
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sopra le equazioni differenziali lineari del quarto ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (II) **XXIX** (1896), pp. 257-269.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federico Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 – Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

SOPRA LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 4° ORDINE
CHE DIVENGONO INTEGRABILI
QUANDO È NOTO UN LORO INTEGRALE PARTICOLARE.

Nota

di FEDERIGO ENRIQUES

§ 1. — È noto che i signori Picard (*) e Vessiot (**) hanno stabilito una teoria delle equazioni differenziali lineari (omogenee) intieramente analoga a quella di Galois delle equazioni algebriche. La detta teoria si basa sulla introduzione d'un gruppo continuo di trasformazioni lineari sugli integrali dell'equazione differenziale, gruppo che gode delle due proprietà caratteristiche seguenti (***):

1) ogni funzione razionale degli integrali e delle loro derivate che rimanga invariata per le trasformazioni del gruppo è esprimibile algebricamente per i coefficienti dell'equazione;

2) ogni funzione razionale degli integrali e delle loro derivate che si può esprimere algebricamente per i coefficienti della equazione, rimane invariata per le trasformazioni del gruppo.

Applicazioni concrete della teoria così fondata allo studio delle equazioni lineari (specialmente dal punto di vista della classificazione) ne sono state già fatte dal sig. Vessiot, il quale ha indicato in particolare la condizione perchè una data equazione sia *integrabile* mediante quadrature, cioè si possa integrare con operazioni algebriche e colla risoluzione successiva di equazioni del 1° ordine.

(*) *Comptes rendus*, 1883 e 1894. — *Annales de Toulouse*, 1887. — *Mathematische Annalen*, 1895.

(**) Sur l'intégration des équations différentielles linéaires, *Annales de l'École normale*, 1892.

(***) Cfr. VESSIOT, op. c. pag. 234-236.

In questa Nota io mi propongo di mostrare come la teoria di Picard-Vessiot si possa applicare alla soluzione del problema di "determinare le equazioni lineari di 3° e 4° ordine, non integrabili, che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare generico „.

Non è il caso di porre la questione analoga per le equazioni del 2° ordine, che godono tutte della proprietà sopra indicata. Quanto alle equazioni del 3° ordine mi limiterò a brevissimi cenni, perchè il risultato che le concerne può riguardarsi come implicitamente contenuto nella analisi che il sig. Vessiot ha fatto di tutti i casi particolari che le equazioni del 3° ordine possono presentare (analisi che, all'infuori di casi ovvii, conduce soltanto alle equazioni già incontrate da Laguerre e Halphen).

Infine noterò che la questione cui la presente Nota è rivolta, può esser posta relativamente alle equazioni lineari d'ordine $n = 5, 6 \dots$; ma il suo interesse è collegato alla piccolezza del numero n , perchè, se il valore di questo numero si lascia indeterminato, si possono avere equazioni lineari di natura comunque elevata, le quali divengono integrabili appena sia noto un loro integrale particolare.

Ora ecco il risultato ottenuto:

I. Se un'equazione lineare, non integrabile,

$$A y + B y' + C y'' + D y''' = 0$$

diviene integrabile quando è noto un suo integrale particolare generico, avviene uno dei seguenti casi:

1) esiste un integrale della forma

$$y_1 = a \cdot e^{\int_0^x \varphi dx}$$

dove a è una costante e φ una funzione algebrica di $A B C D$;

2) fra tre integrali $y_1 y_2 y_3$ convenientemente scelti, d'un sistema fondamentale, sussiste una relazione della forma

$$y_2^2 - y_1 y_3 = a e^{\int_0^x \varphi dx} \quad (*)$$

(a costante, φ funzione algebrica di $A B C D$).

(*) Cfr. per questo caso LAGUERRE, *Comptes rendus*, 1879. — HALPHEN, *ibid.*, 1885. — VESSIOT, *op. cit.*, pag. 274.

(Le funzioni della forma $a e^{\int_0^x q dx}$ che qui compariscono possono dirsi brevemente funzioni *moltiplicative* dei coefficienti dell'equazione, poichè per tutte le trasformazioni del relativo gruppo di Picard-Vessiot {in particolare per le sostituzioni del gruppo di monodromia} subiscono soltanto una moltiplicazione per una costante.)

II. Se un'equazione lineare non integrabile

$$A y + B y' + C y'' + D y''' + E y^{IV} = 0$$

diviene integrabile quando è noto un suo integrale particolare generico, avviene uno dei seguenti casi:

1) Esiste un integrale (moltiplicativo) della forma

$$y_1 = a e^{\int_0^x q dx}$$

ed un 2° integrale della forma

$$y_2 = a y_1 + b \int_0^x e^{\int_0^x \psi dx}$$

(dove a, b sono costanti e φ, ψ funzioni algebriche di $A B C D E$).

2) L'aggiunta di Lagrange dell'equazione proposta ammette tre integrali $z_1 z_2 z_3$ di un'equazione lineare omogenea del 3° ordine formabile algebricamente, legati da un'equazione

$$z_2^2 - z_1 z_3 = a e^{\int_0^x q dx}$$

(a costante e φ funzione algebrica di $A B C D E$): questa equazione risolvente lineare di 3° ordine in z è dunque del tipo I, 2.

3) L'integrale generale y è la somma degli integrali di due equazioni lineari del 2° ordine formabili algebricamente.

4) L'equazione si può considerare come dedotta da un'equazione del 2° ordine

$$L z + M z' + N z'' = 0$$

formabile algebricamente, colla sostituzione

$$z = L y + M y' + N y'',$$

5) Fra 4 integrali convenientemente scelti $y_1 y_2 y_3 y_4$ costituenti un sistema fondamentale dell'equazione, sussiste una relazione della forma

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4 (y_1 y_3 - y_2^2) (y_2 y_4 - y_3^2) = a e^{\int_0^x q dx}$$

(a costante e φ funzione algebrica di $A B C D E$).

I 5 casi che così si ottengono danno luogo a problemi d'integrazione che possono riguardarsi come risolti in quanto l'integrazione stessa viene a dipendere da quadrature e da equazioni di Riccati.

L'ultimo caso è il più notevole, essendo il solo in cui l'equazione proposta deve considerarsi come *irriducibile* (nel senso di Königsberger).

Secondo la teoria di Vessiot questo caso non differisce sostanzialmente da quello in cui si abbia

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4 (y_1 y_3 - y_2^2) (y_2 y_4 - y_3^2) = 0,$$

caso già trattato dal Goursat (*).

2. Sia data un'equazione lineare, d'un certo ordine n ,

$$A_0 y + A_1 y' + \dots + A_n y^{(n)} = 0: \quad (1)$$

consideriamo gli integrali $y_1 y_2 \dots y_n$ d'un sistema fondamentale come coordinate projective omogenee di un iperpiano in S_{n-1} : allora ad ogni integrale

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

della (1), corrisponde il punto

$$y = 0$$

di S_{n-1} .

Le trasformazioni del gruppo di Picard-Vessiot della (1) vengono rappresentate (a meno d'un fattore) dalle omografie di un certo gruppo continuo in S_{n-1} . L'equazione (1) è integrabile se è integrabile questo gruppo d'omografie (Vessiot), ossia [Lie (**)] se le omografie del gruppo lasciano fermo (almeno) un punto di S_{n-1} , una retta per questo punto, un piano per la retta, ecc.

Noi supponiamo che la (1) non sia integrabile ma che lo divenga quando è noto un suo integrale particolare generico.

Ora dare un integrale particolare y della (1) significa *aggiungerlo* al campo di razionalità dell'equazione secondo il signor Ves-

(*) *Comptes rendus*, 1885. — Cfr. anche LUDWIG SCHLESINGER, *Diss.* Berlin, 1887. — FANO, *Rendic. Lincei*, 1895.

(**) *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, s. 262.

siot (*); ciò riduce il suo gruppo di trasformazioni al sottogruppo delle trasformazioni che lasciano invariato quell'integrale.

Dunque dato un punto generico P di equazione $y=0$ in S_{n-1} , le omografie del gruppo della (1) che lo lasciano fermo debbono costituire un sottogruppo integrabile.

Allora si vede subito che vi dovrà essere almeno una retta per P unita per tutte le omografie del nominato sottogruppo, e similmente un piano unito per questa retta, ecc.

Il problema di assegnare le equazioni (1) che godono della proprietà sopra supposta, viene dunque ricondotto alla questione geometrica di "determinare i gruppi d'omografie di S_{n-1} tali che fissando un punto generico, resti ferma in conseguenza una retta (almeno) per questo punto, un piano per la retta, ecc. „

Cominciamo dal risolvere per $n=3, 4$ tale questione geometrica: poi interpreteremo analiticamente i risultati.

3. Il sig. Lie (op. c.) ha più volte notato che i gruppi d'omografie di S_{n-1} i quali godono della proprietà che fissando un punto resti ferma una retta per esso, sono certo gruppi imprimitivi: si tratta del resto di un'osservazione ovvia.

I gruppi che formano oggetto della nostra ricerca essendo imprimitivi, ci potremmo valere dei metodi generali dati dal sig. Lie per la determinazione dei gruppi proiettivi imprimitivi; ma si renderebbe così la nostra analisi molto più lunga del bisogno. Noi adopereremo invece considerazioni dirette e ci varremo di risultati già ottenuti dal sig. Lie (op. c.).

Cominciamo dal caso " $n=3$ „ in cui la questione è già risolta: si vogliono i gruppi di omografie piane non integrabili (e però di dimensione ≥ 3) tali che fissando un punto generico resti fissa una retta per esso; in altre parole si vogliono i gruppi imprimitivi di omografie piane. Seguendo il Lie, questi gruppi si ottengono subito, osservando che vi è (almeno) una serie ∞' di curve scambiate fra loro dalle omografie del gruppo: ciascuna curva di una tal serie ammette almeno ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, e però è una retta o una conica. Ora la nominata serie ∞^1 di curve (rette o coniche) è un fascio dotato di qualche punto base unito, oppure inviluppa una curva d'ordine > 1 trasformata in sè stessa dalle omografie del gruppo.

(*) Op. cit. pag. 235.

In corrispondenza alle due ipotesi si ottengono rispettivamente i due tipi di gruppi seguenti:

- 1) gruppo di omografie piane che lasciano fermo un punto;
- 2) gruppo di omografie piane che trasformano in sè stesse una conica.

Questi due tipi di gruppi rispondono effettivamente alle condizioni del problema e sono i soli casi possibili (*).

4. Sia ora

$$n = 4;$$

si vogliono i gruppi d'omografie (non integrabili e però ∞^3 almeno) nello spazio S_3 , tali che fissando un punto generico resti fissa una retta (almeno) per il punto, e resti fisso un piano per la retta.

Questi gruppi sono imprimitivi, dunque le omografie di un tal gruppo lasciano fermo (almeno) un punto, o una retta, o un piano, o una cubica gobba (**).

Discutiamo partitamente le varie ipotesi.

a) Vi sia un punto unito fisso O .

Fissando un altro qualsiasi punto P resta fissa la retta PO ed un piano per essa: in particolare ciò deve valere se si prende P infinitamente vicino ad O . Dunque il gruppo d'omografie ternarie nella stella O è tale che fissando una retta resta fermo un piano per la retta: segue (§ 3) che

vi è una retta unita fissa per O ,

oppure vi è un cono quartico unito fisso col vertice in O .

b) Vi sia una retta unita fissa p . Possiamo aggiungere l'ipotesi che non vi sia alcun punto unito fisso, altrimenti si ricadrebbe nel caso a).

Fissando un punto generico P , deve restare fissa (almeno) una retta nel piano Pp : usufruendo del risultato del § 3, se ne trae che le omografie del gruppo lascianti fermo un qualsiasi piano per p lasciano fermo in conseguenza un punto (almeno) del piano. Ora debbono distinguersi due ipotesi, secondochè vi è in ciascun piano per p un punto unito su p , o non vi è.

Poniamoci nella 1^a ipotesi.

Si potrebbe supporre che in un piano generico per p restasse fermo un punto di p o restassero fermi due punti o tutti: in

(*) Cfr. la tabella a pag. 106 dell'op. cit. del sig. LIE.

(**) LIE, op. c. s. 234-236.

realtà le due ultime supposizioni sono da scartare perchè condurrebbero all'esistenza di qualche punto unito fisso per le omografie del gruppo. Nella ipotesi che stiamo trattando si avrà dunque in ogni piano generico per p un punto di p che resta fermo quando è fissato il piano. Potrà il punto così ottenuto corrispondere a più di un piano per p ? è facile escluderlo osservando che si avrebbe nel fascio di piani per p una involuzione mutata in sè stessa dalle omografie del gruppo; questa involuzione avrebbe dei piani uniti su ciascuno dei quali si troverebbe un punto unito fisso per le omografie del gruppo (caso scartato). La corrispondenza che si ha tra un piano per p ed il punto di p che resta fermo quando è fissato il piano, è dunque una corrispondenza proiettiva.

Si conclude che le omografie del nostro gruppo lasciano fermo p e trasformano in sè stessa una proiettività tra punti di p e piani per p ; si può dire più brevemente che

le omografie del gruppo lasciano fissa la retta p ed una retta infinitamente vicina sghemba con essa.

Passiamo ora alla 2ª ipotesi della nostra discussione.

In ogni piano fissato per p , resta fisso un punto fuori di p , e (possiamo aggiungere) un punto solo, chè altrimenti si ricadrebbe nella 1ª ipotesi. Questo punto variando il piano per p descrive una curva C mutata in sè dalle omografie del gruppo: ma la C non può appoggiarsi alla retta p , altrimenti si avrebbe qualche punto unito fisso: la C è dunque una retta sghemba a p .

Si conclude che nella 2ª ipotesi del nostro ragionamento

le omografie del gruppo lasciano ferme due rette sghembe (distinte).

c) Vi sia un piano unito fisso π .

Si può vedere che le omografie del gruppo debbono lasciar fermo anche un punto o una retta, ciò che ci riconduce ai casi a) b).

Cominciamo da escludere l'esistenza d'un punto o d'una retta unita su π . Trattandosi di un gruppo imprimitivo si avrà allora su π una conica unita (§ 3).

Possiamo immaginare che la conica sia il cerchio immaginario all'infinito delle sfere: il nostro gruppo è allora composto di similitudini (o movimenti): ora i sottogruppi del gruppo delle similitudini sono tutti determinati dal Lie (*): all'infuori del gruppo to-

(*) Op. cit. s. 240-241, 243.

tale e del sottogruppo dei movimenti che sono primitivi, essi posseggono un punto unito fisso.

Resta così esaurito l'esame dell'ipotesi *c*).

Riuniamo in un quadro i risultati della precedente analisi tenendo conto dell'ipotesi *d*) che definisce da sola un gruppo ∞^3 d'omografie soddisfacente alle condizioni proposte; avremo allora da menzionare 5 tipi di gruppi d'omografie caratterizzati dal lasciare fisso risp.:

- 1) un punto e una retta per esso;
- 2) un cono quadrico;
- 3) due rette sghembe distinte;
- 4) due rette sghembe infinitamente vicine;
- 5) una cubica gobba.

Gruppi siffatti divengono integrabili allorchè si fissa un punto generico, e sono i soli gruppi che godono di questa proprietà.

5. Dobbiamo interpretare analiticamente i risultati ottenuti.

Premettiamo la seguente osservazione generale.

Suppongasì che il gruppo d'omografie (di Picard-Vessiot) relativo ad un'equazione lineare

$$A_0 y + A_1 y' + \dots + A_n y^{(n)} = 0 \quad (1)$$

lasci fermo un S_r ($r < n - 1$) nello S_{n-1} rappresentativo. Sieno

$$y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r + 1)$$

le equazioni di $r + 1$ punti indipendenti dello S_n : allora l'equazione

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_{r+1} \\ y' & y_1' & \dots & y_{r+1}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(r+1)} & y_1^{(r+1)} & \dots & y_{r+1}^{(r+1)} \end{vmatrix} = 0$$

viene trasformata in sè stessa dalle omografie del gruppo, ossia il determinante Δ è una funzione moltiplicativa (per le trasformazioni del gruppo di Picard-Vessiot). Segue che il rapporto di due coefficienti qualunque dell'equazione lineare $\Delta(y) = 0$ resta invariato per le trasformazioni del gruppo di Picard-Vessiot e quindi è funzione algebrica dei coefficienti della (1). Dunque $r + 1$ integrali indipendenti della (1) (rappresentanti $r + 1$ punti dello S_r fisso) soddisfano ad una equazione lineare omogenea d'ordine $r + 1$ formabile algebricamente.

Questa osservazione permette di vedere subito quali equazioni si otterranno in corrispondenza al gruppo del tipo 1) ($n=3$) § 3, e ai gruppi dei tipi 1), 3) ($n=4$) § 4.

$n=3$, caso 1). Nel piano rappresentativo resta fisso (per le omografie del gruppo) un punto (cioè un S_r “ $r=0$ ”). La 1) ammette dunque un integrale moltiplicativo

$$y_1 = a e^{\int_0^x q dx},$$

integrale di un'equazione lineare omogenea del 1° ordine formabile algebricamente (cfr. I, 1 — § 1).

$n=4$, caso 1) Nello S_3 rappresentativo resta fisso un punto ($r=0$): si ha dunque un primo integrale moltiplicativo

$$y_1 = a e^{\int_0^x q dx}.$$

Inoltre vi è una retta fissa pel punto (cioè un S_r “ $r=1$ ”). Per conseguenza un 2° integrale y_2 della (1) soddisfa ad un'equazione lineare omogenea del 2° ordine formabile algebricamente, e poichè questa equazione ammette già l'integrale y_1 , la derivata

$$\left(\frac{y_2}{y_1} \right)'$$

del rapporto $\frac{y_2}{y_1}$ è una funzione moltiplicativa, e si ha

$$y_2 = a y_1 + b \int_0^x e^{\int_0^x \psi dx}$$

(cfr. II, 1°).

$n=4$, caso 3). Nello S_3 rappresentativo vi sono due rette fisse sghembe (cioè due S_r fissi “ $r=1$ ”). La (1) ammette dunque gli integrali di due equazioni lineari omogenee del 2° ordine (senza integrali comuni) formabili algebricamente (cfr. II, 3).

6. Riferiamoci ancora in generale all'equazione d'ordine n

$$A_0 y + A_1 y' + \dots + A_n y^{(n)} = 0, \quad (1)$$

e supponiamo che il suo gruppo d'omografie nello S_{n-1} rappresentativo degli integrali lasci ferma una varietà algebrica (inviluppo)

$$f(y_1 y_2 \dots y_n) = 0.$$

La forma f è moltiplicativa e però i suoi coefficienti possono esprimersi algebricamente per $A_0 A_1 \dots$ a meno d'un fattore. Si avrà quindi (denotando con a una costante e con q una opportuna funzione algebrica di $A_0 A_1 \dots A_n$)

$$f(y_1 y_2 \dots y_n) = a e^{\int_0^x q dx}.$$

Applichiamo questa osservazione ai casi relativi ai gruppi 2) ($n=3$ del § 3, e 2), 4) ($n=4$) del § 4: potremo subito dedurre le equazioni corrispondenti a questi casi.

$n=3$, caso 2. Nel piano rappresentativo vi è una conica (inviluppo) fissa, di cui possiamo porre l'equazione sotto la forma

$$y_2^2 - y_1 y_3 = 0:$$

dunque fra i tre integrali $y_1 y_2 y_3$ della (1) passa la relazione

$$y_2^2 - y_1 y_3 = a e^{\int_0^x q dx}$$

(cfr. I, 2).

$n=4$, caso 2). Nello S_3 rappresentativo vi è un cono quadrico fisso. Dunque per l'aggiunta di Lagrange dell'equazione proposta il gruppo corrispondente (duale del primo) (*) lascia ferma una conica inviluppo di piani.

In primo luogo essendo fisso il piano della conica, tre integrali $z_1 z_2 z_3$ di questa equazione aggiunta soddisfano ad un'equazione lineare omogenea di 3° ordine formabile algebricamente (§ 5): in 2° luogo tra di essi passa una relazione che (per scelta conveniente dei medesimi) è della forma

$$z_1^2 - z_1 z_3 = a e^{\int_0^x q dx}$$

(cfr. II, 2).

$n=5$, caso 4). Nello S_3 rappresentativo vi è una cubica gobba fissa. La sua equazione come inviluppo di piani può scriversi sotto la forma

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = 0:$$

(*) Cfr. VESSIOT, op. cit. pag. 249, e BOREL, *Sur l'équation adjointe, etc.* Annales de l'École normale, 1892.

dunque fra i 4 integrali $y_1 y_2 y_3 y_4$ passa una relazione della forma

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = a e^{\int_0^x \varphi dx}$$

cfr. II, 5).

7. Resta da cercare quale tipo d'equazione lineare corrisponda al gruppo 4) $n = 4$) § 4.

Questo caso si può considerare come limite del caso 2) (II).

Si abbia un'equazione lineare del 4° ordine la quale ammette le soluzioni di due equazioni lineari di 2° ordine indipendenti (formabili algebricamente). Dette

$$z_1 z_2, u_1 u_2$$

due coppie di integrali indipendenti di queste equazioni del 2° ordine, l'equazione del 4° ammette dunque come integrali d'un sistema fondamentale $z_1 z_2 u_1 u_2$, e però è

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} y & z_1 & z_2 & u_1 & u_2 \\ y' & z_1' & z_2' & u_1' & u_2' \\ y'' & z_1'' & z_2'' & u_1'' & u_2'' \\ y''' & z_1''' & z_2''' & u_1''' & u_2''' \\ y^{IV} & z_1^{IV} & z_2^{IV} & u_1^{IV} & u_2^{IV} \end{vmatrix} = 0. (*)$$

Si deve sostituire in questa equazione $u_1 u_2$, con

$$z_1 + \mu z_1, \quad z_2 + \mu z_2,$$

e fare le conseguenti sostituzioni sulle derivate; 'supporre quindi $\mu (= \mu(x))$ tendente a 0 in tutto un cerchio determinato, e vedere verso quale forma limite tende l'equazione $\Delta(y) = 0$. Indicheremo con $\bar{\Delta}(y) = 0$ questa equazione limite che dovrà avere come gruppo d'omografie in S_3 il gruppo 4) (equazione limite della cui esistenza si potrebbe a priori convincersi).

Senza effettuare calcoli possiamo prevedere che cosa dovrà essere tale equazione $\bar{\Delta}(y) = 0$ nel modo seguente.

(*) La formazione effettiva di questa equazione è data dal LIBRI: *Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont le racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres. Crelle J., Bd. X, pag. 167 (anno 1833).*

Sia

$$\pi(z) = Lz + Mz' + Nz'' = 0$$

l'equazione del 2° ordine che ha per integrali z_1, z_2 , e

$$T(z) = 0$$

l'equazione analoga che ha per integrali

$$u_1 = z_1 + \mu z_1 \quad u_2 = z_2 + \mu z_2.$$

Supponiamo che la funzione $\mu(x)$ di forma variabile, si possa far divenire in tutti i punti d'un cerchio determinato minore in modulo d'un numero positivo σ piccolo ad arbitrio.

Consideriamo π, T come operazioni funzionali distributive applicate alla funzione $z(x)$.

Il prodotto

$$T\pi(z)$$

differisce da $\pi^2(z)$ e da $\pi T(z)$ per una quantità infinitesima (in tutti i punti del cerchio) all'impicciolire di σ .

Per conseguenza a meno di infinitesimi possiamo considerare come radici indipendenti dell'equazione funzionale

$$T\pi(z) = 0$$

le

$$z_1 \quad z_2 \quad z_1 + \mu z_1 \quad z_2 + \mu z_2 \quad (*).$$

Dunque l'equazione

$$T\pi(z) = 0$$

differisce per infinitesimi dalla

$$\Delta(z) = 0$$

in tutto il cerchio fissato.

Al limite per $\sigma = 0$ si avrà dunque l'equazione

$$\Delta = \pi^2(z) = 0:$$

(*) Tali sarebbero infatti le radici di $T\pi(z) = 0$ se fosse $T\pi = \pi T$. È questo un caso particolarissimo (evidente) di un teorema del signor PINCHERLE, Sulle operazioni funzionali distributive commutabili con una data. *Atti Accad. di Torino*, 1895.

vale a dire l'equazione limite

$$\Delta(y) = 0$$

si deduce dalla

$$Lz + Mz' + Nz'' = 0$$

colla sostituzione

$$z = Ly + My' + Ny''$$

(cfr. II, 4).

8. Resterebbe da parlare del problema d'integrazione a cui danno luogo le equazioni lineari del 3° e 4° ordine considerate in questa nota (cfr. § 1). Ma per quelle del 3° ordine l'analisi è già stata fatta: il 3° dei casi incontrati (il solo notevole) è dovuto a Laguerre e Halphen (l. c.).

Similmente il problema d'integrazione delle equazioni del 4° ordine corrispondente ai casi 1), 2), 3), 4), si può riguardare come risoluto immediatamente.

Tutti questi casi portano solo a quadrature e ad una o a due equazioni di Riccati.

Il caso 5) non è stato veramente considerato in tutta la sua generalità: è stato solo considerato (da Goursat) il caso in cui fra 4 integrali y_1, y_2, y_3, y_4 di un'equazione (lineare omogenea) del 4° ordine sussista una relazione

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = 0:$$

ma risulta dalla teoria di Vessiot che il nostro caso più generale non differisce sostanzialmente da questo caso particolare, e da un altro più particolare ancora, quello dell'equazione soddisfatta dai cubi d'una equazione lineare del 2° ordine; il sig. Goursat riduce il suo caso a quest'ultimo con una sostituzione della forma

$$z = ay + by':$$

qui occorrerebbe una sostituzione della forma

$$z = ay + by' + cy'':$$

ma lo sviluppo dei calcoli a ciò occorrenti ci condurrebbe fuori dei limiti imposti alla presente nota e non avrebbe interesse in ordine alla questione che ne forma l'oggetto.