Enriques, Federigo

Intorno alla memoria "Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse". Nota

Atti Ist. Veneto Scienze, Lettere, Arti (VII) **V** (1894), pp. 638-642.

FEDERIGO ENRIQUES

INTORNO ALLA MEMORIA

"LE SUPERFICIE CON INFINITE TRASFORMAZIONI PROIETTIVE IN SÈ STESSE,,

NOTA

VENEZIA — TIP. FERRARI — 1894

Estratto dagli Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.
Tomo V, Serie VII. — 1893-94.

In questa breve nota mi propongo di riparare ad una omissione in cui sono incorso nell' ultimo § della memoria: « Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse » (presentata a codesto illustre Istituto nel Luglio 1893), e di completare alcuni resultati relativi alle superficie algebriche del 6° ordine e 6ª classe mutate in sè dalle ∞^2 omografie che lasciano ferma una cubica gobba ed un suo punto (superficie di 5ª specie cap. III § 6).

1. Della omissione incorsa nel cap. IV. della detta memoria, relativo alle superficie con più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, mi sono accorto confrontando i resultati ottenuti sullo stesso argomento dal sig.r Lie nel 3° vol. della sua importante « Theorie der Transformationsgruppen » (1) recentemente apparso; essa consiste in ciò:

Alle superficie con più che ∞^2 trasformazioni proiettive in sè ivi annoverate (piano, quadrica, coni, sviluppabile cubica) si devono aggiungere le rigate cubiche (di Cayley) in cui la direttrice è infinitamente vicina alla retta doppia (aventi ∞^3 trasformazioni proiettive in sè).

(1) Tenbner - Leipzig - 1893.

Che tali rigate abbiano effettivamente ∞^3 trasformazioni proiettive in sè stesse, segue dal fatto che esse sono ∞^{12} (prive d' invarianti assoluti) mentre le omografie dello spazio sono ∞^{15}. La rettifica dell' errore nella discussione del cap. IV (pag. 45 — 1ª ipotesi) si otterrà facilmente mediante le considerazioni del sig.r Lie (op. c. pag. 193) che si basa sullo stesso concetto. Quindi al ragionamento di quella 1ª ipotesi si sostituirà il seguente:

1ª ipotesi — Alla superficie appartenga un sistema (almeno) di asintotiche costituito da cubiche gobbe. Fra le ∞^n onografie che mutano in sè la superficie, ∞^{n-1} lasciano ferma una cubica gobba, onde (supponendosi $n > 2$) si ha $n = 3$ o $n = 4$.

Ora per l' ipotesi fatta la superficie non è sviluppabile sicchè è da scartarsi il caso $n = 4$ perchè solamente la sviluppabile circoscritta è mutata in sè dalle ∞^3 omografie che lasciano ferma una cubica gobba; ogni punto dello spazio fuori di essa è portato in un qualunque altro punto da quelle omografie.

Essendo $n = 3$ si consideri il sottogruppo ∞^2 (di 5ª specie) delle omografie che trasformano in sè la superficie ed una sua cubica asintotica; queste hanno un punto unito sulla cubica e la tangente in esso unita. Un altro punto generico della cubica può assumersi come unito per ∞^1 omografie del gruppo, onde l' altra asintotica della superficie per esso non è una cubica, altrimenti ivi le due asintotiche avrebbero la tangente comune (1) e la superficie sarebbe sviluppabile. L' altra asintotica deve per altro ammettere essa pure ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, e non può essere neppure una linea piana non retta (giacchè una superficie non piana non può avere per asintotiche linee piane non

(1) Poichè tutte le cubiche (ed in generale le linee) mutate in sè dalle ∞^1 omografie di un gruppo hanno comune la tangente (retta unita) in un punto unito (comune ad esse).

rette), quindi essa è una retta. Questa retta unita per un gruppo ∞^1 d' omografie che lasciano ferma la cubica non è tangente ad essa, e neppure la corda che unisce il punto unito fisso (generatrice d' un cono quadrico unito) onde è la retta che si appoggia alla retta unita del gruppo ∞^2 che muta in sè la cubica, ed alla tangente consecutiva. Perciò la superficie deve essere una rigata cubica di Cayley, la quale effettivamente ha un fascio di asintotiche costituito da cubiche gobbe, ed ammette ∞^3 trasformazioni proiettive in sè ».

Dopo ciò la discussione del cap. IV della nominata memoria, si esaurisce molto più brevemente osservando che è da scartarsi a priori la ipotesi, che la superficie abbia per asintotiche linee piane non rette (non essendo piana), mentre l' ipotesi che le asintotiche (di ambedue i sistemi) sieno rette conduce subito (pag. 47) alla quadrica, e alle sviluppabili (sviluppabile cubica e coni), cui deve aggiungersi il piano escluso in principio.

2. Voglio ora esporre alcuni resultati relativi alle superficie di 6° ordine e 6ª classe mutate in sè da ∞^2 omografie che lasciano ferma una cubica gobba (di 5ª specie): essi si considerano come aggiunte al § 6 del cap. III della citata memoria.

Si abbia una cubica gobba di cui poniamo le equazioni sotto la forma

$$x_1 = 1\,,\; x_2 = \rho\,,\; x_3 = \rho^2\,,\; x_4 = \rho^3\,.$$

Un' omografia che muti in sè la cubica ed abbia il punto unito $\rho = \infty$ (e quindi abbia come unito il piano osculatore in esso $x_1 = o$), produce sul parametro ρ una sostituzione intera $\alpha\rho + \beta$: le sue equazioni sono quindi

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \alpha\, x_2 + \beta x_1 \\ y_3 = \alpha^2 x_3 + 2\alpha\, \beta x_2 + \beta^2 x_1 \\ y_4 = \alpha^3 x_4 + 2\alpha^2\beta x_3 + 3\alpha\beta^2 x_2 + \beta^3 x_1\,. \end{cases}$$

Le (1) sono le equazioni d' un gruppo d' omografie di 5^a specie: queste omografie mutano il punto $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ nei punti della superficie di 6° ordine

$$(2)\quad (y_3\ y_1 - y_2^2)^3\ k = (y_4\ y_1^2 + 2y_2^3 - 3\ y_1\ y_2\ y_3)^2\ ,$$

dove

$$k = \frac{(x_4x_1^2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2x_3)^2}{(x_3x_1 - x_2^2)^3}\ .$$

Le superficie (2), variando k, formano (come è naturale) un fascio.

Per

$k = o$ si ottiene nel fascio la rigata cubica di Cayley che ha per direttrice doppia la retta unita e per direttrice semplice la tangente consecutiva della cubica, contata due volte:

per

$k = \infty$ si ha nel fascio il cono quadrico proiettante la cubica dal punto unito, contato 3 volte:

per

$k = -4$ si ottiene nel fascio la superficie spezzata nella sviluppabile circoscritta alla cubica e nel piano osculatore unito contato due volte.

Le superficie così ottenute sono le superficie *singolari* (3) del gruppo di 5^a specie.

Considerando due fra queste superficie ad esempio quelle che si ottengono per $k = 0$, $k = \infty$, si ha che la cubica gobba unita è doppia per esse e quindi tale per le superficie (di $5.^a$ specie) del loro fascio: invece considerando per es. le superficie ottenute ponendo $k = \infty$, $k = -4$, si ha che le due rette infinitamente vicine comuni al cono quadrico unito (dato da $k = \infty$) ed al piano osculatore

(1) Nel senso di superficie eccezionali del fascio (come nel § 7 del cap. III) non in quello più ristretto del § 1 del detto cap. III.

unito sono triple per ciascuna delle due nominate superficie e quindi tali anche per quelle del loro fascio. Si deduce così che:

Le superficie di 5.ª specie (2) *hanno una cubica gobba doppia e due rette triple infinitamente vicine tangenti alla cubica.*

Il fatto facilmente verificabile che non esistono altre linee singolari per le superficie di 5.ª specie è d'accordo col fatto già stabilito che le sezioni piane di esse sono ellittiche.

Mi limito a ciò su queste superficie. Farò soltanto cenno della seguente proprietà che ad esse compete: *Le asintotiche di esse si distribuiscono in due fasci di cubiche gobbe.*

Per vederlo basterà osservare che un' asintotica ammette ∞^1 trasformazioni proiettive in sè (appartenenti al gruppo (1) e però è una cubica gobba. Il sistema d'indice 2 delle asintotiche è spezzato in due fasci; altrimenti sul piano rappresentativo della superficie (nella rappresentazione stabilita al § 6 del cap. III) si avrebbe una conica inviluppo (non degenere) unita per le ∞^2 omografie che mutano in sè il sistema delle imagini delle sezioni piane della superficie, mentre abbiamo veduto (ivi pag. 42) che in quel gruppo di omografie piane (omologie) i luoghi uniti di punti sono solamente due rette.