Enriques, Federigo

Conferenze di geometria: fondamenti di una geometria iperspaziale

, Bologna, 1895. ((litogr.), 1894-95)

FEDERIGO ENRIQUES

CONFERENZE DI GEOMETRIA

TENUTE NELLA R. UNIVERSITÀ

DI

BOLOGNA

1894-95

Bologna - Tip. Lit. Luigi Pongetti

Conferenze di Geometria.

Federigo Enriques.

[redacted]

Fondamenti di una Geometria iperspaziale.

1 - <u>Importanza dell'analisi dei fondamenti nella Matematica</u> - Se la storia di un organismo scientifico rispecchia sempre la legge d'evoluzione del pensiero nel formarsi delle varie tendenze che cooperano al suo progresso, sommamente istruttiva riesce sotto questo aspetto la storia della <u>Matematica</u> come quella del più antico ed elevato organismo scientifico, dove la varietà dei rami è venuta crescendo insieme ai mutui vincoli di essi.

Paragonando lo sviluppo che questa scienza ha ricevuto nell'epoca moderna con quello che ad essa competeva nell'antica civiltà greca, non vien fatto di ammirare soltanto i resultati nuovi che si sono ottenuti, ma accanto a questi attraggono la nostra attenzione i progressi portati dal metodo critico nell'investigazione dei principii: anzi non potremmo nemmeno separare gli uni progressi dagli altri, perchè nella Matematica ogni passo avanti ha richiamato l'attenzione all'analisi dei fondamenti, e viceversa da una tale analisi sono scaturiti spesso concetti nuovi ed importanti che hanno permesso di estendere i resultati noti ad un campo più generale.

Il fenomeno del resto non è relativo in modo particolare allo sviluppo di questa anziché d'un altra scienza, e viene anzi rispecchiato nella storia generale della scienza dall'accompagnarsi di una filosofia propria ad ogni stadio della evoluzione del pensiero: così nella Grecia vediamo l'elaborazione del problema logico che dà luogo alla grande opera di Aristotele, accompagnare la formazione della Geometria detta da Euclide; ed allo sviluppo meraviglioso della scienza moderna dove primeggia l'indagine sperimentale, possiamo contrapporre l'elaborazione di una teoria della conoscenza di cui (pur restando nell'ordine delle idee positive) non può essere ormai negato il valore scientifico dopo il grande edifizio elevato da Kant colla sua « Critica della Ragion pura ».
Le precedenti osservazioni d'indole generale valgano non soltanto a far rilevare il valore del problema dei fondamenti nella Matematica, ma anche a richiamare il confronto tra questa e le altre scienze, poiché da tale confronto soltanto può scaturire il retto senso della <u>importanza</u> <u>scientifica</u> d'una ricerca matematica ove manchi (ciò che spesso accade) un criterio di giudizio diretto.(*)
E dopo ciò passiamo a parlare del problema dei fondamenti nella Geometria.

2 - <u>Come</u> <u>debba</u> <u>intendersi</u> <u>la</u> <u>Geometria</u> - La Geometria ha per oggetto lo studio delle relazioni inerenti al concetto di spazio quale esso scaturisce nella nostra mente dall'ordine della sensibilità esterna, ossia quale ci è presentato dall'<u>intuizione</u>. Nel con-

---

(*) L'importanza scientifica d'una questione o di un resultato è da riguardarsi, indipendentemente dalle sue possibili applicazioni pratiche, in relazione al posto occupato nell'ordine dello scibile: non di una questione scientifica particolare ma dell'intera scienza (che è un tutto organico) si può valutare l'importanza sociale in relazione alla pratica e non soltanto guardando alle applicazioni <u>dirette</u>. Così in senso largo, si può dire che tutto ciò che è importante nella teoria è importante nella pratica: l'afcetto di spazio sono comprese le nozioni di molti enti geometrici come punti, linee, superficie, in particolare rette, piani, ecc.: alcuni di questi enti possono esser definiti fissando le loro relazioni con altri già dati (almeno per quanto importa agli sviluppi geometrici), ma alcuni enti debbono supporsi dati a priori come fondamentali non potendosi ridurre ad altri senza cadere in un circolo vizioso. Vi è dell'arbitrio nella scelta degli enti fondamentali dello spazio; fra essi intercedono delle relazioni, alcune delle quali (i teoremi) si dimostrano con deduzione logica da altre già note o supposte note: ma anche qui non si può risalire indefinitamente, ed alcune relazioni geometriche fra gli enti fondamentali debbono essere date a priori come postulati. I postulati vengono desunti dall'intuizione ed il loro complesso tien luogo di definizione per gli enti fondamentali, stabilendo quei mutui rapporti di essi che servono a fissarli per quanto occorre agli sviluppi geometrici.

Nel suo principio e nel suo svolgimento la Geometria intesa nel senso detto prima è scienza soggettiva. Nel principio perchè gli enti fondamentali ed i postulati che ad essi si riferiscono riflettono il concetto dello spazio intuitivo quale esso è nella nostra mente; nello svolgimento perchè definizioni e dimostrazioni colle quali si aggiungono altri enti ai fondamentali ed i teoremi ai postulati, sono soltanto operazioni logiche.

Se allo spazio intuitivo cioè all'ordine della nostra sensibilità corrisponda un ordine delle cose esterne ossia uno spazio reale pel quale i postulati esprimono proprietà reali, è una questione strettamente legata al problema della conoscenza, che trascende dal campo della Geometria intesa nel senso detto innanzi e da cui lo sviluppo di questa è indipendente. Indifferente è quindi, sotto questo aspetto, che la questione si risolva in senso scettico (o idealistico) come nella teoria di Kant, o che invece attribuita allo spazio una realtà oggettiva, come da Helmoltz nel

---

fermazione inversa è anch'essa ugualmente giustificata dalla storia.

discorso « Die Thatsachen in der Wahrnehmung » (*), si discuta il valore dei postulati considerati come verità fisiche. Non soltanto da questioni siffatte non può sorgere nulla che distrugga il valore logico della Geometria, ma neppure qualchecosa che modifichi il nostro concetto intuitivo di spazio; quindi non soltanto la possibilità ma anche l'importanza matematica della Geometria stessa sono indipendenti dalle dette questioni. Ciò non vuol dir punto che la risoluzione di esse sia indifferente sotto l'aspetto fisico-filosofico; perciò il matematico come pensatore non può disinteressarsene anche se preoccupato soltanto della concezione più larga che potrà trarne a vantaggio dello sviluppo matematico. Basti qui ricordare le memorabili ricerche a proposito del « postulato delle parallele » di Lobatschewsky (**), G. Bolyai (***), Gauss, Riemann (****) e Beltrami (*****), che hanno il loro fondamento storico nell'ipotesi di una Geometria fisica diversa da quella generalmente supposta vera fino dai tempi d'Euclide. Nè potremmo chiudere questo cenno delle questioni geometrico-fisiche senza citare (oltre il già nominato discorso) i lavori di Helmoltz « Ueber di Thatsachen die der Geometrie

---

(*) Berlino - 1878 - (Aug. Hirschwald). S'intende che tale affermazione costituisce (come l'altra) soltanto una ipotesi; l'ipotesi realistica nella teoria della conoscenza. Ciò anzi vien rilevato espressamente da Helmoltz.

(**) « Principien der Geometrie » Kasan 1829-30.

(***) « Sulla scienza dello spazio assolutamente vera ecc. » Napoli - Pellerano - 1875. (Trad. dal latino dell'opera di W. Bolyai « Tentatem juventutem studiosam ecc. » {Maros Vasarheli 1832} fatta da G. Battaglini).

(****) « Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen » Gottingen 1854 (trad. franc. Annali di Mat. s. IIª, t. III).

(*****) « Saggio d'interpretazione della Geometria non-euclidea ». Giornale di Mat. di Napoli t. IV). « Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante » (Ann. di Mat. s. IIª t. II. cfr. anche t. V).

zu Grunde liegen»[*] e «Populäre wissenschaftliche Vorträge[**]» nonchè l'opera di Clifford «Il senso comune nelle scienze esatte.[***])

3. Come si formino indirizzi geometrici più generali - Senza addentrarci nella discussione dei principii che stanno a fondamento della Geometria fisica, ci limitiamo ad aver rilevato la distinzione tra questa e la Geometria (soggettiva) che si riferisce al concetto dello spazio intuitivo dato a priori coi suoi postulati che sono per noi assoluti ed indiscutibili; e rileviamo ancora la possibilità di fondare varie Geometrie più generali nelle quali si prescinde da qualche postulato. Proponiamoci di vedere quale importanza debba attribuirsi a tali indirizzi: siamo allora condotti ad esaminare brevemente come il pensiero sia giunto a questa concezione. Ad essa si può pervenire quando si faccia l'analisi dei postulati geometrici seguendo principalmente tre criteri.

1°) Il criterio fisico.

Discutendo i postulati della Geometria (oggettiva) concepita come scienza fisica, si è condotti ad analizzare il vario grado di certezza fisica che ciascuno di essi presenta: sembra allora naturale di prescindere da qualche postulato e costruire una Geometria fondata su ipotesi più ristrette e quindi più generale nel senso che i suoi resultati sono applicabili indipendentemente da alcune ipotesi presentanti un minor grado di certezza. A questo concetto si può dire informata l'origine della Geometria non-euclidea cui si è poc'anzi accennato.

2°) Il criterio fisico-psicologico.

L'analisi psicologica dei nostri concetti ci permette di separare in un concetto complesso vari concetti più semplici che lo costituiscono: si riesce così a disporre i concetti in un ordine di successio-

---

(*) Göttinger Nachrichten - 1868.

(**) Braunschweig - 1876.

(***) Biblioteca internazionale - 1886.

ne siffatto che ciascuno supponga il precedente e sia invece indipendente dai successivi. Questa analisi risponde anche all'origine fisiologica dell'intuizione per mezzo dei sensi. Così quando nella concezione dello spazio teniamo conto soltanto di tutto ciò che si collega alla «vista», veniamo a prescindere dalle nozioni metriche e a fondare una Geometria proiettiva nella quale vengono studiate esclusivamente le proprietà grafiche delle figure.(*)

3°) Il criterio logico.

Quando discutiamo il complesso dei teoremi della Geometria e cerchiamo di ridurre la dimostrazione di ciascuno in guisa da supporre il minimo numero di ipotesi, veniamo a fondare tanti diversi indirizzi geometrici più generali in ciascuno dei quali si pone a base un numero minore di postulati. In questo ordine d'idee basta che le ipotesi poste sieno compatibili (cioè non contraddittorie), nè è essenziale tener conto del significato concreto attribuito agli elementi fondamentali.

Dei criteri enumerati che servono di guida all'analisi dei postulati consideriamo il 2° e il 3° rientranti nel criterio matematico, che si basa sull'intuizione e sulla logica: non sulla logica soltanto come opinano alcuni, perchè ciò ridurrebbe la matematica ad una semplice esercitazione sillogistica.

L'affermazione precedente deve essere intesa convenientemente. Il rigore matematico esige che ogni qual volta una verità vien desunta dall'intuizione, essa venga enunciata esplicitamente come un postulato, ed in tal forma che essa comparisca nell'organismo matematico soltanto come una relazione logica. Lo sviluppo ulteriore dei teoremi si riduce ad una serie di trasformazioni logiche di siffatte relazioni. Dunque l'analisi dei postulati della Geometria qualunque sia il criterio seguito in essa dovrà sempre portare ad un assetto logico di questa scienza, e però il criterio logico è necessario a fondare una Geometria matematica: ma il detto criterio logico non è sufficiente perchè l'indirizzo fon-

(*) Cfr. la «Introduzione storica» al mio corso di Geometria proiettiva per l'anno 1894-95.

dato abbia una importanza matematica o geometrica.
Il criterio d'analisi, che abbiamo detto fisico, resta al di fuori del campo matematico propriamente detto: ciò non ne diminuisce l'importanza anche soltanto in riguardo della matematica: vi è tra la fisica e la matematica lo stesso legame che fra il mondo soggettivo ed il mondo oggettivo, le sensazioni ed i fatti. Questo legame non può essere dimenticato senza perdere di vista lo scopo generale della scienza e senza privare la matematica di una delle fonti più ricche del suo sviluppo.
Cercando un confronto non sapremmo trovarne uno più opportuno che additando i frutti portati nella psicologia dall'unione felice colla fisiologia, e contrapponendo tali frutti di una psicologia positiva alle nebulose teorie metafisiche ed al grossolano sensualismo che si avevano innanzi. Fortunatamente per la nostra scienza, l'unione tra la fisica e la matematica è più antica, e corrispondentemente ha dato frutti più maturi: tale unione non deve essere oggi dimenticata se pure la necessità della divisione del lavoro costringa il matematico a ridurre in un campo più ristretto le proprie ricerche.

4 - Compatibilità e indipendenza dei postulati della Geometria.

I postulati posti a base di una Geometria (sia essa tutta la Geometria o una parte più generale di essa) debbono essere compatibili. Desumendo i postulati dall'intuizione questa compatibilità si può affermare a priori: ci basiamo sul principio di ragione pel quale « più verità concepite insieme come elementi di uno stesso concetto sono compatibili ».
In luogo di fare uso di quel principio può sembrare ad alcuno preferibile di introdurre successivamente gli enti geometrici col convenzionalismo in guisa da mostrare come si possa dare alla Geometria un assetto puramente logico anche nei suoi principii: s'intende che non si definiscono così gli enti geometrici intuitivi ma soltanto degli enti (logici) che possono sostituirli nei rapporti logici, ciò che è indifferente per lo sviluppo ma-

tematico della Geometria. Crediamo però che così facendo si smarriscano i criteri direttivi dell'analisi dei postulati seguendo i quali una tale analisi può riuscire veramente feconda: d'altra parte l'applicazione del principio di ragione comparve ancora in sostanza come fondamento delle leggi logiche.

Soddisfatta comunque la condizione di compatibilità, quando si pone un sistema di postulati geometrici si cerca anche che essi sieno <u>indipendenti</u>, vale a dire che nessuno di essi sia conseguenza dei precedenti.

L'interesse della indipendenza sta in relazione alla formazione degli indirizzi più generali cui abbiamo accennato.

Relativamente ad essa osserviamo:

1.°) Che il significato dell'indipendenza è relativo <u>all'ordine</u> con cui i postulati vengono introdotti.

2.°) Che esso è relativo alla <u>composizione</u> dei postulati stessi, vale a dire che un postulato potrà non essere conseguenza di altri ammessi, ma potrà scindersi in più altri qualcuno dei quali si deduca invece dai precedenti.

E poichè riteniamo che di nessuna affermazione positiva possa dirsi che essa sia <u>semplice</u> (indecomponibile) o almeno che essa non possa venir sostituita da un'altra enunciante un'ipotesi meno restrittiva, (*) attribuiamo alla ricerca dell'indipendenza dei postulati un valore non assoluto, ed a guida di questa ricerca assumiamo il criterio fisico-psicologico desumendo essenzialmente da esso l'ordine dei concetti: cerchiamo dunque l'indipendenza dei concetti più che delle affermazioni ad essi relative, e dai postulati cerchiamo di prescindere specialmente quando ne scaturiscono indirizzi geometrici più generali tenendo di mira la formazione di questi come il maggiore scopo dell'analisi dei postulati.

Colle considerazioni precedenti non intendiamo toglier valore a ricerche che seguono in quella analisi il criterio puramente logico: ciò può esser necessario ove si tratti di giustificare (logicamente) uno sviluppo geometrico già esistente e posto in dubbio, perchè non debitamente fondato: ciò può anche servire a scopi di ricerche particolari.

(*) Sono semplici soltanto le proposizioni del tipo "a è un non b"

5 - Geometria astratta - L'analisi dei concetti geometrici porta ad una prima conseguenza molto importante. Facendo astrazione da alcuni postulati relativi ad una serie di concetti e fondando così un indirizzo geometrico più generale, accade spesso che tale indirizzo si incontra con quello cui si perviene partendo da una diversa serie di concetti, tantochè sotto l'aspetto logico i due indirizzi non differiscono affatto: così una serie di teoremi si traduce in un'altra con una semplice sostituzione di nomi. Ciò può dirsi ad esempio della Geometria proiettiva dello spazio punteggiato e di quella dello spazio di piani.(*)

Questa osservazione ci fa risaltare tutta l'importanza di dare alla Geometria un assetto secondo il criterio logico, comunque i postulati di essa vengano dedotti dall'intuizione, e ci mostra che essa non consiste soltanto nel raggiungimento d'un grado assoluto di certezza logica conforme al rigore matematico. L'importanza matematica del fondare un indirizzo geometrico prescindendo da qualche postulato sta nella sua maggiore generalità: questa generalità consiste nell'applicabilità dei resultati ottenuti al di là dei limiti della primitiva intuizione.

Tenendo di mira fin da principio la estensione che vogliam dare ai resultati ottenuti in un dato campo applicandoli ad altri campi, ci converrà considerare gli elementi fondamentali della Geometria come enti di natura astratta legati da relazioni puramente logiche e concepire in questo senso la scienza fondata come una Geometria astratta. Tale modo di considerare a cui si è naturalmente condotti dalle precedenti osservazioni, è d'altronde indifferente nello sviluppo matematico della Geometria.

L'importanza che attribuiamo alla Geometria astratta non è (come si potrebbe credere) da contrapporsi all'importanza attribuita all'intuizione: essa sta invece nel fatto che la Geome-

---

(*) Cfr. le mie citate lezioni di Geometria Proiettiva.

tria astratta si può interpretare in infiniti modi come una Geometria concreta (intuitiva) fissando la natura dei suoi elementi: sicchè in tal modo la Geometria può trarre aiuto nel suo sviluppo da infinite forme diverse d'intuizione.
Intendiamo che così appunto si faccia quando si discutono i principii della Geometria astratta, ciò che è precisamente l'opposto del prescindere dall'intuizione.
Andiamo a spiegare meglio i concetti esposti con qualche esempio.

6 - Interpretazione della Geometria piana astratta sulle superficie sviluppabili - Estensione. Immaginiamo di studiare la Geometria sopra una superficie. Si dimostra (sotto certe restrizioni) che per due punti della superficie passa una linea geodetica il cui arco intercetto fra i due punti è il minimo arco avente gli estremi in essi; questa linea segna dunque la posizione d'un filo che venga teso fra i due punti rimanendo adagiato sopra la superficie. È chiara dalla definizione l'analogia dell'ufficio che ha la retta nel piano e la geodetica sopra una superficie: potremo dunque nello studio della Geometria sopra una superficie prendere le geodetiche come enti fondamentali e nel successivo sviluppo fondarci soltanto su alcune relazioni riconosciute che ne esprimono proprietà elementari. Così facendo a partire da infinite superficie diverse di date classi perveniamo ad una medesima Geometria: infatti la Geometria così costruita non si altera se s'immagina di flettere la superficie cui si riferisce (concepita come un foglio flessibile ed inestendibile). In particolare troveremo superficie (sviluppabili) la Geometria sopra le quali non differisce dalla Geometria piana se non pel nome dato alle geodetiche, che nel 2° caso vengono chiamate rette.
La Geometria piana astratta si può dunque interpretare indifferentemente come la Geometria intuitiva sul piano o come quella sopra le superficie sviluppabili.(*) Basta fissare che

(*) Si avverta di aver riguardo alla distinzione che va fatta tra la l'elemento designato nella Geometria astratta col nome «retta» denoti una volta la retta intuitiva, ed un'altra volta la geodetica d'una superficie sviluppabile.

Ai medesimi concetti della Geometria piana astratta si perviene partendo dal piano o indifferentemente da un'altra superficie sviluppabile. Immaginiamo che nello studio della Geometria piana astratta si prescinda da qualche postulato: ove si abbia di mira la interpretazione di essa come Geometria sopra una superficie, ciò equivale a considerare le superficie che soddisfano ad alcune proprietà delle sviluppabili ma non a tutte, dunque ad allargare la classe delle superficie considerate. Ciò mostra tutto il valore della maggiore generalità ottenuta. Così in particolare la Geometria piana che prescinde dal postulato d'Euclide sulle parallele è interpretabile come la Geometria sopra le superficie di <u>curvatura</u> <u>costante</u>; classe di superficie che comprende oltre le sviluppabili anche la sfera, la <u>pseudosfera</u> (*) e le loro deformate. In ciò che si è detto si deve però aver riguardo all'avvertenza posta innanzi nella nota. Come esempio di teorie di Geometria piana indipendenti dal postulato d'Euclide si può pensare la teoria degli isoperimetri, la quale (come è noto) fatta pei triangoli piani riesce identica all'analoga teoria pei triangoli sferici.

In linea storica diremo che la interpretazione della Geometria non-euclidea piana come Geometria sopra le superficie di curvatura costante è dovuta a <u>Beltrami</u> (l. c. P. 2). Specialmente egli si è occupato di vedere se esistono superfi.

Geometria sopra <u>tutta</u> una superficie (definita da una certa legge) e quella sopra regioni limitate di una superficie: se (come generalmente) si chiama «sviluppabile» anche una superficie che può distendersi sopra una regione di piano, si dovrà limitare a questa regione la Geometria piana che si vuole interpretare sulla superficie.

(*) La pseudosfera è la superficie generata dalla rotazione attorno all'asintoto di una curva (trattrice) caratterizzata dalla proprietà che il segmento di ogni sua tangente intercetto fra

cie sulle quali valga la Geometria non-euclidea di tutto il piano (e non di una regione soltanto), ed ha dimostrato che la pseudosfera si può considerare come un intiero piano (astratto) di Lobatschewsky (cioè un piano iperbolico nel quale per ogni punto passano due parallele (*) ad una retta data). Invece benchè una regione (convenientemente limitata) di sfera possa sempre considerarsi come una regione di un piano (astratto) di Riemann (cioè di un piano, ellittico, nel quale non vi sono coppie di rette parallele), tutta la sfera non può considerarsi come un intiero piano di Riemann (giacchè per due punti opposti della sfera passano infiniti circoli massimi = geodetiche). Ma la Geometria non-euclidea ellittica dell'intiero piano astratto può ricevere altre interpretazioni: ad esempio (secondo il Klein) come Geometria metrica della stella di raggi, detto «punto» la «retta» e «retta» il «piano» della stella.
Sulle cose dette ci proponiamo di ritornare a suo tempo per dimostrarle e collegarle ad altri concetti. Valga qui l'averne fatto menzione a far comprendere come la considerazione della Geometria astratta permetta di trarre profitto dalla maggiore generalità di un indirizzo geometrico ottenuto prescindendo da qualche postulato. Ed osserviamo fin d'ora il legame fra due specie di progressi ottenuti con queste generalizzazioni, riferendoci al caso del postulato d'Euclide: da un lato l'estensione alle superficie di curvatura costante di una parte della Geometria sopra le sviluppabili; dall'altro il resultato (di natura critica) che il postulato d'Euclide è indipendente dagli altri postulati della Geometria piana che generalmente gli si premettono, poichè questi e non quello sono veri sulla pseudosfera (e nella stella), mutatis mutandis.

7 - Interpretazione della Geometria proiettiva astratta come teoria dei sistemi lineari di superficie o di curve o delle in-

---

il punto di contatto e l'asintoto è una data costante R.
(*) Rette che incontrano la data e sono limiti di una secante variabile.

soluzioni sulla retta. - Riferiamoci ad un altro esempio. Giova per questo premettere le seguenti nozioni sulle forme algebriche e sui loro sistemi lineari. Dicesi forma algebrica di grado n in k variabili $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_k$, una funzione razionale omogenea di esse

$$f(x_1 x_2 \ldots\ldots x_k) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots\ldots x_k^{i_k}$$

$$(i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n)$$

Più forme $f_1\ f_2 \ldots\ldots f_m$ dello stesso grado n si dicono indipendenti se tra esse non intercede una relazione lineare identica

$$\sum_1^m a_i f_i = 0$$

dove le a_i sono costanti. Se le $f_1\ f_2 \ldots\ldots f_m$ sono indipendenti, le forme

$$\sum_1^m \lambda_i f_i$$

dove le λ_i sono m parametri omogenei (definiti a meno di un fattore) costituiscono un sistema lineare ∞^{m-1} (ossia di $m-1$ dimensioni) che (come si può verificare) viene individuato ugualmente da m qualunque forme indipendenti scelte in esso e contiene tutti i sistemi lineari determinati da $r < m$ forme di esso.

I sistemi lineari ∞^2 e ∞^1 si dicono rispettivamente reti e fasci.

Ciò posto si assuma nello spazio un sistema di coordinate lineari omogenee $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$. Se $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$ è una forma di grado n, la superficie

$$f = 0$$

si dirà algebrica di ordine n. In luogo di parlare di sistemi lineari di forme potremo parlare di sistemi lineari di superficie (così rappresentate), intendendo di comprendere in un sistema lineare anche le superficie immaginarie rappresentate da equazioni reali, di cui sarà più tardi spiegato il significato geometrico.

La proprietà geometrica caratteristica per un sistema lineare ∞^m di superficie è che per m punti generici passi una superficie del sistema.(*)

(*) Su ciò ritorneremo in seguito.

Consideriamo in particolare un sistema lineare ∞^3 di superficie d'ordine n

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i = 0$$

Designamo il detto sistema con S.

Se nelle proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva si sostituisce rispettivamente alle parole «punto», «retta», «piano», le parole «superficie di S», «fascio di S», «rete di S», vediamo facilmente che esse esprimono proprietà elementari del sistema S. Basta per convincersene considerare le λ_i come le coordinate lineari omogenee d'un punto dello spazio: le proposizioni geometriche danno luogo a relazioni analitiche che rappresentano alla lor volta proprietà del sistema S, le superficie del quale vengono ugualmente date dalle λ_i. Così per esempio poniamo a riscontro le seguenti proprietà:

Due punti determinano una retta.	Due superficie di S determinano un fascio in S.
Tre punti (non sopra una retta) determinano un piano.	Tre superficie (non di un fascio) in S determinano una rete in S.
Un piano contiene la retta determinata da due suoi punti.	Una rete in S contiene il fascio determinato da due superficie di essa.
Un piano e una retta che non si appartengono hanno comune un punto. ecc.	Una rete ed un fascio di S non contenuto in essa, hanno comune una superficie di S. ecc.

Questa osservazione ci permette di affermare l'identità fra la Geometria dei sistemi lineari S (sviluppata partendo da quelle proposizioni elementari) e la Geometria proiettiva dello spazio, vale a dire ci permette di asserire:

La Geometria proiettiva astratta si può interpretare ugualmente come una Geometria dello spazio intuitivo o come una Geometria dei sistemi lineari ∞^3 di superficie algebriche di dato ordine.

Basta fissare che gli elementi di natura indeterminata designati nella Geometria astratta coi nomi di «punti», «rette», «piani», sieno in un caso gli enti concreti che nella Geometria

intuitiva si designano con tali nomi; nell'altro caso invece «superficie» e rispettivamente «fasci» e «reti».
Il precedente enunciato contiene come caso particolare la legge di dualità della Geometria proiettiva, se le superficie del sistema lineare considerato sono i piani.
Possiamo analogamente considerare nel piano le <u>curve algebriche d'ordine n</u> (reali o no) rappresentate da equazioni (reali) omogenee d'ordine n

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

ed i loro sistemi lineari.
Sulla retta un'equazione (reale)

$$f(x_1 x_2) = 0$$

omogenea, di grado n, rappresenta un gruppo di n punti (reali o a coppie immaginari coniugati): se

$$f_1 \; f_2 \; f_3 \; \cdots\cdots \; f_{m+1}$$

sono $m+1$ forme d'ordine n in x_1, x_2 (fra loro indipendenti) i gruppi

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \cdots\cdots + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$$

formano una <u>involuzione d'ordine n e specie m</u>.
Allora si ha in modo del tutto simile al precedente:
<u>La Geometria proiettiva astratta dello spazio può anche interpretarsi come una Geometria dei sistemi lineari ∞^3 di curve piane algebriche di dato ordine, o come una Geometria delle involuzioni d'ordine n (>2) e di 3ª specie sulla retta</u>.
Come corollari di questo enunciato possiamo considerare l'interpretazione della Geometria proiettiva astratta come Geometria dei sistemi lineari di circoli del piano o della involuzione di 3º ordine e 3ª specie sulla retta.
Diciamo qualchecosa relativamente a questi due esempi per illuminare i concetti posti innanzi.

8 - <u>La Geometria dei circoli nel piano</u> - Due circoli hanno un <u>asse radicale</u> luogo dei punti di ugual potenza rispetto ad essi, tutti i circoli che con uno dei dati hanno lo stesso asse

radicale appartengono al fascio da essi determinato: il fascio è determinato indifferentemente da una sua coppia di circoli, o dall'asse radicale e da un circolo.
Le polari di un punto A del piano rispetto ai circoli d'un fascio k appartengono ad un fascio di raggi. Se al punto A del piano si fa corrispondere una retta nel fascio di quelle polari, esiste <u>una</u> polarità del piano, siffatta che la polare di ogni punto appartiene sempre al fascio delle polari di esso rispetto ai circoli di k. La detta polarità è tale che tutte le coppie di diametri coniugati in essa sono ortogonali: se essa ammette una conica fondamentale, questa è un circolo di k; in caso opposto si può prendere la polarità stessa (uniforme) come definitrice di un <u>circolo immaginario</u> di k. Così k viene ad essere esteso conformemente alla definizione analitica di fascio: debbono ancora essere inclusi in k i due circoli di raggio nullo costituiti dai due punti <u>limiti</u>, ove questi sieno reali; rispetto ad essi si ha una polarità <u>degenere</u>. Lo stesso si dica delle rette che eventualmente potranno comparire in k come circoli di raggio infinito (se si vuole in unione alla retta all'infinito del piano). Anche due circoli (uno o ambedue) immaginari determinano un fascio che però non può esser tutto costituito di circoli immaginari. Tre circoli non appartenenti ad un fascio presi due a due danno luogo a tre assi radicali passanti per uno stesso punto di ugual potenza rispetto ad essi (<u>centro radicale</u>): tutti i circoli che hanno la stessa potenza rispetto al detto centro radicale formano la rete individuata dai tre circoli dati. Ad una rete appartengono tutti i circoli del fascio determinato da due circoli della rete: s'includeranno nella rete anche i circoli immaginari dei fasci in essa contenuti, ed i punti limiti (eventuali) di essi.
Dopo ciò il sistema di tutti i circoli reali, immaginari e nulli del piano apparisce come un sistema lineare ∞^3 secondo la definizione analitica datane. Esso si può considerare come uno spazio, sotto l'aspetto proiettivo, dove i circoli si chiamino «punti», i fasci di circoli «rette», le reti «piani».

Ogni proposizione della Geometria proiettiva può allora essere interpretata come un teorema della Geometria dei circoli. Viceversa ogni proposizione della Geometria dei circoli trova la sua corrispondente nella Geometria proiettiva spaziale, purchè essa sia fondata soltanto sopra le proposizioni che nella Geometria dei circoli equivalgono ai postulati della Geometria proiettiva.

È conveniente osservare che in queste proposizioni il circolo apparisce come elemento, ed i circoli reali non vengono distinti dagli immaginari nè da quelli di raggio nullo o infinito. Alle proiettività dello spazio corrispondono nel piano corrispondenze biunivoche tra circoli, che mutano una rete in una rete, ossia trasformazioni del piano non puntuali che fanno corrispondere in generale ad un punto un circolo: due figure piane concepite come costituite di circoli sono da riguardarsi come identiche in questa Geometria, come due figure proiettive nella Geometria proiettiva. Per conseguenza nelle proposizioni della detta Geometria dei sistemi lineari di circoli il punto o la retta del piano non possono essere distinti in modo speciale da un circolo. Ove si voglia fare la prima distinzione verremo a sviluppare proprietà della Geometria proiettiva in relazione ad una particolare superficie i cui punti rappresentano i circoli di raggio nullo ed ove si faccia la seconda a distinguere un particolare piano rappresentante la rete dei circoli di raggio infinito.

Dopochè i circoli di un piano π si sieno chiamati punti di uno spazio astratto S (che ha come piani le reti) possiamo dare a questi punti una diversa interpretazione considerando S come uno spazio intuitivo (in cui si hanno soltanto le nozioni grafiche). Ciò equivale a porre una corrispondenza biunivoca (proiettiva) tra i punti d'uno spazio intuitivo S ed i circoli del piano π, dove ai piani di S corrispondono le reti, alle rette i fasci, e viceversa.

Daltronde seguendo lo spirito della cosa tale corrispondenza si ottiene analiticamente così: si prendono quattro cerchi indipendenti $f_i = 0$: allora ogni cerchio ha una equazione della forma

$$\sum x_i f_i = 0 \ :$$

le x_i si possono considerare come coordinate omogenee d'un cerchio: possiamo poi interpretarle come coordinate lineari omogenee nello spazio; si viene così ad associare il cerchio $\sum x_i f_i = 0$ del dato piano π, al punto x_i dello spazio. Allora ai circoli di raggio nullo (punti limiti) del piano π corrispondono in S i punti d'una superficie algebrica F', e poichè in ogni fascio di circoli la determinazione dei punti limiti dipende da una equazione di 2° grado, la F' è una quadrica. Non vi sono nel piano fasci di circoli tutti costituiti di circoli di raggio nullo, dunque la F' è una quadrica a punti ellittici.

Operando in S una omografia possiamo trasformare F' in una sfera: ciò equivale ad aver posto in modo conveniente la detta corrispondenza tra i circoli di π e i punti di S.

Si noti però che questa particolarità metrica della quadrica F' non ha neppure significato ove la rappresentazione dei circoli di π coi punti di S venga fatta chiamando «punto» (d'uno spazio proiettivo astratto) un «circolo» di π, poichè manca (finchè non venga introdotto con convenzioni opportune) la nozione metrica di «distanza» di due circoli in π.

La corrispondenza innanzi considerata può porsi anche con costruzioni dirette. Il modo più semplice di ottenerla è quello di proiettare <u>stereograficamente</u> una sfera F' di S sul piano π (da un punto O di F' posto sopra il diametro perpendicolare a π). Allora ad ogni punto A dello spazio S si può far corrispondere il circolo (reale o immaginario) proiezione del circolo sezione di F' col piano α polare di A e viceversa. Ai circoli di raggio nullo (punti di π) corrispondono i punti di F', e la corrispondenza è biunivoca senza eccezione se convenzionalmente (<u>si riguardano tutti i punti all'infinito del piano come uno solo</u> ossia se) si riguarda la retta all'infinito come un circolo di raggio nullo (corrispondente al centro di proiezione O su F'). I punti di S esterni ad F' corrispondono a circoli

reali di π; i punti interni a circoli immaginari.
Da questa rappresentazione deduciamo come esempio alcune proprietà dei sistemi di circoli del piano π.
Un piano sega la sfera F secondo un circolo (reale o no): dunque il luogo dei punti limiti di una rete di circoli è un circolo.(*) Ad un piano esterno ad F corrisponde in π una rete di circoli il cui cerchio limite è immaginario, ad un piano tangente ad F una rete che ha un solo punto limite, ad un piano segante una rete che ha un cerchio limite reale.
Possiamo ora vedere cosa corrisponde alla polarità rispetto alla sfera F nella Geometria dei circoli nel piano π.
Un cerchio reale C di π si può considerare come elemento del sistema dei cerchi e allora gli corrisponde un punto A di S esterno alla sfera F; si può invece considerare come luogo di punti (limiti) ed allora gli corrisponde un circolo di F giacente in un piano α; questo rappresenta una rete che ha C come cerchio limite (rete determinata indifferentemente da tre qualunque dei punti di C considerati come cerchi di raggio nullo). Il punto A e il piano α sono punto e piano polare rispetto alla sfera F. Per vederlo si osservi che un punto di C è punto base per una rete di circoli in π (costituita da tutti i cerchi per esso), ed è unico punto limite in questa rete; la detta rete contiene C; ad essa corrisponde un piano che passa per A tangente ad F in un punto di α, dunque tutti i piani tangenti ad F nei punti del circolo segato da α passano per A; ciò significa appunto che A è il polo di α rispetto ad F.
Si ottiene dunque nel piano π una corrispondenza (polarità) tra cerchi e reti di cerchi, dove ogni cerchio è il luogo dei punti limiti della rete polare: in questa corrispondenza ad ogni fascio di cerchi corrisponde un fascio polare.
Due fasci polari sono in questa relazione: in generale uno di essi possiede due punti base e non punti limiti; l'altro ha co-

(*) Ciò si vede subito anche direttamente. Se O è il centro radicale della rete e k la potenza di esso rispetto ai cerchi della rete il cerchio limite è quello di centro O e raggio $\sqrt{k}$ (imma-

me punti limiti i punti base del primo fascio e non ha punti base; in particolare i due fasci possono ambedue esser costituiti dai circoli tangenti in un punto rispettivamente a due rette per questo punto.
Si possono moltiplicare gli esempi per esercizio.
Importa essenzialmente che si osservi come in ogni caso le proprietà dei sistemi lineari di circoli nel piano π ove si considerino in modo speciale i punti di π, appariscono non come proprietà di figure nello spazio S a sè stesse, ma come proprietà di figure poste in relazione alla F: nella Geometria dei sistemi lineari di circoli esse si possono fare scaturire introducendo la polarità fra circoli e reti di circoli innanzi considerata.
Si può esprimere la distinzione fra le due specie di proprietà dicendo che le prime appartengono alla Geometria del piano ottenuta prendendo come elemento il «circolo» (e come elemento correlativo la «rete di circoli»), le seconde appartengono invece alla Geometria del piano ove si prenda per elemento il «punto» (cerchio di raggio nullo). Astrattamente la prima Geometria si può riguardare come la Geometria proiettiva dello spazio, la seconda come la Geometria proiettiva sopra una quadrica nello spazio.
In luogo di considerare i circoli del piano π come i «punti» di uno spazio astratto si possono invece considerare i circoli stessi come «piani» e quindi le reti di circoli come stelle di piani ossia come «punti».
Questo modo di considerare si deduce dal primo ove si passi dalla concezione di un circolo come elemento del sistema dei cerchi in π, alla concezione di esso come cerchio limite di una rete. Si può avere ancora una rappresentazione della considerazione del sistema dei circoli in π come del sistema dei piani d'uno spazio, mediante la proiezione stereografica della sfera F su π, facendo corrispondere ogni circolo C del piano al piano segante su F il cerchio di cui C è

---

ginario se k è negativo).

proiezione: questa rappresentazione si deduce da quella posta innanzi mediante la polarità rispetto alla sfera F. Ai piani (di S) seganti F corrispondono in π cerchi reali, ai piani esterni cerchi immaginari, ai piani tangenti i punti di π (cerchi di raggio nullo): ai punti interni alla sfera F corrispondono reti di circoli in π senza cerchio limite e viceversa.

Confrontiamo ora i due modi con cui si è posto il legame tra la Geometria proiettiva dei sistemi lineari di cerchi del piano e la Geometria proiettiva dello spazio (punteggiato o di piani). Questi due modi consistono:

1º) nel considerare le due Geometrie come due diverse interpretazioni della Geometria proiettiva astratta;

2º) nel porre una corrispondenza conveniente mediante la proiezione stereografica della sfera.

Nei rapporti della Geometria proiettiva la sfera può essere indifferentemente sostituita da un'altra quadrica a punti ellittici (proiettata da un ombelico). Sotto l'aspetto proiettivo i due modi indicati sono perfettamente equivalenti e si può dire stabiliscono l'uno a priori, l'altro a posteriori l'identità della Geometria proiettiva dello spazio intuitivo e di quella dei sistemi lineari di circoli del piano.

Ma dalla proiezione stereografica della sfera si possono dedurre anche molte proprietà metriche del sistema dei cerchi del piano in ispecie utilizzando il noto teorema che «la proiezione stereografica della sfera è isogonale (cioè conserva gli angoli)». Queste proprietà metriche non avrebbero neppure significato nella Geometria dei circoli che si ottiene interpretando la Geometria proiettiva di uno spazio astratto. Ma potremo porre convenzionalmente in questo spazio astratto le nozioni metriche in guisa che la interpretazione della Geometria metrica così fondata ci conduca ad una Geometria metrica dei circoli nel piano.

Per facilitare la comprensione di tali convenzioni teniamo presente la proiezione stereografica della sfera F di S sul piano π e la conseguente rappresentazione dei piani di S coi circoli

di F. Ci restringeremo in ciò che segue ad un breve cenno riservandoci a tornare più tardi sull'argomento.
Volendo qui limitarci a considerare circoli reali in π, ci limitiamo a considerare in S i piani corrispondenti cioè i piani seganti la sfera F: similmente ci limitiamo a considerare in π reti di circoli prive di cerchio limite, e quindi in S i punti interni ad F; ciò perchè avvenga sempre che tre reti di cerchi in π abbiano un circolo comune (reale).
In π due cerchi che si segano formano un angolo (angolo delle tangenti nel punto comune) cui corrisponde sulla sfera F un angolo uguale formato dai cerchi sezioni dei piani corrispondenti, noi chiameremo questo (convenzionalmente) <u>angolo dei due piani</u>.(*) Un semplice calcolo prova che il valore dell'angolo di due piani α β così definito è proporzionale al logaritmo del birapporto(**) formato dai piani α, β, coi piani immaginari coniugati del fascio $\alpha\beta$ tangenti alla sfera F; cioè è lo stesso che dire « l'angolo di due cerchi C_α C_β segantisi in un punto A, su π o su F, è proporzionale al logaritmo del birapporto formato dalle tangenti a C_α C_β in A colle rette cicliche del loro piano ».
Allora appare naturale di estendere la definizione di angolo di due piani (seganti F) in S al caso in cui i due piani di S si incontrino in una retta $\alpha\beta$ esterna ad F, assumendo questo proporzionale al logaritmo del birapporto k formato dai due piani coi piani (reali) tangenti ad F per $\alpha\beta$. Ciò equivale ad assumere <u>l'angolo di due cerchi di π che non si segano proporzionale al logaritmo del birapporto k che essi formano coi punti limiti (reali) del loro fascio</u>. Il birapporto k di quattro circoli C_1 C_2 C_3 C_4 di un fascio è sempre reale (anche se i circoli sono immaginari) come risulta dalla rappresentazione di essi coi pia-

---

(*) È appena necessario di rilevare come questa definizione convenzionale differisca da quella ordinaria dell'angolo di due piani.
(**) Parlando di questo birapporto, qui e in seguito, intendia-

ni reali d'un fascio in S; esso ha il seguente significato: « le polari di un punto del piano π rispetto ai circoli C_1 C_2 C_3 C_4 formano il birapporto k nel fascio di raggi cui appartengono ». Dopo ciò possiamo estendere nello stesso modo la nozione di angolo a due cerchi immaginari, i quali determinano un fascio coi punti limiti reali.
Si può precisare gli ordini secondo cui vanno valutati i birapporti k che entrano in considerazione ed il fattore di proporzionalità per cui viene moltiplicato il log. k in modo che l'angolo di due cerchi reali vari, fra 0 e π, ed invece l'angolo di due cerchi immaginari vari fra 0 e ∞, essendo ambedue costantemente reali e positivi; in guisa che (il birapporto k e) l'angolo valutato per due cerchi immaginari cresca indefinitamente quando uno dei due cerchi si avvicina a divenire un punto (cioè il corrispondente piano in S si avvicina a divenire tangente ad F').
Dopo ciò diremo <u>distanza</u> di due punti interni ad S, l'angolo dei due piani polari rispetto ad F' (nel senso definito innanzi); quindi diremo <u>distanza di due reti di circoli</u> prive di cerchio limite, l'angolo dei loro cerchi limiti immaginari: tale distanza è sempre (reale e) positiva; essa varia da 0 a ∞.
Volgendoci ad esaminare le convenzioni poste vediamo che le espressioni « angolo di due cerchi reali » e « distanza di due reti di circoli senza cerchio limite (reale) » hanno in ogni caso un significato geometrico spiccato in relazione alla Geometria metrica dei circoli nel piano, anzi si può dire che la loro nozione deriva da una estensione dell'ordinario concetto dell'angolo formato da due cerchi che si segano. Per conseguenza la Geometria dei circoli fondata su quelle nozioni (che è la così detta <u>Geometria dei raggi vettori reciproci</u>) conterrà delle proprietà che possono riguardarsi come proprietà metriche ordinarie. Ma non si

---

mo fissato convenientemente l'ordine del gruppo dei 4 piani ecc.

può dire che viceversa tutte le relazioni metriche tra circoli che si considerano nella Geometria elementare trovino posto nella Geometria così fondata, giacchè in quella ma non in questa si distinguono le rette (cerchi di raggio infinito) dagli altri cerchi: tale distinzione corrisponderebbe a distinguere nello spazio S il centro da cui è proiettata su π la sfera F' dagli altri punti di F'.

Per quel che riguarda le nozioni metriche poste in S e più precisamente nel corpo sferico interno ad F', vediamo che tali nozioni di angolo di due piani seganti F', e di distanza di due punti interni ad F' in S appariscono soltanto convenzionali, e sono in sostanza nozioni della Geometria proiettiva di S in relazione alla sfera F'. Tuttavia possiamo vedere che la Geometria fondata nel corpo sferico interno ad F' in S, su quelle nozioni metriche convenzionali, ha molte analogie colla Geometria metrica ordinaria. La ragione di queste analogie si può dire consistere nella esistenza di trasformazioni del corpo sferico F' in sè stesso (corrispondenze biunivoche in esso), analoghe ai movimenti dello spazio: questi movimenti del corpo sferico F' verranno definiti convenzionalmente come « omografie di F' che mutano F' in sè stessa »(*), ed allora è chiaro che essi conservano le distanze e gli angoli (secondo le definizioni convenzionali date innanzi). Nel piano π i movimenti del corpo F' sono rappresentati dalle trasformazioni puntuali che mutano i circoli in circoli. Vi è una trasformazione siffatta che muta tre circoli segantisi secondo dati angoli in tre altri qualunque facenti gli stessi mutui angoli. Da ciò si rende chiaro che nella nostra Geometria dei circoli (Geometria dei raggi vettori reciproci), due circoli qualunque sono da considerarsi come uguali tranne i cerchi nulli che, venendo qui distinti in modo speciale, possono esser considerati come punti anzichè come cerchi.

(*) Vi sono ∞^6 omografie che mutano in sè una quadrica. In seguito esse saranno considerate più da vicino.

Dopo ciò si può vedere che tutte le proposizioni fondamentali che compariscono come postulati nella Geometria metrica elementare d'Euclide, escluso il postulato delle parallele, sono valide interpretate convenientemente nella Geometria dei raggi vettori reciproci in Π o in quella posta nel corpo sferico F'.
Ma secondo la definizione data di « distanza » tutti i punti di F' debbono considerarsi come a distanza infinita rispetto ai punti interni ad F', e quindi data una retta <u>a</u> (segante F') per ogni punto A (interno ad F') passano due rette congiungenti A colle sezioni di a F' che dobbiamo riguardare come <u>due parallele</u> condotte ad a per A. Similmente dobbiamo riguardare le reti di circoli del piano, aventi un punto base, come infinitamente distanti dalle reti prive di cerchio limite ecc.
Senza fermarci a verificare la asserita applicabilità delle altre proposizioni metriche, enunciamo la conclusione:
<u>La Geometria metrica dei circoli (reali) nel piano (Geometria dei raggi vettori reciproci) e ugualmente la Geometria entro un corpo sferico che ne è la rappresentazione (ottenuta</u>, nel modo detto innanzi, <u>dalla proiezione stereografica) si possono riguardare come due diverse interpretazioni della Geometria non euclidea iperbolica astratta</u>.
Dunque la Geometria dei circoli del piano non è più assimilabile alla Geometria dello spazio intuitivo euclideo nei rapporti metrici.

<u>Osservazione 1ª</u>. - Sebbene la data rappresentazione della Geometria non euclidea iperbolica come Geometria di corpo sferico F' sembri lontana dal porgere una immagine intuitiva della Geometria dello spazio supposto iperbolico, si può acquistare una idea della analogia della nozione convenzionale di distanza posta tra due punti entro F' ecc, colla corrispondente nozione intuitiva, immaginando entro il corpo sferico F' condizioni fisiche opportune (un'idea simile si trova svolta in alcune considerazioni di <u>Poincaré</u>). Queste condizioni fisiche debbono essere tali che la temperatura vada decrescendo dal centro alla superficie limite di F' in guisa che i corpi diminuiscano indefini-

tamente di volume (in modo conveniente) mentre si muovo-
no allontanandosi dal centro: ciò può immaginarsi in gui-
sa che il concetto di movimento fisico d'un corpo solido in F'
corrisponda al concetto convenzionale di movimento come
omografia che muta F' in sè stessa. Ne seguirebbe che uno
sperimentatore posto entro il corpo sferico darebbe alle nozioni
di «distanza» e «angolo» poste convenzionalmente innanzi,
l'ordinario significato fisico. Si aggiunga che se la sfera è mol-
to grande egli non avvertirebbe che il postulato delle parallele
non è verificato e acquisterebbe del corpo sferico il concetto in-
tuitivo che abbiamo dello spazio.
Questa osservazione deve fare riflettere alla relatività di tutte
le nostre conoscenze: il riconoscimento di tale relatività frut-
to della critica della conoscenza è fondamento del metodo scien-
tifico positivo.

<u>Osservazione 2ª</u> — La Geometria dei raggi vettori reci-
proci cioè la Geometria metrica dei circoli precedentemente
considerata si può riguardare di fronte alla Geometria elemen-
tare del cerchio come una estensione analoga a quella che la
Geometria proiettiva presenta relativamente alla retta.
Nella Geometria elementare del piano si considerano come ugua-
li due figure trasformabili una nell'altra (sovrapponibili) con
un movimento del piano; nella Geometria proiettiva alla
considerazione dei movimenti si sostituisce quella suscetti-
bile di più ampia determinazione delle <u>proiettività</u>, trasfor-
mazioni puntuali che mutano le rette in rette e si conside-
rano in sostanza come <u>uguali</u> due figure <u>proiettive</u> cioè tra-
sformabili con una proiettività; nella detta Geometria dei
circoli si sostituiscono ai movimenti le <u>trasformazioni per
raggi vettori reciproci</u>, che mutano i circoli in circoli, e
si considerano come <u>uguali</u> due figure trasformabili in que-
sto modo. I movimenti, le proiettività e le trasformazioni
per raggi vettori reciproci si diranno rispettivamente le <u>tra-
sformazioni fondamentali</u> delle tre Geometrie. Ciò che vi è
di comune nella <u>uguaglianza</u> considerata dalle tre Geometrie
è la sostituibilità di una figura ad un'altra <u>uguale</u> nell'or-

dine delle proprietà che si considerano. Sempre due figure uguali ad una terza sono uguali fra loro, e però componendo ossia facendo il prodotto di due trasformazioni fondamentali di una Geometria si ottiene una trasformazione di questa: per tale proprietà (unita all'esistenza di una trasformazione inversa accanto a ciascuna) si dice che le trasformazioni fondamentali di ciascuna di quelle Geometrie formano un gruppo: le proprietà che appartengono rispettivamente alle tre Geometrie sono quelle che godono di carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni del gruppo (cioè che sono comuni a tutte le figure uguali in esse). Su queste osservazioni (dovute al Klein) ritorneremo più tardi per dare uno svolgimento molto più ampio a tali concetti.
Basti qui notare per ultimo che il gruppo di trasformazioni della Geometria elementare (movimenti) è contenuto negli altri due gruppi considerati che però sono più ampi: quelle trasformazioni per raggi vettori reciproci che lasciano fermi i punti all'infinito(*) (i quali qui si considerano come un solo punto) costituiscono le similitudini fra cui sono i movimenti. Le proprietà della Geometria piana proiettiva e di quella per raggi vettori reciproci sono proprietà della Geometria elementare ma non viceversa: le proprietà comuni alle prime due Geometrie si possono riguardare come proprietà della Geometria elementare, dove alla considerazione delle figure uguali si è sostituita quella più generale delle figure simili.
Per notizie storiche sull'importante sviluppo che ha avuto sotto vari aspetti la Geometria dei circoli del piano rimandiamo alla prefazione della « Cyclographie » di Fiedler (1883).
La considerazione della Geometria dei raggi vettori reciproci nel piano come una interpretazione della Geometria metrica iperbolica dello spazio mediante la rappresentazione data nel corpo sferico, deve essere ricollegata alla grande se-

(*) Tornando alla rappresentazione data innanzi nel corpo sferico F, si avrebbe fra le omografie che mutano in sè la sfera F quelle che lasciano fermo il centro di proiezione.

rie di ricerche sulle determinazioni metrico-proiettive di cui parleremo più tardi.

- <u>La Geometria delle involuzioni di 3° ordine sulla retta</u> - Vogliamo parlare della Geometria delle involuzioni di 3° ordine sulla retta; riferiamoci innanzi al caso più semplice e notissimo delle involuzioni di 2° ordine.
Tutte le coppie di punti della retta (reali e immaginarie coniugate) si possono considerare come le «rette» d'un piano astratto: dando poi ad esse il significato intuitivo si viene a porre una corrispondenza biunivoca tra le rette d'un piano π e le coppie di punti d'una retta a.
Se $f_1\, f_2\, f_3$ sono tre forme quadratiche indipendenti, la detta corrispondenza si ottiene semplicemente considerando le u_i $(i=1,2,3)$ una volta come coordinate omogenee d'una coppia

$$\Sigma u_i f_i = 0$$

su a, ed un'altra volta come coordinate omogenee d'una retta nel piano π. I punti del piano π rappresentano involuzioni ordinarie (di 1° specie e 2° ordine) su a. Le involuzioni <u>degeneri</u> costituite dalle coppie con un punto fisso vengono rappresentate in π dai punti d'una linea algebrica C; ma questa è incontrata da una retta in due punti (al più), perchè una coppia di punti u a appartiene a due involuzioni degeneri: dunque la C è una conica: le sue tangenti rappresentano i punti di a considerati come coppie coincidenti.
A questa corrispondenza tra le coppie di punti d'una conica e i punti d'una retta si giunge anche semplicemente proiettando una conica da un punto su una retta del suo piano.
Estendendo le cose dette si possono chiamare piani di uno spazio astratto le terne di punti d'una retta: le involuzioni di 2° specie (e 3° ordine) sono i punti dello spazio astratto.
Ciò equivale a considerare una corrispondenza tra i piani dello spazio S e le terne di punti su a, ottenuta interpretando

le u_i $(i=1,2,3,4)$ una volta come coordinate omogenee dei piani di S ed un'altra volta come coordinate della terna di punti

$$\sum u_i f_i = 0$$

essendo f_i $(i=1,2,3,4)$ quattro forme omogenee di 3° grado in due variabili. Ad un punto della retta a riguardato come punto (fisso) per ∞^2 terne costituenti una particolare involuzione di 2ª specie I corrisponde una stella di piani ossia un (particolare) punto in S. Quindi ai punti di a corrispondono in S i punti d'una linea algebrica che ha comuni con un piano tre punti (perchè una terna di punti su a appartiene a tre particolari involuzioni di 2ª specie, I); la nominata linea di S è dunque una cubica gobba C. Un punto di a si può anche riguardare come una terna costituita da un punto triplo ed allora gli corrisponde un piano di S, osculatore alla cubica C: il punto di contatto di questo piano con C è il punto che corrisponde a quello di a concepito come punto fisso d'una involuzione di 2ª specie.
La Geometria delle involuzioni di 3° ordine su a si può considerare come Geometria proiettiva di S, ma se nella prima vengono considerate proprietà in cui un punto (terna di punti coincidenti) viene considerato in modo diverso dalle altre terne, non si hanno in S proprietà proiettive delle figure a sè stesse ma proprietà delle figure in relazione alla cubica C.
Si osservi come la precedente interpretazione data alla Geometria proiettiva astratta può servire opportunamente a definire la cubica gobba C e quindi riesce utile anche pel solo studio della Geometria dello spazio. Sarebbe facilissimo dedurre di qui le principali proprietà della cubica C. Ad esempio tutti i fasci di piani proiettanti da corde (congiungenti due punti reali o no di C) i punti di C, risultano riferiti proiettivamente alla retta a dove si aggiungano ai suoi punti delle coppie fisse: così si dedurrebbe la generazione di C come luogo dei punti d'intersezione dei piani omologhi di tre fasci proiettivi (dove non vi sono tre piani omologhi passanti per una retta). Similmente si dedurrebbe la generazione della cubica come luogo dei punti d'incontro

dei raggi omologhi incidenti di due stelle omografiche (senza elementi comuni uniti).
Si osservi poi come la corrispondenza proiettiva posta tra i punti di C e i punti di a (resultante da quella fra i piani dello spazio e le terne di punti di a), si può ottenere direttamente proiettando la cubica C su a da una sua corda.
A mostrare l'utilità che si può trarre dalla rappresentazione accennata, prendiamo in esame la polarità rispetto alla cubica C in S. Un piano generico α dello spazio incontra C in tre punti, ed i tre piani osculatori a C in questi si segano in un punto A detto polo di α: come polo d'un piano tangente a C si può assumere l'intersezione della tangente col piano osculatore nel punto non di contatto, e come polo d'un piano osculatore il punto di osculo. Se vogliamo tradurre questa costruzione spaziale sulla retta a dobbiamo far corrispondere ad ogni terna di punti $(\alpha_{11}\alpha_{12})$ $(\alpha_{21}\alpha_{22})$ $(\alpha_{31}\alpha_{32})$ data dall'equazione

$$f(x_1x_2)=\sum a_{3-i,\,i}\, x_1^{3-i}x_2^{\,i}=0 \quad , \quad (a_{s,i}=a_{i,s})$$

l'involuzione definita dai punti della terna contati tre volte

$$\lambda_1(\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2)^3+\lambda_2(\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2)^3+\lambda_3(\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2)^3=0 \quad :$$

i gruppi di questa involuzione si dicono armonici al gruppo dato $f=0$. Cercando le condizioni analitiche perchè un gruppo di equazione

$$\varphi(x_1x_2)=\sum b_{3-i,\,i}\, x_1^{3-i}x_2^{\,i}=0 \qquad (b_{si}=b_{is})$$

sia armonico ad $f=0$, si trova l'equazione di condizione

$$(1) \qquad \sum(-1)^i\binom{3}{i}a_{3-i,\,i}\,b_{i,\,3-i}=0\ .$$

Questa ci mostra che le terne armoniche a due terne sono armoniche a tutte quelle dell'involuzione di 1ª specie che esse determinano, dunque intanto la polarità rispetto alla cubica C in S è ~~una~~ correlazione. Inoltre la (1) è identicamente soddisfatta ponendo

$$b_{i,\,3-i}=a_{i,\,3-i} \qquad (=a_{3-i,\,i})\ ;$$

vale a dire ogni terna di punti è armonica a sè stessa; questo

resultato s'interpreta in S dicendo che ogni piano appartiene al suo polo rispetto alla cubica C, ossia dà il noto teorema che « i piani osculatori in tre punti della cubica gobba s'incontrano sul piano dei tre punti ».
Si avverta che i calcoli (molto semplici) precedentemente accennati riescono di più facile effettuazione facendo uso della notazione simbolica di Clebsch-Aronhold. Ma di ciò e di qualche notizia storica sull'argomento ci proponiamo di parlare più tardi estendendo queste considerazioni a involuzioni di n^o ordine.

10 - Interpretazione della Geometria proiettiva astratta come teoria dei sistemi lineari di proiettività sulla retta - Una proiettività sopra una retta è data da una relazione bilineare tra le coordinate lineari omogenee di due punti corrispondenti $(x_1 x_2)$ $(y_1 y_2)$,

$$f(x_1 x_2, y_1 y_2) = \sum a_{ik} x_i y_k = 0 \qquad (i=1,2,\ k=1,2).$$

Se $f_1=0$ $f_2=0$ $f_3=0$ $f_4=0$ sono le equazioni di quattro proiettività non in particolare relazione fra loro (indipendenti), tra le f_1, f_2, f_3, f_4, non sussiste una relazione lineare identica. Allora ogni proiettività sulla retta può rappresentarsi con una equazione

$$f = \sum_1^4 \lambda_i f_i = 0$$

dove le λ_i sono parametri. Si possono estendere alle forme f (bilineari) in due serie di variabili le denominazioni di sistemi lineari poste innanzi, ed applicare le stesse denominazioni alle proiettività rappresentate sulla retta: si potrà quindi dire che esse formano un sistema lineare ∞^3, nel quale si possono considerare reti e fasci di proiettività rappresentati da equazioni della forma

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

e rispettivamente

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

Al concetto di fascio e rete di proiettività sulla retta si può giungere anche indipendentemente dalle precedenti considerazioni analitiche. Ciò partendo dall'osservazione che tutte le involuzioni sulla retta formano una rete.

A tal fine si definiscano come armoniche due proiettività Π, T, quando il prodotto $T^{-1}\Pi$ è una involuzione: tutte le proiettività armoniche ad una data formano una rete: le proiettività armoniche a due date formano un fascio; esse sono anche armoniche a tutte quelle del fascio delle due date. Così si può fare una teoria sintetica dei sistemi lineari di proiettività sulla retta. Una siffatta teoria è sviluppata elementarmente dal Segre nel lavoro « Note sur les omographies binaires et leurs faisceaux » (Crelle C).

Comunque sia stata posta la teoria dei sistemi lineari di proiettività sulla retta (e basta riferirsi alle definizioni analitiche perchè la cosa riesca subito chiara), si può (analogamente a ciò che è stato detto nel paragrafo precedente) verificare che pei sistemi lineari di proiettività sulla retta valgono le proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva dello spazio, ove si cambino i « punti » le « rette » e i « piani » rispettivamente in « proiettività (sopra una data retta) », « fasci di proiettività », « reti di proiettività »: pertanto deduciamo:

La Geometria proiettiva astratta dello spazio può interpretarsi anche come una Geometria dei sistemi lineari di proiettività sulla retta.

Stephanos (Math. Annalen XXII) e Aschieri (Istituto lombardo 1889) considerando appunto le proiettività sulla retta come i « punti » di uno spazio (astratto) hanno applicato la Geometria proiettiva ordinaria a dedurre proprietà dei sistemi lineari di esse.

Se

$$f_i(x_1 x_2, y_1 y_2) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sono quattro proiettività indipendenti sulla retta a, e quindi

$$\Sigma \lambda_i f_i = 0$$

è l'equazione d'una qualunque proiettività sulla retta a, le λ_i (coordinate d'una proiettività) possono essere interpretate come coordinate di un punto dello spazio S: ciò rende effettivo il passaggio dalla Geometria proiettiva astratta alla Geometria dei si-

stemi lineari di proiettività sulla retta.
Si noti che alle proiettività degeneri sulla retta a corrispondono in S i punti d'una quadrica Q la cui equazione (posto $f_i = \sum a_{ks}^{(i)} x_k y_s$) si ottiene ponendo il discriminante

$$\begin{vmatrix} \sum_1^4 a_{11}^{(i)} \lambda_i & \sum_1^4 a_{21}^{(i)} \lambda_i \\ \sum a_{12}^{(i)} \lambda_i & \sum_1^4 a_{22}^{(i)} \lambda_i \end{vmatrix} = 0 .$$

Allora si vedrebbe subito che due punti reciproci di S rispetto a Q rappresentano due proiettività armoniche su a: in particolare il piano α di S, rappresentante la rete delle involuzioni su a, è il piano polare del punto A che rappresenta l'identità. Due proiettività inverse su a sono rappresentate in S da punti coniugati nella omologia armonica di centro A e piano α ecc.

Le proprietà dei sistemi lineari di proiettività dove si considerano i punti della retta a, e si ha particolare riguardo al carattere d'una proiettività di essere involutoria ecc. non appariscono come proprietà della Geometria di S in sè stessa ma come proprietà di essa in relazione alla quadrica Q, al punto A e al piano α. Ciò sarà meglio illuminato in seguito con altre considerazioni.

11. <u>Iperspazi</u> - Il vantaggio che si può trarre dal concetto della Geometria astratta è sufficientemente dimostrato dagli esempi precedenti: in seguito ne saranno viste applicazioni più ampie. Fermiamoci ora a fare una osservazione di grande importanza che permette di estendere anche molto di più la portata di quella Geometria.
Se la Geometria astratta si interpreta come quella dello spazio intuitivo troviamo delle limitazioni in certe operazioni, che più non sussistono dando alla Geometria astratta una diversa interpretazione. Noi possiamo proiettare una retta da un punto esterno e dar luogo ad un piano; proiettare il piano da un punto esterno e generare l'intero spazio: ma dopo ciò non concepiamo l'esistenza di punti intuitivi ad di fuori dello spazio, e quindi l'operazione del proiettare ha qui un limite nella

natura stessa della nostra intuizione. Eppure sotto l'aspetto logico l'esistenza d'un punto esterno allo spazio pel quale possano condursi infinite rette proiettanti i punti di esso, è una ipotesi compatibile coi postulati precedenti. Non solo, ma questa ipotesi ha un significato concreto se si interpreta la Geometria proiettiva dello spazio come quella d'un sistema lineare di gruppi di curve piane o di superficie algebriche d'ordine >1, o come una involuzione di ordine $n>3$ sulla retta. Nessuna ragione dunque di limitare la Geometria proiettiva astratta allo spazio di tre dimensioni escludendo l'esistenza di punti esterni ad esso: possiamo invece sviluppare la Geometria proiettiva astratta come quella di uno spazio ad n dimensioni (iperspazio) (dove n è un intero qualunque); avvertendo che per $n>3$ dobbiamo cercarne l'interpretazione concreta non più nello spazio intuitivo ma in altre varietà di elementi, ad esempio nei sistemi lineari ∞^n di curve piane, o di superficie algebriche di dato ordine (assai alto), o nella involuzione di ennesima specie (ed ordine $\geq n$) sulla retta:

Possiamo precisare il concetto di spazio ad n dimensioni S_n (inteso in senso proiettivo) partendo da una particolare delle interpretazioni accennate che può ricevere la sua Geometria. Riferiamoci per esempio alla varietà di tutti i «gruppi di n punti» di una retta: un gruppo verrà considerato come elemento «punto» di un S_n. Chiameremo S_r $(r<n)$ contenuto nello S_n una involuzione di specie r e d'ordine n sulla retta: «retta» e «piano» un fascio e rispettivamente una rete di tali gruppi.

Allora sussistono le proposizioni:

Due punti dello S_n determinano una retta di S_n a cui appartengono.

In un S_n: proiettando tutti i punti d'una (qualunque) retta di S_n da un punto esterno (cioè considerando le rette determinate da essi e dal punto esterno) si genera un piano in S_n (come luogo dei punti di queste rette):

proiettando tutti i punti di un piano di S_n da un punto

esterno si genera un S_4 ecc.
In generale:
Proiettando tutti i punti di un (qualunque) S_r di S_n $(r < n)$ da un punto esterno, si genera un S_{r+1} in S_n.
Valgono in un S_3 di S_n tutte le proposizioni della Geometria proiettiva ordinaria (nella quale si prescinde da concetti metrici).
Siffatte proprietà (che saranno più ampiamente discusse nel seguito) possono provvisoriamente assumersi come definizione di un S_n astratto (inteso in senso proiettivo) in quanto esse riducono la definizione di un S_n a quella d'un S_{n-1}, e (in modo ricorrente) a quella degli S_3: esse possono essere immediatamente riconosciute vere ove allo S_n si dia l'interpretazione di varietà dei gruppi di n punti sopra una retta.
Così riguardo alla 1ª proposizione si osservi che se

$$f_1(x_1 x_2) = 0 \qquad f_2(x_1 x_2) = 0$$

sono le equazioni di due gruppi di n punti sulla retta, i due gruppi determinano l'involuzione di 1ª specie

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 .$$

Se $f_3 = 0$ è un gruppo esterno ad essa, l'insieme delle involuzioni di 1ª specie (proiettanti da esso il gruppo di quella prima nominata)

$$a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) + \lambda_3 f_3 = 0$$

costituisce la involuzione di 2ª specie

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \qquad \text{ecc.}$$

In modo del tutto simile può verificarsi che gli elementi (curve o superficie) d'un sistema lineare ∞^n di curve piane o di superficie algebriche di dato ordine, si possono considerare come i «punti» di un S_n astratto (definito nel senso proiettivo detto innanzi). Così per esempio tutte le coniche del piano formano un sistema lineare ∞^5

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5 + \lambda_6 f_6 = 0$$

dove le $f_i(x_1 x_2 x_3) = 0$ sono sei coniche indipendenti; pertanto il sistema di tutte le coniche di un piano può riguardarsi come una immagine concreta della S_5 astratto avente come elementi «punti» le coniche del piano.

Ugualmente il sistema di tutte le sfere dello spazio può riguardarsi come un S_4 ecc. Qui si vede anche la possibilità di porre negli iperspazi le nozioni metriche, e di avere così una estensione della Geometria metrica: ciò si ottiene definendo in modo opportuno la distanza di due punti, quindi l'angolo di due rette ecc.: così la Geometria delle sfere, analoga a quella dei circoli, darebbe luogo ad una estensione ad S_4 della Geometria metrica non euclidea di S_3. Ma sull'argomento delle nozioni metriche torneremo più tardi: si ritenga per ora un S_n definito soltanto in modo proiettivo.
Degli S_3 contenuti in un S_n abbiam detto che per essi debbono valere tutte le proprietà della Geometria proiettiva ordinaria: ognuno di questi S_3 può dunque considerarsi sotto l'aspetto proiettivo come uno spazio intuitivo. Ma qui deve farsi un'osservazione. Abbiam supposto che nella Geometria di un S_3 astratto valgano le proprietà proiettive inerenti allo spazio intuitivo, dato ad esse un significato puramente logico. Viceversa finchè si sviluppa la Geometria proiettiva astratta di S_3 partendo dalle proposizioni fondamentali introdotte, questa trova la sua legittima interpretazione così nello spazio intuitivo come nei sistemi lineari di curve e superficie, nelle involuzioni di n^a specie, ecc. Ma quando si svolga la Geometria di un S_3 tenendo conto della ipotesi che esso è contenuto in un S_n con $n > 3$, cioè operando costruzioni che escono dallo S_3, sorge il dubbio della legittimità di interpretare i resultati ottenuti come teoremi relativi allo spazio intuitivo, ferma pur restando la loro interpretazione in altri casi ad esempio per le involuzioni ∞^3 di gruppi di n punti ecc.
Per comprendere il valore della riflessione precedente basta pensare al fatto che (per quanto sembra) il teorema di Desargues dei triangoli omologici nel piano si dimostra soltanto con costruzioni spaziali, tantochè apparirebbe come un nuovo postulato nella Geometria piana. (*)

(*) Cfr. Klein « Ueber di sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie » (Math. Ann. IV).

È dunque naturale di pensare analogamente che non si possa sviluppare la Geometria di un S_3 considerandolo immerso in un S_n con $n>3$, senza introdurre implicitamente qualche nuovo postulato nella Geometria dello S_3, postulato che potrebbe anche dubitarsi non trovare conferma nello spazio intuitivo. Ma, rilevato il valore del dubbio, ci affrettiamo a dichiarare che la questione viene risoluta dall'osservare la possibilità di porre una proiettività tra lo S_3 intuitivo ed uno S_3 contenuto in un S_n; invero tale proiettività permette di trasportare dall'uno all'altro S_3 le proprietà proiettive indipendentemente dal loro modo di dimostrazione.(*) Così vengono giustificate le applicazioni che degli spazi a più dimensioni S_n vengono fatte allo spazio intuitivo concepito come contenuto in un S_n; applicazioni che potremo dire <u>dirette</u>, e che permettono di trarre dagli spazi a più dimensioni il profitto analogo a quello che nella Geometria piana si trae dall'uso di considerazioni spaziali.
Contro tali applicazioni dirette degli iperspazi si sono levate le maggiori obiezioni alla Geometria iperspaziale, giacchè nulla poteva dirsi finchè essa rimaneva la Geometria dei sistemi lineari di curve o superficie o di altri enti contenuti nel nostro spazio. Ma la questione della possibilità delle applicazioni dirette degli iperspazi allo spazio intuitivo è stata spesso confusa colla questione (fisica o filosofica ma non matematica) della possibilità oggettiva di spazi a più dimensioni contenenti il nostro. Ben diversa è la questione matematica precedentemente posta. Essa è perfettamente analoga alle questioni cui ha dato luogo ogni successivo ampliamento del campo dei numeri. Basta aggiungere ai numeri interi (concepiti come rappresentanti di una classe di grandezze concrete) i numeri fratti, per trovare dei casi in cui a tali numeri fratti non si può dare alcun significato concreto (per esempio ove il numero indichi quello di una riunione di uomini): ciò non toglie

(*) Cfr. Segre « Rivista di Matematica - Vol. I ».

che i numeri fratti possano esser definiti nel campo dei numeri astratti e ricevere la loro interpretazione concreta in molti altri casi: il matematico però li adopera indifferentemente anche in questioni ove essi non hanno un significato concreto come provenienti da operazioni sui numeri interi dati, che altrimenti dovrebbero ritenersi impossibili; e se nel resultato finale compariscono dei numeri interi li interpreta dando loro il relativo significato concreto. Siffatto modo di operare è perfettamente legittimato ove si pensi al modo astratto con cui può svilupparsi l'aritmetica partendo dal concetto di numero intero come dato a priori e ponendo il concetto di numero fratto con definizioni logiche (sviluppando cioè l'aritmetica col convenzionalismo). A nessuno verrebbe in mente che l'applicazione dei numeri fratti nel calcolo statistico potesse esigere come fondamento della sua giustificazione la possibilità di frazionare gli uomini.

Le stesse osservazioni si ripetono analogamente rispetto all'introduzione nel campo dei numeri, dei numeri irrazionali, negativi e complessi. Tale introduzione riceve una prima applicazione ove al numero astratto si dà un significato concreto conveniente come rappresentante di una classe opportuna di enti (ad esempio quando si dà ai numeri reali il significato di ascisse sulla retta, ai numeri complessi il significato di indici dei punti del piano complesso): ma una seconda applicazione non meno importante si ha operando nel campo ampliato dei numeri anche se ai numeri viene attribuito un significato concreto più ristretto ed interpretando in questo senso i resultati, ove sia possibile. Questa seconda specie di applicazioni è giustificata pienamente in tutta la sua estensione dopo la teoria analitica astratta dei numeri e la riduzione del concetto generale di numero al concetto di intero, perchè ogni ragionamento nel campo dei numeri complessi si può tradurre in un ragionamento fatto nel solo campo dei numeri interi.

Una giustificazione del tutto analoga è quella che vien data dalle menzionate applicazioni dirette degli iperspazi allo spazio intuitivo, sicchè nel trattare la Geometria degli iperspazi potremo indifferentemente concepire come elementi (punti) di essi degli enti geometrici di arbitraria natura o i punti intuitivi, riguardando in quest'ultimo caso ogni S_3 immerso nell'iperspazio che si considera come uno spazio intuitivo. Ciò, giova ripeterlo, affatto indipendentemente dalla questione della possibile esistenza reale di iperspazi, o anche soltanto della possibilità di formarsi di uno spazio a più dimensioni un concetto intuitivo desunto dall'ordine della sensibilità. La Geometria astratta degli iperspazi riceverà così una infinità di svariate interpretazioni ed applicazioni geometriche; essa trarrà aiuto nel suo svolgimento da infinite forme diverse dell'intuizione, tenendole presenti tutte ad un tempo; quindi applicherà a diversi campi ciò che è stato riconosciuto in un campo particolare dove l'intuizione ha servito di guida indirizzando il pensiero ad una serie di ragionamenti logici che dall'intuizione primitiva riescono indipendenti.

12. Interpretazione analitica della Geometria astratta.

Abbiamo parlato fino ad ora di interpretazioni geometriche della Geometria astratta: parliamo brevemente di altre interpretazioni che essa può ricevere. In primo luogo l'interpretazione analitica.

È noto come la Geometria analitica di Des Cartes permetta di tradurre ogni resultato analitico in un resultato geometrico e viceversa. Ciò si ottiene mediante l'uso delle coordinate che forniscono, si può dire, il meccanismo di trasformazione. Mediante queste si viene a stabilire un parallelismo tra la Geometria e l'Analisi, parallelismo che coll'uso degli iperspazi non trova più alcuna limitazione nel numero delle variabili che vengono adoperate. Invero si consideri per esempio un sistema lineare ∞^n di enti

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0 \ :$$

le $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_{n+1}$ si possono riguardare come coordinate omogenee di un ente del sistema ossia dei punti di uno spazio (astratto) S_n : in luogo delle $n+1$ λ_i possiamo considerare come coordinate non omogenee delle superficie del sistema o dei punti dello spazio astratto, gli n rapporti $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ $(i = 2, 3 \ldots\ldots n+1)$; con riguardo allora ai valori infiniti di essi.

Comunque coll'uso di tali coordinate la Geometria dello S_n si trasforma nell'Analisi delle $n+1$ variabili omogenee o delle n non omogenee.

Vediamo di scorgere una ragione più intima di una tale trasformazione.

Fissiamo l'attenzione sopra la Geometria proiettiva dello S_3 astratto. Noi possiamo convenire che l'ente designato dapprima astrattamente col nome di «punto» sia una volta il «punto intuitivo», un'altra volta «il gruppo dei mutui rapporti di quattro variabili $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$» cioè il così detto «punto analitico (di un S_3)». È chiaro che nulla vi è da obiettare se questa seconda interpretazione esce dal campo geometrico propriamente detto, perchè il nostro elemento fondamentale astratto dello S_3 è solo vincolato da alcune relazioni logiche elementari, non affatto nella sua natura: resta soltanto la giustificare tale interpretazione verificando che (con designazione opportuna degli altri enti fondamentali) quelle relazioni logiche sono ancora verificate. Per ciò fissiamo ulteriormente che gli enti dello S_3 astratto designati ivi coi nomi di «piano» e «retta», ai quali si dà nel primo caso l'ordinario significato intuitivo, denotino nel secondo caso rispettivamente:

a) l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea

$$u_x = \sum_1^4 u_i x_i = 0 \qquad \text{(piano analitico)}:$$

b) l'insieme delle soluzioni comuni a due equazioni lineari omogenee

$$u_x = \sum_1^4 u_i x_i \quad , \qquad v_x = \sum_1^4 v_i x_i = 0$$

dove non è identicamente

$$v_x \equiv u_x \qquad \text{(retta analitica)}.$$

Dopo ciò tutte le proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva di S_3 (concepita come astratta) ricevono nel 1° caso l'interpretazione intuitiva ordinaria: nel 2° caso si interpretano come le proprietà elementari dei sistemi di equazioni lineari omogenee. Su questa interpretazione non importa insistere perchè le proprietà geometriche ed analitiche che vengono a contrapporsi come i due lati di una unica proposizione della Geometria astratta di S_3, sono notissime e vengono contrapposte come traduzione le une delle altre nella Geometria analitica.

Si interpreti la Geometria astratta di S_3 come la Geometria dei punti analitici, avremo un altro caso in cui potremo concepire punti esterni allo S_3: l'estensione che si ha nella Geometria considerando spazi a più dimensioni ci apparirà del tutto analoga a quella che si ha nell'Analisi introducendo la considerazione di un maggior numero di variabili: invero nell'insieme dei gruppi di variabili omogenee $x_1\, x_2 \ldots x_{n+1}$ (dove $n > 3$), l'insieme dei gruppi $x_1 x_2 x_3 x_4$ si può considerare come quello dei gruppi $x_1 x_2 x_3 x_4\, 0\, 0 \ldots$. Pertanto generalizzando ciò che prima è stato detto per $n = 3$ (*) potremo dire:

<u>La Geometria proiettiva astratta di un S_n può anche interpretarsi come l'Algebra delle sostituzioni lineari sopra $n+1$ variabili omogenee.</u>

Si può ricavare di qui una nuova definizione (analitica) degli S_n. Si osservi per ciò che se tra gli elementi di una qualsiasi varietà V e i punti di un S_n vien posta una corrispondenza biunivoca, anche la V potrà considerarsi come un S_n ove si chiamino S_r in esso i sistemi di elementi che corrispondono agli S_r di S_n: invero con ciò si viene a modificare soltanto la natura dei «punti» dello S_n da cui facciamo astrazione.

Ciò posto si potrà dire:

<u>una varietà di elementi (punti) di natura arbitraria che</u>

(*) Su tale generalizzazione torneremo in seguito.

corrispondono biunivocamente ai gruppi di mutui rappor ti di $n+1$ parametri si può riguardare come un S_n: gli $n+1$ parametri si potranno considerare come coordinate proiettive dei punti dello S_n. Ove si riguardi questa come una definizione degli S_n è da avvertirsi che in questa definizione gli insiemi di elementi dello S_n designati col nome di S_r non sono dati a priori collo S_n, ma solo in relazione colla data rappresentazione dei punti di S_n con coordinate. Si avverta poi che ogni S_r contenuto in S_n è capace di essere ugualmente definito rappresentando i suoi punti con $r+1$ coordinate omogenee. Si può domandare se viceversa dato un S_n definito geometricamente come nel § 11, e dati quindi (a priori) gli S_r contenuti in S_n si può rappresentare i punti dello S_n mediante coordinate proiettive omogenee in guisa che gli S_{n-1} vengano rappresentati da equazioni lineari ecc. A tale questione risponderemo affermativamente in seguito: ne risulterà l'identità delle due definizioni di S_n date nel § 11 (geometricamente) e in questo (analiticamente).

Il precedente raffronto tra l'Analisi e la Geometria si può ripetere anche relativamente alla estensione della Geometria metrica negli iperspazi. Invero considerazioni simili alle precedenti relative all'analisi dei postulati metrici dello spazio intuitivo (S_3) ci permettono di tradurre le proposizioni metriche di esso in altre relative allo studio analitico dei gruppi di tre numeri $x_1\, x_2\, x_3$; compariranno qui le funzioni lineari non omogenee di esse (o più precisamente gli insiemi di valori che le annullano) in luogo dei piani propri ecc.; e comparirà ancora l'espressione

$$\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}$$

a rappresentare ciò che per lo S_3 intuitivo si chiama distanza di due punti (e precisamente dei punti $\{x_1\, x_2\, x_3\}$ $\{x_1'\, x_2'\, x_3'\}$). Questo è del resto soltanto un modo diverso di concepire quel legame tra la Geometria dello spazio intuitivo e l'Analisi nel campo di tre variabili (non omogenee) che viene fissato dall'uso delle coordinate cartesiane.

Vogliasi ora una estensione del concetto dello spazio metrico; si potrà per esempio considerare come un S_n metrico ($n > 3$) l'insieme dei gruppi di n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$; chiamare S_{n-1} proprio nello S_n l'insieme dei valori delle dette variabili che soddisfano una equazione lineare (omogenea o no) ecc; chiamare poi distanza fra due punti $(x_1 \, x_2 \dots\dots x_n)$ $(x'_1 \, x'_2 \dots\dots x'_n)$ l'espressione

$$\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots\dots + (x_n - x'_n)^2}$$

ed analogamente definire (in conseguenza del concetto di distanza) una espressione che venga denominata angolo di due rette ecc. Così si ha l'estensione diretta della Geometria metrica euclidea agli spazi a più dimensioni. Gli S_n in cui vale tale Geometria si diranno S_n euclidei (sottinteso «metrici»): gli S_3 contenuti in tali S_n sono del tutto identici allo S_3 intuitivo (metrico) astrazione fatta dalla natura dell'elemento «punto». Si avverta che nel seguito parlando di S_n ove non si aggiunga altro si supporrà lo S_n definito soltanto in modo proiettivo in guisa che manchino in esso le nozioni metriche.

È opportuno rilevare esplicitamente, ciò che già appare dalle precedenti considerazioni, cioè che la Geometria astratta si può identificare coll'Analisi. Appunto per ciò: Le due scienze debbono coltivarsi insieme. Non soltanto ne deriverà alla Geometria il vantaggio di una generalità e di una potenza di metodi sperimentatisi ormai da Des Cartes in poi; ma ugualmente l'Analisi potrà essere indirizzata alle più belle scoperte dalla feconda intuizione geometrica, come Monge, Clebsch, Klein e Lie hanno insegnato.

Per le cose dette apparirà naturale che nel seguito (pur riferendoci di preferenza ad interpretazioni geometriche intuitive) consideriamo indifferentemente gli enti definiti geometri-

camente o analiticamente.
Sulla identità della Geometria e dell'Analisi abbiamo insistito perchè il formarsi in questi ultimi tempi di <u>indirizzi puri</u> ove si svolge un ramo della matematica senza ricorrere a concetti di altri rami (come per esempio la fondazione di un'Analisi pura con <u>Weierstrass</u>, di una Geometria pura con <u>Steiner</u>, <u>Chasles</u>, <u>Staudt</u> ecc.) ha fatto nascere talvolta un esclusivismo dannoso pel quale si vorrebbe sistematicamente bandito dalla Geometria ogni concetto analitico e viceversa. Non intendiamo di togliere importanza a siffatti indirizzi puri: basti rilevare il perfezionamento dei <u>metodi</u> matematici che così si è ottenuto: in particolare il metodo sintetico che ha condotto la scienza a resultati così splendidi come quelli che nella teoria degli enti algebrici si sono ottenuti in Italia dal <u>Cremona</u> in poi non sarebbe assorto ad un grado così elevato senza la precedente tendenza a fare della Geometria indipendentemente dall'Analisi. Ma non è fuor di luogo contrapporre ai progressi accennati quelli portati invece da un conveniente ravvicinamento dei concetti geometrici ed analitici e poichè si è alluso alla teoria degli enti algebrici, accennare ai resultati così ottenuti nello stesso periodo da <u>Clebsch</u>, <u>Noether</u> ecc.
La tendenza a formare altrettanti indirizzi matematici puri, basati sul minimo numero di concetti, come è conforme alla legge generale d'evoluzione della scienza, così ha avuto negli ultimi tempi un ufficio storico ben determinato di alta importanza; ma oggi sembra che questo ufficio storico debba oramai considerarsi in gran parte come relativo al passato e che nell'attuale momento più ancora vi sia da fare per collegare in un tutto organico diversi indirizzi e profittando dei metodi svariati tendere di regola con tutte le forze al <u>resultato</u>, il quale appartiene non ad un ramo della Matematica ma alla Matematica intera, se pure non si voglia porre in relazione al progresso della scienza in generale.

A conforto delle opinioni espresse rimanderemo al lavoro di Segre « Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche »(*); ivi sono esposte delle larghe vedute sugli indirizzi geometrici che potranno utilmente servire di guida ai giovani nelle loro ricerche.

13- Varietà più volte estese - Vogliamo ora esaminare come si possa giungere alla estensione del concetto di dimensioni dello spazio per un'altra via, molto più generale.

Occorre che ricordiamo prima alcune nozioni elementari dalla teoria della connessione.

Nello spazio intuitivo S_3 « un punto che si muove descrive una linea ». Questa affermazione di un fatto intuitivo è molto complessa poichè in essa si racchiudono implicitamente:

1°) la nozione di un ordine (naturale) di successione dei punti della linea, da cui scaturisce il concetto di segmento; il postulato della continuità (di Dedekind) relativo al detto ordine ecc.

2°) la nozione di « distanza » di due punti sopra la linea o lunghezza di un segmento (ove si riguardi il moto del punto come uniforme):

3°) le varie nozioni che stabiliscono le relazioni tra la linea e il rimanente spazio S_3; così la continuità della linea in S_3,(**) l'esistenza della tangente in ogni punto (direzione del moto) ecc.

Isoliamo col pensiero una linea facendo astrazione dal

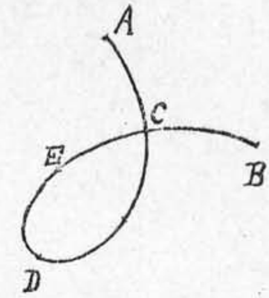
(*) Rivista di Matematica - Volume I.

(**) Tale concetto di continuità è qualcosa di diverso da quello di continuità di un ordine naturale della linea: così per esempio i punti razionali d'un segmento e quelli irrazionali d'un segmento uguale e parallelo possono pensarsi disposti in un ordine di successione continuo ma non corimanente spazio; restano inerenti a questo concetto intuitivo di linea soltanto le nozioni 1) 2). In questo ordine d'idee due linee vengono concepite come identiche allorchè si ottengono l'una dall'altra con una <u>deformazione continua</u> senza estensione; intendiamo che nella deformazione continua della linea (concepita come un filo rigido) mai due punti vengano a sovrapporsi o a staccarsi. Prescindiamo ulteriormente dalla nozione 2): ciò equivale a concepire una linea in sè stessa non più come un filo rigido, ma come un filo di variabile elasticità; restano inerenti alla linea soltanto le nozioni 1), e rispetto ad esse due linee sono da riguardarsi come identiche se si ottengono l'una dall'altra con una deformazione continua con estendibilità (ma senza lacerazioni o duplicature). Così per esempio ogni linea terminata da due estremi e senza <u>punti doppi</u> (cioè tale che il punto mobile generatore non è mai passato due volte per una stessa posizione), può riguardarsi come un segmento rettilineo: ogni linea chiusa senza punti doppi può riguardarsi come un circolo: ogni linea chiusa con un punto doppio come una lemniscata ecc. Lo studio delle linee fatto in questo senso si può ridurre allo studio di segmenti, riguardandosi una linea come la riunione di più segmenti uniti convenientemente per gli estremi (dove si può anche supporre di <u>togliere</u> gli estremi ed ottenere così <u>linee indefinite</u>): il numero di tali segmenti può (almeno in un primo studio delle linee) supporsi finito. Ad ogni linea competono allora come <u>caratteri</u> il numero dei punti doppi (o multipli) e il numero degli estremi. Si può riguardare un punto doppio, comune a due rami della linea come un punto che può esser tolto da un ramo senza togliere la <u>connessione</u> della linea, cioè la possibilità di passare col movimento sulla linea da un punto di essa ad un altro qualunque: togliendo da un ramo della lemniscata il punto doppio essa si

---

stituiscono un insieme di punti continuo nello spazio.

riduce un linea indefinita come la retta.
Un segmento elementare (equivalente ad un segmento rettilineo) può essere ordinato in due modi naturali l'uno inverso dell'altro: una linea chiusa elementare (equivalente ad un circolo) può essere ordinata in infiniti modi naturali, e tutti questi ordini costituiscono due sensi di disposizione circolare: invece una linea aperta con due estremi ed un punto doppio C come quella della annessa figura si possono porre quattro ordini naturali (ACDECB, ACEDCB, BCDECA, BCEDCA) dove però C occupa due posti ecc.



Il concetto intuitivo di «linea» ha come naturale estensione il concetto di superficie come luogo di punti generato dal moto affatto generale di una linea. Anche in questo concetto complesso si debbono distinguere varie nozioni di diversa specie:
1°) le nozioni puramente di posizione, come per esempio la possibilità di congiungere due punti della superficie mediante una linea tracciata su di essa, la divisibilità di una superficie in parti mediante linee in guisa che ogni linea congiungente due punti appartenenti a parti diverse abbia un punto (almeno) comune colla linea di divisione ecc.:
2°) le nozioni metriche di lunghezza di una linea tracciata sopra una superficie e angolo di due linee per un punto:
3°) le nozioni in cui si considerano le relazioni della superficie col rimanente spazio (continuità nello spazio, piano tangente in un punto ecc.).
Isoliamo col pensiero una superficie astraendo dal rimanente spazio, restano soltanto inerenti ad essa le nozioni 1) 2): tutte le superficie ottenute da una stessa flessione (deformazione continua) senza estensione (superficie applicabili ad una data) sono sotto questo rispetto da riguardarsi come identiche: la flessione della superficie si considera sempre eseguita senza lacerazioni o duplicature. Prescindiamo ulte-

riormente dalle nozioni 2), acquistiamo di una superficie un concetto siffatto che tutte le superficie derivate per flessione con estensione da una medesima sono da riguardarsi come identiche. Ogni superficie può (in un primo studio almeno) sotto questo punto di vista, essere riguardata come l'unione di un numero finito di superficie elementari equivalenti a circoli piani, convenientemente collegate al contorno, od anche private del contorno (tutto o in parte) in guisa da costituire superficie indefinite. La teoria delle superficie fatta in questo senso (teoria della connessione o Analysis situs) è stata oggetto di importanti lavori: per la letteratura si potrà consultare _ W. Dick. « Beiträge zur Analysis situs » (*)
Ad esempio è oggetto di studio in questa teoria il numero dei tagli chiusi che possono farsi in una superficie senza spezzarla ecc. Le applicazioni di questa teoria ai vari rami della Matematica (superficie Riemann, poligoni fuxiani ecc.) sono importantissime. Tuttavia la teoria stessa (per quanto io sappia) non è stata sviluppata in modo sistematico facendo astrazione dallo spazio che contiene la superficie e dalle nozioni metriche su di essa, che costituiscono elementi estranei alla teoria stessa.
Non soltanto per desiderio di raggiungere un progresso dal lato critico auguriamo che un tale studio sia fatto in questo senso: può sembrare che così si vengano a crescere senza bisogno le difficoltà già rilevanti che si incontrano in questi studi; ma noi pensiamo invece che tali difficoltà verrebbero più facilmente superate ove si facesse uso di metodi più strettamente collegati all'ordine delle proprietà che si indagano. Si pensi ai progressi (non soltanto critici) portati nella Geometria proiettiva prescindendo sistematicamente dalle proprietà metriche (Staudt), ed ai progressi

---

(*) Una bella esposizione dei principali resultati di questa teoria si può trovare nella memoria di De Paolis « Teoria dei gruppi geometrici ecc. » Accademia dei ~~Lincei~~ - XL - 1890.

raggiunti nell'Analisi prescindendo dalle espressioni analitiche delle funzioni (Riemann).
S'intende che con queste considerazioni intendiamo soltanto di additare una via che ci sembra feconda, non mai di consigliare un esclusivismo dannoso.
Dal moto affatto generale di una superficie si può fare scaturire il concetto intuitivo di solido: si concepisce analogamente una teoria della connessione dei solidi (cioè nello spazio).
Dopo ciò non possiamo proseguire a generare analogamente forme più elevate perchè un solido muovendosi (come una superficie che si muova sopra un'altra superficie) genera ancora un solido.
Facciamo ora un passo ulteriore nella teoria della connessione delle linee, superficie, e dei solidi, che immaginiamo stabilita. Prescindiamo dalla natura dell'elemento «punto»: diamo cioè alla teoria un valore astratto (puramente logico). Bisogna per ciò immaginare che tutte le proposizioni della teoria vengano enunciate come puri rapporti logici tra elementi, e ciò basta sia fatto per le proposizioni fondamentali (postulati).
Allora possiamo dare alla teoria della connessione infinite interpretazioni. Per riferire i nostri ragionamenti ad un campo concreto ed illimitato penseremo come elementi (punti) di una varietà(*) V tutti i solidi dello spazio intuitivo S_3: alle considerazioni svolte si darà contemporaneamente anche il valore astratto derivante dal fare astrazione dalla natura dell'elemento «solido» che consideriamo.
Possiamo acquistare la nozione del movimento in questa varietà V, derivandola dalla nozione intuitiva di movimento d'un corpo solido in S_3: il corpo solido viene qui conce-

---

(*) Alla parola «varietà» si può dare il significato di insieme di elementi: il significato di questa parola potrà essere successivamente ristretto in modo opportuno. Riemann chiama «varietà» l'insieme di tutti i modi di determinapito come deformabile in tutti i modi possibili.

Muovendo un corpo solido in S_3 si ha una <u>successione continua</u> di corpi solidi v_1 che possiamo concepire in senso astratto come una <u>linea</u> v_1 in V. Invero questa successione di corpi (fatta astrazione dalla natura degli elementi) soddisfa a tutte quelle proprietà intuitive che concepiamo come inerenti ad una linea in sè stessa (prescindendo dalle sue relazioni collo spazio e dalla nozione di distanza di due punti su di essa). Una successione v_1 di solidi in S_3 può essa stessa essere concepita come un ente geometrico a cui possiamo applicare la nozione del movimento fissando che <u>muovere</u> la successione equivalga a muovere contemporaneamente i solidi che la compongono in guisa che in ogni istante essi formino una v_1. Allora se moviamo in modo affatto generale la successione dei solidi in S_3, ciò che può considerarsi come <u>muovere</u> la linea v_1 in V, diamo luogo ad un insieme di solidi v_2 che (in senso astratto) si concepirà come una <u>superficie</u> v_2 in V; la denominazione si giustificherebbe anche qui ritrovando nella varietà v_2 tutte le proprietà che pensiamo come inerenti ad una superficie intuitiva in sè stessa (astrazion fatta dalla natura degli elementi dalle relazioni collo spazio esterno, e dai concetti metrici su di essa). Possiamo seguitare l'operazione <u>muovendo</u> v_2 (in modo arbitrario) e generando una varietà di solidi v_3 (sotto-varietà in quella di tutti i solidi) che si potrà considerare come una varietà v_3 di punti in V, analoga ad un solido di S_3. Nè vi è qui alcun limite e l'estensione del procedimento, applicando n volte l'operazione di movimento (eseguita ciascuna volta sulla varietà considerata innanzi) conduce a generare degli insiemi v_n di solidi, che concepiremo come <u>varietà di punti v_n in V (dove n è un intero qualunque)</u>: per esprimere il

---

zione d'un concetto generale.

concetto che si collega a tale generazione, potremo dire che le varietà v_1 (linee) sono ad <u>una dimensione</u>, le v_2 (superficie) a <u>due dimensioni</u> ecc, le v_n sono <u>varietà ad n dimensioni</u>; e potremo dire che: <u>una v_n si può riguardare come una v_1 i cui elementi sono v_{n-1}</u>. La V contenendo in sè varietà ad un numero di dimensioni arbitrariamente elevato si potrà concepire come una <u>varietà ad infinite dimensioni</u>.
Gli S_n che abbiamo definito innanzi appariscono come varietà v_n ad n dimensioni nel senso generale qui considerato, essendo v_{n-1} gli S_{n-1} in essi e potendosi generare S_n con tutti gli S_{n-1} contenenti un S_{n-2}.
Per compiere uno studio delle varietà a più dimensioni occorrerebbe anzitutto desumere dalla generazione intuitiva col movimento delle varietà considerate i postulati che le caratterizzano. In questo esame si può anzitutto ricondurre la questione alle <u>varietà elementari</u> analoghe al segmento o linea elementare ed alla superficie elementare: si dovranno poi collegare fra loro più varietà elementari. Ma non volendo addentrarci nell'esame minuto di tali postulati preciseremo il concetto di varietà elementare (ponendoci forse qualcosa di non necessario) ammettendo di esse una rappresentazione analitica.
Gli elementi d'una varietà, corrispondenti biunivocamente ai gruppi di n parametri indipendenti $t_1\ t_2 \ldots\ldots t_n$ variabili entro intervalli fissati $(a_1 b_1)(a_2 b_2)\ldots\ldots(a_n b_n)$ (o più generalmente soddisfacenti ad opportune disuguaglianze per esempio tali che $t_1^2 + t_2^2 + \ldots\ldots + t_n^2 \leqq R^2$) si possono riguardare come i <u>punti</u> d'una <u>varietà elementare v_n ad n dimensioni</u> che si potrà indicare con $(t_1\ t_2 \ldots t_n)$.
Effettivamente una v_n siffatta, ove i suoi punti si interpretino per esempio come solidi, si può riguardare come generata da n movimenti successivi applicati ad un elemento, ad una v_1 ecc.: ciò anzi in infiniti modi: basta considerare il parametro t_1 come il <u>tempo</u> da cui dipende il movimento dell'elemento generatore della v_1 ecc.

Il concetto così posto di varietà v_n elementare si può esprimere geometricamente dicendo « varietà elementare v_n ad n dimensioni » ogni varietà i cui elementi si riguardano in corrispondenza biunivoca coi gruppi di n punti presi rispettivamente su n segmenti rettilinei (che, senza restrizione, possono volendo supporsi finiti). Il contorno di una varietà $v_n \equiv (t_1\, t_2 \dots t_n)$ dove t_i varia nell'intervallo $(a_i\, b_i)$ è costituito da n varietà elementari $v_{n-1} \equiv (t_1 \dots t_{i-1}\ \sigma\ t_{i+1} \dots t_n)$ che prese insieme costituiscono una varietà chiusa v_{n-1}. Collegando opportunamente al contorno più varietà elementari v_n si deriva il concetto generale di « varietà v_n ad n dimensioni ».

Qui però ha luogo una avvertenza. Si potrebbe credere che il numero delle dimensioni di una varietà fosse un carattere della varietà in sè stessa affatto indipendente dalla generazione della varietà, cioè si potrebbe credere che non si potesse porre una corrispondenza biunivoca tra gli elementi (punti) di due varietà aventi un numero diverso di dimensioni. A questo proposito illuminano le belle ricerche di G. Cantor sulla teoria degli insiemi (*): esse pongono in chiaro come « si può porre una corrispondenza biunivoca tra i punti d'una varietà elementare v_1 (d'un segmento) e i punti d'una varietà elementare, ad n dimensioni, v_n (dove n è qualunque) »: così per esempio tra i punti d'un quadrato o d'un cubo e quelli d'un segmento. Per conseguenza per esempio un quadrato ove (prescindendo da tutte le ordinarie nozioni) si consideri in senso astratto come una varietà di punti, potrà essere riguardato come un segmento: basta per comprendere la cosa immaginare un segmento in corrispondenza biunivoca col quadrato e sostituire idealmente ogni punto del segmento col corrispondente del quadrato. Si osservi come il perdersi delle ordinarie nozioni intuitive in questo te-

(*) Cfr. vari lavori negli « Acta Matematica » e nei « Mathem. Annalen ».

passo dipende dal fatto che la corrispondenza stabilita tra il quadrato ed il segmento in questione è una corrispondenza biunivoca discontinua: così due punti infinitamente vicini del quadrato vengono a sostituirsi, in generale, a punti aventi distanza finita sul segmento. Più generalmente si può vedere che se una varietà v_n ad n dimensioni si vuol riguardare come una varietà v_m con un diverso numero m di dimensioni, si viene a modificare la nozione di <u>continuità</u> nella varietà stessa, ossia a mutare le nostre idee sulla posizione reciproca (o sull'<u>ordine</u>) dei punti della varietà. Si riesce a questo se si suppone la varietà stessa decomposta in varietà elementari v_n, ed in ciascuna di esse si suppone data una rappresentazione analitica. Per tal modo nella varietà $v_n \equiv (t_1\, t_2 \ldots t_n)$ resta fissato il concetto di <u>punto limite</u> d'un gruppo di punti, e si può allora definire come <u>continua</u> una corrispondenza biunivoca tra due varietà quando ad ogni punto limite d'un gruppo di punti nell'una corrisponde un punto limite del gruppo corrispondente nell'altra: Allora sussiste il teorema:

<u>Non si può porre una corrispondenza biunivoca continua tra due varietà aventi un diverso numero di dimensioni.</u> (*)

Il numero delle dimensioni di una varietà apparisce dunque come un carattere della varietà stessa in ordine al concetto di punto limite, o a concetti equivalenti, posti in essa.

La rappresentazione analitica $(t_1\, t_2 \ldots t_n)$ d'una varietà

(*) Si noti che la corrispondenza continua in un senso solo (non invertibile) può condurre da una varietà ad un'altra con un diverso numero di dimensioni: così si hanno esempi di funzioni continue $x = x(t)$ $y = y(t)$ d'un parametro t che fanno corrispondere ai punti di ascissa t d'un segmento i punti d'un quadrato. (Cfr. <u>Peano</u> « Sur une courbe qui remplit toute une aire plane » - Mathem. Annalen 1890).

elementare v_n può considerarsi come una corrispondenza biunivoca continua tra i punti della v_n e i gruppi di numeri $(t_1 t_2 \ldots t_n)$ (variabili nei dati intervalli) costituenti una varietà analitica; i numeri $t_1 t_2 \ldots t_n$ possono considerarsi come <u>coordinate</u> dei punti di v_n: ponendo una corrispondenza biunivoca continua tra la data v_n ed un'altra varietà analitica, si ha in v_n un'altra rappresentazione analitica, cioè si opera in essa una <u>trasformazione di coordinate</u>.

Ora le proprietà di una varietà elementare v_n formanti oggetto delle nostre considerazioni, cioè quelle inerenti alla <u>teoria della connessione</u> possono essere precisate rendendole in parte indipendenti dalla generazione conducente ad una loro particolare rappresentazione analitica, che ha servito a porre in esse il concetto di punto limite. Si fisserà a tale scopo di considerare come proprietà inerenti alla v_n tutte quelle che hanno carattere d'<u>invariantività</u> rispetto alle corrispondenze biunivoche continue poste in v_n; vale a dire quelle proprietà collegate alla iniziale rappresentazione analitica $t_1 t_2 \ldots t_n$, che riescono indipendenti da quel sistema di coordinate, cioè possono ugualmente riferirsi ad un altro sistema di coordinate $x_1 x_2 \ldots x_n$ legate alle prime mediante le formule

$$(1) \begin{cases} x_i = f_i(t_1 t_2 \ldots\ldots t_n) \\ t_i = \varphi_i(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \end{cases}$$

dove le f_i φ_i sono funzioni continue senza eccezione nel dato campo di variabilità.

Le cose dette si riporteranno a varietà composte di varietà elementari fissando opportunamente il concetto di corrispondenza biunivoca continua tra due di esse avuto riguardo al collegamento delle varietà elementari fra loro ecc.

È essenziale qui notare come <u>componendo</u> due corrispondenze biunivoche continue (cioè eseguendo l'una dopo l'altra due trasformazioni (1) si ottiene ancora una corrispondenza biunivoca continua. Ciò anche se si tratti di corrispondenza tra due varietà anzichè in una stessa. Di qui deriva la possibilità di sostituire l'una all'altra due varietà in corrispondenza biunivoca continua nei rapporti della teoria della connessione: due varietà siffatte sono dunque da riguardarsi in questa teoria come due figure uguali nella Geometria elementare, o come due figure proiettive nella Geometria proiettiva.

Come esempio di proprietà inerenti alla teoria della connessione di una varietà elementare v_n citiamo la possibilità di considerare in essa delle linee elementari continue aventi come estremi due punti qualunque di v_n, secondo la definizione di linea elementare continua in v_n che diamo qui sotto.

Diremo linea elementare continua in $v_n = (t_1\, t_2 \dots t_n)$ un insieme di punti $(t_1, t_2 \dots t_n)$ di v_n le cui coordinate si possono esprimere con funzioni continue

$$(1) \qquad t_i = t_i(y)$$

di un parametro y variabile in un dato intervallo, colla condizione che le formule (1) definiscono alla lor volta y come funzione continua di ciascuna t_i.(*) (Si noti che questa condizione viene sempre soddisfatta se le $t_i(y)$ sono funzioni aventi ovunque nel dato intervallo una derivata finita e non nulla: quindi le equazioni $t_i = t_i(y)$ dove le t_i son funzioni continue e derivabili rappresentano in v_n una linea composta di più linee elementari).

La linea elementare continua in v_n come è stata definita è effettivamente una linea elementare (v_1) nel senso definito innanzi perchè i suoi punti corrispondono biunivocamente ai valori di y nel dato intervallo: la sua proprietà di esser continua in v_n, non dipende dal particolare sistema di coordinate cui ci siamo riferiti, perchè se si effettua una trasformazione di coordinate me-

(*) Cfr. la nota precedente.

diante le formule

$$(1) \begin{cases} x_i = x_i(t_1 t_2 \ldots\ldots t_n) \\ t_i = t_i(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \end{cases}$$

sostituendo per t_i $t_i(y)$ si ha la rappresentazione della linea mediante funzioni continue $x_i(y)$ e risulta ancora soddisfatta la condizione che y sia funzione continua delle x_i (come risulta dalle formule $t_i = t_i(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)$).

14. <u>Determinazione metrica in una varietà a più dimensioni</u> - Andiamo ora a parlare del modo più generale con cui si possono far scaturire le nozioni metriche in una varietà elementare

$$v_n \equiv (x_1 x_2 \ldots\ldots x_n):$$

e cominciamo dal renderci conto approssimativamente del sostrato intuitivo di questo concetto, riservandoci a precisarlo tra poco.

Si può dire che tali nozioni metriche scaturiscono essenzialmente dal concepire una relazione tra due punti di ogni segmento elementare continuo in v_n (e soddisfacente a qualche altra restrizione); questa relazione può ritenersi espressa da un numero essenzialmente positivo (<u>lunghezza</u> del segmento di linea, o <u>arco</u> tra i due punti): il carattere fondamentale del concetto di lunghezza di segmento è espresso dalla proprietà <u>distributiva</u> per la quale la lunghezza di un segmento è uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti in cui esso è diviso da un punto interno; ammetteremo inoltre che esso dipenda dall'arco in modo continuo e vari pure in modo continuo al variare della forma della linea. In ordine a tale nozione supposta aggiunta alle precedenti che caratterizzano una v_n, due v_n non sono più da ritenersi come sostituibili (o uguali) soltanto ove sieno poste in corrispondenza biunivoca continua, ma si esige perciò ancora che in tale corrispondenza la lunghezza di una linea abbia carattere <u>invariantivo</u> (non muti): in tal caso le due varietà si dicono <u>appli-</u>

cabili.

Per precisare fissiamo esplicitamente di limitare le nostre considerazioni a segmenti elementari rappresentati da equazioni

(1) $x_1 = x_1(t) \quad x_2 = x_2(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x_n = x_n(t)$

dove le x_i sono funzioni finite, continue (ad un valore) di t in un intervallo $t_1 t_2$, ed inoltre non vi è nessun punto (doppio) della linea corrispondente a due valori di t nel detto intervallo: ammettiamo inoltre la derivabilità delle funzioni $x_i(t)$. Inerentemente al concetto intuitivo che conduce alla considerazione di lunghezza dovremo ritenere che la lunghezza dell'arco s della linea (1) tra due punti t_1 e t_2 sia funzione continua del punto $(x_1 x_2 \ldots x_n)$, (e quindi di t), ed aggiungeremo inoltre che la detta funzione $s(x_1 x_2 \ldots x_n)$ sia derivabile quante volte occorre rispetto alle x_i. Dopo ciò basterà per individuare la lunghezza dell'arco s (fra t_1 e t_2) conoscere in ogni punto il differenziale

$$ds = \frac{ds(t)}{dt}\, dt \quad ,$$

che (stante la proprietà distributiva della funzione s) rappresenta (a meno del segno) la lunghezza dell'arco infinitesimo di linea fra t e $t+dt$: integrando si avrà (a meno del segno)

$$s = \int_{t_1}^{t} ds$$

Ciò posto consideriamo in V_n un qualunque punto interno

$$P \equiv (x_1 x_2 \ldots x_n) \equiv (x_i) :$$

il differenziale ds di un arco elementare che congiunge due punti infinitamente vicini (x_i) e $(x_i + dx_i)$ dipende soltanto dalle x_i e dalle dx_i, perchè la variazione di tale arco infinitesimo al variare della forma della linea è (stante l'ipotesi intuitiva introdotta) un infinitesimo d'ordine superiore.

Il detto differenziale ds esprime a meno del segno la lunghezza dell'arco elementare fra (x_i) e $(x_i + dx_i)$: vediamo se inerentemente alle nostre nozioni intuitive si possa ritenere il ds come funzione ad un valore delle dx_i, cioè se si può avere del ds una espressione univocamente determinata (in valore ed in segno) sopra ogni arco elementare uscente da P; espressione che vari in modo continuo coll'arco stesso. Per ciò immaginiamo di fissare sopra una linea l uscente da P un senso di accrescimento dell'arco s (contato a partire da P) in guisa che il ds debba ritenersi come positivo sopra un lato della linea adiacente a P, come negativo sul lato opposto: ammettiamo come inerente al nostro concetto intuitivo della varietà v_n, di poter deformare con continuità la linea l (concepita come <u>inestensibile</u>) sovrapponendola a sè stessa, permutando i due lati di essa, ciò che può esprimersi dicendo che si è eseguito un <u>ribaltamento</u> della l intorno a P: questa variazione continua della l intorno a P corrisponde ad una variazione continua delle dx_i, e quindi ad una variazione continua del ds; dopo eseguito il ribaltamento della l intorno a P, il senso di accrescimento dell'arco s su l dedotto secondo la legge di continuità viene ad essere fissato in modo opposto al primitivo: ciò mostra che nel ds ritenuto come funzione delle dx_i comparisce l'indeterminazione del segno. D'altra parte il valore assoluto del ds (lunghezza dell'arco elementare) è da ritenersi come funzione ad <u>un</u> valore delle dx_i: dunque dovremo ritenere il ds^2 funzione ad <u>un</u> valore delle dx_i stesse. Ammettiamo la derivabilità finchè occorre di tale funzione in guisa da poter sviluppare il ds^2 per i differenziali dx_i secondo uno sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo termine: in questo sviluppo il termine costante manca essendo $ds = 0$ per $dx_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$; anche il termine lineare nelle dx_i manca perchè ds e le dx_i sono infinitesimi dello stesso ordine; quindi avremo (tralasciando gli infinitesimi d'ordine superiore)

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{r,i} a_{ri}\, dx_r\, dx_i \qquad (a_{ri} = a_{ir})$$

L'espressione del 2° membro dove le a_{ri} sono funzioni delle x_i, (forma differenziale quadratica nelle n variabili dx_i) deve essere essenzialmente positiva se si vuole escludere l'esistenza di linee (reali) di lunghezza nulla che si otterrebbero integrando l'equazione $ds = 0$:
ciò porta come è noto $n-1$ condizioni (disuguaglianze) nei coefficienti $a_{r,s}$, fra cui quella che il discriminante di essa $|a_{rs}|$ sia positivo. Il ds dicesi elemento lineare della data varietà: dare la sua espressione (1) in funzione delle x_i, dx_i equivale a porre una determinazione metrica nella varietà.

Questa determinazione in quanto è posta mediante la formula (1) è legata al sistema di coordinate $(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n)$ posto nella varietà V_n: si eseguisca in V_n una qualunque trasformazione di coordinate mediante le formule

$$(2) \qquad x_i = x_i(y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n)$$

dove le x_i sono simboli di funzioni continue e derivabili ed il determinante funzionale

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \ldots\ldots \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \ldots\ldots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

(onde le formule stesse sono invertibili); avremo allora una nuova espressione del ds^2 come forma differenziale quadratica nelle dy_i. In ogni caso la lunghezza d'un arco di linea ottenuta partendo dalla espressione (1) è qualchecosa di inerente all'arco di linea ed indipendente dal sistema di coordinate poste nella varietà, sicchè ove venga eseguita una sostituzione colle formule (2) si dovrà calcolare nuovamente il ds mediante la forma trasformata della (1).

Possiamo subito confermare i ragionamenti che ci hanno condotto alla formula (1) osservando che in essa rientra effettivamente l'espressione dell'elemento lineare dello spazio intuitivo S_3 o dell'elemento lineare sopra una superficie in esso: invero in coordinate cartesiane ortogonali l'espressione della distanza fra i punti $(x\,y\,z)$ $(x+dx, y+dy, z+dz)$ è

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\quad :$$

se si ha in S_3 una superficie

$$x = x(u\,v) \qquad y = y(u\,v) \qquad z = z(u\,v),$$

(dove le tre funzioni $x\,y\,z$ sono derivabili) l'espressione dell'elemento lineare sopra di essa è dato da

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

dove

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \qquad F = \Sigma\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} \qquad G = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\quad :$$

la detta formula

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

è appunto un caso particolare della (1), essendo l'espressione del 2° membro una forma differenziale quadratica in $du\;dv$.

15. <u>Geodetiche in una varietà</u> - Ritorniamo alla nostra espressione generale dell'elemento lineare

$$ds^2 = \Sigma\,a_{ri}\,dx_r\,dx_i$$

in una varietà v_n, e riferiamo sempre i successivi sviluppi ad un intorno assai piccolo di un punto di v_n (<u>non singolare</u>) che costituisca una varietà elementare a cui il punto è interno.

Vogliamo vedere un po' più da vicino tutte le nozioni metriche caratteristiche della varietà v_n che scaturiscono dalla detta formula. Vedremo come da questa formula (per regioni convenientemente limitate di v_n) scaturiscano:

1°) il concetto di <u>distanza</u> di due punti

2°) il concetto di <u>angolo</u> di due linee passanti per un punto.

Si abbiano in v_n due punti $A_1\,A_2$ (appartenenti ad una regione convenientemente limitata di v_n) e si considerino tutte le linee

$$x_i = x_i(t)$$

(dove le x_i sono funzioni continue e derivabili finchè occorre) aventi come estremi i punti $A_1 A_2$ corrispondenti ai valori fissati t_1 e t_2 di t. La lunghezza dell'arco di una di queste linee tra $A_1 A_2$ è

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\Sigma a_{ri}\, dx_r\, dx_i} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\Sigma a_{ri}\, x'_r\, x'_i}\; dt$$

(dove cogli apici si designano le derivate rispetto a t).
Ci proponiamo di cercare quale forma debba darsi alla linea considerata tra $A_1 A_2$ affinchè la lunghezza l abbia il valore minimo; questo valore potrà dirsi la distanza tra i due punti $A_1 A_2$ in V_n; la detta linea si dirà una geodetica in V_n.
Seguendo le regole del calcolo delle variazioni, immaginiamo di considerare tra le nominate linee aventi per estremi $A_1 A_2$, una serie di linee

$$x_i = x_i(a\, t)$$

dipendenti da un parametro a, e contenente la linea di lunghezza minima (supposta esistente): ammettiamo inoltre la derivabilità delle funzioni x_i rispetto ad a. La lunghezza l calcolata per le linee di questa serie è una funzione (continua e derivabile) del parametro a; il valore minimo di l (corrispondente alla linea cercata) dovrà dunque corrispondere ad una linea per cui si abbia

$$\frac{dl}{da} = 0 .$$

La linea (geodetica) che cerchiamo deve soddisfare a questa condizione qualunque sia il modo con cui il parametro a entra nelle funzioni x_i, cioè per qualunque deformazione della linea: ciò si esprime dicendo che per le linee di lunghezza minima tra A_1 e A_2 deve esser soddisfatta l'equazione

$$\delta l = 0 ,$$

dove con δl si designa la variazione di l cioè il differenziale $\frac{dl}{da}da$ relativo ad una variazione di forma della linea dipendente in un modo qualunque dal parametro a.
Procedendo a sviluppare questa equazione notiamo che (per la definizione datane) dovremo trattare il simbolo δ come quello di un differenziale (rispetto ad un parametro a

che non figura esplicitamente) e quindi in particolare esso sarà permutabile col simbolo d (differenziale rispetto a t) e col simbolo d'integrazione ($\int$), ammettendosi la derivabilità successiva delle funzioni di cui si tratta.
Ciò posto poniamo per semplicità

$$2T = \sum_{ri} a_{ri}\, x'_r\, x'_i \;;$$

si avrà

$$\delta l = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\sqrt{2T}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta T}{\sqrt{2T}}\cdot dt$$

Ora il δT è la variazione di una funzione delle x_i e delle x'_i, quindi (applicando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni)

$$\delta T = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\, \delta x_i + \frac{\partial T}{\partial x'_i}\, \delta x'_i \right) ;$$

segue

$$\delta l = \int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\frac{\partial T}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial T}{\partial x'_i}\delta x'_i}{\sqrt{2T}} \right) d\,t$$

Ora integrando per parti

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2T}}\, \frac{\partial T}{\partial x'_i}\, \delta x'_i\, dt ,$$

dove si prenda $\frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{\partial T}{\partial x'_i}$ come fattor finito e si consideri $\delta x'_i\, d\,t$ come il differenziale (rispetto a t)

$$d\,\delta x_i \; (= \delta\, d\,x_i = \delta x'_i\, d\,t) \qquad \text{si avrà}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2T}}\, \frac{\partial T}{\partial x'_i}\, \delta x'_i\, dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2T}}\, \frac{\partial T}{\partial x'_i}\, \delta x_i \right)_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta x_i\, \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2T}}\,\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right)}{d\,t}\, dt ;$$

ma il 1° termine (uguale alla differenza dei valori assunti dalla quantità fra parentesi per $t = t_2$, $t = t_1$) è nullo perchè tutte le linee che si considerano hanno gli stessi estremi $A_1\, A_2$ corrispondenti ai valori $t = t_1$ $t = t_2$, e quindi per questi valori $\delta x_i = 0$; resta dunque

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2T}}\, \frac{\partial T}{\partial x'_i}\, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta x_i\, \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right)}{d\,t}\, d\,t \quad ,$$

sicchè

$$\delta\, l = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \left(\frac{\frac{\partial T}{\partial x_i}}{\sqrt{2T}} - \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right)}{d\,t} \right) \delta x_i \right\} d\,t .$$

Ma l'integrale del 2° membro deve essere identicamente nullo qualunque sia la variazione di forma della linea tra $A_1 A_2$ ossia qualunque siano le δx_i, dunque si deve avere

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial x_i}}{\sqrt{2T}} - \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{\partial T}{\partial x_i'}\right)}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ossia eseguendo la derivazione rispetto a t)

$$(1) \qquad \frac{\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'}}{\sqrt{2T}} + \frac{\frac{dT}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'}}{(\sqrt{2T})^3} = 0$$

Le (1) costituiscono già le equazioni differenziali delle geodetiche: andiamo però a porle sotto una forma più conveniente (anche in vista di successive applicazioni)(*)
A tal fine notiamo che per il teorema d'Eulero essendo

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{ri}\, x_r' x_i'$$

una funzione omogenea di x_r' x_i', si ha

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k'} x_k' \quad ,$$

od anche

$$T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k'} x_k' - T \quad ;$$

e derivando rapporto a t

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k \frac{d\frac{\partial t}{\partial x_k'}}{dt} \cdot x_k' + \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k'} \cdot x_k'' - \frac{dT}{dt}$$

d'altra parte

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k} x_k' + \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k'} x_k'' \quad ,$$

quindi (sostituendo)

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_k x_k'\left(\frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_k'}\right).$$

In conseguenza la (1), ponendo per $\frac{dT}{dt}$ il suo valore (e moltiplicando per $(\sqrt{2T})^3$) diviene

---

(*) La trasformazione qui eseguita che conduce direttamente ad ottenere le equazioni delle geodetiche sotto la forma (3) confrontabile colle equazioni del moto di Lagrange, mi è stata comunicata dal Levi-Civita.

$$2T\left\{\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right\} - \frac{\partial T}{\partial x'_i}\sum_k x'_k\left(\frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_k}\right) = 0 \;;$$

ed infine col porre

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i} = E_i \qquad (i = 1, 2, \dots n) \;,$$

otteniamo le equazioni delle geodetiche sotto la forma

$$(2) \qquad 2T E_i - \frac{\partial T}{\partial x'_i}\sum_k x'_k E_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Queste n equazioni non sono indipendenti (come si verificherebbe mostrando che è identicamente nullo il determinante dei coefficienti delle E_i): ciò risulta chiaro ove si pensi che le equazioni (2) debbono essere soddisfatte da una geodetica (tra $A_1 A_2$) qualunque sia la rappresentazione parametrica di essa che è stata scelta, onde esse debbono ancora essere soddisfatte se si eseguisce una sostituzione

$$t = \varphi(\tau)\;(*)$$

(dove φ è continua e derivabile).

Possiamo disporre della funzione $\varphi(\tau)$ in guisa che si abbia per esempio $E_i = 0$; allora per la particolare rappresentazione parametrica delle geodetiche che ne risulta, la prima delle (2) ci dà

$$\sum_k E_k x'_k = 0$$

e quindi il sistema (2) assume la forma semplicissima

$$(3) \qquad E_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Da queste equazioni si ricava che <u>per due punti di v_n in una regione convenientemente limitata passa una geodetica il cui arco è il minimo fra gli archi delle linee congiungenti i due punti</u>, e può dirsi la <u>distanza</u> dei due punti in v_n.

È da notarsi che se dimenticando la 1ª definizione si chiamano geodetiche le linee di v_n soddisfacenti alle equa-

---

(*) E si potrebbe anche analiticamente verificare l'invariantività delle (2) rispetto al gruppo di queste trasformazioni, ciò che per la natura della questione è a priori evidente.

zioni (3), alle geodetiche compete la proprietà di dare il minimo arco tra due punti soltanto quando questi punti sono sufficientemente vicini.
Dopo ciò la condizione perchè due v_n debbono considerarsi applicabili (secondo la definizione posta nel § 14) si può esprimere più semplicemente. Invero perchè ciò accada basta che esse possano porsi in una corrispondenza biunivoca siffatta che ad ogni elemento lineare dell'una corrisponda un uguale elemento lineare dell'altra, e quindi ad ogni geodetica una geodetica, e poichè l'elemento lineare in una v_n può sempre valutarsi sopra una geodetica si ha: Due varietà v_n sono applicabili se si può porre tra di esse una corrispondenza biunivoca che faccia sempre corrispondere a due punti dell'una due punti ugualmente distanti dell'altra (e reciprocamente).
Se sopra una varietà v_n si effettua una trasformazione in un'altra applicabile si dice che si è eseguita su v_n una flessione senza estensione.

16 - Angolo di due linee in una varietà - Ad ogni linea

$$x_i = x_i(t)$$

uscente da un punto $P \equiv x_i$ di v_n si può far corrispondere una direzione

$$dx_i = x_i' \, dt \quad ;$$

infinite linee corrispondono inversamente ad una direzione: due direzioni $\delta_1 x_i$, $\delta_2 x_i$ determinano una giacitura uscente da P in v_n, costituita dalle infinite direzioni $\alpha \delta_1 x_i + \beta \delta_2 x_i$: le direzioni di una giacitura si possono considerare (in senso astratto) come i raggi d'un fascio; due direzioni separano le altre della giacitura in due angoli, distinguendosi le une dalle altre secondo il segno di $\frac{\alpha}{\beta}$; una terza direzione di uno di questi angoli lo divide alla sua volta in due altri ecc.
Vogliamo definire come grandezza dell'angolo (o semplicemente angolo) di due linee o di due direzioni uscen-

ti da un punto P in v_n, un numero essenzialmente positivo esprimente una relazione delle due direzioni, il quale goda delle due proprietà fondamentali:

1°. di avere carattere invariantivo rispetto alle flessioni senza estensione di v_n;

2°) di avere la proprietà distributiva rispetto agli angoli di una giacitura. (*)

Proponiamoci di vedere fino a che punto queste condizioni determineranno l'espressione dell'angolo di due linee uscenti da un punto in v_n.

Si può concepire l'insieme delle coordinate dei punti di v_n come costituente una varietà analitica applicabile su v_n, e quindi una trasformazione di coordinate in v_n come una flessione senza estensione di questa varietà analitica. Perciò la 1ª condizione si può esprimere dicendo che l'angolo λ formato dalle direzioni δx_i $\delta_2 x_i$ uscenti dal punto x_i nella varietà v_n che ha per elemento lineare

$$(1) \qquad ds^2 = \sum a_{ik}(x_1 - x_n)\, dx_i\, dx_k$$

è una funzione delle due direzioni nominate la quale non dipende dal particolare sistema di coordinate poste in v_n. Dunque λ sarà da ritenersi funzione delle x_i, dx_i, δx_i e dei coefficienti a_{ik} della forma (1), siffatta che operando una sostituzione

$$x_i = x_i(y_1 \cdots\cdots y_n) \qquad\qquad (\Delta \neq 0)$$

la quale porti

$$\delta_1 x_i = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial y_s}\, \delta_1 y_s$$

$$\delta_2 x_i = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial y_s}\, \delta_2 y_s$$

e

$$ds^2 = \sum b_{ik}(y_1 \cdots\cdots y_n)\, dy_i\, dy_k$$

$$\left(b_{ik} = \sum_{rs} a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_k}\right)$$

(*) Tali proprietà competono appunto all'angolo di due linee uscenti da un punto nello S_3 intuitivo o sopra una superfi-debba aversi identicamente

$$h(x_i\ \delta_1 x_i\ \delta_2 x_i\ a_{ik}) = h(y_i\ \delta_1 y_i\ \delta_2 y_i\ b_{ik})$$

dove la forma dell'espressione di h nelle quantità fra parentesi del 1° membro è uguale a quella del 2°.
Si potrebbe anzitutto dimostrare che nell'espressione di h non entrano esplicitamente le x_i(*): quindi se si pone

$$d x_i = \mu_i \ , \quad \delta_1 x_i = \mu_i^{(1)} \ , \quad \delta_2 x_i = \mu_i^{(2)} \ , \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_s} = \alpha_{is}$$

h sarà una funzione

$$h(\mu_i^{(1)}\ \mu_i^{(2)}\ a_{ik})$$

avente carattere invariantivo rispetto alle sostituzioni lineari

$$(2) \qquad V_i = \sum_s \alpha_{is} \mu_s$$

che trasformano ($\mu_i^{(1)}\ \mu_i^{(2)}$ rispettivamente in $V_i^{(1)}\ V_i^{(2)}$ e le a_{ik} nelle $b_{ik} = \sum_{rs} a_{rs} \alpha_{ri} \alpha_{sk}$ ossia) le due forme lineari $\sum_i \mu_i^{(1)} \mu_i$ $\sum_i \mu_i^{(2)} \mu_i$ nelle $\sum_i V_i^{(1)} V_i$ $\sum_i V_i^{(2)} V_i$ e la forma quadratica $\sum a_{ik} \mu_i \mu_k$ nella $\sum b_{ik} V_i V_k$.
Ora una tale espressione h (<u>invariante</u> <u>assoluto</u> del sistema associato della forma quadratica $\sum a_{ik} \mu_i \mu_k$ e delle due lineari $\sum_i \mu_i^{(1)} \mu_i$ $\sum \mu_i^{(2)} \mu_i$) si può subito determinare: invero si considerino i due valori immaginari coniugati di $\frac{u}{v}$ che annullano

$$\sum a_{ik} \left(u \mu_i^{(1)} + v \mu_i^{(2)}\right)\left(u \mu_k^{(1)} + v \mu_k^{(2)}\right) \ ;$$

questi insieme a $0\ \infty$ formano il birapporto

$$\varphi = \frac{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} + \sqrt{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} - \sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(1)} \sum a_{ik} \mu_i^{(2)} \mu_k^{(2)}}}{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} - \sqrt{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} - \sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(1)} \sum a_{ik} \mu_i^{(2)} \mu_k^{(2)}}}$$

Si può provare che non esiste nessun altro invariante assoluto del predetto sistema all'infuori d'una funzione arbitraria $\qquad h = h(\varphi)$(**).

---

cie in esso.
(*) Perchè h non deve mutare per una sostituzione additiva $y_i = x_i + \alpha_i$ eseguita sopra una x_i.
(**) Cfr. <u>Aronhold</u> « Ueber eine fundamentale Begründung der Invarianten Theorie » (Crelle Bd 62). (Riferendoci

Se ora si vuole (per soddisfare alla 2ª condizione imposta) che h goda della proprietà distributiva rispetto agli angoli della giacitura

$$u\,\delta_1 x_i + v\,\delta_2 x_i = u\,\mu_i^{(1)} + v\,\mu_i^{(2)} \quad ,$$

si è condotti ad assumere h proporzionale al $\log \varphi$; e perchè esso risulti reale si deve prendere

$$(3) \qquad h = \frac{1}{2i} \log \varphi \quad ,$$

o proporzionale a questo numero. Prendendo appunto il segno di uguaglianza definiremo come <u>angolo</u> <u>delle</u> <u>due</u> <u>direzioni</u> $\delta_1 x_i \quad \delta_2 x_i$ l'espressione $\quad h = \frac{1}{2i}\log\varphi$ dove

$$\varphi = \frac{\sum a_{ik}\,\delta_1 x_i\,\delta_2 x_k + \sqrt{\{\sum a_{ik}\,\delta_1 x_i\,\delta_2 x_k\}^2 - \delta_1 s^2\,\delta_2 s^2}}{\sum a_{ik}\,\delta_1 x_i\,\delta_2 x_k - \sqrt{\{\sum a_{ik}\,\delta_1 x_i\,\delta_2 x_k\}^2 - \delta_1 s^2\,\delta_2 s^2}}$$

e poichè

$$e^{ih} = \cos h + i \operatorname{sen} h$$

avremo

$$\cos h = \frac{\sum a_{ik}\,\delta_1 x_i\,\delta_2 x_k}{\delta_1 s\,\delta_2 s}$$

$$\operatorname{sen} h = \sqrt{\frac{\delta_1 s^2\,\delta_2 s^2 - \{\sum a_{ik}\,\delta_1 x_i\,\delta_2 x_i\}^2}{\delta_1 s^2\,\delta_1 s^2}}$$

Allora l'espressione di $\cos h$ si riduce alla nota espressione dell'angolo di due linee uscenti da un punto (*) sopra una superficie o) nello S_3 intuitivo quando V_n sia (una superficie in S_3 o) lo S_3 stesso. (**)

<u>Osservazione</u> - In modo analogo a quello con cui si è ottenuto l'espressione dell'angolo di due linee uscenti

---

alla interpretazione geometrica in un S_n proiettivo ciò si vede facilmente, giacchè si riduce a dire che due punti in relazione ad una quadrica hanno un solo invariante assoluto che è il birapporto formato da essi colle intersezioni della loro retta colla quadrica).

(*) Cfr. le « Vorlesungen » di <u>Clebsch</u> - <u>Lindemann</u> (3º vol.)

(**) Le coordinate $x_1\ x_2\ x_3$ dei punti in S_3 sono le più generali <u>coordinate</u> <u>curvilinee</u> cioè un qualunque sistema di coordinate ottenute dalle cartesiane $x\ y\ z$ con una sosti da un punto in una varietà v_n (astratta), si può porre il <u>concetto</u> di <u>volume</u> (o <u>area</u> per $n=2$) assumendo come elemento di volume in v_n

$$d\sigma = \sqrt{|a_{ik}|}\, dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n$$

dove $|a_{ik}|$ è il discriminante della forma $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ che dà l'elemento lineare. Si può immediatamente verificare che l'espressione del $d\sigma$ (e quindi $\int_S^{n} d\sigma$ in un dato campo S delimitato da opportune disuguaglianze cui le x_i debbono soddisfare) ha carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni di coordinate, ossia rispetto alle flessioni senza estensione di v_n: viceversa si può provare che

$$\int_S^{(n)} \sqrt{|a_{ik}|}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

è l'unica espressione del tipo

$$\int_S^{(n)} \Psi\, dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n$$

dove Ψ è funzione delle x_i e delle a_{ik} la quale abbia carattere invariantivo rispetto alle dette trasformazioni di coordinate.(*)

Valgano questi cenni a fare riconoscere che tutte le nozioni metriche (distanza, angolo, volume) estensioni delle ordinarie in una varietà (astratta) v_n scaturiscono dalla sola espressione dell'elemento lineare, in un modo che può ritenersi intieramente determinato ove si ponga per condizione di conservare nella estensione le più elementari relazioni intercedenti fra queste nozioni.

17 - <u>Le varietà contenute in uno spazio euclideo</u> - Lo spazio euclideo $S_n \equiv (x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n)$ dove è data l'espres=

---

tuzione $x = x(x_1 x_2 x_3)$ $y = y(x_1 x_2 x_3)$ $z = z(x_1 x_2 x_3)$, dove le $x_1 x_2 x_3$ sono atte a rappresentare biunivocamente i punti d'una regione convenientemente limitata di S_3.

(*) Cfr. <u>Levi-Civita</u> « Sugli invarianti assoluti » (Istituto Veneto 1894 - §19).

sione $\sqrt{(x_1-x'_1)^2+\ldots\ldots+(x_n-x'_n)^2}$ della distanza di due punti (§ 12), può ritenersi come una varietà v_n in cui è posta una determinazione metrica siffatta che, per il particolare sistema di coordinate cui essa è originariamente riferita l'espressione dell'elemento lineare è

$$(1) \qquad ds^2 = dx_1^2 + \ldots\ldots + dx_n^2 \,,$$

(giacchè appunto ds è la distanza fra i due punti x_i e $x_i + dx_i$ in S_n). Le rette sono le geodetiche dello S_n. Infatti se si pone

$$(1) \qquad x_i = \lambda_i t + \mu_i \qquad (i = 1 \ldots n)$$

in modo che le (1) sieno le equazioni di una retta, si ottiene

$$x_i' = \lambda_i \qquad 2T = \sum_i x_i'^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x'_i} = x'_i = \lambda_i \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i} = 0$$

onde identicamente

$$E_i = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots n).$$

L'angolo di due rette incidenti

$$x_i = \lambda_i t + \mu_i \qquad (i = 1 \ldots n) \qquad x_i = \lambda'_i t + \mu_i$$

viene dato dall'espressione

$$\cos\varphi = \frac{\sum_i \lambda_i \lambda'_i}{\sqrt{\sum \lambda_i^2 \sum \lambda_i'^2}}$$

Si consideri nello S_n una varietà v_r ad r dimensioni rappresentata dalle equazioni

$$x_i = x_i(u_1\, u_2 \ldots u_n) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

(dove le x_i sono funzioni continue e derivabili): mediante la determinazione metrica euclidea nello S_n risulta fissata una determinazione metrica su v_r in cui l'espressione dell'elemento lineare è data da

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, du_i\, du_k \,,$$

dove

$$dx_s = \sum_i \frac{\partial x_s}{\partial u_i} du_i$$

e però

$$a_{ik} = \sum_{sr} \frac{\partial x_s}{\partial u_i}\frac{\partial x_r}{\partial u_k} \,.$$

Di qui si può trarre il teorema:

<u>Ogni varietà v_r su cui è data una determinazione metrica si può considerare come applicabile ad una varie-</u>

<u>tà immersa in uno spazio euclideo avente al più $\frac{r(r+1)}{2}$ dimensioni.</u>

Invero data una $v_r \equiv (u_1 \dots u_r)$ in cui l'espressione dell'elemento lineare sia

$$ds^2 = \sum a_{ik}(u_1 \dots u_r)\, du_i\, du_k\ ,$$

è applicabile ad essa la varietà v_r di uno S_n euclideo $(x_1 \dots x_n)$ data dalle formule

$$x_i = x_i(u_1 \dots u_r) \qquad (i = 1 \dots n)$$

purchè sieno soddisfatte le equazioni

$$a_{ik}(u_1 \dots u_r) = \sum_{rs} \frac{\partial x_s}{\partial u_i} \frac{\partial x_r}{\partial u_k}\ :$$

queste sono $\frac{r(r+1)}{2}$ equazioni alle derivate parziali nelle n funzioni $x_i(u_1 \dots u_r)$ e quindi sono in generale integrabili per $n = \frac{r(r+1)}{2}$.

Come caso particolare si ha: <u>Una superficie (v_2) è sempre applicabile sopra una dello S_3 euclideo</u> (intuitivo).

I precedenti teoremi mostrano come la geometria metrica generale sopra una varietà si può sempre riguardare come rientrante in quella d'uno spazio euclideo. Studiando la geometria metrica sopra una varietà considerata come immersa in un S_n euclideo, si possono ricercare anche le proprietà che pongono in relazione la varietà collo spazio, ma queste non permangono in generale per una flessione senza estensione della varietà, cioè non appartengono alla geometria sopra la varietà. Tuttavia anche alcune proprietà inerenti alla geometria sopra la varietà possono essere espresse in tal modo. Ad esempio per una superficie in S_3 si ha come proprietà caratteristica delle geodetiche quella che « <u>la normale principale ad esse in ogni punto è normale alla superficie</u> » (come si vedrebbe interpretando le equazioni differenziali di esse geodetiche).

18. <u>Interpretazione meccanica della Geometria metrica delle varietà più volte estese</u> - I precedenti sviluppi sulle determinazioni metriche nelle varietà più volte estese

(che abbiamo concepito in modo astratto) si presentano come naturali estensioni della teoria delle superficie, onde a priori se ne concepisce l'importanza matematica senza bisogno di farne alcuna applicazione. Ma riesce nondimeno interessante ed istruttivo il vedere come essi sieno suscettibili di una interpretazione meccanica concreta molto semplice.

Si abbiano nello spazio n punti materiali $A_i \equiv (x_i\, y_i\, z_i)$ di masse uguali (che possiamo quindi supporre 1) formanti un sistema mobile di punti, e supponiamo che tra questi punti intercedano dei __legami__ espressi da s equazioni

$$\varphi_h(x_1 y_1 z_1, \ldots\ldots x_n y_n z_n) = 0 \qquad (h = 1 \ldots s):$$

(dove le φ sono continue e derivabili) questi legami rappresentano in generale delle condizioni che limitano il __grado__ di __libertà__ del sistema, ad esempio quella che le mutue distanze fra alcune coppie di punti restino invariate, o che qualche punto debba muoversi su date superficie ecc. Essendovi s legami il grado di libertà del sistema vale $r = 3n - s$.

Le $x_1 y_1 z_1, \ldots\ldots x_n y_n z_n$ si possono riguardare come le coordinate dei __punti__ d'uno spazio euclideo S_{3n} i cui elementi (punti) sono tutti i gruppi di n punti dello S_3 intuitivo, dove si abbia l'elemento lineare

$$ds^2 = \sum_i (dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2)$$

(da riguardarsi il quadrato della __distanza__ tra due punti infinitamente vicini). Tutti i sistemi di S_3 (cioè i gruppi soddisfacenti ai dati legami) debbono riguardarsi come i punti di una varietà v_r in S_{3n} rappresentata dalle equazioni

$$\varphi_h = 0$$

che (introducendo r variabili indipendenti dette __coordinate generali__ o __Lagrangiane__ del sistema) supponiamo aver ridotte alla forma

$$x_i = x_i(u_1 \ldots u_r) \qquad y_i = y_i(u_1 \ldots u_r) \qquad z_i = z_i(u_1 \ldots u_r)$$

Allora l'elemento lineare in v_r è dato da (§ 14)

$$ds^2 = \sum_{hk} a_{hk}\, du_h\, du_k$$

dove

$$a_{hk}=\sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_h}\frac{\partial x_i}{\partial u_k}+\frac{\partial y_i}{\partial u_h}\frac{\partial y_i}{\partial u_k}+\frac{\partial z_i}{\partial u_h}\frac{\partial z_i}{\partial u_k}\right).$$

Ponendo (come precedentemente)

$$ds^2=2T\,dt^2$$

e assumendo come parametro t sopra una linea di v_r il tempo, si ha per T uno spiccato significato meccanico poichè

$$T=\tfrac{1}{2}\sum a_{hk}u'_h u'_k=\tfrac{1}{2}\sum_i\left(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2\right)$$

è la forza viva del sistema supposto messo in condizioni di passare nel tempo dt dalla posizione individuata da $(u_1 \ldots u_r)$ a quella individuata da $(u_1+du_1, \ldots u_r+du_r)$. Si supponga che sul punto $(x_i\, y_i\, z_i)$ agisca una forza le cui componenti secondo gli assi coordinati vengano denotate con $X_i\, Y_i\, Z_i$. Si effettui sul punto $x_i\, y_i\, z_i$ uno spostamento infinitesimo $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ virtuale (cioè conciliabile coi legami del sistema). Secondo il principio di D'Alembert si troveranno le equazioni generali del moto del sistema di punti esprimendo che le forze perdute(*)

$$X_i-x_i'' \quad , \qquad Y_i-y_i'' \quad , \qquad Z_i-z_i'' \; ,$$

si fanno equilibrio; e ciò dà (per il principio delle velocità virtuali) che deve esser nullo il lavoro da esse prodotto per uno spostamento virtuale del sistema, onde si ha l'equazione simbolica del moto

$$\sum\left\{(X_i-x_i'')\delta x_i+(Y_i-y_i'')\delta y_i+(Z_i-z_i'')\delta z_i\right\}=0$$

Le $\delta x_i\ \delta y_i\ \delta z_i$ in quanto danno uno spostamento virtuale del sistema (cioè il passaggio da una posizione $u_1 \ldots u_r$ ad una contigua $u_1+\delta u_1, \ldots u_r+\delta u_r$ di essa) si esprimono per le $\delta u_1 \ldots \delta u_r$, colle formole

$$\delta x_i=\sum_s\frac{\partial x_i}{\partial u_s}\delta u_s \;,\quad \delta y_i=\ldots\ldots$$

Sostituendo nell'equazione simbolica del moto ed annullando i coefficienti delle δu_s (che sono spostamenti assolutamente arbitrari) si ottengono le equazioni del moto del siste-

---

(*) Gli apici denotano successive derivazioni rispetto al tempo.

ma sotto la forma

$$\sum_i \left(X_i - x_i''\right)\frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \left(Y_i - y_i''\right)\frac{\partial y_i}{\partial u_s} + \left(Z_i - z_i''\right)\frac{\partial z_i}{\partial u_s} = 0 \qquad (s = 1, 2 \ldots r)$$

Poniamo

$$Q_s = \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial u_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial u_s} \right),$$

e chiamiamo Q_s la componente delle forze sollecitanti il sistema <u>secondo la coordinata</u> u_s: allora le equazioni del moto assumono la forma

$$Q_s = \sum_i \left(x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial u_s} + z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial u_s} \right).$$

Nel 2º membro si riconosce l'espressione

$$\frac{d}{dt} \sum_i \left(x_i' \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \cdots \right) - \sum_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial u_s} + \cdots\cdots \right).$$

Ora si noti che (derivando rispetto a t le $x_i = x_i(u_1 \ldots u_r)$) si ha

$$x_i' = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial u_s} u_s'$$

da cui

$$\frac{\partial x_i'}{\partial u_s'} = \frac{\partial x_i}{\partial u_s}$$

Segue che derivando

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 \right)$$

si ha

$$\sum_i x_i' \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \cdots\cdots = \sum_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial u_s'} + \cdots\cdots \right) = \frac{\partial T}{\partial u_s'}.$$

D'altra parte è pure

$$\sum_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial u_s} + \cdots\cdots \right) = \frac{\partial T}{\partial u_s};$$

onde le equazioni del moto del sistema assumono la forma

$$Q_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_s'} - \frac{\partial T}{\partial u_s} \qquad (s = 1 \ldots r)$$

dovuta a <u>Lagrange</u>.

Queste equazioni ci dicono che se forze agenti sul sistema sono nulle (e quindi sono nulle tutte le Q_s), vale a dire se il sistema si muove solo per effetto di velocità iniziali, la successione descritta dal sistema deve considerarsi come una linea di V_r soddisfacente alle equazioni

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_s'} - \frac{\partial T}{\partial u_s} = 0 \quad ,$$

cioè (§15) come una geodetica in v_r.
Si noti che ogni geodetica di v_r può considerarsi come la successione di posizioni effettivamente assunte dal sistema per opportune condizioni iniziali (posizione e velocità iniziali) ad esso attribuite.
Dopo ciò possiamo enunciare il resultato:
La geometria metrica astratta sopra una varietà v_r può interpretarsi come la meccanica dei sistemi omogenei di punti materiali aventi un grado r di libertà (vincolati da legami indipendenti dal tempo).
Se T designa la forza viva di un sistema che (per condizioni convenientemente scelte) passi da una data posizione ad un'altra infinitamente vicina nel tempo dt, l'elemento lineare in v_r (distanza fra i punti di v_r corrispondenti alle due posizioni) vale

$$ds = \sqrt{2T}\cdot dt .$$

Le geodetiche di v_r rappresentano le successioni delle posizioni assunte dai sistemi quando su di essi non agiscano forze, ossia ove sieno soggetti soltanto a velocità iniziali.
In particolare se il sistema si riduce ad un sol punto mobile sopra una superficie, abbiamo che le traiettorie del punto, ove su di esso non agiscano forze, sono le geodetiche della superficie. Partendo appunto da questa proprietà Jacobi riuscì ad integrare le equazioni delle geodetiche sopra una quadrica.

19 - Notizie storiche e considerazioni di raffronto - Determinazioni metrico-proiettive - È ormai il tempo di confrontare gli sviluppi precedenti relativi alle varie estensioni degli ordinari concetti geometrici conducenti alla Geometria iperspaziale, e di esaminare quindi sotto quali aspetti possa esser posto il problema di stabilire i fondamenti di una tale Geometria più generale.

Cominciamo dall'accennare all'ordine storico con cui i nominati concetti si sono svolti.

<u>Grassmann</u> nella sua « Ausdehnungslehere » (1844) avendo avuto il pensiero di attribuire alle nozioni geometriche un valore astratto è pervenuto a concepire la possibilità d'una scienza generale dell'estensione al di fuori dei limiti delle tre dimensioni.

Dieci anni dopo <u>Riemann</u> nella sua celebre dissertazione « Ueber di Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen(*) » generalizzando i concetti introdotti da <u>Gauss</u>(**) nello studio delle superficie poneva il problema generale della determinazione metrica in una varietà a più dimensioni mediante l'espressione del suo elemento lineare. Alle idee di Riemann ho cercato appunto di ispirarmi negli sviluppi del § 14.

Riemann si propone in particolare di « assegnare quali sono le determinazioni metriche di una varietà (v_n) a più dimensioni che permettono di considerare la varietà stessa come <u>omogenea</u> in un senso analogo a quello che si attribuisce ordinariamente a questa espressione riferita allo spazio ». Ciò può essere precisato ammettendo che la v_n sia <u>applicabile su sè stessa</u> in guisa che con una flessione senza estensione su sè stessa si possa sovrapporre generalmente un gruppo di punti della varietà ad un altro gruppo di punti (<u>uguale</u>) aventi le stesse distanze:(***) siffatte trasformazioni della varietà in sè sono da riguardarsi come <u>movimenti nella varietà</u>. Un tale movimento corrisponde dunque ad una trasformazione

$$x'_i \equiv x'_i(x_1 \dots x_n)$$

(*) Göttingen 1854 (cfr. § 2).

(**) « Disquisitiones generales circa superficies curvas ». (Werke Bd 4).

(***) Ciò che basta ammettere a tale scopo è (secondo il <u>Lie</u>) che si possa portare generalmente con una flessione senza estensione della varietà su sè stessa un punto ed una direzione uscenche muta in sè stessa la forma differenziale quadratica

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

espressione dell'elemento lineare. Ammettere la possibilità di movimenti nella varietà porta in conseguenza a delle condizioni cui debbono soddisfare i coefficienti a_{ik} della forma; condizioni che vengono dunque a delimitare (in una certa misura) la natura della determinazione metrica.

Per far comprendere come il problema possa essere trattato riferiamoci al caso delle superficie.

Per una superficie (dello S_3 intuitivo) si chiama <u>curvatura totale</u> in un punto generico (curvatura di Gauss) il prodotto delle inverse dei raggi di curvatura principali: a questo numero compete il carattere invariantivo in ogni flessione senza estensione della superficie: si può quindi domandare di caratterizzarlo con elementi inerenti soltanto alla determinazione metrica sopra la superficie in modo che tale carattere d'invariantività apparisca a priori; questo è stato fatto pure da Gauss il quale ha stabilito che « se si considera l'eccesso della somma degli angoli d'un triangolo geodetico nell'intorno d'un punto e si calcola il limite del rapporto di esso all'area del triangolo (impiccolendo indefinitamente il triangolo), questo limite è la curvatura della superficie nel punto ».(*)

Se dunque la superficie si flette senza estensione la curvatura in ogni suo punto rimarrà costante. Si voglia ora una superficie che possa muoversi su sè stessa portando ogni suo punto in un altro arbitrario, allora la sua curvatura dovrà essere costante in ogni punto. Viceversa si prova che questa condizione è anche sufficiente all'uopo. Tra le <u>superficie a curvatura costante</u> che co-

---

te da esso in un altro arbitrario punto e rispettivamente in un'arbitraria direzione uscente da esso.

(*) Cfr. per es. Bianchi « Lezioni di Geometria differenziale » pag. 169.

si vengono delimitate si trova in particolare il piano (e le superficie sviluppabili) per cui essa è nulla.(*)
Riemann ha avvertito che volendo esprimere la condizione generale per l'omogeneità di una varietà V_n ad $n > 2$ dimensioni si è condotti ad ammettere che le superficie formate dalle geodetiche di ogni giacitura uscente da un punto, abbiano tutte in ogni punto una curvatura costante: ciò si esprime dicendo che la varietà è a curvatura costante. In questa famiglia di varietà compare appunto lo S_n euclideo, corrispondentemente al valore zero della curvatura.
La curvatura di una superficie in un punto si esprime come un invariante (differenziale del 2° ordine) dei coefficienti della forma

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

che ne dà l'elemento lineare. Volendo che tale curvatura abbia un valore costante si trovano delle condizioni per le a_{ik}, e così appunto si riesce ad assegnare la natura della determinazione metrica di una varietà a curvatura costante. Riemann ha dato la forma

$$ds^2 = \frac{\sum_1^n i\, dx_i^2}{\left\{1 + \frac{\alpha}{4} \sum_1^n i\, x_i^2\right\}^2}$$

a cui sempre può ricondursi l'espressione dell'elemento lineare d'una varietà di curvatura costante α, assunto un conveniente sistema di coordinate.
Il problema analitico concreto di assegnare le condizioni sotto cui una forma generale assegnata

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è l'espressione dell'elemento lineare d'una varietà a curvatura costante (cioè si può ricondurre alla forma di Riemann con una trasformazione di coordinate) è stato risoluto Lipschitz† e Christoffel.(**) Recentemen-

---

(*) Cfr. § 6. † Lipschitz „Fortgesetzte Untersuchungen ...„ Journal für Math.
(**) Cfr. Christoffel « Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten grades » (Crelle Bd. 70).

te il Lie(*) ha ripreso (dal punto di vista della teoria dei gruppi) la questione di caratterizzare la classe delle varietà a curvatura costante mediante l'esistenza dei movimenti in esse, dando forma più determinata ai resultati di Riemann (precisati appunto nel senso detto innanzi di ammettere l'esistenza d'un movimento che porti un punto e una direzione per esso in ogni altro punto e rispettivamente direzione per esso). Ma sul nuovo indirizzo del Lie ci proponiamo di tornare più tardi.
Ai lavori di Riemann si possono riattaccare quelli di Beltrami già menzionati nei § 2, 6.(**) Nel «Saggio di interpretazione ecc.» egli aveva avuto l'idea feconda di cercare la interpretazione della Geometria non-euclidea piana nella Geometria sopra una superficie di curvatura costante, mostrando particolarmente come il caso iperbolico di Lobatschewsky corrisponda alle superficie di curvatura costante negativa e trovi una immagine completa nella Geometria sopra la pseudosfera (chiamate «rette» le geodetiche), vale a dire che questa Geometria si può identificare in senso astratto alla Geometria di tutto il piano iperbolico, senza restringersi a considerare la Geometria stessa in regioni limitate rispettivamente di superficie o di piano. Ma lasciamo per ora da parte l'espressa considerazione, limitandoci a parlare della Geometria intesa in regioni convenientemente limitate di superficie o di varietà, ciò che generalmente si suppone negli sviluppi metrico-differenziali.
Come fondamento della possibile interpretazione della Geometria piana che prescinde dal postulato d'Euclide sopra le superficie di curvatura costante si può ritenere il fatto che (per conveniente scelta del sistema di coordinate) le geodetiche d'una superficie a curvatura costante possono rap-

---

(*) «Theorie der Transformationsgruppen» (Kap. 17.18).
(**) «Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea» (Giornale di Mat. di Napoli t. IV) «Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante» (Annali di Mat. s. II t. II).

presentarsi con equazioni lineari; giacchè una tale rappresentabilità significa che sulla superficie (in regioni limitate) vale la Geometria proiettiva del piano, dette « rette » le geodetiche. Beltrami si è proposto inversamente di trovare tutte le superficie le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari ed ha stabilito che queste sono soltanto le superficie a curvatura costante.

Nel lavoro degli Annali di Matematica (t. II) le stesse idee sono applicate alle varietà di curvatura costante a più (n) dimensioni, dove Beltrami riconosce per $n=3$ l'interpretazione della Geometria spaziale ordinaria che prescinde dal postulato d'Euclide. Partendo dallo studio della varietà

$$x^2+x_1^2+\dots\dots+x_n^2=a^2$$

di cui l'elemento lineare è dato da

$$ds^2=\frac{dx^2+dx_1^2+\dots\dots+dx_n^2}{x},$$

Beltrami mostra che tale espressione è riducibile alla forma di Riemann (caratterizza cioè le varietà a curvatura costante) ed arriva a rappresentare le geodetiche su di esse con equazioni lineari.

<u>Schläfly</u>(*) inverte la considerazione (come già Beltrami aveva fatto per $n=2$) mostrando che le varietà di cui le geodetiche sono rappresentabili mediante equazioni lineari sono a curvatura costante.

Resta così provato che « <u>La condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà v_n in cui vale una geometria metrica possa considerarsi come (una regione di) un S_n proiettivo le rette del quale sieno le geodetiche di v_n, è che la v_n sia a curvatura costante</u>. La Geometria metrica che vale in una tale v_n è allora l'estensione dell'ordinaria Geometria <u>fatta astrazione dal postulato d'Euclide</u> (e coincide con essa per $n=3$).

La grande portata di questi resultati può essere convenien-

(*) « Nota alla memoria del signor Beltrami: Sugli spazi a curvatura costante. (Annali di Mat. t. V).

tamente intesa mediante il loro ravvicinamento cogli sviluppi relativi alle determinazioni metrico-proiettive che per un altro lato avevano avuto origine dai lavori di Laguerre e di Cayley. Beltrami stesso(*) ha avvertito il confronto, che in seguito il Klein(**) ha posto meglio in luce, aggiungendo osservazioni originali ed importanti.

Laguerre in un lavoro che i matematici hanno lasciato lungamente inavvertito(***) ha rilevato il fatto che le proprietà metriche delle figure nel piano o nello spazio (intuitivo) si possono considerare come relazioni proiettive di esse con una forma particolare (assoluto), la quale è costituita pel piano dalla involuzione tra i punti all'infinito di rette ortogonali (ossia dai punti ciclici sulla retta all'infinito), per lo spazio dalla polarità tra i punti e le rette all'infinito rispettivamente di rette e piani perpendicolari (ossia dal cerchio immaginario all'infinito delle sfere).

Cayley(****) si pone una questione più generale cercando se in uno spazio proiettivo si possa fissare una forma di riferimento (assoluto) in modo che le relazioni proiettive degli enti coll'assoluto sieno da riguardarsi (in senso astratto) come analoghe alle ordinarie relazioni metriche fatta astrazione dal postulato d'Euclide. Gli sviluppi ~~che~~ si riferiscono successivamente alle forme di 1ª, 2ª e 3ª specie. Parlando per esempio di quest'ultime, noteremo che egli assume come forma di riferi-

(*) «Risposta alle osservazioni del signor Schläfly» (Annali di Mat. t. V).
(**) «Ueber di sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie» (Mathematische Annalen Bd. 4, 6 – 1871-72).
(***) «Note sur la théorie des foyers» (Nouvelles Annales de Mathématique t. 12 – 1853).
(****) «Memoirs upon quantities» (Philosophical Transactions 1859).

mento una quadrica inviluppo, ossia una forma di 2° grado in coordinate di piani e tratta i tre casi differenti in cui:

1°) la quadrica assoluto sia reale e non degenere a punti ellittici;

2°) essa sia immaginaria, cioè non si abbia come forma di riferimento una polarità uniforme;

3°) essa sia immaginaria e (una volta) degenere, cioè si abbia come forma di riferimento (l'insieme dei piani tangenti ad una conica immaginaria ossia) una polarità uniforme in un dato piano.

Questi tre casi a cui l'autore si limita (escludendo altre forme quadratiche a priori possibili) conducono rispettivamente alla Geometria iperbolica (di Lobatschewsky) alla ellittica (di Riemann) ed alla parabolica (di Euclide). Si ha la prima Geometria ove si immaginino tolti dallo spazio proiettivo tutti i punti esterni alla quadrica assoluto, e si considerino i punti di questa come punti all'infinito. Il concetto di distanza di due punti (interni alla quadrica assoluto) si fa scaturire dalla considerazione del birapporto dei due punti colle intersezioni della loro congiungente coll'assoluto; ma perchè sussista la proprietà distributiva deve assumersi tale distanza proporzionale al logaritmo del birapporto. La Geometria metrica che resta individuata in un piano (secante la quadrica assoluto) è quella (iperbolica) che si ottiene fissando come assoluto la conica sezione. L'angolo di due rette in un piano si assume proporzionale al logaritmo del birapporto da essa formato colle rette del loro fascio tangenti alla sfera ecc. Così la Geometria metrica nella stella è quella (ellittica) ottenuta fissando come assoluto il cono quadrico (immaginario) tangente alla sfera pel punto.

La Geometria così fondata (interpretazione della Geometria non euclidea iperbolica) è stata già occasionalmente incontrata nel § 8.

Nella Geometria ellittica le relazioni metriche fondamentali si pongono analiticamente nello stesso modo che nella iperbolica; soltanto la quadrica assoluto è immaginaria e perciò (tutti i punti sono da riguardarsi interni ad essa e quindi) nessun punto è da togliere. Nel piano come nella stella riesce fissata una Geometria ellittica. La quadrica assoluto è qui riferita ugualmente allo spazio di punti e di piani (nell'altro caso no perchè si tolgono i punti ed i piani esterni mentre ai punti esterni corrispondono per dualità i piani secanti); perciò nella Geometria metrica ellittica vale la legge di dualità come nella Geometria proiettiva, ciò che non accade per le altre metriche.

La Geometria parabolica (euclidea) si ottiene assumendo la quadrica assoluto immaginaria degenere (una volta): questa metrica è la ordinaria ed apparisce come caso limite delle altre due.

L'accennato modo di Cayley di porre una determinazione metrica in un S_3 proiettivo ove ci si riferisca (per semplicità) ad un sistema di coordinate proiettive (§ 12) conduce immediatamente a stabilire l'espressione dell'elemento lineare ds in esso, e quindi non differisce dal modo generale di porre una determinazione metrica in una varietà.

L'espressione

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

ha un significato spiccato in relazione alla quadrica assoluto, giacchè l'equazione

$$ds^2 = 0$$

rappresenta il complesso delle direzioni delle rette (immaginarie) costituenti il cono quadrico circoscritto alla quadrica assoluto dal punto che si considera: queste rette sono invero linee di lunghezza nulla, ossia tali che è nulla la distanza di due qualunque punti di essa come segue subito dalla definizione di distanza nel caso iperbolico o ellittico e con passaggio al limite pel caso parabolico (in cui l'assoluto è degenere).

D'altra parte in una qualsiasi varietà V_3 a curvatura costante (che come sappiamo può considerarsi come una parte di un S_3 proiettivo dove le geodetiche sono «rette») l'equazione

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$$

rappresenta un complesso di direzioni immaginarie uscenti da ciascun punto, costituenti le rette d'un cono quadrico, e l'insieme dei piani tangenti a tutti questi coni quadrici costituisce una quadrica che è a punti ellittici o immaginaria e al più una volta degenere se (come si suppone) il ds^2 è positivo per valori reali delle dx_i: la determinazione metrica data dall'espressione del ds^2 può allora esser posta ugualmente nel modo di Cayley assumendo la nominata quadrica come assoluto.

Dunque il modo di Cayley di porre una determinazione metrica in un S_3, è il modo più generale con cui possa porsi in S_3 una determinazione metrica in guisa che le rette sieno le geodetiche.

È anche da notarsi espressamente che la determinazione metrico-proiettiva di Cayley conduce alla considerazione dello spazio <u>completo</u> (euclideo o no).

Le cose dette si generalizzano passando agli S_n con $n > 3$.

Si supponga posto in un S_n un sistema di coordinate proiettive di iperpiani (in modo che il punto sia rappresentato da un'equazione lineare); una equazione di 2° grado rappresenta una <u>quadrica inviluppo</u> che sotto certe condizioni può essere assunta come <u>assoluto</u> in un senso analogo a quello detto per $n = 3$: allora nello S_n vien posta una determinazione metrica in guisa che le rette sono geodetiche e che esso diviene una varietà a curvatura costante ecc.

Tantochè si può affermare che:

<u>In ogni S_n proiettivo può porsi una determinazione metrica siffatta che le rette riescano geodetiche: il modo più generale di ottenerla è di fissare il riferimento dello S_n ad una opportuna quadrica-assoluto.</u>

Si ottiene così nello S_n (da cui eventualmente sono <u>tolti</u> i punti <u>esterni</u> alla quadrica assoluto se questa è reale) una Geometria metrica che è l'estensione di quella ordinaria di tutto lo spazio per $n = 3$, fatta astrazione dal postulato di Euclide.

Come fin da principio abbiamo detto è caratteristica in questa Geometria la presenza dei movimenti dello S_n in sè, che sotto il punto di vista metrico-differenziale si presentano come trasformazioni che lasciano inalterata l'espressione dell'elemento lineare (flessioni senza estensione) ed invece (come il Klein ha osservato) sono da riguardarsi sotto l'aspetto proiettivo come le omografie (corrispondenze che fanno corrispondere iperpiani ad iperpiani) che lasciano invariata la quadrica assoluto (aggiunta un'altra condizione nel caso euclideo).(*)

Lo S_n metrico-proiettivo ossia la varietà a curvatura costante costituisce attualmente il campo fondamentale della Geometria: il concetto di tale S_n deve riguardarsi come la naturale estensione del concetto dello S_3 intuitivo: le varie forme geometriche, curve, superficie ecc. si studiano generalmente come contenute in un tale S_n.

Così a stabilire le relazioni fondamentali tra gli S_r $(r < n)$.

(*) Un'altra importante osservazione del Klein riguarda la considerazione della Geometria metrico-proiettiva di tutto il piano (o delle superficie a curvatura costante). Mentre questa geometria pel caso iperbolico trova la sua immagine completa nella Geometria sulla pseudosfera (Beltrami), nel caso ellittico essa non è suscettibile di essere rappresentata completamente dalla Geometria sulla sfera dove per due punti opposti passano infiniti circoli massimi (geodetiche), sebbene una regione di sfera sia atta a rappresentare una regione di piano ellittico. Il Klein ha rilevato fra i due casi la differenza notevole che mentre il piano iperbolico è semplicemente connesso (come la pseudosfera e la sfera), il piano ellittico (completo) è due volte connesso ossia non viene spezzato da un taglio chiuso. Così non nella Geometria sulla sfera ma nella Geometria della stella si può avere una immagine completa della Geometria piana ellittica.

in un tale S_n sono dedicati i lavori di Jordan (*) e D'Ovidio (**), il primo dei quali relativo soltanto allo S_n euclideo: (nel lavoro di D'Ovidio compare anche l'uso della dualità e della proiettività convenientemente estese).
Ma più frequentemente lo S_n è stato studiato soltanto in senso proiettivo. Essenzialmente in tal modo compare la sua considerazione ove si riguardino come « punti » gli elementi (curve, superficie ecc.) d'un sistema lineare (secondo il modo di vedere introdotto da Pluecker): di tale considerazione si valsero per esempio il Cayley (***), l'Halphen (****) e il Clifford (*****). Ancora sotto l'aspetto proiettivo occorre la considerazione dello S_n ove si cerchi in esso una immagine geometrica di resultati analitici della teoria degli enti algebrici; così per esempio in lavori di Salmon, Noether, Clebsch ecc.
Sarebbe troppo lungo enumerare tutti i lavori (ad esempio del Klein, del Lie ecc.) in cui più o meno esplicitamente si fa uso degli iperspazi: ma una speciale menzione deve esser fatta della memoria classica del Veronese « Behandlung der proiectiwischen Verhältnisse ecc. » (Mathem. Annalen XIX 1881): giacchè questa memoria segna una data nello sviluppo della Geometria proiettiva iperspaziale, che in essa si trova trattata sistematicamente. In particolare il metodo delle proiezioni che permette l'applicazione diretta degli iperspazi allo studio degli enti dello spa-

(*) « Essai sur la Géometrie à n dimensions » (Bullettin de la Société math. de France t. III - 1875).
(**) « Le relazioni metriche fondamentali negli spazi di quantisivogliano dimensioni e di curvatura costante » (Memoria dell'Accad. dei Lincei - 1876-77).
(***) « On the Curves wich satisfy given Conditions » « A Memoir on Abstract Geometry » (Phil. Transactions 1867-69).
(****) « Recherches de Géometrie à n dimensions » (Bullettin de la Société math. 1873).
(*****) « On the Classification of Loci » (Phil. Trans. 1878).

zio ordinario (riguardati come proiezioni di figure iperspaziali) è di uso costante e fecondo nella memoria del Veronese.(*)
Il lavoro del Veronese fu il punto di partenza di una serie di ricerche sulla Geometria proiettiva iperspaziale, avvenute specialmente in Italia. Non è qui il caso di enumerare questi lavori: soltanto fra i promotori di questo largo movimento scientifico, accanto al Veronese, dobbiamo nominare il Segre. Questi non solo fu tra i primi a seguire l'impulso dato dal Veronese, ma segnò anche un indirizzo nuovo mostrando sistematicamente l'uso che si poteva trarre dagli iperspazi mediante le varie interpretazioni date all'elemento « punto »: abbiamo già accennato all'origine di tale concetto da Pluecker, Cayley ecc; al Segre (che lo ha introdotto in Italia) spetta di averlo popolarizzato mostrandolo con molti esempi concreti la sua grande importanza.(**)

20 - I postulati della Geometria proiettiva iperspaziale -

Secondo ciò che abbiamo detto nel precedente paragrafo, il problema generale di porre i postulati della Geometria si può considerare come consistente nell'assegnare « le relazioni geometriche fondamentali che caratterizzano un S_n metrico-proiettivo ossia una varietà a curvatura costante ».
L'opera del Veronese « Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee »(***) si propone l'analisi di queste proposizioni (anche con intento di generalizzazione rispetto alle ordinarie nozioni della continuità) cercando di profittare delle mutue relazioni fra le nozioni

---

(*) Pare che il primo esempio di siffatte applicazioni sia dovuto al Cayley (« Sur quelques théorèmes de la géométrie de position » Crelle t. 31).
(**) Si confrontino per es. i suoi lavori sulle quadriche, sulla geometria della retta, sulla geometria delle coniche nel piano, ecc. nelle Memorie e negli Atti dell'Accademia di Torino (Anni 1884 e seguenti).
(***) Padova 1891.

metriche e le proiettive e quelle di continuità per ridurre al minimo il numero dei postulati occorrenti.
Sotto un diverso aspetto si presenta il problema dei postulati della Geometria ove si vogliano separare i vari ordini di nozioni che in esse compariscono, ciò che a noi sembra conforme al criterio fisio-psicologico.(*) Abbiamo cercato nei paragrafi precedenti di rilevare come nella formazione del concetto dello S_n metrico-proiettivo, (in particolare dello S_3 intuitivo) concorrono essenzialmente tre ordini di nozioni:

1) le nozioni di connessione fondamento comune di ogni forma di intuizione geometrica;
2) le nozioni proiettive;
3) le nozioni metriche.

In conseguenza il problema dei postulati si presenterebbe a noi sotto il seguente aspetto:

1) caratterizzare la varietà continua v_n ad n dimensioni;
2) caratterizzare tra le v_n lo S_n proiettivo immaginando posta in v_n una particolare famiglia di curve, superficie ecc. (le rette, i piani ecc.) soddisfacenti a date relazioni fondamentali: dedurne mediante una quadrica-assoluto di riferimento una determinazione metrica;

oppure

2') porre in v_n le nozioni metriche fondamentali conducenti alla rappresentabilità di v_n con coordinate e all'espressione dell'elemento lineare; caratterizzare fra le v_n quelle (complete) a curvatura costante e dedurne le fondamentali relazioni di posizione fra le geodetiche.

Diciamo subito che la 1ª questione presenta delle difficoltà e che ad ogni modo i postulati che caratterizzano una v_n riescono assai complicati; se si aggiunge la considerazio-

---

(*) S'intende che ad approfondire l'esame critico dei postulati della Geometria non si dovrebbe limitarsi esclusivamente a questo punto di vista, interessando di indagare in tutti i modi le mutue relazioni fra i vari ordini di concetti.

ne delle difficoltà che presenta la questione 2ª) ove si voglia trattare in via sintetica, ci si convince che il secondo dei modi detti innanzi appare solo praticabile ove si parta a priori da una rappresentabilità analitica della V_n (secondo è stato accennato nei §i 14 e seguenti): il problema concernente gli elementi della teoria della connessione riesce invece assai semplice limitato a quanto si riferisce agli enti fondamentali dello S_n proiettivo (rette, piani, ecc). La ragione di ciò sta nel fatto che ci si limita qui a caratterizzare una classe di enti molto più ristretta: ove si voglia poi porre le nozioni caratteristiche delle «varietà a più dimensioni» contenute in un S_n, e precisare così le proposizioni fondamentali della generale teoria della connessione le medesime difficoltà compariscono di nuovo: e però non ci sembrerebbe giusto che si traesse un argomento in contrario a questa trattazione dei postulati dalla difficoltà di porre in modo semplice quelli che si riferiscono alla definizione generale d'una V_n.
Introdotte le relazioni fondamentali tra gli S_r $(r < n)$ contenuti in S_n (relazioni che costituiscono il gruppo dei postulati della così detta <u>Geometria di posizione</u>)(*) il gruppo dei postulati di connessione può ridursi a ciò che basta a stabilire il concetto di <u>segmento</u>, e di <u>continuità</u> sulla retta (aggiunto il carattere proiettivo dei segmenti).
Ciascuno dei due gruppi menzionati di postulati ha dato luogo a varie ricerche di cui mal potremo riferire brevemente. Tuttavia crediamo utili le seguenti considerazioni.

1) I postulati della Geometria di posizione si presentano differenti a seconda che si vuol fondare la Geometria ellittica, iperbolica o parabolica.
La differenza si può riportare ai postulati della Geometria piana. Nel porre questi postulati lasciamoci guida

---

(*) Intesa in un senso più ristretto dell'ordinario: in senso largo si può comprendere sotto questo nome tutta la Geom. proiettiva.

re dall'intuizione dando al « piano astratto » il significato di « piano intuitivo ».

L'intuizione del <u>piano</u> ci fornisce in primo luogo il postulato: « Per due punti di un piano passa <u>una</u> <u>retta</u> giacente in esso piano ».

Successivamente l'intuizione ci dice che nel piano vi sono coppie di rette che non hanno alcun punto comune.

Essa ci dice ancora che « data (nel piano) una retta a ed un punto A fuori di essa, vi è per A <u>una</u> retta (<u>parallela</u> ad a) che non incontra a » (postulato d'Euclide).

L'intuizione ci dà dunque il piano parabolico (euclideo). Ma se prescindiamo dal postulato d'Euclide acquistiamo il concetto intuitivo di un piano più generale, « il piano iperbolico » che abbraccia come caso limite il piano parabolico. Questo concetto nasce così nella nostra mente dall'intuizione combinata coll'astrazione.

Si compia una astrazione successiva separando nella nostra mente quegli elementi dell'intuizione che provengono dalla sola « vista »: formiamoci così una nuova forma d'intuizione, la <u>intuizione</u> <u>grafica</u>.

Immaginiamo quindi di concepire il piano intuitivo conforme al modo con cui il piano <u>fisico</u> si presenta all'occhio d'un osservatore sfornito di qualsiasi altro senso, supponendo in conseguenza di poter sostituire indifferentemente ad un piano dato π un altro piano prospettivo (essendo centro di proiezione, l'occhio dell'osservatore, riguardato come un punto O esterno al piano π. Allora due rette qualunque del piano π vengono proiettate da O secondo due piani che hanno sempre una retta comune: perciò al piano π si può sempre sostituire, nei rapporti visivi, un piano prospettivo π' in modo che le proiezioni (fatte da O) di due rette di π che non s'incontrano sieno due rette di π' che s'incontrano; il punto comune di queste due rette di π' può ritenersi (convenzionalmente) come immagine di un <u>punto</u> <u>ideale</u> comune alle due rette di π: questo punto ideale può essere riguardato come il <u>centro</u> di un <u>fascio</u> <u>improprio</u> <u>di</u> <u>raggi</u> sezione di un ordinario fascio di piani il cui asse passa per O. Questa convenzione ha come si vede il suo sostrato nell'intuizione grafica; ma perchè essa possa essere usata negli sviluppi matematici si esige anzitutto la dimostrazione che essa è indipendente dalla scelta arbitraria del punto O fuori di π, e quindi che i postulati fondamentali della Geometria di posizione sussistono ancora intendendo indifferentemente colla parola « punto » che compare in quegli enunciati, il punto <u>reale</u> intuitivo, ed il punto ideale. Ciò si realizza in fatto coll'introduzione successiva (mediante convenzione) delle <u>rette</u> e dei <u>piani</u> <u>ideali</u>: ci si appoggia a tal fine su pochi principii intuitivi della Geometria di posizione (come « Due punti determinano <u>una</u> <u>retta</u> cui appartengono » « Un punto e una retta che non si appartengono determinano <u>un</u> <u>piano</u> a cui appartengono » « Un piano contiene la retta determinata da due dei suoi punti » « Due piani aventi un punto comune hanno comune una retta per esso »).(*)

Così mediante l'aggiunta degli elementi ideali a quelli reali dello spazio iperbolico S_3, si ottiene di poter enunciare le proposizioni fondamentali della Geometria di posizione dello S_3 sotto la forma che si dà comunemente a queste proposizioni nella Geometria proiettiva ordinaria dopo l'introduzione degli <u>elementi</u> <u>all'infinito</u>: anzi questa stessa introduzione degli elementi all'infinito nello S_3 euclideo viene ora ad apparirci come un caso particolare della introduzione degli elementi ideali nello S_3 iperbolico.

Se ricordiamo ciò che nel § 19 abbiamo detto intorno alla determinazione metrica iperbolica nello S_3 proiettivo, vediamo che i punti ideali in tale S_3 non sono altro che quelli esterni alla quadrica assoluto che abbiamo avvertito doversi togliere da tale S_3 (ossia non doversi più considerare come effettivi punti dello S_3 iperbolico). Lo S_3 stesso in quanto lo si considera <u>completo</u> appare dunque diverso secondochè lo

---

(*) Non possiamo dilungarci negli sviluppi qui occorrenti: rimanderemo perciò alle « Vorlesungen über neuere Geometrie di <u>Pasch</u>.

si considera come S_3 iperbolico o come S_3 proiettivo soltanto. Bisogna uniformare la concezione dello S_3 al punto di vista cui si mira nel suo studio ed in particolare la concezione dello S_3 proiettivo alla pura intuizione grafica, rispetto a cui gli elementi ideali non debbono distinguersi dai reali. Allora le relazioni fondamentali della Geometria di posizione nello S_3 proiettivo si possono riguardare come veri postulati intuitivi; ma ci si riferisce qui ad una forma superiore dell'intuizione, la quale si ha nella mente del cultore della Geometria proiettiva, per effetto di una sistematica astrazione da alcuni elementi dell'intuizione ordinaria.

In ciò che precede abbiamo esaminato come, col formarsi dell'intuizione grafica, si assurga al concetto del piano e dello spazio (S_3) proiettivo partendo dal piano e dallo spazio intuitivo: ciò anche prescindendo dal postulato d'Euclide, cioè nel caso iperbolico e parabolico. Del caso ellittico non abbiamo parlato, anzi il piano ellittico è stato subito escluso come ripugnante alla nostra intuizione, ammettendo che vi sieno nel piano coppie di rette che non s'incontrano. Ma, avendo fatto astrazione da alcuni elementi dell'intuizione, si vede ora che rispetto alla pura intuizione grafica il piano e lo spazio ellittico non sono più ripugnanti; anzi senza nessuna convenzione lo spazio ellittico soddisfa senz'altro ai postulati di posizione dello S_3 proiettivo.

2) I postulati della Geometria di posizione in S_3 (che oramai intendiamo desunti dalla pura intuizione grafica) possono esser posti sotto tal forma che la generalizzazione occorrente per passare agli analoghi postulati dello S_n ($n > 3$) apparisca spontanea. Basta per ciò partire dalla generazione del piano grafico ottenuta proiettando una retta da un punto esterno, e dalla generazione dello S_3 grafico mediante proiezione di un piano da un punto esterno. Allora (cfr. il § 11) possiamo introdurre come postulato l'esistenza d'un punto esterno allo S_3 che dia luogo ad una analoga generazione dello S_4 ecc. Il postulato che qui si introduce ha un carattere diverso dai precedenti; esso suppone una successiva astrazione della men-

te per la quale si prescinda dalla natura dell'elemento « punto » e si pensi di poter interpretare questo elemento in modo diverso: ciò quando si voglia acquistare dello S_4 (e più generalmente dello S_n) un concetto intuitivo riguardando lo S_4 stesso nel suo complesso. Ma possiamo ancora conservare la nozione intuitiva del « punto »; soltanto allora lo S_4 (e in generale lo S_n, $n>3$) non è più una forma intuitiva, ma si può riguardare come una forma intuitiva ogni S_3 contenuto nello S_4, e dopo avere assimilato le fondamentali relazioni che legano gli S_3 in un S_4 (o in un S_n) assurgere ad una intuizione, invero differente dall'intuizione fisica, la <u>intuizione</u> <u>iperspaziale</u>. La generazione anzidetta degli iperspazi appare esplicitamente in <u>Veronese</u> « Behandlung der projectivischen Verhältnisse ecc. » « Fondamenti di Geometria ecc. » (opere c.); essa compare pure in <u>Amodeo</u> « Quali possono essere i postulati della Geometria proiettiva di un S_r »(*) <u>Fano</u> « Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare ecc. »(**)

È da avvertire che occorre completare la generazione data del « piano » ammettendo che esso contenga la retta che ne congiunge due punti arbitrari; da ciò si deduce che due rette d'un piano hanno sempre un punto comune; invero il piano ellittico o parabolico, non completato coll'aggiunta dei punti ideali, non vengono generati <u>interamente</u> proiettando una retta da un punto esterno.

È pure da avvertire che la Geometria di posizione dello S_n (fondata sui postulati di posizione introdotti) comprende il « teorema dei triangoli omologici » e le sue conseguenze relative ai gruppi armonici ecc; ma per ciò (secondochè il Klein ha osservato) occorre supporre $n \geq 3$.

Il Fano (nella citata Nota) ha condotto più innanzi l'esame critico dei postulati della Geometria di posizione in confronto al secondo gruppo di postulati della Geometria proiettiva, rile-

---

(*) Atti dell'Accademia di Torino vol. XXVI - 1891.

(**) Giornale di Matematiche di Battaglini - 1891.

vando l'esistenza di configurazioni costituite da un numero finito di elementi (punti) per le quali sono soddisfatti i postulati della Geometria di posizione in un S_n. Ciò mostra come i detti postulati non costituiscono la parte più intrinseca della nostra intuizione geometrica.

3) I postulati di connessione della retta occorrenti alla Geometria proiettiva consistono specialmente in quelli relativi alle nozioni di ordini naturali, segmenti ecc, e nel postulato di continuità.

Di questi postulati (e del modo come essi permettono di colmare una lacuna lasciata dallo Staudt nella dimostrazione del teorema fondamentale della proiettività) trattono anzitutto Klein(*) e Darboux(**): dal teorema di quest'ultimo(***) segue in particolare che i postulati di connessione della retta occorrenti alla Geometria proiettiva sono quelli che conducono alla rappresentabilità dei punti della retta mediante coordinate proiettive cioè mediante un sistema di coordinate tale che il birapporto dei 4 numeri corrispondenti ai punti d'un gruppo armonico sia uguale a −1. In seguito a ciò De Paolis(****) e Pasch(*****) nel porre i postulati di connessione della retta si propongono appunto di venire alla rappresentabilità dei punti di essa mediante coordinate proiettive.

(*) Mathem. Annalen Bd VI. VII.

(**) Mathem. Annalen Bd XVII.

(***) Il teorema a cui si allude è il seguente:
Una funzione della variabile reale x che soddisfa alle equazioni funzionali

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x^2) = \{f(x)\}^2$$

è necessariamente la funzione

$$f(x) = x.$$

(****) « Sui fondamenti della Geometria proiettiva » (Memorie Accad. dei Lincei 1880-81).

(*****) « Vorlesungen ecc. » (op. c.)

Tuttavia un'osservazione generale deve esser fatta a proposito dei menzionati lavori: in essi compare il concetto metrico di segmenti uguali, quindi si fa uso in parte dell'intuizione metrica ordinaria, ossia di un elemento estraneo alla pura concezione dello spazio proiettivo.
Bisogna aggiungere però che la nozione metrica sopra nominata non compare nei detti lavori in modo essenziale: se ne fa uso soltanto per stabilire qualche proposizione grafica che serva di base alle successive deduzioni. Appunto da tale osservazione muovono l'Amodeo ed il Fano nei citati lavori. Il primo di essi segue lo svolgimento di De Paolis per porre sulla retta le coordinate proiettive; fa uso perciò degli ordini naturali dei punti della retta, introduce sotto forma grafica il postulato d'Archimede e successivamente pone un altro postulato pei punti irrazionali. Il Fano invece mostra come, prescindendo dal concetto degli ordini naturali, si può raggiungere lo stesso scopo assumendo come postulati alcuni enunciati relativi alle serie armoniche, che nel lavoro di De Paolis compariscono come teoremi: solo in via subordinata accenna agli ordini naturali dei punti d'una retta (senza sviluppare) osservando acutamente una lacuna nelle ordinarie dimostrazioni della separazione delle coppie di punti coniugati in un gruppo armonico.
Si può avere così un sistema di postulati atti a fondare la Geometria dello S_n proiettivo: ma se lo scopo può venir raggiunto dal punto di vista logico, non accade ugualmente che i postulati così introdotti rivestano il carattere di intuitività, fatta eccezione per quanto concerne la considerazione degli ordini naturali sulla retta (considerazione non abbastanza precisata): il punto di vista intuitivo viene poi abbandonato del tutto nell'introduzione dei punti aventi coordinate irrazionali.
Il modo più naturale di porre i postulati di connessione della retta è di analizzare i dati dell'intuizione grafica della retta facendo astrazione da ogni elemento dell'intuizione metrica: occorre dunque portare l'attenzione sulla generazione

della retta col <u>movimento</u> d'un punto o se si vuole sul <u>movimento</u> della <u>retta</u> <u>su se</u> <u>stessa</u>, ma (conforme all'intuizione grafica) della retta concepita come <u>elastica</u> non già come <u>rigida</u>. Se ne desumeranno allora le nozioni relative agli <u>ordini naturali</u> dei punti della retta, e quindi di <u>segmento</u> (indipendentemente dalla sua lunghezza) ecc.

Nella nota di <u>Enriques</u> « Sui fondamenti della Geometria proiettiva » (*) viene appunto analizzato il concetto intuitivo grafico del movimento della retta (movimento della retta elastica), e desunta una serie di postulati grafici relativi agli ordini naturali dei punti d'una retta ecc. Ivi si mostra come da tali postulati grafici seguano tutte le proposizioni fondamentali che nello sviluppo della Geometria proiettiva si desumono generalmente da quel concetto intuitivo; e come si possa introdurre sotto forma intuitiva grafica il postulato della continuità, e quindi stabilire sinteticamente il teorema fondamentale della proiettività (ciò che equivale alla rappresentabilità dei punti della retta mediante coordinate proiettive).

Crediamo opportuno di far seguire le precedenti considerazioni dall'enumerazione dei postulati grafici che poniamo a base della Geometria dello S_n proiettivo ($n \geq 3$), facendo risaltare come questi postulati tengano luogo di definizione per lo S_n stesso.

Gli elementi geometrici fondamentali sono i <u>punti</u> (o S_0), le <u>rette</u> (o S_1), i <u>piani</u> (o S_2), ... gli S_{n-1}, lo S_n : ciascun S_r ($r \leq n$) vien concepito come insieme di <u>infiniti punti</u> (che gli <u>appartengono</u>).; Si dice che un S_r <u>appartiene</u> ad un S_h o è <u>contenuto</u> in S_h se i punti dello S_r appartengono allo S_h. Gli elementi fondamentali S_0 S_1 ...... S_n non vengono definiti. Si suppone $n \geq 3$.

Si introducono i postulati seguenti:

(*) Rendiconti Istituto lombardo - 1893 -

I. Postulati della Geometria di posizione.

1- Due punti (S_0) di S_n appartengono ad una retta S_1 (che si dice proiettante un punto dall'altro).
2- Vi sono in S_n punti esterni (non appartenenti) ad una retta.
Proiettando i punti di una retta da un punto esterno si genera un piano S_2 (luogo dei punti delle rette proiettanti) appartenente ad S_n.
3- Un piano contiene la retta determinata da due suoi punti arbitrari.
(Segue:
Due rette di un piano hanno sempre comune un punto).
4- Vi sono in S_n punti esterni ad un S_r ove $r < n$.
Proiettando i punti di un S_r da un punto esterno si genera un S_{r+1} (luogo dei punti delle rette proiettanti), appartenente ad S_n.

II. Postulati relativi alla connessione della retta.

5- Esiste una disposizione circolare naturale dei punti d'una retta che ha due sensi l'uno inverso dell'altro. A ciascun senso della disposizione appartiene un ordine (naturale) dei punti della retta avente un dato primo punto.
In un ordine naturale dei punti d'una retta:
a) dati due punti B, C l'uno per esempio B precede l'altro (ed allora C segue B).
b) se B, C, D sono tre punti della retta, e se B precede C e C precede D, in conseguenza B precede D.
I due ordini naturali dei punti d'una retta che hanno uno stesso primo punto e appartengono ai due sensi opposti della disposizione sono l'uno inverso dell'altro, cioè si deducono l'uno dall'altro collo scambio delle parole « precede » e « segue » (fatta eccezione pel primo punto che è lo stesso per entrambi).

Due ordini naturali (A) (B) che hanno lo stesso senso e come primi punti A, B, si deducono l'uno dall'altro colla permutazione circolare che porta A in B, cioè due punti che si seguono in un dato modo in (A) si seguono nello stesso modo in (B) se ambedue precedono o ambedue non precedono B in (A), ed invece si seguono in modo opposto in (B) se l'uno precede B in (A) e l'altro no.

6 - Nel piano proiettando da un punto esterno una retta sopra un'altra si deduce da un ordine naturale della prima un ordine naturale della 2ª.

7 - (Postulato della continuità). Se, dato sulla retta un ordine naturale, i punti della retta vengono divisi in due parti in modo che:

a) ciascun punto della retta appartenga ad una delle due parti,

b) ogni punto della 1ª parte preceda sempre ogni punto della 2ª,

esiste un punto della retta (che può appartenere all'una o all'altra parte) cui non conseguono punti della 1ª parte e non precedono punti della 2ª.

21 - Alcune proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva di S_n - I postulati stabiliti nel precedente paragrafo per lo S_n si riducono a quelli della ordinaria Geometria proiettiva se $n=3$. Questa Geometria proiettiva si può dunque ritenere fondata entro ogni S_3 di S_n. Enunciamo ora alcune proposizioni fondamentali che si deducono dai detti postulati, e caratterizzano le mutue relazioni degli spazi contenuti in un S_n.

In S_n, un S_h ed un S_k aventi comune un S_i appartengono sempre ad un S_{h+k-i} ma non ad uno spazio di dimensione minore.

In particolare se $h+k>n$, lo S_h, S_k hanno comune un S_{h+k-n} o uno spazio di dimensione maggiore: nel 1º caso diconsi indipendenti nello S_n e non appartengono ad uno

stesso S_{n-1}.
In S_n $r+1$ punti ($r<n$) appartengono sempre ad un S_r o ad uno spazio di dimensione minore: nel 1° caso diconsi indipendenti. Se $r \geq n$ $r+1$ punti di S_n diconsi indipendenti quando tra essi non ve ne sono n appartenenti ad un S_{n-2}. Gli S_{n-1} di S_n diconsi anche iperpiani.
In S_n $r+1$ iperpiani ($r<n$) hanno comune un S_{n-r-1} o uno spazio di dimensione maggiore: nel 1° caso diconsi indipendenti.
Vi è una legge di dualità della Geometria proiettiva dello S_n, per la quale si scambiano negli enunciati i «punti» e gli «iperpiani» gli «S_h» e gli «S_{n-h-1}». Le proposizioni precedenti ne porgono esempio.
La dimostrazione della legge di dualità si può dare osservando che la varietà degli iperpiani di S_n chiamati «punti» può ancora considerarsi come un S_n che ha come iperpiani i «punti» del 1° S_n ecc.
Un'ultima osservazione. Il concetto di gruppo armonico di 4 punti d'una retta di S_n posto mediante un piano per la retta, dà una definizione del gruppo armonico indipendente dal piano considerato, giacchè due piani per una retta stanno sempre in un S_3. Per conseguenza anche la relazione di proiettività fra due rette (definita la proiettività come corrispondenza che conserva i gruppi armonici, secondo Staudt) attribuita a due rette di un S_n ($n>3$) è (come in S_3) una relazione delle due rette in sè indipendente dal fatto che le rette stesse si considerino appartenenti a piani (o ad S_3) arbitrariamente condotti per esse.
In S_n si può considerare come forma di 1ª specie l'insieme degli S_{r-1} di un S_r ($r<n$) aventi comune un S_{r-2} (fascio d'iperpiani di S_r): ed anche per queste forme di 1ª specie si può porre il concetto di gruppo armonico, di proiettività ecc.
Sussiste il teorema fondamentale (di Staudt) e la proiettività

tra due forme di 1ª specie è individuata da tre coppie di elementi omologhi ».
Come esso si deduca dai postulati posti innanzi potrà vedersi nella citata Nota di Enriques.

22 - Il teorema fondamentale della proiettività e le coordinate proiettive nello S_n - Due S_n $(n>1)$ diconsi proiettivi quando sono riferiti in modo che ad un punto dell'uno corrisponda un punto dell'altro (e viceversa), ed ai punti di un S_{n-1} nell'uno corrispondano nell'altro i punti d'un S_{n-1}.
Segue dalla definizione che « in una proiettività tra due S_n ad un S_r $(r \leq n)$ corrisponde un S_r, e che due S_r corrispondenti sono proiettivi ».
Sussiste il teorema fondamentale:
Esiste una proiettività tra due S_n in cui ad $n+2$ punti indipendenti dell'uno corrispondono $n+2$ punti indipendenti dell'altro. È noto dalle lezioni di Geometria proiettiva come questo teorema si deduca per $n=2$ dal teorema fondamentale per le forme di 1ª specie $(n=1)$: il teorema sarà dunque stabilito in generale ove si supponga già dimostrato per gli S_{n-1} $(n \geq 3)$ e si dimostri per gli S_n.
Supponiamo dunque stabilito il teorema per gli S_{n-1}, $n \geq 3$.
Si abbiano due S_n ed in essi rispettivamente i gruppi di $n+2$ punti indipendenti $A_1 A_2 \dots A_{n+1} E$, $B_1 B_2 \dots B_{n+1} E'$.
Si indichino con α_i β_i $(i = 1, 2, \dots n+1)$ gli iperpiani (S_{n-1}) individuati rispettivamente dai punti $A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{n+1}$, $B_1 \dots B_{i-1} B_{i+1} \dots B_{n+1}$. Facciamo corrispondere i punti $A_i B_i$ ed $E E'$: se esiste una proiettività tra i due S_n in cui i detti punti si corrispondono, in tale proiettività si corrisponderanno anche gli iperpiani α_i, β_i. Proiettiamo E E' rispettivamente da $A_i B_i$ su α_i β_i in E_i E'_i. La corrispondenza intercedente tra α_i β_i dovrà essere la proiettività (per ipotesi) individuata dalle $n+1$ coppie $A_1 B_1, \dots A_{i-1} B_{i-1}, A_{i+1} B_{i+1} \dots$ $\dots E_i E'_i$, (i gruppi $A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots E_i$ ecc. sono costituiti

di punti indipendenti se tali sono i gruppi di $n+2$ punti dati).

Poniamo tra $\alpha_i\ \beta_i$ la menzionata proiettività che possiamo designare con $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_{i-1}, A_{i+1} \cdots E_i \\ B_1 \cdots B_{i-1}, B_{i+1} \cdots E'_i \end{pmatrix}$: similmente poniamo tra $\alpha_k\ \beta_k$ $(k \neq 1)$ la proiettività $\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_{k-1}, A_{k+1} \cdots E_k \\ B_1 \cdots B_{k-1}, B_{k+1} \cdots E'_k \end{pmatrix}$ essendo $E_k\ E'_k$ le rispettive proiezioni di $E\ E'$ fatte su $\alpha_k\ \beta_k$ da $A_k\ B_k$.

Tra gli S_{n-2} $\alpha_i\alpha_k$, e $\beta_i\beta_k$ comuni alle due coppie di iperpiani risulta allora una proiettività che è la medesima comunque i detti S_{n-2} si considerino corrispondenti rispettivamente in $\alpha_i\ \beta_i$ o in $\alpha_k\ \beta_k$, giacchè tale proiettività è quella individuata dalle n coppie $A_1 B_1 \cdots A_{i-1} B_{i-1}, A_{i+1} B_{i+1}, \cdots A_{k-1} B_{k-1}, A_{k+1} B_{k+1} \cdots E_{ik}\ E'_{ik}$ dove $E_{ik}\ E'_{ik}$ designano le rispettive proiezioni di $E\ E'$ fatte dalle rette $A_i A_k$, $B_i B_k$ sui nominati S_{n-2} $\alpha_i\alpha_k$, $\beta_i\beta_k$.

Osservato ciò, dopo aver posto le menzionate proiettività tra gli iperpiani $\alpha_i\ \beta_i$, ed $\alpha_k\ \beta_k$, potremo affermare che se tra i due S_n esiste una proiettività in cui si corrispondono le $n+2$ coppie $A_1 B_1 \cdots E\ E'$ fissate, il corrispondente P' di un qualunque punto P del 1° S_n deve potersi costruire nel seguente modo:

1) si proietti P da A_i, A_k rispettivamente su $\alpha_i\ \alpha_k$ in $P_i\ P_k$;

2) si determinino i punti $P'_i\ P'_k$ omologhi di $P_i\ P_k$ rispettivamente in $\beta_i\ \beta_k$.

3) si determini il punto P' comune alle rette $B_i P'_i$, $B_k P'_k$; perchè la costruzione sia possibile occorre che le rette $B_i P'_i$, $B_k P'_k$ giacciano in uno stesso piano: ciò accade in fatto, perchè se si designa con P_{ik} la proiezione di P fatta dalla retta $A_i A_k$ sullo S_{n-2} $\alpha_i\alpha_k$, e con P'_{ik} il punto omologo nello S_{n-2} $\beta_i\beta_k$, si ha che $P'_{ik}\ P'_i\ B_k$ sono su una retta e similmente $P'_{ik}\ P'_k\ B_i$, onde le rette $B_i P'_i$, $B_k P'_k$ giacciono nel piano dei 3 punti $B_i\ B_k\ P'_{ik}$.

Concludiamo intanto che se esiste tra i due S_n una proiettività in cui si corrispondano le $n+2$ coppie di punti dati questa proiettività è unica.

Per vedere se una tale proiettività sarà sempre possibile occorre domandarci se la costruzione sopra enunciata fornirà effet-

tivamente una proiettività tra i due S_n ? *.
Cominciamo dall'osservare che nella corrispondenza tra i due S_n costruita in tal modo ai punti d'una retta per A_i o A_k corrispondono i punti d'una retta rispettivamente per B_i, B_k, e (poichè $\alpha_i \beta_i$, $\alpha_k \beta_k$ sono proiettivi) alle rette d'un piano per A_i o A_k, corrispondono le rette d'un piano rispettivamente per B_i, B_k: segue da ciò che ai punti d'una retta qualunque del 1° S_n, considerata come sezione dei piani che la proiettano da A_i A_k corrispondono nel 2° S_n i punti d'una retta, cioè della retta intersezione dei piani omologhi rispettivamente per B_i B_k. Analogamente si vede che ai punti d'un S_{n-2} del 1° S_n corrispondono i punti d'un S_{n-2} nel 2°. Siccome poi un S_{n-1} è il luogo delle rette proiettanti da un punto i punti d'un S_{n-2}, segue che ai punti d'un S_{n-1} nel 1° S_n corrispondono nel 2° i punti d'un S_{n-1}.
In altre parole la corrispondenza costruita è una proiettività. Ciò dimostra il teorema.
Riguardo alla dimostrazione osserveremo che abbiamo riferito i ragionamenti a punti e spazi non aventi una posizione particolare rispetto ai dati ed allora le proiezioni eseguite non cadevano in difetto stante la supposta indipendenza dei dati gruppi di $n+2$ punti: ma anche in quei casi particolari partitamente esaminati si perviene subito alla medesima conclusione.
Una applicazione immediata del teorema fondamentale della proiettività in S_n consiste nel porre in S_n una rappresentazione analitica dei punti mediante <u>coordinate proiettive</u>. (*)
Consideriamo la varietà di tutti i gruppi omogenei di $n+1$ variabili $x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{n+1}$.
Questa varietà può considerarsi come un S_n (S_n <u>analitico</u>) ove si chiamino:
a) « <u>punti</u> » i gruppi di variabili (elementi della varietà).
b) « <u>retta</u> determinata dai punti $x_1 \ldots x_{n+1}$, $x'_1 \ldots x'_{n+1}$ » l'insieme dei punti $\lambda x_1 + \mu x'_1, \ldots\ldots \lambda x_{n+1} + \mu x'_{n+1}$ (ove λ e μ so-

(*) Cfr. il § 12.

no parametri).

c) in conseguenza di ciò mediante la generazione degli spazi contenuta nei postulati della Geometria di posizione, si chiami « S_r » ($r = 2, 3, \dots n-1$) determinato da $r+1$ punti indipendenti (non appartenenti ad un S_{r-1}) $x_1 \dots x_{n+1}, x'_1 \dots x'_{n+1}, \dots x^{(r)}_1 \dots x^{(r)}_{n+1}$, l'insieme dei punti

$$\lambda x_1 + \lambda_1 x'_1 + \dots + \lambda_r x^{(r)}_1, \dots\dots\dots \lambda x_{n+1} + \lambda x'_{n+1} + \dots + \lambda_r x^{(r)}_{n+1}.$$

Si può allora verificare che restano verificati tutti i postulati fondamentali della Geometria di S_n.

Segue poi dalle note proprietà dei sistemi di equazioni lineari che « lo $S_r (r<n)$ nello S_n analitico è l'insieme dei gruppi $x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ soddisfacenti ad $n-r$ equazioni lineari omogenee indipendenti (ciascuna delle quali rappresenta un S_{n-1} per lo S_r) ».

Dopo ciò possiamo affermare che: « <u>Il modo più generale di porre in un dato S_n un sistema di coordinate omogenee (proiettive) tali che gli iperpiani (S_{n-1}) vengano rappresentati da equazioni lineari è di porre una proiettività tra il dato S_n e lo S_n analitico</u> ».

A tal fine si prendano ad arbitrio nel dato S_n $n+2$ punti indipendenti $A_1\ A_2 \dots\dots A_{n+1}\ E$, e si facciano corrispondere rispettivamente ad essi gli $n+2$ punti indipendenti dello S_n analitico $(1\,0 \dots 0)(0\,1 \dots 0) \dots \dots (0 \dots 0\,1)(1\,1 \dots 1)$: si chiamino $A_1 \dots A_{n+1}$ <u>vertici</u> dello <u>$(n+1)$gono</u> <u>fondamentale</u> <u>delle</u> <u>coordinate</u> ed E il <u>punto unità</u>: resta allora fissato <u>un</u> sistema di coordinate proiettive omogenee nello S_n.

Se $x_1\ x_2 \dots x_{n+1}$ sono le coordinate proiettive omogenee dei punti d'un S_n, si ottiene un sistema di coordinate proiettive non omogenee in S_n assumendo i rapporti $\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots\dots \frac{x_n}{x_{n+1}}$; però in questa rappresentazione analitica sono singolari i punti dell'iperpiano $x_{n+1} = 0$ i quali hanno tutte le coordinate infinite, ma (in generale) finiti i rapporti $\frac{x_i}{x_k}$ ($i \le n, k \le n$). Come possa esser dato in un modo più diretto il significato delle coordinate d'un punto nello S_n, diremo tra poco.

Occorre innanzi osservare che per il modo stesso come sono state poste le coordinate proiettive in S_n, una <u>trasforma-</u>

zione di coordinate equivale ad una proiettività posta in S_n.
Le sostituzioni lineari omogenee

$$(1) \qquad y_i = \alpha_{i1} x_1 + \ldots\ldots + \alpha_{i\,n+1} x_{n+1} \qquad (i = 1, \ldots\ldots n+1)$$

stabiliscono in S_n una proiettività, e per conveniente scelta dei coefficienti α permettono di far corrispondere in un modo determinato due gruppi di $n+2$ punti indipendenti: esse costituiscono dunque le equazioni della più generale proiettività in S_n, ed in pari tempo danno la più generale trasformazione delle coordinate proiettive.

Dati quattro punti $\lambda_1 x_i + \mu_1 x_i'$, $\lambda_2 x_i + \mu_2 x_i'$, $\lambda_3 x_i + \mu_3 x_i'$, $\lambda_4 x_i + \mu_4 x_i'$ $(i = 1, \ldots\ldots n+1)$ sopra una retta di S_n il birapporto dei 4 numeri $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \frac{\lambda_2}{\mu_2} \frac{\lambda_3}{\mu_3} \frac{\lambda_4}{\mu_4}\right)$ non muta per una qualsiasi sostituzione lineare eseguita insieme sulle x_i x_i' $\lambda x_i + \mu x_i'$; questo numero rappresenta dunque qualchecosa di inerente al gruppo dei 4 punti che non muta per una qualsiasi proiettività in S_n (cioè un invariante assoluto); esso si dirà il birapporto dei 4 punti della retta.

Allora è facile stabilire che il significato delle coordinate proiettive d'un punto $P \equiv (x_1\ x_2 \ldots x_{n+1})$ nel sistema che ha come $(n+1)$gono fondamentale $A_1 \ldots A_{n+1}$ e come punto unità E è dato dalla proposizione seguente:

«Il rapporto $\frac{x_i}{x_k}$ è il birapporto del gruppo formato dai punti A_i A_k e dalle proiezioni E_{ik} P_{ik} del punto unità e di P fatte sulla retta $A_i A_k$ dallo S_{n-2} determinato dai rimanenti vertici dello $(n+1)$gono fondamentale».

Come casi particolari della proiettività tra due S_n sono particolarmente notevoli i due seguenti:

a) la proiettività tra i punti di due S_n sovrapposti, o in un S_n, detta anche omografia;

b) la proiettività tra un S_n e lo S_n duale che ha come «punti» gli iperpiani del 1°, detta anche correlazione o reciprocità.

La teoria generale delle proiettività in S_n (omografie e correlazioni) è dovuta al Segre «Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni» (Memorie dell'Accademia dei Lincei - 1884) -

«Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta» (Memorie dell'Accademia di Torino - 1886).
La teoria delle omografie in S_n è stata condotta più innanzi dal Predella « Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni » (Annali di Matematica - 1889).
Sopra argomenti particolari che si riferiscono alla medesima teoria possono consultarsi anche le note di
Bertini (Istituto lombardo 1886)
Enriques (Atti dell'Accademia dei Lincei - e Giornale di Napoli - 1891).
Un caso particolare della correlazione (la polarità) dà luogo ad una teoria delle quadriche opportuna estensione della teoria delle quadriche in S_3: a questo proposito si confronti Segre « Studio sulle quadriche ecc. » (Memorie dell'Accademia di Torino 1885).

23 - Punti immaginari e varietà analitiche - In molte questioni generali concernenti la Geometria dello S_n, si è condotti alla risoluzione di un sistema di equazioni nelle coordinate $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n+1}$. Queste equazioni possono dar luogo a soluzioni immaginarie o più generalmente complesse. Allora non si ottiene alcun punto di S_n soddisfacente alle condizioni proposte, e mentre si può analiticamente proseguire dei calcoli sulle date soluzioni complesse e giungere talvolta a dei risultati nel campo reale, viene a mancare l'interpretazione geometrica di siffatti ragionamenti. Per togliere questo inconveniente, si può ampliare il campo dei punti dello S_n, considerando come punti immaginari rappresentati da coordinate immaginarie o complesse.
Ma l'introduzione dei punti immaginari così fatta sarebbe puramente nominale: gli enti introdotti non sarebbero effettivi enti geometrici dello S_n.

I punti immaginari di S_n possono invece acquistare un effettivo significato di elementi geometrici, mediante l'interpretazione di essi dovuta a Staudt (Beiträge zur Geometrie der Lage).
Ad ogni punto immaginario $P \equiv (x_1 + i y_1 \ldots\ldots x_{n+1} + i y_{n+1})$ di S_n, va associato un punto coniugato $P' \equiv (x_1 - i y_1 \ldots\ldots x_{n+1} - i y_{n+1})$ che congiunto con esso dà una retta reale PP'. Per ogni punto immaginario P di S_n passa dunque una retta reale. Su questa retta reale vi è una involuzione ellittica reale che ha come punti doppi ~~doppi~~ i punti immaginari coniugati $P\,P'$; essa serve ad individuare la coppia PP'. Per distinguere l'uno dall'altro questi due punti Staudt ha ricorso alla considerazione dei due sensi della retta: ciascuno dei due punti viene collegato ad un senso della retta.
Se si riguardano i punti reali d'una retta come dati dalle involuzioni paraboliche (degeneri) e corrispondenti indifferentemente ad ambedue i sensi della retta, si può dire:
Lo S_n ampliato coll'introduzione dei punti immaginari si può considerare come la varietà che ha per elemento generico la involuzione ellittica (e come caso limite parabolica) sopra una retta retta dello S_n reale, collegata ad un senso della retta medesima.
Il calcolo sopra i numeri complessi permette di estendere allo S_n complesso le fondamentali relazioni che valgono nello S_n reale, e giustifica (analiticamente) la trattazione dei punti immaginari dello S_n senza distinzione dai punti reali, in tutto un ordine di questioni. D'altra parte Staudt (l.c.) partendo dalla loro definizione geometrica ha esteso ai punti immaginari (di S_3) la ordinaria Geometria proiettiva, per via sintetica.
Senza addentrarci nei minuti particolari cui danno luogo siffatte questioni, vogliamo invece qui rilevare quale importanza sia da attribuirsi all'introduzione dei punti immaginari in Geometria. Siamo condotti da ciò alle se-

guenti considerazioni.(*)

Si distinguono due specie di Geometrie:

1) La Geometria in regioni limitate dello spazio, o Geometria differenziale (in senso ristretto), che studia le proprietà dello spazio e delle varietà in esso contenute in un intorno sufficientemente delimitato di ogni punto generico: a questo ramo di ricerche appartengono gli sviluppi dei §i 14 .... 18.

2) La Geometria dello spazio completo, di cui fa parte per esempio l'ordinaria teoria della proiettività, delle quadriche ecc.

Nella 1ª Geometria non è strettamente necessaria l'introduzione dei punti immaginari: opportune limitazioni separano una regione di spazio o di varietà entro la quale si considerano elementi reali; nè importa se taluni di questi elementi verrebbero a mancare uscendo da quella regione. Perciò la Geometria differenziale intesa in senso ristretto si basa soltanto sulla <u>teoria delle funzioni di variabili reali</u>; supponendo che le funzioni che entrano in campo sieno finite continue e derivabili finchè occorre in un determinato intervallo.(**) Questa 1ª Geometria appare dunque sotto un certo aspetto più generale della 2ª; la quale invece avendo per oggetto lo spazio completo suppone l'estendibilità delle funzioni che si considerano a tutto lo spazio. Ora perchè tale estendibilità sia possibile, cioè perchè si possa desumere una legge di estensione da un piccolo campo ove le funzioni sieno state definite, occorre nella Geometria dello spazio completo di limitarsi alla considerazione di <u>funzioni</u>

(*) Cfr. Klein « Einleitung in die höhere Geometrie » I (autographirte Vorlesungen § 7).

(**) Non si esclude naturalmente il sussidio della teoria delle funzioni di variabili complesse, di cui si ha un esempio nella teoria delle superficie ad area minima.

analitiche ossia di funzioni di variabili complesse: in questa Geometria è quindi essenziale la considerazione dei punti immaginari.

Nella Geometria dello spazio completo S_n si considerano come varietà v_r (ad $r < n$ dimensioni) soltanto le varietà analitiche rappresentate da equazioni

$$(1) \qquad \frac{x_i}{x_{n+1}} = f_i(t_1\ t_2 \ldots\ldots t_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

dove le f sono funzioni analitiche degli r parametri $t_1 \ldots t_r$.

Le varietà analitiche dello S_n si considerano complete, cioè si considerano come punti di una v_r tutti i punti le cui coordinate si ottengono dalle formule (1) dando alle funzioni f la massima estensione possibile nel campo delle variabili complesse t: la legge di prosecuzione analitica delle funzioni di variabili complesse permette di ritenere individuata la varietà completa v_r da una qualsiasi regione limitata di essa.

Si noti che $n-r$ equazioni analitiche fra le coordinate ~~analitiche fra le coordinate~~ dei punti d'una S_n rappresentano in generale una varietà analitica v_r nello S_n.

Fra le varietà analitiche v_r dello S_n hanno formato oggetto di una particolare teoria le varietà algebriche, cioè quelle v_r che si possono rappresentare mediante equazioni algebriche

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = f_i(t_1 \ldots t_s) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots n \\ r \leq s \leq n+1 \end{pmatrix}$$

dove le f sono funzioni razionali di $s \geqq r$ parametri t legati da $r-s$ equazioni algebriche.

Sono notevoli in particolare fra le varietà algebriche le v_{n-1} di S_n: esse si possono sempre rappresentare con una equazione algebrica tra le coordinate

$$f(x_1 \ldots\ldots x_{n+1}) = 0$$

dove f è una forma nelle x.

Il grado m della f dicesi ordine della varietà v_{n-1} (che si indica allora con v^m_{n-1}) ed è il numero (costante) delle intersezioni della v^m_{n-1} con una retta (computate debitamente le intersezioni multiple). Per $m=1$ la v'_{n-1} è un S_{n-1}

denza biunivoca si può porre mediante le formule

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n) \qquad (x_{n+1} = 1)$$

dove le f_i sono funzioni <u>continue</u> e <u>derivabili</u> delle x_k (variabili in dati intervalli) e quindi <u>invertibili</u> entro un conveniente intorno del punto generico $(x_1 \dots x_{n+1})$.
Suppongasi in particolare che le f_i sieno funzioni analitiche delle x_i; allora esse si possono estendere analiticamente a tutto il loro campo accessibile e si dà quindi luogo ad una <u>trasformazione</u> (<u>analitica</u>) nello S_n completo: <u>trasformazione univoca</u> se le f sono funzioni uniformi; <u>trasformazione multipla</u> se al contrario le f sono polidrome.
Risolvendo le equazioni (1) rispetto alle x_i, si esprimeranno queste come funzioni analitiche delle y_i, e si avrà nello S_n la <u>trasformazione inversa</u> della data: questa trasformazione inversa (considerata nello spazio completo) riuscirà in generale multipla anche se la prima trasformazione è univoca: ove una trasformazione dello S_n sia univoca insieme alla sua inversa, essa si dirà <u>biunivoca</u>.
La distinzione fra la Geometria dello spazio completo, e la Geometria differenziale, si presenta dunque rispetto alla teoria delle trasformazioni più netta che mai: nella prima ha posto essenziale la distinzione fra trasformazione univoca e trasformazione multipla, laddove nella seconda ove ci si limita a considerare la corrispondenza intercedente fra intorni convenienti di due punti omologhi generici si può considerare ogni trasformazione come una corrispondenza biunivoca (entro quei limiti).
I primi esempi di trasformazioni (biunivoche) vengono porti dai movimenti nello S_n metrico (euclideo o no) e dalle omografie. Ma abbiamo già avuto occasione di incontrare altre trasformazioni, ad esempio nel piano le trasformazioni che mutano circoli in circoli.
Tutte queste trasformazioni appartengono alla grande classe delle <u>trasformazioni razionali</u>, cioè di quelle trasformazioni che possono esser poste mediante le formule-

$$y_i = \varphi_i(x_1, \dots x_{n+1}) \qquad (i=1,\dots n+1).$$

ove le φ sono delle forme d'un certo ordine m nelle x_i: allora agli iperpiani

$$\sum \lambda_i y_i = 0$$

del 2° spazio corrispondono le varietà algebriche v_{n-1}^m

$$\sum \lambda_i \varphi_i = 0 \,,$$

formanti un sistema lineare ∞^n. Considerato il detto sistema lineare come un S_n avente per elementi (punti o iperpiani) le v_{n-1}^m, si ha che esso risulta riferito proiettivamente al dato S_n; ciò significa che alle v_{n-1}^m d'un sistema lineare ∞^r $(r<n)$ entro il dato corrispondono gli iperpiani per un S_{n-r-1}.

Il modo più generale di porre una trasformazione razionale in un S_n è di riferire proiettivamente un sistema lineare ∞^n di varietà algebriche v_{n-1}^m al sistema degli iperpiani dello S_n stesso.

Invero preso un punto (generico) A nello S_n, le v_{n-1}^m per esso formano un sistema lineare ∞^{n-1} cui corrisponde la stella degli iperpiani passanti per un punto A'; facendo corrispondere ad A questo punto A' si dà luogo appunto ad una trasformazione razionale: punti singolari della trasformazione (il cui omologo riesce indeterminato) sono i punti comuni a tutte le v_{n-1}^m ossia i punti base del loro sistema, i quali possono anche formare una o più varietà v_r $(r \leq n-2)$.

Viceversa se si considerano n v_{n-1}^m generiche tra le v_{n-1}^m corrispondenti agli iperpiani per A', queste hanno comuni (in generale) oltre i punti base del sistema di tutte le v_{n-1}^m, dei punti in numero finito $s \geq 1$, i quali riescono comuni alle ∞^{n-1} v_{n-1}^m corrispondenti agli iperpiani per A', e sono i punti corrispondenti di A' nella trasformazione inversa di quella razionale data.

Vogliansi tutte le trasformazioni razionali biunivoche dello spazio S_n ossia quelle trasformazioni razionali di cui la inversa è pure razionale (trasformazioni birazionali); si dovranno allora determinare tutti i sistemi lineari ∞^n di V_{n-1}^m dove n V_{n-1}^m generiche hanno comune un sol punto variabile: siffatti sistemi diconsi omaloidici: riferendo proiettivamente un sistema omaloidico a quello degli iperpiani di S_n, nasce appunto in S_n una trasformazione birazionale, ed è questo il modo più generale di ottenerla.

L'esempio più semplice è offerto dalla trasformazione quadratica o di 2° ordine. Vogliansi le trasformazioni birazionali del piano in cui alle rette corrispondono coniche: debbonsi allora cercare le reti (sistemi lineari ∞^2) di coniche in cui due coniche generiche hanno un sol punto comune variabile: siccome due coniche del piano si segano in 4 punti, 3 di queste intersezioni debbon esser fisse per le coniche della rete. Tutte le coniche che passano per 3 punti formano sempre una rete: dunque si ottiene la più generale trasformazione quadratica del piano facendo corrispondere proiettivamente la rete delle rette alla rete delle coniche passanti per 3 punti: questi 3 punti base sono singolari per la trasformazione. Fra le trasformazioni quadratiche rientrano quelle che mutano circoli in circoli del §8.

La considerazione generale delle trasformazioni birazionali (nel piano e nello spazio) è dovuta al Cremona(*); (donde il nome di cremoniane dato generalmente alle trasformazioni birazionali); qualche trasformazione particolare oltre la proiettività era già nota da tempo (ad esempio le trasformazioni quadratiche(**)). Dopo i lavori del Cremona sono essenziali per la teoria che ci occupa i lavori di Cayley, Clebsch, Noether, Clifford, Rosanes.(***)

(*) «Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane». Memorie dell'Accademia di Bologna t. 2 1863 e t. 5 1865. Cfr. anche i t I e III del Giornale di Battaglini.

(**) Cfr. Plücker (Crelle Bd V).

(***) Cfr. le citate lezioni di Clebsch-Lindemann.

25 - I gruppi di trasformazioni - Le trasformazioni in uno spazio S_n (o in una varietà qualsiasi) possono considerarsi come operazioni ed in questo senso sono ad esse applicabili i noti concetti della teoria generale delle operazioni: eseguendo l'una dopo l'altra, in un dato S_n, prima la trasformazione Π e poi la trasformazione T si dà luogo alla trasformazione prodotto $T\Pi$: non sarà in generale

$$T\Pi = \Pi T \quad ;$$

se questo avviene le due trasformazioni diconsi permutabili. Una classe di trasformazioni in numero finito o infinito dicesi costituire un gruppo, quando:

1) il prodotto di due trasformazioni della classe è sempre una trasformazione della classe;

2) insieme ad ogni trasformazione comparisce nella classe anche l'inversa

(questa 2ª proprietà, superflua nel caso di gruppi finiti, limita il concetto di gruppo nel caso di gruppi contenenti un numero infinito di trasformazioni).

Un gruppo di trasformazioni F dicesi contenere come sottogruppo invariante o eccezionale un gruppo g, quando essendo Π una qualsiasi trasformazione di g e T una qualsiasi trasformazione di F la trasformata

$$T\Pi T^{-1}$$

appartiene a g.

Allorchè sono note alcune trasformazioni d'un gruppo F, si può desumere l'esistenza in F di altre trasformazioni ottenute facendo i prodotti di un numero qualunque delle prime; se così si perviene ad esaurire il gruppo F, le trasformazioni date si possono dire trasformazioni generatrici del gruppo F: ogni trasformazione di F si può allora considerare come il prodotto di un numero finito di trasformazioni generatrici: come estensione si può anche considerare il caso in cui F non resti esaurito dai prodotti di un numero finito di trasformazioni (generatrici) date, ma comprenda (oltre questi) i prodotti d'un numero infinito di trasformazioni generatrici (definiti con un opportuno passaggio al limite).

Nella scelta di una serie di trasformazioni generatrici di un gruppo vi è naturalmente dell'arbitrario; ma la considerazione di esse, ove sieno scelte opportunemente, può essere massimamente utile nello studio del gruppo.

Recentemente, per opera del Lie,(*) ha acquistato grande importanza la teoria dei gruppi continui, cioè di quei gruppi le cui trasformazioni

$$y_i = f_i(x_1 \ldots\ldots x_n) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = y_{n+1} = 1 \\ i = 1 \ldots\ldots n \end{array} \right\}$$

possono definirsi mediante un sistema di equazioni differenziali di cui le f_i sono gli integrali: questi gruppi si dividono in due categorie; si hanno cioè:

a) i gruppi continui finiti (ossia con un numero finito di dimensioni) quando le f_i contengono un numero finito di parametri;

b) i gruppi continui infiniti (con un numero infinito di dimensioni) quando le f_i (soddisfacenti ad equazioni a derivate parziali) contengono delle funzioni arbitrarie.

Dato un sistema di equazioni differenziali che ammetta come integrali delle funzioni $f_i(x_1 \ldots x_n)$, resta sempre definita una serie continua di trasformazioni: questa serie costituisce un gruppo se il sistema di equazioni gode di certe proprietà che il Lie ha determinate. Per tal modo lo studio dei gruppi continui si collega a quello di interessanti sistemi di equazioni differenziali.

Uno dei più bei resultati generali ottenuti dal Lie nella teoria dei gruppi continui (quello anzi che può considerarsi come il resultato fondamentale) è la generazione dei gruppi continui mediante trasformazioni infinitesime, e precisamente dei gruppi (finiti) di dimensione r mediante r trasformazioni generatrici infinitesime indipendenti: ogni trasformazione del gruppo può ottenersi come un prodotto

---

(*) Cfr. la sua « Theorie der Transformationsgruppen ».

infinito di siffatte trasformazioni: in particolare un gruppo ad 1 dimensione può riguardarsi come il gruppo delle potenze d'una trasformazione infinitesima.

Il detto resultato può anche enunciarsi dicendo che:

In un gruppo continuo (di dimensione >1) esistono infiniti sottogruppi ad **una** dimensione: ogni trasformazione del gruppo appartiene ad **uno** di questi sottogruppi.

All'infuori dei gruppi continui esistono altri gruppi di trasformazioni aventi un alto interesse geometrico. Tale è per esempio il gruppo Cremona cioè il gruppo delle trasformazioni birazionali di S_n $(n>1)$, che non può esser definito mediante equazioni differenziali (nè generato da trasformazioni infinitesime).

Per $n=2$ ne sono state assegnate come trasformazioni generatrici le trasformazioni quadratiche, vale a dire è stato stabilito il teorema:(*)

Ogni trasformazione cremoniana del piano si può decomporre nel prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche.

Questo teorema non è estendibile senz'altro allo S_n dove $n>2$; resta quindi insoluta la questione capitale di assegnare le più semplici trasformazioni generatrici dell'intiero gruppo Cremona in S_n per $n>2$.

Il gruppo Cremona in S_n $(n>1)$, come sopra si è detto, non è continuo: tuttavia esso contiene entro di sè dei gruppi continui (finiti): questi gruppi per $n=2$ (cioè nel piano) sono stati assegnati e ricondotti a tre tipi determinati.(**)

Tuttavia altre questioni d'indole gruppale relative al

(*) Cui giungero contemporaneamente Clifford (dimostrazione di Cayley), Rosanes e Noether. La dimostrazione rigorosa del teorema (comprendente il caso di singolarità superiori tra i punti base della rete omoloidica che definisce la trasformazione) appartiene al Noether « Mathem. Annalen Bd V. »

(**) Cfr. Enriques « Accademia dei Lincei - Giugno - 1893 ».

gruppo Cremona nel piano (ed a più forte ragione in S_n $n>2$) rimangono ancora insolute; ad esempio l'importante questione se il gruppo Cremona contenga alcun sotto-gruppo invariante (questione alla quale sembra probabile si debba rispondere negativamente).

26. I vari indirizzi geometrici caratterizzati sotto l'aspetto della teoria dei gruppi di trasformazioni - Quale importanza è da attribuirsi alla teoria delle trasformazioni nella Geometria?

Per rispondere alla domanda basta gettare uno sguardo all'ufficio storico che esse hanno avuto per il passato in vari rami della Geometria e paragonarlo col loro ufficio presente.

Sceglieremo a tale scopo l'esempio molto istruttivo desunto dallo sviluppo della Geometria proiettiva.

Esaminando il progresso avutosi in questa scienza nel passaggio da Poncelet a Staudt è soprattutto degno di nota il fatto che le proiettività usate dapprima per trasformare figure ignote in altre riguardate come note (studiate sotto l'aspetto metrico) vengono applicate sotto un diverso punto di vista nel nuovo indirizzo ove perseguendosi sistematicamente lo studio proiettivo delle figure con mezzi confacenti all'ordine delle proprietà che s'indagano, due figure proiettive non vengono distinte fra loro più di quel che si distinguono due figure uguali nella Geometria metrica. Dunque le proiettività nella Geometria proiettiva hanno lo stesso ufficio che i movimenti nella Geometria metrica; cioè permettono di variare convenientemente la posizione delle figure nello spazio senza alterare le proprietà, quelle proprietà almeno che formano oggetto di studio nell'indirizzo proiettivo. E non costituisce qui una differenza essenziale il fatto che le proprietà considerate nella Geometria proiettiva sieno soltanto una parte di tutte le proprietà delle figure, considerate della Geometria metrica: questo fatto si rispecchia soltanto nella maggiore generalità delle trasformazioni proiettive in confronto ai movimenti (i quali rientrano fra le proiettività come caso particolare).

Sebbene la <u>Geometria dei raggi vettori reciproci</u> non abbia una così grande importanza come la Geometria proiettiva, pure il suo svolgimento offre un esempio del tutto parallelo allo svolgimento di quest'ultima: limitandoci per esempio al piano, si sono usate dapprima le <u>inversioni rispetto ai circoli</u> per trasportare da una figura ad un'altra una serie di proprietà essenzialmente inerenti ai cerchi e sistemi di cerchi; in seguito queste proprietà si sono venute organizzando in un determinato indirizzo geometrico nel quale si considerano come <u>uguali</u> due figure trasformabili l'una nell'altra mediante una trasformazione puntuale del piano che muta i circoli in circoli (cfr. il § 8).

Se guardiamo all'ufficio che ebbero dapprima le trasformazioni cremoniane e lo paragoniamo col loro ufficio attuale, scorgiamo facilmente che anche in questo progresso si è seguita una legge analoga a quella che ha informato gli sviluppi di cui si è innanzi parlato, legge che enunceremo tra breve in tutta la sua generalità. In primo luogo le trasformazioni cremoniane hanno servito a ricondurre lo studio di alcune curve o superficie algebriche e loro sistemi a quello di altre, <u>trasformate</u>, proiettivamente più semplici. In seguito tutti gli enti algebrici (curve, superficie e loro sistemi) di un dato spazio che si ottengono l'uno dall'altro con una trasformazione cremoniana, sono riguardati come enti <u>uguali</u> nella Geometria del detto spazio (<u>Geometria delle trasformazioni birazionali</u>): le trasformazioni cremoniane servono quindi (nel nuovo indirizzo) soltanto a cambiare la posizione degli enti senza alterarne le proprietà, proprio come i movimenti nella Geometria metrica ecc.

È ben degno di nota che il detto sviluppo avuto dalla Geometria delle trasformazioni birazionali ed altri sviluppi analoghi in altri indirizzi, possono essere stati in parte preveduti fino dal 1870 dal Klein nel suo Universitäts-Programm per l'Università d'Erlangen (*), in seguito ad una analisi profonda dei vari indirizzi geometrici posti in confronto colla generale teoria delle trasformazioni.

Il resultato di questa analisi può essere riassunto dicendo: « Nel progresso della Geometria dello S_n le proprietà degli enti vengono a separarsi e a raggrupparsi in vari aggruppamenti o corpi (contenuti nel corpo di tutte le proprietà geometriche) ciascuno dei quali comprende insieme ad alcune proprietà di cui si fissa la considerazione anche tutte le proprietà che ne dipendono per legame logico.

Si vengono distinguendo più indirizzi geometrici in corrispondenza ai vari corpi più interessanti, in ciascun indirizzo perseguendosi sistematicamente ed esclusivamente lo studio delle proprietà d'un corpo, e ritenendosi perciò come eguali due enti che hanno comuni le proprietà del corpo.

Ad ogni corpo di proprietà corrisponde una classe ben determinata di trasformazioni che conservono le proprietà del corpo.

Questa classe di trasformazioni è un gruppo perchè due trasformazioni di essa successivamente eseguite danno luogo ad una trasformazione che conserva le proprietà del corpo.

Il corpo dato viene ad essere delimitato come quello che comprende tutte le proprietà invariantive per le trasformazioni del gruppo.

Il gruppo di trasformazioni corrispondenti al corpo totale è il gruppo dei movimenti dello S_n: ad ogni altro corpo

---

(*) « Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti » traduzione italiana del Fano negli Annali di Matematica - 1891.

più ristretto corrisponde un gruppo di trasformazioni più ampio, comprendente il gruppo dei movimenti.
Viceversa ad ogni gruppo di trasformazioni dello S_n, comprendente il gruppo dei movimenti, corrisponde un corpo di proprietà invariantive per le trasformazioni del gruppo, e quindi ogni gruppo siffatto può riguardarsi come il gruppo fondamentale che caratterizza un determinato indirizzo geometrico ».
Stimiamo opportuno di aggiungere le seguenti considerazioni.
1) Allorchè è dato un corpo di proprietà geometriche, ed una corrispondente Geometria, le trasformazioni del gruppo fondamentale vengono definite dal conservare _tutte_ le proprietà del corpo: ma per caratterizzarle basterà imporre che esse debbano conservare alcune proprietà del corpo convenientemente scelte che si potranno quindi considerare come _proprietà definitrici_ del corpo. Ad esempio il corpo delle proprietà grafiche nella Geometria piana comprende le nozioni inerenti al concetto di retta e quelle relative al susseguirsi dei punti sulla retta, ma le proiettività del piano restano definite dalla sola condizione di esser trasformazioni che conservano le rette.
2) Allorchè è data una Geometria dello S_n mediante il suo gruppo fondamentale di trasformazioni, per riconoscere se una proprietà appartiene o no al corpo di questa Geometria occorre vedere se essa ha _carattere invariantivo_ rispetto alle trasformazioni del gruppo. Basta a tal fine verificare che la detta proprietà ha carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni generatrici del gruppo (scelte convenientemente). Così per esempio se il gruppo è continuo basta verificare la detta invariantività rispetto alle trasformazioni infinitesime di esso: così pure alla Geometria piana che ha per gruppo fondamentale il gruppo Cremona appartengono tutte le proprietà degli enti geometrici che sono invariantive rispetto alle trasformazioni

quadratiche.
Si desume di qui tutta l'importanza del conoscere le più semplici trasformazioni generatrici del gruppo fondamentale d'una Geometria.
Crediamo opportuno di chiudere questo § con alcuni esempi da aggiungersi a quelli più ovvii di cui si è innanzi parlato.

a) L'Analysis sytus in S_n è la Geometria dello S_n completo reale, che ha come gruppo fondamentale di trasformazioni il gruppo di tutte le trasformazioni biunivoche continue senza eccezione (cioè senza punti singolari). Ad essa appartengono le proprietà di connessione della varietà. Nella Geometria che ha per gruppo fondamentale quello di tutte le trasformazioni puntuali (con eccezione), nessuna curva o superficie o varietà ha delle proprietà particolari. Tale Geometria ha invece interesse per lo studio di forme geometriche più elevate, come quelle corrispondenti ad equazioni differenziali ecc.

b) La Geometria differenziale dello S_n $(n > 1)$ che studia il corpo delle proprietà angolari possiede come gruppo fondamentale il gruppo delle trasformazioni che conservano gli angoli (trasformazioni conformi). Nel piano reale $(n = 2)$ si possono rappresentare queste trasformazioni mediante la più generale funzione di variabile complessa

$$w = u + iv = f(x + iy) \quad , \qquad \text{o mediante la formula} \quad \bar{w} = u - iv :$$

il loro gruppo è dunque infinito e comprende in sè il gruppo continuo infinito delle trasformazioni

$$u + iv = f(x + iy)$$

definito dalle equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} .$$

Per $n > 2$ le trasformazioni conformi dello S_n sono soltanto quelle che mutano le sfere in sfere (*) e formano quin-

---

(*) Secondo un teorema di Liouville. Cfr. per esempio Biandi un gruppo continuo finito che il Lie ha completamente studiato sotto l'aspetto gruppale.(*)

c) La Geometria dello S_n il cui corpo di proprietà è definito dalla nozione fondamentale di volume ($n \geq 3$) o area ($n=2$) (Geometria dei fluidi incompressibili) possiede un gruppo fondamentale di trasformazioni continuo infinito, noto sotto il nome di gruppo di Möbius.

Si possono ottenere le equazioni differenziali che caratterizzano il gruppo nel modo seguente.

Sia

$$(1) \qquad y_i = y_i(x_1 \dots x_n) \qquad (i = 1 \dots n)$$

la più generale trasformazione del gruppo. Riferendoci allo S_n euclideo supponiamo l'elemento lineare dato da

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 .$$

Il volume racchiuso da un contorno S (ad $n-1$ dimensioni) è dato da

$$\int_S dx_1 \dots dx_n .$$

Operando nell'integrale multiplo la trasformazione (1) e designando con S' il contorno trasformato, si ha (per una nota formula dovuta a Jacobi)

$$\int_{S'} dy_1 \dots dy_n = \int_S \left\{ \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \dots & \frac{dy_n}{dx_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \dots & \frac{dy_n}{dx_n} \end{vmatrix} \right\} dx_1 \dots dx_n ,$$

dove il determinante funzionale (entro l'integrale) va preso in valore assoluto.

Se tutti i volumi debbono restare invariati deve aversi dunque

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \dots & \frac{dy_n}{dx_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \dots & \frac{dy_n}{dx_n} \end{vmatrix}^2 = 1$$

---

chi « Lezioni di Geometria differenziale - pag. 460 ».

(*) « Theorie der Transformationsgruppen - Bd III ».

(il quadrato compare perchè il detto determinante va sempre preso positivamente sotto l'integrale). L'equazione (2) caratterizza appunto il gruppo di Möbius in S_n e (per $n=3$) si può riguardare come rappresentante l'equazione d'incompressibilità dei liquidi.
Il gruppo di Möbius (secondo il teorema generale di Lie) vien generato da trasformazioni infinitesime. Si può subito assegnare le equazioni differenziali da cui queste vengono definite scrivendo la condizione a cui deve soddisfare una trasformazione infinitesima $y_i = x_i + \xi_i$ affinchè la variazione dell'elemento di volume
$dv = dx_1 \dots dx_n$ sia d'ordine superiore ad n. Siccome (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore) si ha

$$dv' = dy_1 \cdots dy_n = d(x_1+\xi_1)\, d(x_2+\xi_2) \dots = dx_1\left(1+\frac{d\xi_1}{dx_1}\right) dx_2\left(1+\frac{d\xi_2}{dx_2}\right)\dots$$

si ottiene così l'equazione

$$\frac{d\xi_1}{dx_1} + \frac{d\xi_2}{dx_2} + \dots\dots + \frac{d\xi_n}{dx_n} = 0 ,$$

che caratterizza appunto le trasformazioni infinitesime del gruppo di Möbius in S_n.

27. <u>Come vengano subordinate fra loro due Geometrie di un S_n di cui i gruppi fondamentali rientrano l'uno nell'altro.</u> In S_n sieno dati due gruppi di trasformazioni Γ g, e suppongasi che il primo contenga il secondo. Le Geometrie caratterizzate da questi gruppi fondamentali hanno allora fra loro questo legame: le proprietà della 1ª Geometria sono tutte proprietà della 2ª, ma non viceversa. Prendansi come esempio la Geometria proiettiva (reale) e la Geometria metrica: le proprietà proiettive delle figure hanno posto nella Geometria metrica e possono esprimersi ad esempio mediante uguaglianze di birapporti; ma viceversa soltanto proprietà metriche di natura particolare hanno carattere proiettivo.

È noto per altro che le proprietà metriche possono sempre riguardarsi nella Geometria proiettiva non come proprietà degli enti in sè, ma come relazioni proiettive con un ente particolare (l'<u>assoluto</u>) che è una particolare quadrica (§ 19).

Invero introdurre la considerazione speciale dell'assoluto C, equivale a considerare quelle proprietà delle figure geometriche che hanno carattere invariantivo rispetto alle proiettività che lasciano fermo C ossia rispetto ai movimenti (o alle similitudini se la quadrica assoluto è specializzata e quindi lo S_n è euclideo); queste sono appunto le proprietà della Geometria metrica il cui gruppo fondamentale di trasformazioni è il gruppo dei movimenti (e nello S_n euclideo può riguardarsi essere il gruppo delle similitudini, conveniente ampliamento del gruppo dei movimenti).

Tornando al caso generale in cui sono date in S_n due Geometrie mediante gruppi fondamentali Γ g, il 2° sottogruppo del 1°, possiamo costruire sempre (in infiniti modi) un particolare ente (<u>assoluto</u>) tale che le trasformazioni di Γ che lo lasciano fermo sieno tutte e sole le trasformazioni di g: basta per questo considerare un qualsiasi ente, trasformarlo colle trasformazioni di g, e prendere come assoluto l'insieme di tutti gli elementi cui si è dato luogo in tal modo. Ciò posto tutte le proprietà della 2ª Geometria compariranno nella 1ª non come proprietà degli enti a sè ma come proprietà degli enti in relazione all'assoluto.

Possiamo formulare la precedente considerazione enunciando il principio:

<u>Due Geometrie di un S_n i cui gruppi fondamentali di trasformazioni rientrano l'uno nell'altro vengono subordinate in guisa che tutte le proprietà della 1ª rientrano nella 2ª ma viceversa le proprietà della 2ª compariscono nella 1ª non come proprietà degli enti in sè ma</u>

<u>come relazioni con un ente particolare (assoluto) tenuto fisso da tutte le trasformazioni del gruppo più ristretto ma non da altre del gruppo più ampio.</u>

Oltre al citato esempio concernente la relazione fra la Geometria proiettiva e la metrica enunciamo brevemente i seguenti esempi su cui si può esercitarsi:

1) La Geometria proiettiva di S_n $(n>1)$ si deduce dalla Geometria delle trasformazioni puntuali o dall'Analysis sytus) ponendo come assoluto l'insieme di tutti gli iperpiani. Invero le trasformazioni puntuali che conservano gli iperpiani sono appunto le proiettività.

2) Nello S_n $(n>1)$ che ha per elemento lineare (in coordinate curvilinee generali)

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

la Geometria angolare (Geometria delle trasformazioni conformi) si deduce dalla Geometria che ha per gruppo quello di tutte le trasformazioni puntuali ponendo come assoluto l'insieme delle <u>linee</u> (immaginarie) <u>di lunghezza nulla</u> integrali della equazione

$$ds^2 = 0.$$

3) La Geometria metrica dello S_n euclideo $(n>2)$ (Geometria delle similitudini) si deduce dalla Geometria angolare ponendo come assoluto un iperpiano (lo S_{n-1} <u>all'infinito</u>). Similmente dalla Geometria dei raggi vettori reciproci nel piano si deduce la Geometria metrica ordinaria ponendo come assoluto la retta all'infinito.

4) La Geometria delle trasformazioni birazionali di S_n si deduce dalla Geometria delle trasformazioni biunivoche puntuali ponendo come assoluto il corpo di tutte le varietà algebriche.

28. <u>Geometria sopra una varietà</u>. Le considerazioni dei precedenti paragrafi si possono riportare al caso più generale in cui è data una varietà V_n ed in essa un gruppo fon-

damentale di trasformazioni, mancando soltanto allora la considerazione speciale del gruppo dei movimenti. Pur tuttavia alle dette considerazioni sfugge ancora una serie importante di ricerche geometriche inerenti alla <u>Geometria sopra una varietà</u>, distinta anch'essa in molteplici indirizzi.

Ci pare che questo studio possa essere ricollegato all'ordine d'idee innanzi svolto mediante la considerazione seguente.

Fra le proprietà geometriche di un corpo (in S_n) e il gruppo fondamentale della corrispondente Geometria vi è questo legame reciproco:

le trasformazioni del gruppo lasciano invariate le proprietà del corpo riferite a <u>tutti</u> gli enti geometrici dello S_n; viceversa le trasformazioni dello S_n che lasciano invariate le proprietà del corpo riferite a <u>tutti</u> gli enti dello S_n, appartengono al gruppo.

Ma se le proprietà del corpo anzichè venir riferite a tutti gli enti dello S_n vengono riferite ad un ente per esempio ad una <u>varietà particolare</u> dello S_n, può darsi che altre trasformazioni dello S_n fuori del dato gruppo le lascino invariate. Ecco un esempio.

Le trasformazioni cremoniane dello spazio fanno corrispondere ad ogni superficie algebrica F un'altra superficie algebrica F' in corrispondenza biunivoca birazionale: stante questa corrispondenza le proprietà dei sistemi di curve algebriche tracciate su F (proprietà appartenenti alla Geometria che ha come gruppo fondamentale il gruppo Cremona) si rispecchiano in analoghe proprietà dei sistemi di curve algebriche (corrispondenti) su F', tantochè F ed F' sono da considerarsi come superficie <u>uguali</u> nella Geometria delle trasformazioni birazionali. Ma non sono soltanto le trasformazioni cremoniane dello spazio che conservano le proprietà della superficie F appartenenti alla nostra Geometria; anche una trasformazione razionale dello spazio non invertibile univocamente ma tale che ogni punto ge-

nerico della superficie F' corrispondente ad F abbia un solo punto corrispondente su F, conserva le anzidette proprietà di F; invero due superficie algebriche F ed F' che si possono porre in corrispondenza biunivoca birazionale, anche se non si corrispondono in una trasformazione cremoniana, debbono riguardarsi come uguali nella Geometria delle trasformazioni birazionali fatta astrazione dai rapporti di esse col rimanente spazio.
Così dalla superficie Geometria dello spazio che ha come gruppo fondamentale il gruppo Cremona nasce la così detta Geometria sopra le superficie algebriche (Geometria delle trasformazioni birazionali) fissando il gruppo in relazione ad una superficie determinata, nasce cioè quella Geometria che studia le proprietà delle superficie algebriche invariantive per trasformazioni birazionali della superficie.
Analogamente si dica più in generale per la Geometria sopra le varietà algebriche.
Altri esempi di uno sviluppo analogo sono i seguenti:
1) La teoria della connessione delle varietà (Geometria delle trasformazioni continue) nasce dall'Analysis sytus dello spazio ponendo in relazione il gruppo fondamentale delle trasformazioni continue senza eccezione ad una determinata varietà, e però riguardando come uguali due varietà che si possono porre in corrispondenza biunivoca continua senza eccezione anche se questa non fa parte di una trasformazione biunivoca continua dello spazio completo.
2) La Geometria metrica sopra le varietà (§ 14) deriva dalla Geometria metrica di un S_n in cui la varietà si può riguardare come contenuta ove si fissi il gruppo dei movimenti in relazione alla varietà astraendo dal rimanente spazio. Così il concetto del movimento d'una superficie flessibile e inestendibile nello spazio ordinario è appunto derivato dal concetto di movimento dello spazio per essersi portata sistematicamente attenzione alle relazioni metriche sopra la superficie prescindendo dal rimanente spazio.

Noi possiamo ora formulare il principio generale seguente: «Ogni Geometria sopra una varietà si può far derivare da una corrispondente Geometria di uno S_n in cui la varietà è contenuta, fissando il gruppo fondamentale di trasformazioni della Geometria di S_n in relazione alla varietà, ed astraendo dal rimanente spazio.

Come conseguenza d'un ulteriore sviluppo la Geometria sulla varietà potrà prescindere ancora dalle dimensioni dello spazio S_n, confrontando insieme varietà di spazi diversi, ed infine assurgendo alla concezione di una varietà-tipo considerata in se stessa prescindendo dalle particolarità dello spazio in cui si può immaginare contenuta».

29 - Il principio di trasporto di Hesse generalizzato da Klein.

Ciò che è stato detto innanzi intorno al modo con cui i vari indirizzi geometrici possono organizzarsi mediante la considerazione caratteristica dei gruppi fondamentali di trasformazioni, diviene fecondo di utili ravvicinamenti mediante una osservazione che costituisce il così detto principio di trasporto.

Si abbia in un S_n (o in una varietà v_n) un gruppo fondamentale di trasformazioni continuo finito, caratteristico per una determinata Geometria. Il contenuto di questa Geometria ossia il corpo delle proprietà che la costituiscono risulta dall'insieme di tutte le proprietà degli enti geometrici che sono invariantive rispetto alle trasformazioni del gruppo.

Consideriamo nello S_n un qualsiasi ente geometrico ed operiamo su questo tutte le trasformazioni del gruppo, daremo luogo ad un insieme di elementi trasformato in se stesso da tutte le trasformazioni del gruppo, e che per ciò dicesi un corpo di elementi. Se noi chiamiamo «punti» gli elementi del corpo, il nostro S_n (o la nostra varietà v_n) ci apparirà come una nuova varietà di elementi (v_r) ad un certo numero r di dimensioni nella quale sarà pur dato un gruppo fondamentale di trasformazioni e quindi una particolare Geometria.

Escludiamo il caso eccezionale che tutti gli elementi di v_r possano esser tenuti fermi da un sottogruppo invariante del gruppo dato in S_n (o v_n). Confrontando le due Geometrie poste in S_n (o in v_n) ed in v_r, vediamo che tutte le proprietà dell'una si trovano nell'altra sotto altra forma, giacchè le proprietà della Geometria di v_r sono relative ad enti primitivamente dati in S_n (o v_n), e viceversa tutte le proprietà di S_n (o v_n) potranno considerarsi come proprietà della Geometria di v_r dove il «punto» di S_n (o v_n) non apparirà più come elemento, ma potrà opportunamente considerarsi come un insieme di elementi.

In sostanza dunque le due Geometrie non differiranno fra loro se non per l'ordine e per il modo di comparire delle proposizioni, non per intrinseca differenza.

Per spiegare le cose dette riferiamoci ad alcuni esempi.

1) Se sopra la retta si prende come nuovo elemento (in luogo del punto) la coppia di punti la Geometria proiettiva sulla retta si cambia nella Geometria proiettiva del piano in relazione ad una conica fissa(*) (§ 9). Come elementi della nuova Geometria si possono riguardare le coppie di punti (della retta o) della conica, o ciò che è lo stesso le rette del piano: il punto della retta appare nella nuova Geometria come un fascio di raggi col centro sulla conica.

Poichè la Geometria proiettiva del piano in relazione ad una conica fissa (presa come assoluto) non differisce dalla Geometria non euclidea del piano stesso, vediamo che:

<u>Cambiando l'elemento «punto» della retta nell'elemento «coppia di punti» la Geometria proiettiva della retta viene a rispecchiarsi nella Geometria non euclidea del piano, e quindi nella Geometria della stella nello spazio ordinario.</u>

Come applicazione accenniamo alla determinazione dei <u>gruppi</u>

(*) Questo cambio di elemento è possibile perchè tutte le coppie di punti formano un corpo rispetto alle proiettività.

finiti di proiettività sulla retta: questi vengono rispecchiati dai gruppi finiti di rotazioni della stella in se stessa e però corrispondono ai poliedri regolari dello spazio euclideo S_3.(*)

2) Se sul piano si prende come nuovo elemento la «conica» e si chiama questo elemento (generatore per un sistema lineare ∞^5) «iperpiano d'un S_5», la Geometria proiettiva del piano si rispecchia nella Geometria proiettiva dello S_5 in relazione ad una superficie fissa i cui punti (ciascuno considerato come comune ad ∞^4 iperpiani) corrispondono ai punti del dato piano (riguardati ciascuno come comune alle ∞^4 coniche che lo contengono). La superficie che così nasce in S_5 è algebrica (come si prova subito colle formule) e viene rappresentata birazionalmente sul piano (cioè si ha fra i punti del piano e i punti della superficie una corrispondenza razionale biunivoca): alle curve sezioni iperpiane della superficie corrispondono le coniche del piano rappresentativo: due coniche si segano in 4 punti, quindi due iperpiani di S_5 han comune 4 punti colla superficie e però questa è del 4.° ordine.

La detta superficie interessantissima è nota sotto il nome di superficie di Veronese. Dopo il Veronese il Segre ne ha fatto lo studio sistematico considerando la Geometria della superficie come una trasformazione della Geometria proiettiva del piano ove si assuma per elemento la «conica».(**)

3) Nello spazio ordinario si assuma come elemento la «retta» e si consideri come il «punto» d'una varietà V_4 a 4 dimensioni. In che cosa si cambia la Geometria proiettiva (rispetto alla quale le rette formano un corpo)?

Per rispondere giova notare come possa rappresentarsi analiticamente lo spazio rigato.

A tal fine basta considerare una retta come individuata

(*) Cfr. Klein «Vorlesungen über das Ikosaeder».

(**) Cfr. Veronese (Accad. dei Lincei - Memorie - 1883-84) Segre - (Atti Accad. di Torino - 1885).

da due dei suoi punti
$$(x_i) \qquad (y_i) \qquad (i=1,2,3,4)$$
ed assumere come <u>coordinate della retta</u> i minori
$$p_{ik}=(x_i y_k - x_k y_i)$$
tratti dalla matrice
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} :$$
si avrà allora che ogni retta dello spazio viene individuata da 6 coordinate omogenee (le p_{ii} sono nulle) legate da una relazione quadratica
$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{24}+p_{14}p_{23}=0.$$
Perciò la v_4 i cui elementi sono le «rette» di S_3 ossia lo <u>spazio rigato</u>, apparisce come una quadrica v_4^2 di S_5.
I punti dello S_3 appariscono nello spazio rigato come stelle di raggi, e come «piani (S_2)» sopra la v_4^2 di S_5, sulla quale si ha pure un'altra serie di «piani» i cui punti corrispondono alle rette dei piani rigati di S_3. Una proiettività di S_3 produce una trasformazione sulla v_4^2 ed è facile vedere che questa è una trasformazione proiettiva (della quadrica e) dello S_5: viceversa una trasformazione proiettiva dello S_5 che muti in sè la v_4^2 e muti in sè la serie dei piani corrispondenti ai punti di S_3 dà luogo ad una trasformazione di S_3 che conserva le rette, ossia ad una proiettività (omografia); (se la detta serie di piani venisse scambiata coll'altra si avrebbe in S_3 una correlazione).
Si conclude:
<u>La Geometria proiettiva dello S_3 ove si assuma come elemento la «retta» (Geometria dello spazio rigato) si rispecchia nella Geometria proiettiva sopra una quadrica di S_5.</u>
È di questa bella relazione osservata dal Klein il <u>Segre</u> ha tratto profitto sistematicamente nello studio dello spazio rigato (cfr. i citati lavori sulle quadriche e sulle correlazioni degli iperspazi).

30 - <u>La rappresentazione canonica di una data Geometria</u>. In ordine alle idee svolte nel precedente paragrafo, attorno ad ogni Geometria definita in una varietà v_n (in particolare in S_n) mediante un gruppo fondamentale di trasformazioni (continuo finito) si aggruppano infinite altre Geometrie che non differiscono l'una dall'altra se non per la scelta dell'elemento, ciascuna delle quali si può riguardare come <u>una teoria invariantiva rispetto al gruppo, riferita ad un corpo di elementi nella varietà v_n</u>. La scelta di questo corpo di elementi apparisce come la scelta di una varietà particolare (che può essere sostituita alla data v_n), atta a rappresentare il gruppo di trasformazioni.

Allora sorge spontanea la domanda se fra tutti i corpi di elementi che il gruppo possiede ve ne sia qualcuno legato invariantivamente alla natura del gruppo stesso che fornisca una rappresentazione della data Geometria indipendente dalla considerazione di un particolare corpo di elementi. Si ottiene una siffatta rappresentazione (che diremo <u>rappresentazione</u> <u>canonica</u> della Geometria), ove si assumano come elementi le stesse « trasformazioni » del gruppo riguardate dunque come i « punti » di una varietà V.

Come operano le trasformazioni del gruppo in questa varietà V?

Sia π una trasformazione generica del gruppo, ossia un « punto » della varietà V; se T è un'altra qualsiasi trasformazione del gruppo, si può considerare che essa effettui sui punti di V la trasformazione che fa passare

$$\text{da} \quad \pi \quad \text{a} \quad \pi T \; ,$$

oppure quella che fa passare

$$\text{da} \quad \pi \quad \text{a} \quad T\pi \; .$$

Fissando il modo di operare di T su π (per moltiplicazione a destra o a sinistra) si ottengono in V due gruppi di trasformazioni <u>associate</u> in ciascuno dei quali vi è <u>una</u> trasformazione facente passare da un dato punto ad un altro (o, come si dice, che operano in modo <u>semplicemente transitivo</u> sulla V).

Se si considerano in V i prodotti delle trasformazioni di un gruppo colle inverse delle loro associate si ottiene in V un altro gruppo Γ' di trasformazioni ciascuna delle quali fa passare da un «punto» π a quel punto di V che rappresenta una trasformata $T^{-1}\pi T$.

Si può scorgere l'utilità della rappresentazione canonica di una data Geometria riferendoci all'esempio della Geometria proiettiva sulla retta.

Le proiettività sulla retta si possono riguardare come i «punti» d'un S_3 (§ 10). Il gruppo Γ' che rispecchia in S_3 il modo con cui le proiettività della retta vengono trasformate è costituito delle omografie di S_3 che lasciano ferma la quadrica rappresentante le proiettività degeneri ed il punto che corrisponde alla «identità», quindi è riducibile (mediante una trasformazione proiettiva immaginaria) al gruppo delle rotazioni d'una sfera attorno al suo centro.

Dunque:

<u>La rappresentazione canonica della Geometria proiettiva sulla retta</u> (<u>complessa</u>) <u>è data dalla Geometria delle rotazioni della sfera in se stessa.</u>

E ciò trova riscontro nel fatto che il <u>Cayley</u> ha rappresentato mediante sostituzioni lineari sulla variabile complessa le rotazioni della sfera in se stessa.(*)

In particolare si ritrova il resultato che «i gruppi finiti di proiettività sulla retta corrispondono ai poliedri regolari iscritti nella sfera».

31. <u>Il problema gruppale dei fondamenti della Geometria</u> - Dap-

---

(*) Cfr. le citate lezioni di Geometria differenziali del Bianchi pag. 83.

poichè ogni Geometria dello S_n (in particolare dello S_3) viene caratterizzata da un gruppo fondamentale di trasformazioni, il problema dei postulati relativi ad una Geometria può considerarsi come la questione di « assegnare le elementari proprietà del gruppo che valgono a determinarlo fra tutti i gruppi di trasformazioni in una varietà v_n ».

Ci limiteremo ad accennare a ciò che si è fatto in questo senso pel caso più interessante che comprende la questione dei fondamenti della ordinaria Geometria.

Si suppongono già introdotti i postulati che permettono di riguardare lo spazio come una v_3 di cui i punti vengono <u>rappresentati analiticamente</u> mediante tre coordinate.

Abbiamo già accennato (§19) al modo di <u>Riemann</u> di trattare la questione partendo da una espressione dell'elemento lineare

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

e volendo determinarla in guisa che la varietà sia <u>omogenea</u>: ciò conduce in sostanza alla questione gruppale di assegnare i possibili gruppi di trasformazioni di una forma quadratica differenziale in se stessa, questione che il <u>Lie</u> ha approfondito.

Ma sotto un altro aspetto che apparisce più vantaggioso <u>Helmoltz</u>(*) si è posto il problema dei fondamenti della Geometria prendendo a caratterizzare mediante le sue più elementari proprietà il <u>gruppo dei movimenti</u>. Veramente neppure ad Helmoltz erano noti i concetti della teoria dei gruppi, e non è quindi da meravigliarsi di alcune inesattezze sfuggite nella sua trattazione: dobbiamo piuttosto ammirare che egli sfornito di tali mezzi abbia immaginato di presentare il problema dei

(*) « Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen » (Göttinger Nachrichten - 1868).