d'omologie) è un fascio, giacchè il luogo dei punti trasformati d'un punto è una retta. Ciò posto si rappresentino proiettivamente le ∞^{15} omografie dello spazio sui punti di un iperspazio S_{15} (in modo analogo alla rappresentazione di Stephanos delle omografie binarie) (1).

(1) Cfr. Stephanos, *Memoire sur la raprèsentation des omographies*

Ad un gruppo ∞^2 d'omografie biassali (o d'omologie) corrisponde una superficie rigata di cui le rette corrispondono ai gruppi ∞^1 (fasci) immersi nel gruppo ∞^2; l'identità appartiene a tutti i gruppi ∞^1, e però la superficie rigata di S_{15} è un cono col vertice nel punto che corrisponde all'identità; ma se si moltiplicano le ∞^2 omografie del gruppo per una di esse si produce in corrispondenza una trasformazione proiettiva in sè del cono di S_{15} in cui al vertice viene a corrispondere un altro punto qualunque del cono; dunque il cono è un piano, ossia ogni gruppo ∞^2 d'omografie biassiali (o d'omologie) in S_3 è una rete.

In un tal gruppo il luogo dei trasformati d'un punto è un piano o una linea unita, cioè una retta, e però vi è un fascio di piani uniti per le omografie del gruppo, o una congruenza di rette del 1° ordine. Ma una congruenza del 1° ordine di rette unite per un' omografia biassiale è la congruenza delle rette che si appoggiano ai due assi dell'omográfia, e le rette di questa sono mutate in sè da ∞^1 e non da ∞^2 omografie. Perciò il luogo dei trasformati d'un punto è un piano unito: vi è dunque un fascio di piani uniti per le omografie del gruppo, e quindi (uno solo) degli assi di queste omografie è fisso. Il luogo dell'altro asse è una rigata su cui vi è un altro fascio di rette unito luoghi dei punti uniti d'un asse variabile: una tal rigata è una quadrica o un fascio di rette (unica linea inviluppo piana unita).

Si hanno effettivamente due casi di gruppi ∞^2 d'omografie biassiali che corrispondono rispettivamente a queste due ipotesi, cioè:

m) Gruppo ∞^2 delle omografie biassiali trasformanti in sè una quadrica ed aventi su essa una generatrice di punti uniti (caso particolare di *c*).

binaires. (*Math. Ann*, 22, (1883)) e Aschieri (*Istituto lombardo*, serie 2ª, t. 22, (1889)).

n) Gruppo ∞^2 delle omografie biassiali con un asse fisso e l' altro descrivente un fascio (caso particolare di quello *g*) 2ª ipotesi duale). Questi due gruppi son duali di sè stessi.

7. Finalmente esaminiamo i possibili gruppi ∞^2 d'omologie: secondo il §. 6 essi sono reti.

Per le omografie di gruppo ∞^2 il centro e il piano di omologia non possono essere ambedue fissi perchè vi sono solo ∞^1 omologie che hanno il medesimo centro ed il medesimo piano.

o) Sia fisso il piano d' omologia. Il luogo del centro deve essere una retta.

Si ha effettivamente un gruppo ∞^2 d' omologie aventi uno stesso piano di punti uniti e i centri sopra una retta (unita).

p) Sia fisso il centro d' omologia. Si ha un gruppo duale del precedente in cui l' inviluppo del piano è un fascio.

Non vi sono altri gruppi ∞^2 di omologie. Infatti se il piano ed il centro fossero variabili, il piano descriverebbe un fascio ed il centro una retta luogo di punti uniti incontrante l'asse del fascio (perchè contenente un punto unito fisso : si vede che ∞^2 omologie in tale relazione non possono formare un gruppo riferendosi p. e. al caso particolare metrico di due affinità con diversa obliquità rispetto a due piani paralleli, il cui prodotto non è neppure una affinità avente come piano di punti uniti un piano parallelo ai due.

8. — Possiamo riassumere i resultati precedenti enunciando quali sono tutti i possibili gruppi d'omografie dello spazio (senza punti uniti multipli); nell'enunciato raccolgo insieme (considerandoli come un solo tipo) i gruppi duali l'uno dell' altro.

Ciò posto sussiste il teorema:

Vi sono 13 specie di gruppi ∞^2 di omografie spaziali, di cui 5 composti d'omografie generali, 5 di omografie generali, 5 di omografie assiali, 2 di omografie biassiali, ed 1 di omologie.

Questi gruppi sono i seguenti:

1ª specie. Gruppo d'omografie permutabili sottogruppo del gruppo (*lineare*) ∞^3 *delle omografie con uno stesso tetraedo unito* (*duale di sè*).

2ª Sottogruppo ∞^2 *di un gruppo* ∞^3 *di omografie con 3 punti uniti ed una retta unita per uno di essi* (*duale di sè*).

3.ª Sottogruppo ∞^2 *di un gruppo* ∞^3 *d'omografie trasformanti in sè una quadrica ed aventi su di essa 3 generatrici unite, due d'un sistema e una dell'altro* (*duale di sè*).

4.ª Sottogruppo ∞^2 *di un gruppo* ∞^3 *d'omografie trasformanti in sè un cono quadrico, una sua sezione piana ed una sua generatrice* (*duale di sè*).

5.ª Gruppo delle omografie che mutano in sè una cubica gobba con un punto unito su di essa, sottogruppo di quello ∞^3 *delle trasformazioni proiettive in sè della cubica* (*duale di sè*).

6.ª Gruppo (*rete*) *delle omografie assiali coll'asse e i due punti uniti fissi* (*caso particolare del gruppo di 1ª specie e pure duale di sè*).

7.ª Sottogruppo d'un gruppo ∞^3 *di omografie assiali coll'asse fisso, un punto unito fisso e una retta unita* (*non incontrante l'asse*) *per esso* (*rete duale di sè*).

8.ª Sottogruppo d'un gruppo ∞^3 *di omografie assiali con un punto unito fisso ed una retta unita incontrante l'asse e non passante pel punto unito isolato (caso particolare del gruppo di 2ª specie*) *ed il suo duale.*

9.ª Gruppo delle omografie assiali coll'asse fisso che trasformano in sè una conica che l'incontra e giace in *un altro piano (caso particolare del gruppo di 4ª specie) ed il suo duale.*

10.ª Sottogruppo del gruppo ∞^3 delle omografie assiali che trasformano in sè due fasci di rette con una retta comune ed aventi gli assi in uno dei fasci (duale di sè).

11.ª Gruppo d'omografie biassiali con un asse fisso e l'altro descrivente un fascio (duale di sè).

12.ª Gruppo delle omografie biassiali che mutano in se una quadrica ed hanno una generatrice di esso come asse fisso (caso particolare d'un gruppo di terza specie, duale di sè).

13.ª Gruppo d'omologie col centro fisso ed il piano descrivente un fascio, ed il gruppo duale.

III.

Le superficie con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè stesse.

1. — Se una superficie (non piana) ammette una trasformazione proiettiva in sè questa individua una determinata omografia dello spazio.

Lo studio che vogliamo ora iniziare delle superficie con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè (le quali formano gruppo se la superficie non ha più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè) si riconduce allo studio delle superficie trasformate in sè dalle omografie d'un gruppo ∞^2: queste tranne pei gruppi di 13ª specie (in cui vi è una stella di rette unite e quindi sono uniti tutti i coni della stella) formano un fascio, ogni superficie essendo il luogo dei trasformati d' un suo punto generico: oltre alle superficie del fascio possono esservi anche altre superficie unite *singolari* (in numero finito); esse corrispondono ad integrali singolari delle equazioni differenziali da cui può farsi dipendere il gruppo (secondo Lie).

2. I gruppi di 1ª specie sono stati considerati in sostanza nel §. 2 del cap. I, dove abbiamo riconosciuto che essi sono generabili per moltiplicazione di due arbitrari gruppi ∞^1 collo stesso tetraedro unito (cfr. anche cap. II). Le equazioni dei due gruppi ∞^1 possono assumersi rispettivamente sotto la forma (cap I, § 1).

$$y_1 = x_1 \,,\; y_2 = \rho x_2 \,,\; y_3 = \rho^\mu x_3 \,,\; y_4 = \rho^\nu x_4 \,,$$

e

$$y_1 = x_1 \,,\; y_2 = r x_2 \,,\; y_3 = r^m x_3 \,,\; y_4 = r^n x_4$$

(dove ρ ed r sono parametri μ, ν, m, n quantità fisse). Segue che un'omografia qualunque del gruppo può rappresentarsi colle equazioni

$$y_1 = x_1 \,,\; y_2 = \rho r x_2 \,,\; y_3 = \rho^\mu r^m x_3 \,,\; y_4 = \rho^\nu r^n x_4 .$$

Se determiniamo a, b, c (o valori proporzionali) in modo che sia

$$\begin{aligned} a + b\,\mu + c\,\nu &= 0 \\ a + b\,m + c\,n &= 0 \end{aligned}$$

avremo (eliminando ρ ed r)

(1) $$y_2^a y_3^b y_4^c = t\, y_1^{a+b+c}$$

dove

$$t = \frac{x_1^{a+b+c}}{x_2^a x_3^b x_4^c}$$

è il parametro da cui dipendono le superficie del fascio mutate in sè dalle omografie del gruppo. L'equazione (1) rappresenta una superficie algebrica se a, b, c sono proporzionali a numeri interi (o razionali) ed allora è in sostanza la stessa equazione di quella già trovata per le superficie algebriche con ∞^2 trasformazioni proiettive permutabili in sè.

Le superficie (1) sono considerate nella citata nota dei signori Klein e Lie (1); in coordinate cartesiane la loro equazione può ridursi alla forma

$$x^{\alpha}\ y^{\beta}\ z^{\nu} = \mathrm{cost}$$

e dal punto di vista della geometria differenziale esse sono state studiate da Serret (2).

Come ho detto le superficie (1), in generale trascendenti, sono algebriche se a, b, c sono proporzionali ad interi; in tal caso il gruppo è generabile per moltiplicazione di due sottogruppi ∞^1 algebrici, poichè appunto nel cap. I, §. 2 abbiamo riconosciuto l'esistenza di infiniti gruppi ∞^1 algebrici d'omografie trasformanti in se una superficie algebrica (1); ne segue la razionalità della superficie (1) (cap. I, §. 3).

Qual'è il più ampio gruppo composto di omografie che scambiano fra loro le superficie (1) d'un fascio?

Le omografie d'un tal gruppo (fra cui sono quelle del dato gruppo di 1ª specie) debbono trasformare in sè stesso il gruppo di 1ª specie dato, quindi la domanda equivale all'altra: Qual'è il più ampio gruppo d'omografie che contiene come sottogruppo *eccezionale* (3) un gruppo ∞^2 di 1ª specie.

Ora notiamo in generale che se un dato gruppo T è sottogruppo eccezionale d' un gruppo K le trasformazioni

(1) *Comptes rendus* (1870).

(2) *Journal des Liouville* (t. XII).

(3) Dicesi sottogruppo eccezionale di un dato gruppo (invariante secondo Lie, op. cit.) un sottogruppo trasformato in sè dalle trasformazioni del gruppo.

di K debbono mutare un luogo unito di Γ in un altro luogo unito. Perciò nel nostro caso:

Il più ampio gruppo di omografie che contiene come sottogruppo eccezionale un gruppo di 1ª specie (*ossia di cui le omografie scambiano fra loro le superficie d'un fascio* (1)) *è quello* ∞^3 *delle omografie permutabili collo stesso tetraedo unito* (1).

3. — Per costruire le equazioni delle omografie d' un gruppo di 2ª specie assumiamo un tetraedro fondamentale per le coordinate che abbia 3 vertici nei punti uniti fissi delle omografie del gruppo, ed il 4° vertice sulla retta unita (luogo di punti uniti).

Supponiamo che questa retta (passante per uno dei punti uniti fissi) sia quella che ha per equazioni

$$x_2 = x_3 = 0$$

mentre il piano dei tre punti sia

$$x_4 = 0.$$

Sulla retta si hanno ∞^2 omografie binarie subordinate delle omografie del dato gruppo le quali hanno il punto unito $x_4 = 0$ $x_1 = 1$; queste sono rappresentabili colle equazioni

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \alpha x_4 \\ y_4 &= \rho x_4 : \end{aligned}$$

si vede subito che ρ è l'invariante assoluto di una tale omografia binaria, infatti questo invariante è il rapporto

(1) Cfr. Klein e Lie. « Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen transformationen in sich übergehen ». (*Math. Ann.*, t. IV, op. cit.).

delle radici dell' equazione caratteristica (che dà i punti uniti)

$$\begin{vmatrix} 1-z & \alpha \\ 0 & \rho - z \end{vmatrix} = 0$$

le cui radici sono $z = 1$, $z = \rho$.

Sul piano $x_4 = 0$ le omografie del gruppo debbono subordinare le omografie di un gruppo ∞^1 le quali sono rappresentate dalle equazioni

$$y_1 = x_1\,,\ y_2 = r\,x_2\,,\ y_3 = r^s x_3$$

(con s cost), dove possiamo porre

$$r = \rho^p\ \ r^s = \rho^m.$$

Allora si hanno le equazioni delle ómografie del nostro gruppo ∞^2 date da

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 \equiv x_1 + \alpha x_4 \\ y_2 \equiv \rho^p\, x_2 \\ y_3 \equiv \rho^m x_3 \\ y_4 \equiv \rho x_4\ , \end{cases}$$

dove p, m sono costanti e α, ρ, sono i parametri da cui dipendono le omografie del gruppo.

Queste equazioni, ponendo per $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ le coordinate di un punto dello spazio, rappresentano la superficie trasformata in sè dalle omografie del gruppo che passa per quel punto.

Se nelle (1) si fa $\rho = 1$ abbiamo le equazioni di un gruppo ∞^1 di omologie aventi come piano di punti uniti il piano $x_4 = 0$: questo è un sottogruppo del gruppo (1) trasformato in sè da tutte le omografie (1), cioè un sottogruppo eccezionale del gruppo (1); le omologie di esso hanno il centro sul piano di omologia nel punto O intersezione della 4.^{a} retta unita fuori del piano (su cui subordina l'omografia parabolica $y_1 = x_1 + \alpha\, x_4$, $y_4 = x_4$).

Ora in un tal gruppo di omologie il luogo dei trasformati di un punto è una retta pel centro d'omologia *O*, quindi sopra ogni superficie trasformata in sè dalle omografie del gruppo di 2.ª specie (1) (diremo brevemente sopra una superficie di 2.ª specie), vi sono ∞^1 rette pel punto *O*. Si conclude:

Le superficie di 2.ª specie sono coni col vertice in O. *Le omografie che le mutano in sè scambiano fra loro le generatrici come elementi d'un sistema di imprimitività.*

Come si vede subito:

La condizione di algebricità dei coni di 2.ª specie è che p, m *sieno razionali.*

Allora il cono è razionale e le sezioni piane della superficie sono rappresentate sul piano dalle curve razionali

$$a\,(x_1 + \alpha\, x_4) + b\, r^s x_2 + c\, r^t + d\, r^k = 0$$

dove α, r sono le coordinate dei punti del piano, ed s, t, k numeri interi con $\frac{s}{k} = p$, $\frac{t}{k} = m \left(r = \rho^{\frac{1}{k}} \right)$.

La razionalità della superficie consuona con un teorema del cap. I § 3: la razionalità delle sezioni piane è d'accordo col fatto che la superficie è rigata.

Un cono di 2.ª specie (algebrico o nò) ammette un gruppo di trasformazioni proiettive in sè che cambiano le sue generatrici, inoltre ogni cono è trasformato in sè dalle ∞^4 omologie col centro nel vertice; moltiplicando le omologie del gruppo di 2ª specie per le omografie si deduce:

Un cono di 2ª specie ha ∞^5 trasformazioni proiettive in sè formanti gruppo. Se ne ha ∞^6 (le quale operano sulle generatrici elementi della stella come ∞^2 proiettività ternarie) esso ne ha ∞^7 ed è un cono quadrico (1).

(1) Questo fatto è duale di quello che una curva piana (non retta) con ∞^2 trasformazioni proiettive in sè è una conica.

Qual' è il più ampio gruppo di omografie che contiene come sottogruppo eccezionale un gruppo di 2^a specie ? (cfr. §. precedente). Le omografie di esso debbono trovarsi fra le ∞^4 cogli stessi luoghi uniti

$$(2)\quad \begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha x_4 \\ y_2 = r x_2 \\ y_3 = s x_3 \\ y_4 = \rho x_4\ ; \end{cases}$$

ma tutte queste omografie trasformano un'omografia (1) in un'altra cogli stessi invarianti assoluti e però in un'omografia (simile) del gruppo (1).

Dunque: *Il più ampio gruppo di omografie che contiene come sottogruppo eccezionale un gruppo di 2^a specie è quello lineare ∞^4* (2).

4. — Per costruire le equazioni delle omografie d'un gruppo di $3.^a$ specie prendiamo come retta $x_2 = x_3 = 0$ la generatrice unita della quadrica trasformata in sè, congiungente i due punti uniti fissi, e come rette $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = x_4 = 0$ rispettivamente le altre due generatrici unite; finalmente prendiamo come retta $x_1 = x_4 = 0$ una generatrice della quadrica dello stesso sistema della

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Sulla retta $x_1 = x_2 = 0$ si ha una proiettività subordinata di un'omografia del gruppo, data da

$$(1)\qquad y_1 \equiv x_1 + \alpha\, x_2 \quad y_2 \equiv \rho\, x_2,$$

e questa ha l'invariante assoluto ρ (cfr. § precedente) parimente la proiettività subordinata d'un'omografia del gruppo sulla retta $x_3 = x_4 = 0$ è d'invariante assoluto ρ ed ha per equazioni

$$(2)\qquad y_4 \equiv x_3 + \beta\, x_4 \quad , \quad y_3 \equiv \rho\, x_3$$

Ma se queste proiettività sono subordinate di un'omografia del gruppo i punti uniti di esse (che stanno sopra una generatrice della quadrica) si corrispondono proiettivamente, quindi i parametri $\frac{\alpha}{\rho - 1}$ e $\frac{\beta}{\rho - 1}$ da cui dipendono i detti punti uniti sono legati da una relazione bilineare

$$\mathrm{A}\left(\frac{\alpha}{\rho - 1}\right)\left(\frac{\beta}{\rho - 1}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{\rho - 1}\right) + \mathrm{C}\left(\frac{\beta}{\rho - 1}\right) + \mathrm{D} = 0 \ .$$

Ma tenendo conto che i due punti di riferimento sull'una retta corrispondono ai due punti di riferimento dell'altra si ha $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{D} = 0$: la relazione precedente può dunque scriversi.

$$\beta = k\alpha \qquad \left(k = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right) \ ,$$

e disponendo opportunamente del punto unità $\beta = \alpha$.

Finalmente sulla retta $x_2 = x_3 = 0$ le proiettività subordinate delle omografia del gruppo hanno per equazioni

$$(3) \qquad y_1 \equiv x_1 \quad , \quad y_4 \equiv r\, x_4 :$$

l'invariante assoluto r di una tale proiettività è legato a ρ dalla relazione $r = \rho^p$ con p cost.

Si deduce che le equazioni delle omografie d'un gruppo di 3.ª specie sono le

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha x_2 \\ y_2 = \rho x_2 \\ y_3 = \rho^{p+1} x_3 \\ y_4 = \rho^p x_3 + \alpha \rho^p x_4 . \end{cases}$$

Quì ponendo $\rho = 1$ (analogamente al § precedente) si ottiene un sottogruppo eccezionale di omografie biassiali coi due assi infinitamente vicini alla retta (a) $x_2 = x_3 = 0$. Si deduce come nel § precedente che:

Le superficie di 3.ª specie sono rigate con due direttrici infinitamente vicine alla retta a.

Si vede pure:

Esse sono algebriche allora ed allora soltanto quando p *è razionale* (*ed allora son razionali*).

La direttrice a delle rigate di 3.ª specie è multipla per esse tranne che esse si riducano a quadriche (prendendo $p = 1$), le omografie biassiali cogli assi dati da a e dalla generatrice infinitamente vicina della quadrica (direttrici della rigata) sono ∞^1, quindi la rigata (di 3.ª specie) non ammette più che ∞^1 trasformazioni proiettive che mutino in sè le sue generatrici (escluso il caso che sia una quadrica): se esse è trasformata in sè da più che ∞^2 omografia queste operano come le proiettività binarie di un gruppo ∞^2 o più ampio sulle generatrici; ora gli elementi (rette) della congruenza lineare che ha per direttrici le due infinitamente vicine della rigata sono riferibili proiettivamente ai punti d'un cono quadrico, ed una linea con più che ∞^1 trasformazioni proiettive in sè sul cono quadrico è una cubica gobba o una conica, o una retta; ne segue che *se la rigata non è algebrica di grado 3 o 2* (0-1) *essa non ha più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè.* Risulta poi dal cap. IV che soltanto quando essa è una quadrica una rigata di 3.ª specie ha più di ∞^2 trasformazioni proiettive in sè.

La ricerca del più ampio gruppo d'omografie che contenga come sottogruppo eccezionale il gruppo (4) si compie facilmente (in modo analogo ai §§ precedenti) e si trova *che questo gruppo è quello ∞^3 algebrico del 2.° ordine* di cui le omografie hanno le equazioni

$$(5)\quad \begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha x_2 \\ y_2 = \rho x_2 \\ y_3 = r x_3 \\ y_4 = r x_3 + kr\alpha x_4 \end{cases} .$$

5. — In modo analogo a quello usato nei §§ precedenti si troverebbero le equazioni delle omografie di un gruppo di 4.ª specie e quindi delle sue superficie unite di 4.ª specie), ma è più semplice trarre la deduzione fondamentale relativa a queste superficie dalle considerazioni seguenti.

Ricordiamo che si hanno come enti uniti: un cono quadrico, una sua generatrice a, un punto o sopra a (oltre il vertice), una sezione piana β per o e la sua tangente b. Tra le ∞^3 omografie che hanno questi enti uniti costituiscono un gruppo di 4.ª specie (∞^2) quelle che avendo sulla b una proiettività subordinata d'invariante assoluto ρ, hanno sulla a una proiettività subordinata d'invariante assoluto ρ^p, (con p costante). Sulla a vengono subordinate ∞^1 proiettività, ciascuna delle quali è subordinata di ∞^1 omografie del gruppo; quelle che subordinano l'identità sopra a ($\rho = 1$) formano nel gruppo dato un sottogruppo eccezionale. Queste sono le ∞^1 omografie assiali il cui asse (luogo di punti uniti) è a e di cui b è la retta unita opposta all'asse (inviluppo di piani uniti).

Per queste ∞^1 omografie assiali in ogni piano unito per la b vi è una conica unita sezione del cono, quindi ogni punto è trasformato dalle ∞^1 omografie nei punti di una conica quadritangente e perciò: *Le superficie di 4.ª specie contengono un fascio di coniche i cui piani passano per la* b, *quadritangenti al cono quadrico.*

È facile vedere che *le superficie di 4.ª specie non ammettono in generale altre trasformazioni proiettive in sè oltre quelle del gruppo di 4.ª specie:* ciò risulterà dai teoremi del cap. IV.

Una superficie di 4.ª specie può generarsi partendo da una delle sue coniche e trasformandola colle omografie d'invarianti assoluti ρ, ρ^p (p cost) d'un sottogruppo ∞^1 nel gruppo di 4.ª specie: si vede quindi che *le superficie di 4.ª specie sono algebriche se* p *è razionale,* cioè se sono algebriche le linee unite di uno (e quindi di ogni altro) sottogruppo ∞^1 del gruppo ∞^2 di 4.ª specie. Ciò si conformerebbe analiticamente in modo analogo al § precedente.

Il più ampio gruppo d'omografie in cui un gruppo di 4.ª specie è contenuto eccezionalmente è quello ∞^3 che muta in sè la a, *la* b, *il cono e la sua sezione piana unita,* giacchè un tal gruppo deve mutare in sè questi luoghi e d'altra parte le omografie di esso trasformano un'omografia d'invarianti $\rho\ \rho^p$ in una analoga, e perciò un sottogruppo di 4.ª specie in sè stesso.

6. — Un gruppo di 5.ª specie è individuato dalla cubica gobba unita e dal punto unito su di essa: invero vi è una determinata omografia che muta in sè una cubica gobba e subordina su di essa una data proiettività (binaria), e le proiettività con un punto unito sulla cubica formano un gruppo ∞^2 (rete): il gruppo d'omografie che nasce così nello spazio è algebrico. Un piano incontra la cubica unita in 3 punti di cui in 6 modi se ne può riferire 2 a 2 punti dati sulla cubica; ciò vuol dire che il sistema ∞^2 dei piani trasformato di un piano è di 6.ª classe (sega una serie d'indice *6* sulla cubica): parimente sussiste la proprietà duale.

Dunque:

Le superficie di 5.ª specie sono algebriche di 6.º ordine (e 6.ª classe).

Si possono riferire biunivocamente i punti d' una superficie di 5.ª specie (considerati come corrispondenti di un punto O di essa nelle omografie del gruppo) alle proiettività binarie subordinate di quelle omografie sulla cubica unita, le quali formano una rete: allora ai fasci di proiettività della rete corrispondono cubiche gobbe sulla superficie, giacchè un tal fascio si muta in un gruppo ∞^1 moltiplicandolo per l' inversa d' una proiettività del fascio (di guisa che il nuovo fascio venga a contenere l'identità); e le omografie che subordinano le proiettività d'un gruppo ∞^1

sulla cubica formano un gruppo ∞^1 e mutano in sè ∞^2 cubiche gobbe. Si ha dunque sopra una superficie di 5.ª specie una rete omoloidica di cubiche gobbe e perciò essa è rappresentabile sul piano mediante le cubiche piane per 3 punti come immagini delle sezioni piane; ne segue:

Le superficie di 5.ª specie sono a sezioni (piane) ellitiche.

Queste superficie godono di eleganti proprietà che qui non mi tratterrò ad esporre.

Il sistema lineare di cubiche rappresentativo della superficie nel piano è mutato in sè da ∞^2 proiettività: una retta ad arbitrio può assumersi come unita per una tale proiettività ed allora vi è un fascio di rette unite; infatti le cubiche gobbe corrispondenti alle rette del piano sulla superficie sono quelle che ammettono ∞^1 trasformazioni proiettive in sè del gruppo di 5.ª specie. Segue che nel piano le dette ∞^2 proiettività sono omologie (giacchè altrimenti le rette unite per esse sarebbero solo ∞^1); queste omologie hanno il centro variabile e però (come nel cap. II, § 7) si conclude che l'asse è fisso ed il centro descrive una retta: questa retta (luogo di punti uniti) dalle ∞^3 cubiche del nostro sistema non può essere intersecata che in un sol punto il quale risulta unito per le ∞^2 omologie, e perciò tutte *le cubiche piane hanno un flesso e la tangenti di flesso a comune.* Si deduce che *sulla superficie vi è una sola rete omaloidica di cubiche gobbe* (quella già considerata), *un solo fascio di coniche* ecc.

Si ha poi: *Un gruppo di 5.ª specie non è contenuto eccezionalmente in un altro più ampio.*

7. — **Esauriremo** ora brevemente l'esame delle superficie trasformate in sè da uno degli altri gruppi d'omografie (di specie >5). *I gruppi 6.° e 7.° sono reti quindi le superficie unite sono piani.* Il gruppo di 8.ª specie è caso particolare di quello di 2.ª (per $p=0$) quindi

le sue superficie unite sono coni; esso ha una retta di punti uniti quindi *pel gruppo duale le superficie unite sono i piani d'un fascio. Nel gruppo di 9.ª specie le superficie sono i coni quadrici proiettanti dai punti dell'asse la conica unita: nel gruppo duale sono piani.*

Il gruppo di 10.ª specie ha una retta unita sulla quale subordina un gruppo ∞^1; le omografie di esso che subordinano su di essa l'identità formano un sottogruppo eccezionale ∞^1 composto di omologie il cui piano di punti uniti è quello contenente gli assi delle omografie assiali del gruppo, ed il cui centro è sul detto piano; analogamente al caso dei gruppi di 2.ª specie si vede che *le superficie unite sono coni col vertice sul piano nel punto sezione della retta luogo del punto unito isolato.*

Per un gruppo di 11.ª specie le superficie unite sono i piani per l'asse fisso.

Il gruppo di 12.ª specie ha per superficie unite il fascio dei piani per l'asse.

Il gruppo di 13.ª specie ha un numero arbitrariamente infinito di coni uniti col vertice nel centro: il duale ha un fascio di piani uniti.

7. Rimane ancora che ci occupiamo delle superficie *singolari* con un gruppo di ∞^2 trasformazioni proiettive in sè. Queste ammettono come gruppo di trasformazioni proiettive in sè quello ∞^r ($r \geq 2$) che contiene eccezionalmente il gruppo dato e perciò risulta che *pei gruppi di 1.ª specie sono piani, per quelli di 2.ª sono pure piani, per quelli* di *3.ª una quadrica e due piani, per quelli di 4.ª un cono quadrico e due piani.*

Il gruppo di 5.ª specie non è contenuto eccezionalmente in altri, ma dalla costruzione data per le superficie unite (come inviluppo di piani) risulta (ciò che del resto è chiaro) che *le superficie unite singolari sono la sviluppabile cubica, il cono quadrico che proietta la cubica dal* *punto unito e il piano usculatore unito:* la 1.ª di queste superficie ha ∞^3 trasformazioni proiettive in sè.

Quanto ai gruppi delle altre specie si vedrà analogamente che *le superficie unite singolari sono soltanto piani,* determinando (secondo il metodo stabilito) il più ampio gruppo che li contiene eccezionalmente.

8. — Ora possiamo dai resultati precedenti cavar fuori la seguente conclusione:

Le sole superficie che ammettano ∞^2 trasformazioni proiettive in sè e non più, sono:

a) superficie di 1,ª specie (di Klein e Lie);

b) rigate di 3.ª specie;

c) superficie con un fascio di coniche della 4.ª specie;

d) superficie algebriche del 6.° ordine di 5.ª specie.

Infatti le altre superficie con ∞^2 trasformazioni in sè sono coni, o piani, o quadriche, o sviluppabili cubiche che ammettono più trasformazioni proiettive in sè stesse.

IV.

Le superficie con più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè stesse.

1. — Vogliamo ora esaminare le superficie che ammettono più che ∞^2 trasformazioni in sè le quali formeranno un gruppo ∞^n con $n > 2$.

Se la superficie non è un piano (come supponiamo) vi è su di essa un sistema ∞^1 d'indice *2* di curve asintotiche (che può anche essere spezzato in due fasci) e le omografie del gruppo ∞^n scambiano fra loro o in sè stesse le asintotiche del sistema (ed eventualmente quelle di ciascun fascio)

Se tutti i punti della superficie sono ellittici si trasformerà prima la superficie in un' altra per cui ciò non avvenga mediante una proiettività immaginaria. Presa ad arbitro un'asintotica vi è dunque un gruppo di ∞^{n-1} omografie che la mutano in sè stessa: poichè $n > 2$, segue che le asintotiche della superficie sono cubiche gobbe, o linee piane (non rette) o rette.

1.ª *ipotesi.* Le asintotiche della superficie sieno (se è possibile) cubiche gobbe. La superficie è mutata in sè da ∞^{n-1} omografie che trasformano in sè una cubica gobba $(n > 2)$: si ha dunque $n = 3$, o $n = 4$.

Nel 1.° caso la superficie non essendo una di quelle di 5.ª specie (cap. precedente) che hanno solo ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, è una sviluppabile cubica o un cono quadrico (essendo escluso il piano); nel secondo caso essa non può essere che una sviluppabile cubica; nessuna di queste 2 superficie ha per asintotiche cubiche gobbe, e quindi la 1.ª ipotesi è assurda.

2.ª *ipotesi.* Le asintotiche della superficie sieno (se è possibile) linee piane non rette. Gli ∞^1 piani di queste linee generano una sviluppabile mutata in sè da ∞^n $(n > 2)$ omografie, e perciò una sviluppabile cubica, un cono o un fascio di piani. Se le ∞^n $(n > 2)$ omografie del gruppo mutano in sè una sviluppabile cubica esse non mutano in sè altra superficie e però la nostra superficie sarebbe una sviluppabile cubica le cui asintotiche sono rette (contro l'ipotesi). Se invece le dette ∞^n omografie mutano in sè un cono, si supponga dapprima che tra esse ve ne sieno ∞^1 almeno che mutano in sè ciascun piano; allora queste mutano in sè tutte le rette pel vertice del cono (intersezione di due piani tangenti) e perciò sono omologie: la superficie mutata in sè stessa deve essere un cono ed un cono ha per asintotiche le rette sue generatrici (contro il supposto). Si supponga al contrario che ciascuna delle ∞^n omografie scambi tra loro i piani del cono; allora il cono deve essere un cono quadrico; si verifica quindi che l'ipotesi fatta è assurda poichè non esiste un gruppo ∞^n (con $n > 2$) di omografie scambianti fra loro le generatrici del cono, a cui non appartengono infinite omologie. Invero un tal gruppo sarebbe un sottogruppo eccezionale ∞^3 del gruppo del cono: che non esista un sottogruppo siffatto si verifica considerando un gruppo duale di quello del cono, cioè quello delle similitudini. Cfr. C. Jordan: « Sur les groupes des mouvements » *(Ann. di Mat.*, t. II).

Finalmente è assurdo che tutti i piani delle asintotiche, che sono tutti i piani tangenti alla superficie, formino un fascio. Dunque è assurda anche la 2.ª ipotesi.

2.ª *ipotesi.* L'unico caso possibile (per ciò che abbiamo visto) è che si verifichi la 3.ª ipotesi, ossia in una superficie mutata in sè da ∞^n omografie (con $n > 2$) le asintotiche sono necessariamente rette, e però la superficie stessa è rigata.

Il piano tangente in un punto generico alla rigata (che contiene la [o le] generatrici per esse) tocca la superficie in quel punto solo, oppure in tutti i punti della generatrice.

Nel 1.° caso vi è un'altra asintotica per il punto diversa dalla prima generatrice e questa è ancora una retta, quindi la superficie è una quadrica.

Nel 2.° caso la superficie è sviluppabile e poichè è mutata in sè da più che ∞^2 omografie è un cono o una sviluppabile cubica.

Concludiamo:

Le superficie che ammettono più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè sono le seguenti:

a) Il piano mutato in sè da ∞^{12} omografie dello spazio;

b) la quadrica mutata in sè da ∞^6 omografie;

c) i coni che hanno ∞^4 trasformazioni omologiche in sè, ed in particolare i coni con ∞^5 trasformazioni proiettive in sè e il cono quadrico con ∞^7;

d) la sviluppabile cubica con ∞^3 trasformazioni proiettive in sè.