Enriques, Federigo

Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche

Math. Annalen **XLVI** (1895), pp. 179-199.

Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche.

Nota di

FEDERIGO ENRIQUES a Bologna.*)

1. Lo studio dei sistemi lineari di curve piane ha richiamato molte volte l' attenzione dei geometri; a questo infatti si collegano importanti teorie come la teoria delle trasformazioni cremoniane e dei loro gruppi, quella delle superficie razionali, delle involuzioni ecc.

Appunto dall' uso delle trasformazioni cremoniane e dalla loro decomponibilità in fattori quadratici viene caratterizzata una serie di ricerche inaugurate con un noto procedimento del sig[r] Noether, e proseguite dai sig[i] Bertini, Guccia, Jung, Martinetti,**) le quali ricerche hanno per iscopo di *classificare* i sistemi lineari di curve piane di genere 0, 1, 2, riconducendoli a *tipi* (d' ordine minimo) irriducibili per trasformazioni birazionali del piano. I resultati ottenuti in tal modo si traducono in teoremi di natura proiettiva relativi alle superficie razionali a sezioni di genere 0, 1, 2 e s'incontrano cosi con quelli cui giungevano quasi contemporaneamente i sig[i] Picard***) e Del Pezzo.†) Spetta al sig[r] Segre di aver rilevato in tutta la sua estensione questo fecondo legame per il quale „la geometria proiettiva delle superficie razionali in un S_n equivale alla geometria

*) Questo lavoro è un rifacimento di tre note inserite nei Rendiconti del l' Accademia dei Lincei (Decembre 93. Maggio-Giugno 94) con aggiunte tratte anche da recenti lavori del sig[r] Castelnuovo.

**) Noether, „Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen" (Math. Ann. Bd. V). Bertini, „Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano" (Annali di Mat. serie II[a] t. 8). Guccia, „Generalizzazione di un teorema di Noether; Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche" (Circolo di Palermo t. I). Jung (Istituto lombardo, Marzo 87 e Maggio 88, e Annali di Mat. serie II[a] t[i] 15 e 16). Martinetti (Ist. lomb. Marzo 87, e Circolo di Palermo t. I).

***) Cr. J. Bd. C. Cfr. anche Guccia (Circolo di Palermo t. I. 13 Giugno 1886).

†) „Sulle superficie dell' n[o] ordine immerse nello spazio di n dimensioni" (Circolo di Palermo t. I).

dei sistemi lineari di curve piane (rappresentativi) rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali del piano“; e poco dopo il sig^r Castelnuovo ne faceva delle applicazioni allo studio dei sistemi lineari di curve piane iperellittiche e di genere tre*).

2. Volendo iniziare per i sistemi lineari di superficie ricerche analoghe a quelle (di geometria piana) di cui ho parlato, ho fissato la mia attenzione sopra i sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche, e mi sono proposto di classificarli riconducendoli a *tipi* (mediante trasformazioni birazionali dello spazio).

Non potevo qui trarre grandi aiuti dalla teoria delle trasformazioni, nella quale (nonostante i classici lavori dei sig^i Cremona e Noether) rimangono ancora insoluti capitali problemi; era dunque naturale che cercassi invece un ausilio nello studio proiettivo delle varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni (cogli S_{n-2} in S_n) iperellittiche, escludendo così quei sistemi di superficie (a intersezioni iperellittiche) pei quali il passaggio di una superficie per un punto generico trae il passaggio di essa per altri punti variabili col primo; limitandomi cioè ai sistemi *semplici* per cui ciò non accade.

3. „Classificare dal punto di vista proiettivo le varietà V (di 3 dimensioni appartenenti ad un S_n, $n > 3$) a curve sezioni iperellittiche, e stabilire (ove sia possibile) la loro rappresentazione punto per punto sullo spazio S_3“: ecco un problema per un lato più generale di quello proposto (in quanto concerne anche le V non razionali), dalla cui risoluzione dipende la determinazione dei tipi di sistemi semplici di superficie ad intersezioni variabili iperellittiche; infatti due tali

---

*) Cfr. Segre (Circolo Matematico di Palermo t. I) e Castelnuovo (Circolo Matematico di Palermo t. IV. Accad. d. Scienze di Torino, Atti, 1890); nel penultimo lavoro citato trovasi anche una nota del sig^r Segre contenente più esplicitamente l' osservazione indicata. Cfr. anche Segre „Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito“, (Annali di Matematica 1894). Nel cap. I §^i 3, 4, 6) della citata memoria del sig^r Segre si troveranno sviluppate molte considerazioni utili per l' intelligenza di questo lavoro. In particolare mi limito a ricordare il seguente principio di frequentissima applicazione. „Dato un sistema lineare ∞^n ($r > 2$) di curve piane (ed analogamente si dica per un sistema di superficie nello spazio ecc.) esiste sempre in S_n una superficie razionale semplice o multipla che può ritenersi *rappresentata* sul piano dal detto sistema (essendo le curve del sistema immagini delle sezioni iperplanari della superficie): la detta superficie è semplice se il passaggio per un punto delle curve del sistema non trae il loro passaggio per altri punti variabili con esso; inoltre essa è *normale* (cioè non proiezione di un altra dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato) se il sistema di curve piane è determinato completamente dai punti base (e viceversa). Una superficie proiezione in uno spazio inferiore di una data superficie normale, viene rappresentata sul piano da un sistema lineare di curve contenuto in quello rappresentativo della superficie normale ecc.“

sistemi saranno o nò trasformabili l' uno nell' altro birazionalmente secondochè sono rappresentativi di varietà V proiettive o nò.

Lo studio delle varietà V è intimamente legato a quello delle superficie sezioni iperplanari di esse; così la questione proposta viene a riannodarsi a quelle relative alle superficie a sezioni iperellittiche (di cui ho fatto cenno). Ma una questione preliminare mi si imponeva innanzi di poter applicare quei resultati relativi a superficie (a sezioni iperellittiche) razionali, la questione cioè di decidere „quando le superficie a sezioni iperellittiche sieno razionali".

Ho potuto risolvere tale questione pel caso generale in cui il genere delle nominate sezioni è >1, e poco dopo il sig^r Castelnuovo estendeva (per altra via) il mio resultato alle superficie a sezioni ellittiche, dimodochè resta stabilito che „tutte le superficie non rigate a sezioni iperellittiche di genere $p\,(\geq 0)$ sono razionali".

Il lettore troverà dimostrato questo teorema nel §^{0} I del presente lavoro ed in esso troverà pure la classificazione e lo studio delle superficie razionali a sezioni iperellittiche, ellittiche e razionali; resultati noti che vengono qui presentati in una trattazione semplice ed uniforme, atta a servire d'introduzione al successivo studio delle varietà di 3 dimensioni a curve sezioni iperellittiche.*)

Questo studio riempie i 3 §^{i} successivi dove si distinguono i 3 casi delle varietà V a curve sezioni razionali, di quelle a curve sezioni ellittiche, e di quelle a curve sezioni iperellittiche di genere $p>1$. „Tali varietà sono razionali o contengono un fascio (serie semplice ∞^1) di piani, ad eccezione (forse) della varietà cubica di S_4".

Dalla rappresentazione delle V razionali in S_3 scaturiscono tutti i tipi di sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni iperellittiche, ellittiche e razionali; nella enumerazione dei quali manca forse il sistema che eventualmente rappresenta la varietà cubica di S_4 senza punti doppi (ove questa sia razionale): la varietà cubica di S_4 con un punto doppio viene notoriamente rappresentata (per proiezione) dal sistema delle superficie cubiche con sestica base sopra une quadrica.**)

I. Le superficie a sezioni iperellittiche.

4. *Superficie a sezioni razionali.* A base dello studio delle superficie a sezioni razionali o ellittiche, che rientrano come caso particolare

---

*) Nel n^0 8 (§^{0} I) ho creduto far cenno di altri resultati importanti recentemente conseguiti dal sig^r Castelnuovo relativi alle superficie che contengono un sistema lineare ∞^2 (rete) di curve iperellittiche perchè essi si collegano all' argomento, sebbene non ne comparisca applicazione nel seguito.

**) Cfr. Segre, „Sulla varietà cubica dello spazio a 4 dimensioni ecc." (Accademia di Torino. Memorie 1888).

nella famiglia delle superficie a sezioni iperellittiche, poniamo il seguente *teorema di* Kronecker*):

Una superficie (*di* S_3) *contenente* ∞^2 *sezioni piane riduttibili è rigata o è la superficie di* Steiner (del 4^0 ordine con 3 rette doppie passanti per un punto triplo).

Da questo teorema segue subito il

Teorema di Picard**). *Una superficie* (di S_3) *a sezioni razionali è una rigata* (*razionale*) *o la superficie di* Steiner.

Infatti una superficie a sezioni razionali viene segata secondo una curva riduttibile da ogni piano tangente.

5. *Superficie a sezioni ellittiche.* ***)

Sia F una superficie d' ordine $n > 3$ (in S_3) le cui sezioni piane generiche sono ellittiche: in ciascun piano generico vi è allora *una* curva C d' ordine $n - 3$ aggiunta alla sezione K di F, la quale non incontra la K fuori dei punti multipli, ciò vale anche per un piano tangente ad F ma segante F secondo una curva irreduttibile, purchè (volendo ancora considerare K come avente il genere *virtuale* 1) si consideri come aggiunta alla K la curva C d' ordine $n - 3$ che ha un punto $(i - 1)$ plo in ogni punto i plo di K tranne nel punto (doppio) di contatto del piano. Ora le ∞^3 curve C o sono le sezioni piane d' una superficie φ_{n-3} d' ordine $n - 3$ (aggiunta ad F) o invadono coi loro punti tutto lo spazio: in quest' ultimo caso (per ogni punto ed in particolare) per un punto O su F vi sono ∞^1 curve C, le quali incontrano in O le corrispondenti sezioni di F; queste debbono dunque essere spezzate, e perciò la F ha ∞^2 sezioni riduttibili, quindi (non essendo la superficie di Steiner la quale ha le sezioni razionali) la F è una rigata ellittica.

Dunque se la F non è rigata le ∞^3 curve C d' ordine $n - 3$ aggiunte alle sezioni piane di F sono le sezioni piane d' una superficie (aggiunta) φ_{n-3}.

Ciò posto si consideri una retta generica r e su questa si fissino $n - 2$ punti $A_1 \ldots A_{n-2}$ di cui A_1 almeno fuori di φ_{n-3}. In un piano

---

*) La dimostrazione che il Kronecker diede di questo teorema non fu pubblicata; l' illustre geometra si riserbava di ritoccarla quando la morte lo colse. Una dimostrazione del teorema fondata probabilmente su concetti diversi fu data dal sig[r] Castelnuovo („Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili" Rendic. Accad. d. Lincei Genn 1894). Questi anzi mi prega di aggiungere alle notizie che egli diede sul teorema di Kronecker quella qui contenuta che egli deve alla cortesia del prof. G. Loria.

**) Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales (Crelle J. Bd. C). Cfr. anche Guccia, Circolo di Palermo t. I.

***) Il ragionamento e la conclusione di questo n[0] sono tolti dalla nota del sig[r] Castelnuovo „Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche" (Rendic. Acc. dei Lincei, Genn. 1894).

generico per r vi sono ∞^1 curve d' ordine $n-2$ aggiunte alla sezione di F, passanti per $A_1 \ldots A_{n-2}$; si può tra queste fissarne una C' colla condizione che essa sia tangente ad un piano generico α per A_1: allora il luogo delle C', variando il piano per r, è una superficie d' ordine $\geq n-2$. Se però l' ordine di essa superficie superasse $n-2$, ad essa apparterrebbe r e vi sarebbe qualche piano che la toccherebbe secondo r, nel quale piano la C' sarebbe spezzata in r ed in una C (aggiunta d' ordine $n-3$) passante per A_1; ma ciò è assurdo perchè A_1 non appartiene a φ_{n-3}. Si conclude che il luogo della C' è una superficie φ_{n-2} d' ordine $n-2$, aggiunta ad F. E si deduce che esiste (almeno) una superficie irreduttibile φ_{n-2} aggiunta ad F, segante sopra un piano generico (come è un piano per r) una data curva C' d' ordine $n-2$ aggiunta alla sezione di F; ma per questa C' passa ancora la φ_{n-2} composta del piano di C' e della φ_{n-3}, onde per C' passa un fascio di φ_{n-2}. Quindi le superficie φ_{n-2} d' ordine $n-2$ aggiunte ad F, compongono un sistema lineare ∞^{n-1}, nè possono essere di più giacchè vi è una sola φ_{n-3}.

Le intersezioni variabili di F colle φ_{n-2} sono curve d'ordine n, componenti un sistema lineare cui appartengono le sezioni piane di F; due di esse s' incontrano in n punti (variabili): perciò se queste curve (considerate come elementi di un sistema lineare) si riferiscono *proiettivamente**) agli iperpiani di un S_{n-1}, si otterrà in S_{n-1} una superficie Φ d' ordine n di cui la F può considerarsi come proiezione (da punti esterni). Le sezioni iperplanari della Φ essendo *normali* (come curve ellittiche d' ordine $n-1$ in S_{n-1}) anche la Φ sarà *normale*, cioè non potrà ottenersi come proiezione d' un' altra superficie dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato.

6. Rivolgiamoci ora allo studio delle superficie Φ (non rigate) a sezioni ellittiche d' ordine $n > 3$, appartenenti ad S_n (e non ad uno spazio inferiore).**)

a) Per $n = 4$ la Φ è intersezione di due quadriche di S_4 (superficie base d' un fascio).

Infatti per una quartica sezione di Φ con un S_3 passano ∞^1 superficie del 2^0 ordine: se φ è una di queste, per φ passano ∞^5 quadriche di S_4, le quali segano su Φ le ∞^4 quartiche sezioni iperpianali (il cui sistema normale, non è contenuto in un sistema più ampio di

---

*) In modo che alle curve d' un sistema lineare ∞^{n-2} contenuto nel dato corrispondano gli iperpiani per un punto in S_{n-1}.

**) I resultati di questo n⁰ sono dovuti al sig^{r} Del Pezzo („Sulle superficie dell' n⁰ ordine immerse nello spazio di n dimensioni," Circolo di Palermo t. I) che li dedusse servendosi della proiezione da punti della Φ sopra una superficie cubica di S_3: quì essi vengono stabiliti direttamente con metodo estendibile alle varietà (a curve sezioni ellittiche) di più dimensioni.

quartiche perchè è completa la serie $g_4{}^3$ che gli iperpiani di S_4 segano sopra una delle nominate quartiche sezioni); per ciascuna quartica sezione iperplanare di Φ, e per la φ, passano dunque ∞^1 quadriche di S_4, e quindi vi è una quadrica di S_4 passante per φ e contenente la Φ: segue che Φ è base per un fascio di quadriche cdd.

La Φ è dunque la nota superficie studiata dal sig^r Segre*), la quale (in ogni caso) contiene delle rette. Proiettando Φ da una sua retta a, essa viene rappresentata univocamente sopra un piano, e le immagini delle sue quartiche sezioni sono le ∞^4 cubiche (con 5 punti base) proiezioni di queste ciascuna dal punto su a.

b) Per $n > 4$ alla Φ appartengono delle cubiche gobbe o delle quartiche razionali normali in S_4.

A stabilire il fatto enunciato bastano le considerazioni seguenti.

Anzitutto, se una sezione iperplanare di Φ si spezza, le sue componenti sono curve razionali normali: infatti se vi fosse una curva C d' ordine $r < n$ sezione iperplanare parziale di Φ la quale appartenesse ad uno spazio S_ϱ di dimensione $\varrho < r$, le intersezioni residue degli iperpiani per S_ϱ con Φ costituirebbero su Φ un sisteme lineare di curve d' ordine $n - r$, di dimensione $n - \varrho - 1 \geq n - r$, il che è assurdo perchè le sezioni (ellittiche) di Φ non possono contenere una serie g_{n-r} di dimensione $> n - r - 1$.

Essendo $n > 4$ vi sono infiniti iperpiani bitangenti a Φ che la toccano in un dato punto generico O: le sezioni di questi sono spezzate in due curve razionali normali passanti per O ed aventi *un* altro punto comune; nessuna di queste è una retta perchè Φ non è rigata. Ogni iperpiano passante per una C di tali curve incontra Φ in una altra curva C' che ha con C *due* punti comuni (è bitangente a Φ). Quindi se r è l' ordine di una C di queste curve, $r - 1$ è la dimensione del sistema lineare cui appartiene su Φ. E parimente se s è l' ordine dell' altra componente C', è $s - 1$ la dimensione del sistema lineare cui C' appartiene su Φ.

I due sistemi lineari di curve cui C, C' appartengono su Φ possono essere contenuti l' uno nell' altro o coincidere; ma poichè una C incontra una C' in *due* punti, uno dei due sistemi ha la dimensione ≤ 3 e quindi una delle due curve C, C' ha l' ordine ≤ 4. Perciò se nessuna delle due curve è una conica, una di esse è una cubica o una quartica razionale normale. Nel caso opposto si proverà l' esistenza d' una cubica o d' una quartica razionale normale su Φ nel seguente modo.

Sia C' una conica e C abbia l' ordine > 4 ed appartenga quindi ad un sistema lineare di dimensione > 3. In questo sistema vi sono delle curve aventi un punto doppio in un punto generico di Φ le

*) Math. Annalen Bd. 24.

quali si spezzano in due curve razionali normali d' ordine ≥ 2 aventi (soltanto) il detto punto comune. Ciascuna di queste due componenti ha *un* punto comune con C' altrimenti una di esse incontrerebbe C' in due punti e l' altra apparterrebbe ad un sistema lineare di dimensione uguale al suo ordine. Ora poichè le due curve d' ordini r', s' s' incontrano in un punto e appartengono a sistemi risp. $\infty^{r'-1}$, $\infty^{s'-1}$, uno almeno dei due numeri r', s' è ≤ 3. Se poi una delle due curve nominate è una conica, un iperpiano speciale passante per l' altra (C'') sega Φ secondo due coniche (quella nominata e la C') onde un iperpiano generico per C'' sega Φ secondo una quartica razionale normale.

Rimane così effettivamente provata l' esistenza su Φ di una cubica gobba o d' una quartica razionale normale segante in due punti l' intersezione iperplanare residua.

Se su Φ vi è una cubica gobba, l' intersezione residua di Φ con un iperpiano generico è una curva irreduttibile C_{n-3} razionale normale d'ordine $n-3$ in S_{n-3}, dalla quale la Φ viene proiettata univocamente sopra un piano, poichè la C_{n-3} ha colla cubica due punti comuni e quindi la cubica stessa viene incontrata in *un* punto da un iperpiano per C_{n-3}. In tal caso la Φ viene rappresentata sul piano mediante un sistema lineare di cubiche proiezioni (dalle intersezioni con C_{n-3}) delle sezioni iperplanari di Φ.

Se su Φ vi è una quartica razionale normale di S_4, l' intersezione residua di Φ con un iperpiano generico per essa quartica è una curva irreduttibile C_{n-4} razionale normale d' ordine $n-4$ in S_{n-4}, dalla quale la Φ viene proiettata univocamente sopra una quadrica Q di S_3: in questa rappresentazione le immagini delle sezioni iperplanari di Φ (proiezioni di queste dalle intersezioni con C_{n-4}) sono quartiche ellittiche. Ma allora certo $n \leq 8$, e se $n < 8$ queste quartiche (sezioni di Q con altre quadriche di S_3) hanno qualche punto comune: se da un tal punto si proietta Q sopra un piano si ottiene la rappresentazione di Φ sul piano, dove immagini delle sezioni iperplanari sono cubiche: questo caso non conduce dunque ad un resultato diverso dal precedente tranne per $n = 8$. Per $n < 8$ si desumerà dalla rappresentazione di Φ mediante cubiche piane, l'esistenza su di essa di una C_{n-3} dalla quale Φ viene proiettata univocamente sopra un piano ecc.

Si noti poi che dovrà aversi in ogni caso $n \leq 9$, poichè ∞^9 sono tutte le cubiche del piano.

Riepilogando le cose dette ed includendo anche il caso noto $n = 3$*), possiamo dunque enunciare il

Teorema di Castelnuovo-Del Pezzo**). *Ogni superficie algebrica d' ordine n a sezioni ellittiche, non rigata, è razionale e può rappresentarsi sul piano:*

*) Cfr. Cremona, Cr. J. Bd. 68.

**) Castelnuovo, Accad. dei Lincei, Gennaio 1894.

1º) *o con un sistema lineare di cubiche con* $9-n$ *punti base* ($n \leq 9$),

2º) *o con un sistema lineare di quartiche con due punti base doppi* ($n=8$)*) (rappresentazione equivalente a quella sopra una quadrica mediante un sistema di quartiche ellittiche senza punti base).

Possiamo aggiungere che ove la superficie in questione Φ sia normale ed $n>3$ la rappresentazione viene data:

1º) nel 1º caso proiettando la Φ sopra un piano da una sua curva irreduttibile C_{n-3} razionale normale d' ordine $n-3$ (in S_{n-3}),

2º) nel 2º caso proiettando la Φ sopra un piano da una sua quartica irreduttibile di S_4 e da un punto.

7. *Superficie a sezioni iperellittiche di genere* $p>1$**). Rivolgiamoci allo studio delle superficie a sezioni iperellittiche (di genere $p>1$): sia F una tal superficie che può supporsi appartenente ad S_3 (ove in caso opposto si proietterebbe da punti esterni).

Anzitutto si supponga che F sia razionale. Nella rappresentazione piana le immagini delle sezioni di F sono curve iperellittiche C di genere p e d' un certo ordine n: vi sono ∞^{p-1} curve K d' ordine $n-3$ aggiunte alle nominate d' ordine n; una K sega ogni C in coppie di punti coniugati (sulla curva iperellittica C); perciò della K passante per un punto O del piano fa parte il luogo dei punti coniugati di O sulle curve C passanti per O; segue che le curve K si compongono di $p-1$ curve d' un fascio ciascuna delle quali sega in *due* punti coniugati le C: in conseguenza su F vi è un fascio (lineare) di coniche e la conica del fascio passante per un punto è il luogo dei punti coniugati di esso sulle sezioni di F***).

Prescindiamo ora dalla ipotesi della razionalità di F. Allora possono farsi due ipotesi:

1º) I coniugati d' un punto generico O di F sulle sezioni per esso invadono tutta la superficie:

2º) I coniugati d' un punto generico O di F sulle sezioni per esso descrivono una linea.

Nella 1ª ipotesi mentre in ogni piano generico per O vi è *un* coniugato di O sulla curva sezione di F, inversamente ogni punto di F è il coniugato di O sopra un certo numero finito m di sezioni piane per O: in tal guisa i punti della superficie F vengono a corrispondere ai gruppi d' una involuzione (di grado m) nella stella di centro O, e poichè una tale involuzione (come ogni involuzione in un ente

---

*) Del Pezzo, Circolo di Palermo t. I.

**) Cfr. la mia Nota „Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche“ (Accad. dei Lincei, Dec. 1893), nº 2.

***) Cfr. Castelnuovo, Circolo Matematico di Palermo 1890.

algebrico razionale ∞^2) è razionale*), così la F è una superficie razionale. Ma tale conclusione per quanto è stato innanzi osservato, contrasta all' ipotesi che i coniugati di O sulle sezioni di F invadano tutta la superficie. Pertanto la 1ª delle ipotesi fatte deve scartarsi.

Discutiamo la 2ª ipotesi.

I coniugati d' un punto generico O di F sulle sezioni per O descrivono una linea C d' un certo ordine n: il punto O con ogni punto della linea C dà una coppia di punti coniugati sopra ogni sezione di F, sicchè questa è incontrata in *un* punto fuori di. O dai piani per O e quindi ha il punto O come $(n-1)$ plo; la C è dunque una linea piana o si compone d' una linea piana e di rette per O, ma queste possono (eventualmente) non computarsi come facenti parte della C. Ad ogni punto O della F corrisponde una siffatta curva C, e sussiste la proprietà fondamentale che se la curva C corrispondente ad O passa per il punto O' di F, la curva C' corrispondente ad O' passa per O. Da questa proprietà si deduce che deve essere $n = 1$ o $n = 2$: altrimenti (per $n > 2$) la curva piana C' avrebbe in O' almeno un punto doppio, e però tutti i piani tangenti ad F nei punti della curva piana C passerebbero per O; ciò è assurdo perchè la C (d' ordine n) ha O come $(n-1)$ plo e non si compone (interamente) di rette per O.

Ciò posto distinguiamo i due casi:

1^0) $n = 1$. La curva C corrispondente ad un punto generico O di F è una retta: ogni punto O' di C ha come corrispondente una retta C' per O la quale è fissa al variare di O' su C' (altrimenti F sarebbe un cono col vertice nel punto generico O). In questo caso la F è dunque una rigata iperellittica di genere p, e su di essa le rette C, C', sono rette coniugate.

2^0) $n = 2$. Ogni punto O di F ha come corrispondente una conica C su F passante per esso. Dico che ogni punto O' di C ha come corrispondente le stessa conica C di guisa che le coniche C formano un fascio lineare su F e perciò la F è razionale (per un noto teorema del sig^r^ Noether**).

Suppongasi invero il contrario: ai punti O' di C corrispondono allora (nel senso indicato) ∞^1 coniche C' su F passanti per O. Due coniche C' (non giacendo in uno stesso piano) hanno comune al più un sol punto variabile e quindi o formano un fascio (razionale) ed allora la F è razionale pel citato teorema di Noether, oppure s'incontrano due a due in *un* punto fuori di O, e per ogni punto di F ne passa un

*) Castelnuovo „Sulla razionalità delle involuzioni piane" (Math. Ann. Bd. 44, 1893).

**) „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen" (Math. Ann. Bd. III).

certo numero $\nu > 1$, ed ancora la F è razionale perchè i suoi punti vengono riferiti ai gruppi d' una involuzione ∞^2 $g_\nu{}^2$ sopra un sostegno razionale (la ∞^1 delle coniche)*). In tutti i casi dunque si conclude che la F è razionale, onde, per ciò che è stato osservato in principio, sulla F le coniche C formano un fascio.

Possiamo ora enunciare il seguente teorema generale nel quale sotto la denominazione di curve iperellittiche includiamo anche le curve razionali ed ellittiche (casi particolari della famiglia):

Ogni superficie algebrica le cui sezioni (piane o iperplanari) sono curve iperellittiche di genere p (≥ 0),

1⁰) *è una rigata di genere p,*

2⁰) *oppure una superficie razionale, ed in questo 2⁰ caso per* $p > 1$ *contiene un fascio lineare di coniche.*

8. *Cenno di ulteriori resultati.* Sebbene non necessario pel seguito, credo possa riuscire interessante per il lettore un breve cenno di ulteriori resultati conseguiti dal sig^r Castelnuovo**) che si collegano all'argomento di cui stiamo trattando.

Il teorema concernente la razionalità delle superficie non rigate a sezioni iperellitiche (ellittiche o razionali) può essere riguardato dal punto di vista della così detta *geometria sopra una superficie* (geometria delle trasformazioni birazionali) come una proprietà delle superficie contenenti un sistema lineare ∞^3 di curve iperellittiche. Allora si può cercare un teorema analogo per le superficie contenenti un sistema più ristretto di curve iperellitiche: esso è stato dato appunto dal sig^r Castelnuovo sotto la forma seguente:

Una superficie contenente una rete di curve iperellittiche di genere p (≥ 0) *a serie caratteristica non speciale****) è razionale o riferibile ad una rigata di genere p, o ad una rigata ellittica.*

La dimostrazione ricorre ancora al concetto di utilizzare il teorema della razionalità delle involuzioni piane che mi ha servito nel § 7: ma esso compare quì sotto altra forma. Il sig^r Castelnuovo nota che quel suo teorema può enunciarsi dicendo: „Una superficie φ contenente una qualsiasi serie ∞^1 razionale di curve razionali è razionale“.

---

*) La razionalità delle involuzioni sopra un sostegno razionale ∞^1 è stata stabilita dal sig^r Lüroth (Math. Ann. Bd. 9). Secondo un teorema più generale di Castelnuovo sono anche razionali le involuzioni più volte infinite, non composte, sopra una curva di genere qualunque (Atti dell' Accad. di Torino, Giugno 1893). Sig^r Humbert (Journ. da Math. 1893) e giunto contemporaneamente allo stesso resultato.

**) „Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche“ (Rend. Accad. dei Lincei, maggio 1894).

***) Serie caratteristica della rete (sistema lineare ∞^2) è quella serie segata dalle curve del sistema sopra una curva generica di esso: la denominazione di *non speciale* và intesa nel senso dei sig^i Brill-Noether (Math. Ann. Bd. 7), (serie non contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} appartenente alla curva di genere p).

Infatti se si riferiscono biunivocamente le curve della serie ai piani d' un fascio e si proietta ogni curva della serie sul corrispondente piano nasce una superficie F contenente un fascio di sezioni piane razionali e quindi*) razionale, la quale è in corrispondenza $[m, 1]$ colla φ (dove $m \geq 1$), onde i punti della φ vengono a corrispondere biunivocamente ai gruppi d' una involuzione su F, o ai punti di F, e però la φ è razionale.

Ciò posto si abbia una superficie contenente una rete (sistema lineare ∞^2) di curve iperellittiche di genere p, a serie caratteristica non speciale. Sia dapprima $p > 1$. Sono da distinguere due casi:

1^0 *caso.* Le curve dalla rete passanti per un punto di una curva iperellittica non passano pel coniugato (allora la serie caratteristica della rete non è composta colla $g_2{}^1$ della sua curva generica e quindi è certo non speciale).

I punti coniugati d' un punto O della superficie sulle curve iperellittiche della rete descrivono una curva razionale C; variando il punto O sopra una di queste curve C ha luogo (come è facile vedere) uno dei seguenti casi:

a) o la curva luogo dei coniugati di O non varia, e coincide colla C stessa o è da essa distinta; allora sulla superficie vi è un *fascio* di curve razionali, fascio lineare nel primo caso sicchè la superficie è razionale, fascio di genere p nel secondo caso nel quale la superficie può trasformarsi in una rigata di genere p (essendo le curve della rete unisecanti le C);

b) o al variare di O su C varia la curva coniugata ad O e descrive una serie razionale di curve razionali ed allora la superficie è razionale (questo caso b) non può in realtà presentarsi).

2^0 *caso.* La serie caratteristica della rete di curve iperellittiche sulla data superficie F è composta colla $g_2{}^1$ sulla curva generica della rete. Allora (poichè tale serie caratteristica è non speciale) due curve della rete si segano in più che $2(p-1)$ punti. La F risulta riferibile ad un piano doppio, ed una discussione più minuta**) prova che i piani doppi che così nascono sono quelli razionali di Clebsch-Noether***) e loro degenerazioni.

Sia ora $p = 1$ (e quindi certo non speciale la serie caratteristica della rete). Due curve generiche della rete si seghino in n punti.

Un punto O della data superficie F contato come $(n-1)$ plo sopra ciascuna curva ellittica della rete per O, individua un gruppo di n punti

*) Noether, Math. Ann. Bd. III.

**) Cfr. Castelnuovo l. c.

***) Clebsch, „Ueber den Zusammenhang ...“ Math. Ann. Bd. III. Noether, „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen“, Sitzungsberichte d. ph. med. Soc. zu Erlangen 1878.

appartenente alla g_n^{n-1} completa contenente la g_n^1 caratteristica; questo gruppo contiene un punto fuori di O, che variando la curva per O descrive una linea razionale C. Ora si faccia variare O su C, la linea corrispondente (nel senso indicato) può essere fissa o variabile: nel 1° caso le C formano un fascio (ellittico) e si è condotti alla trasformabilità di F in una rigata ellittica; nel 2° caso si ha su F una serie razionale ∞^1 di curve razionali, quindi F è razionale.

Così risulta stabilito il teorema.

II. I sistemi lineari di superficie ad intersezioni variabili razionali.

9. Lo studio dei sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve razionali si riconduce a quello delle varièta V (di 3 dimensioni) a curve sezioni razionali (cogli S_{n-2} in S_n) di cui i detti sistemi sono rappresentativi.

Si supponga la V (ove occorra) proiettata da punti esterni in un S_4.

Le superficie sezioni iperplanari della V avendo le sezioni razionali sono rigate o superficie di Steiner (n° 4); e nel 1° caso sono quadriche o rigate non quadriche.

1° *caso.* Le superficie sezioni di V sono quadriche. Allora la V è una quadrica di S_4.

2° *caso.* Le superficie sezioni di V sono rigate non quadriche. Allora la V contiene un fascio (serie semplice ∞^1) di piani. Infatti per ogni punto di V passano ∞^1 rette di essa formanti un cono; questo cono è un piano avendo comune *una* generatrice con ogni iperpiano pel punto. Poichè le curve sezioni di V sono razionali anche il fascio di piani su V è razionale.

3° *caso.* Le superficie sezioni di V sono superficie di Steiner del 4° ordine con 3 rette doppie passanti per un punto triplo. Intanto la V è del 4° ordine.

Poichè sono ∞^4 le superficie sezioni di V, vi sono su V dei punti ciascuno dei quali è triplo per infinite superficie sezioni di V e quindi per V: i punti tripli di V formano una retta (essendovi *un* punto triplo sopra ogni sezione) e per questa retta passano tre piani doppi luogo delle rette doppie delle superficie sezioni. Alla V appartiene una congruenza di (∞^2) rette sezioni dei piani per la retta tripla a; tutte queste rette incontrano la a in un punto; dico che questo punto è fisso per le nominate rette ed è quadruplo per la V. Infatti in un punto generico della retta tripla a vi è un cono cubico osculatore costituito dai tre S_3 individuati dalle coppie di piani doppi ed i piani doppi costituiscono la completa intersezione di V col nominato cono osculatore: un punto O di a pel quale passi una retta di V fuori dei piani doppi (la qual retta deve appartenere al cono osculatore in O) è dunque un punto speciale di a quadruplo per V cdd.

Segue che la V è un cono proiettante dal vertice una superficie di Steiner: esso può ritenersi come proiezione (da punti esterni) di un cono normale del 4^0 ordine in S_6 proiettante da un punto una superficie di Veronese*). Dopo ciò si può enunciare il

Teorema. Una varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni razionali è

1^0) *una quadrica;*

2^0) *o una serie semplicemente infinita di piani;*

3^0) *o un cono del 4^0 ordine proiettante dal vertice una superficie di Veronese o una sua projezione.*

10. Le varietà V a curve sezioni razionali sono tutte razionali come è agevole vedere. Come si rappresenteranno esse su S_3?

1^0 *caso.* La V è una quadrica. Rappresentandola su S_3 mediante proiezione da un suo punto si hanno come immagini delle superficie sezioni le ∞^4 superficie di 2^0 ordine passanti per una conica.

2^0 *caso.* La V contiene un fascio lineare di piani. Allora (come ha dimostrato il sig^r^ Segre**) essa può ritenersi proiezione (da punti esterni) d' una varietà normale W dello stesso ordine n appartenente ad un S_{n+2}, e rappresentarsi quindi su S_3 (mediante successive proiezioni da punti della varietà normale W); si hanno allora come immagini delle superficie sezioni iperplanari di V (o di W) superficie d' ordine n con una stessa retta $(n-1)$ pla (ed altri elementi base). Il sig^r^ Segre nel lavoro citato ha considerato più da vicino tali sistemi lineari di superficie il cui ordine può in generale abbassarsi con trasformazioni cremoniane dello spazio.

3^0 *caso.* Per rappresentare su S_3 il cono W del 4^0 ordine (normale in S_6) proiettante da un punto una superficie di Veronese (cono che insième alle sue proiezioni dello stesso ordine costituisce il 3^0 tipo delle varietà considerate) basta anche qui ricorrere a successive proiezioni da punti semplici di W. Con ciò le immagini delle sezioni iperplanari di W riescono del 4^0 ordine; ma l' ordine di tali superficie può essere abbassato con una trasformazione cremoniana dello spazio S_3.

---

*) Dicesi di Veronese la superficie normale del 4^0 ordine in S_5 rappresentabile sul piano mediante il sistema lineare della coniche. Questa bella superficie (le cui proiezioni dello stesso ordine in S_3 sono superficie di Steiner) si trova già accennata dal Cayley „On the Curves which satisfy given conditions" (Phil. Trans. 1868), ed è stata studiata diffusamente dal sig^r^ Veronese (Accad. dei Lincei, Memorie 1883—84) e dal sig^r^ Segre „Considerazioni intorno alla geometria delle coniche" (Atti Accad. di Torino 1885). Cfr. anche Study „Ueber die Geometrie der Kegelschnitte" (Math. Ann. Bd. 27).

**) „Sulle varietà normali a 3 dimensioni composte di una serie semplice razionale di piani" Atti (Accad. di Torino 1885).

Per vederlo nel modo più semplice basta considerare che tutti i coni W (di S_6) sono proiettivi fra di loro e quindi due sistemi lineari di superficie in S_3 rappresentativi di coni W debbono potersi trasformare birazionalmente l' uno nell' altro: in altre parole un qualunque sistema di superficie in S_3 rappresentativo d' un cono W può essere assunto come tipo della famiglia che stiamo considerando; allora si potrà assumere come tipo il sistema ∞^6 delle quadriche che toccano un piano in un dato punto di esso (sistema evidentemente rappresentativo d' un cono W).

Dopo ciò possiamo enunciare il

Teorema. I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve razionali possono trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti tipi:

1⁰) *sistema delle quadriche per una conica;*

2⁰) *sistema di quadriche tangenti in un punto ad un piano;*

3⁰) *sistema di superficie d' un certo ordine n con retta base $(n-1)$ pla, e (forse) altri elementi base.*

III. I sistemi linari di superficie ad intersezioni ellittiche.

11.*) Si consideri una varietà W (di 3 dimensioni) a curve sezioni ellittiche in S_4. Le superficie sezioni iperplanari di essa sono rigate o razionali.

Nel 1⁰ caso la varietà contiene un fascio ellittico di piani (cfr. n⁰ 9—2⁰ caso). Nel 2⁰ caso col ragionamento del n⁰ 5 si prova che le curve d' ordine $n-2$ aggiunte alle sezioni piane di W supposte d' ordine n generano ∞^{n+1} varietà d' ordine $n-2$ (aggiunte a W) mediante le quali (riferite proiettivamente agli iperpiani di S_{n+1}) la W si trasforma in una varietà V dello stesso ordine n normale in S_{n+1} di cui W può ritenersi come proiezione.

Escludendo le varietà contenenti un fascio ellittico di piani (certo non razionali), rivolgiamoci a considerare le varietà normali V d' ordine n in S_{n+1}, a curve sezioni ellittiche.

Dimostreremo che per $n > 3$ esse sono razionali e ne troveremo la effettiva rappresentazione: rimane il dubbio sul caso $n = 3$, rimane cioè dubbia la razionalità delle varietà cubiche di S_4 prive di punti doppi.

12. Anzitutto si noti che le superficie sezioni iperplanari di V sono normali d' ordine n in S_n; quindi per $n > 3$ esiste sopra una superficie sezione generica di V una curva irreduttibile C d' ordine

*) Cfr. le mie Note „Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche" (Rendic. Accad. dei Lincei, Maggio-Giugno 1894).

$n-3$ o d' ordine $n-4$ dalla quale la superficie viene proiettata univocamente sopra un piano o sopra una quadrica (di S_3)*): proiettando V da una tale curva C si ha la rappresentazione univoca di essa sopra un S_3 o risp. sopra una quadrica di S_4 e così resta intanto provato che: *Una varietà di 3 dimensioni a curve sezioni ellittiche d' ordine > 3 o contiene un fascio ellittico di piani (ed è irrazionale), o è razionale.* Dobbiamo ora distinguere il caso in cui la C possa assumersi d' ordine $n-3$ ($n \leq 3$) da quello in cui sulla superficie sezione di V non esista una curva d' ordine $n-3$ (possibile soltanto per $n=8$). Chiameremo risp. di 1ª e 2ª *specie* le varietà V che così nascono, come le relative superficie sezioni.

13. Cominciamo ad occuparci delle varietà V di 1ª specie, d' ordine $n > 3$. La curva proiettante C incontra le superficie sezioni d' ordine n in $n-3$ punti dai quali queste superficie vengono proiettate in superficie cubiche dello S_3 rappresentativo: le V di 1ª specie vengono dunque rappresentate su S_3 mediante sistemi lineari di superficie cubiche L. Le intersezioni variabili di due L sono curve d' ordine n proiezioni da C delle curve sezioni di W (dello stesso ordine), onde il sistema delle L possiede una curva base K d' ordine $9-n$: questa è intersezione parziale di una superficie cubica L con una quadrica fissa Q, residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L.

a) Per $n=4$ la quintica base K intersezione parziale di una quadrica con una superficie cubica irreduttibile, individua sempre da sola un sistema ∞^5 di superficie cubiche ad intersezioni quartiche ellittiche, rappresentativo d' una varietà V del 4⁰ ordine in S_5**) (intersezione completa di due quadriche di S_5).

Per $n > 4$ la curva base K può non individuare più da sola il sistema delle L e quindi possono aversi più tipi di sistemi di L rappresentativi di varietà V.

È ciò che dobbiano indagare più da vicino.

14. Premettiamo il seguente lemma. Proiettando la varietà di 1ª specie V (d' ordine $n > 4$ in S_{n+1}) da una sua curva irreduttibile C d' ordine $n-3$ in S_{n-3}, si ottiene un sistema di superficie cubiche L immagini delle sezioni iperplanari che

---

*) Cfr. n⁰ 6.

**) La varietà V del 4⁰ ordine di S_5 può considerarsi come un complesso quadratico di rette (chiamando punti [di una quadrica] le rette di S_3). La data rappresentazione di V coincide con quella data dal sig^r Klein in un' aggiunta alla nota del sig^r Noether, „Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln" Göttinger Nachrichten 1869). Cfr. anche Caporali, „Sui complessi e sulle congruenze di 2⁰ grado" (Memorie dell' Acad. dei Lincei. 1877—78).

1^0) è determinato dalla curva base K d' ordine $9-n$ e non ha punti base doppi, se per C non passa alcun S_{n-2} segante V secondo una superficie;

2^0) nel caso opposto ha, oltre la curva base K, un punto base O doppio per le L e $(7-n+\varrho)$ plo per la K dove $\varrho = 0, 1, 2$.

La dimostrazione del lemma si fonda sull' osservazione seguente.*) Se esiste un punto O base per le L che impone ad esse nuove condizioni non espresse dal passaggio delle L per K, i piani per O rappresentano sezioni iperplanari parziali di V, d' ordine $< n$; perciò vi è per C uno S_{n-2} segante V secondo una superficie d' ordine $n-3$ (come la C sua sezione) e gli iperpiani per esso segano ulteriormente V secondo rigate cubiche. I piani per O sono immagini delle nominate rigate cubiche, e quindi O è doppio per le L le quali hanno in ogni piano per O altri due punti base semplici. Questi possono essere ambedue distinti da O che è in tal caso $(7-n)$ plo per K; oppure uno solo di essi distinto da O $\{(8-n)$ plo per $K\}$ e l'altro descrivente l'intorno di O sopra un piano osculatore fisso per le L; o infine ambedue infinitamente vicini ad O che è allora $(9-n)$ plo per la K (composta di $9-n$ rette), ed in tal caso le L hanno in O lo stesso cono quadrico tangente.

Osservazione. Giova inoltre osservare che il secondo dei casi precedenti può presentarsi soltanto per $n \leq 6$: infatti in tal caso proiettando da C sopra un piano una sezione iperplanare di V per C, si ha come immagine di C una conica spezzata (essendochè della quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L si stacchi il piano osculatore in O); una delle rette componenti la nominata conica contiene allora tre punti (di K) base per le L, onde la K contiene una cubica (piana), e si ha appunto $n \leq 6$.

15. Il precedente lemma fissa i limiti della discussione che dobbiamo compiere. Vi sono 4 casi da esaminare per ogni valore di n, cioè il caso in cui il sistema delle L è determinato dalla curva base K, e quello in cui vi è inoltre un punto base doppio per le L e $(7-n+\varrho)$ plo per la K (d' ordine $9-n$) dove $\varrho = 0, 1, 2$. Cominciamo dall' ultimo a cui corrispondono soluzioni per ogni valore di n (≤ 9).

b) La curva base K si compone di $9-n$ rette per un punto base doppio O nel quale è fissato il cono quadrico tangente alle superficie cubiche L.

Da questa condizione nasce effettivamente (per $n=3,4,5,6,7,8,9$) un sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche L rappresentativo d' una V, e per $n > 3$ nasce dalla effettuata projezione della V da una sua curva C

*) Il lettore troverà svolti i dettagli della dimostrazione nella 2ª delle mie citate Note dell' Accad. dei Lincei.

(razionale normale d' ordine $n-3$); per $n=4$ il sistema rientra come caso particolare nel tipo a) n⁰ 13. La varietà V così rappresentata è un *cono*, (cono ottenuto proiettando dal vertice una superficie non rigata d' ordine n in S_n a sezioni ellittiche) ossia ha ∞^2 rette per un punto aventi per imagini nello S_3 rappresentativo le rette per O. Inoltre si vede facilmente che la projezione di un tal cono da una sua curva C (razionale normale d' ordine $n-3$) dà sempre come sistema rappresentativo di L quello b) considerato; segue la sua irreducibilità agli altri che verremo trovando.

16. Escludiamo le V che sono coni: restano 3 casi da esaminare per ogni valore di n.

c) Sia $n=5$. La curva base K sia una *quartica di* 2ª *specie* (genere 0).

Si ha così l'unico sistema di L corrispondente alla 1ª ipotesi: invero soltanto una quartica di 2ª specie appartiene ad *una* quadrica (residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L) e quindi soltanto una siffatta quartica determina da sola un sistema ∞^6 di L rappresentativo d' una V. Sotto la condizione di essere di 2ª specie la quartica K può degenerare (appartenendo sempre ad *una* quadrica).

Le varietà V rappresentate dal sistema c) non sono coni. Dico che ogni altra V del 5⁰ ordine che non è un cono può rappresentarsi col sistema c), proiettata su S_3 da una conica C opportunamente scelta su di essa. Invero la V del 5⁰ ordine che non è un cono ove sia rappresentata su S_3 mediante proiezione da una conica C, non dal sistema c), ha cone sistema rappresentativo un sistema ∞^6 di L con un punto base doppio O che è doppio o triplo per la quartica base K; allora si consideri (in S_3) un piano generico per O ed in esso una conica generica γ passante per O e per gli altri due punti base per le L nel detto piano (uno dei quali al più è infinitamente vicino ad O); alla γ corrisponde su V una conica C per la quale non passa alcuna superficie del 2⁰ ordine; proiettando la V su S_3 dalla C si ha dunque (n⁰ 14) come sistema rappresentativo di V il sistema c).

17. Sia $n=6$. Esclusi i coni V si hanno i 3 casi:

d) La cubica base K determina da sola il sistema delle L e però anche *una* quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, quindi la K si compone di 3 rette sghembe. Effettivamente esiste un sistema ∞^7 di L determinato da 3 rette base sghembe rappresentativo d' una V del 6⁰ ordine.

d') Il sistema delle L ha oltre la cubica base K un punto doppio O, semplice per K. Allora K è una cubica gobba appartenente ad ∞^2 (e non ∞^3) quadriche residue dei piani per O rispetto al sistema delle L.

Nasce così effettivamente un sistema ∞^7 rappresentativo di una V proiettata su S_3 da una sua cubica C.

d'') Il sistema delle L ha oltre la curva base K un punto base doppio O che è doppio anche per K, ed inoltre le L hanno in O un punto biplanare con un piano osculatore fisso (cfr. l' Osservazione del n⁰ 14). Allora la K è una cubica piana. Un siffatto gruppo base individua effettivamente un sistema ∞^7 di L rappresentativo di una V e nascente dalla proiezione di essa da una sua cubica C.

I sistemi d), d'), d'') sono irreducibili fra loro, perchè le V rappresentate sono proiettivamente distinte: per verificare l' asserto basta considerare i sistemi di rigate cubiche che possono appartenere alle V dei 3 tipi.

18. Sia $n=7$. Esclusi i coni e rammentando l'osservazione del n⁰ 14, non vi sono da esaminare che i sistemi di L determinati completamente dalla curva base K, o quelli aventi anche un punto base doppio per le L e $(7-n)$ plo per K: la 1ª ipotesi è da scartare giacchè una linea d' ordine < 3 non individua mai da sola *una* quadrica residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L; la 2ª ipotesi conduce soltanto al caso:

e) Per $n=7$; il sistema ∞^8 di L con conica base e punto base doppio fuori di esso. Questo sistema si può trasformare quadraticamente in un sistema di quadriche per un punto.

E non potendosi andar oltre, si conclude che per $n>7$ le varietà V di 1ª specie sono coni.

19. Passiamo alle V, normali di 2ª specie. Queste sono di ordine 8: la loro rappresentazione su S_3 si ottiene proiettandole da una quartica razionale normale C e da un punto fuori di essa. Proiettiamo anzitutto la V da una sua quartica C sopra una quadrica Q di S_4: le immagini delle sezioni iperplanari di V su Q sono superficie di 4⁰ ordine L intersezioni di Q con quadriche di S_4 ed aventi come intersezioni variabili curve d' ordine 8. Sopra V vi è *una* superficie del 4⁰ ordine passante per C (giacente in un S_5); per ottenerla basta considerare un iperpiano per C tangente a V in due punti di C, la cui superficie sezione (di 2ª specie con due punti doppi) si spezza staccandosi da essa una superficie del 4⁰ ordine φ di S_5 passante per C. Ciò posto sulla quadrica Q proiezione di V da C, le L (immagini delle sezioni iperplanari di V) hanno *un* punto base O immagine della φ (superficie su V passante per C e contenuta in un S_5): e poichè le L non hanno curva base intersecandosi due a due secondo curve di 8⁰ ordine, e poichè inoltre tre L han comuni 8 punti variabili, il punto O è doppio per le L. Ora se la Q non è un cono col vertice in O, si può scegliere il punto O (immagine di un punto di V su φ) per proiettare la Q su un S_3: si ha allora la rappresentazione di V

su S_3 dove le immagini delle sezioni iperplanari sono le ∞^9 superficie di 2^0 ordine. Effettivamente

f) il sistema di tutte le quadriche di S_3 è rappresentativo di una V normale di 2^a specie (che non è un cono).

Si supponga invece che Q sia un cono col vertice in O allora le L sono intersezioni di Q con quadriche passanti per O, e quindi le generatrici di Q sono immagini di rette su V; siccome poi ad una superficie sezione generica di V non appartengono rette (di guisachè la superficie diviene un cono se contiene una retta), la V stessa è un cono, proiettante dal vertice una superficie di 2^a specie. Proiettando V da una sua quartica C e da un punto, su S_3, si ha come sistema rappresentativo

f') il sistema delle superficie di 4^0 ordine con punto base triplo, due rette doppie per esso e in esso lo stesso quadrico tangente. Un siffatto sistema rappresenta effettivamente un cono V di 2^a specie.

20. Riassumendo i resultati ottenuti sui sistemi lineari di superficie ad intersezioni ellittiche, possiamo enunciare il teorema:

I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche, e dove tre superficie generiche s' incontrano in più di tre punti (sistemi di grado > 3), si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti sistemi lineari tipici di grado n e dimensione $n+1$, o ad un sistema contenuto in uno di questi:

per $n = 4$

1^0) *il sistema di superficie cubiche determinato da una quintica intersezione parziale di una quadrica (che può degenerare);*

per $n = 5, 6, 7, 8, 9$

2^0) *il sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche con punto base doppio, $9-n$ rette base per esso, ed in esso lo stesso cono quadrico tangente (questo sistema, rappresentativo d' un cono, per $n=4$ rientra nel 1^0 tipo);*

oppure: per $n = 5$

3^0) *il sistema ∞^6 di superficie cubiche determinato da una quartica di 2^a specie (che può degenerare);*

per $n = 6$

4^0) *il sistema ∞^7 delle superficie cubiche passanti per 3 rette sghembe;*

5^0) *il sistema ∞^7 delle superficie cubiche aventi un punto base doppio e contenenti una cubica gobba (che può degenerare) passante semplicemente per esso;*

6^0) *il sistema ∞^7 delle superficie cubiche con un punto base* *biplanare ed in esso un piano osculatore fisso, passanti per una cubica piana di cui il nominato punto è doppio;*

per $n = 7, 8$

7⁰) *il sistema* ∞^8 *o* ∞^9 *delle quadriche con un punto base o risp. di tutte le quadriche;*

per $n = 8$ *anche:*

8⁰) *il sistema delle superficie di* 4⁰ *ordine con punto triplo, due rette base doppie per esso, ed in esso lo stesso cono tangente.*

IV. I sistemi lineari di superficie ad intersezioni iperellittiche.

21.[*]) Rivolgiamoci ora a considerare i sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche propriamente dette (di genere $p > 1$). Occorre per ciò considerare le varietà V a curve sezioni iperellitiche. Supporremo V proiettata (ove occorra) in una dello stesso ordine in S_4.

La varietà V di S_4 a sezioni piane iperellittiche può avere le superficie sezioni iperplanari rigate o pur nò: nel 2⁰ caso le nominate superficie sono razionali e contengono un fascio di coniche.

Se le sezioni iperplanari di V sono rigate, la V contiene un fascio di piani del genere p (cfr. il n⁰ 9) ed è certo irrazionale.

Supponiamo l' opposto. Allora sopra ogni superficie F sezione di V vi è un fascio (lineare) di coniche, e queste segano le coppie della $g_2{}^1$ sopra una sezione piana di F. In conseguenza per una coppia di tale $g_2{}^1$ vi sono ∞^1 coniche su V, una conica appartenendo ad un fascio di iperpiani: le ∞^1 coniche stanno in un S_3 e generano una superficie non contenente la retta congiungente i due punti della coppia della $g_2{}^1$ considerata, e però di 2⁰ ordine: analogamente si costruiscono ∞^1 quadriche su V partendo dalle altre coppie della $g_2{}^1$ sopra una sezione piana iperellittica di V. La serie razionale delle quadriche così ottenuta su V è un fascio (ossia per un punto di V ne passa *una*) giacchè sopra una sezione piana iperellitica di V (di genere $p > 1$) non esiste altra serie razionale di coppie di punti che la $g_2{}^1$ [**]).

Ora se si considera una superficie sezione iperplanare generica di V, le quadriche del fascio nominato segano su questa un fascio (razionale) di coniche il quale ammette quantesivogliano curve unisecanti[***]): una di tali curve C sega in un punto ciascuna quadrica del fascio su V.

---

*) Cfr. la mia Nota „Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche" (Rendic. Accad. d. Lincei, Decembre 1894).

**) Cfr. la nota a pag. 72 della citata memoria del sig^r Segre (Annali di Matematica 1894).

***) Noether, Math. Ann. Bd. III.

Si può supporre che le quadriche del fascio su V appartengano ciascuna ad un S_3 di un fascio, giacchè nell' ipotesi opposta basta trasformare la varietà in una W riferendo proiettivamente gli elementi (quadriche) del fascio agli iperpiani per un piano in S_4, e proiettare (da un punto fisso) ciascuna quadrica sul corrispondente iperpiano.

Ciò posto si proietti ciascuna quadrica del fascio su V (o su W) dal punto di C sopra un S_3: si otterrà una rappresentazione di V punto per punto su S_3, in modo che alle quadriche di V vengano a corrispondere i piani d'un fascio in S_3. Dunque:

Una varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni iperellittiche di genere p (> 1),

1°) *o contiene un fascio di piani del genere p ed è irrazionale;*

2°) *o è razionale e contiene un fascio di quadriche.*

22. Le varietà razionali V a curve sezioni iperellittiche ci forniscono colla loro rappresentazione su S_3 tutti i sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni iperellittiche. Ponendo mente al modo come è stata ottenuta la rappresentazione delle V su S_3, si perviene al teorema:

Ogni sistema lineare semplice di superficie le cui intersezioni variabili sono iperellittiche (di genere > 1) può trasformarsi birazionalmente in un sistema di superficie d' un certo ordine n con retta base $(n-2)$ pla, curva base segante in due punti fuori della retta i piani per essa, e (forse) altri elementi base.

Viceversa un tal sistema rappresenta sempre una V contenente un fascio di quadriche e quindi a curve sezioni iperellittiche.

Si noti infine che nell' enunciato precedente si deve intendere che la curva base bisecante i piani immagini delle quadriche su V può ridursi (tutta o in parte) a punti della retta.