Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica

Atti Acc. Sci. Torino **XXIX** (1893-94), pp. 275-296.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

SULLA

MASSIMA DIMENSIONE

DEI

SISTEMI LINEARI DI CURVE

DI

DATO GENERE

APPARTENENTI

AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

NOTA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1894

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. XXIX.
Adunanza del 28 Gennaio 1894

Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

Il signor Castelnuovo („ Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere „, *Annali di Matematica*, t. XVIII) ha risoluto completamente la questione di determinare la massima dimensione d'un sistema lineare di curve piane di genere $p > 1$, assegnando il massimo $r = 3p + 5$ per la nominata dimensione e classificando colla riduzione a *tipi* i sistemi per cui questo massimo è raggiunto (1). Risulta poi dai lavori del signor Guccia („ Circolo Matematico di Palermo, t. I „) che per $p = 0$ non si ha alcun massimo per la dimensione d'un sistema lineare di curve piane (razionali), e per $p = 1$ si ha il massimo $r = 9$ raggiunto dal sistema delle cubiche (e suoi trasformati).

In questa nota io mi propongo di risolvere la questione generale di determinare (ove esista) la massima dimensione di un sistema lineare di curve di genere p sopra una qualunque superficie algebrica. Il punto di partenza della ricerca è il successivo uso delle proiezioni di una superficie (in un iperspazio) da un piano tangente, cioè il metodo dei sigg. Del Pezzo e Castelnuovo, il quale ultimo veramente (l. c.) impone alle curve del sistema lineare del piano un nuovo punto doppio, cosa equivalente alla proiezione da un piano tangente della superficie razionale rappresentata. Il resultato principale a cui giungo nei §§ 5 e 6 (in base ad alcuni lemmi stabiliti in principio) è il seguente:

Se sopra una superficie esiste un sistema lineare di genere p ≥ 0 *e dimensione*

$$r \geq 3p + 5,$$

---

(1) Prima di lui il sig. Jung assegnò il limite superiore $5p + 3$ per la dimensione d'un sistema di curve piane di genere $p > 1$. Cfr. Castelnuovo (l. c.).

1° *la superficie è riferibile biunivocamente ad una rigata di genere* p ($r \geq 3p + 5$),

2° *oppure* $r = 3p + 5$ *od anche* $r = 9$ *per* $p = 1$, *e la superficie è razionale.*

Nel 2° caso il sistema lineare è uno di quelli indicati dal signor Castelnuovo (l. c.).

È poi chiaro che non si può assegnare un massimo di r se la superficie è riferibile ad una rigata di genere p, giacchè una rigata di dato genere p può essere proiezione di una rigata di ugual genere appartenente ad uno spazio di dimensione comunque elevata (Segre, " Math. Annalen ", 34).

Il teorema prima enunciato risponde anche ad una questione di geometria sopra una superficie che mi si è presentata nelle mie " Ricerche di geometria sopra una superficie algebrica " (1) (cfr. il § 7 di questa nota). Ivi ho posto (come estensione del concetto di serie g_n^r *completa* sopra una curva) il concetto di sistema lineare *normale* di dato *grado* (cioè di sistema lineare di curve non contenuto in un sistema più vasto di ugual grado)

---

(1) Accademia di Torino, *Memorie*, 1893. Nel seguito citerò questo lavoro col titolo " Ricerche ".

Ricordo qui le poche nozioni di geometria sopra una superficie (debitamente citate a suo luogo) che ho occasione di invocare avanti l'ultimo § (cfr. " Ricerche ", cap. I, § 1). Se la curva generica di un sistema lineare si spezza, o si spezza in parti fisse ed in una componente variabile irreduttibile, o si compone (oltre eventuali componenti fisse) di più curve irreduttibili d'un *fascio* (sistema razionale o no di cui passa *una* curva per un punto generico). In un sistema lineare ∞^r, con $r > 1$, irreduttibile (a meno di parti fisse che s'immaginano tolte), dicesi *grado* il numero (> 0) delle intersezioni variabili di due curve. (Un sistema che si compone delle curve d'un fascio non ha un grado (> 0)). Dicesi *genere* il genere della curva irreduttibile del sistema.

Sopra una superficie F un sistema lineare irreduttibile di *dimensione* $r > 2$ (cioè ∞^r) è rappresentativo di una superficie semplice o multipla F′ (trasformata della data F) ottenuta riferendo proiettivamente le curve del sistema agli iperpiani (S_{r-1}) di S_r. Se la F′ è semplice il dato sistema dicesi *semplice;* in caso opposto si dice che *appartiene all'involuzione di grado m*, i cui gruppi corrispondono su F ai punti di F′; il passaggio d'una curva generica del sistema per un punto di F trae allora il passaggio di essa per gli altri $m - 1$ punti del gruppo della involuzione determinato dal dato punto.

ed il concetto di sistema lineare *completo* di dato *genere* (cioè di sistema lineare di curve di dato genere non contenuto, nemmeno parzialmente, in un sistema più ampio di ugual genere). Allora si presentano subito le questioni; 1°) se un sistema (lineare) di dato grado appartenga sempre ad *un* sistema normale (di ugual grado); 2°) se una curva (o un sistema) di dato genere appartenga sempre ad *un* sistema completo (di ugual genere).

La prima questione viene risoluta affermativamente nel cap. I delle " Ricerche ", e per i sistemi *semplici* conduce al teorema proiettivo:

" Una superficie di un dato spazio S_r ($r \geq 3$) è sempre proiezione (da un certo numero $k \geq 0$ di punti esterni) di *una* superficie normale dello stesso ordine (proiettivamente determinata) appartenente ad uno spazio con un conveniente numero di dimensioni ($\geq r$) " (1).

La seconda questione viene risoluta affermativamente nel cap. II delle " Ricerche " soltanto per le superficie di genere $P > 0$, e la sua risoluzione in ogni caso dipende (per i resultati del cap. I ricordati nel § 7 di questo lavoro) dalla determinazione di un massimo della dimensione pei sistemi di dato genere sopra una superficie. Come conseguenza del teorema di questa nota sopra enunciato si ricava dunque (§ 7):

" Sopra una superficie non riferibile biunivocamente ad una rigata di genere p una curva (o un sistema lineare) di genere p appartiene sempre ad *un* sistema lineare completo di ugual genere (di dimensione ≥ 0) ".

L'applicazione del teorema ai sistemi semplici dà il teorema proiettivo:

" Data una superficie non rigata in uno spazio S_r ($r \geq 3$) esiste *una* superficie (proiettivamente determinata) a sezioni iperplanari dello stesso genere in uno spazio S_r' ($r' \geq r$) che dà come proiezione la superficie primitiva, mentre non può considerarsi come proiezione di una superficie a sezioni dello stesso genere appartenente ad uno spazio superiore ".

Le rigate fanno eccezione al teorema, perchè, come è stato

(1) Per le rigate questo teorema è dovuto al sig. Segre, " Rendiconti Lincei, 1887 " e " Mathematische Annalen ", Bd. XXXIV.

già ricordato, una rigata può ottenersi come proiezione univoca di un'altra appartenente ad uno spazio elevato quanto si vuole (Segre, l. c.).

Osserverò che alla precedente proposizione si giungerebbe applicando un teorema del § 2, cap. I delle " Ricerche „ (con qualche opportuna considerazione) ricordando che la proiezione di una superficie da un punto semplice possiede una retta, immagine del centro di proiezione. Ma è essenziale stabilire il teorema per ogni sistema semplice o no di dimensione ≥ 0, a fine di poter affermare (ove è il caso) l'esistenza d'un sistema lineare completo data una sua curva.

Infine si giungerebbe per tal via a vedere l'esistenza d'un massimo per la dimensione d'un sistema semplice sopra una superficie (non rappresentativo d'una rigata), ma non alla determinazione di questo massimo.

1. Poniamo a base della ricerca alcuni lemmi:

1° lemma. — Se il piano tangente in un punto generico ad una superficie (*algebrica*) *di* S_r ($r > 3$) *sega la superficie secondo una curva, la superficie è rigata* (enunciato dal sig. Del Pezzo).

Sia F una superficie di S_r ($r > 3$) e supponiamo che essa non sia sviluppabile, giacchè in questo caso il teorema sarebbe senz'altro verificato.

In ogni punto O della F vi sono ∞^1 tangenti che generano il piano π tangente in esso punto alla F; un iperpiano (S_{r-1}) per il piano π tocca in O la F. La superficie può proiettarsi univocamente in una F′ di un S_3 da punti esterni, cioè da un S_{r-4} che non la sega, ed allora gli iperpiani tangenti alla F per lo S_{r-4} segano lo S_3 secondo i piani tangenti della superficie proiezione F′. Un piano generico tangente alla F′ (non sviluppabile) non può toccare la F′ in un altro punto semplice variabile col primo e diverso da esso; ciò riesce chiaro pensando che dualmente non può darsi che ogni punto d'una superficie inviluppo sia multiplo senza che la superficie si riduca ad una contata più volte; ne segue che un iperpiano generico tangente alla F di S_r in un punto non la tocca in un altro punto diverso dal primo e variabile con esso.

Si supponga che il piano π tangente alla F nel punto generico O, seghi la F secondo una curva C: un iperpiano generico per π sega la F fuori della C secondo una curva K che incontra certo la C nel punto O (di contatto per l'iperpiano) se esso non è doppio per C, ma in ogni caso non incontra la C in altri punti variabili coll'iperpiano per π: variando l'iperpiano per π, varia la K descrivendo un sistema lineare ∞^{r-3}; se alla K si impone di contenere un qualunque ulteriore punto O' della C, dalla K si stacca la C e si ha come residuo di esso un sistema lineare ∞^{r-4}. Ciò è quanto dire che fra gli ∞^{r-3} iperpiani per π in S_r ve n'è ∞^{r-4}, passanti per uno spazio S_3, i quali toccano la F in tutti i punti della curva C, e quindi contengono tutti i piani π' tangenti alla F nei punti O' della C; ne segue che tutti questi piani π' stanno nel nominato S_3. Ma per ipotesi ogni piano π' tangente alla F in O' sega la F secondo una curva C'; questa curva C' appartiene allo S_3 tangente alla F in tutti i punti della C, onde (poichè la F non appartiene al detto S_3) la curva C' non può variare col punto O' e col piano π' e però deve esser comune a tutti i piani π' tangenti nei punti O' della C; d'altra parte i piani π' non possono tutti coincidere, cioè debbono variare con O', altrimenti la F sarebbe sviluppabile; dunque la curva C' sezione della F col piano tangente in O', ed in particolare la C sezione del piano tangente in O, è la retta comune ai piani π' (ed a π). Così risulta che la F è rigata *cdd.*

Il teorema inverso di quello ora stabilito è evidente.

2. *2° lemma. — Se una superficie* F *appartenente ad un* S_r *(dove* $r > 4$*) vien segata da un iperpiano tangente generico secondo una linea spezzata, la* F *è una rigata o una superficie di Veronese* (1) *in* S_5 *(del 4° ordine).*

Questo lemma si può dimostrare fondandosi sul precedente e sulla nota proprietà dei sistemi lineari di curve riduttibili di essere composti mediante i gruppi di curve variabili d'un fascio, o mediante componenti fisse e componenti variabili irreduttibili (2); si può infatti vedere che le componenti irreduttibili

(1) Studiata dai signori Veronese e Segre. Cfr. Veronese, " Accad. dei Lincei — Memorie, 1884 " e Segre, " Atti accademici di Torino, 1885 ".

(2) Noether, " Math. Ann. ", VIII; Enriques, " Ricerche ", cap. I, § 1. Pei sistemi piani il teorema è stato dimostrato dal sig. Bertini, " Istituto lombardo, 1882 ".

delle sezioni della F non rigata cogli iperpiani tangenti in un punto (che hanno per immagini le generatrici della rigata proiezione della F dal punto) generano, variando il punto, una rete omaloidica di curve piane e riferendo queste alle rette del piano si ottiene una rappresentazione della F in cui le immagini delle sezioni iperplanari sono coniche; ma ometteremo i dettagli della dimostrazione perchè il lemma enunciato è contenuto come caso particolare in un teorema recentemente stabilito dal sig. Castelnuovo secondo il quale una superficie non rigata di S_3 segata da ogni piano tangente secondo una curva spezzata, è una superficie (romana) di Steiner (1). Invero la F che soddisfa alle condizioni dell'enunciato può proiettarsi in modo univoco (da punti esterni) in una F′ dello stesso ordine di S_3, e la F′ risulta appunto segata da ogni piano tangente secondo una curva spezzata; poichè la F′ (proiezione arbitraria della F) è rigata o è una superficie di Steiner, si deduce che la F è rigata o è una superficie di Veronese (del 4° ordine in S_5).

3. *3° lemma. — Se sopra una superficie* F *esiste un sistema lineare di curve di genere* p (≥ 0) *appartenente ad una involuzione di grado* m *e rappresentativo di una rigata mpla* F′ (*di* S_r), *e se la dimensione del sistema vale*

$$r > 2p + 3 \qquad se\ m = 2$$

$$r > p + 4 \qquad se\ m > 2,$$

allora alle generatrici della F′ *corrispondono gruppi di* m *curve razionali d'un fascio sulla* F, *seganti in un punto (mobile) le curve del dato sistema; in conseguenza la* F *è riferibile biunivocamente ad una rigata di genere* p *avente come direttrici le immagini delle curve del sistema.*

Fra la rigata (mpla) F′ di S_r, e la superficie F esista una corrispondenza $[1\ m]$. Ad un sistema lineare irreduttibile di dimensione $k > 1$ e quindi di un certo *grado* $D > 0$ su F′, corrisponde su F un sistema lineare di ugual dimensione k e di

(1) " Accad. dei Lincei — gennaio 1894 „. Pare che questo teorema sia stato enunciato per la prima volta dal Kronecker (Accad. dei Lincei, 1886). Esso servirebbe a stabilire anche il nostro primo lemma.

grado $m\mathrm{D}$ (> 0), il quale (avendo un grado > 0) è necessariamente irreduttibile (a meno di componenti fisse che si possono immaginare tolte) (1). Così alle sezioni iperplanari della F′ corrispondono sulla F le curve d'un sistema lineare irreduttibile ∞^r, avente un certo genere p, ed appartenente ad una involuzione di grado m (di cui i gruppi sono rappresentati dai punti di F′). Ad una generatrice generica corrisponde su F una curva la quale si potrà supporre spezzata in $\frac{m}{\delta} \geq 1$ componenti irreduttibili C, ciascuna riferita in modo δplo alla detta generatrice di F′, essendo δ un divisore di m, e quindi

$$m \geq \delta \geq 1.$$

Le linee C che così nascono dalle rette di F′ compongono un *fascio* sulla F, cioè vi è *una* linea C per ogni punto della F.

Se $\delta = 1$, ad ogni generatrice della F′ corrispondono sulla F m curve C riferite ad essa biunivocamente e quindi razionali.

Le C segano in un sol punto variabile le curve del sistema ∞^r immagini delle sezioni di F′, e quindi la F, con un noto procedimento del signor Noether (2), può riferirsi biunivocamente ad una rigata di genere p sulla quale le curve del nominato sistema vengono rappresentate da *direttrici* (3). L'affermazione contenuta nell'enunciato è quindi in tal caso verificata indipendentemente dal valore di r in confronto a p.

Perchè il teorema risulti dimostrato occorre e basta stabilire che nelle ipotesi del teorema è impossibile il caso $\delta > 1$, vale a dire che se $\delta > 1$ si ha:

$$r \leq 2p + 3 \qquad \text{quando } m = 2$$

$$r \leq p + 4 \qquad \text{quando } m > 2.$$

Supponiamo dunque nel seguito

$$\delta > 1$$

(1) Cfr. la nota a pag. 4 dell'introduzione.

(2) " Mathem. Annalen ", Bd. III.

(3) Cioè (secondo una denominazione del sig. Segre) linee seganti in *un* punto le generatrici.

cioè:

$$\delta \geq 2 \qquad \text{onde anche } m \geq 2.$$

Consideriamo su F' la curva di diramazione L della corrispondenza $[1\, m]$ tra la F' e la F. Il suo ordine è il numero dei punti di diramazione di una corrispondenza $[1\, m]$ tra una sezione della rigata F' di genere π, e la sua immagine di genere p su F, quindi (per la nota formula di Zeuthen) esso vale:

$$N = 2p - 2 - 2m(\pi - 1)$$

e perciò si ha intanto:

$$N \leq 2p - 2 + 2m.$$

Indicando con χ il genere delle curve C, ad una generatrice della F' appartengono $2(\delta + \chi - 1)$ punti di diramazione della corrispondenza $[1\, \delta]$ tra essa e una delle $\frac{m}{\delta}$ curve C che le corrispondono su F; in conseguenza sopra una generatrice di F' vi sono $2\frac{m}{\delta}(\delta + \chi - 1)$ punti di diramazione della corrispondenza $[1\, m]$ con F, punti che sono intersezioni di quella generatrice colla curva L. Alcuni di questi punti possono forse coincidere, non però più di $\frac{m}{\delta}(\delta - 1)$ in uno stesso punto, perchè notoriamente un punto di diramazione della corrispondenza $[1\, \delta]$ fra la retta ed una curva (irreduttibile) C, assorbe al più $\delta - 1$ punti di diramazione.

Ne segue che la curva L non può essere direttrice della rigata F', e se pure da essa si stacca una parte d'un certo ordine ν direttrice della F' (forse contata più volte), la parte residua incontra in $\frac{m}{\delta}(\delta + 2\chi - 1) \geq m\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)$ punti almeno le generatrici della F'. Ora avviene almeno uno di questi due casi: 1° la L contiene una parte irreduttibile non giacente in un S_{r-1}; allora l'ordine (di questa parte e quindi l'ordine) di tutta la L vale

$$N \geq r;$$

2° la L contiene una parte irreduttibile d'ordine ν (necessariamente direttrice di F') giacente in un S_{r-1} (o spazio inferiore);

allora un iperpiano per questa parte sega la F' di S_r (il cui ordine è $\geq r-1$) secondo $r-1-\nu$ generatrici almeno, e quindi contiene almeno altrettanti punti (di diramazione) della parte residua della L, sicchè l'ordine di tutta la L vale:

$$N \geq r-1.$$

Questa ultima disuguaglianza vale dunque in tutti i casi e (ricordando la $N \leq 2p-2+2m$) dà:

$$2p-2+2m \geq r-1,$$

onde per $m=2$ si deduce:

$$r \leq 2p+3.$$

L'enunciato è così stabilito per $m=2$.

Supponiamo nel seguito:

$m>2$ onde (essendo $\delta>1$) $m=3$, $\delta=3$, o $m\geq 4$, $\delta \geq 2$.

Si supponga dapprima che la F' sia un cono il quale appartenendo ad S_r ha l'ordine $\geq r-1$: dico che in tale ipotesi è $r \leq p+4$.

Un iperpiano pel vertice contiene almeno $r-1$ generatrici ciascuna delle quali ha almeno $\frac{m}{\delta}(\delta+2\chi-1) \geq m\left(1-\frac{1}{\delta}\right)$ punti di L fuori del vertice (che può assorbire al più $m\left(1-\frac{1}{\delta}\right)$ punti di diramazione); dunque un iperpiano pel vertice sega la L fuori del vertice in un numero di punti ($\leq N$) e

$$\geq (r-1)\,m\left(1-\frac{1}{\delta}\right).$$

Ricordando la $N \leq 2p-2+2m$, si deduce:

$$2p-2+2m \geq (r-1)\,m\left(1-\frac{1}{\delta}\right)$$

ossia

$$2p-2 \geq m\left\{(r-1)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)-2\right\}.$$

Se $(r-1)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)-2 \geq 0$ (il che possiamo supporre altrimenti si ha $r \leq 4$ e quindi $r \leq p + 4$ come vogliamo dimostrare), il 2° membro della disuguaglianza è minimo per $m = 3$, $\delta = 3$ o per $m = 4$, $\delta = 2$ (essendo $m > 2$, $\delta \geq 2$): per $m = 3$, $\delta = 3$ si ha:

$$r \leq p + 3,$$

e per $m = 4$, $\delta = 2$ si ha invece:

$$r \leq p + 4;$$

l'ultima disuguaglianza sussiste dunque in ogni caso ($m > 2$, $\delta > 1$) se F′ è un cono.

Si supponga ora che la F′ non sia un cono e (ferme stante le ipotesi $m > 2$, $\delta > 1$) si supponga inoltre che sia:

$$r > p + 4;$$

la verità del teorema enunciato risulterà stabilita mostrando che le ipotesi fatte sono assurde. La sezione di una rigata F′, che non è un cono, con un iperpiano generico passante per una sua generatrice generica a è, come è chiaro, una curva irreduttibile. Avendosi $r > 4$ (perchè $p \geq 0$), alle ∞^{r-2} curve irreduttibili sezioni di F′ cogli iperpiani per a fuori di a, corrispondono (per quanto abbiamo osservato in principio) le curve d'un sistema lineare irreduttibile di un certo genere p_1 su F (tolte forse componenti fisse) il quale appartiene (come il dato sistema ∞^r) alla involuzione di grado m considerata su F (e forse anche ad una di grado $> m$ composta coi gruppi della prima). Ora sulla retta a vi sono almeno $2\,m\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)$ punti d'intersezione colla curva di diramazione L di F′, quindi (essendo $m = 3$, $\delta = 3$ o $m \geq 4$, $\delta \geq 2$) almeno 4 punti di L, e perciò sulla curva sezione d'un iperpiano per a fuori di a (la quale ha il genere π come la rigata F′, ossia come una qualunque sezione iperplanare di F′) vi sono al più N — 4 punti di diramazione della corrispondenza $[1\ m]$ tra essa e la sua immagine su F di genere p_1. Adoperando la formula di Zeuthen si ha dunque:

$$N - 4 \geq 2\,p_1 - 2 - 2m\,(\pi - 1),$$

mentre in modo analogo (come già abbiamo osservato) si ha:

$$N = 2p - 2 - 2m(\pi - 1).$$

Si deduce:

$$p_1 \leq p - 2.$$

Dunque se sulla F esiste un sistema lineare irreduttibile ∞^r di genere p dove $r > p + 4$, appartenente ad una involuzione di grado $m > 2$ e rappresentativo di una rigata F′ che non sia un cono, e se ad ogni generatrice della F′ corrispondono su F $\frac{m}{\delta}$ (≤ 1) curve C (essendo $\delta > 1$), si deduce l'esistenza su F di un sistema lineare irreduttibile di dimensione r_1 ($= r - 2$) e di genere p_1 ($\leq p - 2$) tale che $r_1 > p_1 + 4$ il quale appartiene pure alla data involuzione ed è rappresentativo della rigata F″ (semplice o multipla) ottenuta proiettando la F′ (in S_{r-2}) da una sua generatrice. Se la F″ non è un cono potremo applicare nuovamente il procedimento già adoperato e così successivamente in modo da costruire su F (dopo un certo numero h di operazioni) un sistema lineare irreduttibile di dimensione $r_h = r - 2h$ e di genere $p_h \leq p - 2h$ appartenente sempre alla data involuzione di grado > 2, e tale che $r_h > p_h + 4$. È chiaro che il numero h delle operazioni eseguibile è necessariamente finito, anzi $\leq \frac{p}{2}$, onde per h assai grande non dovrà più esser possibile ripetere l'operazione indicata, e però dovrà esistere un valore $h = k$ in corrispondenza al quale si abbia su F un sistema lineare appartenente alla data involuzione (o forse ad una composta coi gruppi della prima *a fortiori* di grado > 2) di genere p_k e dimensione $r_k > p_k + 4$ rappresentativo di un cono F^{k+1} ottenuto proiettando F′ successivamente da k generatrici; ad ogni generatrice di un tal cono corrispondono su F $\frac{m}{\delta}$ o più curve C, ciascuna riferita in modo δplo alla corrispondente generatrice, essendo $\delta > 1$; il fatto ottenuto come conseguenza delle ipotesi da cui siamo partiti è dunque assurdo perchè in contraddizione con ciò che è stato dimostrato innanzi pel caso in cui F′ era un cono. Dunque per $m > 2$, $\delta > 1$, si ha (tanto se la F′ è un cono come se non è un cono):

$$r \leq p + 4 \text{ cdd.}$$

La discussione è completa ed il lemma enunciato rimane così stabilito.

4. La questione di assegnare la massima dimensione dello spazio a cui può appartenere una superficie a sezioni (iperplanari) di genere 0, 1, 2 è da considerarsi come risoluta.

Notoriamente (1) una superficie a sezioni di genere 0 è razionale ed è rigata se $r > 5$, mentre può essere una superficie di Veronese o una sua proiezione dello stesso ordine ($= 4$) per $r \leq 5$.

Una superficie a sezioni di genere 1 appartenente ad un S_r dove $r > 5$ è certo razionale o rigata, giacchè se essa non è rigata gli iperpiani tangenti in un punto la segano secondo curve razionali (irreduttibili per il 2° lemma, § 2) componenti un sistema lineare, e quindi la superficie è razionale per un noto teorema del signor Noether (2). D'altra parte se la superficie è razionale notoriamente deve essere $r \leq 9$, e se $r = 9$ la superficie può rappresentarsi sul piano mediante il sistema delle cubiche come immagini delle sezioni iperplanari.

Recentemente ho stabilito (3) che ogni superficie (a sezioni iperellittiche di genere > 1, ed in particolare) a sezioni di genere 2 è razionale o rigata; una tal superficie razionale contiene un fascio di coniche e non può appartenere ad uno spazio avente più di 11 dimensioni (4).

Nel successivo § faremo vedere come ai casi in cui $p = 0, 1, 2$, si riconduca la questione generale di assegnare la massima di-

(1) I resultati noti ricordati in questo § sono dovuti a Picard, " Crelle C ", Guccia, " Circolo Matematico di Palermo " t. I. 1887, Del Pezzo, " Accad. di Napoli " 1885 — " Circolo di Palermo " t. I. La connessione fra i due ordini di ricerche svolti nei citati lavori è dovuta alle feconde considerazioni del sig. Segre (" Circolo di Palermo ", t. I) che sono contenute solo in embrione in un noto lavoro di Caporali. (Cfr. anche una nota del signor Segre al lavoro del sig. Castelnuovo sulle superficie a sezioni iperellittiche, " Circolo di Palermo ", t. IV).

(2) " Mathem. Annalen ", Bd. III.

(3) " Accad. dei Lincei ", dicembre 1893.

(4) Come risulta dai teoremi del sig. Jung sui sistemi di curve piane di genere due, " Istituto lombardo ", maggio 1888.

mensione dello spazio a cui può appartenere una superficie a sezioni di genere $p > 2$ (1).

5. Per il 2° lemma (§ 2) la proiezione di una superficie non rigata F di S_r (con $r > 5$) da un piano tangente, fornisce la rappresentazione semplice o multipla della F sulla superficie F′ di S_{r-3} ottenuta colla proiezione. Inoltre la F essendo non rigata in S_r ($r > 5$) la curva irreduttibile sezione d'un iperpiano tangente generico della F ha certo il genere $\pi \leq p - 1$, se p è il genere delle sezioni iperplanari (non tangenti) della F. Se la F′ è proiezione multipla della F, i punti delle sue curve sezioni sono riferiti ai gruppi di involuzioni appartenenti alle rispettive curve immagini di esse sulla F; se $p > 2$, una sezione tangente della F (di genere $\leq p - 1$) non può contenere una involuzione di genere $p - 1$ ma solo di genere minore, quindi se la F′ è proiezione multipla della F a sezioni di genere $p > 2$, la F′ ha le sezioni di genere $\pi < p - 1$, (mentre per $p \leq 2$ si ha soltanto $\pi \leq p - 1$). Dalle considerazioni precedenti si deduce che se la superficie F non rigata a sezioni di genere $p > 2$ appartiene ad un S_r di dimensione

$$r \geq 3\,p + h > 5$$

(dove h è un intero qualunque), proiettando la F da un suo piano tangente generico si ottiene una superficie F′ a sezioni di genere π appartenente ad un S_ρ (con $\rho = r - 3$) e si ha in tutti i casi

$$\rho \geq 3\,\pi + h.$$

Così la questione di determinare la massima dimensione r dello spazio (S_r) a cui appartiene una superficie non rigata a sezioni di genere $p > 2$ (cioè la questione di determinare il massimo di h) si riduce all'analoga questione per una superficie

---

(1) L'applicazione del teorema che tutte le superficie a sezioni di genere due sono razionali o rigate non è qui strettamente necessaria, giacchè la cosa si potrebbe stabilire per le superficie a sezioni di genere 2 in S_{11}, colle considerazioni del § 3 relative alle superficie di S_{3p+5} a sezioni di genere $p > 2$ (con qualche lieve modificazione).

F′ a sezioni di genere $< p$. Affinchè a questa si possa nuovamente applicare il processo di riduzione applicato alla F occorre stabilire che essa non è rigata; si giunge a questo resultato quando h supera un certo limite, per precisare quando $h \geq 5$, ossia $r \geq 3p + 5$.

Dico cioè che sussiste il seguente lemma:

Proiettando da un piano tangente generico (in un S_{r-3}*) una superficie* F *non rigata a sezioni di genere* p (> 0) *appartenente ad uno spazio di dimensione*

$$r \geq 3p + 5,$$

si ottiene una superficie F′ *non rigata.*

La dimostrazione si farà per assurdo. Suppongasi dunque che la F′, a sezioni di genere π in S_ρ ($\rho = r - 3$), sia rigata.

Se la F′ è proiezione semplice della F alle sue generatrici corrispondono sulla F le curve razionali C d'un fascio, segate in un punto dagli iperpiani pel piano di proiezione. Dico che vi è su F un tal fascio di curve razionali C segate in un punto dai nominati iperpiani (di cui $m > 1$ corrispondono ad una generatrice di F′), anche se la F′ è proiezione multipla (mpla) di essa. Questo fatto è conseguenza del 3° lemma (§ 1); infatti se la F′ è proiezione multipla della F (le sezioni tangenti alla F in un punto essendo di genere $p' \leq p - 1$), dall'essere $r \geq 3p + 5$, $\rho = r - 3$, si deduce $\rho \geq 3p' + 5$, quindi in ogni caso

$$\rho > p' + 4 \text{ e } \rho > 2p' + 3;$$

sussistendo tali disuguaglianze siamo appunto nel caso di applicare il citato lemma, e si deduce che ad ogni retta di F′ corrispondono sulla F m curve C, ecc.

Dunque l'ipotesi che la superficie non rigata F a sezioni di genere p in S_r ($r \geq 3p + 5$) venga proiettata in una rigata (semplice o multipla) F′ da un piano tangente generico, porta come conseguenza che esiste sulla F un fascio di curve razionali C segate in un punto variabile dagli iperpiani pel piano proiettante. Siamo condotti a distinguere le due ipotesi:

a) Il fascio delle C suppongasi razionale.

Allora la F è razionale (1), e, come il signor Castelnuovo ha

(1) Noether, " Math. Ann. ", III.

stabilito, le sezioni tangenti generiche di essa sono proprio di genere $p-1$ e non minore (1), ma le sezioni tangenti alla F pel piano proiettante (che è un piano tangente generico) segano in un punto (variabile) le curve C del fascio razionale e però sono razionali; in conseguenza è $p-1=0$ ossia $p=1$ contro l'ipotesi $p>2$.

b) Il fascio delle C suppongasi irrazionale.

Allora mutando il piano tangente da cui vien proiettata la F, il fascio delle curve C non può mutare, perchè si avrebbe altrimenti sulla F una infinità continua di fasci irrazionali e ciò contraddice ad un teorema del signor Castelnuovo (2).

Ora non può darsi che ogni piano tangente alla F incontri tutte le curve C, giacchè, la F non essendo rigata, occorrerebbe che ogni suo piano tangente (il quale pel lemma 1° (§ 1) non sega la F secondo una curva) passasse per un punto base (almeno) del fascio delle C, mentre se ogni piano tangente ad una superficie passa per un punto fisso, questa è un cono (come si vede proiettando arbitrariamente la superficie da punti esterni in una di S_3).

Dunque sulla superficie F, nelle nostre ipotesi, esiste un fascio di curve C, tali che ciascuna di esse viene incontrata in un sol punto variabile dagli iperpiani per un piano tangente che non la sega (cioè viene proiettata secondo una retta semplice da un piano tangente della F senza punti comuni con essa); queste curve C debbono in conseguenza essere rette, cioè la F deve esser rigata, contro l'ipotesi.

Così la proposizione enunciata risulta stabilita.

Essa conduce subito alla proposta determinazione della massima dimensione (r) dello S_r a cui appartiene la superficie non rigata F a sezioni del genere $p>2$.

Per giungere a questo resultato osserviamo anzitutto che la proiezione da un piano tangente della F, se $r \geq 3p+5$ e $p>2$ non può mai condurre ad una superficie F′ a sezioni di genere $\pi<2$ in S_ρ $(\rho=r-3)$; infatti si ha $(p \geq 3)$

---

(1) " Massima dimensione, ecc. ", l. c.

(2) Invero si dedurrebbe l'esistenza d'una infinità continua di involuzioni irrazionali sopra una curva sezione della superficie, e questo è assurdo. Cfr. Castelnuovo, " Accad. di Torino ", giugno 1893.

$$r \geq 14, \quad \rho \geq 11,$$

ed abbiamo già visto (§ 4) che una superficie non rigata a sezioni di genere $\pi < 2$ (cioè $\pi \leq 1$) non può appartenere ad un S_ρ con $\rho > 9$. Ciò posto rimane stabilito che:

Proiettando da un piano tangente generico una superficie non rigata F a sezioni di genere $p > 2$ in S_r, dove $r \geq 3p + 5$, si ottiene una superficie non rigata F' di S_ρ ($\rho = r - 3$) a sezioni di genere $\pi < p$ dove

$$\rho \geq 3\pi + 5 \qquad \pi \geq 2.$$

Se $\pi > 2$ applichiamo alla F' il procedimento applicato alla F e così di seguito finchè occorra.

Si giungerà certamente ad una superficie non rigata a sezioni di genere due, la quale apparterrà ad uno spazio di dimensione

$$11 + h \ (h \geq 0)$$

(essendo $11 = 3.2 + 5$), se la F appartiene ad uno spazio di dimensione $r = 3p + 5 + h$.

Per quanto abbiam visto relativamente alle superficie a sezioni di genere due (§ 4) risulta $h = 0$, cioè:

Una superficie non rigata a sezioni di genere p > 2 *non può appartenere ad uno spazio di dimensione* r $>$ 3p $+ 5$.

Abbiam visto che l'enunciato è pure soddisfatto per p $= 2$, p $= 0$, *mentre per* p $= 1$ *una superficie non rigata a sezioni ellittiche non può appartenere ad uno spazio* S_r *di dimensione* r > 9.

Alla domanda se il massimo di r che abbiamo stabilito (per $p > 1$) può esser raggiunto, si risponde affermativamente coll'esempio delle superficie razionali rappresentate sul piano da uno dei sistemi lineari (di curve iperellittiche o di quartiche piane di genere 3) considerati dal signor Castelnuovo (1), il quale ha ricondotto a tipi (e precisamente ai tipi nominati) tutti i sistemi lineari di curve piane di genere $p > 1$ e dimensione massima $3p + 5$.

---

(1) " Massima dimensione, ecc. ,, l. c.

Inversamente si può stabilire che ogni superficie non rigata a sezioni di genere $p > 2$ in S_{3p+5} è razionale (si è già visto per $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$), ed è quindi una di quelle di cui il signor Castelnuovo ha fatto implicitamente lo studio. Ciò risulta dall'osservare che le successive proiezioni da piani tangenti che conducono da una superficie F a sezioni di genere $p > 2$ in S_{3p+5} ad una (razionale) a sezioni di genere due in S_{11}, sono necessariamente univoche: infatti una proiezione multipla su S_{r-3} fatta da un piano tangente di una superficie a sezioni di genere $p > 2$ appartenente ad un S_r $(r > 5)$ conduce, per quanto abbiamo osservato in principio del §, ad una superficie F' a sezioni di genere $\pi < p - 1$; se è $r \geq 3p + 5$, si avrebbe allora una F' non rigata a sezioni di genere $\pi \geq 2$ appartenente ad un S_ρ $(\rho = r - 3)$ con $\rho \geq 3\pi + 8 > 3\pi + 5$, e questo contraddirebbe il teorema dimostrato secondo cui il massimo di ρ è $3\pi + 5$.

Riunendo insieme i risultati ottenuti ed enunciando sotto forma proiettiva i ricordati teoremi del signor Castelnuovo relativi ai sistemi lineari di dimensione $3p + 5$ e di genere $p > 1$ nel piano, ed i teoremi del signor Guccia (1) relativi ai casi $p = 1$ e $p = 0$, perveniamo alla seguente conclusione:

Se una superficie F *a sezioni iperplanari del genere* p (≥ 0) *appartiene ad uno spazio* S_r *di dimensione*

$$r \geq 3p + 5,$$

ha luogo uno dei seguenti casi:

1° *La superficie* F *è una rigata di genere* p $(r \geq 3p + 5)$.

2° *La* F *è una superficie razionale* $(r = 3p + 5$, *o anche per* $p = 1$, $r = 9)$, *e precisamente:*

a) *una superficie contenente un fascio razionale di coniche* $(r = 3p + 5)$;

b) *la superficie del 16° ordine a sezioni del genere 3 in* S_{14} *rappresentata sul piano dal sistema delle quartiche* $(r = 3p + 5$, $p = 3)$;

c) *la superficie del 9° ordine a sezioni ellittiche in* S_9, *rappresentata sul piano dal sistema delle cubiche, o una sua proiezione dello stesso ordine in* S_8 $(r = 3p + 6$ *o* $r = 3p + 5$, $p = 1)$.

(1) Cfr. le citazioni del § 2.

6. La questione di determinare la massima dimensione dei sistemi lineari di curve del genere p sopra una superficie viene risoluta dal teorema del precedente § per i sistemi semplici, giacchè riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del dato sistema ∞^r agli iperpiani di S_r si ottiene una superficie F' riferita punto per punto in modo semplice alla primitiva F, la quale superficie F' ha le sezioni di genere p ed appartiene allo S_r, onde se la F non è riferibile ad una rigata F' di genere p avente come direttrici le immagini delle curve del dato sistema (sezioni di F'), si ha $r \leq 3p+5$, o per $p=1$ anche $r=9$.

Se si tratta di un sistema non semplice il quale *appartenga ad una involuzione* I_m (in modo che il passaggio della sua curva generica per un punto trae di conseguenza il passaggio di essa per gli altri $m-1$ punti del gruppo della involuzione I_m che viene individuato dal primo punto), l'indicata trasformazione riesce invece multipla (m voca) cioè conduce ad una superficie F' i cui punti corrispondono ai gruppi della I_m su F.

Indichiamo con π il genere delle sezioni della F' (appartenente ad S_r) riferite in corrispondenza $[1\, m]$ alle curve di genere p del sistema ∞^r considerato sulla F. Si ha allora, per la nota formula di Zeuthen,

$$p-1 \geq m(\pi-1),$$

quindi

$$\pi \leq \frac{p-1}{m}+1$$

ossia (poichè $m \geq 2$),

$$\pi \leq \frac{p+1}{2}.$$

Ora secondo il teorema stabilito nel precedente § la F' è una rigata se è

$$r > 3\pi+5 \text{ ed } r > 9 \text{ se } \pi=1;$$

si soddisfa a queste due condizioni nell'ipotesi

$$p > 1,$$

quando

$$r > 3\frac{p+1}{2} + 5.$$

Allora vi è fra la rigata F′ e la superficie F una corrispondenza $[1\ m]$ in cui le immagini delle sezioni di F′ compongono un sistema ∞^r di genere p; applicando il 3° lemma (§ 3) possiamo affermare che a ciascuna generatrice della F′ corrispondono m curve razionali e la F è riferibile ad una rigata di genere p (su cui le curve del sistema danno luogo a direttrici) se è $r > 2p + 3$, (onde $r > p + 4$, per $p \geq 1$).

La nominata deduzione per la F nell'ipotesi $p > 1$ è subordinata alle due disuguaglianze

$$r > 3\frac{p+1}{2} + 5, \qquad r > 2p + 3;$$

di queste la condizione $r > 2p + 3$ assorbe l'altra per p assai alto ($p \geq 7$); osserviamo però che (essendo $p > 0$) le due condizioni sono sempre soddisfatte quando è

$$r > 2p + 6.$$

Dunque un sistema lineare di genere $p > 1$ e dimensione

$$r > 2p + 6$$

sopra una superficie non riferibile ad una rigata di genere p è semplice.

Anzi tenendo conto del valore di m, per $m > 2$ si stabilisce che:

Sopra una superficie non riferibile ad una rigata di genere p un sistema lineare di genere $p > 1$ è certo semplice o appartenente ad una involuzione di grado 2, quando la sua dimensione vale

$$r > p + 7.$$

Esaminiamo le ipotesi $p = 0$, $p = 1$ che per un momento avevamo lasciate da parte.

Se $p = 0$ la F è razionale; il sistema di curve razionali sulla F è immerso in un sistema normale (dello stesso grado) semplice; facendo segare dagli iperpiani di S_ρ ($\rho > r$) le curve di questo sistema semplice sopra una superficie trasformata F′, la F′ risulta rigata quando $r > 4$ ($\rho > 5$), e su di essa le immagini delle curve del sistema sono direttrici.

Se $p = 1$ si ha $\pi = 0$ o $\pi = 1$. Se $\pi = 0$ la F′ di S_r, superficie mpla rappresentata dal sistema lineare ∞^r di genere $p = 1$ su F è certo rigata ove sia $r > 5$; inoltre per $r > 5$ è ancora (essendo $p = 1$) $r > 2p + 3$, $r > p + 4$, quindi si conclude come nel caso generale che la F è in tal caso riferibile ad una rigata ellittica avente come direttrici le immagini delle curve del sistema.

Suppongasi $\pi = 1$ e pure $p = 1$.

Si perviene ancora nello stesso modo alla precedente conclusione per la F quando $r > 5$ (cioè $r > 2p + 3$ ed $r > p + 4$) se la F′ è rigata. Consideriamo l'ipotesi in cui questo non accada e sia $r \geq 8$. Allora la F′ è razionale (cfr. § 4) e, come segue dalla sua rappresentazione piana, possiede una rete omaloidica di curve K (cubiche o quartiche) senza punti base o con un punto base semplice al più (ove le K sieno quartiche, $r = 8$). Sulla F′ non vi è curva di diramazione della corrispondenza [1 m] con F (perchè un' involuzione ellittica non ha coincidenze), ma al più dei punti di diramazione isolati, quindi sopra una curva K generica non vi sono punti di diramazione della nominata corrispondenza con F, giacchè se ve ne fosse uno (base della rete), per un'osservazione già fatta nel § 3, si dedurrebbe che ve n'è almeno un altro distinto; si deduce che l'immagine di ogni curva K su F è spezzata in m curve (razionali); ciò è assurdo componendo le K un sistema lineare (rete) di dimensione > 1, come è stato osservato nella discussione del 3° lemma (§ 3).

Dall'esame dei casi $p = 0$ e $p = 1$, e dall'enunciato precedente segue che:

Un sistema lineare di genere p ≥ 0 *appartenente ad una superficie non riferibile ad una rigata di genere* p, *è certo semplice se ha la dimensione*

$$r > 2\,\mathrm{p} + 6 \text{ (1)};$$

(1) Così si ha un'estensione alle superficie del teorema del sig. Segre

è semplice o appartiene ad una involuzione di grado 2° se

$$r > p + 6.$$

Alla condizione $r > 2p + 6$ si può sostituire nella 1ª parte dell'enunciato la condizione

$$r \geq 3p + 5,$$

che comprende la $r > 2p + 6$ per $p > 1$, e per $p = 1$, $p = 0$ si riduce risp. a $r \geq 8$, $r \geq 5$.

Allora riunendo insieme i resultati ottenuti in questo § con quelli del § precedente possiamo enunciare il teorema generale.

Se sopra una superficie esiste un sistema lineare di genere p *e dimensione* $r \geq 3p + 5$ *ha luogo uno dei seguenti casi:*

1° *la superficie è riferibile biunivocamente ad una rigata avente come direttrici le immagini delle curve del sistema* $r \geq 3p + 5$);

2° *la superficie è razionale ed il sistema è semplice di dimensione* $r = 3p + 5$ *od anche* $r = 9$ *per* $p = 1$; *allora la superficie può trasformarsi birazionalmente in una di* S_r *su cui le immagini delle curve del sistema sieno le sezioni iperplanari; questa superficie così trasformata:*

a) *contiene un fascio di coniche, tranne se,*

b) *ha le sezioni di genere* 3 *non iperellittiche ed è di ordine 16 in* S_{14},

c) *o se è d'ordine* 9 (*a sezioni ellittiche*) *in* S_9 *o* S_8.

7. Nel § 2 del cap. I delle mie " Ricerche „ ho stabilito la definizione di sistema lineare *completo* di curve di genere p (sopra una superficie) indicando con questo nome un sistema non contenuto (nemmeno parzialmente) in un altro più vasto dello stesso genere.

Ho dimostrato quindi che se due sistemi lineari di curve di genere p hanno comune un sistema (o una curva) dello stesso

---

secondo cui è semplice un sistema lineare di curve piane di genere p e dimensione $r > p + 1$, *determinato dai punti base.* (" Circolo di Palermo „, t. I). Il limite che comparisce nel nostro enunciato è più alto, ma vi è una restrizione di meno.

genere essi sono contenuti in uno stesso sistema lineare di genere p; ne ho dedotto che una curva non appartiene a due sistemi completi (di ugual genere) ed appartiene certo ad un
2. sistema completo (forse anche di dimensione zero) se esiste un massimo alla dimensione d'un sistema di genere p sulla superficie (da cui il teorema per le superficie di genere $P > 0$, sulle quali un sistema lineare di genere p ha la dimensione $\leq p$). In base ai resultati precedenti possiamo ora enunciare il seguente resultato generale:

Sopra una superficie una curva di genere p (≥ 0) *appartiene ad un determinato sistema lineare completo di genere* p (*e dimensione* ≥ 0), *~~purchè la superficie non sia~~ riferibile ad ~~una rigata di genere~~* ~~p~~ *~~avente come direttrice l'immagine della data curva~~.* *Le superficie riferibili a rigate di genere* p, *in quanto si considerano su di esse sistemi lineari di genere* p, *dànno effettive eccezioni al teorema, come è stato osservato nell'introduzione.*

Per le applicazioni del teorema stabilito (Restsatz, ecc.), rimando alle mie citate " Ricerche ".