

---

Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

# FEDERIGO ENRIQUES

---

ENRIQUES, FEDERIGO

**Conferenze di geometria: fondamenti di una geometria iperspaziale**

, .



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

---

*Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"*

*promosso dal  
Ministero per i Beni e le attività Culturali  
Area 4 - Area Archivi e Biblioteche  
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali*

# Indice

# Capitolo 1

## Fondamenti di una Geometria iperspaziale

### 1.1 Importanza dell'analisi dei fondamenti nella Matematica

Se la storia di un organismo scientifico rispecchia sempre la legge d'evoluzione del pensiero nel formarsi delle varie tendenze che cooperano al suo progresso, sommamente istruttiva riesce sotto questo aspetto la storia della *Matematica* come quella del più antico ed elevato organismo scientifico, dove la varietà dei rami è venuta crescendo insieme ai mutui vincoli di essi.

Paragonando lo sviluppo che questa scienza ha ricevuto nell'epoca moderna con quello che ad essa compete nell'antica civiltà greca, non vien fatto di ammirare soltanto i risultati nuovi che si sono ottenuti, ma accanto a questi attraggono la nostra attenzione i progressi portati dal metodo critico nell'investigazione dei principii: anzi non potremmo nemmeno separare gli uni progressi dagli altri, perché nella Matematica ogni passo avanti ha richiamato l'attenzione all'analisi dei fondamenti, e viceversa da una tale analisi sono scaturiti spesso concetti nuovi ed importanti che hanno permesso di estendere i risultati noti ad un campo più generale.

Il fenomeno del resto non è relativo in modo particolare allo sviluppo di questa anziché d'un'altra scienza, e viene anzi rispecchiato nella storia generale della scienza dall'accompagnarsi di una filosofia propria ad ogni stadio dell'evoluzione del pensiero: così nella Grecia vediamo l'elaborazione del problema logico che dà luogo alla grande opera di Aristotele, accompagnare la formazione della Geometria detta da Euclide; ed allo sviluppo meraviglioso della scienza moderna dove primeggia l'indagine sperimentale, possiamo contrapporre l'elaborazione di una teoria della conoscenza di cui (pur restando

nell'ordine delle idee positive) non può essere ormai negato il valore scientifico dopo il grande edificio elevato da Kant colla sua «Critica della Ragion pura».

Le precedenti osservazioni d'indole generale valgono non soltanto a far rilevare il valore del problema dei fondamenti nella Matematica, ma anche a richiamare il confronto tra questa e le altre scienze, poiché da tale confronto soltanto può scaturire il retto senso della *importanza scientifica* d'una ricerca matematica ove manchi (ciò che spesso accade) un criterio di giudizio diretto<sup>1</sup>.

E dopo ciò passiamo a parlare del problema dei fondamenti nella Geometria.

## 1.2 Come debba intendersi la Geometria

La Geometria ha per oggetto lo studio delle relazioni inerenti al concetto di spazio quale esso scaturisce nella nostra mente dall'ordine della sensibilità esterna, ossia quale ci è presentato dall'*intuizione*. Nel concetto di spazio sono comprese le nozioni di molti enti geometrici come *punti, linee, superficie*, in particolare *rette, piani*, ecc.: alcuni di questi enti possono esser *definiti* fissando le loro relazioni con altri già dati (almeno per quanto importa agli sviluppi geometrici), ma alcuni enti debbono supporre dati a priori come *fondamentali* non potendosi ridurre ad altri senza cadere in un circolo vizioso. Vi è dell'arbitrio nella scelta degli enti fondamentali dello spazio; fra essi intercedono delle relazioni, alcune delle quali (i *teoremi*) si *dimostrano* con deduzione logica da altre già note o supposte note: ma anche qui non si può risalire indefinitamente, ed alcune relazioni geometriche fra gli enti fondamentali debbono essere date a priori come *postulati*. I postulati vengono desunti dall'intuizione ed il loro complesso tien luogo di definizione per gli enti fondamentali, stabilendo quei mutui rapporti di essi che servono a fissarli per quanto occorre agli sviluppi geometrici.

Nel suo principio e nel suo svolgimento la Geometria intesa nel senso detto prima è scienza soggettiva. Nel principio perché gli enti fondamentali ed i postulati che ad essi si riferiscono riflettono il concetto dello spazio intuitivo

---

<sup>1</sup>L'importanza scientifica d'una questione o di un risultato è da riguardarsi, indipendentemente dalle sue possibili applicazioni pratiche, in relazione al posto occupato nell'ordine dello scibile: non di una questione scientifica particolare ma dell'intera scienza (che è un tutto organico) si può valutare l'importanza sociale in relazione alla pratica e non soltanto riguardando alle applicazioni *dirette*. Così in senso largo, si può dire che tutto ciò che è importante nella teoria è importante nella pratica: l'affermazione inversa è anch'essa ugualmente giustificata dalla storia.

quale esso è nella nostra mente; nello svolgimento perché definizioni e dimostrazioni, colle quali si aggiungono altri enti ai fondamentali ed i teoremi ai postulati, sono soltanto operazioni logiche.

Se allo spazio intuitivo cioè all'ordine della nostra sensibilità corrisponda un ordine delle cose esterne ossia uno spazio reale pel quale i postulati esprimono proprietà reali, è una questione strettamente legata al problema della conoscenza, che trascende dal campo della Geometria intesa nel senso detto innanzi e da cui lo sviluppo di questa è indipendente. Indifferente è quindi, sotto questo aspetto, che la questione si risolva in senso scettico (o idealistico) come nella teoria di Kant, o che invece attribuita allo spazio una realtà oggettiva, come da Helm[h]oltz nel discorso «Die Thatsachen in der Wahrnehmung»<sup>2</sup>, si discuta il valore dei postulati considerati come verità fisiche. Non soltanto da questioni siffatte non può sorgere nulla che distrugga il valore *logico* della Geometria, ma neppure qualche cosa che modifichi il nostro concetto intuitivo di spazio; quindi non soltanto la *possibilità* ma anche l'*importanza matematica* della Geometria stessa sono indipendenti dalle dette questioni. Ciò non vuol dir punto che la risoluzione di esse sia indifferente sotto l'aspetto fisico-filosofico; perciò il matematico come pensatore non può disinteressarsene anche se preoccupato soltanto della concezione più larga che potrà trarne a vantaggio dello sviluppo matematico. Basti qui ricordare le memorabili ricerche a proposito del «postulato delle parallele» di *Lobatschewsky*<sup>3</sup> [sic], *G. Bolyai*<sup>4</sup>, *Gauss*, *Riemann*<sup>5</sup> e *Beltrami*<sup>6</sup>, che hanno il loro fondamento storico nell'ipotesi di una Geometria fisica diversa da quella generalmente supposta vera fino dai tempi d'Euclide. Né potremmo chiudere questo cenno delle questioni geometrico-fisiche senza citare (oltre il già nominato discorso) i lavori di *Helm[h]oltz* «Ueber di Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen»<sup>7</sup> e «Populäre wissenschaftliche Vorträge»<sup>8</sup>

---

<sup>2</sup>Berlino - 1878 - (Aug. Hirschwald). S'intende che tale affermazione costituisce (come l'altra) soltanto una ipotesi; l'ipotesi realistica nella teoria della conoscenza. Ciò anzi viene rilevato espressamente da Helm[h]oltz.

<sup>3</sup>«Principien der Geometrie» Kasan 1829-30.

<sup>4</sup>«Sulla scienza dello spazio assolutamente vera ecc.» Napoli - Pellerano - 1875 (Trad. dal latino dell'opera di W. Bolyai «Tentatem juventutem studiosam ecc.» {Marcos Vasarcheli 1832} fatta da G. Battaglini).

<sup>5</sup>«Ueber die Hypothesen welcher Geometrie zu Grunde liegen» Gottingen 1854 (trad. franc. Annali di Mat. s. II<sup>a</sup>, t. III).

<sup>6</sup>«Saggio d'interpretazione della Geometria non-euclidea». (Giornale di Mat. di Napoli t. IV). «Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante» (Ann. di Mat. s. II<sup>a</sup> t. II. cfr anche t. V).

<sup>7</sup>Göttinger Nachrichten - 1868.

<sup>8</sup>Braunschweig - 1876.

nonché l'opera di *Clifford* «Il senso comune nelle scienze esatte»<sup>9</sup>.

### 1.3 Come si formino indirizzi geometrici più generali

Senza addentrarci nella discussione dei principii che stanno a fondamento della Geometria fisica, ci limitiamo ad aver rilevato la distinzione tra questa e la Geometria (soggettiva) che si riferisce al concetto dello spazio intuitivo dato a priori coi suoi postulati che sono per noi assoluti ed indiscutibili; e rileviamo ancora la possibilità di fondare varie *Geometrie più generali* nelle quali si prescinde da qualche postulato. Proponiamoci di vedere quale importanza debba attribuirsi a tali indirizzi: siamo allora condotti ad esaminare brevemente come il pensiero sia giunto a questa concezione. Ad essa si può pervenire quando si faccia l'analisi dei postulati geometrici seguendo principalmente tre criteri.

1. Il *criterio fisico*.

Discutendo i postulati della Geometria (oggettiva) concepita come scienza fisica, si è condotti ad analizzare il vario grado di certezza fisica che ciascuno di essi presenta: sembra allora naturale di prescindere da qualche postulato e costruire una Geometria fondata su ipotesi più ristrette e quindi più generale nel senso che i suoi risultati sono applicabili indipendentemente da alcune ipotesi presentanti un minor grado di certezza. A questo concetto si può dire informata l'origine della Geometria non-euclidea cui si è poc'anzi accennato.

2. Il *criterio fisico-psicologico*.

L'analisi psicologica dei nostri concetti ci permette di separare in un concetto complesso vari concetti più semplici che lo costituiscono: si riesce così a disporre i concetti in un ordine di successione siffatto che ciascuno supponga il precedente e sia invece indipendente dai successivi. Questa analisi risponde anche all'origine fisiologica dell'intuizione per mezzo dei sensi. Così quando nella concezione dello spazio teniamo conto soltanto di tutto ciò che si collega alla «vista», veniamo a prescindere dalle nozioni metriche e a fondare una *Geometria proiettiva* nella quale vengono studiate esclusivamente le proprietà grafiche delle figure<sup>10</sup>.

---

<sup>9</sup>Biblioteca internazionale - 1886.

<sup>10</sup>Cfr. la «Introduzione storica» al mio corso di Geometria proiettiva per l'anno 1894-95.

### 3. Il *criterio logico*.

Quando discutiamo il complesso dei teoremi della Geometria e cerchiamo di ridurre la dimostrazione di ciascuno in guisa da supporre il minimo numero di ipotesi, veniamo a fondare tanti diversi indirizzi geometrici più generali in ciascuno dei quali si pone a base un numero minore di postulati. In questo ordine d'idee basta che le ipotesi poste siano *compatibili* (cioè non contraddittorie), né è essenziale tener conto del significato concreto attribuito agli elementi fondamentali.

Dei criteri enumerati che servono di guida all'analisi dei postulati consideriamo il 2° e il 3° rientranti nel *criterio matematico*, che si basa sull'intuizione e sulla logica: non sulla logica soltanto come opinano alcuni, perché ciò ridurrebbe la matematica ad una semplice esercitazione sillogistica.

L'affermazione precedente deve essere intesa convenientemente. Il *rigore matematico* esige che ogni qual volta una verità vien desunta dall'intuizione, essa venga enunciata esplicitamente come un postulato, ed in tal forma che essa comparisca nell'organismo matematico soltanto come una *relazione logica*. Lo sviluppo ulteriore dei teoremi si riduce ad una serie di trasformazioni logiche di siffatte relazioni. Dunque l'analisi dei postulati della Geometria qualunque sia il criterio seguito in essa dovrà sempre portare ad un assetto logico di questa scienza, e però il criterio logico è *necessario* a fondare una Geometria *matematica*: ma il detto criterio logico *non è sufficiente* perché l'indirizzo fondato abbia una *importanza* matematica o geometrica.

Il criterio d'analisi, che abbiamo detto fisico, resta al di fuori del campo matematico propriamente detto: ciò non ne diminuisce l'importanza anche soltanto in riguardo della matematica: vi è tra la fisica e la matematica lo stesso legame che fra il mondo soggettivo ed il mondo oggettivo, le sensazioni ed i fatti. Questo legame non può essere dimenticato senza perdere di vista lo scopo generale della scienza e senza privare la matematica di una delle fonti più ricche del suo sviluppo.

Cercando un confronto non sapremmo trovarne uno più appropriato che additando i frutti portati nella psicologia dall'unione felice colla fisiologia, e contrapponendo tali frutti di una psicologia positiva alle nebulose teorie metafisiche ed al grossolano sensualismo che si avevano innanzi. Fortunatamente per la nostra scienza, l'unione tra la fisica e la matematica è più antica, e corrispondentemente ha dato frutti più maturi: tale unione non deve essere oggi dimenticata se pure la necessità della divisione del lavoro costringa il matematico a ridurre in un campo più ristretto le proprie ricerche.

## 1.4 Compatibilità e indipendenza dei postulati della Geometria

I postulati posti a base di una Geometria (sia essa *tutta* la Geometria o una *parte* più generale di essa) debbono essere compatibili. Desumendo i postulati dall'intuizione questa compatibilità si può affermare *a priori*: ci basiamo sul *principio di ragione* pel quale «più verità concepite insieme come elementi di uno stesso concetto sono compatibili».

In luogo di fare uso di quel principio può sembrare ad alcuno preferibile di introdurre successivamente gli enti geometrici col convenzionalismo in guisa da mostrare come si possa dare alla Geometria un assetto puramente logico anche nei suoi principii: s'intende che non si definiscono così gli enti geometrici intuitivi ma soltanto degli enti (logici) che possono sostituirli nei rapporti logici, ciò che è indifferente per lo sviluppo matematico della Geometria. Crediamo però che così facendo si smarriscano i criteri direttivi dell'analisi dei postulati seguendo i quali una tale analisi può riuscire veramente feconda: d'altra parte l'applicazione del principio di ragione compare ancora in sostanza come fondamento delle leggi logiche.

Soddisfatta comunque la condizione di compatibilità, quando si pone un sistema di postulati geometrici si cerca anche che essi sieno *indipendenti*, vale a dire che nessuno di essi sia conseguenza dei precedenti.

L'interesse della indipendenza sta in relazione alla formazione degli indirizzi più generali cui abbiamo accennato.

Relativamente ad essa osserviamo:

1. Che il significato dell'indipendenza è relativo all'*ordine* con cui i postulati vengono introdotti.
2. Che esso è relativo alla *composizione* dei postulati stessi, vale a dire che un postulato potrà non essere conseguenza di altri ammessi, ma potrà scindersi in più altri qualcuno dei quali si deduca invece dai precedenti.

E poiché riteniamo che di nessuna affermazione possa dirsi che essa sia *semplice* (indecomponibile) o almeno che essa non possa venir sostituita da un'altra enunciante un'ipotesi meno restrittiva, attribuiamo alla ricerca dell'indipendenza dei postulati un valore non assoluto, ed a guida di questa ricerca assumiamo il criterio fisico-psicologico desumendo essenzialmente da esso l'ordine dei concetti: cerchiamo dunque l'indipendenza dei concetti più che delle affermazioni ad essi relative, e dei postulati cerchiamo di prescindere specialmente quando ne scaturiscono indirizzi geometrici più generali tenendo di mira la formazione di questi come il maggiore scopo dell'analisi dei postulati.



Colle considerazioni precedenti non intendiamo toglier valore a ricerche che seguono in quella analisi il criterio puramente logico: ciò può esser necessario ove si tratti di giustificare (logicamente) uno sviluppo geometrico già esistente e posto in dubbio, perché non debitamente fondato: ciò può anche servire a scopi di ricerche particolari.

## 1.5 Geometria astratta

L'analisi dei concetti geometrici porta ad una prima conseguenza molto importante. Facendo *astrazione* da alcuni postulati relativi ad una serie di concetti e fondando così un indirizzo geometrico più generale, accade spesso che tale indirizzo si incontra con quello cui si perviene partendo da una diversa serie di concetti, tantoché sotto l'aspetto logico i due indirizzi non differiscono affatto: così una serie di teoremi si traduce in un'altra con una semplice sostituzione di nomi. Ciò può dirsi ad esempio della Geometria proiettiva dello spazio punteggiato e di quella dello spazio di piani<sup>11</sup>.

Questa osservazione ci fa risaltare tutta l'importanza di dare alla Geometria un assetto secondo il criterio logico, comunque i postulati di essa vengano dedotti dall'intuizione, e ci mostra che essa non consiste soltanto nel raggiun-gimento d'un grado assoluto di certezza logica conforme al rigore matematico. L'importanza matematica del fondare un indirizzo geometrico prescindendo da qualche postulato sta nelle sua maggiore *generalità*: questa generalità consiste nell'applicabilità dei risultati ottenuti al di là dei limiti della primitiva intuizione.

Tenendo di mira fin da principio la estensione che vogliam dare ai risultati ottenuti in un dato campo applicandoli ad altri campi, ci converrà considerare gli elementi fondamentali della Geometria come enti di natura astratta legati da relazioni puramente logiche e concepire in questo senso la scienza fondata come una *Geometria astratta*. Tale modo di considerare a cui si è naturalmente condotti dalle precedenti osservazioni è d'altronde indifferente nello sviluppo matematico della Geometria.

L'importanza che attribuiamo alla Geometria astratta non è (come si potrebbe credere) da contrapporsi all'importanza attribuita all'intuizione: essa sta invece nel fatto che *la Geometria astratta si può interpretare in infiniti modi come una Geometria concreta (intuitiva) fissando la natura dei suoi elementi*: sicché in tal modo la Geometria può trarre aiuto nel suo sviluppo da infinite forme diverse d'intuizione.

Intendiamo che così appunto si faccia quando si discutono i principi

---

<sup>11</sup>Cfr. le mie citate lezioni di Geometria Proiettiva.

della Geometria astratta, ciò che è precisamente l'opposto del prescindere dall'intuizione.

Andiamo a spiegare meglio i concetti esposti con qualche esempio.

## 1.6 Interpretazione della Geometria piana astratta sulle superficie sviluppabili. Estensione

Immaginiamo di studiare la *Geometria sopra una superficie*. Si dimostra (sotto certe restrizioni) che per due punti della superficie passa *una* linea *geodetica* il cui arco intercetto fra i due punti è il minimo arco avente gli estremi in essi; questa linea segna dunque la posizione d'un filo che venga teso fra i due punti rimanendo adagiato sopra la superficie. È chiara dalla definizione l'analogia dell'ufficio che ha la retta nel piano e la geodetica sopra una superficie: potremo dunque nello studio della Geometria sopra una superficie prendere le geodetiche come enti fondamentali e nel successivo sviluppo fondarci soltanto su alcune relazioni riconosciute che ne esprimono proprietà elementari. Così facendo a partire da infinite superficie diverse di date classi perveniamo ad una medesima Geometria: infatti la Geometria così costruita non si altera se s'immagina di flettere la superficie cui si riferisce (concepita come un foglio flessibile ed inestendibile). In particolare troveremo superficie (*svilupabili*) la Geometria sopra le quali non differisce dalla Geometria piana se non pel nome dato alle geodetiche, che nel 2° caso vengono chiamate *rette*.

*La Geometria piana astratta si può dunque interpretare indifferentemente come la Geometria intuitiva sul piano o come quella sopra le superficie sviluppabili*<sup>12</sup>. Basta fissare che l'elemento designato nella Geometria astratta col nome «retta» denoti una volta la retta intuitiva, ed un'altra volta la geodetica d'una superficie sviluppabile.

Ai medesimi concetti della Geometria piana astratta si perviene partendo dal piano o indifferentemente da un'altra superficie sviluppabile. Immaginiamo che nello studio della Geometria piana astratta si prescinda da qualche postulato: ove si abbia di mira la interpretazione di essa come Geometria sopra una superficie, ciò equivale a considerare le superficie che soddisfano

---

<sup>12</sup>Si avverta di aver riguardo alla distinzione che va fatta tra la Geometria sopra *tutta* una superficie (definita da una certa legge) e quella sopra regioni limitate di una superficie: se (come generalmente) si chiama «svilupabile» anche una superficie che può distendersi sopra una regione di piano, si dovrà limitare a questa regione la Geometria piana che si vuole interpretare sulla superficie.

ad alcune proprietà delle sviluppabili ma non a tutte, dunque ad allargare la classe delle superficie considerate. Ciò mostra tutto il valore della maggiore generalità ottenuta. Così in particolare la Geometria piana che prescinde dal postulato d'Euclide sulle parallele è interpretabile come la Geometria sopra le superficie di curvatura *costante*; classe di superficie che comprende oltre le sviluppabili anche la sfera, la *pseudosfera*<sup>13</sup> e le loro deformate. In ciò che si è detto si deve però aver riguardo all'avvertenza posta innanzi nella nota. Come esempio di teorie di Geometria piana indipendenti dal postulato d'Euclide si può pensare la teoria degli isoperimetri, la quale (come è noto) fatta pei triangoli piani riesce identica all'analoga teoria pei triangoli sferici.

In linea storica diremo che la interpretazione della Geometria non-euclidea piana come Geometria sopra le superficie di curvatura costante è dovuta a *Beltrami* (l. c. P. 2). Specialmente egli si è occupato di vedere se esistono superficie sulle quali valga la Geometria non-euclidea di *tutto* il piano (e non di una regione soltanto), ed ha dimostrato che la pseudosfera si può considerare come un intero piano (astratto) di Lobatschewsky (cioè un piano *iperbolico* nel quale per ogni punto passano *due parallele*<sup>14</sup> ad una retta data). Invece benché una regione (convenientemente limitata) di sfera possa sempre considerarsi come una regione di un piano (astratto) di Riemann (cioè di un piano, *ellittico*, nel quale non vi sono coppie di rette parallele), tutta la sfera non può considerarsi come un intero piano di Riemann (giacché per due punti opposti della sfera passano infiniti cerchi massimi = geodetiche). Ma la Geometria non-euclidea ellittica dell'intero piano astratto può ricevere altre interpretazioni: ad esempio (secondo il *Klein*) come Geometria metrica della stella di raggi, detto «punto» la «retta» e «retta» il «piano» della stella.

Sulle cose dette ci proponiamo di ritornare a suo tempo per dimostrarle e collegarle ad altri concetti. Valga qui l'averne fatta menzione a far comprendere come la considerazione della Geometria astratta permetta di trarre profitto dalla maggiore generalità di un indirizzo geometrico ottenuto prescindendo da qualche postulato. Ed osserviamo fin d'ora il legame fra due specie di progressi ottenuti con queste generalizzazioni, riferendoci al caso del postulato d'Euclide: da un lato l'estensione alle superficie di curvatura costante di una parte della Geometria sopra le sviluppabili; dall'altro il risultato (di natura critica) che il postulato d'Euclide è indipendente dagli altri postulati della Geometria piana che generalmente gli si premettono, poiché questi e non quello sono veri sulla pseudosfera (e nella stella), *mutatio mutandibus*.

---

<sup>13</sup>La pseudosfera è la superficie generata dalla rotazione attorno all'asintoto di una curva (trattrice) caratterizzata dalla proprietà che il segmento di ogni sua tangente intercetta fra il punto di contatto e l'asintoto è una data costante *R*.

<sup>14</sup>Rette che incontrano la data e sono limiti di una secante variabile.

## 1.7 Interpretazione della Geometria proiettiva astratta come teoria dei sistemi lineari di superficie o di curve o delle involuzioni sulla retta

Riferiamoci ad un altro esempio. Giova per questo premettere le seguenti nozioni sulle *forme algebriche* e sui *loro sistemi lineari*. Dicesi *forma algebrica di grado  $n$*  in  $k$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , una funzione razionale omogenea di esse

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} \\ (i_1 + i_2 + \dots + i_k = n).$$

Più forme  $f_1, f_2, \dots, f_m$  dello stesso grado  $n$  si dicono *indipendenti* se tra esse non intercede una relazione lineare identica

$$\sum_1^m a_i f_i = 0$$

dove le  $a_i$  sono costanti. Se le  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sono indipendenti, le forme

$$\sum_1^m \lambda_i f_i = 0$$

dove le  $\lambda_i$  sono  $m$  parametri omogenei (definiti a meno di un fattore) costituiscono un *sistema lineare*  $\infty^{m-1}$  (ossia di  $m-1$  dimensioni) che (come si può verificare) *viene individuato ugualmente da  $m$  qualunque forme indipendenti scelte in esso e contiene tutti i sistemi lineari determinati da  $r < m$  forme di esso*.

I sistemi lineari  $\infty^2$  e  $\infty^1$  si dicono rispettivamente *reti* e *fasci*.

Ciò posto si assuma nello spazio un sistema di coordinate lineari omogenee  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Se  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  è una forma di grado  $n$ , la *superficie*

$$f = 0$$

si dirà *algebraica di ordine  $n$* . In luogo di parlare di sistemi lineari di forme potremo parlare di sistemi lineari di superficie (così rappresentate), intendendo di comprendere in un sistema lineare anche le superficie immaginarie rappresentate da equazioni reali, di cui sarà più tardi spiegato il significato geometrico.

La proprietà geometrica caratteristica per un sistema lineare  $\infty^m$  di superficie è che per  $m$  punti generici passi una superficie del sistema<sup>15</sup>.

Consideriamo in particolare un sistema lineare  $\infty^3$  di superficie d'ordine  $n$

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i = 0.$$

Designamo il detto sistema con  $S$ .

Se nelle proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva si sostituisce rispettivamente alle parole «punto», «retta», «piano», le parole «superficie di  $S$ », «fascio di  $S$ », «rete di  $S$ », vediamo facilmente che esse esprimono proprietà elementari del sistema  $S$ . Basta per convincersene considerare le  $\lambda_i$  come le coordinate lineari omogenee d'un punto dello spazio: le proposizioni geometriche danno luogo a relazioni analitiche che rappresentano alla loro volta proprietà del sistema  $S$ , le superficie del quale vengono ugualmente date dalle  $\lambda_i$ . Così per esempio poniamo a riscontro le seguenti proprietà:

- a) Due punti determinano una retta.
- a') Due superficie di  $S$  determinano un fascio in  $S$ .
- b) Tre punti (non sopra una retta) determinano un piano.
- b') Tre superficie (non di un fascio) in  $S$  determinano una rete in  $S$ .
- c) Un piano contiene la retta determinata da due suoi punti.
- c') Una rete in  $S$  contiene il fascio determinato da due superficie di essa.
- d) Un piano e una retta che non si appartengono hanno comune un punto. ecc.
- d') Una rete ed un fascio di  $S$  non contenuto in essa hanno comune una superficie di  $S$ . ecc.

Questa osservazione ci permette di affermare l'identità fra la Geometria dei sistemi lineari  $S$  (sviluppata partendo da quelle proposizioni elementari) e la Geometria proiettiva dello spazio, vale a dire ci permette di asserire:

*La Geometria proiettiva astratta si può interpretare ugualmente come una Geometria dello spazio intuitivo o come una Geometria dei sistemi lineari  $\infty^3$  di superficie algebriche di dato ordine.*

---

<sup>15</sup>Su ciò ritorneremo in seguito.

Basta fissare che gli elementi di natura indeterminata designati nella Geometria astratta coi nomi di «punti», «rette», «piani», sieno in un caso gli enti concreti che nella Geometria intuitiva si designano con tali nomi; nell'altro caso invece «superficie» e rispettivamente «fasci» e «reti».

Il precedente enunciato contiene come caso particolare la legge di dualità della Geometria proiettiva, se le superficie del sistema lineare considerato sono i piani.

Possiamo analogamente considerare nel piano le *curve algebriche d'ordine*  $n$  (reali e no) rappresentate da equazioni (reali) omogenee d'ordine  $n$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

ed i loro sistemi lineari.

Sulla retta un'equazione (reale)

$$f(x_1, x_2) = 0$$

omogenea, di grado  $n$ , rappresenta un gruppo di  $n$  punti (reali o a coppie immaginari coniugati): se

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_{m+1}$$

sono  $m + 1$  forme d'ordine  $m$  in  $x_1, x_2$  (fra loro indipendenti) i gruppi

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \dots + \lambda_m f_m = 0$$

formano una *involutione d'ordine*  $n$  e *specie*  $m$ .

Allora si ha in modo del tutto simile al precedente:

*La Geometria proiettiva astratta dello spazio può anche interpretarsi come una Geometria dei sistemi lineari  $\infty^3$  di curve piane algebriche di dato ordine, o come una Geometria delle involuzioni d'ordine  $n$  ( $> 2$ ) e di  $3^a$  specie sulla retta.*

Come corollari di questo enunciato possiamo considerare l'interpretazione della Geometria proiettiva astratta come Geometria dei sistemi lineari di cerchi del piano o della involuzione di  $3^o$  ordine e  $3^a$  specie sulla retta.

Diciamo qualche cosa relativamente a questi due esempi per illuminare i concetti posti innanzi.

## 1.8 La Geometria dei cerchi nel piano

Due cerchi hanno un *asse radicale* luogo dei punti di ugual potenza rispetto ad essi, tutti i cerchi che con uno dei dati hanno lo stesso asse radicale appartengono al fascio da essi determinato: il fascio è determinato indifferentemente da una sua coppia di cerchi, o dall'asse radicale e da un cerchio.

Le polari di un punto  $A$  del piano rispetto ai cerchi d'un fascio  $k$  appartengono ad un fascio di raggi. Se al punto  $A$  del piano si fa corrispondere una retta nel fascio di quelle polari, esiste *una* polarità del piano, siffatta che la polare di ogni punto appartiene sempre al fascio delle polari di esso rispetto ai cerchi di  $k$ . La detta polarità è tale che tutte le coppie di diametri coniugati in essa sono ortogonali: se essa ammette una conica fondamentale, questa è un cerchio di  $k$ ; in caso opposto si può prendere la polarità stessa (uniforme) come definitrice di un *cerchio immaginario* di  $k$ . Così  $k$  viene ad essere esteso conformemente alla definizione analitica di fascio: debbono ancora essere inclusi in  $k$  i due cerchi di raggio nullo costituiti dai due punti *limiti*, ove questi sieno reali; rispetto ad essi si ha una polarità *degenere*. Lo stesso si dica delle rette che eventualmente potranno comparire in  $k$  come cerchi di raggio infinito (se si vuole in unione alla retta all'infinito del piano). Anche due cerchi (uno o ambedue) immaginari determinano un fascio che però non può essere tutto costituito di cerchi immaginari. Tre cerchi non appartenenti ad un fascio presi due a due danno luogo a tre assi radicali passanti per uno stesso punto di ugual potenza rispetto ad essi (*centro radicale*): tutti i cerchi che hanno la stessa potenza rispetto al detto centro radicale formano la rete individuata dai tre cerchi dati. Ad una rete appartengono tutti i cerchi del fascio determinato da due cerchi della rete: s'includeranno nella rete anche i cerchi immaginari dei fasci in essa contenuti ed i punti limiti (eventuali) di essi.

Dopo ciò il sistema di tutti i cerchi reali, immaginari e nulli del piano apparisce come un sistema lineare  $\infty^3$  secondo la definizione analitica datane. Esso si può considerare come uno spazio, sotto l'aspetto proiettivo, dove i cerchi si chiamino «punti», i fasci di cerchi «rette», le reti «piani».

Ogni proposizione della Geometria proiettiva può allora essere interpretata come un teorema della Geometria dei cerchi. Viceversa ogni proposizione della Geometria dei cerchi trova la sua corrispondente nella Geometria proiettiva spaziale, purché essa sia fondata soltanto sopra le proposizioni che nella Geometria dei cerchi equivalgono ai postulati della Geometria proiettiva.

È conveniente osservare che in queste proposizioni il cerchio apparisce come elemento, ed i cerchi reali non vengono distinti dagli immaginari né da quelli di raggio nullo o infinito. Alle proiettività dello spazio corrispondono nel piano corrispondenze biunivoche tra cerchi, che mutano una rete in una rete, ossia *trasformazioni* del piano non *puntuali* che fanno corrispondere in generale ad un punto un cerchio: due figure piane concepite come costituite di cerchi sono da riguardarsi come identiche in questa Geometria, come due figure proiettive nella Geometria proiettiva. Per conseguenza nelle proposizioni della detta Geometria dei sistemi lineari di cerchi il punto o la retta del piano

non possono essere distinti in modo speciale da un circolo. Ove si voglia fare la prima distinzione verremo a sviluppare proprietà della Geometria proiettiva in relazione ad una particolare superficie i cui punti rappresentano i circoli di raggio nullo ed ove si faccia la seconda a distinguere un particolare piano rappresentante la rete dei circoli di raggio infinito.

Dopoiché i circoli di un piano  $\pi$  si sieno chiamati punti di uno spazio astratto  $S$  (che ha come piani le reti) possiamo dare a questi punti una diversa interpretazione considerando  $S$  come uno spazio intuitivo (in cui si hanno soltanto le nozioni grafiche). Ciò equivale a porre una corrispondenza biunivoca (proiettiva) tra i punti d'uno spazio intuitivo  $S$  ed i circoli del piano  $\pi$ , dove ai piani di  $S$  corrispondono le reti, alle rette i fasci, e viceversa.

D'altronde seguendo lo spirito della cosa tale corrispondenza si ottiene analiticamente così: si prendono quattro cerchi indipendenti  $f_i = 0$ : allora ogni cerchio ha una equazione della forma

$$\sum x_i f_i = 0:$$

le  $x_i$  si possono considerare come coordinate omogenee d'un cerchio; possiamo poi interpretarle come coordinate lineari omogenee nello spazio; si viene così ad associare il cerchio  $\sum x_i f_i = 0$  del dato piano  $\pi$ , al piano  $x_i$  dello spazio. Allora ai circoli di raggio nullo (punti limiti) del piano  $\pi$  corrispondono in  $S$  i punti d'una superficie algebrica  $F$ , e poiché in ogni fascio di circoli la determinazione dei punti limiti dipende da una equazione di 2° grado, la  $F$  è una quadrica. Non vi sono nel piano fasci di circoli tutti costituiti di circoli di raggio nullo, dunque la  $F$  è una quadrica a punti ellittici.

Operando in  $S$  una omografia possiamo trasformare  $F$  in una sfera: ciò equivale ad aver posto in modo conveniente la detta corrispondenza tra i circoli di  $\pi$  e i punti di  $S$ .

Si noti però che questa particolarità metrica della quadrica  $F$  non ha neppure significato ove la rappresentazione dei circoli di  $\pi$  coi punti di  $S$  venga fatta chiamando «punto» (d'uno spazio proiettivo astratto) un «circolo» di  $\pi$ , poiché manca (finché non venga introdotto con convenzioni opportune) la nozione metrica di «distanza» di due circoli in  $\pi$ .

La corrispondenza innanzi considerata può porsi anche con costruzioni dirette. Il modo più semplice di ottenerla è quello di proiettare *stereograficamente* una sfera  $F$  di  $S$  sul piano  $\pi$  (da un punto  $O$  di  $F$  posto sopra il diametro perpendicolare a  $\pi$ ). Allora ad ogni punto  $A$  dello spazio  $S$  si può far corrispondere il circolo (reale o immaginario) proiezione del circolo sezione di  $F$  col piano  $\alpha$  polare di  $A$  e viceversa. Ai circoli di raggio nullo (punti di  $\pi$ ) corrispondono i punti di  $F$ , e la corrispondenza è biunivoca senza eccezione se convenzionalmente (*si riguardano tutti i punti all'infinito del piano come*



*uno solo* ossia se) si riguarda la retta all'infinito come un circolo di raggio nullo (corrispondente al raggio di proiezione  $O$  su  $F$ ). I punti di  $S$  esterni ad  $F$  corrispondono a circoli reali di  $\pi$ ; i punti interni a circoli immaginari.

Da questa rappresentazione deduciamo come esempio alcune proprietà dei sistemi di circoli del piano  $\pi$ .

Un piano sega la sfera  $F$  secondo un circolo (reale o no): dunque il luogo dei punti limiti di una rete di circoli è un circolo<sup>16</sup>. Ad un piano esterno ad  $F$  corrisponde in  $\pi$  una rete di circoli il cui cerchio limite è immaginario, ad un piano tangente ad  $F$  una rete che ha un solo punto limite, ad un piano secante una rete che ha un cerchio limite reale.

Possiamo ora vedere cosa corrisponde alla polarità rispetto alla sfera  $F$  nella Geometria dei circoli nel piano  $\pi$ .

Un cerchio reale  $C$  di  $\pi$  si può considerare come elemento del sistema dei cerchi e allora gli corrisponde un punto  $A$  di  $S$  esterno alla sfera  $F$ ; si può invece considerare come luogo di punti (limiti) ed allora gli corrisponde un circolo di  $F$  giacente in un piano  $\alpha$ ; questo rappresenta *una* rete che ha  $C$  come cerchio limite (rete determinata indifferentemente da tre qualunque dei punti di  $C$  considerati come cerchi di raggio nullo). Il punto  $A$  e il piano  $\alpha$  sono punto e piano polare rispetto alla sfera  $F$ . Per vederlo si osservi che un punto di  $C$  è punto base per una rete di circoli in  $\pi$  (costituita da tutti i cerchi per esso), ed è unico punto limite in questa rete; la detta rete contiene  $C$ ; ad essa corrisponde un piano che passa per  $A$  tangente ad  $F$  in un punto di  $\alpha$ , dunque tutti i piani tangenti a  $F$  nei punti del circolo segato da  $\alpha$  passano per  $A$ ; ciò significa appunto che  $A$  è il polo di  $\alpha$  rispetto ad  $F$ .

Si ottiene dunque nel piano  $\pi$  una corrispondenza (polarità) tra cerchi e reti di cerchi, dove ogni cerchio è il luogo dei punti limiti della rete polare: in questa corrispondenza ad ogni fascio di cerchi corrisponde un fascio polare.

Due fasci polari sono in questa relazione: in generale uno di essi possiede due punti base e non punti limiti; l'altro ha come punti limiti i punti base del primo fascio e non ha punti base; in particolare i due fasci possono ambedue esser costituiti dai circoli tangenti in un punto rispettivamente a due rette per questo punto.

Si possono moltiplicare gli esempi per esercizio.

Importa essenzialmente che si osservi come in ogni caso le proprietà dei sistemi lineari di circoli nel piano  $\pi$  ove si considerino in modo speciale i punti di  $\pi$ , appaiono non come proprietà di figure dello spazio  $S$  a sé stesse, ma come proprietà di figure poste in relazione alla  $F$ : nella Geometria dei

---

<sup>16</sup>Ciò si vede subito anche direttamente. Se  $O$  è il centro radicale della rete e  $k$  la potenza di esso rispetto ai cerchi della rete il cerchio limite è quello di centro  $O$  e raggio  $\sqrt{k}$  (immaginario se  $k$  è negativo).

sistemi lineari di cerchi esse si possono fare scaturire introducendo la polarità fra cerchi e reti di cerchi innanzi considerata.

Si può esprimere la distinzione fra le due specie di proprietà dicendo che le prime appartengono alla Geometria del piano ottenuta prendendo come elemento il «cerchio» (e come elemento correlativo la «rete di cerchi»), le seconde appartengono invece alla Geometria del piano ove si prenda per elemento il «punto» (cerchio di raggio nullo). Astrattamente la prima Geometria si può riguardare come la Geometria proiettiva dello spazio, la seconda come la Geometria proiettiva sopra una quadrica nello spazio.

In luogo di considerare i cerchi del piano  $\pi$  come i «punti» di uno spazio astratto si possono invece considerare i cerchi stessi come «piani» e quindi le reti di cerchi come stelle di piani ossia come «punti».

Questo modo di considerare si deduce dal primo ove si passi dalla concezione di un cerchio come elemento del sistema dei cerchi in  $\pi$ , alla concezione di esso come cerchio limite di una rete. Si può avere ancora una rappresentazione della considerazione del sistema dei cerchi in  $\pi$  come del sistema dei piani d'uno spazio, mediante la proiezione stereografica della sfera  $F$  su  $\pi$ , facendo corrispondere ogni cerchio  $C$  del piano al piano secante su  $F$  il cerchio di cui  $C$  è proiezione: questa rappresentazione si deduce da quella posta innanzi mediante la polarità rispetto alla sfera  $F$ . Ai piani (di  $S$ ) secanti  $F$  corrispondono in  $\pi$  cerchi reali, ai piani esterni cerchi immaginari, ai piani tangenti i punti di  $\pi$  (cerchio di raggio nullo): ai punti interni alla sfera  $F$  corrispondono reti di cerchi in  $\pi$  senza cerchio limite e viceversa.

Confrontiamo ora i due modi con cui si è posto il legame tra la Geometria proiettiva dello spazio (punteggiato o di piani). Questi due modi consistono:

1. nel considerare le due Geometrie come due diverse interpretazioni della Geometria proiettiva astratta;
2. nel porre una corrispondenza conveniente mediante la proiezione stereografica della sfera.

Nei rapporti della Geometria proiettiva la sfera può essere indifferentemente sostituita da un'altra quadrica a punti ellittici (proiettata da un ombelico). Sotto l'aspetto proiettivo i due modi indicati sono perfettamente equivalenti e si può dire stabiliscono l'uno a priori, l'altro a posteriori l'identità della Geometria proiettiva dello spazio intuitivo e di quella dei sistemi lineari di cerchi del piano.

Ma dalla proiezione stereografica della sfera si possono dedurre anche molte proprietà *metriche* del sistema dei cerchi del piano in ispecie utilizzando il noto teorema che «la proiezione stereografica della sfera è isogonale

(cioè conserva gli angoli)». Queste proprietà metriche non avrebbero neppure significato nella Geometria dei cerchi che si ottiene interpretando la Geometria proiettiva di uno spazio astratto. Ma potremo porre convenzionalmente in questo spazio astratto le nozioni metriche in guisa che la interpretazione della Geometria metrica così fondata ci conduca ad una Geometria metrica dei cerchi nel piano.

Per facilitare la comprensione di tali convenzioni teniamo presente la proiezione stereografica della sfera  $F$  di  $S$  sul piano  $\pi$  e la conseguente rappresentazione dei piani di  $S$  coi cerchi di  $F$ . Ci restringeremo in ciò che segue ad un breve cenno riservandoci a tornare più tardi sull'argomento.

Volendo qui limitarci a considerare cerchi reali in  $\pi$ , ci limitiamo a considerare in  $S$  i piani corrispondenti cioè i piani seganti la sfera  $F$ : similmente ci limitiamo a considerare in  $\pi$  reti di cerchi prive di cerchio limite, e quindi in  $S$  i punti interni ad  $F$ ; ciò perché avvenga sempre che tre reti di cerchi in  $\pi$  abbiano un cerchio comune (reale).

In  $\pi$  due cerchi che si segano formano un angolo (angolo delle tangenti nel punto comune) cui corrisponde sulla sfera  $F$  un angolo uguale formato dai cerchi sezioni dei piani corrispondenti, noi chiameremo questo (convenzionalmente) *angolo dei due piani*<sup>17</sup>. Un semplice calcolo prova che il valore dell'angolo di due piani  $\alpha\beta$  così definito è proporzionale al logaritmo del birapporto<sup>18</sup> formato dai piani  $\alpha, \beta$ , coi piani immaginari coniugati del fascio  $\alpha\beta$  tangenti alla sfera  $F$ ; cioè è lo stesso che dire «l'angolo di due cerchi  $C_\alpha$  e  $C_\beta$  segantisi in un punto  $A$ , su  $\pi$  o su  $F$ , è proporzionale al logaritmo del birapporto formato dalle tangenti a  $C_\alpha$  e  $C_\beta$  in  $A$  colle rette cicliche del loro piano».

Allora appare naturale di estendere la definizione di angolo di due piani (seganti  $F$ ) in  $S$  al caso in cui i due piani di  $S$  si incontrino in una retta  $\alpha\beta$  esterna ad  $F$ , assumendo questo proporzionale al logaritmo del birapporto  $k$  formato dai due piani coi piani (reali) tangenti ad  $F$  per  $\alpha\beta$ . Ciò equivale ad assumere l'*angolo di due cerchi di  $\pi$  che non si segano proporzionale al logaritmo del birapporto  $k$  che essi formano coi punti limiti (reali) del loro fascio*. Il birapporto  $k$  di quattro cerchi  $C_1, C_2, C_3, C_4$  di un fascio è sempre reale (anche se i cerchi sono immaginari) come risulta dalla rappresentazione di essi coi piani reali d'un fascio in  $S$ ; esso ha il seguente significato: «le polari di un punto del piano  $\pi$  rispetto ai cerchi  $C_1, C_2, C_3, C_4$  formano il birapporto  $k$  nel fascio di raggi cui appartengono». Dopo ciò possiamo

<sup>17</sup>È appena necessario di rilevare come questa definizione convenzionale differisca da quella ordinaria dell'angolo di due piani.

<sup>18</sup>Parlando di questo birapporto, intendiamo fissato convenientemente l'ordine del gruppo dei 4 piani ecc.

estendere nello stesso modo la nozione di angolo a due cerchi immaginari, i quali determinano un fascio coi punti limiti reali.

Si può precisare gli ordini secondo cui vanno valutati i birapporti  $k$  che entrano in considerazione ed il fattore di proporzionalità per cui viene moltiplicato il  $\log k$  in modo che l'angolo di due cerchi reali vari, fra 0 e  $\pi$ , ed invece l'angolo di due cerchi immaginari vari fra 0 e  $\infty$ , essendo ambedue costantemente reali e positivi; in guisa che (il birapporto  $k$  e) l'angolo valutato per due cerchi immaginari cresca indefinitamente quando uno dei due cerchi si avvicina a divenire un punto (cioè il corrispondente piano in  $S$  si avvicina a divenire tangente ad  $F$ ).

Dopo ciò diremo *distanza* di due punti interni ad  $S$ , l'angolo dei due piani polari rispetto ad  $F$  (nel senso definito innanzi); quindi diremo *distanza di due reti di cerchi* prive di cerchio limite, l'angolo dei loro cerchi limiti immaginari: tale distanza è sempre (reale e) positiva; essa varia da 0 a  $\infty$ .

Volgendoci ad esaminare le convenzioni poste vediamo che le espressioni «angolo di due cerchi reali» e «distanza di due reti di cerchi senza cerchio limite (reale)» hanno in ogni caso un significato geometrico spiccato in relazione alla Geometria metrica dei cerchi nel piano, anzi si può dire che la loro nozione deriva da una estensione dell'ordinario concetto dell'angolo formato da due cerchi che si segano. Per conseguenza la Geometria dei cerchi fondata su quelle nozioni (che è la così detta *Geometria dei raggi vettori reciproci*) conterrà delle proprietà che possono riguardarsi come proprietà metriche ordinarie. Ma non si può dire che *viceversa* tutte le relazioni metriche tra cerchi che si considerano nella Geometria elementare trovino posto nella Geometria così fondata, giacché in quella ma non in questa si distinguono le rette (cerchi di raggio infinito) dagli altri cerchi: tale distinzione corrisponderebbe a distinguere nello spazio  $S$  il centro da cui è proiettata su  $\pi$  la sfera  $F$  dagli altri punti di  $F$ .

Per quel che riguarda le nozioni metriche poste in  $S$  e più precisamente nel corpo sferico interno ad  $F$ , vediamo che tali nozioni di angolo di due piani seganti  $F$ , e di distanza di due punti interni ad  $F$  in  $S$  appaiono soltanto convenzionali, e sono in sostanza nozioni della Geometria proiettiva di  $S$  in relazione alla sfera  $F$ . Tuttavia possiamo vedere che la Geometria fondata nel corpo sferico interno ad  $F$  in  $S$ , su quelle nozioni metriche convenzionali, ha molte analogie colla Geometria metrica ordinaria. La ragione di queste analogie si può dire consistere nella esistenza di trasformazioni del corpo sferico  $F$  in sé stesso (corrispondenze biunivoche in esso), analoghe ai movimenti dello spazio: questi *movimenti* del corpo sferico  $F$  verranno definiti convenzionalmente come «omografie di  $F$  che mutano  $F$  in sé stessa»<sup>19</sup>,

<sup>19</sup>Vi sono  $\infty^6$  omografie che mutano in sé stessa una quadrica. In seguito esse saranno

ed è chiaro che essi conservano le distanze e gli angoli (secondo le definizioni convenzionali date innanzi). Nel piano  $\pi$  i movimenti del corpo  $F$  sono rappresentati dalle *trasformazioni puntuali che mutano i circoli in circoli*. Vi è una trasformazione siffatta che muta tre circoli segantisi secondo dati angoli in tre altri qualunque facenti gli stessi mutui angoli. Da ciò si rende chiaro che nella nostra Geometria dei circoli (Geometria dei raggi vettori reciproci), due circoli qualunque sono da considerarsi come *uguali* tranne i cerchi nulli che, venendo qui distinti in modo speciale, possono essere considerati come punti anziché come cerchi.

Dopo ciò si può vedere che tutte le proposizioni fondamentali che compariscono come postulati nella Geometria metrica elementare d'Euclide, escluso il postulato delle parallele, sono valide interpretate convenientemente nella Geometria dei raggi vettori reciproci in  $\pi$  o in quella posta nel corpo sferico  $F$ . Ma secondo la definizione data di «distanza» tutti i punti di  $F$  debbono considerarsi come a distanza infinita rispetto ai punti interni ad  $F$ , e quindi data una retta  $a$  (segante  $F$ ) per ogni punto  $A$  (interno a  $F$ ) passano due rette congiungenti  $A$  colle sezioni di  $a$   $F$  che dobbiamo riguardare come *due parallele* condotte ad  $a$  per  $A$ . Similmente dobbiamo riguardare le reti di circoli del piano, aventi un punto base, come infinitamente distanti dalle reti prive di cerchio limite ecc.

Senza fermarci a verificare la asserita applicabilità delle altre proposizioni metriche, enunciamo la conclusione:

*La Geometria metrica dei circoli (reali) nel piano (Geometria dei raggi vettori reciproci) e ugualmente la Geometria entro un corpo sferico che ne è la rappresentazione (ottenuta, nel modo detto innanzi, dalla proiezione stereografica) si possono riguardare come due diverse interpretazioni della Geometria non euclidea iperbolica astratta.*

Dunque la Geometria dei circoli del piano non è più assimilabile alla Geometria dello spazio intuitivo euclideo nei rapporti metrici.

*Osservazione 1<sup>a</sup>*- Sebbene la data rappresentazione della Geometria non euclidea iperbolica come Geometria di corpo sferico  $F$  sembri lontana dal porgere una immagine intuitiva della Geometria dello spazio supposto iperbolico, si può acquistare un'idea della analogia della nozione convenzionale di distanza posta tra due punti entro  $F$  ecc., colla corrispondente nozione intuitiva, immaginando entro il corpo sferico  $F$  condizioni fisiche opportune (un'idea simile si trova svolta in alcune considerazioni di *Poincaré*). Queste condizioni fisiche debbono essere tali che la temperatura vada decrescendo dal centro alla superficie limite di  $F$  in guisa che i corpi diminuiscano indefinitamente di volume (in modo conveniente) mentre si muovono allontanandosi

---

considerate più da vicino.

dal centro: ciò può immaginarsi in guisa che il concetto di movimento fisico d'un corpo solido in  $F$  corrisponda al concetto convenzionale di movimento come omografia che muta  $F$  in sé stessa. Ne seguirebbe che uno sperimentatore posto entro il corpo sferico darebbe alle nozioni di «distanza» e «angolo» poste convenzionalmente innanzi, l'ordinario significato fisico. Si aggiunga che se la sfera è molto grande egli non avvertirebbe che il postulato delle pa-rallele non è verificato e acquisterebbe del corpo sferico il concetto intuitivo che abbiamo dello spazio.

Questa osservazione deve far riflettere sulla relatività di tutte le nostre conoscenze: il riconoscimento di tale relatività frutto della critica della conoscenza è fondamento del metodo scientifico positivo.

*Osservazione 2<sup>a</sup>*- La Geometria dei raggi vettori reciproci cioè la Geometria metrica dei cerchi precedentemente considerata si può riguardare di fronte alla Geometria elementare del cerchio come una estensione analoga a quella che la Geometria proiettiva presenta relativamente alla retta.

Nella Geometria elementare del piano si considerano come uguali due figure trasformabili una nell'altra (sovrapponibili) con un movimento del piano; nella Geometria proiettiva alla considerazione dei movimenti si sostituisce quella suscettibile di più ampia determinazione delle *proiettività*, trasformazioni puntuali che mutano le rette in rette e si considerano in sostanza come *uguali* due figure *proiettive* cioè trasformabili con una proiettività; nella detta Geometria dei cerchi si sostituiscono ai movimenti le *trasformazioni per raggi vettori reciproci*, che mutano i cerchi in cerchi, e si considerano come *uguali* due figure trasformabili in questo modo. I movimenti, le proiettività e le trasformazioni per raggi vettori reciproci si diranno rispettivamente le *trasformazioni fondamentali* delle tre Geometrie. Ciò che vi è di comune nella *uguaglianza* considerata dalle tre Geometrie, è la sostituibilità di una figura ad un'altra *uguale* nell'ordine delle proprietà che si considerano. Sempre due figure uguali ad una terza sono uguali tra loro, e perciò *componendo* ossia facendo il *prodotto* di due trasformazioni fondamentali di una Geometria si ottiene una trasformazione di questa: per tale proprietà (unita all'esistenza di una trasformazione *inversa* accanto a ciascuna) si dice che le trasformazioni fondamentali di ciascuna di quelle Geometrie formano un *gruppo*: le proprietà che appartengono rispettivamente alle tre Geometrie sono quelle che godono di *carattere invariante* rispetto alle trasformazioni del gruppo (cioè che sono comuni a tutte le figure *uguali* in esse). Su queste osservazioni (dovute al *Klein*) ritorneremo più tardi per dare uno svolgimento molto più ampio a tali concetti.

Basti qui notare per ultimo che il gruppo di trasformazioni della Geometria elementare (movimenti) è contenuto negli altri due gruppi considerati che però sono più ampi: quelle trasformazioni per raggi vettori reciproci che

lasciano fermi i punti all'infinito<sup>20</sup> (i quali qui si considerano come un solo punto) costituiscono le *similitudini* fra cui sono i movimenti. Le proprietà della Geometria piana proiettiva e di quella per raggi vettori reciproci sono proprietà della Geometria elementare ma non viceversa: le proprietà comuni alle prime due Geometrie si possono riguardare come proprietà della Geometria elementare, dove alla considerazione delle figure uguali si è sostituita quella più generale delle figure simili.

Per *notizie storiche* sull'importante sviluppo che ha avuto sotto vari aspetti la Geometria dei cerchi del piano rimandiamo alla prefazione della «Cyclographie» di *Fiedler* (1883).

La considerazione della Geometria dei raggi vettori reciproci nel piano come una interpretazione della Geometria metrica iperbolica dello spazio mediante la rappresentazione data nel corpo sferico, deve essere ricollegata alla grande serie di ricerche sulle determinazioni metrico-proiettive di cui parleremo più tardi.

## 1.9 La Geometria delle involuzioni di 3° ordine sulla retta

Vogliamo parlare della Geometria delle involuzioni di 3° ordine sulla retta; riferiamoci innanzi al caso più semplice e notissimo delle involuzioni di 2° ordine.

Tutte le coppie di punti della retta (reali e immaginarie coniugate) si possono considerare come le «rette» d'un piano astratto: dando poi ad esse il significato intuitivo si viene a porre una corrispondenza biunivoca tra le rette d'un piano  $\pi$  e le coppie di punti d'una retta  $a$ .

Se  $f_1, f_2, f_3$  sono tre forme quadratiche indipendenti, la detta corrispondenza si ottiene semplicemente considerando le  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) una volta come coordinate omogenee d'una coppia

$$\sum u_i f_i = 0$$

su  $a$ , ed un'altra volta come coordinate omogenee d'una retta nel piano  $\pi$ . I punti del piano  $\pi$  rappresentano involuzioni ordinarie (di 1<sup>a</sup> specie e 2° ordine) su  $a$ . Le involuzioni *degeneri* costituite dalle coppie con un punto fisso vengono rappresentate in  $\pi$  dai punti d'una linea algebrica  $C$ ; ma questa è incontrata da una retta in due punti (al più), perché una coppia di punti

---

<sup>20</sup>Tornando alla rappresentazione data innanzi nel corpo sferico  $F$ , si avrebbe fra le omografie che mutano in sé la sfera  $F$  quelle che lasciano fermo il centro di proiezione.

su  $a$  appartiene a due involuzioni degeneri: dunque la  $C$  è una conica: le sue tangenti rappresentano i punti di  $a$  considerati come coppie coincidenti.

A questa corrispondenza tra le coppie di punti d'una conica e i punti d'una retta si giunge anche semplicemente proiettando una conica da un punto su una retta del suo piano.

Estendendo le cose dette si possono chiamare piani di uno spazio astratto le terne di punti d'una retta: le involuzioni di  $2^a$  specie (e  $3^o$  ordine) sono i punti dello spazio astratto. Ciò equivale a considerare una corrispondenza tra i piani dello spazio  $S$  e le terne di punti su  $a$ , ottenuta interpretando le  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) una volta come coordinate omogenee dei piani di  $S$  ed un'altra volta come coordinate della terna di punti

$$\sum u_i f_i = 0$$

essendo  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) quattro forme omogenee di  $3^o$  grado in due variabili. Ad un punto della retta  $a$  riguardato come punto (fisso) per  $\infty^2$  terne costituenti una particolare involuzione di  $2^a$  specie  $I$  corrisponde una stella di piani ossia un (particolare) punto in  $S$ . Quindi ai punti di  $a$  corrispondono in  $S$  i punti d'una linea algebrica che ha comuni con un piano tre punti (perché una terna di punti su  $a$  appartiene a tre particolari involuzioni di  $2^a$  specie,  $I$ ); la nominata linea di  $S$  è dunque una cubica gobba  $C$ . Un punto di  $a$  si può anche riguardare come una terna costituita da un punto triplo ed allora gli corrisponde un piano di  $S$ , osculatore alla cubica  $C$ : il punto di contatto di questo piano con  $C$  è il punto che corrisponde a quello di  $a$  concepito come punto fisso d'una involuzione di  $2^a$  specie.

La Geometria delle involuzioni di  $3^o$  ordine su  $a$  si può considerare una Geometria proiettiva di  $S$ , ma se nella prima vengono considerate proprietà in cui un punto (terna di punti coincidenti) viene considerato in modo diverso dalle altre terne, non si hanno in  $S$  proprietà proiettive delle figure a sé stesse, ma proprietà delle figure in relazione alla cubica  $C$ .

Si osservi come la precedente interpretazione data alla Geometria proiettiva astratta può servire opportunamente a definire la cubica gobba  $C$  e quindi riesce utile anche pel solo studio della Geometria dello spazio. Sarebbe facilissimo dedurre di qui le principali proprietà della cubica  $C$ . Ad esempio tutti i fasci di piani proiettanti da *corde* (congiungenti due punti reali o no di  $C$ ) i punti di  $C$ , risultano riferiti proiettivamente alla retta  $a$ , dove si aggiungano ai suoi punti delle rette fisse: così si dedurrebbe la generazione di  $C$  come luogo dei punti d'intersezione dei piani omologhi di tre fasci proiettivi (dove non vi sono tre piani omologhi passanti per una retta). Similmente si dedurrebbe la generazione della cubica come luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi incidenti di due stelle omografiche (senza elementi comuni uniti).



Si osservi poi come la corrispondenza proiettiva posta tra i punti di  $C$  e i punti di  $a$  (resultante da quella fra i piani dello spazio e le terne di punti di  $a$ ), si può ottenere direttamente proiettando la cubica  $C$  su  $a$  da una sua corda.

A mostrare l'utilità che si può trarre dalla rappresentazione accennata, prendiamo in esame la *polarità* rispetto alla cubica  $C$  in  $S$ . Un piano generico  $\alpha$  dello spazio incontra  $C$  in tre punti, ed i tre piani osculatori a  $C$  in questi si segano in un punto  $A$  detto *polo* di  $\alpha$ : come polo d'un piano tangente a  $C$  si può assumere l'intersezione della tangente col piano osculatore nel punto non di contatto, e come polo d'un piano osculatore il punto di osculo. Se vogliamo tradurre questa costruzione spaziale sulla retta  $a$  dobbiamo far corrispondere ad ogni terna di punti  $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ ,  $(\alpha_{21}, \alpha_{22})$ ,  $(\alpha_{31}, \alpha_{32})$  data dall'equazione

$$f(x_1, x_2) = \sum a_{3-i,i} x_1^{3-i} x_2^i = 0, \quad (a_{s,i} = a_{i,s})$$

l'involuzione definita dai punti della terna contati tre volte

$$\lambda_1(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2)^3 + \lambda_2(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2)^3 + \lambda_3(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2)^3 = 0:$$

i gruppi di questa involuzione si dicono *armonici* al gruppo dato  $f = 0$ . Cercando le condizioni analitiche perché un gruppo di equazione

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum b_{3-i,i} x_1^{3-i} x_2^i = 0, \quad (b_{s,i} = b_{i,s})$$

sia armonico ad  $f = 0$ , si trova l'equazione di condizione

$$\sum (-1)^i \binom{3}{i} a_{3-i,i} b_{i,3-i} = 0. \quad (1)$$

Questa ci mostra che le terne armoniche a due terne sono armoniche a tutte quelle dell'involuzione di 1<sup>a</sup> specie che esse determinano, dunque intanto la polarità rispetto alla cubica  $C$  in  $S$  è una correlazione. Inoltre la (1) è identicamente soddisfatta ponendo

$$b_{i,3-i} = a_{i,3-i} \quad (= a_{3-i,i});$$

vale a dire ogni terna di punti è armonica a sé stessa; questo risultato s'interpreta in  $S$  dicendo che ogni piano appartiene al suo polo rispetto alla cubica  $C$ , ossia dà il noto teorema che «i piani osculatori in tre punti della cubica gobba s'incontrano sul piano dei tre punti».

Si avverta che i calcoli (molto semplici) precedentemente accennati riescono di più facile effettuazione facendo uso della notazione simbolica di *Clebsch-Aronhold*. Ma di ciò e di qualche notizia storica sull'argomento ci proponiamo di parlare più tardi estendendo queste considerazioni a involuzioni di  $n^\circ$  ordine.

## 1.10 Interpretazione della Geometria proiettiva astratta come teoria dei sistemi lineari di proiettività sulla retta

Una proiettività sopra una retta è data da una relazione bilineare tra le coordinate lineari omogenee di due punti corrispondenti  $(x_1, x_2)$   $(y_1, y_2)$ ,

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum a_{ik} x_i y_k = 0 \quad (i = 1, 2, k = 1, 2).$$

Se  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$ ,  $f_4 = 0$  sono le equazioni di quattro proiettività non in particolare relazione fra loro (*indipendenti*), tra le  $f_1, f_2, f_3, f_4$  non sussiste una relazione lineare identica. Allora ogni proiettività sulla retta può rappresentarsi con una equazione

$$f = \sum_1^4 \lambda_i f_i = 0$$

dove le  $\lambda_i$  sono parametri. Si possono estendere alle forme  $f$  (bilineari) in due serie di variabili le denominazioni di *sistemi lineari* poste innanzi, ed applicare le stesse denominazioni alle proiettività rappresentate sulla retta: si potrà quindi dire che esse formano un sistema lineare  $\infty^3$ , nel quale si possono considerare *reti* e *fasci* di *proiettività* rappresentati da equazioni della forma

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

e rispettivamente

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Al concetto di fascio e rete di proiettività sulla retta si può giungere anche indipendentemente dalle precedenti considerazioni analitiche. Ciò partendo dall'osservazione che tutte le involuzioni sulla retta formano una rete.

A tal fine si definiscano come *armoniche* due proiettività  $\pi, T$ , quando il prodotto  $T^{-1}\pi$  è una involuzione: tutte le proiettività armoniche ad una data formano una rete: le proiettività armoniche a due date formano un fascio; esse sono anche armoniche a tutte quelle del fascio delle due date. Così si può fare una teoria sintetica dei sistemi lineari di proiettività sulla retta. Una siffatta teoria è sviluppata elementarmente dal *Segre* nel lavoro «*Note sur les omographies binaires et leurs faisceaux*» (Crelle C).

Comunque sia stata posta la teoria dei sistemi lineari di proiettività sulla retta (e basta riferirsi alle definizioni analitiche perché la cosa riesca subito chiara), si può (analogamente a ciò che è stato detto nel paragrafo precedente) verificare che pei sistemi lineari di proiettività sulla retta valgono le

proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva dello spazio, ove si cambino i «punti», le «rette» e i «piani» rispettivamente in «proiettività (sopra una data retta)», «fasci di proiettività», «reti di proiettività»: pertanto deduciamo: *La Geometria proiettiva astratta dello spazio può interpretarsi anche come una Geometria dei sistemi lineari di proiettività sulla retta.*

*Stephanos* (Math. Annalen XXII) e *Aschieri* (Istituto lombardo 1889) considerando appunto le proiettività sulla retta come i «punti» di uno spazio (astratto) hanno applicato la Geometria proiettiva ordinaria a dedurre proprietà dei sistemi lineari di esse.

Se

$$f_i(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sono quattro proiettività indipendenti sulla retta  $a$ , e quindi

$$\sum \lambda_i f_i = 0$$

è l'equazione d'una qualunque proiettività sulla retta  $a$ , le  $\lambda_i$  (coordinate d'una proiettività) possono essere interpretate come coordinate di un punto dello spazio  $S$ : ciò rende effettivo il passaggio dalla Geometria proiettiva astratta alla Geometria dei sistemi lineari di proiettività sulla retta.

Si noti che alle proiettività degeneri sulla retta  $a$  corrispondono in  $S$  i punti d'una quadrica  $Q$  la cui equazione (posto  $f_i = \sum a_{ks}^{(i)} x_k y_s$ ) si ottiene ponendo il discriminante

$$\begin{vmatrix} \sum_1^4 a_{11}^{(i)} \lambda_i & \sum_1^4 a_{12}^{(i)} \lambda_i \\ \sum_1^4 a_{21}^{(i)} \lambda_i & \sum_1^4 a_{22}^{(i)} \lambda_i \end{vmatrix} = 0.$$

Allora si vedrebbe subito che due punti reciproci di  $S$  rispetto a  $Q$  rappresentano due proiettività armoniche su  $a$ : in particolare il piano  $\alpha$  di  $S$ , rappresentante la rete delle involuzioni su  $a$ , è il piano polare del punto  $A$  che rappresenta l'identità. Due proiettività inverse su  $a$  sono rappresentate in  $S$  da punti coniugati nella omologia armonica di centro  $A$  e piano  $\alpha$  ecc.

Le proprietà dei sistemi lineari di proiettività dove si considerano i punti della retta  $a$ , e si ha particolare riguardo al carattere d'una proiettività di essere involutoria ecc. non appaiono come proprietà della Geometria di  $S$  in sé stessa ma come proprietà di essa in relazione alla quadrica  $Q$ , al punto  $A$  e al piano  $\alpha$ . Ciò sarà meglio illuminato in seguito con altre considerazioni.

## 1.11 Iperspazi

Il vantaggio che si può trarre dal concetto della Geometria astratta è sufficientemente dimostrato dagli esempi precedenti: in seguito ne saranno viste

applicazioni più ampie. Fermiamoci ora a fare una osservazione di grande importanza che permette di estendere anche molto di più la portata di quella Geometria.

Se la Geometria astratta si interpreta come quella dello spazio intuitivo troviamo delle limitazioni in certe operazioni, che più non sussistono dando alla Geometria astratta una diversa interpretazione. Noi possiamo proiettare una retta da un punto esterno e dar luogo ad un piano; proiettare il piano da un punto esterno e generare l'intero spazio: ma dopo ciò non concepiamo l'esistenza di punti intuitivi al di fuori dello spazio, e quindi l'operazione del proiettare ha qui un limite nella natura stessa della nostra intuizione. Eppure sotto l'aspetto logico l'esistenza d'un punto esterno allo spazio pel quale possano condursi infinite rette proiettanti i punti di esso, è una ipotesi compatibile coi postulati precedenti. Non solo, ma questa ipotesi ha un significato concreto se si interpreta la Geometria proiettiva dello spazio come quella d'un sistema lineare di gruppi di curve piane o di superficie algebriche d'ordine  $> 1$ , o come una involuzione di ordine  $n > 3$  sulla retta. Nessuna ragione dunque di limitare la Geometria proiettiva astratta allo *spazio di tre dimensioni* escludendo l'esistenza di punti esterni ad esso: possiamo invece sviluppare la Geometria proiettiva astratta come quella di uno *spazio ad  $n$  dimensioni (iperspazio)* (dove  $n$  è un intero qualunque); avvertendo che per  $n > 3$  dobbiamo cercarne l'interpretazione concreta non più nello spazio intuitivo ma in altre varietà di elementi, ad esempio nei sistemi lineari  $\infty^n$  di curve piane, o di superficie algebriche di dato ordine (assai alto), o nella involuzione di ennesima specie (ed ordine  $\geq n$ ) sulla retta.

Possiamo precisare il concetto di spazio ad  $n$  dimensioni  $S_n$  (inteso in senso proiettivo) partendo da una particolare delle interpretazioni accennate che può ricevere la sua Geometria. Riferiamoci per esempio alla varietà di tutti i «gruppi di  $n$  punti» di una retta: un gruppo verrà considerato come elemento «punto» di un  $S_n$ . Chiameremo  $S_r$  ( $r < n$ ) contenuto nello  $S_n$  una involuzione di specie  $r$  e d'ordine  $n$  sulla retta; «retta» e «piano» un fascio e rispettivamente una rete di tali gruppi.

Allora sussistono le proposizioni:

Due punti dello  $S_n$  determinano *una* retta di  $S_n$  a cui appartengono.

In un  $S_n$ : proiettando tutti i punti d'una (qualunque) retta di  $S_n$  da un punto esterno (cioè considerando le rette determinate da essi e dal punto esterno) si genera un piano in  $S_n$  (come luogo dei punti di queste rette):

proiettando tutti i punti di un piano di  $S_n$  da un punto esterno si genera un  $S_4$  ecc.

In generale:

Proiettando tutti i punti di un (qualunque)  $S_r$  di  $S_n$  ( $r < n$ ) da un punto esterno si genera un  $S_{r+1}$  in  $S_n$ .

Valgono in un  $S_3$  di  $S_n$  tutte le proposizioni della Geometria proiettiva ordinaria (nella quale si prescinde da concetti metrici).

Siffatte proprietà (che saranno più ampiamente discusse nel seguito) possono provvisoriamente assumersi come definizione di un  $S_n$  astratto (inteso in senso proiettivo) in quanto esse riducono la definizione di un  $S_n$  a quella d'un  $S_{n-1}$ , e (in modo ricorrente) a quella degli  $S_3$ : esse possono essere immediatamente riconosciute vere ove allo  $S_n$  si dia l'interpretazione di varietà dei gruppi di  $n$  punti sopra una retta.

Così riguardo alla 1<sup>a</sup> proposizione si osservi che se

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0$$

sono le equazioni di due gruppi di  $n$  punti sulla retta, i due gruppi determinano l'involuzione di 1<sup>a</sup> specie

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Se  $f_3 = 0$  è un gruppo esterno ad essa, l'insieme delle involuzioni di 1<sup>a</sup> specie (proiettanti da esso il gruppo di quella prima nominata)

$$a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) + \lambda_3 f_3 = 0$$

costituisce la involuzione di 2<sup>a</sup> specie

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \quad \text{ecc.}$$

In modo del tutto simile può verificarsi che gli elementi (curve o superficie) d'un sistema lineare  $\infty^n$  di curve piane o di superficie algebriche di dato ordine, si possono considerare come i «punti» di un  $S_n$  astratto (definito nel senso proiettivo detto innanzi). Così per esempio tutte le coniche del piano formano un sistema lineare  $\infty^5$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5 + \lambda_6 f_6 = 0$$

dove le  $f_i(x_1, x_2, x_3) = 0$  sono sei coniche indipendenti; pertanto il sistema di tutte le coniche di un piano può riguardarsi come una immagine concreta dello  $S_5$  astratto avente come elementi «punti» le coniche del piano.

Ugualmente il sistema di tutte le sfere dello spazio può riguardarsi come un  $S_4$  ecc. Qui si vede anche la possibilità di porre negli iperspazi le nozioni metriche, e di avere così una estensione della Geometria metrica: ciò si ottiene definendo in modo opportuno la *distanza* di due punti, quindi l'*angolo* di due rette ecc.: così la Geometria delle sfere, analoga a quella dei circoli, darebbe luogo ad una estensione ad  $S_4$  della Geometria metrica non euclidea di  $S_3$ .

Ma sull'argomento delle nozioni metriche torneremo più tardi: si ritenga per ora un  $S_n$  definito soltanto in modo proiettivo.

Degli  $S_3$  contenuti in un  $S_n$  abbiam detto che per essi debbono valere tutte le proprietà della Geometria proiettiva ordinaria: ognuno di questi  $S_3$  può dunque considerarsi sotto l'aspetto proiettivo come uno spazio intuitivo. Ma qui deve farsi un'osservazione. Abbiam supposto che nella Geometria di un  $S_3$  astratto valgano le proprietà proiettive inerenti allo spazio intuitivo, dato ad esse un significato puramente logico. Viceversa finché si sviluppa la Geometria proiettiva astratta di  $S_3$  partendo dalle proposizioni fondamentali introdotte, questa trova la sua legittima interpretazione così nello spazio intuitivo come nei sistemi lineari di curve e superficie, nelle involuzioni di  $n^a$  specie, ecc. Ma quando si svolga la Geometria di un  $S_3$  tenendo conto delle ipotesi che esso è contenuto in un  $S_n$  con  $n > 3$ , cioè operando costruzioni che escono dallo  $S_3$ , sorge il dubbio della legittimità di interpretare i risultati ottenuti come teoremi relativi allo spazio intuitivo, ferma pur restando la loro interpretazione in altri casi ad esempio per le involuzioni  $\infty^3$  di gruppi di  $n$  punti ecc.

Per comprendere il valore della riflessione precedente basta pensare al fatto che (per quanto sembra) il teorema di Desargues dei triangoli omologici nel piano si dimostra soltanto con costruzioni spaziali, tantoché apparirebbe come un nuovo postulato nella Geometria piana<sup>21</sup>.

È dunque naturale di pensare analogamente che non si possa sviluppare la Geometria di un  $S_3$  considerandolo immerso in un  $S_n$  con  $n > 3$ , senza introdurre implicitamente qualche nuovo postulato nella Geometria dello  $S_3$ , postulato che potrebbe anche dubitarsi non trovare conferma nello spazio intuitivo. Ma, rilevato il valore del dubbio, ci affrettiamo a ricavare che la questione viene risolta dall'osservare la possibilità di porre una proiettività tra lo  $S_3$  intuitivo ed uno  $S_3$  contenuto in uno  $S_n$ ; invero tale proiettività permette di trasportare dall'uno all'altro  $S_3$  le proprietà proiettive indipendentemente dal loro modo di dimostrazione<sup>22</sup>. Così vengono giustificate le applicazioni che degli spazi a più dimensioni  $S_n$  vengono fatte allo spazio intuitivo concepito come contenuto in uno  $S_n$ ; applicazioni che potremo dire *dirette*, e che permettono di trarre dagli spazi a più dimensioni il profitto analogo a quello che nella Geometria piana si trae dall'uso di considerazioni spaziali.

Contro tali applicazioni dirette degli iperspazi si sono levate le maggiori obiezioni alla Geometria iperspaziale, giacché nulla poteva dirsi finché essa rimaneva la Geometria dei sistemi lineari di curve o superficie o di al-

---

<sup>21</sup>Cfr. Klein «Ueber di sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie» (Math. Ann. IV).

<sup>22</sup>Cfr. Segre «Rivista di Matematica - Vol. I».

tri enti contenuti nel nostro spazio. Ma la questione della possibilità delle applicazioni dirette degli iperspazi allo spazio intuitivo è stata spesso confusa colla questione (fisica o filosofica ma non matematica) della possibilità oggettiva di spazi a più dimensioni contenenti il nostro. Ben diversa è la questione matematica precedentemente posta. Essa è perfettamente analoga alle questioni cui ha dato luogo ogni successivo ampliamento del campo dei numeri. Basta aggiungere ai numeri interi (concepiti come rappresentanti di una classe di grandezze concrete) i numeri fratti, per trovare dei casi in cui a tali numeri fratti non si può dare alcun significato concreto (per esempio ove il numero indichi quello di una riunione di uomini): ciò non toglie che i numeri fratti possano esser definiti nel campo dei numeri astratti e ricevere la loro interpretazione concreta in molti altri casi: il matematico però li adopera indifferentemente anche in questioni ove essi non hanno un significato concreto come provenienti da operazioni sui numeri interi dati, che altrimenti dovrebbero ritenersi impossibili; e se nel risultato finale compariscono dei numeri interi li interpreta dando loro il relativo significato concreto. Siffatto modo di operare è perfettamente legittimato ove si pensi al modo astratto con cui può svilupparsi l'aritmetica partendo dal concetto di numero intero come dato a priori e ponendo il concetto di numero fratto con definizioni logiche (sviluppando cioè l'aritmetica col convenzionalismo). A nessuno verrebbe in mente che l'applicazione dei numeri fratti nel calcolo statistico potesse esigere come fondamento della sua giustificazione la possibilità di frazionare gli uomini.

Le stesse osservazioni si ripetono analogamente rispetto all'introduzione nel campo dei numeri, dei numeri irrazionali, negativi e complessi. Tale introduzione riceve una prima applicazione ove al numero astratto si dà un significato concreto conveniente come rappresentante di una classe opportuna di enti (ad esempio quando si dà ai numeri reali il significato di ascisse sulla retta, ai numeri complessi il significato di indici dei punti del piano complesso): ma una seconda applicazione non meno importante si ha operando nel campo ampliato dei numeri anche se ai numeri viene attribuito un significato concreto più ristretto ed interpretando in questo senso i risultati, ove sia possibile.

Questa seconda specie di applicazioni è giustificata pienamente in tutta la sua estensione dopo la teoria analitica astratta dei numeri e la riduzione del concetto generale di numero al concetto di intero, perché ogni ragionamento nel campo dei numeri complessi si può tradurre in un ragionamento fatto nel solo campo dei numeri interi.

Una giustificazione del tutto analoga è quella che vien data dalle menzionate applicazioni dirette degli iperspazi allo spazio intuitivo, sicché nel trattare la Geometria degli iperspazi potremo indifferentemente concepire come ele-

menti (punti) di essi degli enti geometrici di arbitraria natura o i punti intuitivi, riguardando in quest'ultimo caso ogni  $S_3$  immerso nell'iperspazio che si considera come uno spazio intuitivo. Ciò, giova ripeterlo, affatto indipendentemente dalla questione della possibile esistenza reale di iperspazi, o anche soltanto della possibilità di formarsi di uno spazio a più dimensioni un concetto intuitivo desunto dall'ordine della sensibilità. *La Geometria astratta degli iperspazi riceverà così una infinità di svariate interpretazioni ed applicazioni geometriche; essa trarrà aiuto nel suo svolgimento da infinite forme diverse dell'intuizione, tenendole presenti tutte ad un tempo; quindi applicherà a diversi campi ciò che è stato riconosciuto in un campo particolare dove l'intuizione ha servito di guida indirizzando il pensiero ad una serie di ragionamenti logici che dall'intuizione primitiva riescono indipendenti.*

## 1.12 Interpretazione analitica della Geometria astratta

Abbiamo parlato fino ad ora di interpretazioni geometriche della Geometria astratta: parliamo brevemente di altre interpretazioni che essa può ricevere. In primo luogo l'interpretazione analitica.

È noto come la Geometria analitica di *Des Cartes* permetta di tradurre ogni risultato analitico in un risultato geometrico e viceversa. Ciò si ottiene mediante l'uso delle coordinate che forniscono, si può dire, il meccanismo di trasformazione. Mediante queste si viene a stabilire un parallelismo tra la Geometria e l'Analisi, parallelismo che coll'uso degli iperspazi non trova più alcuna limitazione nel numero delle variabili che vengono adoperate. Invero si consideri per esempio un sistema lineare  $\infty^n$  di enti

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0:$$

le  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  si possono riguardare come *coordinate omogenee di un ente del sistema ossia dei punti di uno spazio (astratto)  $S_n$* : in luogo delle  $n + 1$   $\lambda_i$  possiamo considerare come coordinate non omogenee delle superficie del sistema o dei punti dello spazio astratto, gli  $n$  rapporti  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$  ( $i = 2, 3, \dots, n + 1$ ); con riguardo allora ai valori infiniti di essi.

Comunque coll'uso di tali coordinate la Geometria dello  $S_n$  si trasforma nell'Analisi delle  $n + 1$  variabili omogenee o delle  $n$  non omogenee.

Vediamo di scorgere una ragione più intima di una tale trasformazione.

Fissiamo l'attenzione sopra la Geometria proiettiva dello  $S_3$  astratto. Noi possiamo convenire che l'ente designato dapprima astrattamente col nome di «punto» sia una volta il «punto intuitivo», un'altra volta «il gruppo dei



mutui rapporti di quattro variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4$ » cioè il così detto «punto analitico (di un  $S_3$ )». È chiaro che nulla vi è da obiettare se questa interpretazione esce dal campo geometrico propriamente detto, perché il nostro elemento fondamentale astratto dello  $S_3$  è solo vincolato da alcune relazioni logiche elementari, non affatto nella sua natura: resta soltanto da giustificare tale interpretazione verificando che (con designazione opportuna degli altri enti fondamentali) quelle relazioni logiche sono ancora verificate. Per ciò fissiamo ulteriormente che gli enti dello  $S_3$  astratto designati ivi coi nomi di «piano» e «retta», ai quali si dà nel primo caso l'ordinario significato intuitivo, denotino nel secondo caso rispettivamente:

a) l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea

$$u_x = \sum_1^4 u_i x_i = 0 \quad (\text{piano analitico}):$$

b) l'insieme delle soluzioni comuni a due equazioni lineari omogenee

$$u_x = \sum_1^4 u_i x_i, \quad v_x = \sum_1^4 v_i x_i = 0$$

dove non è identicamente

$$v_x \equiv u_x \quad (\text{retta analitica}).$$

Dopo ciò tutte le proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva di  $S_3$  (concepita come astratta) ricevono nel 1° caso l'interpretazione intuitiva ordinaria: nel 2° caso si interpretano come le proprietà elementari dei sistemi di equazioni lineari omogenee. Su questa interpretazione non importa insistere perché le proprietà geometriche ed analitiche che vengono a contrapporsi come i due lati di una unica proposizione della Geometria astratta di  $S_3$ , sono notissime e vengono contrapposte come traduzione le une delle altre nella Geometria analitica.

Si interpreti la Geometria astratta di  $S_3$  come la Geometria dei punti analitici, avremo un altro caso in cui potremo concepire punti esterni allo  $S_3$ : l'estensione che si ha nella Geometria considerando spazi a più dimensioni ci apparirà del tutto analoga a quella che si ha nell'Analisi introducendo la considerazione di un maggior numero di variabili invero nell'insieme dei gruppi di variabili omogenee  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  (dove  $n > 3$ ), l'insieme dei gruppi  $x_1, x_2, x_3, x_4$  si può considerare come quello dei gruppi  $x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0, \dots$

Pertanto generalizzando ciò che prima è stato detto per  $n = 3^{23}$  potremo dire:

*La Geometria proiettiva astratta di un  $S_n$  può anche interpretarsi come l'Algebra delle sostituzioni lineari sopra  $n + 1$  variabili omogenee.*

Si può ricavare di qui una nuova definizione (analitica) degli  $S_n$ . Si osservi per ciò che se tra gli elementi di una qualsiasi varietà  $V$  e i punti di un  $S_n$  vien posta una corrispondenza biunivoca, anche la  $V$  potrà considerarsi come un  $S_n$  ove si chiamino  $S_r$  in esso i sistemi di elementi che corrispondono agli  $S_r$  di  $S_n$ : invero con ciò si viene a modificare soltanto la natura dei «punti» dello  $S_n$  da cui facciamo astrazione.

Ciò posto si potrà dire:

*una varietà di elementi (punti) di natura arbitraria che corrispondono biunivocamente ai gruppi di mutui rapporti di  $n + 1$  parametri si può riguardare come un  $S_n$ : gli  $n + 1$  parametri si potranno considerare come coordinate proiettive dei punti dello  $S_n$ . Ove si riguardi questa come una definizione degli  $S_n$  è da avvertirsi che in questa definizione gli insiemi di elementi dello  $S_n$  designati col nome di  $S_r$  non sono dati a priori collo  $S_n$ , ma solo in relazione colla data rappresentazione dei punti di  $S_n$  con coordinate. Si avverta che poi ogni  $S_r$  contenuto in  $S_n$  è capace di essere ugualmente definito rappresentando i suoi punti con  $r + 1$  coordinate omogenee. Si può domandare se viceversa dato un  $S_n$  definito geometricamente come nel §11, e dati quindi (a priori) gli  $S_r$  contenuti in  $S_n$  si può rappresentare i punti dello  $S_n$  mediante coordinate proiettive omogenee in guisa che gli  $S_{n-1}$  vengano rappresentati da equazioni lineari ecc.. A tale questione risponderemo affermativamente in seguito: ne risulterà l'identità delle due definizioni di  $S_n$  date nel §11 (geometricamente) e in questo (analiticamente).*

Il precedente raffronto tra l'Analisi e la Geometria si può ripetere anche relativamente alla estensione della Geometria metrica negli iperspazi. Invero considerazioni simili alle precedenti relative all'analisi dei postulati metrici dello spazio intuitivo ( $S_3$ ) ci permettono di tradurre le proposizioni metriche di esso in altre relative allo studio analitico dei gruppi di tre numeri  $x_1, x_2, x_3$ ; compariranno qui le funzioni lineari non omogenee di esse (o più precisamente gli insiemi di valori che le annullano) in luogo dei piani propri ecc.; e comparirà ancora l'espressione

$$\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$$

a rappresentare ciò che per lo  $S_3$  intuitivo si chiama *distanza* di due punti (e precisamente dei punti  $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ ). Questo è del resto soltanto

---

<sup>23</sup>Su tale generalizzazione torneremo in seguito.

un modo diverso di concepire quel legame tra la Geometria dello spazio intuitivo e l'Analisi nel campo di tre variabili (non omogenee) che viene fissato dall'uso delle coordinate cartesiane.

Vogliasi ora una estensione del concetto dello spazio metrico; si potrà per esempio considerare come un  $S_n$  metrico ( $n > 3$ ) l'insieme dei gruppi di  $n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ : chiamare  $S_{n-1}$  proprio nello  $S_n$  l'insieme dei valori delle dette variabili che soddisfano una equazione lineare (omogenea o no) ecc.; chiamare poi *distanza* fra due punti  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  l'espressione

$$\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$$

ed analogamente definire (in conseguenza del concetto di distanza) una espressione che venga denominata *angolo* di due rette ecc. Così si ha l'estensione diretta della Geometria metrica euclidea agli spazi a più dimensioni. Gli  $S_n$  in cui vale tale Geometria si diranno  $S_n$  *euclidei* (sottinteso «metrici»): gli  $S_3$  contenuti in tali  $S_n$  sono del tutto identici allo  $S_3$  intuitivo (metrico) astrazione fatta dalla natura dell'elemento «punto». Si avverta che nel seguito parlando di  $S_n$  ove non si aggiunga altro si supporrà lo  $S_n$  definito soltanto in modo proiettivo in guisa che manchino in esso le nozioni metriche.

È opportuno rilevare esplicitamente ciò che già appare dalle precedenti considerazioni, cioè che la *Geometria astratta si può identificare coll'Analisi*. Appunto per ciò:

*Le due scienze debbono coltivarsi insieme. Non soltanto ne deriverà alla Geometria il vantaggio di una generalità e di una potenza di metodi sperimentatisi ormai da Des Cartes in poi; ma ugualmente l'Analisi potrà essere indirizzata alle più belle scoperte dalla feconda intuizione geometrica, come Monge, Clebsch, Klein e Lie hanno insegnato.*

Per le cose dette apparirà naturale che nel seguito (pur riferendoci di preferenza ad interpretazioni geometriche intuitive) consideriamo indifferentemente gli enti definiti geometricamente o analiticamente.

Sulla identità della Geometria e dell'Analisi abbiamo insistito perché il formarsi in questi ultimi tempi i *indirizzi puri* ove si svolge un ramo della Matematica senza ricorrere a concetti di altri rami (come per esempio la fondazione di un'Analisi pura con *Weierstrass*, di una Geometria pura con *Steiner, Chasles, Staudt*, ecc.) ha fatto nascere talvolta un esclusivismo dannoso pel quale si vorrebbe sistematicamente bandito dalla Geometria ogni concetto analitico e viceversa. Non intendiamo di togliere importanza a siffatti indirizzi puri: basti rilevare il perfezionamento dei *metodi* matematici che così si è ottenuto: in particolare il metodo sintetico che ha condotto la scienza a risultati così splendidi come quelli che nella teoria degli enti algebrici si sono ottenuti in Italia dal *Cremona* in poi non sarebbe assorto ad

un grado così elevato senza la precedente tendenza a fare della Geometria indipendentemente dall'Analisi. Ma non è fuor di luogo contrapporre ai progressi accennati quelli portati invece da un conveniente ravvicinamento dei concetti geometrici ed analitici e poiché si è alluso alla teoria degli enti algebrici, accennare ai risultati così ottenuti nello stesso periodo da *Clebsch*, *Noether*, ecc.

La tendenza a formare altrettanti indirizzi matematici puri, basati sul minimo numero di concetti, come è conforme alla legge generale d'evoluzione della scienza, così ha avuto negli ultimi tempi un ufficio storico ben determinato di alta importanza; ma oggi sembra che questo ufficio storico debba oramai considerarsi in gran parte come relativo al passato e che nell'attuale momento più ancora vi sia da fare per collegare in un tutto organico diversi indirizzi e profittando dei metodi svariati tendere di regola con tutte le forze al *resultato*, il quale appartiene non ad un ramo della Matematica ma alla Matematica intera, se pure non si voglia porre in relazione al progresso della scienza in generale.

A confronto delle opinioni espresse rimanderemo al lavoro di *Segre* «Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche»<sup>24</sup>; ivi sono esposte delle larghe vedute sugli indirizzi geometrici che potranno utilmente servire di guida ai giovani nelle loro ricerche.

### 1.13 Varietà più volte estese

Vogliamo ora esaminare come si possa giungere alla estensione del concetto di *dimensioni* dello spazio per un'altra via, molto più generale.

Occorre che ricordiamo prima alcune nozioni elementari della *teoria della connessione*.

Nello spazio intuitivo  $S_3$  «un punto che si muove descrive una *linea*». Questa affermazione di un fatto intuitivo è molto complessa poiché in essa si racchiudono implicitamente:

1. la nozione di un *ordine (naturale)* di successione dei punti della linea, da cui scaturisce il concetto di *segmento*; il postulato della *continuità* (di Dedekind) relativo al detto ordine ecc.
2. la nozione di *distanza* di due punti sopra la linea o *lunghezza* di un segmento (ove si riguardi il moto del punto come *uniforme*):

---

<sup>24</sup>Rivista di Matematica - Volume I.

3. le varie nozioni che stabiliscono le relazioni tra la linea e il rimanente spazio  $S_3$ ; così la continuità della linea in  $S_3$ <sup>25</sup>, l'esistenza della *tangente* in ogni punto (direzione del moto) ecc.

Isoliamo col pensiero una linea facendo astrazione dal rimanente spazio; restano inerenti a questo concetto intuitivo di linea soltanto le nozioni 1), 2). In questo ordine d'idee due linee vengono concepite come identiche allorché si ottengono l'una dall'altra con una *deformazione continua* senza estensione; intendiamo che nella deformazione continua della linea (concepita come un filo rigido) mai due punti vengano a sovrapporsi o a staccarsi.

Prescindiamo ulteriormente dalla nozione 2): ciò equivale a concepire una linea in sé stessa non più come un filo rigido, ma come un filo di variabile elasticità; restano inerenti alla linea soltanto le nozioni 1), e rispetto ad esse due linee sono da riguardarsi come identiche se si ottengono l'una dall'altra con una deformazione continua con estendibilità (ma senza lacerazioni o duplicature). Così per esempio ogni linea terminata da due estremi e senza *punti doppi* (cioè tale che il punto mobile generatore non è mai passato due volte per una stessa posizione), può riguardarsi come un segmento rettilineo: ogni linea chiusa senza punti doppi può riguardarsi come un circolo: ogni linea chiusa con un punto doppio come una lemniscata ecc. Lo studio delle linee fatto in questo senso può ridurre allo studio di segmenti, riguardandosi una linea come la riunione di più segmenti uniti convenientemente per gli estremi (dove si può anche supporre di *togliere* gli estremi ed ottenere così *linee indefinite*): il numero di tali segmenti può (almeno in un primo studio delle linee) supporre finito. Ad ogni linea competono allora come *caratteri* il numero di punti doppi (o multipli) e il numero degli estremi. Si può riguardare un punto doppio, comune a due rami della linea come un punto che può esser tolto da un ramo senza togliere la *connessione* della linea, cioè la possibilità di passare col movimento sulla linea da un punto di essa ad un altro qualunque: togliendo da un ramo della lemniscata il punto doppio essa si riduce in linea indefinita come la retta.

Un *segmento elementare* (equivalente ad un segmento rettilineo) può essere *ordinato* in due modi *naturali* l'uno inverso dell'altro: una *linea chiusa elementare* (equivalente ad un circolo) può essere *ordinata* in infiniti modi *naturali*, e tutti questi ordini costituiscono due *sensi di disposizione circolare*: invece una linea aperta con due estremi ed un punto doppio  $C$  come quel-

---

<sup>25</sup>Tale concetto di continuità è qualcosa di diverso da quello di continuità di un ordine naturale della linea: così per esempio i punti razionali d'un segmento e quelli irrazionali d'un segmento uguale e parallelo possono pensarsi disposti in un ordine di successione continuo ma non costituiscono un insieme di punti continuo nello spazio.

la della annessa figura si possono porre quattro ordini *naturali* (*ACDECB*, *ACEDCB*, *BCDECA*, *BCEDCA*) dove però *C* occupa due posti ecc.

Il concetto intuitivo di «linea» ha come naturale estensione il concetto di *superficie* come luogo di punti generato dal moto affatto generale di una linea. Anche in questo concetto complesso si debbono distinguere varie nozioni di diversa specie:

1. le nozioni puramente di posizione, come per esempio la possibilità di congiungere due punti della superficie mediante una linea tracciata su di essa, la divisibilità di una superficie in *parti* mediante linea in guisa che ogni linea congiungente due punti appartenenti a parti diverse abbia un punto (almeno) comune colla linea di divisione ecc.:
2. le nozioni metriche di lunghezza di una linea tracciata sopra una superficie e angolo di due linee per un punto:
3. le nozioni in cui si considerano le relazioni della superficie col rimanente spazio (continuità nello spazio, piano tangente in un punto ecc.).

Isoliamo col pensiero una superficie astraendo dal rimanente spazio, restano soltanto inerenti ad essa le nozioni 1), 2): tutte le superficie ottenute da una stessa flessione (deformazione continua) senza estensione (superficie *applicabili* ad una data) sono sotto questo rispetto da riguardarsi come identiche: la flessione della superficie si considera sempre eseguita senza lacerazioni o duplicature. Prescindiamo ulteriormente dalle nozioni 2), acquistiamo di una superficie un concetto siffatto che tutte le superficie derivate per flessione con estensione da una medesima sono da riguardarsi come identiche. Ogni superficie può (in un primo studio almeno) sotto questo punto di vista, essere riguardata come l'unione di un numero finito di *superficie elementari* equivalenti a circoli piani, convenientemente collegate al contorno, od anche private del contorno (tutto o in parte) in guisa da costituire superficie *indefinite*. La teoria delle superficie fatta in questo senso (*teoria della connessione*

o *Analysis situs*) è stata oggetto di importanti lavori: per la letteratura si potrà consultare *W. Dick* «Beiträge zur Analysis situs»<sup>26</sup>.

Ad esempio è oggetto di studio in questa teoria il numero dei tagli chiusi che possono farsi in una superficie senza spezzarla ecc. Le applicazioni di questa teoria ai vari rami della Matematica (superficie Riemann, poligoni funzioni ecc.) sono importantissime. Tuttavia la teoria stessa (per quanto io sappia) non è stata sviluppata in modo sistematico facendo astrazione dallo spazio che contiene la superficie e dalle nozioni metriche su di essa, che costituiscono elementi estranei alla teoria stessa.

Non soltanto per desiderio di raggiungere un progresso dal lato critico auguriamo che un tale studio sia fatto in questo senso: può sembrare che così si vengano a crescere senza bisogno le difficoltà già rilevanti che si incontrano in questi studi; ma noi pensiamo invece che tali difficoltà verrebbero più facilmente superate ove si facesse uso di metodi più strettamente collegati all'ordine delle proprietà che si indagano. Si pensi ai progressi (non soltanto critici) portati nella Geometria proiettiva prescindendo sistematicamente dalle proprietà metriche (*Staudt*), ed ai progressi raggiunti nell'Analisi prescindendo dalle espressioni analitiche delle funzioni (*Riemann*).

S'intende che con queste considerazioni intendiamo soltanto di additare una via che ci sembra feconda, non mai di considerare un esclusivismo dannoso.

Dal moto affatto generale di una superficie si può fare scaturire il concetto intuitivo di *solido*: si concepisce analogamente una *teoria della connessione* dei solidi (cioè nello spazio).

Dopo ciò non possiamo proseguire a *generare* analogamente forme più elevate perché un solido muovendosi (come una superficie che si muova sopra un'altra superficie) genera ancora un solido.

Facciamo ora un passo ulteriore nella teoria della connessione delle linee, superficie, e dei solidi, che immaginiamo stabilita. Prescindiamo dalla natura dell'elemento «punto»: diamo cioè alla teoria un valore astratto (puramente logico). Bisogna per ciò immaginare che tutte le proposizioni della teoria vengano enunciate come puri rapporti logici tra elementi, e ciò basta sia fatto per le proposizioni fondamentali (postulati).

Allora possiamo dare alla teoria della connessione infinite interpretazioni. Per riferire i nostri ragionamenti ad un campo concreto ed illimitato pensiamo come elementi (punti) di una varietà  $V$  tutti i solidi dello spazio intuitivo  $S_3$ : alle considerazioni svolte si darà contemporaneamente anche il valore a-

---

<sup>26</sup>Una bella esposizione dei principali risultati di questa teoria si può trovare nella memoria di *De Paolis* «Teoria dei gruppi geometrici ecc.» Accademia dei Lincei - XL - 1890.

stratto derivante dal fare astrazione dalla natura dell'elemento «solido» che consideriamo.

Possiamo acquistare la nozione del movimento in questa *varietà*<sup>27</sup>  $V$ , derivandola dalla nozione intuitiva di *movimento* d'un corpo solido in  $S_3$ : il corpo solido viene qui concepito come deformabile in tutti i modi possibili.

Muovendo un corpo solido in  $S_3$  si ha una *successione continua* di corpi solidi  $v_1$  che possiamo concepire in senso astratto come una *linea*  $v_1$  in  $V$ . Invero questa successione di corpi (fatta astrazione dalla natura degli elementi) soddisfa a tutte quelle proprietà intuitive che concepiamo come inerenti ad una linea in sé stessa (prescindendo dalle sue relazioni collo spazio e dalla nozione di distanza di due punti su di essa). Una successione  $v_1$  di solidi in  $S_3$  può essa stessa essere concepita come un ente geometrico a cui possiamo applicare la nozione del movimento fissando che *muovere* la successione equivalga a muovere contemporaneamente i solidi che la compongono in guisa che in ogni istante essi formino una  $v_1$ . Allora se moviamo in modo affatto generale la successione dei solidi in  $S_3$ , ciò che può considerarsi come *muovere* la linea  $v_1$  in  $V$ , diamo luogo ad un insieme di solidi  $v_2$  che (in senso astratto) si concepirà come una *superficie*  $v_2$  in  $V$ ; la denominazione si giustificherebbe anche qui ritrovando nella varietà  $v_2$  tutte le proprietà che pensiamo come inerenti ad una superficie intuitiva in sé stessa (astrazione fatta dalla natura degli elementi dalle relazioni collo spazio esterno, e dai concetti metrici su di essa). Possiamo seguire l'operazione *muovendo*  $v_2$  (in modo arbitrario) e generando una varietà di solidi  $v_3$  (sotto-varietà in quella di tutti i solidi) che si potrà considerare come una varietà  $v_3$  di punti in  $V$ , analoga ad un solido di  $S_3$ . Né vi è qui alcun limite e l'estensione del procedimento, applicando  $n$  volte l'operazione di movimento (eseguita ciascuna volta sulla varietà considerata innanzi) conduce a generare gli insiemi  $v_n$  di solidi, che concepiremo come *varietà di punti*  $v_n$  in  $V$  (dove  $n$  è un intero qualunque): per esprimere il concetto che si collega a tale generazione, potremo dire che le varietà  $v_1$  (linee) sono ad *una dimensione*, le  $v_2$  (superficie) a *due dimensioni* ecc., le  $v_n$  sono *varietà ad  $n$  dimensioni*; e potremo dire che: *una  $v_n$  si può riguardare come una  $v_1$  i cui elementi sono  $v_{n-1}$* . La  $V$  contenendo in sé varietà ad un numero di dimensioni arbitrariamente elevato si potrà concepire come una *varietà ad infinite dimensioni*.

Gli  $S_n$  che abbiamo definito innanzi appaiono come varietà  $v_n$  ad  $n$  dimensioni nel senso generale qui considerato, essendo  $v_{n-1}$  gli  $S_{n-1}$  in essi e potendosi generare  $S_n$  con tutti gli  $S_{n-1}$  contenenti un  $S_{n-2}$ .

---

<sup>27</sup>Alla parola «varietà» si può dare il significato di insieme di elementi: il significato di questa parola potrà essere successivamente ristretto in modo opportuno. Riemann chiama «varietà» l'insieme di tutti i modi di determinazione d'un concetto generale.



Per compiere uno studio delle varietà a più dimensioni occorrerebbe anzitutto desumere dalla generazione intuitiva col movimento delle varietà considerate i postulati che le caratterizzano. In questo esame si può anzitutto ricondurre la questione alle *varietà elementari* analoghe al segmento o linea elementare ed alla superficie elementare: si dovranno poi collegare fra loro più varietà elementari. Ma non volendo addentrarci nell'esame minuto di tali postulati preciseremo il concetto di varietà elementare (ponendoci forse qualcosa di non necessario) ammettendo di esse una rappresentazione analitica. Gli elementi d'una varietà, corrispondenti biunivocamente ai gruppi di  $n$  parametri indipendenti  $t_1, t_2, \dots, t_n$  variabili entro intervalli fissati  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  (o più generalmente soddisfacenti ad opportune disuguaglianze per esempio tali che  $t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 \leq R^2$ ) si possono riguardare come i *punti* d'una *varietà elementare*  $v_n$  *ad  $n$  dimensioni* che si potrà indicare con  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Effettivamente una  $v_n$  siffatta, ove i suoi punti si interpretino per esempio come solidi, si può riguardare come generata da  $n$  movimenti successivi applicati ad un elemento, ad una  $v_1$  ecc.: ciò anzi in infiniti modi: basta considerare il parametro  $t_1$  come il *tempo* da cui dipende il movimento dell'elemento generatore della  $v_1$  ecc.

Il concetto così posto di varietà  $v_n$  elementare si può esprimere geometricamente dicendo «varietà elementare  $v_n$  ad  $n$  dimensioni» ogni varietà i cui elementi si riguardano in corrispondenza biunivoca coi gruppi di  $n$  punti presi rispettivamente su  $n$  segmenti rettilinei (che, senza restrizione, possono volendo supporre finiti). Il *contorno* di una varietà  $v_n \equiv (t_1, t_2, \dots, t_n)$  dove  $t_i$  varia nell'intervallo  $(a_i, b_i)$  è costituito da  $n$  varietà elementari  $v_{n-1} \equiv (t_1, \dots, t_{i-1} \text{ o } t_{i+1}, \dots, t_n)$  che prese insieme costituiscono una *varietà chiusa*  $v_{n-1}$ . Collegando opportunamente al contorno più varietà elementari  $v_n$  si deriva il concetto generale di «*varietà  $v_n$  ad  $n$  dimensioni*».

Qui però ha luogo una avvertenza. Si potrebbe credere che il numero di dimensioni di una varietà fosse un carattere della varietà in sé stessa affatto indipendente dalla generazione della varietà, cioè si potrebbe credere che non si potesse porre una corrispondenza biunivoca tra gli elementi (punti) di due varietà aventi un numero diverso di dimensioni. A questo proposito illuminano le belle ricerche di *G. Cantor* sulla teoria degli insiemi<sup>28</sup>: esse pongono in chiaro come «*si può porre una corrispondenza biunivoca tra i punti d'una varietà elementare  $v_1$  (d'un segmento) e i punti d'una varietà elementare, ad  $n$  dimensioni,  $v_n$  (dove  $n$  è qualunque)*»: così per esempio tra i punti d'un quadrato o d'un cubo e quelli d'un segmento. Per conseguenza per esempio un quadrato ove (prescindendo da tutte le ordinarie nozioni) si consideri in senso astratto come una varietà di punti, potrà essere riguardato

<sup>28</sup>Cfr. vari lavori negli «Acta Mathematica» e il «Mathem. Annalen».

come un segmento: basta per comprendere la cosa immaginare un segmento in corrispondenza biunivoca col quadrato e sostituire idealmente ogni punto del segmento col corrispondente del quadrato. Si osservi come il perdersi delle ordinarie nozioni intuitive in questo trapasso dipende dal fatto che la corrispondenza stabilita tra il quadrato ed il segmento in questione è una corrispondenza biunivoca discontinua: così due punti infinitamente vicini del quadrato vengono a sostituirsi, in generale, a punti aventi distanza finita sul segmento. Più generalmente si può vedere che se una varietà  $v_n$  ad  $n$  dimensioni si vuol riguardare come una varietà  $v_m$  con un diverso numero  $m$  di dimensioni, si viene a modificare la nozione di *continuità* nella varietà stessa: ossia a mutare le nostre idee sulla posizione reciproca (o sull'*ordine*) dei punti della varietà. Si riesce a questo se si suppone la varietà stessa decomposta in varietà elementari  $v_n$ , ed in ciascuna di esse si suppone data una rappresentazione analitica. Per tal modo nella varietà  $v_n \equiv (t_1, t_2, \dots, t_n)$  resta fissato il concetto di *punto limite* d'un gruppo di punti, e si può allora definire come *continua* una corrispondenza biunivoca tra due varietà quando ad ogni punto limite d'un gruppo di punti nell'una corrisponde un punto limite del gruppo corrispondente nell'altra. Allora sussiste il teorema:

*Non si può porre una corrispondenza biunivoca continua tra due varietà aventi un diverso numero di dimensioni*<sup>29</sup>.

Il numero delle dimensioni di una varietà apparisce dunque come un carattere della varietà stessa in ordine al concetto di punto limite, o a concetti equivalenti, posti in essa.

La rappresentazione analitica  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  d'una varietà elementare  $v_n$  può considerarsi come una corrispondenza biunivoca continua tra i punti della  $v_n$  e i gruppi di numeri  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  (variabili nei dati intervalli) costituenti una varietà analitica; i numeri  $t_1, t_2, \dots, t_n$  possono considerarsi come *coordinate* dei punti di  $v_n$ : ponendo una corrispondenza biunivoca continua tra la data  $v_n$  ed un'altra varietà analitica, si ha in  $v_n$  un'altra rappresentazione analitica, cioè si opera in essa una *trasformazione di coordinate*.

Ora le proprietà di una varietà elementare  $v_n$  formanti oggetto delle nostre considerazioni, cioè quelle inerenti alla *teoria della connessione* possono essere precisate rendendole in parte indipendenti dalla generazione conducente ad una loro particolare rappresentazione analitica, che ha servito a porre in esse il concetto di punto limite. Si fisserà a tale scopo di considerare come proprietà inerenti alla  $v_n$  tutte quelle che hanno carattere d'*invariantività*

---

<sup>29</sup>Si noti che la corrispondenza continua in un senso solo (non invertibile) può condurre da una varietà ad un'altra con un diverso numero di dimensioni: così si hanno esempi di funzioni continue  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  d'un parametro  $t$  che fanno corrispondere ai punti di ascissa  $t$  d'un segmento i punti d'un quadrato. (Crf. *Peano* «Sur une courbe qui remplit toute une aire plane» - Mathem. Annalen 1890).

rispetto alle corrispondenze biunivoche continue poste in  $v_n$ ; vale a dire quelle proprietà collegate alla iniziale rappresentazione analitica  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , che riescono indipendenti da quel sistema di coordinate, cioè possono ugualmente riferirsi ad un altro sistema di coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_n$  legate alle prime mediante le formule

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ t_i &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove le  $f_i, \varphi_i$  sono funzioni continue senza eccezione nel dato campo di variabilità.

Le cose dette si riporteranno a varietà composte di varietà elementari fissando opportunamente il concetto di corrispondenza biunivoca continua tra due di esse avuto riguardo al collegamento delle varietà elementari fra loro ecc.

È essenziale qui notare come *componendo* due corrispondenze biunivoche continue (cioè eseguendo l'una dopo l'altra due trasformazioni (1)) si ottiene ancora una corrispondenza biunivoca continua. Ciò anche se si tratti di corrispondenza tra due varietà anziché di una stessa. Di qui deriva la possibilità di *sostituire* l'una all'altra due varietà in corrispondenza biunivoca continua nei rapporti della teoria della connessione: due varietà siffatte sono dunque da riguardarsi in questa teoria come due figure uguali nella Geometria elementare, o come due figure proiettive nella Geometria proiettiva.

Come esempio di proprietà inerenti alla teoria della connessione di una varietà lineare  $v_n$  citiamo la possibilità di considerare in essa delle *linee elementari continue* aventi come estremi due punti qualunque di  $v_n$ , secondo la definizione di linea elementare continua in  $v_n$  che diamo qui sotto.

Diremo linea elementare continua in  $v_n \equiv (t_1, t_2, \dots, t_n)$  un insieme di punti  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  di  $v_n$  le cui coordinate si possono esprimere con funzioni continue

$$t_i = t_i(y) \tag{1}$$

di un parametro  $y$  variabile in un dato intervallo, *colla condizione* che le formule (1) definiscono alla lor volta  $y$  come funzione continua di ciascuna  $t_i$ <sup>30</sup>. (Si noti che questa condizione viene sempre soddisfatta se le  $t_i(y)$  sono funzioni aventi ovunque nel dato intervallo una derivata finita e non nulla: quindi le equazioni  $t_i = t_i(y)$  dove le  $t_i$  son funzioni continue e derivabili rappresentano in  $v_n$  una *linea* composta di più linee elementari). La linea elementare continua in  $v_n$  come è stata definita è effettivamente una linea elementare ( $v_1$ ) nel senso definito innanzi perché i suoi punti corrispondono

---

<sup>30</sup>Cfr. la nota precedente.

biunivocamente ai valori di  $y$  nel dato intervallo: la sua proprietà di esser *continua in  $v_n$* , non dipende dal particolare sistema di coordinate cui ci siamo riferiti, perché se si effettua una trasformazione di coordinate mediante le formule

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ t_i &= t_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{1.2}$$

sostituendo per  $t_i$   $t_i(y)$  si ha la rappresentazione della linea mediante funzioni continue  $x_i(y)$  e risulta ancora soddisfatta la condizione che  $y$  sia funzione continua delle  $x_i$  (come risulta dalle formule  $t_i = t_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ).

## 1.14 Determinazione metrica in una varietà a più dimensioni

Andiamo ora a parlare del modo più generale con cui si possono far scaturire le nozioni metriche in una varietà elementare

$$v_n \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n):$$

e cominciamo dal renderci conto approssimativamente dal sostrato intuitivo di questo concetto, riservandoci a precisarlo tra poco.

Si può dire che tali nozioni metriche scaturiscono essenzialmente dal concepire una relazione tra due punti di ogni segmento elementare continuo in  $v_n$  (e soddisfacente a qualche altra restrizione); questa relazione può ritenersi espressa da un numero essenzialmente positivo (*lunghezza* del segmento di linea, o *arco* tra i due punti): il carattere fondamentale del concetto di lunghezza di segmento è espresso dalla proprietà *distributiva* per la quale la lunghezza di un segmento è uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti in cui esso è diviso da un punto interno; ammetteremo inoltre che esso dipenda dall'arco in modo continuo al variare della forma della linea. In ordine a tale nozione supposta aggiunta alle precedenti che caratterizzano una  $v_n$ , due  $v_n$  non sono più da ritenersi come sostituibili (o uguali) soltanto ove sieno poste in corrispondenza biunivoca continua, ma si esige perciò ancora che in tale corrispondenza la lunghezza di una linea abbia carattere *invariantivo* (non muti): in tal caso le due varietà si dicono *applicabili*.

Per precisare fissiamo esplicitamente di limitare le nostre considerazioni a segmenti elementari rappresentati da equazioni

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)\tag{1}$$

dove le  $x_i$  sono funzioni finite, continue (ad un valore) di  $t$  in un intervallo  $t_1, t_2$ , ed inoltre non vi è nessun punto (doppio) della linea corrispondente a due valori di  $t$  nel detto intervallo: *ammettiamo* inoltre la *derivabilità* delle funzioni  $x_i(t)$ . Inerentemente al concetto intuitivo che conduce alla considerazione di lunghezza dovremo ritenere che la lunghezza dell'arco  $s$  della linea (1) tra due punti  $t_1$  e  $t_2$  sia funzione continua del punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , (e quindi di  $t$ ), ed aggiungeremo inoltre che la detta funzione  $s(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sia *derivabile* quante volte occorre rispetto alle  $x_i$ . Dopo ciò basterà per individuare la lunghezza dell'arco  $s$  (fra  $t_1$  e  $t_2$ ) conoscere in ogni punto il differenziale

$$ds = \frac{ds(t)}{dt} dt,$$

che (stante la proprietà distributiva della funzione  $s$ ) rappresenta (a meno del segno) la lunghezza dell'arco infinitesimo di linea fra  $t$  e  $t + dt$ : integrando si avrà (a meno del segno)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds.$$

Ciò posto consideriamo in  $v_n$  un qualunque punto interno

$$P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv (x_i) :$$

il differenziale  $ds$  di un arco elementare che congiunge due punti infinitamente vicini  $(x_i)$  e  $(x_i + dx_i)$  dipende soltanto dalle  $x_i$  e dalle  $dx_i$ , perché la variazione di tale arco infinitesimo al variare della forma della linea è (stante l'ipotesi intuitiva introdotta) un infinitesimo d'ordine superiore.

Il detto differenziale  $ds$  esprime a meno del segno la lunghezza dell'arco elementare fra  $(x_i)$  e  $(x_i + dx_i)$ : vediamo se inerentemente alle nostre nozioni intuitive si possa ritenere il  $ds$  come funzione ad *un* valore delle  $dx_i$ , cioè se si può avere del  $ds$  una espressione univocamente determinata (in valore ed in segno) sopra ogni arco elementare uscente da  $P$ ; espressione che vari in modo continuo coll'arco stesso.

Per ciò immaginiamo di fissare sopra una linea  $l$  uscente da  $P$  un senso di accrescimento dell'arco  $s$  (contato a partire da  $P$ ) in guisa che il  $ds$  debba ritenersi come positivo sopra un lato della linea adiacente a  $P$ , come negativo sul lato opposto: ammettiamo come inerente al nostro concetto intuitivo

della varietà  $v_n$ , di poter deformare con continuità una linea  $l$  (concepita come *inestensibile*) sovrapponendola a sé stessa, permutando i due lati di essa, ciò che può esprimersi dicendo che si è eseguito un *ribaltamento* della  $l$  intorno a  $P$ : questa variazione continua della  $l$  intorno a  $P$  corrisponde ad una variazione continua delle  $dx_i$ , e quindi ad una variazione continua del  $ds$ ; dopo eseguito il ribaltamento della  $l$  intorno a  $P$ , il senso di accrescimento dell'arco  $s$  su  $l$  dedotto secondo la legge di continuità viene ad essere fissato in modo opposto al primitivo: ciò mostra che nel  $ds$  ritenuto come funzione delle  $dx_i$  compare l'indeterminazione del segno. D'altra parte il valore assoluto del  $ds$  (lunghezza dell'arco elementare) è da ritenersi come funzione ad *un* valore delle  $dx_i$ : dunque dovremo ritenere il  $ds^2$  funzione ad *un* valore delle  $dx_i$  stesse. Ammettiamo la derivabilità finché occorre di tale funzione in guisa da poter sviluppare il  $ds^2$  per i differenziali  $dx_i$  secondo uno sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo termine: in questo sviluppo il termine costante manca essendo  $ds = 0$  per  $dx_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); anche il termine lineare nelle  $dx_i$  manca perché  $ds$  e le  $dx_i$  sono infinitesimi dello stesso ordine; quindi avremo (tralasciando gli infinitesimi di ordine superiore)

$$ds^2 = \sum_{r,i} a_{ri} dx_r dx_i \quad (a_{ri} = a_{ir}). \quad (1)$$

L'espressione del 2° membro dove le  $a_{ri}$  sono funzioni delle  $x_i$  (*forma differenziale quadratica* nelle  $n$  variabili  $dx_i$ ) deve essere essenzialmente positiva se si vuole escludere l'esistenza di linee (reali) di lunghezza nulla che si otterrebbero integrando l'equazione

$$ds = 0:$$

ciò porta come è noto  $n-1$  condizioni (disuguaglianze) nei coefficienti  $a_{r,s}$ , fra cui quella che il *discriminante* di essa  $|a_{r,s}|$  sia positivo. Il  $ds$  dicesi *elemento lineare* della data varietà: dare la sua espressione (1) in funzione delle  $x_i$ ,  $dx_i$  equivale a porre una *determinazione metrica* nella varietà.

Questa determinazione in quanto è posta mediante la formula (1) è legata al sistema di coordinate  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  posto nella varietà  $v_n$ : si eseguisca in  $v_n$  una qualunque trasformazione di coordinate mediante le formule

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2)$$

dove le  $x_i$  sono simboli di funzioni continue e *derivabili* ed il determinante funzionale

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

(onde le formule stesse sono invertibili); avremo allora una nuova espressione del  $ds^2$  come forma differenziale quadratica nelle  $dy_i$ . In ogni caso la lunghezza d'un arco di linea ottenuta partendo dalla espressione (1) è qualche cosa di inerente all'arco di linea ed indipendente dal sistema di coordinate poste nella varietà, sicché ove venga eseguita una sostituzione colle formule (2) si dovrà calcolare nuovamente il  $ds$  mediante la forma trasformata della (1).

Possiamo subito confermare i ragionamenti che ci hanno condotto alla formula (1) osservando che in essa rientra effettivamente l'espressione dell'elemento lineare dello spazio intuitivo  $S_3$  o dell'elemento lineare sopra una superficie in esso: invero in coordinate cartesiane ortogonali l'espressione della distanza fra i punti  $(x, y, z)$ ,  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  è

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} :$$

se si ha in  $S_3$  una superficie

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

(dove le tre funzioni  $x, y, z$  sono derivabili) l'espressione dell'elemento lineare sopra di essa è dato da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

dove

$$E = \sum \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 :$$

la detta formula

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

è appunto un caso particolare della (1), essendo l'espressione del 2° membro una forma differenziale quadratica in  $du, dv$ .

## 1.15 Geodetiche in una varietà

Ritorniamo alla nostra espressione generale dell'elemento lineare

$$ds^2 = \sum u_{ri} dx_r dx_i$$

in una varietà  $v_n$ , e riferiamo sempre i successivi sviluppi ad un intorno assai piccolo di un punto di  $v_n$  (*non singolare*) che costituisca una varietà elementare a cui il punto è interno.

Vogliamo vedere un po' più da vicino tutte le nozioni metriche caratteristiche della varietà  $v_n$  che scaturiscono dalla detta formula. Vedremo come da questa formula (per regioni convenientemente limitate di  $v_n$ ) scaturiscano:

1. il concetto di *distanza* di due punti
2. il concetto di *angolo* di due linee passanti per un punto.

Si abbiano in  $v_n$  due punti  $A_1, A_2$  (appartenenti ad una regione convenientemente limitata di  $v_n$ ) e si considerino tutte le linee

$$x_i = x_i(t)$$

(dove le  $x_i$  sono funzioni continue e derivabili finché occorre) aventi come estremi i punti  $A_1, A_2$  corrispondenti ai valori fissati  $t_1$  e  $t_2$  di  $t$ . La lunghezza dell'arco di una di queste linee tra  $A_1, A_2$  è

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum a_{ri} dx_r dx_i} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum a_{ri} dx'_r dx'_i} dt$$

(dove cogli apici si designano le derivate rispetto a  $t$ ).

Ci proponiamo di cercare quale forma debba darsi alla linea considerata tra  $A_1, A_2$  affinché la lunghezza  $l$  abbia il valore minimo; questo valore potrà dirsi la *distanza* tra i due punti  $A_1, A_2$  in  $v_n$ ; la detta linea si dirà una *geodetica* in  $v_n$ .

Seguendo le regole del *calcolo delle variazioni*, immaginiamo di considerare tra le nominate linee aventi per estremi  $A_1, A_2$ , una serie di linee

$$x_i = x_i(a, t)$$

dipendenti da un parametro  $a$ , e contenente la linea di lunghezza minima (supposta esistente): ammettiamo inoltre la derivabilità delle funzioni  $x_i$  rispetto ad  $a$ . La lunghezza  $l$  calcolata per le linee di questa serie è una funzione (continua e derivabile) del parametro  $a$ ; il valore minimo di  $l$  (corrispondente alla linea cercata) dovrà dunque corrispondere ad una linea per cui si abbia

$$\frac{dl}{da} = 0.$$

La linea (*geodetica*) che cerchiamo deve soddisfare a questa condizione qualunque sia il modo con cui il parametro  $a$  entra nelle funzioni  $x_i$ , cioè per qualunque deformazione della linea: ciò si esprime dicendo che per le linee di lunghezza minima tra  $A_1$  e  $A_2$  deve esser soddisfatta l'equazione

$$\delta l = 0,$$

dove con  $\delta l$  si designa la *variazione* di  $l$  cioè il differenziale  $\frac{dl}{da} da$  relativo ad una variazione di forma della linea dipendente in un modo qualunque dal



parametro  $a$ . Procedendo a sviluppare questa equazione notiamo che (per la definizione datane) dovremo trattare il simbolo  $\delta$  come quello di un differenziale (rispetto ad un parametro  $a$  che non figura esplicitamente) e quindi in particolare esso sarà permutabile col simbolo  $d$  (differenziale rispetto a  $t$ ) e col simbolo d'integrazione ( $S$ ), ammettendosi la derivabilità successiva delle funzioni di cui si tratta.

Ciò posto poniamo per semplicità

$$2T = \sum_{ri} a_{ri} x'_r x'_i;$$

si avrà

$$\delta l = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T} dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \sqrt{2T} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta T}{\sqrt{2T}} dt.$$

Ora il  $\delta T$  è la variazione di una funzione delle  $x_i$  e delle  $x'_i$ , quindi (applicando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni)

$$\delta T = \sum_i \left( \frac{\delta T}{\delta x_i} \delta x_i + \frac{\delta T}{\delta x'_i} \delta x'_i \right);$$

segue

$$\delta l = \int_{t_1}^{t_2} \sum \left( \frac{\frac{\delta T}{\delta x_i} \delta x_i + \frac{\delta T}{\delta x'_i} \delta x'_i}{\sqrt{2T}} \right) dt.$$

Ora integrando per parti

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i} \delta x'_i dt,$$

dove si prenda  $\frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i}$  come fattore finito e si consideri  $\delta x'_i dt$  come il differenziale (rispetto a  $t$ )

$$d\delta x_i (= \delta dx_i = \delta x'_i dt)$$

si avrà

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i} \delta x'_i dt = \left( \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i} \delta x_i dt \right)_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta x_i \frac{d \left( \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i} \right)}{dt} dt;$$

ma il 1° termine (uguale alla differenza dei valori assunti dalla quantità fra parentesi per  $t = t_2$ ,  $t = t_1$ ) è nullo perché tutte le linee che si considerano hanno gli stessi estremi  $A_1$ ,  $A_2$  corrispondenti ai valori per  $t = t_1$ ,  $t = t_2$ , e quindi per questi valori  $\delta x_i = 0$ ; resta dunque

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta x_i \frac{d \left( \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i} \right)}{dt} dt,$$

sicché

$$\delta l = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \left[ \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i}\right)}{dt} \right] \delta x_i \right\} dt.$$

Ma l'integrale del 2° membro deve essere identicamente nullo qualunque sia la variazione di forma della linea tra  $A_1$ ,  $A_2$  ossia qualunque sieno le  $\delta x_i$ , dunque si deve avere

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial x'_i}\right)}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ossia eseguendo la derivazione rispetto a  $t$

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i}}{\sqrt{2T}} + \frac{\frac{dT}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i}}{(\sqrt{2T})^3} = 0. \quad (1)$$

Le (1) costituiscono già le equazioni differenziali delle geodetiche: andiamo però a porle sotto una forma più conveniente (anche in vista di successive applicazioni)<sup>31</sup>.

A tal fine notiamo che per il teorema d'Eulero essendo

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ri} x'_r x'_i$$

una funzione omogenea di  $x'_r$ ,  $x'_i$ , si ha

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial x'_k} x'_k,$$

od anche

$$T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial x'_k} x'_k - T;$$

e derivando rapporto a  $t$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_k} x'_k + \sum_k \frac{\partial T}{\partial x'_k} x''_k - \frac{dT}{dt}$$

d'altra parte

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k} x'_k + \sum_k \frac{\partial T}{\partial x'_k} x''_k,$$

---

<sup>31</sup>La trasformazione qui eseguita che conduce direttamente ad ottenere le equazioni delle geodetiche sotto la forma (3) confrontabile colle equazioni del moto di Lagrange, mi è stata comunicata dal *Levi-Civita*.

quindi (sostituendo)

$$\frac{dT}{dt} = - \sum_k x'_k \left( \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_k} \right).$$

In conseguenza la (1), ponendo per  $\frac{dT}{dt}$  il suo valore (e moltiplicando per  $(\sqrt{2T})^3$ ) diviene

$$2T \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} \right\} - \frac{\partial T}{\partial x'_i} \sum_k x'_k \left( \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_k} \right) = 0;$$

ed infine col porre

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} = E_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

otteniamo le equazioni delle geodetiche sotto la forma

$$2TE_i - \frac{\partial T}{\partial x_i} \sum_k x'_k E_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Queste  $n$  equazioni non sono indipendenti (come si verificherebbe mostrando che è identicamente nullo il determinante dei coefficienti delle  $E_i$ ): ciò risulta chiaro ove si pensi che le equazioni (2) debbono essere soddisfatte da una geodetica (tra  $A_1, A_2$ ) qualunque sia la rappresentazione parametrica di essa che è stata scelta, onde esse debbono ancora essere soddisfatte se si eseguisce una sostituzione

$$t = \varphi(\tau)$$

<sup>32</sup>(dove  $\varphi$  è continua e derivabile).

Possiamo disporre della funzione  $\varphi(\tau)$  in guisa che si abbia per esempio  $E_i = 0$ ; allora per la particolare rappresentazione parametrica delle geodetiche che ne risulta, la prima delle (2) ci dà

$$\sum_k E_k x'_k = 0$$

e quindi il sistema (2) assume la forma semplicissima

$$E_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

---

<sup>32</sup>E si potrebbe anche analiticamente verificare l'invariantività delle (2) rispetto al gruppo di queste trasformazioni, ciò che per la natura della questione è a priori evidente.

Da queste equazioni si ricava che *per due punti di  $v_n$  in una regione convenientemente limitata passa una geodetica il cui arco è il minimo fra gli archi delle linee congiungenti i due punti*, e può dirsi la *distanza* dei due punti in  $v_n$ .

È da notarsi che se dimenticando la 1<sup>a</sup> definizione si chiamano geodetiche le linee di  $v_n$  soddisfacenti alle equazioni (3), alle geodetiche compete la proprietà di dare il minimo arco tra due punti soltanto quando questi punti sono sufficientemente vicini.

Dopo ciò la condizione perché due  $v_n$  debbano considerarsi *applicabili* (secondo la definizione posta nel §14) si può esprimere più semplicemente. Invero perché ciò accada basta che esse possano porsi in una corrispondenza biunivoca siffatta che ad ogni elemento lineare dell'una corrisponda un uguale elemento lineare dell'altra, e quindi ad ogni geodetica una geodetica, e poiché l'elemento lineare in una  $v_n$  può sempre valutarsi sopra una geodetica si ha: *Due varietà  $v_n$  sono applicabili se si può porre tra di esse una corrispondenza biunivoca che faccia sempre corrispondere a due punti dell'una due punti ugualmente distanti dell'altra (e reciprocamente)*.

Se sopra una varietà  $v_n$  si effettua una trasformazione in un'altra applicabile si dice che si è eseguita su  $v_n$  una *flessione senza estensione*.

## 1.16 Angolo di due linee in una varietà

Ad ogni linea

$$x_i = x_i(t)$$

uscente da un punto  $P \equiv x_i$  di  $v_n$  si può far corrispondere una *direzione*

$$dx_i = x'_i dt;$$

infinite linee corrispondono inversamente ad una direzione: due direzioni  $\delta_1 x_i$ ,  $\delta_2 x_i$  determinano una *giacitura* uscente da  $P$  in  $v_n$ , costituita dalle infinite direzioni  $\alpha \delta_1 x_i + \beta \delta_2 x_i$ : le direzioni di una giacitura si possono considerare (in senso astratto) come i raggi d'un fascio; due direzioni separano le altre della giacitura in due *angoli*, distinguendosi le une dalle altre secondo il segno di  $\frac{\alpha}{\beta}$ ; una terza direzione di uno di questi angoli lo divide alla sua volta in due altri ecc.

Vogliamo definire come *grandezza dell'angolo* (o semplicemente *angolo*) di due linee o di due direzioni uscenti da un punto  $P$  di  $v_n$ , un numero essenzialmente positivo esprimente una relazione delle due direzioni, il quale goda delle due proprietà fondamentali:

1. di avere *carattere invariante* rispetto alle flessioni senza estensione di  $v_n$ ;
2. di avere la proprietà *distributiva* rispetto agli angoli di una giacitura<sup>33</sup>.

Proponiamoci ora di vedere fino a che punto queste condizioni determineranno l'espressione dell'angolo di due linee uscenti da un punto in  $v_n$ .

Si può concepire l'insieme delle coordinate dei punti di  $v_n$  come costituente una varietà analitica applicabile su  $v_n$ , e quindi una trasformazione di coordinate in  $v_n$  come una flessione senza estensione di questa varietà analitica. Perciò la 1<sup>a</sup> condizione si può esprimere dicendo che l'angolo  $\lambda$  formato dalle direzioni  $\delta_1 x_i, \delta_2 x_i$  uscenti dal punto  $x_i$  nella varietà  $v_n$  che ha per elemento lineare

$$ds^2 = \sum a_{ik}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_k \quad (1)$$

è una funzione delle due direzioni nominate la quale non dipende dal particolare sistema di coordinate poste in  $v_n$ . Dunque  $\lambda$  sarà da ritenersi funzione delle  $x_i, dx_i, \delta x_i$  e dei coefficienti  $a_{ik}$  della forma (1), siffatta che operando una sostituzione

$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_n) \quad (\Delta \neq 0)$$

la quale porti

$$\begin{aligned} \delta_1 x_i &= \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \delta_1 y_s \\ \delta_2 x_i &= \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \delta_2 y_s \end{aligned}$$

e

$$ds^2 = \sum b_{ik}(y_1, \dots, y_n) dy_i dy_k \quad \left( b_{ik} = \sum_{rs} a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_k} \right)$$

debba aversi identicamente

$$\lambda(x_i, \delta_1 x_i, \delta_2 x_i, a_{ik}) = \lambda(y_i, \delta_1 y_i, \delta_2 y_i, b_{ik})$$

dove la forma dell'espressione di  $\lambda$  nelle quantità fra parentesi del 1° membro è uguale a quella del 2°.

---

<sup>33</sup>Tali proprietà competono appunto all'angolo di due linee uscenti da un punto nello  $S_3$  intuitivo o sopra una superficie in esso.

Si potrebbe anzitutto dimostrare che nell'espressione di  $\lambda$  non entrano esplicitamente le  $x_i$ <sup>34</sup>: quindi se si pone

$$dx_i = \mu_i, \quad \delta_1 x_i = \mu_i^{(1)}, \quad \delta_2 x_i = \mu_i^{(2)}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_s} = \alpha_{is}$$

$\lambda$  sarà una funzione

$$\lambda \left( \mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}, \alpha_{ik} \right)$$

avente carattere invariantivo rispetto alle sostituzioni lineari

$$V_i = \sum_s \alpha_{is} \mu_s \tag{2}$$

che trasformano  $(\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)})$  rispettivamente in  $V_i^{(1)}, V_i^{(2)}$  e le  $a_{ik}$  nelle  $b_{ik} = \sum_{rs} a_{rs} \alpha_{ri} \alpha_{sk}$  ossia le due forme lineari  $\sum_i \mu_i^{(1)} \mu_i, \sum_i \mu_i^{(2)} \mu_i$  nelle  $\sum_i V_i^{(1)} V_i, \sum_i V_i^{(2)} V_i$  e la forma quadratica  $\sum a_{ik} \mu_i \mu_k$  nella  $\sum b_{ik} V_i V_k$ . Ora una tale espressione  $\lambda$  (*invariante assoluto* del sistema associato della forma quadratica  $\sum a_{ik} \mu_i \mu_k$  e delle due lineari  $\sum_i \mu_i^{(1)} \mu_i, \sum_i \mu_i^{(2)} \mu_i$ ) si può subito determinare: invero si considerino i due valori immaginari coniugati di  $\frac{u}{v}$  che annullano

$$\sum a_{ik} \left( u \mu_i^{(1)} + v \mu_i^{(2)} \right) \left( u \mu_k^{(1)} + v \mu_k^{(2)} \right);$$

questi insieme a 0,  $\infty$  formano il birapporto

$$\varphi = \frac{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} + \sqrt{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} - \sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \sum a_{ik} \mu_i^{(2)} \mu_k^{(2)}}}{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} - \sqrt{\sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \mu_k^{(2)} - \sum a_{ik} \mu_i^{(1)} \sum a_{ik} \mu_i^{(2)} \mu_k^{(2)}}}.$$

Si può provare che non esiste nessun altro invariante assoluto del predetto sistema all'infuori d'una funzione arbitraria

$$\lambda = \lambda(\varphi).$$

<sup>35</sup>Se ora si vuole (per soddisfare alla 2<sup>a</sup> condizione imposta) che  $\lambda$  goda della proprietà distributiva rispetto agli angoli della giacitura

$$u \delta_1 x_i + v \delta_2 x_i = u \mu_i^{(1)} + v \mu_i^{(2)},$$

<sup>34</sup>Perché  $\lambda$  non deve mutare per una sostituzione additiva  $y_i = x_i \alpha_i$  eseguita sopra una  $x_i$ .

<sup>35</sup>Cfr. Aronhold «Ueber eine fundamentale Begründung der Invarianten Theorie» (Crelle Bol 62). (Riferendoci alla interpretazione geometrica in un  $S_n$  proiettivo ciò si vede facilmente, giacché si riduce a dire che due punti in relazione ad una quadrica hanno un solo invariante assoluto che è il birapporto formato da essi colle intersezioni della loro retta colla quadrica).

si è condotti ad assumere  $\lambda$  proporzionale al  $\log \varphi$ ; e perché esso risulti reale si deve prendere

$$\lambda = \frac{1}{2i} \log \varphi, \quad (3)$$

o proporzionale a questo numero. Prendendo appunto il segno di uguaglianza definiremo come *angolo delle due direzioni*  $\delta_1 x_i, \delta_2 x_i$  l'espressione  $\lambda = \frac{1}{2i} \log \varphi$  dove

$$\varphi = \frac{\sum a_{ik} \delta_1 x_i \delta_2 x_k + \sqrt{\{\sum a_{ik} \delta_1 x_i \delta_2 x_k\}^2 - \delta_1 s^2 \delta_2 s^2}}{\sum a_{ik} \delta_1 x_i \delta_2 x_k - \sqrt{\{\sum a_{ik} \delta_1 x_i \delta_2 x_k\}^2 - \delta_1 s^2 \delta_2 s^2}}$$

e poiché

$$e^{i\lambda} = \cos \lambda + i \sin \lambda$$

avremo

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\sum a_{ik} \delta_1 x_i \delta_2 x_k}{\delta_1 s \delta_2 s}, \\ \sin \lambda &= \sqrt{\frac{\delta_1 s^2 \delta_2 s^2 - \{\sum a_{ik} \delta_1 x_i \delta_2 x_k\}^2}{d s^2 \delta s^2}}. \end{aligned}$$

Allora l'espressione di  $\cos \lambda$  si riduce alla nota espressione dell'angolo di due linee uscenti da un punto<sup>36</sup> (sopra una superficie o) nello  $S_3$  intuitivo quando  $v_n$  sia (una superficie in  $S_3$  o) lo  $S_3$  stesso<sup>37</sup>.

*Osservazione* - In modo analogo a quello con cui si è ottenuto l'espressione dell'angolo di due linee uscenti da un punto in una varietà  $v_n$  (astratta), si può porre il *concetto* di *volume* (o *area* per  $n = 2$ ) assumendo come elemento di volume in  $v_n$

$$d\sigma = \sqrt{|a_{ik}|} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

dove  $|a_{ik}|$  è il discriminante della forma  $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$  che dà l'elemento lineare. Si può immediatamente verificare che l'espressione del  $d\sigma$  (e quindi  $\int_S^n d\sigma$  in un dato campo  $S$  delimitato da opportune disuguaglianze cui le  $x_i$  debbono soddisfare) ha carattere invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate, ossia rispetto alle flessioni senza estensione di  $v_n$ : viceversa si può provare che

$$\int_S^{(n)} \sqrt{|a_{ik}|} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

<sup>36</sup>Cfr. le «Vorlesungen» di *Clebsch-Lindemann* (3° vol.).

<sup>37</sup>Le coordinate  $x_1, x_2, x_3$  dei punti in  $S_3$  sono le più generali *coordinate curvilinee* cioè un qualunque sistema di coordinate ottenute dalle cartesiane  $x, y, z$  con una sostituzione  $x = x(x_1, x_2, x_3), y = y(x_1, x_2, x_3), z = z(x_1, x_2, x_3)$ , dove le  $x_1, x_2, x_3$  sono atte a rappresentare biunivocamente i punti d'una regione convenientemente limitata di  $S_3$ .

è l'unica espressione del tipo

$$\int_S^{(n)} \Psi dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

dove  $\Psi$  è funzione delle  $x_i$  e delle  $a_{ik}$  la quale abbia carattere invariante rispetto alle dette trasformazioni di coordinate<sup>38</sup>.

Valgono questi cenni a far riconoscere che tutte le nozioni metriche (distanza, angolo, volume) estensioni delle ordinarie in una varietà (astratta)  $v_n$  scaturiscono dalla sola espressione dell'elemento lineare, in un modo che può ritenersi intieramente determinato ove si ponga per condizione di conservare nella estensione le più elementari relazioni intercedenti fra queste nozioni.

## 1.17 Le varietà contenute in uno spazio euclideo

Lo spazio euclideo  $S_n \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dove è data l'espressione

$$\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$$

della distanza di due punti (§12), può ritenersi come una varietà  $v_n$  in cui è posta una determinazione metrica siffatta che, per il particolare sistema di coordinate cui essa è originariamente riferita, l'espressione dell'elemento lineare è

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2, \quad (1)$$

(giacché appunto  $ds$  è la distanza fra i due punti  $x_i$  e  $x_i + dx_i$  in  $S_n$ ). Le rette sono le geodetiche dello  $S_n$ . Infatti se si pone

$$x_i = \lambda_i t + \mu_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

in modo che le (1) sieno le equazioni di una retta, si ottiene

$$\begin{aligned} x'_i &= \lambda_i, & 2T &= \sum_i x_i'^2, \\ \frac{\partial T}{\partial x_i} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial x'_i} &= x'_i = \lambda_i, & \frac{d}{dT} \frac{\partial T}{\partial x'_i} &= 0 \end{aligned}$$

onde identicamente

$$E_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

<sup>38</sup>Cfr. *Levi-Civita* «Sugli invarianti assoluti» (Istituto Veneto 1894 - §19).



L'angolo di due rette incidenti

$$x_i = \lambda_i t + \mu_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad x'_i = \lambda'_i t + \mu'_i$$

viene dato dall'espressione

$$\cos \varphi = \frac{\sum_i \lambda_i \lambda'_i}{\sqrt{\sum_i \lambda_i^2} \sqrt{\sum_i \lambda'^2_i}}.$$

Si consideri nello  $S_n$  una varietà  $v_r$  ad  $r$  dimensioni rappresentata dalle equazioni

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

(dove le  $x_i$  sono funzioni continue e derivabili): mediante la determinazione metrica euclidea nello  $S_n$  risulta fissata una determinazione metrica in  $v_r$  in cui l'espressione dell'elemento lineare è data da

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 = \sum_{ik} a_{ik} du_i du_k,$$

dove

$$dx_s = \sum_i \frac{\partial x_s}{\partial u_i} du_i$$

e però

$$a_{ik} = \sum_{sr} \frac{\partial x_s}{\partial u_i} \frac{\partial x_r}{\partial u_k}.$$

Di qui si può trarre il teorema:

*Ogni varietà  $v_r$  in cui è data una determinazione metrica si può considerare come applicabile ad una varietà immersa in uno spazio euclideo avente al più  $\frac{r(r+1)}{2}$  dimensioni.*

Invero data una  $v_r \equiv (u_1, \dots, u_r)$  in cui l'espressione dell'elemento lineare sia

$$ds^2 = \sum a_{ik}(u_1, \dots, u_r) du_i du_k,$$

è applicabile ad essa la varietà  $v_r$  di uno  $S_n$  euclideo  $(x_1, \dots, x_n)$  data dalle formule

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_r) \quad (i = 1, \dots, n)$$

purché siano soddisfatte le equazioni

$$a_{ik}(u_1, \dots, u_r) = \sum_{rs} \frac{\partial x_s}{\partial u_i} \frac{\partial x_r}{\partial u_k}:$$

queste sono  $\frac{r(r+1)}{2}$  equazioni alle derivate parziali nelle  $n$  funzioni  $x_i(u_1, \dots, u_r)$  e quindi sono in generale integrabili per  $n = \frac{r(r+1)}{2}$ .

Come caso particolare si ha: *Una superficie ( $v_2$ ) è sempre applicabile sopra una dello  $S_3$  euclideo* (intuitivo).

I precedenti teoremi mostrano come la Geometria metrica generale sopra una varietà si può sempre riguardare come rientrante in quella d'uno spazio euclideo. Studiando la Geometria metrica sopra una varietà considerata come immersa in uno  $S_n$  euclideo, si possono ricercare anche le proprietà che pongono in relazione la varietà collo spazio, ma queste non permangono in generale per una flessione senza estensione della varietà, cioè non appartengono alla Geometria sopra la varietà. Tuttavia anche alcune proprietà inerenti alla Geometria sopra la varietà possono essere espresse in tal modo. Ad esempio per una superficie in  $S_3$  si ha come proprietà caratteristica delle geodetiche quella che «*la normale principale ad esse in ogni punto è normale alla superficie*» (come si vedrebbe interpretando le equazioni differenziali di esse geodetiche).

## 1.18 Interpretazione meccanica della Geometria metrica delle varietà più volte estese

I precedenti sviluppi sulle determinazioni metriche nelle varietà più volte estese (che abbiamo concepito in modo astratto) si presentano come naturali estensioni della teoria delle superficie, onde a priori se ne concepisce l'importanza matematica senza bisogno di farne alcuna applicazione. Ma riesce nondimeno interessante ed istruttivo il vedere come essi sieno suscettibili di una interpretazione meccanica concreta molto semplice.

Si abbiano nello spazio  $n$  punti materiali  $A_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$  di massa uguale (che possiamo supporre 1) formante un sistema mobile di punti, e supponiamo che tra questi punti intercedano dei *legami* espressi da  $s$  equazioni

$$\varphi_h(x_1 y_1 z_1, \dots, x_n y_n z_n) = 0 \quad (h = 1, \dots, s) :$$

(dove le  $\varphi$  sono continue e derivabili) questi legami rappresentano in generale delle condizioni che limitano il *grado di libertà* del sistema, ad esempio quella che le mutue distanze fra alcune coppie di punti restino invariate, o che qualche punto debba muoversi su date superficie ecc. Essendovi  $s$  legami il grado di libertà del sistema vale  $r = 3n - s$ .

Le  $x_1 y_1 z_1, \dots, x_n y_n z_n$  si possono riguardare come le coordinate dei *punti* d'uno spazio euclideo  $S_{3n}$  i cui elementi (punti) sono tutti i gruppi di  $n$  punti

dello  $S_3$  intuitivo, dove si abbia l'elemento lineare

$$ds^2 = \sum_i (dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2)$$

(da riguardarsi il quadrato della *distanza* tra due punti infinitamente vicini). Tutti i sistemi di  $S_3$  (cioè i gruppi soddisfacenti ai dati legami) debbono riguardarsi come i punti di una varietà  $v_r$  in  $S_{3n}$  rappresentata dalle equazioni

$$\varphi_h = 0$$

che (introducendo  $r$  variabili indipendenti dette *coordinate generali* o *Lagrangiane* del sistema) supponiamo aver ridotte alla forma

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_r), \quad y_i = y_i(u_1, \dots, u_r), \quad z_i = z_i(u_1, \dots, u_r).$$

Allora l'elemento lineare in  $v_n$  è dato da (§14)

$$ds^2 = \sum_{hk} a_{hk} du_h du_k$$

dove

$$a_{hk} = \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} + \frac{\partial y_i}{\partial u_h} \frac{\partial y_i}{\partial u_k} + \frac{\partial z_i}{\partial u_h} \frac{\partial z_i}{\partial u_k} \right).$$

Ponendo (come precedentemente)

$$ds^2 = 2T dt^2$$

e assumendo come parametro  $t$  sopra una *linea* di  $v_r$  il tempo, si ha per  $T$  uno spiccato significato meccanico poiché

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{hk} u'_h u'_k = \frac{1}{2} \sum_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

è la *forza viva* del sistema supposto messo in condizioni di passare nel tempo  $dt$  dalla posizione individuata da  $(u_1, \dots, u_r)$  a quella individuata da  $(u_1 + du_1, \dots, u_r + du_r)$ . Si supponga che sul punto  $(x_i, y_i, z_i)$  agisca una forza le cui componenti secondo gli assi coordinati vengano denotate con  $X_i, Y_i, Z_i$ . Si effettui sul punto  $x_i, y_i, z_i$  uno spostamento infinitesimo  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  *virtuale* (cioè conciliabile coi legami del sistema). Secondo il *principio di D'Alembert* si ritroveranno le equazioni generali del moto del sistema di punti esprimendo che le *forze perdute*

$$X_i - x_i'', \quad Y_i - y_i'', \quad Z_i - z_i'',$$

<sup>39</sup>si fanno equilibrio; e ciò dà (per il *principio delle velocità virtuali*) che deve esser nullo il lavoro da esse prodotto per uno spostamento virtuale del sistema, onde si ha l'*equazione simbolica* del moto

$$\sum \{(X_i - x_i'') \delta x_i + (Y_i - y_i'') \delta y_i + (Z_i - z_i'') \delta z_i\} = 0.$$

Le  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  in quanto danno uno spostamento virtuale del sistema (cioè il passaggio da una posizione  $u_1, \dots, u_r$  ad una contigua  $u_1 + \delta u_1, \dots, u_r + \delta u_r$  di essa) si esprimono per le  $\delta u_1, \dots, \delta u_r$ , colle formole

$$\delta x_i = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \delta u_s, \quad \delta y_i = \dots\dots\dots$$

Sostituendo nell'equazione simbolica del moto ed annullando i coefficienti delle  $\delta u_s$  (che sono spostamenti assolutamente arbitrari) si ottengono le equazioni del moto del sistema sotto la forma

$$\sum_i (X_i - x_i'') \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + (Y_i - y_i'') \frac{\partial y_i}{\partial u_s} + (Z_i - z_i'') \frac{\partial z_i}{\partial u_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

Poniamo

$$Q_s = \sum \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial u_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial u_s} \right),$$

e chiamiamo  $Q_s$  la componente delle forze sollecitanti il sistema *secondo la coordinata*  $u_s$ : allora le equazioni del moto assumono la forma

$$Q_s = \sum \left( x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial u_s} + z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial u_s} \right).$$

Nel 2° membro si riconosce l'espressione

$$\frac{d}{dt} \sum_i \left( x_i' \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \dots \right) - \sum_i \left( x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial u_s} + \dots \right).$$

Ora si noti che (derivando rispetto a  $t$  le  $x_i = x_i(u_1, \dots, u_r)$ ) si ha

$$x_i' = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial u_s} u_s'$$

da cui

$$\frac{\partial x_i'}{\partial u_s'} = \frac{\partial x_i}{\partial u_s}.$$

---

<sup>39</sup>Gli apici denotano successive derivazioni rispetto al tempo.

Segue che derivando

$$T = \frac{1}{2} \sum_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

si ha

$$\sum_i x_i' \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \dots = \sum_i \left( x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial u_s} + \dots \right) = \frac{\partial T}{\partial u_s'}$$

D'altra parte è pure

$$\sum_i \left( x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial u_s} + \dots \right) = \frac{\partial T}{\partial u_s};$$

onde le equazioni del moto del sistema assumono la forma

$$Q_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_s'} - \frac{\partial T}{\partial u_s} \quad (s = 1, \dots, r)$$

dovuta a *Lagrange*.

Queste equazioni ci dicono che se forze agenti sul sistema sono nulle (e quindi sono nulle le  $Q_s$ ), vale a dire se il sistema si muove solo per effetto di velocità iniziali, la successione descritta dal sistema deve considerarsi come una linea di  $v_r$  soddisfacente alle equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_s'} - \frac{\partial T}{\partial u_s} = 0,$$

cioè (§15) come una geodetica in  $v_r$ .

Si noti che ogni geodetica di  $v_r$  può considerarsi come la successione di posizioni effettivamente assunte dal sistema per opportune condizioni iniziali (posizione e velocità iniziali) ad esso attribuite.

Dopo ciò possiamo enunciare il risultato:

*La Geometria metrica astratta sopra una varietà  $v_r$  può interpretarsi come la meccanica dei sistemi omogenei di punti materiali aventi un grado  $r$  di libertà (vincolati da legami indipendenti dal tempo).*

*Se  $T$  designa la forza viva di un sistema che (per condizioni convenientemente scelte) passi da una data posizione ad un'altra infinitamente vicina nel tempo  $dt$ , l'elemento lineare in  $v_r$  (distanza fra i punti di  $v_r$  corrispondenti alle due posizioni) vale*

$$ds = \sqrt{2T} dt.$$

*Le geodetiche di  $v_r$  rappresentano le successioni delle posizioni assunte dai sistemi quando su di essi non agiscono forze, ossia ove sieno soggetti soltanto a velocità iniziali.*

In particolare se il sistema si riduce ad un sol punto mobile sopra una superficie, abbiamo che le traiettorie del punto, ove su di esso non agiscano forze, sono le geodetiche della superficie. Partendo appunto da questa proprietà *Jacobi* riuscì ad integrare le equazioni delle geodetiche sopra una quadrica.

## 1.19 Notizie storiche e considerazioni di raffronto. Determinazioni metrico-proiettive

È ormai il tempo di confrontare gli sviluppi precedenti relativi alle varie estensioni degli ordinari concetti geometrici conducenti alla Geometria iperspaziale, e di esaminare quindi sotto quali aspetti possa esser posto il problema di stabilire i fondamenti di una tale Geometria più generale.

Cominciamo dall'accennare all'ordine storico con cui i nominati concetti si sono svolti.

*Grassmann* nella sua «Ausdehnungslehre» (1884) avendo avuto il pensiero di attribuire alle nozioni geometriche un valore astratto è pervenuto a concepire la possibilità d'una scienza generale dell'estensione al di fuori dei limiti delle tre dimensioni.

Dieci anni dopo *Riemann* nella sua celebre dissertazione «Ueber di Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen»<sup>40</sup> generalizzando i concetti introdotti da *Gauss*<sup>41</sup> nello studio delle superficie poneva il problema generale della determinazione metrica in una varietà a più dimensioni mediante l'espressione del suo elemento lineare. Alle idee di *Riemann* ho cercato appunto di ispirarmi negli sviluppi del §14.

*Riemann* si propone in particolare di «assegnare quali sono le determinazioni metriche di una varietà ( $v_n$ ) a più dimensioni che permettono di considerare la varietà stessa come *omogenea* in un senso analogo a quello che si attribuisce ordinariamente a questa espressione riferita allo spazio». Ciò può essere precisato ammettendo che la  $v_n$  sia *applicabile su sé stessa* in guisa che con una flessione senza estensione su sé stessa si possa sovrapporre generalmente un gruppo di punti della varietà ad un altro gruppo di punti (*uguale*) aventi le stesse distanze<sup>42</sup>: siffatte trasformazioni della varietà in

---

<sup>40</sup>Göttingen 1854 (cfr. §2).

<sup>41</sup>«Disquisitiones generales circa superficies curvas» (Werke Bol 4).

<sup>42</sup>Ciò che basta ammettere a tale scopo è (secondo il *Lie*) che si possa portare generalmente con una flessione senza estensione della varietà su sé stessa un punto ed una direzione uscente da esso in un altro arbitrario punto e rispettivamente in un'arbitraria

sé sono da riguardarsi come *movimenti nella varietà*. Un tale movimento corrisponde dunque ad una trasformazione

$$x'_i \equiv x'_i(x_1, \dots, x_n)$$

che muti in sé stessa la forma differenziale quadratica

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

espressione dell'elemento lineare. Ammettere la possibilità di movimenti nella varietà porta in conseguenza a delle condizioni cui debbono soddisfare i coefficienti  $a_{ik}$  della forma; condizioni che vengono dunque a delimitare (in una certa misura) la natura della determinazione metrica.

Per far comprendere come il problema possa essere trattato riferiamoci al caso delle superficie.

Per una superficie (dello  $S_3$  intuitivo) si chiama *curvatura totale* in un punto generico (curvatura di Gauss) il prodotto delle inverse dei raggi di curvatura principali: a questo numero compete il carattere invariantivo in ogni flessione senza estensione della superficie: si può quindi domandare di caratterizzarlo con elementi inerenti soltanto alla determinazione metrica sopra la superficie in modo che tale carattere d'invariantività apparisca a priori; questo è stato fatto pure da Gauss il quale ha stabilito che «se si considera l'eccesso della somma degli angoli d'un triangolo geodetico nell'intorno d'un punto e si calcola il limite del rapporto di esso all'area del triangolo (impiccolendo indefinitamente il triangolo), questo limite è la curvatura della superficie nel punto»<sup>43</sup>.

Se dunque la superficie si flette senza estensione la curvatura in ogni suo punto rimarrà costante. Si voglia ora una superficie che possa muoversi su sé stessa portando ogni suo punto in un altro arbitrario, allora la sua curvatura dovrà essere costante in ogni punto. Viceversa si prova che questa condizione è anche sufficiente all'uopo. Tra le *superficie a curvatura costante* che così vengono delimitate si trova in particolare il piano (e le superficie sviluppabili) per cui essa è nulla<sup>44</sup>.

Riemann ha avvertito che volendo esprimere la condizione generale per l'omogeneità di una varietà  $v_n$  ad  $n > r$  dimensioni si è condotti ad ammettere che le superficie formate dalle geodetiche di ogni giacitura uscente da un punto, abbiano tutte in ogni punto una curvatura costante: ciò si esprime dicendo che la *varietà è a curvatura costante*. In questa famiglia di varietà

---

direzione uscente da esso.

<sup>43</sup>Cfr. per es. Bianchi «Lezioni di Geometria differenziale» pag. 169.

<sup>44</sup>Cfr. §6.

compare appunto lo  $S_n$  euclideo, corrispondentemente al valore zero della curvatura.

La curvatura di una superficie in un punto si esprime come un *invariante* (*differenziale del 2° ordine*) dei coefficienti della forma

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

che ne dà l'elemento lineare. Volendo che tale curvatura abbia un valore costante si trovano delle condizioni per le  $a_{ik}$ , e così appunto si riesce ad assegnare la natura della determinazione metrica di una varietà a curvatura costante. Riemann ha dato la forma

$$ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{\left\{1 + \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}^2}$$

a cui può sempre ricondursi l'espressione dell'elemento lineare d'una varietà di curvatura costante  $\alpha$ , assunto un conveniente sistema di coordinate.

Il problema analitico concreto di assegnare le condizioni sotto cui una forma generale assegnata

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

è l'espressione dell'elemento lineare d'una varietà a curvatura costante (cioè si può ricondurre alla forma di Riemann con una trasformazione di coordinate) è stato risolto da *Lipschitz* e *Christoffel*<sup>45</sup>. Recentemente il *Lie*<sup>46</sup> ha ripreso (dal punto di vista della teoria dei gruppi) la questione di caratterizzare la classe delle varietà a curvatura costante mediante l'esistenza dei movimenti in esse, dando forma più determinata ai risultati di Riemann (precisati appunto nel senso detto innanzi di ammettere l'esistenza d'un movimento che porti un punto e una direzione per esso in ogni altro punto e rispettivamente direzione per esso). Ma sul nuovo indirizzo del Lie ci proponiamo di tornare più tardi.

Ai lavori di Riemann si possono riattaccare quelli di *Beltrami* già menzionati nei §2, 6<sup>47</sup>. Nel «Saggio di interpretazione ecc.» egli aveva avuto l'idea feconda di cercare la interpretazione della Geometria non-euclidea piana nella Geometria sopra una superficie di curvatura costante, mostrando particolarmente come il caso iperbolico di Lobatschewsky corrisponda alle

<sup>45</sup>Cfr. Christoffel «Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten grades» (Crelle Bol. 70).

<sup>46</sup>«Theorie der Transformationsgruppen» (Kap. 17-18).

<sup>47</sup>«Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea» (Giornale di Mat. di Napoli t. IV) «Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante» (Annali di Mat. s. II t. II).



superficie di curvatura costante negativa e trovi una immagine completa nella Geometria sopra la pseudosfera (chiamate «rette» le geodetiche), vale a dire che questa Geometria si può identificare in senso astratto alla Geometria di *tutto* il piano iperbolico, senza restringersi a considerare la Geometria stessa in regioni limitate rispettivamente di superficie o di piano. Ma lasciamo per ora da parte l'espressa considerazione, limitandoci a parlare della Geometria intesa in regioni convenientemente limitate di superficie o di varietà, ciò che generalmente si suppone negli sviluppi metrico-differenziali.

Come fondamento della possibile interpretazione della Geometria piana che prescinde dal postulato d'Euclide sopra le superficie di curvatura costante si può ritenere il fatto che (per conveniente scelta del sistema di coordinate) le geodetiche d'una superficie a curvatura costante possono rappresentarsi con equazioni lineari; giacché una tale rappresentabilità significa che sulla superficie (in regioni limitate) vale la Geometria proiettiva del piano, dette «rette» le geodetiche. Beltrami si è proposto inversamente di trovare tutte le superficie le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari ed ha stabilito che queste sono soltanto le superficie a curvatura costante.

Nel lavoro degli Annali di Matematica (t. II) le stesse idee sono applicate alle varietà di curvatura costante a più ( $n$ ) dimensioni, dove Beltrami riconosce per  $n = 3$  l'interpretazione della Geometria spaziale ordinaria che prescinde dal postulato d'Euclide. Partendo dallo studio della varietà

$$x^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = a^2$$

di cui l'elemento lineare è dato da

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x},$$

Beltrami mostra che tale espressione è riducibile alla forma di Riemann (caratterizza cioè le varietà a curvatura costante) ed arriva a rappresentare le geodetiche su di esse con equazioni lineari.

*Schläfly*<sup>48</sup> inverte la considerazione (come già Beltrami aveva fatto per  $n = 2$ ) mostrando che le varietà di cui le geodetiche sono rappresentabili mediante equazioni lineari sono a curvatura costante.

Resta così provato che «*La condizione necessaria e sufficiente perché una varietà  $v_n$  in cui vale una Geometria metrica possa considerarsi come (una regione di) un  $S_n$  proiettivo le rette del quale sieno le geodetiche di  $v_n$ , è che la  $v_n$  sia a curvatura costante.* La Geometria metrica che vale in una tale

---

<sup>48</sup>«Nota alla memoria del signor Beltrami: Sugli spazi a curvatura costante» (Annali di Mat. t. V).

$v_n$  è allora l'estensione dell'ordinaria Geometria *fatta astrazione dal postulato d'Euclide* (e coincide con essa per  $n = 3$ )».

La grande portata di questi risultati può essere convenientemente intesa mediante il loro ravvicinamento cogli sviluppi relativi alle determinazioni metrico-proiettive che per un altro lato avevano avuto origine dai lavori di *Laguerre* e di *Cayley*. *Beltrami* stesso<sup>49</sup> ha avvertito il confronto, che in seguito il *Klein*<sup>50</sup> ha posto meglio in luce, aggiungendo osservazioni originali ed importanti.

*Laguerre* in un lavoro che i matematici hanno lasciato lungamente inavvertito<sup>51</sup> ha rilevato il fatto che le proprietà metriche delle figure nel piano o nello spazio (intuitivo) si possono considerare come relazioni proiettive di esse con una forma particolare (*assoluto*), la quale è costituita pel piano dalla involuzione tra i punti all'infinito di rette ortogonali (ossia dai *punti ciclici* sulla retta all'infinito), per lo spazio dalla polarità tra i punti e le rette all'infinito rispettivamente di rette e piani perpendicolari (ossia dal *cerchio immaginario* all'infinito *delle sfere*).

*Cayley*<sup>52</sup> si pone una questione più generale cercando se in uno spazio proiettivo si possa fissare una forma di riferimento (assoluto) in modo che le relazioni proiettive degli enti coll'assoluto sieno da riguardarsi (in senso astratto) come analoghe alle ordinarie relazioni metriche fatta astrazione dal postulato d'Euclide. Gli sviluppi si riferiscono successivamente alle forme di 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> specie. Parlando per esempio di quest'ultime, noteremo che egli assume come forma di riferimento una quadrica involuppo, ossia una forma di 2° grado in coordinate di piani e tratta i tre casi differenti in cui:

1. la quadrica assoluto sia reale e non degenerare a punti ellittici;
2. essa sia immaginaria, cioè non si abbia come forma di riferimento una polarità uniforme;
3. essa sia immaginaria e (una volta) degenerare; cioè si abbia come forma di riferimento (l'insieme dei piani tangenti ad una conica immaginaria ossia) una polarità uniforme in un dato piano.

Questi tre casi a cui l'autore si limita (escludendo altre forme quadratiche *a priori* possibili) conducono rispettivamente alla Geometria iperbolica (di Lobatschewsky) alla ellittica (di Riemann) ed alla parabolica (di Euclide).

---

<sup>49</sup>«Risposta alle osservazioni del signor Schläfly» (Annali di Mat. t. V).

<sup>50</sup>«Ueber di sogenannte Nict-Euklidische Geometrie» (Mathematische Annalen Bol. 4, 6 - 1871-72).

<sup>51</sup>«Note sur la théorie des foyers» (Nouvelles Annales de Mathématique t. 12 - 1853).

<sup>52</sup>«Memoirs upon quantities» (Philosophical Transactions 1859).

Si ha la prima Geometria ove si immaginino *tolti* dallo spazio proiettivo tutti i punti esterni alla quadrica assoluto, e si considerino i punti di questa come *punti all'infinito*. Il concetto di *distanza* di due punti (interni alla quadrica assoluto) si fa scaturire dalla considerazione del birapporto dei due punti colle intersezioni della loro congiungente coll'assoluto; ma perché sussista la proprietà distributiva deve assumersi tale distanza proporzionale al logaritmo del birapporto. La Geometria metrica che resta individuata in un piano (secante la quadrica assoluto) è quella (iperbolica) che si ottiene fissando come assoluto la conica sezione. L'*angolo* di due rette in un piano si assume proporzionale al logaritmo del birapporto da esse formato colle rette del loro fascio tangente alla sfera ecc. Così la Geometria metrica nella stella è quella (ellittica) ottenuta fissando come assoluto il cono quadrico (immaginario) tangente alla sfera pel punto.

La Geometria così fondata (interpretazione della Geometria non euclidea iperbolica) è stata già occasionalmente incontrata nel §8.

Nella Geometria ellittica le relazioni metriche fondamentali si pongono analiticamente nello stesso modo che nella iperbolica; soltanto la quadrica assoluto è immaginaria e perciò (tutti i punti sono da riguardarsi interni ad essa e quindi) nessun punto è da togliere. Nel piano come nella stella riesce fissata una Geometria ellittica. La quadrica assoluto è qui riferita ugualmente allo spazio di punti e di piani (nell'altro caso no perché si tolgono i punti ed i piani *esterni* mentre ai punti esterni corrispondono per dualità i piani secanti); perciò nella Geometria metrica ellittica vale la legge di dualità come nella Geometria proiettiva, ciò che non accade per le altre metriche.

La Geometria parabolica (euclidea) si ottiene assumendo la quadrica assoluto immaginaria degenera (una volta): questa metrica è la ordinaria ed apparisce come caso limite delle altre due.

L'accennato modo di Cayley di porre una determinazione metrica in un  $S_3$  proiettivo ove ci si riferisca (per semplicità) ad un sistema di coordinate proiettive (§12) conduce immediatamente a stabilire l'espressione dell'elemento lineare  $ds$  in esso, e quindi non differisce dal modo generale di porre una determinazione metrica in una varietà.

L'espressione

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

ha un significato spiccato in relazione alla quadrica assoluto, giacché l'equazione

$$ds^2 = 0$$

rappresenta il complesso delle direzioni delle rette (immaginarie) costituenti il cono quadrico circoscritto alla quadrica assoluto dal punto che si considera: queste rette sono invero *linee di lunghezza nulla*, ossia tali che è nulla la

distanza di due qualunque punti di essa come segue subito dalla definizione di distanza nel caso iperbolico o ellittico e con passaggio al limite pel caso parabolico (in cui l'assoluto è degenero).

D'altra parte in una qualsiasi varietà  $v_3$  a curvatura costante (che come sappiamo può considerarsi come una parte di un  $S_3$  proiettivo dove le geodetiche sono «rette») l'equazione

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k = 0$$

rappresenta un complesso di direzioni immaginarie uscenti da ciascun punto, costituenti le rette d'un cono quadrico, e l'insieme dei piani tangenti a tutti questi coni quadrici costituisce una quadrica che è a punti ellittici o immaginaria e al più una volta degenero se (come si suppone) il  $ds^2$  è positivo per valori reali delle  $dx_i$ : la determinazione metrica data dall'espressione del  $ds^2$  può allora esser posta ugualmente nel modo di Cayley assumendo la nominata quadrica come assoluto.

Dunque il modo di Cayley di porre una determinazione metrica in un  $S_3$ , è il modo più generale con cui possa porsi in  $S_3$  una determinazione metrica in guisa che le rette sieno le geodetiche.

È anche da notarsi espressamente che la determinazione metrico-proiettiva in Cayley conduce alla determinazione dello spazio *completo* (euclideo o no).

Le cose si generalizzano passando agli  $S_n$  con  $n > 3$ . Si supponga posto in un  $S_n$  un sistema di coordinate proiettive di iperpiani (in modo che il punto sia rappresentato da un'equazione lineare); una equazione di 2° grado rappresenta una *quadrica involuppo* che sotto certe condizioni può essere assunta come *assoluto* in un senso analogo a quello detto per  $n = 3$ : allora nello  $S_n$  vien posta una determinazione metrica in guisa che le rette sono geodetiche e che esso diviene una varietà a curvatura costante ecc.

Tantoché si può affermare che:

*In ogni  $S_n$  proiettivo può porsi una determinazione metrica siffatta che le rette riescano geodetiche: il modo più generale di ottenerla è di fissare il riferimento dello  $S_n$  ad una opportuna quadrica-assoluto.*

Si ottiene così nello  $S_n$  (da cui eventualmente sono *tolti* i punti *esterni* alla quadrica assoluto se questa è reale) una Geometria metrica che è l'estensione di quella ordinaria di *tutto* lo spazio per  $n = 3$ , fatta astrazione dal postulato di Euclide.

Come fin da principio abbiamo detto è caratteristica in questa Geometria la presenza dei *movimenti* dello  $S_n$  in sé, che sotto il punto di vista metrico-differenziale si presentano come trasformazioni che lasciano inalterata l'espressione dell'elemento lineare (flessioni senza estensione) ed invece (come il *Klein* ha osservato) sono da riguardarsi sotto l'aspetto proiettivo come le

*omografie* (corrispondenze che fanno corrispondere iperpiani ad iperpiani) che lasciano invariata la quadrica assoluto (aggiunta ad un'altra condizione nel caso euclideo)<sup>53</sup>.

Lo  $S_n$  metrico-proiettivo ossia la varietà a curvatura costante costituisce attualmente il campo fondamentale della Geometria, il concetto di tale  $S_n$  deve riguardarsi come la naturale estensione del concetto dello  $S_3$  intuitivo: le varie forme geometriche, curve superficie, ecc. si studiano generalmente come contenute in un tale  $S_n$ .

Così a stabilire le relazioni fondamentali tra gli  $S_r$  ( $r < n$ ) in un tale  $S_n$  sono dedicati i lavori di *Jordan*<sup>54</sup> e *D'Ovidio*<sup>55</sup>, il primo dei quali relativo soltanto allo  $S_n$  euclideo: (nel lavoro di D'Ovidio compare anche l'uso della dualità e della proiettività convenientemente estese).

Ma più frequentemente lo  $S_n$  è stato studiato soltanto in senso proiettivo. Essenzialmente in tal modo compare la sua considerazione ove si riguardino come «punti» gli elementi (curve, superficie, ecc.) d'un sistema lineare (secondo il modo di vedere introdotto da *Plücker*): di tale considerazione si valsero per esempio il *Cayley*<sup>56</sup>, l'*Halphen*<sup>57</sup> e il *Clifford*<sup>58</sup>. Ancora sotto l'aspetto proiettivo occorre la considerazione dello  $S_n$  ove si cerchi in esso una immagine geometrica di risultati analitici della teoria degli enti algebrici; così per esempio in lavori di *Salmon*, *Noether*, *Clebsch* ecc.

Sarebbe troppo lungo enumerare tutti i lavori (ad esempio del *Klein*, del *Lie*, ecc.) in cui più o meno esplicitamente si fa uso degli iperspazi: ma una speciale menzione deve esser fatta della memoria classica del *Veronese* «*Behandlung der projectivischen Verhältnisse* ecc.» (Mathem. Annalen XIX

---

<sup>53</sup>Un'altra importante osservazione del Klein riguarda la considerazione della Geometria metrico-proiettiva di *tutto* il piano (o delle superficie a curvatura costante). Mentre questa Geometria pel caso iperbolico trova la sua immagine completa nella Geometria sulla pseudosfera (Beltrami), nel caso ellittico essa non è suscettibile di essere rappresentata completamente dalla Geometria sulla sfera dove per due punti opposti passano infiniti cerchi massimi (geodetiche), sebbene una regione di sfera sia atta a rappresentare una regione di piano ellittico. Il Klein ha rilevato fra i due casi la differenza notevole che mentre il piano iperbolico è *semplicemente connesso* (come la pseudosfera e la sfera), il piano ellittico (completo) è *due volte connesso*, ossia non viene spezzato da un taglio chiuso. Così non nella Geometria sulla sfera ma nella *Geometria della stella* si può avere una immagine completa della Geometria piana ellittica.

<sup>54</sup>«*Essai sur la Géométrie à n dimensions*» (Bulletin de la Société math. de France t. III - 1875).

<sup>55</sup>«*Le relazioni metriche fondamentali negli spazi di quantisivogliano dimensioni e di curvatura costante*» (Memoria dell'Accad. dei Lincei. 1876-77).

<sup>56</sup>«*On the curves which satisfy given Conditions*» «*A Memoir on Abstract Geometry*» (Phil. Transactions 1867-69).

<sup>57</sup>«*Recherches de Géométrie à n dimensions*» (Bulletin de la Société math. 1873).

<sup>58</sup>«*On the Classification of Loci*» (Phil. Trans. 1878).

1881): giacché questa memoria segna una data nello sviluppo della Geometria proiettiva iperspaziale, che in essa si trova trattata sistematicamente. In particolare il *metodo delle proiezioni* che permette l'applicazione diretta degli iperspazi allo studio degli enti dello spazio ordinario (riguardati come proiezioni di figure iperspaziali) è di uso costante e fecondo nella memoria del Veronese<sup>59</sup>.

Il lavoro del Veronese fu il punto di partenza di una serie di ricerche sulla Geometria proiettiva iperspaziale, avvenute specialmente in Italia. Non è qui il caso di enumerare questi lavori: soltanto fra i promotori di questo largo movimento scientifico, accanto al Veronese, dobbiamo nominare il *Segre*. Questi non solo fu tra i primi a seguire l'impulso dato dal Veronese, ma segnò anche un indirizzo nuovo mostrando sistematicamente l'uso che si poteva trarre dagli iperspazi mediante le varie interpretazioni date all'elemento «punto»: abbiamo già accennato all'origine di tale concetto da Plücker, Cayley, ecc.; al Segre (che lo ha introdotto in Italia) spetta di averlo popolarizzato mostrando con molti esempi concreti la sua grande importanza<sup>60</sup>.

## 1.20 I postulati della Geometria proiettiva iperspaziale

Secondo ciò che abbiamo detto nel precedente paragrafo, il problema generale di porre i postulati della Geometria si può considerare come consistente nell'assegnare «le relazioni geometriche fondamentali che caratterizzano un  $S_n$  metrico proiettivo ossia una varietà a curvatura costante».

L'opera del *Veronese* «Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee»<sup>61</sup>, si propone l'analisi di queste proposizioni (anche con intento di generalizzazione rispetto alle ordinarie nozioni della continuità) cercando di profittare delle mutue relazioni fra le nozioni metriche e le proiettive e quelle di continuità per ridurre al minimo il numero dei postulati occorrenti.

Sotto un diverso aspetto si presenta il problema dei postulati della Geometria ove si vogliano separare i vari ordini di nozioni che in esse compariscono, ciò che a noi sembra conforme al criterio fisio-psicologico<sup>62</sup>. Abbiamo

---

<sup>59</sup>Pare che il primo esempio di siffatte applicazioni sia dovuto al Cayley («Sur quelques théorèmes de la géométrie de position» Crelle t. 31).

<sup>60</sup>Si confrontino per es. i suoi lavori sulle quadriche, sulla Geometria della retta, sulla Geometria delle coniche nel piano, ecc. nelle Memorie e negli Atti dell'Accademia di Torino (anni 1884 e seguenti).

<sup>61</sup>Padova 1891.

<sup>62</sup>S'intende che ad approfondire l'esame critico dei postulati della Geometria non si

cercato nei paragrafi precedenti di rilevare come nella formazione del concetto dello  $S_n$  metrico-proiettivo, (in particolare dello  $S_3$  intuitivo) concorrono essenzialmente tre ordini di nozioni:

1. le nozioni di connessione fondamento comune di ogni forma di intuizione geometrica;
2. le nozioni proiettive;
3. le nozioni metriche.

In conseguenza il problema dei postulati si presenterebbe a noi sotto il seguente aspetto:

1. caratterizzare la varietà continua  $v_n$  ad  $n$  dimensioni;
  2. caratterizzare tra le  $v_n$  lo  $S_n$  proiettivo immaginando posta in  $v_n$  una particolare famiglia di curve, superficie, ecc. (le rette, i piani, ecc.) soddisfacenti a date relazioni fondamentali: dedurne mediante una quadrica-assoluto di riferimento una determinazione metrica;
- oppure
- 2' porre in  $v_n$  le nozioni metriche fondamentali conducenti alla rappresentabilità di  $v_n$  con coordinate e all'espressione dell'elemento lineare; caratterizzare fra le  $v_n$  quelle (complete) a curvatura costante e dedurne le fondamentali relazioni di posizione fra le geodetiche.

Diciamo subito che la 1<sup>a</sup> questione presenta delle difficoltà e che ad ogni modo i postulati che caratterizzano una  $v_n$  riescono assai complicati; se si aggiunge la considerazione delle difficoltà che presenta la questione 2') ove si voglia trattare in via sintetica, ci si convince che il secondo dei modi detti innanzi appare solo praticabile ove si parta a priori da una rappresentabilità analitica della  $v_n$  (secondo è stato accennato nei §<sup>i</sup> 14 e seguenti): il problema concernente gli elementi della teoria della connessione riesce invece assai semplice limitato a quanto si riferisce agli enti fondamentali dello  $S_n$  proiettivo (rette, piani, ecc.). La ragione di ciò sta nel fatto che ci si limita qui a caratterizzare una classe di enti molto più ristretta: ove si voglia poi porre le nozioni caratteristiche delle «varietà a più dimensioni» contenute in un  $S_n$ , e precisare così le nozioni fondamentali della generale teoria della connessione le medesime difficoltà compariscono di nuovo: e però non ci sembrerebbe

---

dovrebbe limitarsi esclusivamente a questo punto di vista, interessando di indagare in tutti i modi le mutue relazioni fra i vari ordini di concetti.

giusto che si traesse un argomento in contrario a questa trattazione dei postulati dalla difficoltà di porre in modo semplice quelli che si riferiscono alla definizione generale d'una  $v_n$ .

Introdotte le relazioni fondamentali tra gli  $S_r$  ( $r < n$ ) contenuti in  $S_n$  (relazioni che costituiscono il gruppo dei postulati della così detta *Geometria di posizione*)<sup>63</sup> il gruppo dei postulati di connessione può ridursi a ciò che basta a stabilire il concetto di *segmento*, e di *continuità* sulla retta (aggiunto il carattere proiettivo dei segmenti).

Ciascuno dei due gruppi menzionati di postulati ha dato luogo a varie ricerche di cui mal potremo riferire brevemente. Tuttavia crediamo utili le seguenti considerazioni.

- 1) I postulati della Geometria di posizione si presentano differenti a seconda che si vuol fondare la Geometria ellittica, iperbolica o parabolica. La differenza si può riportare ai postulati della Geometria piana. Nel porre questi postulati lasciamoci guidare dall'intuizione dando al «piano astratto» il significato di «piano intuitivo». L'intuizione del *piano* ci fornisce in primo luogo il postulato «Per due punti di un piano passa *una retta* giacente in esso piano». Successivamente l'intuizione ci dice che nel piano vi sono coppie di rette che non hanno alcun punto comune. Essa ci dice ancora che «data (nel piano) una retta  $a$  ed un punto  $A$  fuori di essa, vi è per  $A$  *una* retta (*parallela* ad  $a$ ) che non incontra  $a$ » (Postulato d'Euclide). L'intuizione ci dà dunque il piano parabolico (euclideo). Ma se prescindiamo dal postulato d'Euclide acquistiamo il concetto intuitivo di un piano più generale, «il piano iperbolico» che abbraccia come caso limite il piano parabolico. Questo concetto nasce così nella nostra mente dall'intuizione combinata coll'astrazione. Si compia un'astrazione successiva separando nella nostra mente quegli elementi dell'intuizione che provengono dalla sola «vista»: formiamoci così una nuova forma d'intuizione, la *intuizione grafica*. Immaginiamo quindi di concepire il piano intuitivo conforme al modo con cui il piano *fisico* si presenta all'occhio d'un osservatore sfornito di qualsiasi altro senso, supponendo in conseguenza di poter sostituire indifferentemente ad un piano dato  $\pi$  un altro piano prospettivo (essendo centro di proiezione l'occhio dell'osservatore, riguardato come un punto  $O$  esterno al piano  $\pi$ ). Allora due rette qualunque del piano  $\pi$  vengono proiettate da  $O$  secondo due piani che hanno sempre una retta comune:

---

<sup>63</sup>Intesa in un senso più ristretto dell'ordinario: in senso largo si può comprendere sotto questo nome tutta la Geometria proiettiva.



perciò al piano  $\pi$  si può sempre sostituire, nei rapporti visivi, un piano prospettivo  $\pi'$  in modo che le proiezioni (fatte da  $O$ ) di due rette di  $\pi$  che non s'incontrano sieno due rette di  $\pi'$  che s'incontrano; il punto comune di queste due rette di  $\pi'$  può ritenersi (convenzionalmente) come immagine di un *punto ideale* comune alle due rette di  $\pi$ : questo punto ideale può essere riguardato come il *centro* di un *fascio improprio di raggi* sezione di un ordinario fascio di piani il cui asse passa per  $O$ . Questa convenzione ha come si vede il suo sostrato nell'intuizione grafica; ma perché essa possa essere usata negli sviluppi matematici si esige anzitutto la dimostrazione che essa è indipendente dalla scelta arbitraria del punto  $O$  fuori di  $\pi$ , e quindi che i postulati fondamentali della Geometria di posizione sussistono ancora intendendo indifferentemente colla parola «punto» che compare in quegli enunciati, il punto *reale* intuitivo, ed il punto ideale. Ciò si realizza in fatto coll'introduzione successiva (mediante convenzione) delle *rette* e dei *piani ideali*: ci si appoggia a tal fine su pochi principii intuitivi della Geometria di posizione (come «Due punti determinano *una retta* cui appartengono», «Un punto e una retta che non si appartengono determinano *un piano* a cui appartengono», «Un piano contiene la retta determinata da due suoi punti», «Due piani aventi un punto comune hanno comune una retta per esso»)<sup>64</sup>.

Così mediante l'aggiunta degli elementi ideali a quelli reali dello spazio iperbolico  $S_3$ , si ottiene di poter enunciare le proposizioni fondamentali della Geometria di posizione dello  $S_3$  sotto la forma che si dà comunemente a queste proposizioni nella Geometria proiettiva ordinaria dopo l'introduzione degli *elementi all'infinito*: anzi questa stessa introduzione degli elementi all'infinito nello  $S_3$  euclideo viene ora ad apparirci come un caso particolare della introduzione degli elementi ideali nello  $S_3$  iperbolico.

Se ricordiamo ciò che nel §19 abbiamo detto intorno alla determinazione metrica iperbolica nello  $S_3$  proiettivo, vediamo che i punti ideali in tale  $S_3$  non sono altro che quelli esterni alla quadrica assoluta che abbiamo avvertito doversi togliere da tale  $S_3$  (ossia non doversi più considerare come effettivi punti dello  $S_3$  iperbolico). Lo  $S_3$  stesso in quanto lo si considera *completo* appare dunque diverso secondoché lo si considera come  $S_3$  iperbolico o come  $S_3$  proiettivo soltanto.

Bisogna uniformare la concezione dello  $S_3$  al punto di vista cui si mira nel suo studio ed in particolare la concezione dello  $S_3$  proiettivo alla

---

<sup>64</sup>Non possiamo dilungarci negli sviluppi qui occorrenti: rimanderemo perciò alle «Vorlesungen über neuere Geometrie» di *Pasch*.

pura intuizione grafica, rispetto a cui gli elementi ideali non debbono distinguersi dai reali. Allora le relazioni fondamentali della Geometria di posizione nello  $S_3$  proiettivo si possono riguardare come veri postulati intuitivi, ma ci si riferisce qui ad una forma superiore dell'intuizione, la quale si ha nella mente del cultore della Geometria proiettiva, per effetto di una sistematica astrazione da alcuni elementi dell'intuizione ordinaria.

In ciò che precede abbiamo esaminato come, col formarsi dell'intuizione grafica, si assurga al concetto del piano e dello spazio ( $S_3$ ) proiettivo partendo dal piano e dallo spazio intuitivo: ciò anche prescindendo dal postulato d'Euclide, cioè nel caso iperbolico e parabolico. Del caso ellittico non abbiamo parlato, anzi il piano ellittico è stato subito escluso come ripugnante alla nostra intuizione, ammettendo che vi sieno nel piano coppie di rette che non s'incontrano. Ma, avendo fatta astrazione da alcuni elementi dell'intuizione, si vede ora che rispetto alla pura intuizione grafica il piano e lo spazio ellittico non sono più ripugnanti; anzi senza nessuna convenzione lo spazio ellittico soddisfa senz'altro ai postulati di posizione dello  $S_3$  proiettivo.

- 2) I postulati della Geometria di posizione in  $S_3$  (che oramai intendiamo desunti dalla pura intuizione grafica) possono esser posti sotto tal forma che la generalizzazione occorrente per passare agli analoghi postulati dello  $S_n$  ( $n > 3$ ) appaia spontanea. Basta per ciò partire dalla generazione del piano grafico ottenuta proiettando una retta da un punto esterno, e dalla generazione dello  $S_3$  grafico mediante proiezione di un piano da un punto esterno. Allora (cfr. il §11) possiamo introdurre come postulato l'esistenza d'un punto esterno allo  $S_3$  che dia luogo ad una analoga generazione dello  $S_4$  ecc.

Il postulato che qui si introduce ha un carattere diverso dai precedenti; esso suppone una successiva astrazione della mente per la quale si prescinde dalla natura dell'elemento «punto» e si pensi di poter interpretare questo elemento in modo diverso: ciò quando si voglia acquistare dello  $S_4$  (e più generalmente dello  $S_n$ ) un concetto intuitivo riguardando lo  $S_4$  stesso nel suo complesso. Ma possiamo ancora conservare la nozione intuitiva del «punto»; soltanto allora lo  $S_4$  (e in generale lo  $S_n$ ,  $n > 3$ ) non è più una forma intuitiva, ma si può riguardare come una forma intuitiva ogni  $S_3$  contenuto nello  $S_4$ , e dopo aver assimilato le fondamentali relazioni che legano gli  $S_3$  in un  $S_4$  (o in un  $S_n$ ) assurgere ad una intuizione, invero differente dall'intuizione fisica, la *intuizione iperspaziale*. La generazione anzidetta degli iperspazi appare esplicitamente in *Veronese* «Behandlung der projec-

tivischen Verhältnuisse ecc.», «Fondamenti di Geometria ecc.» (opere c.); essa compare pure in *Amodeo* «Quali possono essere i postulati della Geometria proiettiva di un  $S_r$ »<sup>65</sup>, *Fano* «Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare ecc.»<sup>66</sup>.

È da avvertire che occorre completare la generazione data del «piano» ammettendo che esso contenga la retta che ne congiunge due punti arbitrari; da ciò si deduce che due rette d'un piano hanno sempre un punto comune; invero il piano ellittico o parabolico, non completato coll'aggiunta dei punti ideali, non vengono generati *interamente* proiettando una retta da un punto esterno.

È pure da avvertire che la Geometria di posizione dello  $S_n$  (fondata sui postulati di posizione introdotti) comprende il «teorema dei triangoli omologici» e le sue conseguenze relative ai gruppi armonici ecc.; ma per ciò (secondoché il Klein ha osservato) occorre supporre  $n \geq 3$ .

Il Fano (nella citata nota) ha condotto più innanzi l'esame critico dei postulati della Geometria di posizione in confronto al secondo gruppo di postulati della Geometria proiettiva, rilevando l'esistenza di *configurazioni costituite da un numero finito di elementi* (punti) per le quali sono soddisfatti i postulati della Geometria di posizione in un  $S_n$ . Ciò mostra come i detti postulati non costituiscono la parte più intrinseca della nostra intuizione geometrica.

- 3) I postulati di connessione della retta occorrenti alla Geometria proiettiva consistono specialmente in quelli relativi alle nozioni di *ordini naturali, segmenti* ecc., e nel postulato di continuità.

Di questi postulati (e del modo come essi permettono di colmare una lacuna lasciata dallo Staudt nella dimostrazione del teorema fondamentale della proiettività) trattano anzitutto *Klein*<sup>67</sup> e *Darboux*<sup>68</sup>: dal teorema di quest'ultimo<sup>69</sup> segue in particolare che i postulati di con-

<sup>65</sup>Atti dell'Accademia di Torino vol. XXVI - 1891.

<sup>66</sup>Giornale di Matematiche di Battaglini - 1891.

<sup>67</sup>Mathem. Annalen Bol. VI, VII.

<sup>68</sup>Mathem. Annalen Bol. XVII.

<sup>69</sup>Il teorema a cui si allude è il seguente: Una funzione della variabile reale  $x$  che soddisfa alle equazioni funzionali

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(x^2) &= \{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

è necessariamente la funzione

$$f(x) = x.$$

nessione della retta occorrenti alla Geometria proiettiva sono quelli che conducono alla rappresentabilità dei punti della retta mediante *coordinate proiettive* cioè mediante un sistema di coordinate tali che il birapporto dei 4 numeri corrispondenti ai punti d'un gruppo armonico sia uguale a  $-1$ . In seguito a ciò *De Paolis*<sup>70</sup> e *Pasch*<sup>71</sup> nel porre i postulati di connessione della retta si propongono appunto di venire alla rappresentabilità dei punti di essa mediante coordinate proiettive. Tuttavia un'osservazione generale deve esser fatta a proposito dei menzionati lavori: in essi compare il concetto metrico di segmenti *uguali*, quindi si fa uso in parte dell'intuizione metrica ordinaria, ossia di un elemento estraneo alla pura concezione dello spazio proiettivo.

Bisogna aggiungere però che la nozione metrica sopra nominata non compare nei detti lavori in modo essenziale: se ne fa uso soltanto per stabilire qualche proposizione grafica che serva di base alle successive deduzioni. Appunto da tale osservazione muovono l'Amodeo ed il Fano nei citati lavori. Il primo di essi segue lo svolgimento di De Paolis per porre sulla retta le coordinate proiettive; fa uso per ciò degli *ordini naturali* dei punti della retta, introduce sotto forma grafica il postulato d'Archimede e successivamente pone un altro postulato pei punti irrazionali. Il Fano invece mostra come, prescindendo dal concetto degli ordini naturali, si può raggiungere lo stesso scopo assumendo come postulati alcuni enunciati relativi alle *serie armoniche*, che nel lavoro di De Paolis compariscono come teoremi: solo in via subordinata accenna agli ordini naturali dei punti d'una retta (senza sviluppare) osservando acutamente una lacuna nelle ordinarie dimostrazioni della separazione delle coppie di punti coniugati in un gruppo armonico.

Si può avere così un sistema di postulati atti a fondare la Geometria dello  $S_n$  proiettivo: ma se lo scopo può venir raggiunto dal punto di vista logico, non accade ugualmente che i postulati così introdotti rivestano il carattere di intuitività, fatta eccezione per quanto concerne la considerazione degli ordini naturali sulla retta (considerazione non abbastanza precisata): il punto di vista intuitivo viene poi abbandonato del tutto nell'introduzione dei punti aventi coordinate irrazionali.

Il modo più naturale di porre i postulati di connessione della retta è di analizzare i dati dell'intuizione grafica della retta facendo astrazione da ogni elemento dell'intuizione metrica: occorre dunque portare l'attenzione sulla generazione della retta col *movimento* d'un punto o se si vuole sul *movimento della retta su se stessa*, ma (conforme all'intui-

---

<sup>70</sup> «Sui fondamenti della Geometria proiettiva» (Memorie Accad. dei Lincei 1880-81).

<sup>71</sup> «Vorlesungen ecc.» (op. c.).

zione grafica) della retta concepita come *elastica* non già come *rigida*. Se ne desumeranno allora le nozioni relative agli *ordini naturali* dei punti della retta, e quindi di *segmento* (indipendentemente dalla sua lunghezza) ecc.

Nella nota di *Enriques* «Sui fondamenti della Geometria proiettiva»<sup>72</sup> viene appunto analizzato il concetto intuitivo grafico del movimento della retta (movimento della retta elastica), e desunta una serie di postulati grafici relativi agli ordini naturali dei punti d'una retta ecc. Ivi si mostra come da tali postulati grafici seguano tutte le proposizioni fondamentali che nello sviluppo della Geometria proiettiva si desumono generalmente da quel concetto intuitivo; e come si possa introdurre sotto forma intuitiva grafica il postulato della continuità; e quindi stabilire sinteticamente il teorema fondamentale della proiettività (ciò che equivale alla rappresentabilità dei punti della retta mediante coordinate proiettive).

Crediamo opportuno di far seguire le precedenti considerazioni dall'enumerazione dei postulati grafici che poniamo a base della Geometria dello  $S_n$  proiettivo ( $n \geq 3$ ), facendo risaltare come questi postulati tengano luogo di definizione per lo  $S_n$  stesso.

Gli elementi geometrici fondamentali sono i *punti* (o  $S_0$ ), le *rette* (o  $S_1$ ), i *piani* (o  $S_2$ ), ..., gli  $S_{n-1}$ , lo  $S_n$ : ciascun  $S_r$  ( $r \leq n$ ) vien concepito come insieme di *infiniti punti* (che gli *appartengono*); si dice che un  $S_r$  *appartiene* ad un  $S_h$  o è *contenuto* in  $S_h$  se i punti dello  $S_r$  appartengono allo  $S_h$ . Gli elementi fondamentali  $S_0, S_1, \dots, S_n$  non vengono definiti. Si suppone  $n \geq 3$ .

Si introducono i postulati seguenti:

### *I. Postulati della Geometria di posizione*

1. Due punti ( $S_0$ ) di  $S_n$  appartengono ad una retta  $S_1$  (che si dice *proiettante* un punto dall'altro).
2. Vi sono in  $S_n$  punti *esterni* (non appartenenti) ad una retta. Proiettando i punti di una retta da un punto esterno si genera *un piano*  $S_2$  (luogo dei punti delle rette proiettanti) appartenente ad  $S_n$ .
3. Un piano contiene la retta determinata da due suoi punti arbitrari.  
(Segue:  
Due rette di un piano hanno sempre comune *un* punto.)

---

<sup>72</sup>Rendiconti Istituto Lombardo - 1893.

4. Vi sono in  $S_n$  punti esterni ad un  $S_r$  ove  $r < n$ .  
 Proiettando i punti di un  $S_r$  da un punto esterno si genera un  $S_{r+1}$  (luogo dei punti delle rette proiettanti), appartenente ad  $S_n$ .

*II. Postulati relativi alla connessione della retta*

5. Esiste una *disposizione circolare naturale* dei punti d'una retta che ha due *sensi* l'uno *inverso* dell'altro. A ciascun senso della disposizione appartiene un *ordine (naturale)* dei punti della retta avente un dato *primo* punto.

In un ordine naturale dei punti d'una retta:

- a) dati due punti  $B, C$  l'uno per esempio  $B$  *precede* l'altro (ed allora  $C$  *segue*  $B$ ).
- b) se  $B, C, D$  sono tre punti della retta, e se  $B$  *precede*  $C$  e  $C$  *precede*  $D$ , in conseguenza  $B$  *precede*  $D$ .

I due ordini naturali dei punti d'una retta che hanno uno stesso primo punto e appartengono ai due sensi opposti della disposizione sono l'uno *inverso* dell'altro, cioè si deducono l'uno dall'altro collo scambio delle parole «*precede*» e «*segue*» (fatta eccezione pel primo punto che è lo stesso per entrambi).

Due ordini naturali  $(A), (B)$  che hanno lo stesso senso e come primi punti  $A, B$ , si deducono l'uno dall'altro colla *permutazione circolare* che porta  $A$  in  $B$ , cioè due punti che si seguono nello stesso modo in  $(A)$  si seguono nello stesso modo in  $(B)$  se ambedue precedono o ambedue non precedono  $B$  in  $(A)$ , ed invece si seguono in modo opposto in  $(B)$  se l'uno precede  $B$  in  $(A)$  e l'altro no.

6. Nel piano *proiettando* da un punto esterno una retta sopra un'altra si deduce da un ordine naturale della prima un ordine naturale della 2<sup>a</sup>.
7. (Postulato della continuità). Se, dato sulla retta un ordine naturale, i punti della retta vengono divisi in due *parti* in modo che:

- a) ciascun punto della retta appartenga ad *una* delle due parti,  
 b) ogni punto della 1<sup>a</sup> parte preceda sempre ogni punto della 2<sup>a</sup>,

esiste *un* punto della retta (che può appartenere all'una o all'altra parte) cui non conseguono punti della 1<sup>a</sup> parte e non precedono punti della 2<sup>a</sup>.

## 1.21 Alcune proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva di $S_n$

I postulati stabiliti nel precedente paragrafo per lo  $S_n$  si riducono a quelli della ordinaria Geometria proiettiva se  $n = 3$ . Questa Geometria proiettiva si può dunque ritenere fondata entro ogni  $S_3$  di  $S_n$ . Enunciamo ora alcune proposizioni fondamentali che si deducono dai detti postulati, e caratterizzano le mutue relazioni degli spazi contenuti in un  $S_n$ .

In  $S_n$ , un  $S_h$  ed un  $S_k$  aventi comune un  $S_i$  appartengono sempre ad un  $S_{h+k-i}$  ma non ad uno spazio di dimensione minore.

In particolare se  $h + k > n$ , lo  $S_h$ ,  $S_k$  hanno comune un  $S_{h+k-n}$  o uno spazio di dimensione maggiore: nel 1° caso diconsi *indipendenti* nello  $S_n$  e non appartengono ad uno stesso  $S_{n-1}$ .

In  $S_n$   $r + 1$  punti ( $r < n$ ) appartengono sempre ad un  $S_r$  o ad uno spazio di dimensione minore: nel 1° caso diconsi *indipendenti*. Se  $r \geq n - r + 1$  punti di  $S_n$  diconsi *indipendenti* quando tra essi non ve ne sono  $n$  appartenenti ad un  $S_{n-2}$ . Gli  $S_{n-1}$  di  $S_n$  diconsi anche *iperpiani*.

In  $S_n$   $r + 1$  iperpiani ( $r < n$ ) hanno comune un  $S_{n-r-1}$  o uno spazio di dimensione maggiore: nel 1° caso diconsi *indipendenti*.

Vi è una *legge di dualità* della Geometria proiettiva dello  $S_n$ , per la quale si scambiano negli enunciati i «punti» e gli «iperpiani» gli « $S_h$ » e gli « $S_{n-h-1}$ ». Le proposizioni precedenti ne porgono esempio.

La dimostrazione della legge di dualità si può dare osservando che la varietà degli iperpiani di  $S_n$  chiamati «punti» può ancora considerarsi come un  $S_n$  che ha come iperpiani i «punti» del 1°  $S_n$  ecc.

Un'ultima osservazione. Il concetto di gruppo armonico di 4 punti d'una retta di  $S_n$  posto mediante un piano per la retta, dà una definizione del gruppo armonico indipendente dal piano considerato, giacché due piani per una retta stanno sempre in un  $S_3$ . Per conseguenza anche la relazione di proiettività fra due rette (definita la proiettività come corrispondenza che conserva i gruppi armonici, secondo *Staudt*) attribuita a due rette di un  $S_n$  ( $n > 3$ ) è (come in  $S_3$ ) una relazione delle due rette in sé indipendente dal fatto che le rette stesse si considerino appartenenti a piani (o ad  $S_3$ ) arbitrariamente condotti per esse.

In  $S_n$  si può considerare come *forma di 1ª specie* l'insieme degli  $S_{r-1}$  di un  $S_r$  ( $r < n$ ) aventi comune un  $S_{r-2}$  (*fascio* d'iperpiani di  $S_r$ ): ed anche per queste forme di 1ª specie si può porre il concetto di gruppo armonico, di proiettività ecc.

Sussiste il teorema fondamentale (di *Staudt*) «la proiettività tra due forme di 1ª specie è individuata da tre coppie di elementi omologhi».

Come esso si deduca dai postulati posti innanzi potrà vedersi nella citata Nota di *Enriques*.

## 1.22 Il teorema fondamentale della proiettività e le coordinate proiettive nello $S_n$

Due  $S_n$  ( $n > 1$ ) diconsi *proiettivi* quando sono riferiti in modo che ad un punto dell'uno corrisponda un punto dell'altro (e viceversa), ed ai punti di un  $S_{n-1}$  nell'uno corrispondano nell'altro i punti d'un  $S_{n-1}$ .

Segue dalla definizione che «in una proiettività tra due  $S_n$  ad un  $S_r$  ( $r \leq n$ ) corrisponde un  $S_r$ , e che due  $S_r$  corrispondenti sono proiettivi».

Sussiste il teorema fondamentale:

*Esiste una proiettività tra due  $S_n$  in cui ad  $n + 2$  punti indipendenti dell'uno corrispondono  $n + 2$  punti indipendenti dell'altro.* È noto dalle lezioni di Geometria proiettiva come questo teorema si deduca per  $n = 2$  dal teorema fondamentale per le forme di 1<sup>a</sup> specie ( $n = 1$ ): il teorema sarà dunque stabilito in generale ove si supponga già dimostrato per gli  $S_{n-1}$  ( $n \geq 3$ ) e si dimostri per gli  $S_n$ .

Supponiamo dunque stabilito il teorema per gli  $S_{n-1}$ ,  $n \geq 3$ . Si abbiano due  $S_n$  ed in essi rispettivamente i gruppi di  $n + 2$  punti indipendenti  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}, E; B_1, B_2, \dots, B_{n+1}, E'$ . Si indichino con  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gli iperpiani ( $S_{n-1}$ ) individuati rispettivamente dai punti  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{n+1}; B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_{n+1}$ . Facciamo corrispondere i punti  $A_i, B_i$  ed  $E, E'$ : se esiste una proiettività tra i due  $S_n$  in cui i detti punti si corrispondono, in tale proiettività si corrisponderanno anche gli iperpiani  $\alpha_i, \beta_i$ . Proiettiamo  $E, E'$  rispettivamente da  $A_i, B_i$  su  $\alpha_i, \beta_i$  in  $E_i, E'_i$ . La corrispondenza intercedente tra  $\alpha_i, \beta_i$  dovrà essere *la* proiettività (per ipotesi) individuata dalle  $n + 1$  coppie  $A_1 B_1, \dots, A_{i-1} B_{i-1}, A_{i+1} B_{i+1}, \dots, E_i E'_i$ , (i gruppi  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, E_i$  ecc. sono costituiti da punti indipendenti se tali sono i gruppi di  $n + 2$  punti dati).

Poniamo tra  $\alpha_i, \beta_i$  la menzionata proiettività che possiamo menzionare con  $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & A_{i+1} & \dots & E_i \\ B_1 & \dots & B_{i-1} & B_{i+1} & \dots & E'_i \end{pmatrix}$ : similmente poniamo tra  $\alpha_k, \beta_k$  ( $k \neq i$ )

la proiettività  $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & A_{k+1} & \dots & E_k \\ B_1 & \dots & B_{k-1} & B_{k+1} & \dots & E'_k \end{pmatrix}$  essendo  $E_k, E'_k$  le rispettive proiezioni di  $E, E'$  fatte su  $\alpha_k, \beta_k$  da  $A_k, B_k$ .

Tra gli  $S_{n-2}$   $\alpha_i \alpha_k$  e  $\beta_i \beta_k$  comuni alle due coppie di iperpiani risulta allora una proiettività che è la medesima comunque i detti  $S_{n-2}$  si considerino corrispondenti rispettivamente in  $\alpha_i \beta_i$  o in  $\alpha_k \beta_k$ , giacché tale proiettività è



quella individuata dalle  $n$  coppie  $A_1B_1, \dots, A_{i-1}B_{i-1}, A_{i+1}B_{i+1}, \dots, A_{k-1}B_{k-1}, A_{k+1}B_{k+1}, \dots, E_{ik}E'_{ik}$  dove  $E_{ik}E'_{ik}$  designano le rispettive proiezioni di  $EE'$  fatte dalle rette  $A_iA_k, B_iB_k$  sui nominati  $S_{n-2}$   $\alpha_i\alpha_k, \beta_i\beta_k$ .

Osservato ciò, dopo aver posto le menzionate proiettività tra gli iperpiani  $\alpha_i\beta_i$  e  $\alpha_k\beta_k$ , potremo affermare che se tra i due  $S_n$  esiste una proiettività in cui si corrispondono le  $n + 2$  coppie  $A_1B_1, \dots, EE'$  fissate, il corrispondente  $P'$  di un qualunque punto  $P$  del 1°  $S_n$  deve potersi costruire nel seguente modo:

- a) si proietti  $P$  da  $A_i, A_k$  rispettivamente su  $\alpha_i\alpha_k$  in  $P_iP_k$ ,
- b) si determinino i punti  $P'_iP'_k$  omologhi di  $P_iP_k$  rispettivamente in  $\beta_i\beta_k$ ,
- c) si determini il punto  $P'$  comune alle rette  $B_iP'_i, B_kP'_k$ ;

perché la costruzione sia possibile occorre che le rette  $B_iP'_i, B_kP'_k$  giacciano in uno stesso piano: ciò accade in fatto, perché se si designa con  $P_{ik}$  la proiezione di  $P$  fatta dalla retta  $A_iA_k$  sullo  $S_{n-2}$   $\alpha_i\alpha_k$ , e con  $P'_{ik}$  il punto omologo nello  $S_{n-2}$   $\beta_i\beta_k$ , si ha che  $P'_{ik}, P'_i, B_k$  sono su una retta e similmente  $P'_{ik}, P'_k, B_i$ , onde le rette  $B_iP'_i, B_kP'_k$  giacciono nel piano dei 3 punti  $B_i, B_k, P'_{ik}$ .

Concludiamo intanto che se esiste tra i due  $S_n$  una proiettività in cui si corrispondano le  $n + 2$  coppie di punti dati questa proiettività è unica.

Per vedere se una tale proiettività sarà sempre possibile occorre domandarci «la costruzione sopra enunciata fornirà effettivamente una proiettività tra i due  $S_n$ ?».

Cominciamo dall'osservare che nella corrispondenza tra i due  $S_n$  costruita in tal modo ai punti d'una retta per  $A_i$  o  $A_k$  corrispondono i punti d'una retta rispettivamente per  $B_i, B_k$ , e (poiché  $\alpha_i\beta_i, \alpha_k\beta_k$  sono proiettivi) alle rette d'un piano per  $A_i$  o  $A_k$ , corrispondono le rette d'un piano rispettivamente per  $B_i, B_k$ , segue da ciò che ai punti d'una retta qualunque del 1°  $S_n$ , considerata come sezione dei piani che la proiettano da  $A_iA_k$  corrispondono nel 2°  $S_n$  i punti d'una retta, cioè della retta intersezione dei piani omologhi rispettivamente per  $B_iB_k$ . Analogamente si vede che ai punti d'un  $S_{n-2}$  del 1°  $S_n$  corrispondono i punti d'un  $S_{n-2}$  nel 2°. Siccome poi un  $S_{n-1}$  è il luogo delle rette proiettanti da un punto i punti d'un  $S_{n-2}$ , segue che ai punti d'un  $S_{n-1}$  del 1°  $S_n$  corrispondono nel 2° i punti d'un  $S_{n-1}$ .

In altre parole la corrispondenza costruita è una proiettività. Ciò dimostra il teorema.

Riguardo alla dimostrazione osserveremo che abbiamo riferito i ragionamenti a punti e spazi non aventi una posizione particolare rispetto ai dati ed allora le proiezioni eseguite non cadevano in difetto stante la supposta

indipendenza dei dati gruppi di  $n + 2$  punti: ma anche in quei casi particolari partitamente esaminati si perviene subito alla medesima conclusione.

Una applicazione immediata del teorema fondamentale della proiettività in  $S_n$  consiste nel porre in  $S_n$  una rappresentazione analitica dei punti mediante *coordinate proiettive*<sup>73</sup>.

Consideriamo la varietà di tutti i gruppi omogenei di  $n + 1$  variabili  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ .

Questa varietà può considerarsi come un  $S_n$  ( $S_n$  analitico) ove si chiamino:

- a) «*punti*» i gruppi di variabili (elementi della varietà).
- b) «*retta* determinata dai punti  $x_1, \dots, x_{n+1}, x'_1, \dots, x'_{n+1}$ » l'insieme dei punti  $\lambda x_1 + \mu x'_1, \dots, \lambda x_{n+1} + \mu x'_{n+1}$  (ove  $\lambda$  e  $\mu$  sono parametri).
- c) in conseguenza di ciò mediante la generazione degli spazi contenuta nei postulati della Geometria di posizione, si chiami « $S_r$ » ( $r = 2, 3, \dots, n - 1$ ) determinato da  $r + 1$  punti indipendenti (non appartenenti ad un  $S_{r-1}$ )  $x_1, \dots, x_{n+1}, x'_1, \dots, x'_{n+1}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_{n+1}^{(r)}$  l'insieme dei punti

$$\lambda x_1 + \lambda_1 x'_1 + \dots + \lambda_r x_1^{(r)} + \dots + \lambda x_{n+1} + \lambda_1 x'_{n+1} + \dots + \lambda_r x_{n+1}^{(r)}.$$

Si può allora verificare che restano verificati tutti i postulati fondamentali della Geometria di  $S_n$ .

Segue poi dalle note proprietà dei sistemi di equazioni lineari che «lo  $S_r$  ( $r < n$ ) nello  $S_n$  analitico è l'insieme dei gruppi  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  soddisfacenti ad  $n - r$  equazioni lineari omogenee indipendenti (ciascuna delle quali rappresenta un  $S_{n-1}$  per lo  $S_r$ )».

Dopo ciò possiamo affermare che «*Il modo più generale di porre in un dato  $S_n$  un sistema di coordinate omogenee (proiettive) tali che gli iperpiani ( $S_{n-1}$ ) vengano rappresentati da equazioni lineari è di porre una proiettività tra il dato  $S_n$  e lo  $S_n$  analitico*».

A tal fine si prendano ad arbitrio nel dato  $S_n$   $n + 2$  punti indipendenti  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}, E$ , e si facciano corrispondere rispettivamente ad essi gli  $n + 2$  punti indipendenti dello  $S_n$  analitico  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1), (1, 1, \dots, 1)$ : si chiamino  $A_1, \dots, A_{n+1}$  *vertici dello  $(n + 1)$ -gono fondamentale delle coordinate* ed  $E$  il *punto unità*: resta allora fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee nello  $S_n$ .

Se  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  sono le coordinate proiettive omogenee dei punti d'un  $S_n$ , si ottiene un sistema di coordinate proiettive non omogenee in  $S_n$  assumendo i rapporti  $\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}$ ; però in questa rappresentazione analitica

<sup>73</sup>Cfr. il §12.

sono singolari i punti dell'iperpiano  $x_{n+1} = 0$  i quali hanno tutte le coordinate infinite, ma (in generale) finiti i rapporti  $\frac{x_i}{x_k}$  ( $i \leq n, k \leq n$ ). Come possa esser dato in un modo più diretto il significato delle coordinate d'un punto nello  $S_n$ , diremo tra poco.

Occorre innanzi osservare che per il modo stesso come sono state poste le coordinate proiettive in  $S_n$ , una *trasformazione di coordinate* equivale ad una proiettività posta in  $S_n$ .

Le sostituzioni lineari omogenee

$$y_i = \alpha_{i_1}x_1 + \dots + \alpha_{i_{n+1}}x_{n+1} \quad (i = 1, \dots, n+1) \quad (1)$$

stabiliscono in  $S_n$  una proiettività, e per conveniente scelta dei coefficienti  $\alpha$  permettono di far corrispondere in *un* modo determinato due gruppi di  $n+2$  punti indipendenti: esse costituiscono dunque le equazioni della più generale proiettività in  $S_n$ , ed in pari tempo danno la più generale trasformazione delle coordinate proiettive.

Dati quattro punti  $\lambda_1x_i + \mu_1x'_i, \lambda_2x_i + \mu_2x'_i, \lambda_3x_i + \mu_3x'_i, \lambda_4x_i + \mu_4x'_i$ , ( $i = 1, \dots, n+1$ ) sopra una retta di  $S_n$  il birapporto dei 4 numeri  $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \frac{\lambda_3}{\mu_3}, \frac{\lambda_4}{\mu_4}\right)$  non muta per una qualsiasi sostituzione lineare eseguita insieme sulle  $x_i, x'_i, \lambda x_i + \mu x'_i$ ; questo numero rappresenta dunque qualche cosa di inerente al gruppo dei 4 punti che non muta per una qualsiasi proiettività in  $S_n$  (cioè un *invariante assoluto*); esso si dirà il *birapporto dei 4 punti* della retta.

Allora è facile stabilire che il significato delle coordinate proiettive d'un punto  $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  nel sistema che ha come  $(n+1)$ -gono fondamentale  $A_1 \dots A_{n+1}$  e come punto unità  $E$  è dato dalla proposizione seguente:

«Il birapporto  $\frac{x_i}{x_k}$  è il birapporto del gruppo formato dai punti  $A_i, A_k$  e dalle proiezioni  $E_{ik}, P_{ik}$  del punto unità e di  $P$  fatte sulla retta  $A_iA_k$  dallo  $S_{n-2}$  determinato dai rimanenti vertici dello  $(n+1)$ -gono fondamentale».

Come casi particolari della proiettività tra due  $S_n$  sono particolarmente i due seguenti:

- a) la proiettività tra i punti di due  $S_n$  sovrapposti, o in un  $S_n$ , detta anche *omografia*;
- b) la proiettività tra un  $S_n$  e lo  $S_n$  *duale* che ha come «punti» gli iperpiani del 1°, detta anche *correlazione* o *reciprocità*.

La teoria generale delle proiettività in  $S_n$  (omografie e correlazioni) è dovuta al *Segre* «Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni» (Memorie dell'Accademia dei Lincei - 1884) - «Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in

generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella Geometria della retta» (Memorie dell'Accademia di Torino - 1886).

La teoria delle omografie in  $S_n$  è stata condotta più innanzi dal *Predella* «Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni» (Annali di Matematica - 1889).

Sopra argomenti particolari che si riferiscono alla medesima teoria possono consultarsi anche le note di

*Bertini* (Istituto Lombardo 1886)

*Enriques* (Atti dell'Accademia dei Lincei - e Giornale di Napoli - 1891).

Un caso particolare della correlazione (la *polarità*) dà luogo ad una teoria delle *quadriche* opportuna estensione della teoria delle quadriche in  $S_3$ : a questo proposito si confronti *Segre* «Studio sulle quadriche ecc.» (Memorie dell'Accademia di Torino 1885).

## 1.23 Punti immaginari e varietà analitiche

In molte questioni generali concernenti la Geometria dello  $S_n$ , si è condotti alla risoluzione di un sistema di equazioni nelle coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Queste equazioni possono dar luogo a soluzioni immaginarie o più generalmente complesse. Allora non si ottiene alcun punto di  $S_n$  soddisfacente alle condizioni proposte, e mentre si può analiticamente proseguire dei calcoli sulle date soluzioni complesse e giungere talvolta a dei risultati nel campo reale, viene a mancare l'interpretazione geometrica di siffatti ragionamenti. Per togliere questo inconveniente, si può ampliare il campo dei punti dello  $S_n$ , considerando come *punti immaginari* rappresentati da coordinate immaginarie o complesse.

Ma l'introduzione dei punti immaginari così fatta sarebbe puramente nominale: gli enti introdotti non sarebbero effettivi enti geometrici dello  $S_n$ .

I punti immaginari di  $S_n$  possono invece acquistare un effettivo significato di elementi geometrici, mediante l'interpretazione di essi dovuta a *Staudt* (Beiträge zur Geometrie der Lage).

Ad ogni punto immaginario  $P \equiv (x_1 + iy_1, \dots, x_{n+1} + iy_{n+1})$  di  $S_n$  va associato un punto coniugato  $P' \equiv (x_1 - iy_1, \dots, x_{n+1} - iy_{n+1})$  che congiunto con esso dà una retta reale  $PP'$ . Per ogni punto immaginario  $P$  di  $S_n$  passa dunque *una* retta reale. Su questa retta reale vi è *una* involuzione ellittica reale che ha come punti doppi i punti immaginari coniugati  $P, P'$ ; essa serve ad individuare la coppia  $PP'$ . Per distinguere l'uno dall'altro questi due

punti Staudt ha ricorso alla considerazione dei due sensi della retta: ciascuno dei due punti viene collegato ad un senso della retta. Se si riguardano i punti reali d'una retta come dati dalle involuzioni paraboliche (degeneri) e corrispondenti indifferentemente ad ambedue i sensi della retta, si può dire: *Lo  $S_n$  ampliato coll'introduzione dei punti immaginari si può considerare come la varietà che ha per elemento generico la involuzione ellittica (e come caso limite parabolica) sopra una retta dello  $S_n$  reale, collegata ad un senso della retta medesima.*

Il calcolo sopra i numeri complessi permette di estendere allo  $S_n$  complesso le fondamentali relazioni che valgono nello  $S_n$  reale, e giustifica (analiticamente) la trattazione dei punti immaginari dello  $S_n$  senza distinzione dai punti reali, in tutto un ordine di questioni. D'altra parte *Staudt* (l. c.) partendo dalla loro definizione geometrica ha esteso ai punti immaginari (di  $S_3$ ) la ordinaria Geometria proiettiva, per via sintetica.

Senza addentrarci nei minuti particolari cui danno luogo siffatte questioni, vogliamo invece qui rilevare quale importanza sia da attribuirsi all'introduzione dei punti immaginari in Geometria. Siamo condotti da ciò alle seguenti considerazioni<sup>74</sup>.

Si distinguono due specie di Geometrie:

1. La Geometria in regioni limitate dello spazio, o Geometria differenziale (in senso ristretto), che studia le proprietà dello spazio e delle varietà in esso contenute in un intorno sufficientemente delimitato di ogni punto generico: a questo ramo di ricerche appartengono gli sviluppi dei §<sup>i</sup> 14, ..., 18.
2. La Geometria dello spazio completo, di cui fa parte per esempio l'ordinaria teoria della proiettività, delle quadriche ecc.

Nella 1<sup>a</sup> Geometria non è strettamente necessaria l'introduzione dei punti immaginari: opportune limitazioni separano una regione di spazio o di varietà entro la quale si considerano elementi reali; né importa se taluni di questi elementi verrebbero a mancare uscendo da quella regione. Perciò la Geometria differenziale intesa in senso ristretto si basa soltanto sulla *teoria delle funzioni di variabili reali*; supponendo che le funzioni che entrano in campo sieno finite continue e derivabili finché occorre in un determinato intervallo<sup>75</sup>. Questa 1<sup>a</sup> Geometria appare dunque sotto un certo aspetto più generale della 2<sup>a</sup>; la quale invece avendo per oggetto lo spazio completo suppone l'estendibilità delle funzioni che si considerano a tutto lo spazio. Ora

<sup>74</sup>Cfr. Klein «Einleitung in die h"older Geometrie» I (autographirte Vorlesungen S. 7).

<sup>75</sup>Non si escluda naturalmente il sussidio della teoria delle funzioni di variabili complesse, di cui si ha un esempio nella teoria delle superficie ad area minima.

perché tale estendibilità sia possibile, cioè perché si possa desumere una legge di estensione da un piccolo campo ove le funzioni sieno state definite, occorre nella Geometria dello spazio completo di limitarsi alla considerazione di *funzioni analitiche* ossia di *funzioni di variabili complesse*: in questa Geometria è quindi essenziale la considerazione dei punti immaginari.

Nella Geometria dello spazio completo  $S_n$  si considerano come varietà  $v_r$  (ad  $r < n$  dimensioni) soltanto le varietà analitiche rappresentate da equazioni

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = f_i(t_1, t_2, \dots, t_r) \quad (1)$$

dove le  $f$  sono funzioni analitiche degli  $r$  parametri  $t_1, t_2, \dots, t_r$ .

Le varietà analitiche dello  $S_n$  si considerano *complete*, cioè si considerano come punti di una  $v_r$  tutti i punti le cui coordinate si ottengono dalle formule (1) dando alle funzioni  $f$  la massima estensione possibile nel campo delle variabili complesse  $t$ : la legge di prosecuzione analitica delle funzioni di variabili complesse permette di ritenere individuata la varietà completa  $v_r$  da una qualsiasi regione limitata di essa.

Si noti che  $n - r$  equazioni analitiche fra le coordinate dei punti d'una  $S_n$  rappresentano una varietà analitica  $v_r$  nello  $S_n$ .

Fra le varietà analitiche  $v_r$  dello  $S_n$  hanno formato oggetto di una particolare teoria le varietà algebriche, cioè quelle  $v_r$  che si possono rappresentare mediante equazioni algebriche

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = f_i(t_1, \dots, t_s) \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ r \leq s \leq n + 1 \end{array} \right)$$

dove le  $f$  sono funzioni razionali di  $s \geq r$  parametri  $t$  legati da  $r - s$  equazioni algebriche.

Sono notevoli in particolare fra le varietà algebriche le  $v_{n-1}$  di  $S_n$ : esse si possono sempre rappresentare con *una* equazione algebrica tra le coordinate:

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

dove  $f$  è una *forma* nelle  $x$ .

Il *grado*  $m$  della  $f$  dicesi *ordine* della varietà  $v_{n-1}$  (che si indica allora con  $v_{n-1}^m$ ) ed è il numero (costante) delle intersezioni della  $v_{n-1}^m$  con una retta (computate debitamente le intersezioni multiple). Per  $m = 1$  la  $v_{n-1}$  è un  $S_{n-1}$ . Per  $m = 2$  le  $v_{n-1}^2$  si dicono anche *quadriche* (*coniche* per  $n = 2$ ); la nota teoria proiettiva delle quadriche di  $S_3$  trova la sua naturale estensione nella teoria delle quadriche di  $S_n$  ( $n > 3$ ), dovuta al Segre (l. c.). Per  $m = 3$  le  $v_{n-1}^3$  diconsi *varietà cubiche*: la teoria generale delle *cubiche piane* ( $n = 2$ ) si può vedere sviluppata nelle «Vorlesungen» di Clebsch-Lindemann: quella

delle *superficie cubiche* in  $S_3$  (dovuta in massima parte a *Steiner*, *Sylvester*, *Cremona*, e specialmente a quest'ultimo) si trova sviluppata nella classica memoria del Cremona «Sur les surfaces gauches du troisième degré» (Journal von Crelle Bol. 60): le varietà cubiche generali di  $S_4$  sono state studiate dal *Segre* (Memoria dell'Accademia di Torino 1886) ecc.

Una serie di lavori d'indole generale sviluppano la teoria delle linee piane e delle superficie algebriche di  $S_3$  di qualunque ordine: come preparazione al loro studio rimandiamo alle memorie originali del *Cremona* «Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane», «Preliminari di una Teoria geometrica delle superficie» (Memorie dell'Accademia di Bologna 1861, 1866)<sup>76</sup>.

Il metodo algebrico-geometrico formatosi con questi lavori ha condotto la teoria degli enti algebrici ai più splendidi risultati.

## 1.24 Le trasformazioni

Di essenziale importanza nella Geometria è la considerazione delle *corrispondenze biunivoche* che fanno corrispondere ad *ogni* punto generico di una regione convenientemente limitata nello  $S_n$  un punto di un'altra regione e viceversa, fatta eccezione (eventualmente) per i punti (*singolari*) di una o più varietà  $v_r$  ( $r < n$ ) entro le dette regioni corrispondenti. Una tale corrispondenza biunivoca si può porre mediante le formule

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (x_{n+1} = 1) \quad (1)$$

dove le  $f_i$  sono funzioni *continue* e *derivabili* delle  $x_k$  (variabili in dati intervalli) e quindi *invertibili* entro un conveniente intorno del punto generico  $(x_1, \dots, x_{n+1})$ .

Suppongasì in particolare che le  $f_i$  sieno funzioni analitiche delle  $x_i$ ; allora esse si possono estendere analiticamente a tutto il loro campo accessibile e si dà quindi luogo ad una *trasformazione (analitica)* nello  $S_n$  completo: *trasformazione univoca* se le  $f$  sono funzioni uniformi; *trasformazione multipla* se al contrario le  $f$  sono polidrome.

Risolvendo le equazioni (1) rispetto alle  $x_i$ , si esprimeranno queste come funzioni analitiche delle  $y_i$ , e si avrà nello  $S_n$  la *trasformazione inversa* della data: questa trasformazione inversa (considerata nello spazio completo) riuscirà in generale multipla anche se la prima trasformazione dello  $S_n$  sia univoca insieme alla sua inversa, essa si dirà *biunivoca*.

La distinzione fra la Geometria dello spazio completo e la Geometria differenziale, si presenta dunque rispetto alla teoria delle trasformazioni più

---

<sup>76</sup>Per un più completo studio della teoria delle curve piane si possono vedere le citate lezioni di *Clebsch-Lindemann*.

netta che mai: nella prima ha posto essenziale la distinzione fra trasformazione univoca e trasformazione multipla, laddove nella seconda ove ci si limita a considerare la corrispondenza intercedente fra intorno convenienti di due punti omologhi generici si può considerare ogni trasformazione come una corrispondenza biunivoca (entro quei limiti).

I primi esempi di trasformazioni (biunivoche) vengono portati dai movimenti nello  $S_n$  metrico (euclideo o no) e dalle omografie. Ma abbiamo già avuto occasione di incontrare altre trasformazioni, ad esempio nel piano le trasformazioni che mutano cerchi in cerchi.

Tutte queste trasformazioni appartengono alla grande classe delle *trasformazioni razionali*, cioè di quelle trasformazioni che possono essere poste mediante le formule

$$y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) \quad (i = 1, \dots, n+1)$$

ove le  $\varphi$  sono d'un certo ordine  $m$  nelle  $x_i$ : allora agli iperpiani

$$\sum \lambda_i y_i = 0$$

del 2° spazio corrispondono le varietà algebriche  $v_{n-1}^m$

$$\sum \lambda_i \varphi_i = 0$$

formanti un sistema lineare  $\infty^n$ . Considerato il detto sistema lineare come un  $S_n$  avente per elementi (punti o iperpiani) le  $v_{n-1}^m$ , si ha che esso risulta riferito *proiettivamente* al dato  $S_n$ ; ciò significa che alle  $v_{n-1}^m$  d'un sistema lineare  $\infty^r$  ( $r < n$ ) entro il dato corrispondono gli iperpiani per un  $S_{n-r-1}$ .

*Il modo più generale di porre una trasformazione razionale in un  $S_n$  è di riferire proiettivamente un sistema lineare  $\infty^n$  di varietà algebriche  $v_{n-1}^m$  al sistema degli iperpiani dello  $S_n$  stesso.*

Invero preso un punto (generico)  $A$  nello  $S_n$ , le  $v_{n-1}^m$  per esso formano un sistema lineare  $\infty^{n-1}$  cui corrisponde la stella degli iperpiani passanti per un punto  $A'$ ; facendo corrispondere ad  $A$  questo punto  $A'$  si dà luogo appunto ad una trasformazione razionale: punti *singolari* della trasformazione (il cui omologo riesce indeterminato) sono i punti comuni a tutte le  $v_{n-1}^m$  ossia i punti *base* del loro sistema, i quali possono anche formare una o più varietà  $v_r$  ( $r \leq n-2$ ).

Viceversa se si considerano  $n$   $v_{n-1}^m$  generiche tra le  $v_{n-1}^m$  corrispondenti agli iperpiani per  $A'$ , queste hanno comuni (in generale) oltre i punti *base* del sistema di tutte le  $v_{n-1}^m$ , dei punti in numero finito  $s \geq 1$ , i quali riescono comuni alle  $\infty^{n-1}$   $v_{n-1}^m$  corrispondenti agli iperpiani per  $A'$ , e sono i punti corrispondenti di  $A$  nella trasformazione inversa di quella razionale data.



Vogliansi tutte le trasformazioni razionali biunivoche dello spazio  $S_n$  ossia quelle trasformazioni razionali di cui la inversa è pure razionale (trasformazioni *birazionali*); si dovranno allora determinare tutti i sistemi lineari  $\infty^n$  di  $v_{n-1}^m$ , dove  $n$   $v_{n-1}^m$  generiche hanno comune un sol punto variabile: siffatti sistemi diconsi omaloidici: riferendo proiettivamente un sistema omaloidico a quello degli iperpiani di  $S_n$ , nasce appunto in  $S_n$  una trasformazione birazionale, ed è questo il modo più generale di ottenerla.

L'esempio più semplice è offerto dalla trasformazione *quadratica* o di 2° ordine. Vogliansi le trasformazioni birazionali del piano in cui alle rette corrispondono coniche: debbonsi allora cercare le *reti* (sistemi lineari  $\infty^2$ ) di coniche in cui due coniche generiche hanno un sol punto comune variabile: siccome due coniche del piano si segano in 4 punti, 3 di queste intersezioni debbon esser fisse per le coniche della rete. Tutte le coniche che passano per 3 punti formano sempre una rete: dunque si ottiene la più generale trasformazione quadratica del piano facendo corrispondere proiettivamente la rete delle rette alla rete delle coniche passanti per 3 punti: questi 3 punti base sono singolari per la trasformazione. Fra le trasformazioni quadratiche rientrano quelle che mutano circoli in circoli del §8.

La considerazione generale delle trasformazioni birazionali (nel piano e nello spazio) è dovuta al *Cremona*<sup>77</sup>; (donde il nome di *cremoniane* dato generalmente alle trasformazioni birazionali); qualche trasformazione particolare oltre la proiettività era già nota da tempo (ad esempio le trasformazioni quadratiche<sup>78</sup>). Dopo i lavori del Cremona sono essenziali per la teoria che ci occupa i lavori di *Cayley*, *Clebsch*, *Noether*, *Clifford*, *Rosanes*<sup>79</sup>.

## 1.25 I gruppi di trasformazioni

Le trasformazioni in uno spazio  $S_n$  (o in una varietà qualsiasi) possono considerarsi come *operazioni* ed in questo senso sono ad esse applicabili i noti concetti della teoria generale delle operazioni: eseguendo l'una dopo l'altra, in un dato  $S_n$ , prima la trasformazione  $\Pi$  e poi la trasformazione  $T$  si dà luogo alla *trasformazione prodotto*  $T\Pi$ : non sarà in generale

$$T\Pi = \Pi T;$$

se questo avviene le due trasformazioni diconsi *permutabili*. Una classe di trasformazioni in numero finito o infinito dicesi costituire un *gruppo*, quando:

<sup>77</sup>«Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane». Memorie dell'Accademia di Bologna t. 2 1863 e t. 5 1865. Cfr. anche i t. I e III del Giornale di Battaglini.

<sup>78</sup>Cfr. *Plücker* (Crelle Bol. V).

<sup>79</sup>Cfr. le citate lezioni di *Clebsch-Lindemann*.

1. il prodotto di due trasformazioni della classe è sempre una trasformazione della classe;
2. insieme ad ogni trasformazione comparisce nella classe anche l'inversa (questa 2<sup>a</sup> proprietà, superflua nel caso di gruppi finiti, limita il concetto di gruppo nel caso di gruppi contenenti un numero infinito di trasformazioni).

Un gruppo di trasformazioni  $F$  dicesi contenere come *sottogruppo invariante* o *eccezionale* un gruppo  $g$ , quando essendo  $\Pi$  una qualsiasi trasformazione di  $g$  e  $T$  una qualsiasi trasformazione di  $F$  la *trasformata*

$$T\Pi T^{-1}$$

appartiene a  $g$ .

Allorché sono note alcune trasformazioni d'un gruppo  $F$ , si può desumere l'esistenza in  $F$  di altre trasformazioni ottenute facendo i prodotti di un numero qualunque delle prime; se così si perviene ad esaurire il gruppo  $F$ , le trasformazioni date si possono dire *trasformazioni generatrici* del gruppo  $F$ : ogni trasformazione di  $F$  si può allora considerare come il prodotto di un numero finito di trasformazioni generatrici: come estensione si può anche considerare il caso in cui  $F$  non resti esaurito dai prodotti di un numero finito di trasformazioni (generatrici) date, ma comprende (oltre questi) i prodotti d'un numero infinito di trasformazioni generatrici (definiti come un opportuno passaggio al limite).

Nella scelta di una serie di trasformazioni generatrici di un gruppo vi è naturalmente dell'arbitrario; ma la considerazione di esse, ove sieno scelte opportunamente, può essere massimamente utile nello studio del gruppo.

Recentemente, per opera del *Lie*<sup>80</sup>, ha acquistato grande importanza la teoria dei *gruppi continui*, cioè di quei gruppi le cui trasformazioni

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = y_{n+1} = 1 \\ i = 1, \dots, n + 1 \end{array} \right\}$$

possono definirsi mediante un sistema di equazioni differenziali di cui le  $f_i$  sono gli integrali: questi gruppi si dividono in due categorie; si hanno cioè:

- a) i *gruppi continui finiti* (ossia con un numero finito di dimensioni) quando le  $f_i$  contengono un numero finito di parametri;
- b) i *gruppi continui infiniti* (con un numero infinito di dimensioni) quando le  $f_i$  (soddisfacenti ad equazioni a derivate parziali) contengono delle funzioni arbitrarie.

---

<sup>80</sup>Cfr. la sua «Theorie der Transformationsgruppen».

Dato un sistema di equazioni differenziali che ammetta come integrali delle funzioni  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  resta sempre definita una serie continua di trasformazioni: questa serie costituisce un gruppo se il sistema di equazioni gode di certe proprietà che il Lie ha determinate. Per tal modo lo studio dei gruppi continui si collega a quello di interessanti sistemi di equazioni differenziali.

Uno dei più bei risultati generali ottenuti dal Lie nella teoria dei gruppi continui (quello anzi che può considerarsi come il risultato fondamentale) è la *generazione dei gruppi continui mediante trasformazioni infinitesime*, e precisamente dei gruppi (finiti) di dimensione  $r$  mediante  $r$  trasformazioni generatrici infinitesime indipendenti: ogni trasformazione del gruppo può ottenersi come un prodotto infinito di siffatte trasformazioni: in particolare un gruppo ad 1 dimensione può riguardarsi come il gruppo delle potenze d'una trasformazione infinitesima.

Il detto risultato può anche enunciarsi dicendo che:

*In un gruppo continuo (di dimensione  $> 1$ ) esistono infiniti sottogruppi ad una dimensione: ogni trasformazione del gruppo appartiene ad uno di questi sottogruppi.*

All'infuori dei gruppi continui esistono altri gruppi di trasformazioni aventi un alto interesse geometrico. Tale è per esempio il *gruppo Cremona* cioè il gruppo delle trasformazioni birazionali di  $S_n$  ( $n > 1$ ), che non può esser definito mediante equazioni differenziali (né generato da trasformazioni infinitesime).

Per  $n = 2$  ne sono state assegnate come trasformazioni generatrici le trasformazioni quadratiche, vale a dire è stato stabilito il teorema<sup>81</sup>:

*Ogni trasformazione cremoniana del piano si può decomporre nel prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche.*

Questo teorema non è estendibile senz'altro allo  $S_n$  dove  $n > 2$ ; resta quindi insoluta la questione capitale di assegnare le più semplici trasformazioni generatrici dell'intero gruppo Cremona in  $S_n$  per  $n > 2$ .

Il gruppo Cremona in  $S_n$  ( $n > 1$ ), come sopra si è detto, non è continuo: tuttavia esso contiene dentro di sé dei gruppi continui (finiti): questi gruppi per  $n = 2$  (cioè nel piano) sono stati assegnati e ricondotti a tre tipi determinati<sup>82</sup>.

Tuttavia altre questioni d'indole grupitale relative al gruppo Cremona nel piano (ed a più forte ragione in  $S_n$   $n > 2$ ) rimangono ancora insolute; ad esempio l'importante questione se il gruppo Cremona contenga al-

---

<sup>81</sup>Cui giunsero contemporaneamente *Clifford* (dimostrazione di *Cayley*), *Rosanes* e *Noether*. La dimostrazione rigorosa del teorema (comprendente il caso di singolarità superiori tra i punti base delle rete omaloidica che definisce la trasformazione) appartiene al *Noether* «*Mathem. Annalen* Bol. V».

<sup>82</sup>Cfr. *Enriques* «*Accademia dei Lincei - Giugno - 1893*».

cun sottogruppo invariante (questione alla quale sembra probabile si debba rispondere negativamente).

## 1.26 I vari indirizzi geometrici caratterizzati sotto l'aspetto della teoria dei gruppi di trasformazioni

Quale importanza è da attribuirsi alla teoria delle trasformazioni nella Geometria?

Per rispondere alla domanda basta gettare uno sguardo all'ufficio storico che esse hanno avuto per il passato in vari rami della Geometria e paragonarlo col loro ufficio presente.

Sceghieremo a tale scopo l'esempio molto istruttivo desunto dallo sviluppo della Geometria proiettiva.

Esaminando il progresso avutosi in questa scienza nel passaggio da *Poncellet* a *Staudt* è soprattutto degno di nota il fatto che le *proiettività* usate dapprima per trasformare figure ignote in altre riguardate come note (studiate sotto l'aspetto metrico) vengono applicate sotto un diverso punto di vista nel nuovo indirizzo ove perseguendosi sistematicamente lo studio *proiettivo* delle figure con mezzi confacenti all'ordine delle proprietà che s'indagano, due figure proiettive non vengono distinte fra loro più di quel che si distinguono due figure *uguali* nella Geometria metrica. Dunque le *proiettività nella Geometria proiettiva hanno lo stesso ufficio che i movimenti nella Geometria metrica*; cioè *permettono* di variare convenientemente la posizione delle figure nello spazio senza alterare le proprietà, quelle proprietà almeno che formano oggetto di studio nell'indirizzo proiettivo. E non costituisce qui una differenza essenziale il fatto che le proprietà considerate nella Geometria proiettiva sieno soltanto *una parte* di *tutte* le proprietà delle figure, considerate della Geometria metrica: questo fatto si rispecchia soltanto nella maggiore generalità delle trasformazioni proiettive in confronto ai movimenti (i quali rientrano fra le proiettività come caso particolare).

Sebbene la *Geometria dei raggi vettori reciproci* non abbia una così grande importanza come la Geometria proiettiva, pure il suo svolgimento offre un esempio del tutto parallelo allo svolgimento di quest'ultima: limitandoci per esempio al piano, si sono usate dapprima le *inversioni rispetto ai cerchi* per trasportare da una figura ad un'altra una serie di proprietà essenzialmente inerenti ai cerchi e sistemi di cerchi; in seguito queste proprietà si sono venute organizzando in un determinato indirizzo geometrico nel quale

si considerano come *uguali* due figure trasformabili l'una nell'altra mediante una trasformazione puntuale del piano che muta cerchi in cerchi (cfr. il §8).

Se guardiamo all'ufficio che ebbero dapprima le trasformazioni cremoniane e lo paragoniamo col loro ufficio attuale, scorgiamo facilmente che anche in questo progresso si è seguita una legge analoga a quella che ha informato gli sviluppi di cui si è innanzi parlato, legge che enunceremo tra breve in tutta la sua generalità. In primo luogo le trasformazioni cremoniane hanno servito a ricondurre lo studio di alcune curve o superficie algebriche e loro sistemi a quello di altre, *trasformate*, proiettivamente più semplici. In seguito tutti gli enti algebrici (curve, superficie e loro sistemi) di un dato spazio, che si ottengono l'uno dall'altro con una trasformazione cremoniana, sono riguardati come enti *uguali* nella Geometria del detto spazio, (*Geometria delle trasformazioni birazionali*): le trasformazioni cremoniane servono quindi (nel nuovo indirizzo) soltanto a cambiare la posizione degli enti senza alterarne le proprietà, proprio come i movimenti nella Geometria metrica ecc.

È ben degno di nota che il detto sviluppo avuto dalla Geometria delle trasformazioni birazionali ed altri sviluppi analoghi in altri indirizzi, possono essere stati in parte preveduti fino al 1870 dal *Klein* nel suo *Universitäts-Programm* per l'Università d'Erlangen<sup>83</sup>, in seguito ad una analisi profonda dei vari indirizzi geometrici posti in confronto colla generale teoria delle trasformazioni.

Il risultato di questa analisi può essere riassunto dicendo: «Nel progresso della Geometria dello  $S_n$  le proprietà degli enti vengono a separarsi e a raggrupparsi in vari aggruppamenti o *corpi* (contenuti nel corpo di tutte le proprietà geometriche) ciascuno dei quali comprende insieme ad alcune proprietà di cui si fissa la considerazione anche tutte le proprietà che ne dipendono per legame logico.

Si vengono distinguendo più indirizzi geometrici in corrispondenza ai vari corpi più interessanti, in ciascun indirizzo perseguendosi *sistematicamente* ed *esclusivamente* lo studio delle proprietà d'un corpo, e ritenendosi perciò come *eguali* due enti che hanno comuni le proprietà del corpo.

Ad ogni corpo di proprietà corrisponde una classe ben determinata di trasformazioni che conservano le proprietà del corpo.

Questa classe di trasformazioni è un *gruppo* perché due trasformazioni di essa successivamente eseguite danno luogo ad una trasformazione che conserva le proprietà del corpo.

Il corpo dato viene ad essere delimitato come quello che comprende *tutte* le proprietà invariantive per le trasformazioni del gruppo.

---

<sup>83</sup> «Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti» traduzione italiana del *Fano* negli *Annali di Matematica* - 1891.

Il gruppo di trasformazioni corrispondenti al corpo totale è il gruppo dei movimenti dello  $S_n$ : ad ogni altro corpo più ristretto corrisponde un gruppo di trasformazioni più ampio, comprendente il gruppo dei movimenti.

Viceversa ad ogni gruppo di trasformazioni dello  $S_n$ , comprendente il gruppo dei movimenti, corrisponde un corpo di proprietà invariantive per le trasformazioni del gruppo, e quindi ogni gruppo siffatto può riguardarsi come il gruppo fondamentale che caratterizza un determinato indirizzo geometrico».

Stimiamo opportuno di aggiungere le seguenti considerazioni.

- 1) Allorché è dato un corpo di proprietà geometriche, ed una corrispondente Geometria, le trasformazioni del gruppo fondamentale vengono definite dal conservare *tutte* le proprietà del corpo: ma per caratterizzarle basterà imporre che esse debbano conservare alcune proprietà del corpo convenientemente scelte che si potranno quindi considerare come *proprietà definitorie* del corpo. Ad esempio il corpo delle proprietà grafiche nella Geometria piana comprende le nozioni inerenti al concetto di retta e quelle relative al susseguirsi dei punti sulla retta, ma le proiettività del piano restano definite dalla sola condizione di esser trasformazioni che conservano le rette.
- 2) Allorché è data una Geometria dello  $S_n$  mediante il suo gruppo fondamentale di trasformazioni, per riconoscere se una proprietà appartiene o no al corpo di questa Geometria occorre vedere se essa ha *carattere invariantivo* rispetto alle trasformazioni del gruppo. Basta a tal fine verificare che la detta proprietà ha carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni generatrici del gruppo (scelto convenientemente). Così per esempio se il gruppo è continuo basta verificare la detta invariantività rispetto alle trasformazioni infinitesime di esso: così pure alla Geometria piana che ha per gruppo fondamentale il gruppo Cremona appartengono tutte le proprietà degli enti geometrici che sono invariantive rispetto alle trasformazioni quadratiche.

Si desume di qui tutta l'importanza del conoscere le più semplici trasformazioni generatrici del gruppo fondamentale d'una Geometria.

Crediamo opportuno di chiudere questo § con alcuni esempi da aggiungersi a quelli più ovvii di cui si è innanzi parlato.

- a) L'*Analysis situs* [sic] in  $S_n$  è la Geometria dello  $S_n$  completo reale, che ha come gruppo fondamentale di trasformazioni il gruppo di tutte le trasformazioni biunivoche continue *senza eccezione* (cioè senza punti

singolari). Ad essa appartengono le proprietà di connessione della varietà. Nella Geometria che ha per gruppo fondamentale quello di tutte le trasformazioni puntuali (con eccezione), nessuna curva o superficie o varietà ha delle proprietà particolari. Tale Geometria ha invece interesse per lo studio di forme geometriche più elevate, come quelle corrispondenti ad equazioni differenziali ecc.

- b) La Geometria differenziale dello  $S_n$  ( $n > 1$ ) che studia il corpo delle proprietà *angolari* possiede come gruppo fondamentale il gruppo delle trasformazioni che conservano gli angoli (trasformazioni *conformi*). Nel piano reale ( $n = 2$ ) si possono rappresentare queste trasformazioni mediante la più generale funzione di variabile complessa

$$w = u + iv = f(x + iy),$$

o mediante la formula

$$\bar{w} = u - iv :$$

il loro gruppo è dunque infinito e comprende in sé il gruppo continuo infinito delle trasformazioni

$$u + iv = f(x + iy)$$

definito dalle equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Per  $n > 2$  le trasformazioni conformi dello  $S_n$  sono soltanto quelle che mutano le sfere in sfere<sup>84</sup> e formano quindi un gruppo continuo finito che il *Lie* ha completamente studiato sotto l'aspetto gruppale<sup>85</sup>.

- c) La Geometria dello  $S_n$  il cui corpo di proprietà è definito dalla nozione fondamentale di *volume* ( $n \geq 3$ ) o *area* ( $n = 2$ ) (*Geometria di fluidi incompressibili*) possiede un gruppo fondamentale di trasformazioni continuo infinito, noto sotto il nome di gruppo di *Möbius*. Si possono ottenere le equazioni differenziali che caratterizzano il gruppo nel modo seguente.

Sia

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

<sup>84</sup>Secondo un teorema di *Liouville*. Cfr. per esempio *Bianchi* «Lezioni di Geometria differenziale - pag. 460».

<sup>85</sup>«Theorie der Transformationsgruppen - Bol. III».

la più generale trasformazione del gruppo. Riferendoci allo  $S_n$  euclideo supponiamo l'elemento lineare dato da

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Il volume racchiuso da un contorno  $S$  (ad  $n - 1$  dimensioni) è dato da

$$\int_S dx_1 \dots dx_n.$$

Operando nell'integrale multiplo la trasformazione (1) e designando con  $S'$  il contorno trasformato, si ha (per una nota formula dovuta a *Jacobi*)

$$\int_{S'} dy_1 \dots dy_n = \int_S \left\{ \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \dots & \frac{dy_n}{dx_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \dots & \frac{dy_n}{dx_n} \end{vmatrix} - 1 \right\} dx_1 \dots dx_n,$$

dove il determinante funzionale (entro l'integrale) va preso in valore assoluto.

Se tutti i volumi debbono restare invariati deve aversi dunque

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \dots & \frac{dy_n}{dx_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \dots & \frac{dy_n}{dx_n} \end{vmatrix}^2 = 1 \quad (2)$$

(il quadrato compare perché il detto determinante va sempre preso positivamente sotto l'integrale). L'equazione (2) caratterizza appunto il gruppo di Möbius in  $S_n$  e (per  $n = 3$ ) si può riguardare come rappresentante l'equazione di incompressibilità dei liquidi.

Il gruppo di Möbius (secondo il teorema generale di Lie) vien generato da trasformazioni infinitesime. Si può subito assegnare le equazioni differenziali da cui queste vengono definite scrivendo la condizione a cui deve soddisfare una trasformazione infinitesima  $y_i = x_i + \xi_i$  affinché la variazione dell'elemento di volume  $dv = dx_1 \dots dx_n$  sia d'ordine superiore ad  $n$ . Siccome (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore) si ha

$$dv' = dy_1 \dots dy_n = d(x_1 + \xi_1) d(x_2 + \xi_2) \dots = dx_1 \left( 1 + \frac{d\xi_1}{dx_1} \right) dx_2 \left( 1 + \frac{d\xi_2}{dx_2} \right) \dots$$

si ottiene così l'equazione

$$\frac{d\xi_1}{dx_1} + \frac{d\xi_2}{dx_2} + \dots + \frac{d\xi_n}{dx_n} = 0,$$

che caratterizza appunto le trasformazioni infinitesime del gruppo di Möbius in  $S_n$ .



## 1.27 Come vengono subordinate tra loro due Geometrie di un $S_n$ di cui i gruppi fondamentali rientrano l'uno nell'altro

In  $S_n$  sieno dati due gruppi di trasformazioni  $F, g$ , e suppongasi che il primo contenga il secondo. Le Geometrie caratterizzate da questi gruppi fondamentali hanno allora fra loro questo legame: le proprietà della 1<sup>a</sup> Geometria sono tutte proprietà della 2<sup>a</sup>, ma non viceversa. Prendansi come esempio la Geometria proiettiva (reale) e la Geometria metrica: le proprietà proiettive delle figure hanno posto nella Geometria metrica e possono esprimersi ad esempio mediante uguaglianze di birapporti; ma viceversa soltanto proprietà metriche di natura particolare hanno carattere proiettivo.

È noto che le proprietà metriche possono sempre riguardarsi nella Geometria proiettiva non come proprietà degli enti in sé, ma come relazioni proiettive con un ente particolare (l'*assoluto*) che è una particolare quadrica (§19).

Invero introdurre la considerazione speciale dell'assoluto  $C$ , equivale a considerare quelle proprietà delle figure geometriche che hanno carattere invariante rispetto alle proiettività che lasciano fermo  $C$  ossia rispetto ai movimenti (o alle similitudini se la quadrica assoluto è specializzata e quindi lo  $S_n$  è euclideo); queste sono appunto le proprietà della Geometria metrica il cui gruppo fondamentale di trasformazioni è il gruppo dei movimenti (e nello  $S_n$  euclideo può riguardarsi essere il gruppo delle similitudini, conveniente ampliamento del gruppo dei movimenti).

Tornando al caso generale in cui sono date in  $S_n$  due Geometrie mediante gruppi fondamentali  $F, g$ , il 2° sottogruppo del 1°, possiamo costruire sempre (in infiniti modi) un particolare ente (*assoluto*) tale che le trasformazioni di  $F$  che lo lasciano fermo sieno tutte e sole le trasformazioni di  $g$ : basta per questo considerare un qualsiasi ente, trasformarlo colle trasformazioni di  $g$ , e prendere come assoluto l'insieme di tutti gli elementi cui si è dato luogo in tal modo. Ciò posto tutte le proprietà della 2<sup>a</sup> Geometria compariscono nella 1<sup>a</sup> non come proprietà degli enti a sé ma come proprietà degli enti in relazione all'assoluto.

Possiamo formulare la precedente considerazione enunciando il principio: *Due grandezze di un  $S_n$  i cui gruppi fondamentali di trasformazioni rientrano l'uno nell'altro vengono subordinate in guisa che tutte le proprietà della 1<sup>a</sup> rientrano nella 2<sup>a</sup> ma viceversa le proprietà della 2<sup>a</sup> compariscono nella 1<sup>a</sup> non come proprietà degli enti in sé ma come relazioni di un ente particolare (assoluto) tenuto fisso da tutte le trasformazioni del gruppo più ristretto ma non da altre del gruppo più ampio.*

Oltre al citato esempio concernente la relazione fra la Geometria proiettiva e la metrica enunciamo brevemente i seguenti esempi su cui si può esercitarsi:

- 1) La Geometria proiettiva di  $S_n$  ( $n > 1$ ) si deduce dalla Geometria delle trasformazioni puntuali o dall'Analysis situs [sic] come assoluto l'insieme di tutti gli iperpiani.  
Invero le trasformazioni puntuali che conservano gli iperpiani sono appunto le proiettività.

- 2) Nello  $S_n$  ( $n > 1$ ) che ha per elemento lineare (in coordinate curvilinee generali)

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k,$$

la Geometria angolare (Geometria delle trasformazioni conformi) si deduce dalla Geometria che ha per gruppo quello di tutte le trasformazioni puntuali ponendo come assoluto l'insieme delle *linee* (immaginarie) di *lunghezza nulla* integrali della equazione

$$ds^2 = 0.$$

- 3) La Geometria metrica dello  $S_n$  euclideo ( $n > 2$ ) (Geometria delle similitudini) si deduce dalla Geometria angolare ponendo come assoluto un iperpiano (lo  $S_{n-1}$  all'infinito).  
Similmente dalla Geometria dei raggi vettori reciproci nel piano si deduce la Geometria metrica ordinaria ponendo come assoluto la retta all'infinito.
- 4) La Geometria delle trasformazioni birazionali di  $S_n$  si deduce dalla Geometria delle trasformazioni biunivoche puntuali ponendo come assoluto il corpo di tutte le varietà algebriche.

## 1.28 Geometria sopra una varietà

Le considerazioni dei precedenti paragrafi si possono riportare al caso più generale in cui è data una varietà  $v_n$  ed in essa un gruppo fondamentale di trasformazioni, mancando soltanto allora la considerazione speciale del gruppo dei movimenti. Pur tuttavia alle dette considerazioni sfugge ancora una serie importante di ricerche geometriche inerenti alla *Geometria sopra una varietà*, distinta anch'essa in molteplici indirizzi.

Ci pare che questo studio possa essere ricollegato all'ordine d'idee innanzi svolto mediante la considerazione seguente.

Fra le proprietà geometriche di un corpo (in  $S_n$ ) e il gruppo fondamentale della corrispondente Geometria vi è questo legame reciproco: le trasformazioni del gruppo lasciano invariate le proprietà del corpo riferite a *tutti* gli enti geometrici dello  $S_n$ ; viceversa le trasformazioni dello  $S_n$  che lasciano invariate le proprietà del corpo riferite a *tutti* gli enti dello  $S_n$ , appartengono al gruppo.

Ma se le proprietà del corpo anziché venir riferite a tutti gli enti dello  $S_n$  vengono riferite ad un ente per esempio ad una *varietà particolare* dello  $S_n$ , può darsi che altre trasformazioni dello  $S_n$  fuori del dato gruppo le lascino invariate. Ecco un esempio.

Le trasformazioni cremoniane dello spazio fanno corrispondere ad ogni superficie algebrica  $F$  un'altra superficie algebrica  $F'$  in corrispondenza biunivoca birazionale: stante questa corrispondenza le proprietà dei sistemi di curve algebriche tracciate su  $F$  (proprietà appartenenti alla Geometria che ha come gruppo fondamentale il gruppo Cremona) si rispecchiano in analoghe proprietà dei sistemi di curve algebriche (corrispondenti) su  $F'$ , tantoché  $F$  ed  $F'$  sono da considerarsi come superficie *uguali* nella Geometria delle trasformazioni birazionali. Ma non sono soltanto le trasformazioni cremoniane dello spazio che conservano le proprietà della superficie  $F$  appartenenti alla nostra Geometria; anche una trasformazione razionale dello spazio non invertibile univocamente ma tale che ogni punto generico della superficie  $F'$  corrispondente ad  $F$  abbia *un* solo punto corrispondente su  $F$ , conserva le anzidette proprietà di  $F$ ; invero due superficie algebriche  $F$  ed  $F'$  che si possono porre in corrispondenza biunivoca birazionale, anche se non si corrispondono in una trasformazione cremoniana, debbono riguardarsi come *uguali* nella Geometria delle trasformazioni birazionali *fatta astrazione dai rapporti di esse col rimanente spazio*.

Così dalla superficie Geometria dello spazio che ha come gruppo fondamentale il gruppo Cremona nasce la così detta *Geometria sopra le superficie algebriche* (Geometria delle trasformazioni birazionali) fissando il gruppo in relazione ad una superficie determinata, nasce cioè quella Geometria che studia le proprietà delle superficie algebriche invariantive per trasformazioni birazionali *della superficie*.

Analogamente si dica più in generale per la Geometria sopra le varietà algebriche.

Altri esempi di uno sviluppo analogo sono i seguenti:

1. La *teoria della connessione delle varietà* (Geometria delle trasformazioni continue) nasce dall'Analysis situs [sic] dello spazio ponendo in re-

lazione il gruppo fondamentale delle trasformazioni continue senza eccezione ad una determinata varietà, e però riguardando come *uguali* due varietà che si possono porre in corrispondenza biunivoca continua senza eccezione anche se questa non fa parte di una trasformazione biunivoca continua dello spazio completo.

2. La *Geometria metrica sopra le varietà* (§14) deriva dalla Geometria metrica di un  $S_n$  in cui la varietà si può riguardare come contenuta ove si fissi il gruppo dei movimenti in relazione alla varietà astraendo dal rimanente spazio. Così il concetto del movimento d'una superficie flessibile e inestendibile nello spazio ordinario è appunto derivato dal concetto di movimento dello spazio per essersi portata sistematicamente attenzione alle relazioni metriche sopra la superficie prescindendo dal rimanente spazio.

Noi possiamo ora formulare il principio generale seguente:

«Ogni Geometria sopra una varietà si può far derivare da una corrispondente Geometria di uno  $S_n$  in cui la varietà è contenuta, fissando il gruppo fondamentale di trasformazioni della Geometria di  $S_n$  in relazione alla varietà, ed astraendo dal rimanente spazio.

Come conseguenza d'un ulteriore sviluppo la Geometria sulla varietà potrà prescindere ancora dalle dimensioni dello spazio  $S_n$ , confrontando insieme varietà di spazi diversi, ed infine assumendo alla concezione di una *varietà-tipo* considerata in se stessa prescindendo dalla particolarità dello spazio in cui si può immaginare contenuta».

## 1.29 Il principio di trasporto di Hesse generalizzato da Klein

Ciò che è stato detto innanzi intorno al modo con cui i vari indirizzi geometrici possono organizzarsi mediante la considerazione caratteristica dei gruppi fondamentali di trasformazioni, diviene fecondo di utili ravvicinamenti mediante una osservazione che costituisce il così detto *principio di trasporto*.

Si abbia in un  $S_n$  (o in una varietà  $v_n$ ) un gruppo fondamentale di trasformazioni continuo finito, caratteristico per una determinata Geometria. Il contenuto di questa Geometria ossia il corpo delle proprietà che la costituiscono risulta dall'insieme di tutte le proprietà degli enti geometrici che sono invariantive rispetto alle trasformazioni del gruppo.

Consideriamo nello  $S_n$  un qualsiasi ente geometrico ed operiamo su questo tutte le trasformazioni del gruppo, daremo luogo ad un insieme di elementi

trasformato in se stesso da tutte le trasformazioni del gruppo, e che per ciò dicesi un *corpo di elementi*. Se noi chiamiamo «punti» gli elementi del corpo, il nostro  $S_n$  (o la nostra varietà  $v_n$ ) ci apparirà come una nuova varietà di elementi ( $v_r$ ) ad un certo numero  $r$  di dimensioni nella quale sarà pur dato un gruppo fondamentale di trasformazioni e quindi una particolare Geometria.

Escludiamo il caso eccezionale che tutti gli elementi di  $v_r$  possano esser tenuti fermi da un sottogruppo invariante del gruppo dato in  $S_n$  (o  $v_n$ ). Confrontando le due Geometrie poste in  $S_n$  (o in  $v_n$ ) ed in  $v_r$ , vediamo che tutte le proprietà dell'una si trovano nell'altra sotto altra forma, giacché le proprietà della Geometria di  $v_r$  sono relative ad enti primitivamente dati in  $S_n$  (o  $v_n$ ), e viceversa tutte le proprietà di  $S_n$  (o  $v_n$ ) potranno considerarsi come proprietà della Geometria di  $v_r$  dove il «punto» di  $S_n$  (o  $v_n$ ) non apparirà più come elemento, ma potrà opportunamente considerarsi come un insieme di elementi.

In sostanza dunque le due Geometrie non differiranno fra loro se non per l'ordine e per il modo di comparire delle proposizioni, non per intrinseca differenza.

Per spiegare le cose dette riferiamoci ad alcuni esempi.

1. Se sopra la retta si prende come nuovo elemento (in luogo del punto) la coppia di punti la Geometria proiettiva sulla retta si cambia nella Geometria proiettiva del piano in relazione ad una conica fissa<sup>86</sup> (§9). Come elementi della nuova Geometria si possono riguardare le coppie di punti (della retta o) della conica, o ciò che è lo stesso le rette del piano: il punto della retta appare nella nuova Geometria come un fascio di raggi col centro sulla conica. Poiché la Geometria proiettiva del piano in relazione ad una conica fissa (presa come assoluto) non differisce dalla Geometria non euclidea del piano stesso, vediamo che:

*Cambiando l'elemento «punto» della retta nell'elemento «coppia di punti» la Geometria proiettiva della retta viene a rispecchiarsi nella Geometria non euclidea del piano, ovvero nella Geometria della stella nello spazio ordinario.*

Come applicazione accenniamo alla determinazione dei *gruppi finiti di proiettività sulla retta*: questi vengono rispecchiati dai gruppi finiti di rotazione della stella in se stessa e però *corrispondono ai poliedri regolari dello spazio euclideo  $S_3$* <sup>87</sup>.

2. Se sul piano si prende come nuovo elemento la «conica» e si chiama questo elemento (generatore per un sistema lineare  $\infty^5$ ) «iperpiano

<sup>86</sup>Questo cambio di elemento è possibile perché tutte le coppie di punti formano un corpo rispetto alle proiettività.

<sup>87</sup>Cfr. *Klein*, «Vorlesungen über das Ikosaeder».

d'un  $S_5$ , la Geometria proiettiva del piano si rispecchia nella Geometria proiettiva dello  $S_5$  in relazione ad una superficie fissa i cui punti (ciascuno considerato come comune da  $\infty^4$  iperpiani) corrispondono ai punti del dato piano (riguardati ciascuno come comune alle  $\infty^4$  coniche che lo contengono). La superficie che così nasce in  $S_5$  è algebrica (come si prova subito colle formole) e viene rappresentata birazionalmente sul piano (cioè si ha fra i punti del piano e i punti della superficie una corrispondenza razionale biunivoca): alle curve sezioni iperpiane della superficie corrispondono le coniche del piano rappresentativo: due coniche si segano in 4 punti, quindi due iperpiani di  $S_5$  han comuni 4 punti colla superficie e però questa è del 4° ordine.

La detta superficie interessantissima è nota sotto il nome di *superficie di Veronese*. Dopo il *Veronese* il *Segre* ne ha fatto lo studio sistematico considerando la Geometria della superficie come una trasformazione della Geometria proiettiva del piano ove si assuma per elemento la «conica»<sup>88</sup>.

3. Nello spazio ordinario si assuma come elemento la «retta» e si consideri come il «punto» d'una varietà  $v_4$  a 4 dimensioni. In che cosa si cambia la Geometria proiettiva (rispetto alla quale le rette formano un corpo?) Per rispondere giova notare come possa rappresentarsi analiticamente lo spazio rigato.

A tal fine basta considerare una retta come individuata da due dei suoi punti

$$(x_i) \quad (y_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ed assumere come *coordinate della retta* i minori

$$p_{ik} = (x_i y_k - x_k y_i)$$

tratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} :$$

si avrà allora che ogni retta dello spazio viene individuata da 6 coordinate omogenee (le  $p_{ii}$  sono nulle) legate da una relazione quadratica

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Perciò la  $v_4$  i cui elementi sono le «rette» di  $S_3$  ossia lo *spazio rigato*, apparisce come una quadrica  $v_4^2$  di  $S_5$ .

---

<sup>88</sup>Cfr. Veronese (Accad. dei Lincei - Memorie - 1883-84), Segre (Atti Accad. di Torino - 1885).

I punti dello  $S_3$  appaiono nello spazio rigato come stelle di raggi, e come «piani ( $S_2$ )» sopra la  $v_4^2$  di  $S_5$ , sulla quale si ha pure un'altra serie di «piani» i cui punti corrispondono alle rette dei piani rigati di  $S_3$ . Una proiezione di  $S_3$  produce una trasformazione sulla  $v_4^2$  ed è facile vedere che questa è una trasformazione proiettiva (della quadrica e) dello  $S_5$ : viceversa una trasformazione proiettiva dello  $S_5$  che muti in sé la  $v_4^2$  e muti in sé la serie dei piani corrispondenti ai punti di  $S_3$  dà luogo ad una trasformazione di  $S_3$  che conserva le rette, ossia ad una proiezione (omografia); (se la detta serie di piani venisse scambiata coll'altra si avrebbe in  $S_3$  una correlazione).

Si conclude:

*La Geometria proiettiva dello  $S_3$  ove si assuma come elemento la «retta» (Geometria dello spazio rigato) si rispecchia nella Geometria proiettiva sopra una quadrica di  $S_5$ .*

E di questa bella relazione osservata dal Klein il Segre ha tratto profitto sistematicamente nello studio dello spazio rigato (Cfr. i citati lavori sulle quadriche e sulle correlazioni degli iperspazi).

## 1.30 La rappresentazione canonica di una data Geometria

In ordine alle idee svolte nel precedente paragrafo, attorno ad ogni Geometria definita in una varietà  $v_n$  (in particolare in  $S_n$ ) mediante un gruppo fondamentale di trasformazioni (continuo finito) si aggruppano infinite altre Geometrie che non differiscono l'una dall'altra se non per la scelta dell'elemento, ciascuna delle quali si può riguardare come una *teoria invariante rispetto al gruppo, riferita ad un corpo di elementi nella varietà  $v_n$* . La scelta di questo corpo di elementi apparisce come la scelta di una varietà particolare (che può essere sostituita alla data  $v_n$ ), atta a rappresentare il gruppo di trasformazioni.

Allora sorge spontanea la domanda se fra tutti i corpi di elementi che il gruppo possiede ve ne sia qualcuno legato invariantemente alla natura del gruppo stesso che fornisca una rappresentazione della data Geometria indipendente dalla considerazione di un particolare corpo di elementi. Si ottiene una siffatta rappresentazione (che diremo *rappresentazione canonica* della Geometria), ove si assumano come elementi le stesse «trasformazioni» del gruppo riguardate dunque come i «punti» di una varietà  $V$ .

Come operano le trasformazioni del gruppo in questa varietà  $V$ ?

Sia  $\Pi$  una trasformazione generica del gruppo, ossia un «punto» del-

la varietà  $V$ ; se  $T$  è un'altra qualsiasi trasformazione del gruppo, si può considerare che essa effettui sui punti di  $V$  la trasformazione che fa passare

da  $\Pi$  a  $\Pi T$ ,

oppure quella che fa passare

da  $\Pi$  a  $T\Pi$ .

Fissando il modo di operare di  $T$  su  $\Pi$  (per moltiplicazione a destra o a sinistra) si ottengono in  $V$  due gruppi di trasformazioni *associate* in ciascuna dei quali vi è *una* trasformazione facente passare da un dato punto ad un altro (o, come si dice, che operano in modo *semplicemente transitivo* sulla  $V$ ).

Se si considerano in  $V$  i prodotti delle trasformazioni di un gruppo colle inverse delle loro associate si ottiene in  $V$  un altro gruppo  $F$  di trasformazioni ciascuna delle quali fa passare da un «punto»  $\Pi$  a quel punto di  $V$  che rappresenta una trasformata  $T^{-1}\Pi T$ .

Si può scorgere l'utilità della rappresentazione canonica di una data Geometria riferendoci all'esempio della Geometria proiettiva sulla retta.

Le proiettività sulla retta si possono riguardare come i «punti» d'un  $S_3$  (§10). Il gruppo  $F$  che rispecchia in  $S_3$  il modo con cui le proiettività della retta vengono trasformate è costituito dalle omografie di  $S_3$  che lasciano ferma la quadrica rappresentante le proiettività degeneri ed il punto che corrisponde alla «identità»; quindi è riducibile (mediante una trasformazione proiettiva immaginaria) al gruppo delle rotazioni d'una sfera attorno al suo centro. Dunque:

*La rappresentazione canonica della Geometria proiettiva sulla retta (complessa) è data dalla Geometria delle rotazioni della sfera in se stessa.*

E ciò trova riscontro nel fatto che il *Cayley* ha rappresentato mediante sostituzioni lineari sulla variabile complessa le rotazioni della sfera in se stessa<sup>89</sup>.

In particolare si ritrova il risultato che «i gruppi finiti di proiettività sulla retta corrispondono ai poliedri regolari iscritti nella sfera».

### 1.31 Il problema gruppende dei fondamenti della Geometria

Dappoiché ogni Geometria dello  $S_n$  (in particolare dello  $S_3$ ) viene caratterizzata da un gruppo particolare di trasformazioni, il problema dei postulati

---

<sup>89</sup>Cfr. le citate lezioni di Geometria differenziale del Bianchi pag. 83.



relativi ad una Geometria può considerarsi come la questione di «assegnare le elementari proprietà del gruppo che valgono a determinarlo fra tutti i gruppi di trasformazioni in una varietà  $v_n$ ».

Ci limiteremo ad accennare a ciò che si è fatto in questo senso per il caso più interessante che comprende la questione dei fondamenti della ordinaria Geometria.

Si suppongono già introdotti i postulati che permettono di riguardare lo spazio come una  $v_3$  di cui i punti vengono *rappresentati analiticamente* mediante tre coordinate.

Abbiamo già accennato (§19) al modo di *Riemann* di trattare la questione partendo da una espressione dell'elemento lineare

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$$

e volendo determinarla in guisa che la varietà sia *omogenea*: ciò conduce in sostanza alla questione grupale di assegnare ai possibili gruppi di trasformazioni di una forma quadratica differenziale in se stessa, questione che il *Lie* ha approfondito.

Ma sotto un altro aspetto che apparisce più vantaggioso *Helm[h]oltz*<sup>90</sup> si è posto il problema dei fondamenti della Geometria prendendo a caratterizzare mediante le sue elementari proprietà il *gruppo dei movimenti*.

Veramente neppure ad *Helm[h]oltz* erano noti i concetti della teoria dei gruppi, e non è quindi da meravigliarsi di alcune inesattezze sfuggite nella sua trattazione: dobbiamo piuttosto ammirare che egli sfornito di tali mezzi abbia immaginato di presentare il problema dei fondamenti della Geometria sotto una forma, che in seguito ai lavori approfonditi del *Lie*<sup>91</sup> ha acquistato un valore preciso di una grande importanza, non soltanto matematica.

Limitandoci a riferire i principali risultati del *Lie* nell'argomento, diremo che:

*Il gruppo dei movimenti nello spazio euclideo o non euclideo può essere caratterizzato fra tutti i gruppi continui di trasformazioni in una varietà (analitica)  $v_3$  mediante le seguenti proprietà:*

- 1) Ogni movimento lascia invariata una funzione delle coordinate di due punti arbitrari (*distanza*);
- 2) In una regione convenientemente limitata della  $v_3$  è possibile il movimento *libero* attorno ad un punto: cioè tenendo fisso un punto ogni

---

<sup>90</sup>«Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen» (Göttinger Nachrichten - 1868).

<sup>91</sup>Cfr. le citate «Theorie der Transformationsgruppen. Bol. III».

altro punto (*senza eccezione*) può descrivere una superficie  $v_2$ ; tenendo fissi *due* punti un altro punto descrive *generalmente* una linea; tenendo fissi *tre* punti *generici* ogni altro punto resta fisso.

È da notarsi che se in ordine alla 1<sup>a</sup> delle ipotesi 2) si ammettono delle eccezioni vi sono oltre ai due tipi di gruppi di movimenti corrispondenti allo  $S_3$  euclideo e non euclideo anche altri gruppi di natura diversa che soddisfano alle proprietà enunciate.

Allorché si sia approfondita la questione dei postulati occorrenti per definire una varietà a 3 dimensioni  $v_3$  in modo che si possa avere di essa una rappresentazione analitica, si potrà dire che il problema dei postulati della Geometria riceve dall'enunciato precedente la più semplice soluzione matematica.

Ma quel risultato ha anche una portata scientifica, fisica, che deve essere rilevata. Esso permette di *caratterizzare la Geometria dello spazio mediante ipotesi che si riferiscono ad una regione limitata di esso*: è questo appunto il concetto filosofico che ha ispirato le ricerche di Helm[h]oltz, il quale ha avuto di mira di porre i fondamenti della Geometria fisica sopra una base positiva ed ha perciò rilevato la necessità di limitare le ipotesi ad un campo accessibile all'esperienza. È chiaro che le ipotesi poste precedentemente possono riguardarsi come desunte dai fatti più elementari che cadono sotto i nostri sensi e sono *immediatamente verificabili sotto forma precisa*: ed è molto notevole che esse non conducano soltanto alla Geometria euclidea ma anche alla non-euclidea. E poiché non si saprebbe distinguere la prima dalla seconda mediante una ipotesi presentante lo stesso carattere di precisa verificabilità, bisogna concludere che nella scienza positiva non è lecito asserire se lo spazio fisico sia euclideo o no: nel secondo caso la Geometria euclidea avrebbe un valore approssimato molto vicino al vero nei limiti delle nostre esperienze.

Ma non è qui il luogo per siffatte questioni. Soltanto non avremmo potuto passare del tutto sotto silenzio un'osservazione che ci mostra come le questioni matematiche più elevate, quali sono quelle della teoria dei gruppi, si collegano alle questioni relative ai principii ed ai più bei problemi fisico-filosofici.

Ciò abbiamo notato fino dall'inizio di queste conferenze. E non possiamo chiuderle senza insistervi nuovamente e senza trarre una conclusione che ci sembra di utile ammaestramento:

La Matematica pura segue nel suo sviluppo leggi di progresso determinate, sebbene queste non appariscano a prima vista come per rispetto alle scienze sperimentali. A questo proposito la considerazione del modo con cui i vari indirizzi geometrici si sono venuti organizzando dal punto di vista grupppale è sommamente istruttivo.

Chi esaminando l'intrinseca ragione dello svolgimento del pensiero saprà assurgere dalla storia alla coscienza delle leggi che regolano l'organismo matematico, saprà anche trarre dall'opera sua i frutti più fecondi. Al contrario resteranno vani ed infruttuosi sforzi i tentativi di coloro che ispireranno le proprie ricerche al capriccio individuale anziché alla coscienza di cooperare alla naturale evoluzione del pensiero.

Fine

# Bibliografia

- [1] F. Amodeo, *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno  $S_r$* , Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, 26 (1891), pp. 741-770.
- [2] S. Aronhold, *Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal de Crelle), 62, Berlin (1863), pp. 281-345.
- [3] E. Beltrami, *Saggio sopra un'interpretazione della Geometria non euclidea*, (1868) Giornale di Matematiche, 6, pp. 284-312.
- [4] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, (1869) in: (Beltrami 1902-1920, I), pp. 406-429.
- [5] E. Beltrami, *Osservazione sulla nota del Prof. L. Schläfli alla memoria del Sig. Beltrami "Sugli spazii di curvatura costante"*, Annali di Matematica pura et applicata, serie II, tomo 5 (1871-73), pp. 194-198.
- [6] E. Bertini, *Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni*, Rend. del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, (2), 19 (1886), pp. 176-183.
- [7] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, E. Spoerri, Pisa (1894).
- [8] G. Bolyai, *Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di Euclide*, (1868), trad. it. di G. Battaglini in Giornale di Matematiche 6, pp.97-115.
- [9] A. Cayley, *Quelques théorèmes de la géométrie de position*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal de Crelle), 31 (1846), pp.213-226; 34 (1847), pp. 270-275; 38 (1849), pp. 97-104; 41 (1851), pp. 66-72.

- [10] A. Cayley, *A Fifth Memoir upon Quantics*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 148, 1858 (1858), pp. 429-460.
- [11] A. Cayley, *On the Curves Which Satisfy Given Conditions*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 158 (1868), pp. 75-143.
- [12] A. Cayley, *A Memoir on Abstract Geometry*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 160 (1870), pp. 51-63.
- [13] E. B. Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, Journal für die Reine und Angew. Math., 70 (1869), pp. 46-70.
- [14] A. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. 2, hrsg. von F. Lindemann, Leipzig, 1891.
- [15] A. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. 2, hrsg. von F. Lindemann, Leipzig, 1891.
- [16] W. K. Clifford, *On the Classification of Loci*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 169, 1878 (1878), pp. 663-681.
- [17] W. K. Clifford, *The common sense of exact sciences*, completata e pubblicata postuma da Karl Pearson nel 1885, [trad. it. *Il senso comune nelle scienze esatte*, Dumolard, Milano 1886].
- [18] L. Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Mem. dell'Acc. delle Scienze di Bologna, 12 (1861), pp. 305-436.
- [19] L. Cremona, *Sur les surfaces gauches du troisième degré*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal de Crelle), 60 (1862), pp. 313-320.
- [20] L. Cremona, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota II*, Rend. dell'Acc. delle Scienze di Bologna (1864-65), pp. 18-21, Mem. della R. Acc. Nazionale dei Lincei, 5, pp. 3-35, Giorn. di mat., 3 (1865), pp. 269-280, 363-376.
- [21] L. Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, Rend. dell'Acc. delle Scienze di Bologna (1865-66), pp. 76-77, Mem. dell'Acc. delle Scienze di Bologna, 6, pp. 91-136, 7 (1867), pp. 29-78.
- [22] R. De Paolis, *Sui fondamenti della Geometria proiettiva*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, 9 (1881), pp. 489-503.

- [23] R. De Paolis, *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi*, Mem. della Soc. It. delle Scienze detta dei XL, 7, 1890.
- [24] E. D'Ovidio, *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliono dimensioni e di curvatura costante*, Mem. della R. Acc. Nazionale dei Lincei , (3), 1 (1876-77), pp. 133-193; *Transunti della R. Acc. Nazionale dei Lincei* , (3), 1 (1876-77), pp. 133-136.
- [25] F. Enriques, *Sui gruppi continui di trasformazioni nel piano*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2 (1893), pp. 468-473 (=F. Enriques, *Memorie scelte*, vol. 1, pp. 1-7).
- [26] F. Enriques, *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2 (1893), pp. 532-538 (=F. Enriques, *Memorie scelte*, vol. 1, pp. 9-15).
- [27] F. Enriques, *Sui fondamenti della Geometria proiettiva*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 27 (1894), pp. 550-567 (=F. Enriques, *Memorie scelte*, vol. 1, pp. 141-157).
- [28] G. Fano, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Annali di Matematica Pura et Applicata (2), 17 (1890), pp. 307-343.
- [29] G. Fano, *Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di Matematiche, 30 (1892), pp. 106-132.
- [30] W. Fiedler, *Cyclographie: oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme*, Leipzig, 1882.
- [31] K. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comm. Soc. Reg. Sc. Gott. Rec., 6 (1827), pp. 99-146.
- [32] H. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet*, Berlin (1862).
- [33] G. Halphen, *Recherches de géométrie à  $n$  dimensions*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 2 (1873-1874), pp. 34-52.
- [34] H. Helmholtz, *Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft und der Georg-August-Universität Göttingen (1868). N. 9, pp. 193-221.

- [35] H. Helmholtz, *Populäre wissenschaftliche Vorträge*, Vieweg, Braunschweig (1871).
- [36] H. Helmholtz, *Die Thatsachen in der Wahrnehmung*, Rede zur Stiftungsfeier der Berliner Universität am 3, 1878.
- [37] C. Jordan, *Essai sur la Géométrie à  $n$  dimensions*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 3 (1875), pp. 103-174.
- [38] F. Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie I*, Mathematische Annalen, 4 (1871) (=F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, pp. 254-305).
- [39] F. Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie II*, Mathematische Annalen, 6 (1873) (=F. Klein, *Ges. Math. Abhandlungen*, vol. I, pp. 311-343).
- [40] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, 1884.
- [41] E. N. Laguerre, *Sur la théorie des foyers*, Nouvelles Annales de Mathématiques (1852), pp. 3-5.
- [42] E. N. Laguerre, *Sur la théorie des foyers*, Nouvelles Annales de Mathématiques (1853), pp. 6-15.
- [43] T. Levi-Civita, *Sugli invarianti assoluti*, Atti dell'Istituto Veneto, 1893-94.
- [44] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Archiv für Mathematik og Naturvidenskab. Christiana, 1 (1876), pp. 1-18, 152-193; 3 (1878), pp. 93-165, 375-464; 4 (1879), pp. 232-261.
- [45] N. I. Lobatchewsky, *Principien der Geometrie*, Kasan, 1829-30.
- [46] M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882.
- [47] G. Peano, *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*, Mathem Annalen, 36 (1890), pp. 157-160.
- [48] P. Predella, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensione*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 17 (1889-90), pp. 113-159.
- [49] G. F. B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Gottinga, 1854.

- [50] L. Schläfli, *Nota alla Memoria del signor Beltrami "Sugli spazi di curvatura costante"*, Annali di Matematica Pura et Applicata, serie II, tomo 5 (1873), pp. 178-193.
- [51] C. Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino, 36 (1883), pp. 3-86 (=C. Segre, *Opere*, a cura dell'U.M.I., vol. 3, pp. 127-217).
- [52] C. Segre, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Mem. della R. Acc. Nazionale dei Lincei, (3), 19, 1883-84, pp. 127-148.
- [53] C. Segre, *Richerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella Geometria della retta*, Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2), 37, 1885, pp. 395-425.
- [54] C. Segre, *Note sur les homographies binaires et leurs fait sceaux*, Journal fur die reine und Angewandte Mathematik C (1886), pp. 317-330.
- [55] C. Segre, *Sulla varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*, Atti R. Acc. Sci. Torino, (II), 39 (1887), pp. 3-48.
- [56] C. Segre, *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, Rivista di Matematica, 1 (1891), pp. 42-66.
- [57] G. Veronese, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, 19 (1883-84), pp. 344-371.
- [58] G. Veronese, *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova (1891).