Enriques, Federigo

Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche

Mem. Soc. It. d. Scienze (III) **X** (1896), pp. 1-81.

Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche.

Memoria di FEDERIGO ENRIQUES

presentata dal Socio V. CERRUTI ed approvata dal Socio L. CREMONA

I. La Geometria sopra una superficie algebrica in seguito ai classici lavori di CLEBSCH e CREMONA è venuta prendendo sistematicamente ad oggetto lo studio delle proprietà delle superficie che sono invariantive per trasformazioni birazionali di essa; questa tendenza si congiunge d'altra parte all'indirizzo della Geometria sopra una curva collegato alla teoria degli integrali abeliani.

In questo senso fra i lavori che hanno cooperato a porre le basi della Geometria sopra una superficie debbono annoverarsi primi di tutti quelli fondamentali del sig. NOETHER (¹), dopo i quali la teoria che ci occupa ha ricevuto poco incremento fino a questi ultimi anni.

Ma recentemente lo studio di essa è stato ripreso secondo due indirizzi che, mentre si connettono da un lato ai citati lavori del sig. NOETHER, approfittano felicemente di idee e di metodi nuovi: questi sono, « l'indirizzo trascendente coltivato specialmente in Francia (PICARD, HUMBERT ecc.) in cui è caratteristica la feconda considerazione degli integrali di differenziali totali (del sig. PICARD) accanto a quella degli integrali doppi di CLEBSCH-NOETHER », « l'indirizzo algebrico-geometrico seguito principalmente nei lavori italiani, dove si coltiva lo studio dei sistemi lineari di curve sopra una superficie seguendo un ordine di concetti che può dirsi preparato dalle precedenti ricerche dei sig. SEGRE e CASTELNUOVO nella Geometria sopra una curva e nella teoria dei sistemi lineari di curve piane ».

Appunto appigliandomi ad un tale ordine di concetti, io mi proposi, due anni or sono, nelle *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (²), di porre le basi di una teoria generale dei sistemi lineari di curve sopra una superficie, fondandomi sui concetti di sistema *normale* o *completo*, di *sistema aggiunto* ad un sistema lineare irreducibile sopra una superficie (segante la serie canonica sulla curva del dato sistema ecc.), di *serie caratteristica* d'un sistema lineare irreducibile (segata sopra una curva del sistema dalle altre del medesimo).

(¹) « *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* » (Math. Ann. II, VIII).
(²) Memorie dell'Accademia di Torino, 1893.

Mi accorsi allora che la causa delle principali difficoltà che compariscono nello studio d'un sistema lineare sta nel fatto che le serie (serie segata dal sistema aggiunto e serie caratteristica) collegate ad un sistema lineare normale o completo, possono essere incomplete. Io cercai di ricondurre questo fatto ad un carattere della superficie (indipendente dal particolare sistema cui tale deficienza si riferisce) e mostrai quindi come si possano imporre alle superficie di genere >0 alcune restrizioni, che possono riguardarsi come caratteristiche della classe più generale delle superficie *regolari*, per le quali l'inconveniente accennato si elimini; giungevo così pei sistemi lineari su tali superficie regolari ad una serie di resultati assai semplici fra i quali mi limiterò a menzionare l'estensione del teorema di Riemann-Roch ed i teoremi sulle curve fondamentali.

Negli sviluppi delle « Ricerche » i sistemi stessi venivano altresì assoggettati qua e là a talune restrizioni che si rispecchiano in restrizioni di natura *proiettiva* relative alle superficie atte a rappresentare quei sistemi (superficie trasformate della data aventi come sezioni piane o iperpiane le curve del sistema); sebbene vi fosse in alcuni punti la tendenza ad eliminare siffatte restrizioni.

Dopo la pubblicazione delle « Ricerche » varî fatti mi convincevano dell'importanza di prescindere da ogni restrizione per le superficie e vedere tutto ciò che di assolutamente generale potesse dirsi, abbracciando insieme superficie di genere >0 e di genere 0, regolari o no. Giacchè p. e. (trattandosi appunto di superficie di genere 0) non si poteva trarre profitto dai resultati generali delle « Ricerche » nella dimostrazione della razionalità delle involuzioni piane (data dal sig. Castelnuovo) o nei successivi studî, compiuti dal sig. Castelnuovo e da me sulle superficie a sezioni ellittiche ed iperellittiche: nè invero si sarebbero incontrate a questo proposito minori difficoltà ove la teoria generale avesse abbracciato anche le superficie *regolari* di genere 0, perchè appunto la verifica di questa regolarità è nei casi pratici la somma difficoltà.

D'altra parte anche nel campo delle superficie di genere >0 gli esempî di superficie irregolari (ad es. aventi il genere geometrico diverso dal genere numerico) divenivano sempre più numerosi: ai primi esempî dati dal sig. Castelnuovo ([1]) (oltre le rigate), si aggiungevano quelli offerti dalle così dette superficie iperellittiche di cui il sig. Humbert ([2]) ha messo in luce le belle proprietà, e si veniva formando la convinzione che intiere classi di superficie (superficie con un fascio irrazionale, superficie rappresentanti le coppie di punti d'una curva, superficie possedenti integrali di Picard) ([3]) dovessero ritenersi al di fuori del campo delimitato nelle mie « Ricerche ».

In conseguenza *mi sono proposto di porre gli elementi di una teoria assolutamente generale dei sistemi lineari sopra una superficie prescindendo da ogni restrizione per la superficie* e abbracciando così le superficie (regolari o no) di genere >0 e di genere 0, in particolare le superficie razionali, le rigate ecc.

Nel presente lavoro il proposito si vedrà per una parte realizzato, ed unendo a

([1]) Rendic. Istituto lombardo 1891.

([2]) « *Théorie générale des surfaces hypérelliptiques* » (Journal de Mathém. 4e série t. IX, 1893).

([3]) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* » (Journal de Liouville, 1889).

questo i lavori del sig. Castelnuovo [1] che gli si accompagnano, il lettore avrà un quadro completo dei più essenziali resultati conseguiti fino ad ora in questa teoria secondo il nostro indirizzo.

Tantochè nel presente lavoro restano inclusi come caso particolare gli sviluppi delle « Ricerche » fino al cap. IV: la questione se sia completa la serie caratteristica d'un sistema lineare (normale o completo), questione ivi trattata nel cap. IV, rientra come caso particolare nel teorema del sig. Castelnuovo (cfr. il 1° dei citati lavori), e si può quindi affermare che vale l'estensione del teorema di Riemann-Roch (del cap. IV) con una restrizione di meno. Del resto si troverà quì in fine del lavoro una breve Appendice che ha appunto per scopo di collegare questa Memoria alle « Ricerche » permettendo al lettore di passare immediatamente ai cap. IV, V, di quelle, ove sono dati sviluppi inerenti alle sole superficie regolari.

II. I concetti che mi hanno guidato in questo studio, sebbene lungo ne sia riuscito lo svolgimento, sono molto semplici: li espongo quì brevemente presentando un quadro succinto dei principali resultati; ciò anche allo scopo di additare quali sono le parti essenziali della Memoria, e quali possono essere omesse in una prima lettura senza nuocere all'intelligenza del resto.

III. È noto come nella Geometria sopra una curva sia fondamentale il concetto di serie g_n^r *completa* (di gruppi di n punti), cioè di serie non contenuta in un'altra serie più ampia di gruppi di n punti. Il teorema che un gruppo appartiene ad *una* serie completa (di dimensione ≥ 0) permette di operare sulle serie per *somma* e *sottrazione*, denotando col nome di serie completa somma di una g_n e di una $g_{n'}$ sopra una data curva, *la* serie $g_{n+n'}$ completa contenente tutti i gruppi composti di un gruppo di g_n e di un gruppo di $g_{n'}$ (e la g_n come serie residua di $g_{n'}$ rispetto a $g_{n+n'}$ o differenza delle due serie).

Una estensione del concetto di serie completa alle superficie fu da me iniziata in due sensi nelle « Ricerche » considerando i sistemi lineari irreducibili di dato grado *normali* o *completi rispetto al grado*, ed i sistemi lineari irreducibili *completi rispetto al genere* (o soltanto *completi*).

La convenienza di conservare l'uno o l'altro di questi due caratteri d'un sistema irreducibile nel suo successivo ampliamento appare ormai collegata al campo di superficie cui si vogliono riferire le ricerche. La seconda estensione mi appariva preferibile due anni or sono, e tale era infatti nel campo delle superficie di genere > 0 per le quali ammettevo la trasformabilità in una superficie senza curve *eccezionali* (immagini di punti semplici).

Ma se si vuole eliminare qualsiasi restrizione per le superficie conviene attenersi specialmente al concetto di sistema normale o completo rispetto al grado, perchè *sempre* sussiste il teorema che « un sistema lineare irreducibile di dato grado è contenuto in *un* sistema normale dello stesso grado », mentre l'analogo teorema che si riferisce ai sistemi completi rispetto al genere va subordinato ad una restrizione (cfr. l'Appendice in fine al lavoro).

[1] « *Alcuni resultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie* ». « *Sulle superficie di genere 0* ».

Tuttavia il concetto di sistema normale così limitato ai sistemi irreducibili aventi un grado (e quindi di dimensione > 1) non è sufficiente ad una teoria generale dei sistemi lineari: si è necessariamente condotti ad estenderlo ai sistemi riducibili, ciò che esige considerazioni assai delicate sulla connessione delle superficie di Riemann (curve) contenute in uno spazio di Riemann a 4 dimensioni (superficie). Mediante tali considerazioni si riesce a precisare sotto forma invariantiva che cosa s'intenda dicendo che una curva è contenuta *totalmente* in un dato sistema, e quindi a stabilire che *ogni curva comunque riducibile* (sopra una superficie) *è contenuta totalmente in un sistema lineare di dimensione* $\geqq 0$ *(normale) non contenuto totalmente in altri più ampi:* soltanto dopo questa estensione può esser posto l'algoritmo generale e fecondo consistente nell'operare sui sistemi lineari normali mediante *somma* e *sottrazione*; giacchè con tale procedimento (ed a maggior ragione in seguito coll' operazione di *aggiunzione*) si giunge necessariamente a sistemi riducibili anche partendo da sistemi irreducibili (come soglio fare generalmente nel seguito per ragione di semplicità).

Il lettore confrontando i §§ 9-13, potrà acquistare le nozioni fondamentali poste a questo proposito nei due primi capitoli del lavoro, necessarie a proseguire nel seguito.

IV. La somma e la sottrazione costituiscono il modo più semplice di operare sui sistemi lineari normali, modo rappresentato da un opportuno simbolismo: successivamente si studia una operazione più elevata che conduce in generale da un sistema lineare (normale) ad un altro (pure normale): questa operazione è l'*aggiunzione.*

L'importanza del considerare operazioni siffatte nella Geometria sopra una superficie può essere avvertita a priori, pensando appunto che uno degli scopi di essa è di costruire altri sistemi lineari partendo da sistemi dati sulla superficie, in particolare giungendo a sistemi lineari collegati invariantivamente alla superficie ecc.

Le curve (C_a) *aggiunte* ad un sistema lineare (irreducibile) $|C|$ sopra una superficie, si presentano come analoghe alle curve d'ordine $n - 3$ aggiunte ad un sistema lineare di curve d'ordine n nel piano. La loro prima proprietà consiste nel segare gruppi della serie canonica (g^{p-1}_{2p-2}) sulla curva generica C (di genere p). Ma questa proprietà presa relativamente ad un sistema piano d'ordine n, non basta in generale a caratterizzare le curve aggiunte d'ordine $n - 3$, quando il sistema ammetta delle curve fondamentali *proprie* (che staccate diminuiscono il genere delle curve residue). Si può allora notare come le C_a si comportino in un dato modo rispetto ai sistemi residui delle curve fondamentali, ed introdurre questo comportamento come una seconda condizione nella definizione delle curve aggiunte. Questa via ho seguito nelle « Ricerche »: essa conduce a porre alcune restrizioni relative alla natura delle curve fondamentali d'un sistema lineare, sotto le quali le curve aggiunte riescono definite dalle condizioni accennate in guisa che:

a) esse competono al sistema lineare normale contenente il dato sistema;

b) formano esse pure (se esistono) un sistema lineare normale (*aggiunto* al dato);

c) hanno il significato ordinario di curve aggiunte d'ordine $n - 3$, se il sistema proposto è un sistema di curve piane d'ordine n.

Qui il lettore può domandarsi se effettivamente convenga nella estensione del concetto di curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$, di tener conto del modo di comportarsi di esse rispetto ai sistemi residui delle curve fondamentali in $|C|$, o se non si potrebbe invece assumere come definizione soltanto la prima proprietà (di segare gruppi canonici sulla curva C) abbandonando in parte l'analogia col piano: tanto più che le curve (che denominiamo *subaggiunte*) soddisfacenti a quella prima proprietà formano, già per questa condizione, un sistema lineare. A questo dubbio si può rispondere che effettivamente in molte ricerche (e p. e. nella dimostrazione di Castelnuovo della razionalità delle involuzioni piane) si tien conto soltanto delle curve subaggiunte non occupandosi della ulteriore condizione più complicata, ma invece in altre questioni appare inevitabile la ulteriore limitazione: anzi deve essere osservato che la considerazione delle curve subaggiunte basta essenzialmente in quei casi in cui (i sistemi con cui si ha a che fare riuscendo privi di curve fondamentali proprie) le curve subaggiunte si confondono colle aggiunte.

Queste considerazioni si renderanno chiare al lettore se egli pensa alla interpretazione proiettiva delle curve aggiunte. Si trasformi la superficie in una F di S_3 avente per sezioni piane le curve C del sistema proposto (supposto ∞^3 almeno ecc.): allora le curve C_a aggiunte a $|C|$ vengono segate su F da superficie aggiunte; le curve subaggiunte da superficie (*subaggiunte* ad F) che si comportano come le aggiunte lungo la curva multipla, ma non nei punti multipli isolati di F.

La considerazione delle curve aggiunte al sistema $|C|$ come sezioni di una superficie opportuna trasformata F con superficie aggiunte (d'ordine $n-3$ se n è l'ordine di F), permette di riconoscere subito le difficoltà inerenti alla definizione delle curve aggiunte a $|C|$ a cagione del complicarsi delle curve fondamentali di $|C|$ che ha un riscontro nel complicarsi della natura delle singolarità di F: tale considerazione mostra dunque che la difficoltà che quì si incontra nella teoria delle curve aggiunte è in sostanza la difficoltà inerente allo studio *proiettivo* delle singolarità d'una superficie ([1]).

Distinguo appositamente la questione proiettiva delle singolarità di una superficie, dalla questione della loro riducibilità, cioè della trasformabilità di una superficie in una dotata soltanto di singolarità ordinarie (se si vuole « curva doppia e punti tripli »): questa ultima questione se pure non definitivamente risoluta in modo rigoroso si prevede ormai debba avere una risposta affermativa; ad ogni modo tale risposta affermativa si suppone generalmente come una ipotesi (eventualmente limitativa) e tale ipotesi figura anche qui.

Ma questa ipotesi (si noti) non basta a superare la difficoltà inerente alle singolarità d'una superficie; vi è sempre la difficoltà del loro studio proiettivo, ed ove si escludano in questo senso le singolarità superiori si viene ad ammettere una restrizione *certamente limitativa* nella teoria dei sistemi lineari sopra una superficie (restrizione relativa non più alle superficie ma ai sistemi su di esse). Rimuovere questa restrizione è essenziale nella Geometria sopra una superficie ove si voglia

([1]) A questo proposito deve esser notato che, sebbene manchi finora una definizione assolutamente generale di superficie aggiunte ad una data il sig. Noeter ha dato in alcuni casi il modo di comportarsi di tali superficie aggiunte in un punto multiplo non ordinario (Götting er Nachrichten — 1871).

Una definizione di superficie aggiunte ad una data più generale di quella relativa al caso di singolarità ordinarie, ma tuttavia non assolutamente generale, è data nelle mie « Ricerche ».

operare in modo assolutamente generale sui sistemi lineari, non bastando in tal caso di assoggettare a restrizioni i sistemi da cui primitivamente si parte.

In luogo di abbordare la questione diretta, dirò come sono riuscito per altra via a porre la definizione assolutamente generale delle curve aggiunte ad un sistema lineare (e quindi delle superficie aggiunte ad una data di S_3) superando quindi indirettamente la difficoltà dello studio proiettivo delle singolarità delle superficie. Ma per questo occorre premettere un'altra considerazione.

V. Nel caso delle superficie di genere > 0 che ammettono una superficie trasformata F senza curve eccezionali (immagini di punti semplici) io notai nelle « Ricerche » come il sistema aggiunto $|C_a|$ ad un sistema lineare $|C|$ è nel caso più semplice il sistema somma di $|C|$ e del sistema *canonico* $|K|$ (segato su una superficie d'ordine n di S_3 dalle superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad essa); a tale sistema somma possono doversi ulteriormente sommare delle curve eccezionali immagini di (eventuali) punti base di $|C|$ su F. Limitandoci dunque al caso più semplice si ha per due sistemi $|C|$ $|C'|$, (aventi gli stessi punti base su F),

$$|C_a + C'| = |C + C'_a| \ (= |K + C + C' + \dots|).$$

Pensai che un teorema siffatto dovesse valere indipendentemente dall'esistenza del sistema canonico, cioè anche per superficie di genere $p = 0$; e me ne convinsi tosto osservando la cosa nel piano. Poco dopo riuscivo a stabilirlo in generale per una superficie qualunque, ammesse pei sistemi lineari di cui si tratta convenienti limitazioni alla natura delle curve fondamentali (necessarie alla definizione diretta delle curve aggiunte). Mi accorsi quindi che tale teorema è caratteristico per l'operazione di *aggiunzione*, e mi proposi di porlo a base della definizione delle curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$ in tutti i casi in cui per il complicarsi delle curve fondamentali di $|C|$ riesce difficile una definizione diretta.

Per tal modo riuscivo dunque ad eliminare la questione dello studio proiettivo delle singolarità delle superficie, pur ammettendo la trasformabilità della superficie in una dotata soltanto di singolarità ordinaria o (ciò che è lo stesso) in superficie senza singolarità in un iperspazio, vale a dire ammettendo l'esistenza sopra la superficie di sistemi lineari (*non singolari*) non aventi curve fondamentali all'infuori dei punti semplici della superficie. Ecco in breve lo svolgimento della teoria delle curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$, cui mi ha condotto il concetto sopra esposto.

1) Ho cominciato ad occuparmi delle curve (subaggiunte a $|C|$) soggette soltanto alla condizione di segare gruppi canonici sulle curve generiche C. Queste curve subaggiunte restano definite a meno di parti fisse fondamentali per $|C|$; prescindendo da queste o fissandole convenientemente si ha che

a) le curve subaggiunte a $|C|$ (se esistono) competono al sistema normale $|C|$ e formano un sistema lineare normale (*subaggiunto* a $|C|$);

b) se staccando da $|C|$ una curva C'' e imponendo dei punti base di molteplicità $i_1\, i_2 \dots (>1)$ alle curve residue si ottiene un nuovo sistema irreducibile $|C'|$ le curve subaggiunte a questo $|C'|$ si otterranno staccando C'' dal sistema subaggiunto a $|C|$ e imponendo alle curve residue i detti punti base colle molteplicità $i_1 - 1$, $i_2 - 1 \dots$

c) la proprietà inversa della *b*) non è vera in generale; essa sussiste però se $|C'|$ è un sistema non singolare (ed anche se ha soltanto curve fondamentali proprie); in questo caso dunque sommando alle curve subaggiunte a $|C'|$ la C'' si ottengono curve contenute nel sistema subaggiunto a $|C|$.

2) Pei sistemi lineari non singolari le curve subaggiunte si confondono colle aggiunte: per esse sussistono la relazione fondamentale *b*) e l'inversa *c*) 1). Dato un sistema qualunque $|C'|$ sulla superficie si può paragonarlo ad un sistema non singolare $|C|$ che lo contenga, e quindi delimitare tra le curve subaggiunte a $|C'|$ quelle particolari (supposte esistenti) che in rapporto a $|C|$ verificano la relazione *c*) 1): queste curve riescono indipendenti dalla particolare scelta del sistema non singolare $|C|$, e si possono quindi denominare curve *aggiunte* a $|C|$.

Le relazioni *b*) *c*) che legano le curve aggiunte di un sistema lineare $|C'|$ a quelle d'un altro $|C|$ che lo contenga restano ora stabilite quando uno qualunque dei due sistemi $|C|$ $|C'|$ sia non singolare: un ulteriore passo ci libera da questa restrizione stabilendo in ogni caso quelle relazioni le quali vengono a costituire il *teorema fondamentale della teoria delle curve aggiunte.*

3) Dato sopra una superficie un sistema lineare irreducibile $|C|$, sotto le necessarie limitazioni per le curve fondamentali di $|C|$, si deduce la definizione diretta delle curve aggiunte a $|C|$ cui si è innanzi accennato.

4) Interpretando proiettivamente i resultati ottenuti si pone la definizione generale di superficie aggiunte ad una data di S_3, si stabilisce il teorema del resto generalizzato, il teorema di NOETHER sulle superficie aggiunte alle curve gobbe e la sua inversione ecc.

VI. Dalla teoria delle curve aggiunte e dal relativo teorema fondamentale si possono fare scaturire sistemi di curve collegati invariantivamente alle superficie: in primo luogo le curve *canoniche* (sezioni d'una superficie d'ordine n colle superficie aggiunte d'ordine $n-4$). Se $|C|\,|C'|$ sono due sistemi lineari si ha, nel caso più semplice, $|C_a+C'|=|C+C'_a|=|(C+C')_a|$, da cui segue (se $|C_a|$ contiene $|C|$) $|C_a-C|=$ $=|C_a'-C'|$.

Questo è in sostanza il teorema d'invariantività delle curve canoniche, teorema che (per le superficie di genere $p>0$) si può dire equivalente al teorema fondamentale della teoria delle curve aggiunte.

Ma anche sulle superficie di genere $p=0$ si possono avere curve legate invariantivamente alla superficie: può darsi che un sistema $|C|$ non sia contenuto nel proprio aggiunto $|C_a|$ (onde $p=0$), ma invece il doppio di esso $|2\,C|$ sia contenuto in $|2\,C_a|$: risultano allora invariantive le curve (*bicanoniche*) del sistema $|2\,C_a-2\,C|$ (indipendente dalla scelta di $|C|$): se si tratta di una superficie d'ordine n di S_3 tali curve vengono segate da certe superficie *biaggiunte* d'ordine $2n-8$ che (nel caso delle singolarità più semplici) passano doppiamente per la curva doppia della superficie. È superfluo notare che questo resultato non dice nulla per $p>0$, ma ha invece un interesse per $p=0$; si hanno in proposito opportuni esempî. Ed il progresso ottenuto così nella Geometria sopra le superficie può (in un certo senso) riguardarsi come appartenente all'ordine d'idee del lavoro del sig. NOETHER (Mathem. Annalen XVII).

VII. Alla determinazione delle curve (canoniche e bicanoniche) d'una superficie legate invariantivamente ad essa, si connette la determinazione di caratteri numerici invariantivi della superficie stessa: accanto ai due generi introdotti dal sig. NOETHER (Flächen e Curven-geschlecht) appare quì il *bigenere* o genere delle curve bicanoniche: e questi caratteri restano definiti anche nei casi più elevati di riducibilità del sistema canonico (o bicanonico) di cui si hanno esempî, e che erano sfuggiti fin quì.

Il sig. NOETHER ha notato (Mathem. Annalen VIII) che alla determinazione di caratteri numerici d'una superficie si perviene anche (secondo l'indirizzo del sig. ZEUTHEN (1) partendo dalle singolarità della superficie supposta in S_3 d'un certo ordine n; essenzialmente si giunge così ad un numero che è l'espressione del numero delle superficie aggiunte d'ordine $n-4$ (linearmente indipendenti) desunto dalle formule di postulazione di NOETHER (2). Che questo numero p_n (detto *genere numerico* o virtuale) rappresenti sempre anche il genere effettivo (o *geometrico*) p_g della superficie (all'infuori del caso delle rigate) si suppose dapprima, finchè gli esempi addotti dal CASTELNUOVO e da HUMBERT non mostrarono il contrario: ma ad ogni modo il carattere invariantivo del genere numerico restava stabilito indipendentemente (da ZEUTHEN e NOETHER) con quelle limitazioni alla natura delle singolarità della superficie che pur occorrevano per la sua stessa definizione.

Importava non solo di togliere quelle restrizioni nella definizione e nella dimostrazione di invariantività del genere numerico p_n, ma altresì di assegnare il significato *funzionale* di tale carattere, cioè di collegare le due vie conducenti ai caratteri invariantivi delle superficie.

Già nelle « Ricerche » io mi occupai di delimitare il caso $p_g = p_n (>0)$ (superficie *regolari*), mostrando che esso ha luogo corrispondentemente al fatto che le curve aggiunte ad ogni sistema lineare irreducibile $|C|$ seghino sulla curva generica C la serie canonica *completa*, e dando condizioni che permettano di concludere questo fatto. Intravidi fin d'allora la possibilità di definire in generale il p_n, e più precisamente la differenza $p_g - p_n$, legandola alla deficienza della serie segata sulla curva generica d'un sistema lineare $|C|$ dalle curve aggiunte C_a: ciò ho potuto ottenere oggi prescindendo dalle formule di postulazione di NOETHER (ed eliminando quindi le restrizioni inerenti alle singolarità delle superficie), e comprendendo anche il caso $p_g = 0$, grazie al teorema fondamentale.

VIII. Il pensiero che conduce alla considerazione del genere numerico p_n, mi ha fatto nascere l'idea di proseguire una analoga ricerca pel genere lineare (Curven-geschlecht) $p^{(1)}$. Si può dare un'espressione del $p^{(1)}$ la quale coincide sempre col genere (virtuale) delle curve canoniche per $p_g > 0$; ma è notevole che essa non si riduce sempre a 0 per $p_g = 0$. Si vede dunque come le idee del sig. NOETHER relative ai caratteri virtuali nella Geometria sopra le superficie, trovino col progresso della teoria un'applicazione sempre più larga e feconda.

(1) « *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se corrispondent un à un* » (Mathem. Annalen IV).

(2) Annali di Matematica, serie II, t. 5.

I.

Generalità sull'ente algebrico doppiamente infinito e sui sistemi lineari sopra di esso.

1. *Ente algebrico doppiamente infinito.*

Le proprietà delle superficie algebriche che qui vengono studiate sono quelle che competono alla così detta *Geometria sopra la superficie*, ossia che hanno carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni birazionali delle superficie stesse. Enunciando queste proprietà sotto forma proiettiva si ha l'inconveniente che per particolari superficie trasformate della data non si potrebbe attribuire ad esse il medesimo significato proiettivo: ciò essenzialmente in conseguenza del fatto che in una siffatta trasformazione ad un punto della primitiva superficie può venir sostituita una curva della nuova e viceversa. Si è quindi condotti a stabilire delle convenzioni atte a rimuovere l'inconveniente accennato.

Giova per ciò adattare anche il linguaggio all'ordine di proprietà che si indagano, e considerare insieme tutte le superficie di una intera *classe* (trasformate l'una dall'altra). Parlando di *ente algebrico doppiamente infinito* (e la dimensione si sottintenderà spesso nel discorso) intenderemo di riferirci indifferentemente ad una qualunque superficie della classe, che si dirà alla sua volta una *immagine proiettiva* dell'ente.

Col nome di *punto dell'ente algebrico* designeremo un punto semplice di una qualunque superficie della classe; vi sono però superficie particolari, immagini proiettive dell'ente su cui ad un qualche punto dell'ente corrisponde una curva (*curva eccezionale sulla superficie*). Pensando a tali immagini si potrà riguardare indifferentemente un punto dell'ente anche come una curva (*eccezionale*) dell'ente stesso. Parlando di una curva comunque riducibile dell'ente considereremo quindi in generale che in essa possano essere incluse delle componenti eccezionali, cioè dei punti: ma si riserberà alla parola « curva » il significato più restrittivo di curva *propriamente detta* (senza componenti « punti »), ove (parlando di curve composte) si pongano in opposizione nel discorso le componenti « curve » e le componenti « punti ».

Il vantaggio delle locuzioni introdotte si comprende subito: noi possiamo parlare contemporaneamente di più punti dell'ente algebrico in numero finito o infinito e pensarli come punti semplici d' una superficie benchè possa avvenire che non esista di fatto una immagine proiettiva dell'ente su cui a ciascuno di quei punti corrisponda un punto semplice: cioè sebbene non sempre esista una superficie immagine dell'ente, senza curve eccezionali.

Ma appunto per ciò si deve avere l'avvertenza di non introdurre mai quelle relazioni tra più punti d'un ente algebrico che si fondino sulla ipotesi che ad essi corrispondano tanti punti semplici d'una *stessa* superficie, immagine, se non è nota l'esistenza d'una immagine siffatta: cioè nel ragionamento che si riferisce a punti dell'ente algebrico, ciascun punto deve considerarsi isolatamente, in guisa che il ragionamento stesso possa tradursi nel linguaggio ordinario (proiettivo) prendendo per ciascun punto una opportuna immagine dell'ente.

2. *Curve e sistemi di curve sopra l'ente algebrico* ∞^2.

Allorchè si parla di una curva come *data sopra un ente algebrico* ∞^2 intendiamo di considerare di essa soltanto le proprietà invariantive, e intendiamo che sia perfettamente determinato ciò che le corrisponde sopra una qualsiasi superficie immagine dell'ente.

Occorre a tale proposito qualche osservazione a cagione degli elementi eccezionali che compariscono nelle trasformazioni d'una superficie.

Giova qui riferirci ad una superficie F immagine dell'ente (in un certo S_n) la quale non abbia alcuna singolarità [1], e riguardarla (come luogo dei suoi punti reali ed immaginarî cioè) come uno *spazio di* Riemann *a 4 dimensioni* dell'ente: tale spazio di Riemann (poichè F non ha singolarità) è *perfetto* (nel senso di Cantor), ossia ogni punto limite di punti di F è su F e viceversa ogni punto di F è limite di punti di essa.

Allora una curva C *data sull'ente* deve essere concepita su F come una *superficie di* Riemann della quale è stabilita la *connessione*, e dove in particolare sono fissati i punti di diramazione delle eventuali componenti multiple ecc. Un punto dell'ente che appartenga a C è rappresentato su F da un punto di C oppure da una curva eccezionale componente di C. Un punto dell'ente che non appartenga a C è rappresentato su F da un punto fuori di C, o da un *buco* in C, o da una curva eccezionale che non fa parte di C.

La curva C su F (concepita come una superficie di Riemann) può dunque non essere un insieme perfetto su F (e quindi in S_n) per la presenza di qualche buco in essa. Ove si voglia considerare la curva C data sull'ente non si può prescindere dalla (eventuale) presenza di buchi in essa sopra una superficie immagine.

Un punto O di F, o se si vuole il suo intorno su F, può essere riguardato come una curva (o una superficie di Riemann) su F; in questo senso si può parlare di « sommare *un punto* O (un certo numero ϱ di volte) *ad una curva* C *come componente* ». Che cosa si debba intendere con questa locuzione riesce più chiaro se (anzichè ad F) ci si riferisce ad una superficie (trasformata) F' immagine dell'ente, su cui O venga rappresentato da una curva eccezionale X; allora, se a C corrisponde C', la curva $C+O^\varrho$ (O^ϱ denota O contato ϱ volte) ha come corrispondente su F' la $C'+X^\varrho$. In particolare se la curva C di F ha un buco nel punto semplice O, la $C+O$ si ottiene da C prescindendo da tale buco.

Se O è un punto dell'ente o di F multiplo secondo i per la curva C *conveniamo* di riguardare la curva $C+O^\varrho$ come avente in O la molteplicità $i-\varrho$. Questa convenzione può essere giustificata nel seguente modo: si immagini che in O sia praticato un buco; allora è rotta in O la connessione fra gli i rami di C, connessione che sarebbe invece posta nel massimo modo stabilendo $\frac{i(i-1)}{2}$ *ponti* di connessione fra le varie coppie di rami: se si aggiunge O a C come componente, si viene ad aggiungere alla superficie di Riemann C un foglio connesso in i punti agli i rami

[1] A proposito della questione della singolarità d'una superficie si cfr. la nota nel 1° dei citati lavori di Castelnuovo.

di C per O (un punto per ciascun ramo), onde nel punto multiplo O di C+O vengono ora interrotti soltanto $\frac{i(i-1)}{2} - i = \frac{(i-1)(i-2)}{2}$ ponti di connessione, tanti cioè quanti ne vengono rotti da un buco praticato in un punto (i—1)plo di una data curva.

La curva C può avere su F delle singolarità superiori, ma poichè tutti i punti di F (in S_n) sono punti semplici, ogni loro intorno è da riguardarsi come piano: pertanto le singolarità di C su F possono ritenersi come equivalenti a più punti multipli ordinarî (in numero finito) alcuni dei quali infinitamente vicini fra loro (1).

Fintanto che si parla di *una* curva d'una superficie e si vuol riguardare come *data sull'ente*, è in nostro arbitrio di fissare la sua connessione (in particolare i buchi ecc.), sopra la superficie di partenza. Non si potrebbe quì porre una convenzione fissa in modo che fosse indifferente la scelta di una o di un' altra superficie immagine dell'ente. Ma una tale convenzione può invece farsi opportunamente ove si tratti di un *sistema continuo di curve senza parti fisse.*

Basta perciò *convenire* che *un punto base per un tale sistema sopra una qualunque superficie immagine debba considerarsi come un buco per la curva generica del sistema.*

Allora la curva generica del sistema resta *data sull'ente* partendo indifferentemente da una qualunque superficie immagine di esso.

Ma può anche considerarsi come data sull'ente ogni particolare *curva totale* C' del sistema ove si consideri come *limite* d'una curva variabile del sistema stesso, in modo che ogni punto di una tal curva variabile abbia come punto limite un punto di C', mentre viceversa ogni punto di C' possa riguardarsi come limite di un punto della curva variabile nel sistema.

Ad un sistema continuo di curve senza parti fisse sopra un ente algebrico ∞^2 può essere sommata qualche componente fissa stabilendo opportunamente la sua connessione con una curva generica del sistema: una tale componente fissa deve allora sommarsi ugualmente ad ogni curva totale del sistema connettendola secondo risulta dalla legge di continuità.

Una curva C' si dirà *curva parziale* d'un sistema continuo di curve C (o contenuta parzialmente in esso) se essa fà parte (almeno) di una C ma non è una curva totale; vi è quindi almeno una curva C'' *residua* di C' rispetto al sistema (curva che può avere come componenti dei punti dell'ente) la quale insieme a C' costituisce una curva totale C'+C'' del sistema. Data sull'ente una curva parziale C' d'un sistema continuo restano date sull'ente tutte le sue curve residue, resultando fissata la connessione di ciascuna di esse sopra una superficie immagine. Dato sull'ente un sistema continuo di cui O non sia punto base, le curve del sistema aventi O come ϱ^{plo} (supposte esistenti), e dove O è sostituito da un buco, sono le curve residue di O^ϱ rispetto al sistema. Ciò giustifica nuovamente la convenzione posta di considerare come avente la molteplicità $i-\varrho$ nel punto O la curva $C+O^\varrho$ se C ha O come $i$plo.

Dalle cose dette appare che:

(1) Cfr. per le curve piane Nöther « *Ueber die singulären Werthsysteme...* » Mathem. Annalen IX. « *Rationale Ausführung...* » Math. Annalen XXIII.

Una curva data sopra una superficie è data anche sull'ente se ne è fissata la connessione in ogni punto.

Soltanto le curve d'un sistema continuo senza parti fisse possono riguardarsi come date indifferentemente sull'ente o sopra una superficie immagine.

Data una curva sull'ente sono pure date sull'ente tutte le curve residue di essa rispetto ad un dato sistema continuo che la contenga parzialmente.

Segue che ove si voglia prescindere da una particolare superficie immagine dell'ente preventivamente scelta si deve operare su sistemi continui senza parti fisse, e sulle curve e sistemi che ne derivano mediante operazioni di staccamento di date curve ecc. Così appunto faremo nel seguito.

Si noti pure che nell'interpretazione proiettiva dei resultati ottenuti (riferendoci ad una superficie immagine) occorrono speciali riguardi ove si tratti di singole curve o sistemi con parti fisse dati sull'ente, mentre s'interpretano senz'altro i resultati relativi a sistemi senza parti fisse. Ma pure volendosi limitare allo studio di questi che hanno un interesse più spiccato interviene la considerazione di singole curve e sistemi con parti fisse provenienti da operazioni che sarebbero altrimenti impossibili; e l'avere fin da principio allargato la cerchia dei sistemi considerati gioverà a fondare un algoritmo applicabile in ogni caso, di uso spedito e fecondo.

3. *Generalità sui sistemi lineari.*

Si dice *sistema lineare* ∞^r *di curve* (algebriche) sopra una superficie (algebrica) e sul relativo ente algebrico, un sistema di curve tale che

1° per un gruppo generico di r punti della superficie passi *una* curva del sistema;

2° gli elementi (curve) del sistema possano riferirsi *proiettivamente* agli elementi generatori (punti o iperpiani S_{r-1}) di uno spazio lineare S_r: s'intende con ciò che per $r>1$ ad un S_{r-1} o ad un punto di S_r corrisponda un sistema lineare ∞^{r-1} contenuto nel primo, e per $r=1$ gli elementi (curve) del sistema ∞^1 costituiscano una serie *razionale*.

Convenzionalmente denoteremo talvolta una curva col nome di sistema lineare ∞^0, ma ove non si avverta il contrario parlando d'un *sistema lineare si sottintenderà* ∞^1 *almeno*. I sistemi lineari ∞^1 e ∞^2 si diranno rispettivamente *fasci razionali* e *reti*. Un sistema lineare venendo indicato con $|C|$, designeremo con C una curva generica di esso.

In ciò che precede non è detto che le curve generiche del sistema lineare sieno irriducibili; ove questo avvenga il sistema si dirà *irriducibile; riducibile* nel caso opposto. Per la definizione di un sistema lineare irriducibile di dimensione $r>1$ sopra una superficie, basta la prima proprietà sopra enunciata; la seconda si deduce come conseguenza [1].

Non così per $r=1$: si possono avere sistemi soddisfacenti alla 1ª condizione ma non alla 2ª (*fasci irrazionali*).

In un sistema lineare ∞^r $(r>0)$ due curve determinano un fascio razionale ecc.

Punto base d'un sistema lineare *irriducibile*, o riducibile senza parti fisse, è

[1] Cfr. la mia Nota. « *Una questione sulla linearità ecc.* » Accad. dei Lincei. Giugno 1893.

un punto comune a tutte le curve del sistema: un tal punto deve essere riguardato come un *buco* per le curve del sistema sopra ogni superficie immagine.

Un punto base *multiplo secondo* i (>0) per le curve d'un sistema lineare senza parti fisse sopra una superficie immagine, si dirà anche un *punto base* i*plo* del sistema *sull'ente* (è chiaro che è indifferente la scelta della superficie immagine di partenza, purchè su di essa il punto che si considera non venga sostituito da una curva eccezionale).

Allorchè ad un sistema lineare $|C|$ senza parti fisse si somma qualche componente fissa C', ogni punto base di $|C|$ si dirà anche un punto base di $C'+|C|$. Se, sopra una superficie immagine, si ha che un tal punto base O è $i$plo per $|C|$ ed è ϱplo per C' e se inoltre anche per C' O si considera come un buco (di guisachè O costituisce un buco per la curva generica $C'+C$ che lo ha come $(i+\varrho)$*plo*) si dirà che O è un punto base $(i+\varrho)$plo per $C'+|C|$ sull'ente.

Se ulteriormente si somma a $C'+|C|$ il punto O contato un certo numero σ di volte, si dirà che il sistema ottenuto

$$O^\sigma + C' + |C|$$

ha il punto O (dell'ente) come un *punto base* $(i+\varrho-\sigma)$plo: se $i+\varrho=\sigma$ si riguarderà anche O come un punto non base pel sistema.

Con ciò resta fissato in ogni caso che cosa debba intendersi col nome di *punto base* i*plo d'un sistema lineare sull'ente*: invero assunta una superficie immagine (dove il punto non sia sostituito da una curva eccezionale), si possono realizzare su di essa le condizioni di connessione spettanti alle curve del sistema nel punto, immaginando prima di effettuare in esso un buco e poi di sommare alle curve del sistema il punto stesso un certo numero di volte. Occorre per altro aver riguardo al caso di punti base infinitamente vicini nel senso avvertito innanzi.

Sopra una superficie (e sul relativo ente algebrico) si consideri un sistema lineare ∞^r $(r \geq 1)$. Per $r=1$ esso è un fascio (razionale). Un punto della superficie comune a due curve di un fascio è comune a tutte ossia è base pel fascio o appartiene ad una componente fissa del fascio (poichè per esso passa più di una curva del sistema).

Sia $r>1$. Se due curve generiche del sistema hanno sempre (infiniti punti comuni e quindi) una curva componente comune, questa è fissa: infatti facendo variare una sola delle due curve questa ha sempre una curva componente comune colla prima, e tale componente non può variare con continuità e perciò è fissa.

Si consideri il gruppo di punti intersezioni variabili di due curve generiche del sistema (supposto esistente). Al variare delle curve, mentre esse descrivono l'intiero sistema, non può darsi che alcuni di quei punti descrivano una curva C: si supponga l'opposto: sulla C (che per ipotesi non è una componente fissa del sistema) le curve del sistema debbono segare una serie lineare, e se in questi due gruppi generici hanno sempre comune un punto, il punto è fisso; dunque se due curve generiche del dato sistema hanno sempre comune un punto di C, questo punto è fisso, e non variabile come si era supposto.

Si supponga che nel dato sistema ∞^r $(r>1)$ su F, due curve generiche non abbiano intersezioni variabili. Per un punto generico di F passano ∞^{r-1} curve del dato sistema componente un nuovo sistema lineare; due di esse avendo comune un punto variabile, hanno comune un linea variabile (cioè diversa della eventuale componente fissa) passante per il punto, e questa è una nuova componente fissa del nominato sistema ∞^{r-1} e però nasce ugualmente da ogni punto della curva stessa: variando il punto su F si hanno ∞' curve generanti un fascio (razionale o no) ognuna delle quali si stacca da tutte le curve del dato sistema che ne contengono un punto generico: dunque le curve del sistema si compongono, oltrechè di eventuali componenti fisse, di gruppi d'un certo numero $m>1$ di curve del fascio (generatori d'una serie lineare g_m^r sopra l'ente ∞' che ha per elementi le curve del fascio).

Concludiamo:

In un sistema lineare ∞^r $(r>0)$ *di curve sopra una superficie*:

1° *due curve generiche non hanno intersezioni variabili se ciascuna componente variabile è costituita di una o più curve d'un fascio* (razionale o no).

2° *nel caso opposto due curve generiche hanno un numero finito* $n>0$ *di intersezioni variabili e questi punti descrivono tutta la superficie al variare delle curve.*

Il numero $n \geq 0$ delle intersezioni variabili di due curve del sistema si dirà il *grado effettivo* del sistema.

In un sistema lineare di grado effettivo n senza componenti fisse, due curve totali che non abbiano una componente comune (nemmeno eccezionale) hanno n intersezioni, ciascuna di queste essendo debitamente contata: è chiaro che in tale computo non deve tenersi conto di un punto appartenente ad una delle due curve che costituisca un buco per l'altra.

Il grado n d'un sistema lineare di curve costituisce un primo carattere di esso sull'ente (carattere invariantivo per trasformazioni birazionali della superficie immagine). Un 2° carattere è la *dimensione* r (infinità) del sistema. Un 3° carattere è il *genere* del sistema che definiamo per ora nell'ipotesi che il sistema stesso sia irriducibile, come il genere delle sue componenti variabili irriducibili.

Di fondamentale importanza nello studio d'un sistema lineare irriducibile è la serie g_n^{r-1} segata sulla curva generica del sistema (di grado n e dimensione r), dalle altre curve del sistema stesso: essa si dirà la *serie caratteristica* del sistema. Dalla considerazione di essa si ricava *la disuguaglianza*

$$n \geq r-1,$$

che lega il grado e la dimensione d'un qualunque sistema lineare irriducibile.

4. *Significato proiettivo della geometria dei sistemi lineari.*

Sopra un ente algebrico F si abbia un sistema lineare $|C|$ di dimensione $r(>0)$ e grado n (≥ 0): consideriamo il sistema lineare ∞^{r-1} costituito dalle curve del primo che passano per un dato punto *generico* di F (punto *base* del nuovo sistema ∞^{r-1}); possono avvenire 3 casi:

1) Il sistema ∞^{r-1} ha una nuova componente fissa non comune al dato sistema $|C|$ (in altre parole le curve C di $|C|$ che passano per un punto generico di F hanno in conseguenza infiniti punti variabili comuni); allora le componenti variabili di $|C|$ sono formate colle curve d'un fascio (razionale o no), e si ha $n=0$ (e viceversa); ciò avviene sempre (in particolare) per $r=1$.

2) Essendo $r>1$ ed $n>0$, il considerato sistema ∞^{r-1} ha il grado $n-1$ (in altre parole le curve di $|C|$ aventi comune un dato punto non hanno in conse-

guenza altri punti variabili comuni); allora il sistema $|C|$ si dirà *semplice*. Se F non è razionale si ha in tal caso $r > 2$.

3) Essendo $r > 1$ ed $n > 0$, il nominato sistema ∞^{r-1} ha il grado $n - m$ dove $m > 1$; allora le curve C di $|C|$ passanti per un punto generico di F hanno in conseguenza altri $m - 1$ punti variabili comuni; questi insieme al dato costituiscono un gruppo di m punti che presenta *una* condizione alle curve C di $|C|$ le quali debbono contenerlo e viene determinato ugualmente partendo da un altro dei suoi punti. In tal caso si hanno su F ∞^2 gruppi di m punti analoghi a quello (presentanti *una* condizione alle curve di $|C|$) ed un punto generico di F individua un gruppo, si ha quindi quella che si chiama una *involuzione* I_m *di grado* m (di gruppi di m punti): due curve generiche di $|C|$ hanno comune un certo numero s (≥ 1) di gruppi della I_m, per modo che

$$n = m s.$$

In questo caso si dice che il sistema $|C|$ *appartiene all'involuzione* I_m. Il fatto si presenta sempre per $r = 2$ ($n > 0$) se F non è razionale: si ha allora $n > 1$ e la rete $|C|$ appartiene ad una involuzione I_n.

Sopra una superficie F immagine dell'ente sia dato un sistema lineare *semplice* $|C|$ di dimensione $r (> 1)$ e grado $n (> 0)$.

Si riferiscano proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ agli iperpiani S_{r-1} di uno spazio ad r dimensioni S_r: ad un punto generico di F base per un sistema ∞^{r-1} di curve C (di $|C|$) corrispondono in S_r gli iperpiani per un punto P, ed un punto P così ottenuto nasce da un solo punto di F fuori della eventuale componente fissa di $|C|$: il luogo dei punti P è dunque una superficie F' di S_r riferita punto per punto alla data F, sulla quale le (parti variabili delle) trasformate delle curve C di $|C|$ vengono segate dagli iperpiani di S_r. Diremo, per brevità, che *la* F' *è la superficie immagine dell'ente algebrico* (F) *che ha per sezioni* (iperpiane) *le curve* C *di* $|C|$: è importante notare che le proprietà (invariantive) del sistema $|C|$ sull'ente, si traducono in proprietà proiettive della superficie F' e viceversa. L'ordine della F' è il grado n di $|C|$.

La trasformazione indicata può ancora effettuarsi se il sistema lineare $|C|$ di dimensione r (> 1) e grado n (> 0) non è semplice ma appartiene ad una involuzione I_m: soltanto allora la immagine F' dell'ente non risulta più riferita biunivocamente alla F, ma risulta invece una superficie ($m$pla) riferita in corrispondenza $[1.\, m]$ alla F; il suo ordine è $\frac{n}{m}$. Vi è un'altra trasformazione che si applica partendo da sistemi $|C|$ (di grado $n > 0$) semplici o no, e riesce sempre biunivoca per la superficie F: occorre averla presente.

Si può sempre considerare sulla F un fascio razionale di curve (segate da un fascio di piani o iperpiani) siffatto che una curva di esso passante per un punto generico non debba contenere di conseguenza nessuno degli altri punti variabili che resultano eventualmente comuni alla curve di $|C|$ per quel punto: ciò posto riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ agli iperpiani per un punto O in S_{r+1}, e le curve del nominato fascio agli iperpiani per un S_{r-1} non contenente O in S_r: un punto generico della superficie F è base per un sistema ∞^{r-1} di curve C ed appartiene ad *una* curva del fascio; gli corrisponde quindi in S_{r+1} un punto P (in corrispondenza biunivoca col piano) determinato come intersezione di una retta per O e di un iperpiano per lo S_{r-1}. Nasce così in S_{r+1} una superficie F′ riferita punto per punto alla F, sulla quale F′ le trasformate delle curve del sistema $|C|$ sono segate dagli iperpiani per O, ossia si ha una *superficie* F′ *immagine dell'ente algebrico in* S_{r+1} *avente come sezioni cogli iperpiani* S_r *di una stella le curve* C: un S_{r-1} per O sega la F′ in n punti variabili, se n è il grado di $|C|$. Si noti che ove il grado di $|C|$ fosse nullo (e la sua dimensione $r > 1$) la F′ sarebbe in generale un cono multiplo di vertice O.

In fine l'indicato procedimento (ricorrendo ad un sistema ∞^r ausiliario) permette di ottenere una superficie immagine d'un ente algebrico sulla quale le curve d'un fascio razionale vengono segate dagli S_r per un S_{r-1} in un S_{r+1}.

Più in generale dati sull'ente due o più sistemi lineari si potrà sempre assumere una superficie immagine proiettiva dell'ente in un S_r su cui le curve di questi vengano segate dagli iperpiani di forme lineari in S_r, ove queste forme abbiano due a due tanti iperpiani comuni quante sono le curve comuni ai corrispondenti sistemi (cfr. 7).

5. *Sistemi lineari riducibili.*

Ecco subito alcune applicazioni delle trasformazioni indicate nel precedente §.

TEOREMA. *In un sistema lineare riducibile sopra un ente algebrico* ∞^2;

1° o *la componente variabile della curva generica è irriducibile* (cioè il sistema è costituito da un sistema irreducibile cui si è aggiunta una componente fissa);

2° *oppure la detta parte variabile della curva generica si compone di curve d'un fascio* (cioè il grado è 0) (1).

Si escluda la 2ª ipotesi, quindi (3) il grado del sistema riducibile sia $n > 0$: dico che è assurdo che le parti variabili delle curve del sistema sieno riducibili.

Anzitutto essendo $n > 0$ la dimensione del sistema vale $r > 1$, e perciò si può considerare in esso una rete dello stesso grado individuata da tre curve generiche. Si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F in S_3 avente come sezioni piane d'una stella le curve della rete (4): essendo $n > 0$ il centro O della stella non è $n$plo per la F, ossia la F non è un cono di vertice O. Nell'ipotesi che le parti variabili delle curve C sieno riducibili, le sezioni piane della F per O debbono resultare tutte spezzate; è ciò che dimostreremo assurdo (2).

Si consideri una retta generica a per O ed il fascio delle sezioni piane di F per O. Ognuna di queste sezioni piane spezzandosi, deve essere composta di un certo numero $m > 1$ di curve irriducibili che variano necessariamente in un fascio (razionale o no): invero sopra un piano per a vi è soltanto un numero finito di punti comuni a due tali componenti irriducibili, quindi per un punto generico di F′ passa

(1) Cfr. pei sistemi lineari nel piano, BERTINI « Istituto lombardo, 1882 »; l'osservazione pel caso generale della superficie si trova in « NOETHER, Math. Annalen, VIII, pag. 524 ». La dimostrazione data qui dalla proposizione riproduce il concetto di quella delle mie « *Ricerche*, I ».

(2) Tale assurdo può anche farsi scaturire dal teorema di KRONECHER-CASTELNUOVO. Cfr. CASTELNUOVO « *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili* ». Rendic. Acc. dei Lincei, 1894.

una sola di tali componenti. Inoltre i gruppi di m curve del fascio irriducibile $|K|$ costituenti le sezioni piane di F′ per a sono i gruppi d'una serie $g_m{}^1$ sopra l'ente ∞^1 che ha per elementi le curve di $|K|$. Questa $g_m{}^1$ ha almeno uno o più gruppi dotati d'una o più coincidenze: ciò vuol dire che per la retta a passano dei piani toccanti la F′ lungo una linea. La conclusione è stata tratta per una qualunque retta a passante per O; al variare di questa si hanno dunque almeno ∞^1 piani toccanti la F secondo curve. Segue che la F è una sviluppabile, e poichè i suoi piani tangenti passano per O essa è un cono di vertice O. Ciò contraddice all'ipotesi $n>0$ come abbiamo osservato.

Il teorema è dunque stabilito.

Sussiste ancora il

Teorema. *In un sistema lineare di curve irriducibili sopra una superficie, la curva generica non può avere punti multipli variabili (fuori dei punti base) non appartenenti alla linea multipla della superficie.*

Si supponga il contrario. Nel dato sistema irriducibile si può considerare un fascio generico (razionale); per ipotesi le curve di esso posseggono dei punti multipli variabili descriventi una linea C semplice per la superficie F.

Si trasformi la F in una F′ facendo segare le curve del detto fascio dai piani per una retta a (3) in modo che la curva C′ corrispondente alla C risulti semplice per F′: ciò può sempre farsi scegliendo una rete ausiliaria (di cui le curve vengano segate dai piani di una stella col centro fuori di a) siffatta che le ∞^1 linee della rete passante per un punto della C non abbiano comuni in conseguenza altri punti di essa (e questa condizione si può realizzare in infiniti modi ad es. anche partendo da una rete già determinata da una non particolare stella di piani). Ciò posto in conseguenza dell'ipotesi fatta le sezioni piane della F′ per a debbono avere punti multipli variabili sulla curva semplice C′. Ma ciò è assurdo, come si vede facilmente: infatti un punto generico P della C′ essendo multiplo per una sezione piana di F′ per a, ha come piano tangente il piano Pa; ma fuori di questo sta la tangente alla linea C′ (non giacente nel detto piano) la quale è una tangente alla F′, dunque P è almeno doppio per la superficie F′ contro l'ipotesi.

Con ciò il teorema è stabilito.

Per ciò che è stato dimostrato innanzi esso è pure applicabile alle parti variabili delle curve d'un sistema riducibile, e può enunciarsi sotto forma invariantiva dicendo:

Sopra un ente algebrico ∞^2 le componenti variabili delle curve d'un sistema lineare non hanno punti multipli fuori dei punti base del sistema (1).

6. *Curve e sistemi lineari contenuti in altri.*

Richiamiamo le definizioni poste nel § 2 e la loro applicazione ai sistemi lineari.

Sopra un ente algebrico ∞^2 sia dato un sistema lineare $|C|$: una curva C′ che fa parte di una C ma non è una curva totale del sistema, dicesi una *curva parziale* (o contenuta parzialmente) in $|C|$: allora vi è almeno una curva *residua* C″ tale che la C′+C″ costituisce una curva totale di $|C|$.

Suppongasi che $|C|$ sia un sistema irriducibile, e $|C'|$ un altro sistema irridu-

(1) Per sistemi lineari nel piano, cfr. Bertini « Istituto lombardo, 1882 ».

cibile siffatto che la curva generica C' sia contenuta parzialmente in $|C|$. Allora $|C'|$ dicesi *contenuto parzialmente* in $|C|$.

Il sistema $|C'|$ sia contenuto parzialmente nel sistema $|C|$; esiste allora un *sistema lineare* (di dimensione ≥ 0) *residuo* di una C' generica, (costituito di tutte le curve residue di C'); questo si può denotare con

$$|C| - C' = |C''|.$$

Se $|C|$ $|C'|$ sono irriducibili il sistema $|C''|$ contiene come componenti fisse i punti base per $|C'|$ e non per $|C|$, anzi un tal punto base $i$plo ($i > 0$) per $|C'|$ compare contato i volte tra le componenti fisse di $|C''|$: effettivamente un tal punto costituisce un buco per le curve C' (cfr 3) ma non per le curve $C' + C''$.

7. *Disuguaglianza fra i gradi di due sistemi lineari di cui uno è contenuto parzialmente nell'altro.*

Dimostriamo il teorema:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 un sistema lineare irriducibile $|C|$ è contenuto parzialmente in un sistema irriducibile $|C'|$, il grado di $|C'|$ supera il grado di $|C|$.

Anzitutto si noti che per la irriducibilità di $|C|$ $|C'|$ la dimensione di $|C'|$ supera quella di $|C|$ (altrimenti i due sistemi coinciderebbero). Dopo ciò se $|C|$ è un fascio l'enunciato è stabilito senz'altro (3). Si può dunque supporre che $|C|$ sia ∞^r con $r > 1$.

Si può anche supporre che la curva C_1' residua di una C rispetto a $|C'|$ sia fissa al variare di C in $|C|$, giacchè se essa contenesse una parte variabile (certo non costituita di punti dell'ente) questa segherebbe in qualche punto una C' ed allora una curva $C + C_1'$ segherebbe una C' in un numero di punti maggiore di quello dei punti comuni ad una C e ad una C'; ma quest'ultimo numero essendo a sua volta almeno uguale al grado di $|C|$ l'enunciato resterebbe senz'altro stabilito.

Nelle dette ipotesi si consideri il sistema ∞^{r+1} determinato in $|C'|$ da una C' irriducibile e dal sistema $C_1' + |C|$ ottenuto sommando la C_1' alle curve C; sia F la superficie (semplice o multipla), immagine dell'ente, che ha per sezioni la curve del sistema. Su F alla C_1' corrisponde un punto O (in generale multiplo): le C sono le sezioni di F cogli iperpiani per O: il grado di $|C|$ è dunque il numero delle intersezioni di F (fuori di O) con un S_{r-1} generico condotto per O (ciascuna intersezione valutata secondo il suo indice di molteplicità), mentre il grado di $|C'|$ è l'ordine di F. Ora proiettando la F da O si ottiene sempre una superficie d'ordine minore: dunque il grado di $|C|$ è minore del grado di $|C'|$ c ͻͻ.

8. *Curve fondamentali d'un sistema lineare.*

Poniamo in questo cap. tra le generalità sui sistemi lineari un cenno sulle curve fondamentali sebbene tali nozioni debbano essere invocate soltanto più tardi (IV).

Sia $|C|$ un sistema lineare irreducibile di dimensione $r > 1$ sopra un ente algebrico, e sia π il *genere* di $|C|$.

Diremo *curve fondamentali* per $|C|$ le curve che presentano *una* condizione alle C che debbono contenerle: in una curva K fondamentale per $|C|$ *riterremo sempre incluse* le eventuali componenti fisse del sistema ∞^{r-1} residuo di K rispetto a $|C|$, sicchè tale sistema residuo sarà irreducibile o le curve si comporranno di quelle di un fascio. Come curve fondamentali di $|C|$ bisogna considerare anche i *punti* dell'ente algebrico *non base* per $|C|$ (punti semplici sopra una opportuna immagine dell'ente): siffatti punti che diventino base per il sistema residuo d'una curva fondamentale K rispetto a $|C|$, saranno pure da includersi in K.

Una curva K fondamentale per $|C|$ si dirà *propria* o *impropria* secondochè il sistema residuo di essa rispetto a $|C|$ (di genere π) ha il genere (effettivo) $< \pi$ o il genere π; perchè ciò abbia un significato si deve supporre (per ora) l'irreducibilità di tale sistema residuo.

Se si assume come immagine dell'ente algebrico una superficie F (semplice o multipla) avente per sezioni le curve C, una curva fondamentale per $|C|$ viene rappresentata da un punto di F in generale multiplo. Questo punto all'infuori del caso che F sia un cono col vertice in esso corrisponde *ad una curva* fondamentale di $|C|$ il cui sistema residuo è irreducibile: allora esso si dice un *punto multiplo isolato* o *proprio* se corrisponde ad una curva fondamentale propria per $|C|$ (per esso potrà passare più volte la curva multipla); si dice un punto multiplo *improprio* nel caso opposto: è dunque *proprio* un punto multiplo O di F quando le sezioni iperpiane per O hanno un genere inferiore a quello delle sezioni iperpiane generiche: i punti generici di una curva multipla di F sono improprî, ed in generale si può dire che la molteplicità di un punto improprio (nel caso in cui F sia in S_3) risulta soltanto dal passaggio per esso della curva multipla (ma ciò esigerebbe considerazioni minute pel caso di singolarità superiori).

Se come immagine dell'ente algebrico si assume invece una superficie di un S_{r+1} avente come sezioni iperpiane per un punto O le C, le curve fondamentali di $|C|$ vengono rappresentate da rette semplici o multiple per O, o da gruppi di punti (semplici o multipli) sopra rette per O, o da gruppi siffatti unitamente alle rette cui appartengono (supposte sopra la superficie).

Tra i sistemi lineari sopra un ente algebrico sono i più facili a studiarsi *i sistemi lineari irreducibili semplici che non posseggono altre curve fondamentali che punti dell'ente algebrico* (e nemmeno gruppi di punti). *Esistono sempre sull'ente sistemi siffatti:* è questa una conseguenza immediata della ammessa possibilità di trasformare una data superficie algebrica in una senza singolarità (cioè senza nessun punto multiplo) in un iperspazio [1].

Ai sistemi che godono della proprietà nominata daremo il nome di *sistemi non singolari.*

Dato sopra un ente algebrico un qualunque sistema lineare (irreducibile ∞^2 almeno) $|C|$, si può sempre considerare sull'ente stesso un sistema non singolare $|K|$ contenente $|C|$; basta infatti assumere come immagine dell'ente una superficie F senza singolarità di un certo S_r e considerare il sistema $|K|$ segato su questa dalle varietà di S_r d'ordine abbastanza elevato. Assumendo in $|K|$ un sistema generico ∞^3 contenente una rete generica di curve C, si può costruire una superficie φ di S_3 (trasformata di F ottenuta facendo segare dai piani le curve K del sistema ∞^3) la quale non abbia punti multipli isolati all'infuori di un punto P centro di una stella di piani seganti su φ curve C: allora tutte le curve fondamentali di $|C|$ non composte di punti,

[1] Cfr. la nota a pag. 10.

vengono rappresentate da rette (semplici o multiple per φ) passanti per P [1]: se si può costruire una superficie φ cosiffatta in modo che *le rette che essa contiene per* P *sieno distinte* si dirà che $|C|$ ha *curve fondamentali distinte.*

Quando $|C|$ sia semplice la definizione si trasporta alla superficie Φ immagine dell'ente algebrico (in un S_r) avente per sezioni (iperpiane) le C, dicendo che la Φ ha *punti multipli isolati distinti,* ossia che *nessuno dei suoi punti multipli isolati ha degli altri punti multipli isolati infinitamente vicini.*

Questo concetto può esser posto direttamente come segue. Sia O un punto multiplo isolato della superficie Φ di S_r: si consideri il sistema di tutte le varietà di un certo ordine $n > 1$ passanti per O, e si trasformi la F in una φ su cui vengano segate dagli iperpiani di un certo S_t le ∞^t curve che così sono determinate su F: ad O (cioè al suo intorno su F) corrisponde una certa curva L (semplice o multipla) su F; se su questa L vi sono punti multipli isolati di φ, a questi corrispondono *punti multipli isolati di* F *infinitamente vicini ad* O: la mancanza di punti multipli isolati infinitamente vicini per ciascuno dei punti multipli isolati di F, equivale alla condizione che F abbia solo punti multipli isolati distinti nel senso definito innanzi. L'identità tra i due concetti è di natura intuitiva: tuttavia non sembra difficile il darne una dimostrazione rigorosa, sebbene si tratti di argomento un po' delicato.

II.

Sistemi lineari normali ed operazioni elementari sopra di essi.

9. *Sistemi lineari normali.*

Una curva, una superficie, in generale una varietà a più dimensioni si dice *normale* in un dato spazio S_r a cui *appartiene* (senza esser contenuta in un S_{r-1}) quando non può riguardarsi come proiezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato. Questo concetto di natura proiettiva si traduce in un concetto di natura invariantiva per i sistemi lineari irreducibili sopra un ente algebrico (4) (e più generalmente, in modo analogo, per i sistemi lineari irreducibili di varietà M_{h-1} a $h-1$ dimensioni sopra una varietà M_h a h dimensioni).

Sopra una superficie e sul relativo ente algebrico:

Un sistema lineare irriducibile avente un certo grado $n > 0$ si dirà normale *(o completo rispetto al grado) quando esso non è contenuto in un sistema lineare irriducibile più ampio avente lo stesso grado.*

Un fascio irriducibile ($n = 0$) *è sempre* da considerarsi come *normale.*

Qui è indifferente intendere la parola « contenere » nel senso più largo di contenere parzialmente o nel senso più ristretto, a cagione del teorema (7).

Come nello studio proiettivo delle superficie è utile di considerare una superficie

[1] Il dubbio che ad una tal curva fondamentale corrisponda invece un punto multiplo di φ infinitamente vicino a P si elimina, perchè allora una componente irreducibile di quella curva (che non è composta di punti dell'ente), non avendo intersezioni variabili colle curve K sarebbe fondamentale per $|K|$ (che non ha curve fondamentali all'infuori dei punti non base dell'ente).

come proiezione di una superficie normale, così nello studio invariantivo dei sistemi lineari di curve sopra una superficie è utile di sostituire la considerazione di un dato sistema lineare avente un grado, con quella di un sistema normale che lo contiene.

E si noti che la disuguaglianza

$$n \geqq r - 1$$

legante il grado n (supposto > 0) e la dimensione r d'un sistema lineare (3) mostra già che ampliando successivamente (ove sia possibile) un sistema lineare (irriducibile) conservandone il grado (> 0), si deve giungere ad un sistema normale, e ciò almeno quando la dimensione dell'ultimo sistema ottenuto raggiunga il valore $n + 1$ (nel qual caso le curve del sistema son razionali ed è razionale l'ente algebrico). Ma la questione fondamentale che importa risolvere affinchè la considerazione dei sistemi normali sia veramente utile, è la seguente:

Il sistema lineare normale nel quale è contenuto un sistema lineare di dato grado è *unico?*

Dal punto di vista proiettivo (per i sistemi semplici) la questione si enuncia così:

La superficie normale di cui una data superficie è proiezione dello stesso ordine, è proiettivamente determinata (cioè determinata a meno di trasformazioni proiettive)?

La risposta affermativa che si dà all'analoga questione per le curve, lascia prevedere che la risposta sarà affermativa anche in questo caso: la dimostrazione di ciò è stata data dal sig, SEGRE per le rigate ed è nota da lungo tempo per altre superficie particolari: in generale il teorema è stabilito nelle mie « Ricerche » (I, 2) col metodo che viene quì sostanzialmente riprodotto: deve però avvertirsi il fatto che il sig. SEGRE nella sua « *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* » (¹) (*n° 54*) nota come la dimostrazione da lui data per le curve (differente da questa) sia estendibile a tutti i casi di varietà a più dimensioni. Altrettanto potrebbe dirsi di questa.

Qui si vedrà nel modo più semplice come effettivamente la questione enunciata (nel caso più generale dell'enunciato sotto forma invariantiva) comporti *sempre* una risposta affermativa.

A tal fine occorre premettere il lemma:

Sopra un ente algebrico ∞^2 *due sistemi lineari irriducibili* ∞^r, ∞^s, *dello stesso grado* n (> 0), *aventi comune un sistema lineare* ∞^σ *pure di grado* n, ($r > \sigma, s > \sigma, \sigma > 1$) *sono contenuti in un sistema lineare irriducibile* $\infty^{r+s-\sigma}$ *pure di grado* n.

In un $S_{r+s-\sigma}$ si fissino un $S_{r-\sigma-1}$ ed un $S_{s-\sigma-1}$ indipendenti (appartenenti quindi ad un $S_{r+s-2\sigma-1}$ e non ad un spazio più basso), e si riferiscano proiettivamente gli elementi (curve) dei due sistemi risp. agli iperpiani per $S_{s-\sigma-1}$, $S_{r-\sigma-1}$, colla condizione che a ciascun elemento (curva) del sistema ∞^σ comune ai due dati, corrisponda sempre lo stesso iperpiano per $S_{r+s-2\sigma-1}$, tanto che quell'elemento si consideri appartenente all'uno come all'altro dei due sistemi ∞^r, ∞^s che lo contengono. Allora nasce una superficie F di $S_{r+s-\sigma}$ immagine dell'ente algebrico, sulla quale le curve dei nominati sistemi ∞^r, ∞^s vengono segate risp. dagli iperpiani per $S_{s-\sigma-1}$, $S_{r-\sigma-1}$: la F sarà una superficie semplice o multipla secondochè i due detti sistemi non

(¹) Annali di Matematica 1894.

appartengono od appartengono ad una stessa involuzione I_m; ci riferiremo alla 1ª ipotesi, poichè senza difficoltà si ripeterebbe il ragionamento nella seconda ipotesi sostituendo $\frac{n}{m}$ ad n.

La F avrà un certo ordine $n' \geq n$; essa vien segata in n punti variabili dagli $S_{r+s-\sigma-2}$ per $S_{r-\sigma-1}$, o per $S_{s-\sigma-1}$ o per $S_{r+s-2\sigma-1}$: si vuol provare che deve essere $n' = n$, ossia che il sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ segato su F da tutti gli iperpiani, e contenente i due dati, ha il grado n, ciò che serve a stabilire il teorema.

Si supponga $n' = n + \delta$ dove $\delta > 0$.

Allora sopra $S_{r-\sigma-1}$ (e parimente sopra $S_{s-\sigma-1}$) vi sono almeno δ punti (distinti o coincidenti) di F, anzi precisamente δ punti, o infiniti punti. In ogni caso dunque il sistema segato su F dagli iperpiani per $S_{r+s-2\sigma-1}$ è contenuto parzialmente in quello segato dagli iperpiani per $S_{r-\sigma-1}$ e però deve avere il grado minore del grado n di questo (7) contro l'ipotesi.

Premesso il lemma precedente, sopra un dato ente algebrico si supponga che un sistema lineare irriducibile ∞^r $(r > 1)$ sia contenuto in due altri sistemi normali dello stesso grado ciascuno dei quali (stante la irriducibilità) di dimensione $> r$: questi due sistemi o sono tali che l'uno contiene l'altro, o sono contenuti in un medesimo sistema dello stesso grado: ma ambedue le cose sono in contraddizione coll'ipotesi che i nominati sistemi sieno normali; dunque un sistema lineare non può esser contenuto in due diversi sistemi normali (irriducibili) dello stesso grado.

Ora abbiamo già notato che partendo da un sistema lineare irriducibile ed ampliandolo successivamente conservandone il grado, si perviene necessariamente ad un sistema normale la cui dimensione non può superare il grado (di esso e) del dato sistema aumentato di una unità; si può dunque concludere il teorema:

Sopra un ente algebrico ∞^2 *un sistema lineare irriducibile o è normale, o è contenuto in un determinato sistema lineare irriducibile normale dello stesso grado.*

Viene qui incluso il caso di fasci che abbiam detto doversi sempre considerare come sistemi normali. Sotto altra forma (equivalente alla prima ove s' includano le superficie multiple colle risp. curve di diramazione), si ha:

Una superficie di dato ordine o è normale, o è proiezione di una superficie normale dello stesso ordine (appartenente ad uno spazio più elevato) *proiettivamente determinata.*

10. *Sistema normale somma di due dati.*

Sopra una superficie e sul relativo ente algebrico si considerino due sistemi lineari irriducibili normali $|C_1|$ $|C_2|$: escludiamo dapprima che essi abbiano comuni delle curve totali. Sieno $r_1\, r_2$ (≥ 1) le loro risp. dimensioni. Si assuma come immagine dell'ente una superficie (semplice) F di $S_{r_1+r_2+1}$ sulla quale le C_1 vengano segate dagli iperpiani per un S_{r_2} e le C_2 dagli iperpiani per un S_{r_1} senza punti comuni (è noto che ciò può farsi adoprando ancora un fascio ausiliario — 4). Allora le quadriche di $S_{r_1+r_2+1}$ passanti per lo S_{r_1} e per lo S_{r_2} segano su F un sistema lineare irriducibile contenente totalmente tutte le curve composte $C_1 + C_2$.

La conclusione sussiste ancora se $|C_1| |C_2|$ hanno delle curve totali comuni ed anche se coincidono, purchè in questo caso non sieno due fasci: solo occorre quì prendere lo S_{r_1} e lo S_{r_2} in $S_{r_1+r_2+1}$ in modo che essi abbiano comune un $S_{\delta-1}$ il quale debba esser doppio per le nominate quadriche.

Dunque anche in queste ipotesi più generali si ottiene un sistema lineare irriducibile contenente totalmente tutte le curve C_1+C_2. Se n_1, n_2 sono i risp. gradi di $|C_1|$ $|C_2|$ ed i è il numero delle intersezioni variabili di una C_1 con una C_2, il grado di tale sistema vale

$$n=n_1+n_2+2\,i$$

(essendo dato dal numero dei punti variabili comuni a due curve C_1+C_2).

Il detto sistema è contenuto in un sistema normale $|C|$ dello stesso grado n, che dico essere indipendente dall'arbitrarietà che compare nella costruzione eseguita. Occorre per ciò far vedere che non possono esistere due sistemi normali (irriducibili) $|C|$ $|C'|$ (di grado n) contenenti totalmente tutte le curve C_1+C_2. Ciò segue infatti dall'osservare che $|C|$ $|C'|$ avendo comuni infinite curve totali avrebbero comune il minimo sistema lineare (irriducibile di grado n) da esse determinato (7). Si può dunque affermare che:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 *sono dati due sistemi lineari irriducibili normali* $|C_1|$ $|C_2|$, *che non sieno due fasci coincidenti, esiste sempre un determinato sistema irriducibile normale* $|C|$ *contenente totalmente tutte le curve composte* C_1+C_2.

Si dirà che $|C|$ è il sistema normale *somma* $|C_1+C_2|$.

Si osservi come *lo stesso resultato si estende* subito al caso che $|C_1|$ $|C_2|$ sieno riducibili senza parti fisse purchè non composti colle curve dello stesso fascio (la dimostrazione va ugualmente).

Se poi $|C_1|$ $|C_2|$ senza parti fisse sono composti colle curve d'uno stesso fascio, si ha ancora un sistema $|C_1+C_2|$ contenente tutte le curve C_1+C_2 ma non più irriducibile: s'intenderà in tal caso che $|C_1+C_2|$ sia il sistema più ampio contenente totalmente le C_1+C_2, composto di tutti i gruppi d'una serie completa sopra l'ente algebrico ∞^1 che ha per elementi le curve del fascio.

Come abbiamo notato il grado di $|C|=|C_1+C_2|$ vale:

$$n=n_1+n_2+2\,i,$$

essendo n_1, n_2 i risp. gradi di $|C_1|$ $|C_2|$ (≥ 0) ed i il numero delle intersezioni variabili di una C_1 e d'una C_2.

Un punto dell'ente base ϱ_1 plo per $|C_1|$ e base ϱ_2 plo per $|C_2|$ è base $(\varrho_1+\varrho_2)$ plo per $|C|$. Se $|C|$ è un sistema senza parti fisse, il sistema $|C+C|=|2\,C|$ si dirà il *doppio* di $|C|$ ecc.

Notevole è la relazione in cui si trovano i due sistemi $|C_1|$ $|C_2|$ entro il sistema $|C|=|C_1+C_2|$. Ciascuno di essi è (tutto) il residuo di una curva generica dell'altro rispetto a $|C|$, di guisachè sono contenuti totalmente in $|C|$ tutti i sistemi riducibili

$$C_1+|C_2| \text{ e } C_2+|C_1|$$

composti di una curva fissa dell'uno e di una variabile dell'altro.

Questa relazione si esprime dicendo che $|C_1|$ $|C_2|$ sono *due sistemi residui l'uno dell'altro rispetto a* $|C|$.

11. *Estensione del concetto di sistema normale ai sistemi riducibili.*

Estendiamo il concetto di sistema lineare normale sopra un ente algebrico.

Un *sistema lineare comunque riducibile* (di dimensione ≥ 0) si dirà *normale* se *non è contenuto totalmente in un altro* (diverso e quindi) *più ampio.*

Applicata ai sistemi irriducibili (∞^1 almeno) questa definizione equivale a quella del § 9 (per il § 7).

Si tratta ora di dimostrare il teorema (estensione di quello dato pei sistemi irreducibili nel § 9):

Sopra un ente algebrico ∞^2 *una curva comunque riducibile è sempre contenuta totalmente in un determinato sistema lineare normale* (riducibile o nò, di dimensione ≥ 0).

Anzitutto l'enunciato è soddisfatto se la curva in questione non è contenuta totalmente in alcun sistema ∞^1 o soltanto in un fascio.

Basta dunque dimostrare il lemma « se due sistemi lineari contengono totalmente una curva comunque riducibile, essi sono contenuti totalmente in un medesimo »: dopo ciò si osserverà che un sistema dato non potrà essere contenuto totalmente in uno di dimensione arbitrariamente grande, perchè la dimensione di un tale sistema spogliato delle parti fisse ha un limite in funzione del suo grado, ed il sistema dato contiene un numero finito di parti fisse (cfr. 9).

Per stabilire il lemma nelle ipotesi più generali riferiamoci ad una curva C e supponiamo che essa sia contenuta totalmente in due sistemi

$$C''' + C' + |C_1| \qquad C''' + C'' + |C_2|$$

dove $|C_1|$ $|C_2|$ non contengono parti fisse e C' C'' non hanno componenti comuni. Osserviamo subito che C', C'', C''', sono componenti di C sicchè si avrà in generale

$$C = C' + C'' + C''' + X$$

(dove qualcuna di queste componenti può anche mancare). Allora

$$\begin{array}{lll} |C_1| & \text{contiene totalmente} & C'' + X \\ |C_2| & \text{»} \qquad\quad \text{»} & C' + X. \end{array}$$

Sappiamo (10) che esiste un sistema

$$|C_1 + C_2|$$

che contiene totalmente tutte le curve composte $C_1 + C_2$: questo contiene dunque totalmente i sistemi

$$X + C'' + |C_2| \qquad \text{e} \qquad X + C' + |C_1|;$$

quindi il residuo di X rispetto ad esso, che può denotarsi con

$$|C_1 + C_2| - X$$

contiene totalmente

$$C' + |C_1| \qquad \text{e} \qquad C'' + |C_2|.$$

Segue che il sistema

$$|C| = C''' + |C_1 + C_2| - X$$

contiene totalmente

$$C''' + C' + |C_1| \quad \text{e} \quad C''' + C'' + |C_2|$$

ciò che dimostra il teorema.

12. *Estensione del concetto di sistema somma.*

Dopo il teorema del precedente § possiamo estendere a tutti i sistemi lineari normali comunque riducibili (di dimensione $\geqq 0$) sopra un ente algebrico il significato del concetto di somma posto nel § 10. pei sistemi irriducibili.

Si designino con $|C_1|\,|C_2|$ *due sistemi lineari normali (di dimensione* $\geqq 0$*) comunque riducibili sopra un ente algebrico; esiste un sistema lineare normale*

$$|C_1 + C_2|$$
$$(\textit{di dimensione} \geqq 0),$$

contenente totalmente tutte le curve composte $C_1 + C_2$.

Per provarne l'esistenza basta mostrare che esiste un sistema lineare contenente totalmente le $C_1 + C_2$, esso sarà contenuto in un sistema normale e questo sarà unico pel § precedente.

Ora un sistema contenente le $C_1 + C_2$ si ottiene sommando i sistemi composti delle parti variabili di $|C_1|\,|C_2|$ e aggiungendo le parti fisse.

Si noti che se $|C_1| = C_1$ ha la dimensione 0, sono in generale diversi i sistemi

$$|C_1 + C_2| \quad \text{e} \quad C_1 + |C_2|;$$

il primo potrà essere irriducibile mentre il secondo ha come parte fissa C_1.

In particolare se C_1 è una curva eccezionale ossia un punto 0 dell'ente, base iplo per $|C_2|$

$$(C_1 = 0) \quad , \quad \text{il sistema}$$
$$|C_2 + 0|$$

è il più ampio sistema contenente totalmente $|C_2| + 0$ (avente 0 come (i — 1 iplo).

13. *Teorema del resto.*

Sopra un ente algebrico ∞^2 *sieno dati due sistemi lineari comunque riducibili* $|C_2|$ e $|C_1|$ *il secondo dei quali potrà anche aver la dimensione* 0 (ossia essere una curva C_1).

Stabiliamo allora gli enunciati che seguono:

1) *Se* $|C_2|$ *contiene una curva* C_1 *il sistema residuo di essa*

$$|C| = |C_2| - C_1,$$

è normale.

Infatti se $|C|$ non fosse normale ma contenuto totalmente in un sistema più ampio $|C'|$, i due sistemi

$$C_1 + |C'| \quad \text{e} \quad |C_2|$$

conterrebbero totalmente

$$C_1 + |C|$$

e però sarebbero contenuti totalmente in un medesimo sistema contro l'ipotesi che $|C_2|$ sia normale.

2) *Supposto* $|C_1|$ (∞^1 *almeno*), *e* $|C_2|$ (∞^2 *almeno*) *contenente* $|C_1|$, *il sistema*

$$|C| = |C_2| - C_1$$

(*di dimensione* ≥ 0) *residuo di una* C_1 *non varia al mutare di* C_1 *in* $|C_1|$, *e quindi è tale che*

$$|C_1 + C| = |C_2|:$$

tale sistema $|C|$ potrà designarsi con

$$|C_2 - C_1|.$$

Sia

$$|C| = |C_2| - C_1'$$

il residuo di una particolare C_1' di $|C_1|$; si deve mostrare che $|C_2|$ contiene totalmente tutte le curve $C + C_1$ ossia tutti i sistemi

$$C + |C_1|.$$

Per questo si consideri che il sistema normale

$$|C_1 + C_2| - C_1'$$

contiene totalmente $|C_2|$ e però (entrambi i sistemi essendo normali)

$$|C_1 + C_2| - C_1' = |C_2|;$$

d'altra parte in $|C_2|$ sono contenute totalmente tutte le curve composte

$$C + C_1' \ ,$$

e però in $|C_1 + C_2|$ sono contenute totalmente tutte le curve

$$C_1 + C + C_1',$$

ossia tutti i sistemi

$$C_1' + C + |C_1|;$$

ma

$$|C_1 + C_2| - C_1' = |C_2|,$$

dunque in $|C_2|$ è contenuto totalmente ogni sistema

$$C + |C_1| \ c \supset \supset.$$

Il resultato ottenuto si può enunciare diffusamente in parole dicendo:

Sopra un ente algebrico si abbia un sistema lineare normale (∞^2 *almeno*) $|C_2|$, *ed in esso sia contenuto un sistema lineare normale* $|C_1|$: *se una curva* C_1 *ha come residuo rispetto a* $|C_2|$ *un sistema* $|C|$, $|C_1|$ *è a sua volta il sistema residuo* *di una qualsiasi curva* C *rispetto a* $|C_2|$; *i due sistemi* $|C|$ $|C_1|$ *sono quindi residui l'uno dell'altro rispetto a* $|C_2|$.

Questo enunciato costituisce la prima parte del così detto *teorema del resto*: la seconda parte di natura proiettiva sarà stabilita più tardi. (cfr. il § 35).

Corollario proiettivo. Il primo enunciato dà luogo al corollario proiettivo.

Proiettando una superficie normale in uno spazio inferiore da una sua curva o da suoi punti, si ottiene una superficie normale.

14. *Modo di dedurre ogni sistema lineare da un sistema irriducibile.*

Sopra un ente algebrico si abbia un sistema lineare normale $|C_1|$. Si assuma come immagine dell'ente una superficie F in un S_r. Ogni curva C_1 (compresi i punti che essa può avere come componente) può venire segata (parzialmente) su F da una varietà V_n d'ordine n assai elevato.

Dunque il sistema $|C_1|$ è contenuto in quello irriducibile $|C|$ segato su F da tutte le V_n. Se inoltre n è stato scelto assai alto, il sistema residuo $|C - C_1|$ è irriducibile a meno di punti (i punti base di $|C_1|$), che possono comparire come componenti fisse di esso: designando con $|C_2|$ questo sistema irriducibile costituito dalle curve variabili di $|C - C_1|$, e designati inoltre con $0_1 \ldots 0_s$ i punti base di $|C_1|$ sull'ente, di risp. molteplicità $\varrho_1 \ldots \varrho_s$ (≥ 1), si avrà:

$$|C_1| = |C - C_2 - 0_1{}^{\varrho_1} - \cdots - 0_s{}^{\varrho_s}|:$$

ciò si può esprimere dicendo che $|C_1|$ *può esser dedotto da un sistema irriducibile semplice* $|C|$ *staccando la curva generica d' un sistema irriducibile* $|C_2|$ *e imponendo dei punti base* $0_1{}^{\varrho_1} \ldots$ *al sistema residuo.*

Si noti che se si è assunta F senza singolarità $|C|$ *è un sistema non singolare.*

Si avverta ancora che per n assai elevato si può imporre al sistema $|C|$ segato su F dalle V_n di possedere i punti base $0_1{}^{\varrho_1} \ldots$ deducendo così da $|C|$ un sistema irriducibile che (reso normale) sarà il sistema somma $|C_1 + C_2|$.

Dunque *dato sull'ente algebrico un qualunque sistema lineare normale* $|C_1|$ *si può sempre considerare* (in infiniti modi) *un sistema irriducibile* $|C_2|$ *tale che il sistema normale somma* $|C_1 + C_2|$ *sia irriducibile.*

Queste osservazioni saranno utili nel seguito.

15. *Grado virtuale d'un sistema lineare.*

Sopra un ente algebrico ∞^2 si abbia un sistema irriducibile $|C_1|$: se $|C_2|$ è un altro sistema irriducibile e $|C_1|$ $|C_2|$ non sono fasci coincidenti, è anche irriducibile $|C| = |C_1 + C_2|$. Allora detti n_1, n_2, N, i risp. gradi di $|C_1|$ $|C_2|$ $|C|$, e designato con i il numero delle intersezioni variabili di una C_1 e una C_2 generiche si ha (10)

$$N = n_1 + n_2 + 2\,i\,,$$

sicchè si può dire che n_1 è definito dall'equazione

$$N = x + n_2 + 2i.$$

Suppongasi ora che $|C_1|$ sia comunque riducibile (di dimensione ≥ 0) e si costruisca sull'ente un sistema irriducibile $|C_2|$ tale che

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

sia irriducibile (14): designati ancora con n_2 N i risp. gradi di $|C_2|$ $|C|$ e con i il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2, si potrà definire un numero $x = n_1$ mediante l'equazione

$$N = x + n_2 + 2i$$

e chiamare questo numero il *grado virtuale* di $|C_1|$. Occorre però di stabilire che tale numero n_1 è indipendente dall'arbitrarietà che compare nella scelta di $|C_2|$, ossia è proprio inerente a $|C_1|$.

Si prenda dunque sull'ente un altro qualsiasi sistema irriducibile $|C_2'|$ tale che $|C'| = |C_1 + C_2'|$ sia irriducibile, e designati con n_2' N′ i risp. gradi di $|C_2'|$ $|C'|$, con i' il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2', mostriamo che le due equazioni

$$N = x + n_2 + 2i$$

$$N' = x + n_2' + 2i'$$

definiscono lo stesso numero $x = n_1$, cioè che si ha

$$N - n_2 - 2i = N' - n_2' - 2i'.$$

A tal fine consideriamo il sistema irriducibile

$$|K| = |C_1 + C_2 + C_2'| = |C + C_2'| = |C_2 + C'|$$

e valutiamone il grado riguardandolo una volta come somma di $|C|$ $|C_2'|$, un'altra volta come somma di $|C_2|$ $|C'|$. Detto j il numero delle intersezioni di una C_2 con una C_2', avremo che una C e una C_2' si segano in $i' + j$ punti, mentre una C_2 ed una C' si segano in $i + j$ punti; in conseguenza il grado di $|K|$ vale

$$N + n_2' + 2(i' + j) = N' + n_2 + 2(i + j);$$

da questa uguaglianza si trae appunto

$$N - n_2 - 2i = N' - n_2' - 2i' \quad c \mathrm{D}\mathrm{D}.$$

Dopo ciò se $|C_1|$ $|C_2|$ sono due sistemi comunque riducibili sull'ente algebrico, ed n_1 n_2 sono i loro gradi virtuali, i il numero delle intersezioni (fuori dei buchi) di una C_1 con una C_2, il grado virtuale n_{12} di $|C_1 + C_2|$ vale

$$n_{12} = n_1 + n_2 + 2i.$$

Per provarlo introduciamo un sistema ausiliario irriducibile $|C|$ siffatto che i sistemi

$$|C'| = |C_1 + C|, |C''| = |C_2 + C|, |C'''| = |C_1 + C_2 + C|$$

sieno tutti e tre irriducibili, il che può sempre esser fatto scegliendo dapprima $|C|$ in guisa che riesca irriducibile $|C'''|$ e considerando (ove occorra) in luogo di $|C|$ il sistema $|m\, C''' - C_1 - C_2|$ dove m è assai elevato.

Ciò posto designamo risp. con

$$n' \quad n'' \quad n''' \quad n$$

i gradi (effettivi = virtuali) dei sistemi $|C'|, |C''|, |C'''|, |C|$, e con i_1 i_2 risp. le intersezioni di una C con una C_1 e con una C_2. Valutando il grado di $|C'''|$ avremo

$$n''' = n_{12} + n + 2\,i_1 + 2\,i_2 \quad (\text{perchè } |C'''| = |(C_1 + C_2) + C|)$$

$$n''' = n_1 + n'' + 2\,i + 2\,i_1 \quad (\text{perchè } |C'''| = |C_1 + C''|)$$

$$n''' = n_2 + n' + 2\,i + 2\,i_2 \quad (\text{perchè } |C'''| = |C_2 + C'|);$$

siccome poi

$$n' = n_1 + n + 2\,i_1, \quad n'' = n_2 + n + 2\,i_2,$$

si deduce

$$n_{12} = n_1 + n_2 + 2\,i \quad c \, \mathfrak{d} \mathfrak{d}.$$

Possiamo dunque concludere che: *Per ogni sistema lineare comunque riducibile (di dimensione* ≥ 0) *dato sopra un ente algebrico* ∞^2, *resta definito un numero intero detto il suo grado virtuale, mediante le condizioni seguenti:*

1) *il grado virtuale coincide col grado effettivo per ogni sistema irriducibile;*

2) *se* $|C_1|$ $|C_2|$ *sono due qualunque sistemi lineari sull'ente, di gradi virtuali risp.* n_1 n_2, *e se* i *è il numero delle intersezioni di una* C_1 *e una* C_2 *il grado virtuale di* $|C_1 + C_2|$ *vale*

$$n_1 + n_2 + 2\,i$$

Corollario. Un punto O dell'ente algebrico contato i volte può riguardarsi come un sistema lineare (di dimensione 0) $|O^i|$: il suo grado virtuale può quindi essere valutato considerando due sistemi lineari irriducibili $|C|$ $|C - O^i|$ il primo dei quali non abbia O come punto base; si trova allora che il detto grado vale $i\,(i - 2)$ (perchè i gradi di $|C|$ $|C - O^i|$ differiscono di i^2): in conseguenza l'imposizione d'un nuovo punto base $i$plo alle curve d'un sistema lineare sull'ente, diminuirà sempre di i^2 il grado virtuale del sistema, indipendentemente dalla irriducibilità di esso e del residuo. Segue anche che il grado virtuale d'un sistema lineare $|C|$ sopra un ente algebrico può essere valutato nel seguente modo: si prenda un sistema irriducibile $|C'|$ che contenga $|C|$ e tale che $|C' - C|$ sia irriducibile all'infuori di punti componenti fissi $O_1^{i_1}$ $O_2^{i_2} \ldots$ (base per $|C|$ e non per $|C'|$); designati con n' n'' i risp. gradi (effettivi) di $|C'|$ e $|C''| = |C' - C - O_1^{i_1} - \cdots|$ e con i il numero delle intersezioni una C' con una C'', il grado virtuale di $|C|$ vale

$$n = n' - n'' - 2\,i - i_1^2 - i_2^2 - \ldots$$

Osservazione. Un sistema lineare normale (comunque riducibile) non è contenuto in altro dello stesso grado virtuale: tale proprietà è caratteristica pei sistemi normali, e pei sistemi irriducibili fu posta in principio come definizione.

16. *Genere (virtuale) delle curve riducibili in un sistema lineare.*

Un sistema lineare $|C|$ sopra un ente algebrico si dirà *connesso* se ogni sua curva generica C è connessa; vale a dire (considerata la C come una superficie di Riemann) si può stabilire un cammino continuo fra due punti qualunque di essa: allora è connessa ogni particolare curva totale del sistema, perchè limite d'una C connessa.

Se sulla C generica vi sono $2p$ famiglie di tagli chiusi irreducibili che la riducono semplicemente connessa, se quindi è p il *genere* della C, sopra ogni curva totale C′ di $|C|$ si hanno $2p$ tagli chiusi irreducibili che la riducono semplicemente connessa limiti di quelli considerati su C, e quindi C′ concepita come curva totale di $|C|$ ha il genere p: può bensì avvenire che la C′ abbia qualche punto multiplo O che non sia tale per le C (o abbia per C′ una molteplicità maggiore), ma O è in tal caso da riguardarsi come un ponte di connessione della C′ e precisamente se O è $i$plo per C′ e non base per $|C|$ si devono considerare in O $\frac{i(i-1)}{2}$ ponti di connessione (semplici) colleganti le coppie di rami di C′; diciamo che vi è un ponte di connessione tra due rami di C′ in un punto quando in esso si riguardano attaccate le due falde della corrispondente superficie di Riemann; sopprimere un ponte siffatto deve riguardarsi come l'eseguire due tagli chiusi sulla (superficie di Riemann) C′, uno su ciascun ramo; in O dunque vengono assorbiti $i(i-1)$ tagli chiusi irreducibili limiti di corrispondenti tagli chiusi su C, che si perderebbero rompendo la connessione di C′ in esso: per questo il punto O si dirà un *ponte di connessione d'ordine* $i(i-1)$ per la C′. Quanto ai rami di C′ che passano per O non è detto che essi debbano appartenere ad una stessa componente irriducibile di C′.

Consideriamo dunque per generalità (sull'ente algebrico) una particolare curva composta

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_h$$

entro un sistema lineare irriducibile $|C|$, e supponiamo che essa sia connessa ed abbia ϱ punti multipli di connessione di ordini risp. $i_1\ i_2 \ldots i_\varrho$, *il genere di* C *vale*

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s + i_1 + i_2 + \ldots i_\varrho - s + 1.$$

Infatti sulla C si possono eseguire successivamente

$2\pi_1$ tagli chiusi irriducibili su C_1
$2\pi_2$ " " " su C_2
— — — — —
$2\pi_s$ " " " su C_s;

dopo ciò si possono ancora tagliare opportunamente $i_1 + i_2 + \cdots + i_s - s + 1$ ponti di connessione fra le varie parti di C (ciò che equivale a compiere

$$2 \{ i_1 + i_2 + \cdots + i_s - s + 1 \}$$

tagli chiusi) lasciandone $s - 1$ sufficienti a stabilire la connessione fra le s componenti: allora la C dopo questi 2π tagli è semplicemente connessa.

La precedente formula è quella di Nöther [1] salvo che in essa non si tien conto di tutti i punti comuni alle varie parte di C come ponti di connessione.

Secondo la detta formula si valuterà il genere di ogni curva d'un sistema lineare connesso (se riducibile); questo è il genere di ogni curva totale del sistema e si dirà *genere virtuale del sistema. Per i sistemi irriducibili il genere virtuale coincide col genere effettivo* (3).

[1] *Ueber die reductiblen algebraischen Curven.* Acta mathem. 8.

La formula precedente si può anche applicare alle curve ed ai sistemi non connessi: invero data una curva composta di h parti non connesse, essa si riduce connessa con $h-1$ ponti di connessione che sono da riguardarsi come $-2(h-1)$ tagli chiusi.

La formula stessa si applica alla valutazione del genere di una curva totale riducibile in un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere π: se una C si spezza in due parti $C_1\,C_2$ di generi π_1, π_2 con i punti comuni fuori dei punti base (ciascun punto essendo contato debitamente), questi i punti e questi soli sono ponti di connessione per la C_1+C_2 curva totale di $|C|$ (§ 3) e però si ha

$$\pi=\pi_1+\pi_2+i-1.$$

In particolare:

Se (sopra un ente algebrico) si hanno due sistemi lineari irriducibili $|C_1|$ $|C_2|$ *di generi risp.* $\pi_1\ \pi_2$, *ed una* C_1 *ha con una* C_2 i *punti comuni variabili il genere di* $|C_1+C_2|$ *vale*

$$\pi=\pi_1+\pi_2+i-1.$$

Il genere virtuale π_1 d'un sistema lineare $|C_1|$ sopra un ente algebrico ha un altro significato notevole.

Si assuma sull'ente un sistema irriducibile $|C|$ (p. e. non singolare) da cui $|C_1|$ sia dedotto staccando una curva C_2 (curva di $|C-C_1|$ spogliata di parti fisse, che preso $|C|$ opportunamente può anche supporsi irriducibile) e imponendo dei nuovi punti base $0_1^{\rho_1}\ 0_2^{\rho_2}\dots 0_r^{\rho_r}$ (1).

Sia π il genere di $|C|$, π_2 il genere di C_2, ed i il numero dei punti non base per $|C|$ comuni ad una C_1, C_2.

Si ha

$$|C|=|C_2+C_1+0_1^{\rho_1}+\cdots+0_r^{\rho_r}|$$

e quindi

$$\pi=\pi_1+\pi_2+\sum_1^r\frac{\varrho_s(\varrho_s-1)}{2}+i-1:$$

questa formula definisce il genere virtuale π_1 del sistema lineare $|C_1|$ e dà per questo un valore indipendente dalla particolare scelta del sistema irreducibile $|C|$ che contiene $|C_1|$.

III.

Curve subaggiunte.

17. *Superficie subaggiunte ad una data di* S_3.

Agli sviluppi ulteriori della nostra teoria, innanzi di studiare un modo di operare sui sistemi lineari diverso da quello di somma e di sottrazione considerato, dobbiamo premettere alcuni lemmi di natura proiettiva.

(1) Si avverte che ove un punto base 0_s di $|C_1|$ figura un certo numero di volte tra le componenti fisse di $|C_1|$ ciò influisce sulla molteplicità del punto per $|C_1|$ secondo il § 2.

Data una superficie F_n, d'ordine n in S_3, diremo *superficie subaggiunta* ad essa, ed indicheremo con ψ_r una superficie d'ordine r la quale seghi un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana di F_n.

Esistono certo delle ψ_r per $r \geq n-1$, poichè tali sono le superficie polari dei punti dello spazio rispetto ad F_n, unite a superficie d'ordine $r-(n-1)$.

Le superficie di un dato ordine subaggiunte ad F_n (se esistono) *formano un sistema lineare* (di dimensione ≥ 0). Infatti la superficie generica di un fascio determinato da due ψ_r soddisfa alle stesse condizioni imposte alla ψ_r e quindi è una ψ_r.

Dopo ciò stabiliamo il

Lemma. Se F_n *è una superficie d'ordine* n *in* S_3 *ed* A *una retta generica che l'incontra in* n *punti semplici, una superficie* φ *la quale seghi un piano generico per* A *secondo una curva aggiunta alla sezione di* F_n *è subaggiunta ad* F_n (1).

« Si supponga dapprima che φ abbia l'ordine $n-3+\varrho \geq n-1$; allora esistono certo (come abbiamo notato) delle superficie ψ dello stesso ordine $n-3+\varrho$ soddisfacenti alle condizioni che vogliamo mostrare verificate per φ. Ciò posto s'indichino con ψ tutte le superficie d'ordine $n-3+\varrho$ subaggiunte ad F_n, cioè seganti i piani α secondo curve d'ordine $n-3+\varrho$ aggiunte alla sezione di F_n, e con φ tutte le superficie analoghe alla data che godono di questa proprietà rispetto ai piani del fascio di asse a (tra le quali superficie stanno le ψ).

Le curve γ intersezioni di F_n con una φ od una ψ *fuori della curva multipla* (2), hanno lo stesso ordine perchè incontrate nello stesso numero di punti dai piani per a (tale numero è $2\pi-2+\varrho n$ se π è il genere delle sezioni di F_n con un piano α, genere uguale per ipotesi a quello di una sezione con un piano per a); ora tutte le φ (come le ψ) formano un sistema lineare (e lo si prova analogamente), quindi le sezioni delle superficie φ col piano α sono curve d'ordine $n-3+\varrho$ appartenenti ad un sistema lineare; questo sistema contiene in sè quello delle sezioni delle ψ (aggiunte alla sezione K di F_n) e le sue curve incontrano la K nello stesso numero $2\pi-2+\varrho n$ di punti; tali curve sezioni di F_n colle φ, sono dunque aggiunte alla K c ».

Resta a stabilire la cosa quando l'ordine delle φ sia $< n-1$ e quindi cada dubbio sull'esistenza delle ψ; per ciò basterà aggiungere a φ un numero sufficiente di piani arbitrarî affinchè diventi d'ordine $\geq n-1$ e ripetere il ragionamento per la superficie composta.

18. *Curve subaggiunte sopra una superficie di* S_3.

Data una superficie F_n d'ordine n in S_3, una curva K di F_n, si dirà una *curva subaggiunta di rango* r sulla superficie se ne sega la sezione piana generica C_n (di genere π) in un gruppo della serie $g_{\pi-2+rn}$ determinata su C_n dalle curve ad essa aggiunte d'ordine $n-3+r$: l'intero r può avere qui un valore qualunque $\gtreqless 0$:

(1) La dimostrazione di questo lemma è stata composta sopra un cenno comunicatomi dal sig. Castelnuovo.

(2) Con questa locuzione intendiamo che debba computarsi come facente parte di una tal curva γ in un piano generico, non solo ogni punto comune ad F_n e a φ (o a ψ) semplice per F_n, ma anche (debitamente) ogni punto multiplo per F_n che eventualmente avesse per φ (o per ψ) una molteplicità maggiore di quella che ivi compete ad una curva aggiunta.

parlando di curve K subaggiunte sulla superficie, ove non si aggiunga altro, si sottintenderà di rango $r = 0$.

Si osservi che: *L'intersezione di* F_n *con una superficie subaggiunta* ψ_{n-3+r}, *fuori della curva multipla, è una curva subaggiunta di rango* r *su* F_n.

Ciò è una conseguenza immediata della definizione.

Viceversa si ha:

Una curva K *subaggiunta di rango* r *sopra una superficie* F_n *non rigata, a sezioni di genere* > 0, *d'ordine* n *in* S_3, *è la sezione di questa, fuori della curva multipla, con una superficie subaggiunta* ψ_{n-3+r} *d'ordine* $n-3+r$.

Anzitutto si supponga $r < 3$. Si prenda una retta generica a ed in un piano generico per essa si fissi quella curva C_{n-3+r} d'ordine $n-3+r$ che è aggiunta alla sezione piana di F_n, e passa pel gruppo comune a questa e a K: variando il piano la C_{n-3+r} descrive una superficie ψ che (pel § precedente) è subaggiunta ad F_n: essa ha l'ordine $\geq n-3+r$: dico che tale ordine non supera $n-3+r$. Invero nell'ipotesi opposta la retta a appartiene un certo numero di volte alla ψ, quindi gli n punti (semplici) comuni ad a F_n appartengono alla intersezione di ψ con F_n (fuori della curva multipla) e poichè essi non stanno su K (essendo a retta generica) la nominata intersezione contiene oltre K qualche altra parte che deve comporsi di linee piane per a, ciascuna d'ordine $< n$; segue che vi sono per a (retta generica) delle sezioni piane spezzate di F_n e quindi (pel teorema di Kronecker-Castelnuovo) (1) la F_n è rigata o è la superficie di Steiner del 4° ordine a sezioni razionali: ciò contrasta all'ipotesi dell'enunciato. Il teorema resta dunque stabilito per $r < 3$.

Suppongasi $r = 3$.

Si può fissare *una* C_n aggiunta alla sezione piana di F_n in un piano generico per a e passante pel gruppo comune al piano e a K, colla condizione che essa debba passare per un punto fisso di a fuori di F_n. Allora variando il piano per a la C_n genera una ψ che si prova (analogamente al caso $r < 3$) avere l'ordine n e non maggiore.

Supposto $r > 3$ fissiamo su a $r-2$ punti generici $B_1 B_2 \ldots B_{r-2}$ fuori di F_n; fissiamo inoltre $r-3$ piani $\beta_2 \beta_3 \ldots \beta_{r-2}$ passanti risp. per $B_2 B_3 \ldots B_{r-2}$ e non per a: esiste in ogni piano α contenente a *una* tra le $\infty^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}$ curve C_{n-3+r} aggiunte alla sezione di F_n e passanti per il gruppo comune a K ed alla sezione piana C di F_n, che soddisfa alla condizione di contenere $B_1 B_2 \ldots B_{r-2}$, di toccare il piano β_2 in B_2, di avere un contatto 3 punto con β_3 in $B_3, \ldots$, un contatto $(r-2)$ punto con β_{r-2} in B_{r-2}; questa C_{n-3+r} così definita non può essere spezzata nemmeno su piani particolari per a) nella sezione C di F_n (la quale sotto le ipotesi poste è irriducibile in ogni piano per a, come già si è avvertito) ed in una residua curva d'ordine $r-3$ passante per $B_1 B_2 \ldots B_{r-2}$, toccante β_2 in B_2, avente un contatto 3 punto con β_3 in B_3 ecc., perchè una siffatta curva non esiste. Ora variando α per a la C_{n-3+r} così definita genera una superficie φ d'ordine $\geq n-3+r$ subaggiunta a F_n (cfr. il precedente lemma); che questa φ abbia proprio l'ordine $n-3+r$ e non maggiore segue analogamente al caso trattato in cui $r < 3$.

(1) Cfr. Castelnuovo, Rendic. Lincei. Gennaio 1894.

Così è provato che la K è in ogni caso sezione di F_n (fuori della curva multipla) con una superficie subaggiunta d'ordine $n-3+r$ e quindi è stabilito il teorema.

19. *Curve subaggiunte ad un sistema lineare.*

Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile di genere π e grado n, sopra un ente algebrico ∞^2.

Col nome di *serie* $g_{2\pi-2+rn}$ denotiamo (ove esista) la serie completa di gruppi di $2\pi-2+rn$ punti che si ottiene su una C generica nel seguente modo:

1) se $\pi>0$ ed $r\geq 0$, sommando [1] la serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ di C con quella $r$pla della serie *caratteristica* (g_n) segata su C dalle altre curve del sistema $|C|$ (se $|C|$ è un fascio si ha $n=0$, e la detta serie si riduce, come per $r=0$, alla $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$);

2) se $\pi>0$ ed $r-\varrho<0$, staccando dalla $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ la serie ϱpla di g_n (supposta speciale);

3) se $\pi=0$ $(r>0)$ prendendo la serie g^{rn-2}_{rn-2} di tutti i gruppi di $rn-2$ punti della C.

Una curva dell'ente algebrico si dirà una *curva subaggiunta di rango* r a $|C|$ (e si indicherà con K_r), se sega ogni curva C generica secondo un gruppo di $g_{2\pi-2+rn}$.

Sommando ad una K_r delle curve fondamentali di $|C|$ si ha ancora una curva subaggiunta di rango r a $|C|$: in particolare se $|C|$ è un fascio ad una $K_r=K_0$ si possono sommare quante si vogliono curve del fascio. Ma se la dimensione di $|C|$ è >1 l'indeterminazione che compare nella definizione delle curve subaggiunte dipende soltanto da *parti fisse* (fondamentali per $|C|$) che secondo riuscirà più opportuno potremo immaginare sommate o tolte ad esse.

Se K_s è *una curva subaggiunta di rango* s a $|C|$, *le curve* K_s+rC $(r>0)$ *costituiscono curve* K_{r+s} *subaggiunte di rango* $r+s$ *a* $|C|$.

La teoria delle curve subaggiunte ad un sistema lineare compare qui essenzialmente come preparazione alla teoria delle *curve aggiunte* che saranno definite più tardi: in questo studio fatto a tale scopo si può porre delle limitazioni che saranno tolte del tutto nella teoria delle curve aggiunte; precisamente imponiamo ai sistemi lineari $|C|$ rispetto a cui si considerano le curve subaggiunte, la restrizione di essere *irriducibili, semplici, di genere* $\pi>0$, e *di non possedere un fascio di curve unisecanti* sull'ente algebrico; *tale restrizione figura implicitamente in tutto questo capitolo* (cioè fino al § 26).

Allora una superficie F_n di S_3, immagine dell'ente algebrico, avente come sezioni piane ∞^3 curve generiche C, è non rigata a sezioni di genere $\pi>0$.

Si supponga $|C|$ normale; la possibilità di considerare una superficie F_n immagine dell'ente algebrico partendo da un qualunque sistema ∞^3 contenuto in $|C|$ ci permette (stante il § 20) di affermare che: una curva la quale seghi le curve d'un fascio generico in $|C|$ secondo gruppi della serie $g_{2\pi-2+rn}$ (definita innanzi), ed inoltre non passi per i punti base del fascio che non sono base per $|C|$, è una curva sub-

[1] Ricordiamo dagli elementi della geometria sopra una curva che date su una curva C due serie complete $g_m\, g_n$ esiste *una serie completa* g_{m+n} *somma* di $g_m\, g_n$ la quale contiene tutti i gruppi composti d'un gruppo di g_m e di un gruppo di g_n: allora la g_m (e analogamente si dica per la g_m) si deduce da g_{m+n} staccando un (qualsiasi) gruppo di g_n.

aggiunta di rango r rispetto ad ogni sistema lineare ∞^3 contenuto in $|C|$, e quindi rispetto a $|C|$.

Tantochè non solo le curve K_r subaggiunte a $|C|$ vengono rappresentate da curve subaggiunte dello stesso rango su F_n, ma anche viceversa. E perciò le K_r (che su F_n vengono segate dalle ψ_r formanti un sistema lineare), formano su F_n un sistema lineare (supposte infinite): questo si dirà il *sistema subaggiunto di rango* r a $|C|$..

Per precisare come esso debba esser dato sull'ente possiamo convenire di porre la massima connessione in ogni punto di una K_r su F_n, tranne che nei punti (base) comuni alle parti variabili delle K_r (supposte in numero infinito). Il detto sistema $|K_r|$ (se ∞^1 almeno) risulta allora privo di parti fisse fondamentali per $|C|$: esso è certo normale: invero si indichi con $|K'_r|$ il sistema normale in cui esso è contenuto totalmente (cfr. § 11), ogni curva totale di $|K'_r|$ sega una C generica secondo un gruppo della serie (completa) $g_{2\pi-2+rn}$ e però è una K_r subaggiunta di rango r a $|C|$; giacchè se una curva generica di $|K_r'|$ segasse una C in più di $2\pi-2+rn$ punti, $|K_r'|$ non conterrebbe piu *totalmente* il detto sistema $|K_r|$ subaggiunto a $|C|$.

Possiamo riassumere le cose dette enunciando il teorema:

Sopra l'ente algebrico ∞^2 *una curva* K_r *è subaggiunta di rango* r *al sistema normale* $|C|$ (1) *se:*

1) *sega le* C *d'un fascio generico secondo gruppi della serie* $g_{2\pi-2+rn}$ (definita in principio);

2) *non passa per quei punti base del detto fascio che non sono base per* $|C|$.

Esistono sempre infinite curve subaggiunte di rango r *a* $|C|$ *per* r *assai alto.*

Esse spogliate delle componenti fisse (comuni a tutte) *fondamentali per* $|C|$ *costituiscono il sistema lineare normale* $|K_r|$ *subaggiunto di rango* r *a* $|C|$.

È superfluo avvertire che di $|K_r|$ non possiam dire a priori se sia irriducibile o semplice ecc.

Sotto forma proiettiva si può enunciare il resultato ottenuto dicendo: *Sopra una superficie* F_n, *d'ordine* n, *non rigata a sezioni di genere* >0 *in* S_3, *una curva* K *che seghi i piani d'un fascio generico secondo gruppi appartenenti a curve d'ordine* $n-3+r$ *aggiunte alle sezioni di* F_n, *e che non contenga i punti comuni all'asse del fascio e ad* F_n, *è una curva subaggiunta di rango* r.

20. *Staccamento di una curva dal sistema subaggiunto.*

Sopra un ente algebrico ∞^2 si abbia un sistema lineare normale $|C|$ soddisfacente alle restrizioni del § 19, ed essendo $|C''|$ un qualunque sistema irriducibile (∞^1 almeno), si supponga che il sistema residuo

$$|C'| = |C - C''|$$

sia irriducibile.

Si designi con $|K|$ il sistema subaggiunto (di rango 0) a $|C|$, (supposto esistente) e si supponga che esso contenga $|C''|$ di guisachè esista un sistema residuo $|K - C''|$.

Dico che le curve di $|K - C''|$ costituiscono curve subaggiunte a $|C'|$.

Si indichi con i il numero delle intersezioni variabili di una C' con una C'' (fuori dei punti base dei due sistemi) e si consideri in $|C|$ una curva spezzata generica

(1) Che soddisfa alle restrizioni poste innanzi.

$C' + C''$ (curva totale di $|C|$), che ha i punti doppi fuori dei punti base di $|C|$, e oltre questi non ha singolarità che non competano a tutte le C.

Si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F di S_3 avente ∞^3 sezioni piane C tra cui la $C' + C''$: sia n l'ordine di F; n' ed n'' gli ordini risp. di C', C'' su di essa ($n = n' + n''$). Una superficie ψ_{n-3} (subaggiunta ad F d'ordine $n - 3$) sega il piano di $C' + C''$ secondo una curva d'ordine $n - 3$ che passa $\varrho - 1$ volte per ogni punto ϱplo della curva spezzata, tranne che per gli i punti (semplici per F) immagini delle i intersezioni di C', C'' sull'ente: dunque il sistema lineare segato sul piano di $C' + C''$ dalle ψ_{n-3} è contenuto totalmente nel sistema normale somma di C'' col sistema delle curve d'ordine $n' - 3$ aggiunte a C'; segue che la serie segata sulla C' (che è una curva generica di $|C'|$) dalle K è contenuta totalmente nella serie completa somma della serie canonica di C' e del gruppo di i punti segati da C'', e però i gruppi segati su C' dalle curve di $|K - C''|$ sono gruppi canonici, vale a dire queste curve sono subaggiunte a $|C'|$ c ↄↄ.

Una immediata estensione del resultato ottenuto può aversi considerando le curve K_r subaggiunte di un qualunque rango $r (\geq 0)$ a $|C|$; si ottiene allora che le curve di

$$|K_r - (r + 1) C''|$$

(supposte esistenti) costituiscono curve K'_r subaggiunte di rango r a $|C'|$.

Riferiamoci per semplicità al caso $r = 1$, e torniamo alla considerazione della precedente F; si considerino quindi in luogo delle ψ_{n-3} le ψ_{n-2} subaggiunte ad essa.

Il sistema di curve segato da queste ψ_{n-2} sul piano di $C' + C''$ è contenuto totalmente nel sistema normale somma delle rette e del sistema delle curve d'ordine $n - 3$ aggiunte a $C' + C''$; per conseguenza le ψ_{n-2} segano su C' un gruppo appartenente alla serie somma di quella canonica, del gruppo segato da C'', e della serie segata dalle rette; quest'ultima serie (segata da curve C) è contenuta totalmente nella serie completa somma del gruppo sezione di C'' e della serie caratteristica di $|C'|$: segue che la serie segata su C' dalle ψ_{n-2} è contenuta totalmente nella serie completa somma della serie canonica di C', della serie caratteristica (determinata dalle altre C') e del gruppo delle intersezioni di C' C'' contato due volte: si deduce ecc.

(Nel ragionamento si suppone implicitamente che le C' abbiano il genere $\pi' > 0$, ma il resultato sussiste in ogni caso; bastano per $\pi' = 0$ lievi modificazioni al discorso precedente).

21. *Addizione di una curva al sistema subaggiunto.*

Vi è per noi un interesse nell'osservare che si può prendere r tanto grande che il sistema $|K_r|$ subaggiunto di rango r a

$$|C| = |C' + C''|$$

contenga $|(r + 1) C''|$ ed abbia anzi come residuo di esso un sistema

$$|K_r - (r + 1) C''|$$

di dimensione alta quanto si vuole.

Invero si prenda anzitutto s così alto che $|K_s|$ esista e sia ∞^1 almeno: il sistema

$$|K_s + (r - s) C|$$

$(r \geq s)$ è contenuto in $|K_r|$ (§ 19); ora il sistema

$$|(r-s)\,C| = |(r-s)\,C' + (r-s)\,C''|,$$

contiene $(r+1)\,C''$ se si prende r così grande (restando fermo s) che $|(r-s)\,C'|$ contenga $|(s+1)\,C''|$, ciò è certo possibile essendo $|C'|$ un sistema semplice (perchè sopra una superficie ad es. di S_3, ogni sistema assegnato di curve è contenuto in quello segato da tutte le superficie d'ordine assai elevato).

Per il valore dato di r, o per un valore superiore, $|K_r|$ contiene $|(r+1)\,C''|$, e

$$|K_r - (r+1)\,C''|$$

ha la dimensione ≥ 1, e crescente con r.

Supponiamo di aver dato ad r un valore così alto che

$$|K_r - (r+1)\,C''|$$

esista e sia ∞^1 almeno: indichiamo con χ (complessivamente) le eventuali componenti fisse fondamentali per $|C'|$ che compariscono nel sistema, allora il sistema

$$|k_r'| = (K_r - (r+1)\,C'' - \chi)$$

non ha componenti fisse fondamentali per $|C'|$: ma stante il § 20. le curve di $|K_r-(r+1)C''|$ sono subaggiunte di rango r a $|C'|$, quindi $|k_r'|$ è contenuto nel sistema subaggiunto $|K_r'|$ di $|C'|$, il quale (per definizione) non ha componenti fisse fondamentali per $|C'|$: si dovrà dunque avere (se $|k_r'|$ $|K_r'|$ non coincidono)

$$|K_r'| = |k_r' + \theta|$$

(stante la normalità dei due sistemi), e fin d'ora possiamo osservare che la θ dovrà comporsi di curve fondamentali per $|C'|$, giacchè tanto una k_r' come una K_r' segano una C' secondo gruppi d'una stessa serie, aventi lo stesso numero di parti. Consideriamo una curva composta

$$K_r' + \chi + (r+1)\,C'';$$

essa incontra una C in un numero di punti che è *maggiore* od *uguale* al numero delle intersezioni di C con una curva di

$$|K_r| = |k_r' + \chi + (r+1)\,C''|:$$

nella seconda ipotesi il gruppo segato su una C da $K_r' + \chi + (r+1)\,C''$ è un gruppo della serie segata dalle subaggiunte di rango r a $|C|$ ossia $K_r' + \chi + (r+1)\,C'$ è una subaggiunta di rango r a $|C|$. Nella prima ipotesi invece $K_r' + \chi + (r+1)\,C''$ non è una subaggiunta di rango r a $|C|$; allora $|k_r'|$ è contenuto parzialmente in $|K_r'|$ e si ha

$$|K_r'| = |k_r' + \theta|;$$

dove come si è detto la θ si compone di curve fondamentali per $|C'|$.

Ora possiamo aggiungere che la θ non si compone tutta di curve fondamentali per $|C|$, perchè una K_r' e quindi una $k_r' + \theta$ ha con una C un numero di intersezioni maggiore che una k_r'. Si conclude che se non è

$$|k_r'| = |K_r'|,$$

esistono delle curve fondamentali per $|C'|$ che non sono tali per $|C|$.

Tantochè se $|C|$ e $|C'|$ hanno le stesse curve fondamentali (e quindi anche χ si compone di curve fondamentali per $|C|$), ogni curva K_r' sommata ad una $(r+1)\,C''$ costituisce una K_r.

Ma questo resultato è stabilito soltanto ove si sappia a priori l'esistenza di $|K_r|$ e di $|K_r - (r+1)\,C''|$, quindi per r assai alto.

Peraltro possiamo renderlo indipendente da tale ipotesi.

Suppongasi di sapere soltanto che esiste una curva K_s' subaggiunta di rango s a $|C'|$, e che le curve fondamentali di $|C'|$ sono tali anche per $|C|$: dico che K_s' sommata ad una $(s+1)\,C''$ costituisce una K_s.

Invero si osservi che una $K_s' + r\,C'$ costituisce una K'_{r+s}; quindi una

$$K_s' + r\,C' + (r+s+1)\,C''$$

costituisce una

$$K'_{r+s} + (r+s+1)\,C'':$$

d'altra parte si ha per r assai alto che la $K'_{r+s} + (r+s+1)\,C''$ costituisce una K_{r+s} (subaggiunta di rango $r+s$ a $|C|$,) e perciò la

$$K_s' + r\,C' + (r+s+1)\,C'' = K_s' + r\,C + (s+1)\,C''$$

costituisce una K_{r+s}, e la

$$K_s' + (s+1)\,C''$$

costituisce una curva del sistema

$$|K_{r+s} - r\,C|:$$

quest'ultimo sistema è costituito di curve K_s, quindi la $K_s' + (s+1)\,C''$ è una K_s c. d. d.

Possiamo dunque affermare che:

Se $$|C| = |C' + C''|$$

e se le curve fondamentali di $|C'|$ *sono fondamentali anche per* $|C|$, *le curve* K_s' *subaggiunte di rango* s *a* $|C'|$, *prese insieme ad* $s+1$ *curve* $|C''|$ *costituiscono curve*

$$K_s' + (s+1)\,C'' = K_s$$

subaggiunte di rango s *a* $|C|$.

Come corollario si ha che *le curve subaggiunte di rango* $r\,(>0)$ *a* $|C|$ *sono subaggiunte di rango* 0 *ad* $|(r+1)\,C|$: invero tali curve K_r sommate ad una curva di $|r\,(r+1)\,C|$ formano subaggiunte di rango r ad $|(r+1)\,C|$ $(= |C + r\,C|)$; quindi tali curve del sistema $|K_r + r\,(r+1)\,C|$ segano la curva generica $|(r+1)\,C|$ secondo gruppi della serie completa somma di quella canonica e della serie $r$pla della caratteristica; in conseguenza staccando r volte la curva di $|(r+1)\,C|$ da tale sistema $|K_r + r\,(r+1)\,C|$ si ottengono curve (K_r) subaggiunte di rango 0 ad $|(r+1)\,C|$.

Viceversa le curve subaggiunte di rango 0 *ad* $|(r+1)\,C|$ *sono subaggiunte di rango* r *a* $|C|$.

Ciò mostra come nella teoria delle curve subaggiunte possiamo limitarci senza restrizione a quelle di rango 0: nel seguito ci riferiremo appunto a queste (omettendo per brevità la designazione « di rango 0 »).

22. *Imposizione di molteplicità alle curve subaggiunte d'un sistema lineare.*

Sieno $|C|$, $|C'|$ due sistemi lineari sopra un ente algebrico ∞^2 soddisfacenti alle restrizioni del § 19., e suppongasi che $|C'|$ abbia sull'ente dei punti base

$$O_1^{\rho_1}\ O_2^{\rho_2}\ \ldots\ O_s^{\rho_s}$$

non base per $|C|$ e venga dedotto da $|C|$ imponendo appunto i nominati punti base, sicchè

$$|C| = |C' + O_1^{\rho_1} + O_2^{\rho_2} + \cdots + O_s^{\rho_s}|.$$

Dico che le (particolari) curve subaggiunte a $|C|$ che hanno in O_i $(i = 1, \ldots s)$ la molteplicità $\rho_i - 1$ (fatto in ciascun punto O_i un buco) costituiscono (se esistono) curve subaggiunte a $|C'|$.

Invero si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F_n di S_3 di un certo ordine n avente per sezioni curve generiche C tra le quali una C'; questa C' è la sezione di F con un piano α tangente ad F ρ_i volte in ciascun punto O_i (che supponiamo semplice per F), e non tangente ad essa in altri punti: le superficie ψ_{n-3} (subaggiunte ad F_n) che toccano $\rho_i - 1$ volte il piano α_i in ciascun punto O_i segano su α curve aggiunte alla C' e però segano C' in gruppi canonici. Segue l'enunciato.

La dimostrazione non viene infirmata dalla possibilità che alcuni punti O_i sieno infinitamente vicini fra loro o cadano in punti multipli di F_n; è appena il caso di modificare lievemente le parole nella seconda ipotesi.

Deve essere notato che se un punto O_i semplice per F_n ha (in conseguenza delle condizioni poste) una molteplicità $> \rho_i - 1$ per la sezione di una ψ_{n-3} toccante α $\rho_1 - 1$ volte in O_1 ecc., l'intorno del punto O_i su F va debitamente aggiunto alla sezione di Ψ_{n-3} per comporre una subaggiunta a $|C'|$, altrimenti ψ_{n-3} segherebbe C' in un numero di punti minore di quello che spetta ad un gruppo canonico. Tantochè, considerate sull'ente, le curve subaggiunte a $|C|$ dedotte imponendo in O_i la molteplicità $\rho_i - 1$ hanno il punto O_i come $(\rho_i - 1)$plo e non come punto di una maggiore molteplicità. La cosa si estende al caso che O non sia semplice per F_n.

Suppongasi ora che, essendo $|C''|$ irriducibile ∞^1 almeno, si abbia

$$|C| = |C' + C'' + O_1^{\rho_1} + \cdots + O_s^{\rho_s}|.$$

Allora $|C' + C''|$ si deduce da $|C|$ imponendo i punti base $O_i^{\rho_i}$; per conseguenza le curve k' che hanno nei punti O_i le molteplicità $\rho_i - 1$ ed insieme ad una C'' compongono subaggiunte a $|C|$ sono subaggiunte a $|C'|$: vale a dire che *staccando dal sistema subaggiunto a* $|C|$ *una* C'' (supposto possibile) *e imponendo le molteplicità* $\rho_i - 1$ *nei punti* O_i *alle curve residue, si ottengono curve subaggiunte a* $|C'|$.

Si abbia ora sull'ente un sistema $|C|$ soddisfacente alle restrizioni del § 19, e supponiamo che essendo O un punto base iplo per $|C|$, sia ancora irriducibile il sistema $|C - O^r|$ che si ottiene imponendo in O la molteplicità $i + r$ alle curve C. Se $|K|$ è il sistema subaggiunto a $|K|$ dico che le curve di $|K - O^r|$ (supposte esistenti) sono subaggiunte a $|C'| = |C - O^r|$.

Invero si assuma una immagine F dell'ente su cui un fascio generico di curve C contenente una C' venga segato dai piani per una retta a, e ciò disponendo d'un sistema ∞^3 sull'ente, contenente il fascio, il quale non abbia O come punto base.

Al punto O corrisponde allora un punto di a (che possiamo designare collo stesso nome), il quale è iplo per le sezioni piane di F fuori di a: una di queste sezioni (quella corrispondente alla C′) ha in O la molteplicità $i-r$.

Sulla F le curve K possono (colla costruzione del § 19, pg. 33) farsi segare da superficie φ seganti ogni piano per a secondo una curva d'ordine $n-3$ aggiunta alla sezione (d'ordine n) di F, e quindi comportantisi come subaggiunte di F tranne rispetto alla a di cui non possiamo fissare la molteplicità per φ. Le sezioni di queste φ coi piani per a hanno fuori di a la molteplicità $i-1$ in O. Quelle φ la cui sezione col piano della C′ ha in O un punto $(i+r)$plo segano su C′ gruppi canonici. Segue l'enunciato.

L'enunciato si estende subito al caso in cui $|C|$ abbia più punti base $O_1^{i_1}\ldots O_r^{i_r}$ nei quali vengano imposte rispettivamente le molteplicità (maggiori) $i_1+s_1,\ldots i_r+s_r$, quando $|C'|=|C-O_1^{s_1}-O_2^{s_2}\ldots-O_r^{s_r})$ sia irriducibile, purchè i punti $O_1\ldots O_r$ possano pensarsi come punti di una medesima superficie immagine dell'ente, cioè esistano sistemi per cui essi non sieno punti base.

Si noti infine che col ragionamento del § 21 si può invertire l'enunciato se $|C'|$ soddisfa pure alle restrizioni del § 19 e se le sue curve fondamentali sono tutte fondamentali anche per $|C|$.

Dunque si ha che: *Aumentando o diminuendo le molteplicità delle curve subaggiunte ad un sistema* $|C|$ (soddisfacente alle restrizioni del § 19) *in un gruppo di punti base che esso possiede sopra una superficie immagine dell'ente, si ottengono curve subaggiunte al sistema dedotto colla stessa operazione da* $|C|$ (supposto irriducibile), *quando, nel 2º caso, non si vengano a perdere delle curve fondamentali di* $|C|$.

23. *Completamento del resultato del § 21.*

Possiamo ora estendere il resultato del § 21. Sopra un ente algebrico ∞^2 si abbiano due sistemi lineari

$$|C|\quad |C'|,$$

soddisfacenti alle restrizioni del § 19, e supponiamo che, essendo $O_i^{\rho_i}$ i punti dell'ente che sono base (ϱ_i pli) per $|C'|$ e non per $|C|$, il sistema

$$|C-C'-\Sigma\, O_i^{\rho_i}|=|C''|$$

esista e sia irriducibile ∞^1 almeno (il sistema $|C-C'|$ contiene almeno i punti $O_i^{\rho_i}$ come parti fisse): si abbia dunque

$$|C|=|C'+C''+\Sigma\, O_i^{\rho_i}|.$$

Se le curve fondamentali di $|C'|$ sono tali anche per $|C|$, la dimostrazione del § 21 si estende a questo caso, e ci prova che, essendo K′ una subaggiunta a $|C'|$, la

$$K'+C''$$

è sempre una subaggiunta a $|C|$. Ma il resultato può essere esteso anche al caso in cui $|C|$ abbia sull'ente dei punti base B_s ($s=1,2\ldots$) non base per $|C'|$, (che sono fondamentali per $|C'|$ e non per $|C|$) purchè ancora ogni curva non eccezionale per $|C'|$ sia fondamentale per $|C|$: solo in questo caso non $K' + C''$ ma

$$K' + C'' + \Sigma B_s$$

costituirà una subaggiunta a $|C|$.

Supponiamo dapprima che imponendo alle curve C' di passare pei punti B_s si ottenga un sistema irriducibile il quale non possieda curve fondamentali che non sieno tali per $|C'|$. Si supponga inoltre che vi sieno almeno ∞' curve del sistema

$$|K - C'' - \Sigma B_s|$$

aventi le molteplicità $\varrho_i - 1$ nei punti O_i: esse formeranno il sistema che di regola potrà designarsi simbolicamente con

$$|K - C'' - \Sigma B_s - \Sigma O_i^{\varrho_i - 1}|$$

(solo se qualche punto O_i fosse base per $|K|$ converrebbe modificare quel simbolo, ma ciò non altererebbe le successive deduzioni).

Ora indichiamo con $|k'|$ il precedente sistema (normale) spogliato delle eventuali parti fisse fondamentali per $|C' - \Sigma B_s|$: $|k'|$ sarà contenuto nel subaggiunto $|K_1'|$ di $|C' - \Sigma B_s|$, e sarà costituito di curve subaggiunte a $|C' - \Sigma B_s|$, quindi si avrà

$$|K'| = |k' + \theta|$$

dove θ si compone di curve fondamentali per $|C' - \Sigma B_s|$ e non per $|C - \Sigma B_s|$; ma curve siffatte non esistono, perchè le curve fondamentali di $|C' - \Sigma B_s|$ sono tali per $|C'|$ e quindi anche per $|C|$ (non essendo costituite di punti B_s) e per $|C - \Sigma B_s|$; si deduce

$$|K_1'| = |k'|.$$

Ma d'altra parte le curve

$$K_1' + \Sigma B_s$$

sono subaggiunte a $|C'|$ (22), e però le curve

$$K' + C'' + \Sigma O_i^{\varrho_i - 1},$$

e ugualmente le

$$K' + C''$$

sono subaggiunte a

$$|C - \Sigma B_s|;$$

segue che le

$$K' + C'' + \Sigma B_s$$

sono subaggiunte a $|C|$. Resta da eliminare nella dimostrazione le ipotesi restrittive poste in principio. Ma ciò si può fare (in modo analogo al § 21) considerando le subaggiunte a $|C'|$ $|C|$ di rango più elevato, o (ciò che è lo stesso) considerando in luogo dei sistemi $|C'|$ e $|C|$ i sistemi $|rC'|$ ed $|rC|$ dove r è assai alto, cioè tanto alto che $|rC' - \Sigma B_s|$ sia irriducibile e non avente curve fondamentali per $|rC'|$, e tanto alto ancora che esistano infinite curve del sistema

$$|K + (r-1)C - rC'' - \Sigma B_s - \Sigma O_i^{\varrho_i - 1}|$$

ottenute staccando

$$r\,C'' + \Sigma\,B_s + \Sigma\,O_i^{\rho_i - 1}$$

dal sistema $|K + (r - 1)\,C|$ subaggiunto ad $|r\,C|$.

Si deduce che *se esiste una* K′ *subaggiunta a* $|C'|$ *la*

$$K' + C'' + \Sigma\,B_s$$

composte di essa, di una C″ *e dei punti base per* $|C|$ *e non per* $|C'|$, *costituiscono curve subaggiunte a* $|C|$: *ciò in conseguenza dell'ipotesi che le curve non eccezionali fondamentali per* $|C'|$ *sieno fondamentali per*

$$|C| = |C' + C'' + \Sigma\,O_i^{\rho_i - 1}|.$$

Alla dimostrazione data si potrebbe muovere un appunto nel caso che alcuni dei punti B_s cadano in punti multipli della superficie immagine dell'ente avente per sezioni le curve C′, giacchè in tal caso si può dubitare che imponendo ad $|r\,C'|$ i punti base B_s si ottenga mai un sistema irriducibile sull'ente: questo caso esigerebbe dunque ulteriori considerazioni permettenti di togliere ogni dubbio. Ce ne dispensiamo, tanto più che applicheremo il resultato ottenuto soltanto nel caso che $|C'|$ sia non singolare, ed allora l'obiezione avvertita non si presenta.

24. *Riassunto.*

Crediamo utile riassumere i resultati di natura invariantiva stabiliti nella teoria delle curve subaggiunte: il punto di vista proiettivo sarà ripreso più tardi.

Ci riferiamo a sistemi lineari normali $|C|$ $|C'|$ irriducibili, semplici, sopra un dato ente algebrico ∞^2, ed escludiamo che alcuno di tali sistemi ammetta un fascio di curve unisecanti sull'ente. Allora le curve subaggiunte a ciascuno (supposte in numero infinito), spogliate delle parti fisse fondamentali per il risp. sistema formano il sistema lineare normale subaggiunto ad esso.

Supponiamo

1) che $|C|$ contenga $|C'|$;

2) che sieno $A_1\,A_2 \ldots A_r \ldots$ i punti dell'ente base per $|C'|$ e non per $|C|$, e che A_r abbia la molteplicità i_r per $|C'|$;

3) che il sistema

$$|C - C'|$$

il quale possiede come parti fisse i punti $A_r^{i_r}$, non possieda altre parti fisse e sia, all'infuori di questi punti fissi, irriducibile, (∞^1 almeno); vale a dire sia irriducibile il sistema

$$|C''| = |C - C' - \Sigma\,A_r^{i_r}|;$$

4) che sieno $B_1\,B_2 \ldots B_s \ldots$ i punti dell'ente base per $|C|$ e non per $|C'|$.

Allora:

a) Se esiste un sistema $|K|$ subaggiunto a $|C|$, le curve di $|K - C''|$ (supposte esistenti) che hanno la molteplicità $i_r - 1$ in ciascun punto A_r (riguardato come un buco) costituiscono subaggiunte a $|C'|$.

Se nessuno dei punti A_r è base per $|K|$ (ció che accidentalmente può avvenire) si può dire che formano subaggiunte a $|C'|$ le curve di

$$|K - C'' - \Sigma A_r^{i_r - 1}|$$

supposte esistenti: si può conservare tale forma simbolica al resultato se si suppone di includere in $|K|$ (sommandolo ad esso s volte) ogni punto base $s$plo pel sistema subaggiunto di $|C|$, non base per $|C|$.

b) Viceversa: *supposto che ogni curva fondamentale per* $|C'|$ *all'infuori degli eventuali punti base* $B_1 B_2 \ldots B_s \ldots$ *di* $|C|$ *e non di* $|C'|$, *sia fondamentale anche per* $|C|$; se esiste una curva K' subaggiunta a $|C'|$, ogni curva

$$K' + C'' + \Sigma B_s$$

costituisce una subaggiunta a $|C|$: ed allora costituisce una subaggiunta a $|C|$ anche ogni curva

$$K' + C'' + \Sigma A_r^{i_r - 1} + \Sigma B_s.$$

La restrizione sottolineata per l'enunciato *b) è necessaria*, sebbene possa in parte ridursi.

Quando $|C'|$ abbia delle curve fondamentali proprie non fondamentali per $|C|$ si vedrà da effettivi esempi che la più generale curva

$$K' + C'' + \Sigma B_s$$

non è subaggiunta a $|C|$: in altre parole il sistema

$$|K - C'' - \Sigma A_r^{i_r - 1}|$$

generalmente non è tutto $|K'|$ ma è contenuto parzialmente in esso.

Osservazione. Per quanto riguarda la restrizione che $|C|$ $|C'|$ non posseggano un fascio di unisecanti, osserviamo che tale restrizione può essere omessa relativamente a $|C'|$ nell'enunciato della proprietà *a*), ma non in quello della *b*): invero (cfr. § 30) figura qui in modo essenziale la condizione che le curve subaggiunte a $|C'|$ formino un sistema lineare, e ciò (come è facile vedere) non è più vero se $|C'|$ possiede un fascio di unisecanti (l'ente algebrico ammettendo ín questo caso come immagine una rigata di cui le C' sono direttrici).

IV

Curve aggiunte.

25. *Curve aggiunte ad un sistema non singolare.*

Prendiamo come immagine dell'ente algebrico ∞^2 una superficie F non rigata senza singolarità in un S_k, sulla quale esistano infinite curve subaggiunte K: esse formano un sistema lineare cui possiamo togliere ogni punto fisso non comune a tutte le K, e sommare ogni punto iplo per le K un numero i di volte, per modo da ottenere un sistema lineare che (riguardato sotto l'aspetto invariantivo secondo il § 3) non abbia punti base su F. Il sistema così precisato si dirà il sistema *aggiunto* a quello delle sezioni C di F, e le sue curve si diranno *aggiunte* al detto sistema $|C|$. Se si designano con C_a, si ha un sistema $|C_a|$ che non differisce da quello subaggiunto a $|C|$ se non (eventualmente) per la presenza di punti fissi di F, non base per $|C|$.

Si diranno *curve aggiunte* ad $|nC|$ o *curve aggiunte di rango* $n-1$ a K le curve del sistema

$$|(nC)_a| = |(n-1)C + C_a|.$$

Evidentemente il sistema $|(nC)_a|$ potrebbe definirsi in modo analogo a $|C_a|$ sulla superficie trasformata di F avente per sezioni iperpiane le curve di $|nC|$ (§ 21). Si abbia ora su F un qualsiasi sistema lineare non singolare $|C'|$ non possedente un fascio di unisecanti, il quale abbia un certo numero r di punti base $A_1^{i_1} .. A_r^{i_r}$.

Si consideri un multiplo $|nC|$ di $|C|$ così alto che

$$|C''| = |nC - C' - \Sigma A_s^{i_s}|$$

sia irriducibile (in altre parole si prenda n così alto che le varietà d'ordine n ed $h-1$ dimensioni passanti per una C' non abbiano comune alcun punto fisso su F fuori di C').

Si diranno *curve aggiunte* a $|C'|$ su F e si designeranno con C_a' le curve del sistema

$$|(nC)_a - C'' - \Sigma A_s^{i_s - 1}| = |(n-1)C + C_a - C'' - \Sigma A_s^{i_s-1}|$$

vale a dire tutte quelle curve che

1) sono subaggiunte a $|C'|$ (pel § 22);

2) sommate ad una curva residua di una C' rispetto ad $|nC|$ costituiscono aggiunte ad $|nC|$.

Il sistema $|C'_a|$ *aggiunto* a $|C'|$ resta così definito indipendentemente dal valore di n; perchè se si muta n in $n+m$, $|(n-1)C|$ si muta in $|(n-m-1)C|$ e $|C''|$ si muta in $|C''+mC|$.

Le curve C'_a sono come abbiam notato subaggiunte a $|C'|$, anzi il loro sistema è *tutto* il subaggiunto a $|C'|$ aumentato eventualmente di qualche parte fissa, curva eccezionale di F fondamentale per $|C'|$ (immagine d'un punto dell'ente non base per $|C'|$).

Ciò è una conseguenza immediata dei resultati ottenuti nel § 23.

Per la definizione: *Le curve aggiunte ad un sistema non singolare su* F *hanno come* $(i-1)$plo *ogni punto base iplo* O *di questo su* F: s'intende con ciò che se O ha per le curve suddette (intese in senso proiettivo) una molteplicità $i-1+\varrho$, compare come componente sommata alle curve stesse l'intorno di O su F contato ϱ volte. Ora *se* $|C'|$ $|C''|$ *sono due qualsiasi sistemi non singolari* (*privi d'un fascio di unisecanti*) *su* F, *e sono* $A_s^{i_s}$ $(s=1,2\ldots)$ *i punti di* F *base per* $|C''|$ *e non per* $|C'|$, e $B_s^{h_s}$ $(1=1,2\ldots)$ *i punti di* F *base per* $|C'|$ *e non per* $|C''|$, *e se inoltre* $|C'|$ *contiene* $|C''|$ *ed è* C''' *una curva residua di una* C'' *rispetto a* $|C'|$ *su* F (*vale a dire sull'ente* $|C'| = |C'' + C''' + \Sigma A_s^{i_s-1} + \Sigma B_s|$) *si ha*

$$|C_a'| = |C_a'' + C''' + \Sigma A_s^{i_s-1} + \Sigma B_s|.$$

Infatti le curve

$$C''_a + C''' + \Sigma A_s^{i_s - 1} + \Sigma B_s$$

1) sono subaggiunte a $|C'|$ (§ 23);

2) sommate ad una curva residua di una C' rispetto ad nC dànno aggiunte ad $|nC|$.

La precedente relazione simbolica ci dice che le curve $C''_a + C'''$ considerate proiettivamente su F sono contenute totalmente in $|C'_a|$, e solo possono differire dalle C'_a per la presenza di certi buchi: ove senza occuparci di tali buchi si voglia porre in evidenza il fatto che due sistemi lineari considerati proiettivamente su F sono contenuti totalmente in un altro (ottenuto sommando ad essi dei punti) si userà del simbolo $\equiv$: scriveremo dunque

$$|C'_a| \equiv |C''_a + C'''|.$$

Una congruenza simbolica tra due sistemi normali su F denota la coincidenza (uguaglianza simbolica) di essi quando le curve dei due sistemi abbiano gli stessi buchi, ossia i due sistemi abbiano gli stessi punti base colle stesse molteplicità.

Osservazione. Le curve aggiunte ad un sistema non singolare (privo d'un fascio di unisecanti) restano precisate sull'ente assumendo una particolare superficie senza singolarità immagine dell'ente: mutando questa superficie mutano soltanto per la presenza di punti fissi non base pel sistema, poichè astrazion fatta da tali punti le curve aggiunte ad un sistema non singolare (privo d'un fascio di unisecanti) si confondono colle subaggiunte.

26. *Definizione generale delle curve aggiunte.*

Sia $|C|$ un qualunque sistema irriducibile normale (∞^1 almeno) sopra la superficie F a cui ancora ci riferiamo. Si può sempre considerare un sistema normale $|L|$ irriducibile semplice non singolare e non possedente un fascio di unisecanti, che contenga $|C|$ (§ 14), di guisachè si abbia

$$|L - C| = |C'| + \Sigma A_r^{i_r}$$
$$|L| = |C + C' + \Sigma A_r^{i_r}|$$

essendo $A_r^{i_r}$ $(r = 1, 2 \ldots)$ i punti di F base per $|C|$ e non per $|L|$.

Come sistema $|L|$ possiamo prendere anche un multiplo assai elevato del sistema delle sezioni iperpiane su F, cioè il sistema segato su F dalle varietà d'ordine abbastanza alto (reso normale).

Sieno poi B_s $(s = 1, 2 \ldots)$ i punti base per $|L|$ e non per $|C|$.

All'infuori di questi punti B_s ogni curva fondamentale per $|C|$ è fondamentale anche per $|L|$, perchè $|L|$ è non singolare.

Indicheremo col nome di *curve aggiunte* a $|C|$ e designeremo con C_a le curve (supposte esistenti) che sono subaggiunte a $|C|$ e che prese insieme con una C' e coi punti $A_r^{i_r - 1}$ e B_s $(r = 1, 2 \ldots, s = 1, 2 \ldots)$ formano curve L_a aggiunte ad $|L|$. Le curve C_a sono dunque le curve del sistema

$$|C_a| = |L_a - C' - \Sigma A_r^{i_r - 1} - \Sigma B_s|;$$

ove esse sieno infinite, $|C_a|$ è normale e dicesi *sistema aggiunto* a $|C|$.

Le curve C_a vengono per definizione ad avere come $(i-1)$plo ciascun punto base iplo di $|C|$ su F. Anzi si può dire che le curve C_a aggiunte a $|C|$ vengono così definite come quelle curve di $|L_a - C'|$ $(\equiv |C_a|)$, in cui sono tolti i buchi che cadono fuori dei punti base di $|C|$, e dove è fatto invece un buco in ogni punto base iplo di $|C|(i>1)$ imponendo in esso alla curve stesse la molteplicità $i-1$.

La definizione posta deve essere subito giustificata mostrando che essa è indipendente dal particolare sistema $|L|$ scelto su F, nella cui scelta compare una grande arbitrarietà. Per ciò si scelga un altro sistema $|M|$ soddisfacente alle medesime condizioni, e sia

$$|M - C| \equiv |C''| :$$

basta provare che

$$|L_a - C'| \equiv |M_a - C''|,$$

giacchè le ulteriori condizioni (consistenti nel togliere e sommare punti) che debbono essere imposte alle curve dei due sistemi per avere le C_a portano a togliere alle curve di ciascun sistema i buchi che cadono fuori dei punti base di $|C|$ e a praticarne in questi in modo che ogni punto base iplo di $|C|$ divenga per esse $(i-1)$plo, cosicchè dopo tali operazioni le curve generiche dei due sistemi avranno le stesse molteplicità in tutti i punti di F, e quindi (essendo normali) coincideranno.

Ora consideriamo il sistema non singolare

$$|S| = |L + M| :$$

poichè $|S|, |L|, |M|$ soddisfano alle restrizioni del precedente § si avrà

$$|S_a| \equiv |L_a + M| \equiv |L + M_a|;$$

ma

$$|L| \equiv |C + C'| \, M \equiv |C + C''|,$$

quindi

$$|L_a + C + C''| \equiv |M_a + C + C'|$$

$$|L_a - C'| \equiv M_a - C''| \ c \ \text{ɔɔ}.$$

27. *Teorema fondamentale.*

Ora possiamo estendere alle curve aggiunte rispetto a due *qualunque* sistemi irriducibili $|C|$ $|C'|$ sopra la superficie F le relazioni del § 25. Si supponga dunque che sia

$$|C| = |C' + C'' + \Sigma A_r^{i_r}|$$

essendo $A_r^{i_r}$ $(r = 1, 2 \ldots)$ i punti di F base per $|C'|$ e non per $|C|$: sieno $B_s^{\rho_s}$ $(s = 1, 2 \ldots)$ i punti base di $|C|$ e non base per $|C'|$. Si vuol provare che

$$|C_a| = |C'_a + C'' + \Sigma A_r^{i_r - 1} + \Sigma B_s|,$$

dove supposto che abbia significato il simbolo del primo membro, deve avere significato per conseguenza quello del secondo e viceversa.

A tal fine si consideri su F un sistema non singolare $|L|$ sotto le restrizioni del precedente §, il quale contenga $|C + C'|$: si abbia

$$|L - C - C'| \equiv |C''|.$$

Si ha (prescindendo da punti che figurano come componenti nei simboli)

$$|L| \equiv |C + C' + C''|$$

e quindi (pel § precedente)

$$|L_a| \equiv |C_a + C' + C''|$$
$$|L_a| \equiv |C_a' + C + C''|;$$

segue

$$|C_a + C'| \equiv |C'_a + C| \equiv |C'_a + C' + C''|$$
$$|C_a| \equiv |C_a' + C''|.$$

Questa congruenza simbolica dà luogo alla relazione che si vuol stabilire tenendo conto opportunamente dei « punti » che abbiamo trascurato.

Basta infatti osservare che sommando entro il secondo simbolo

$$\Sigma A_r^{i_r - 1} + \Sigma B_s$$

si ottiene un sistema indicato dal relativo simbolo che ha su F gli stessi punti base di $|C_a|$, donde segue

$$|C_a| = |C'_a + C'' + \Sigma A_r^{i_r - 1} + \Sigma B_s| \text{ c. d. d.}$$

Enunciando in parole il resultato ottenuto possiamo dire che:

Sopra una superficie senza singolarità abbiam posto il concetto di curve *aggiunte* ad un sistema lineare irriducibile $|C|$ in guisa che:

1) le curve C_a aggiunte ad un sistema lineare $|C|$ segano gruppi canonici sulle curve generiche del sistema;

2) le curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$, compongono (se esistono) un sistema lineare normale $|C_a|$ (*aggiunto* a $|C|$) che ha come punti base $(i-1)$pli i punti base ipli per $|C|$ $(i > 0)$ e non ha altri punti base;

3) il sistema $|C_a|$ aggiunto a $|C|$ (fatta astrazione da curve eccezionali fisse) è quello di *tutte* le curve soddisfacenti alla condizione 1) se $|C|$ è un sistema semplice, non singolare, non possedente un fascio di unisecanti;

4) sussiste il:

Teorema fondamentale. *Se ad un sistema lineare normale irriducibile $|C|$ si somma o toglie una curva C'' oppure si impongono dei nuovi punti base ipli, in guisa che l'operazione conduca ad un sistema irriducibile (∞^1 almeno) $|C'|$, si otterrà il sistema $|C'_a|$ aggiunto a $|C'|$;*

a) sommando o togliendo risp. la C'' al sistema $|C_a|$ aggiunto a $|C|$;

b) imponendo alle C_a la molteplicità $i-1$ in ciascun nuovo punto base iplo.

Corollario. — Se $|C|$ $|C'|$ sono due sistemi lineari irriducibili su F (ma non sono fasci coincidenti) si ha che

$$|C_a + C'| \text{ è contenuto in } |(C + C')_a|$$

e da esso differisce solo pel fatto di possedere come base $i$plo anzichè $(i-1)$plo ogni (eventuale) punto base iplo di $|C'|$ non base per $|C|$: in particolare se $|C|$ $|C'|$ hanno gli stessi punti base

$$|(C + C')_a| = |C_a + C'| = |C + C'_a|. \tag{1}$$

La definizione delle curve aggiunte ad un qualsiasi sistema irriducibile $|C|$ su F si riduce con operazioni determinate sull'ente a quella delle curve aggiunte a sistemi non singolari e non possedenti un fascio di unisecanti. Segue che se in luogo di F si sceglie come immagine dell'ente un'altra superficie F′ (senza singolarità) le curve aggiunte a $|C|$ su F′ differiscono dalle aggiunte a $|C|$ su F soltanto (eventualmente) per « punti » fissi dell'ente, non base per $|C|$. Ossia:

Sull'ente algebrico ∞^2 le curve aggiunte ad un sistema lineare irriducibile $|C|$ restano definite a meno di punti fissi non base per $|C|$.

Trattando di curve aggiunte a $|C|$ *sull'ente* si deve ricordare che esiste questa indeterminatezza nella loro definizione, indeterminatezza della quale si può profittare nel modo più conveniente.

Allorchè l'ente algebrico ∞^2 ammette delle superficie immagini senza curve eccezionali, è conveniente precisare su una qualsiasi di queste la definizione delle curve aggiunte, ed allora il teorema fondamentale si può enunciare riferendosi all'ente algebrico. In questo caso se $|C|\,|C'|$ sono due sistemi privi di punti base (puri) si ha sempre

$$|C_a + C'| = |C + C'_a|.$$

Osservazione. Riferendoci al caso in cui l' ente ammette superficie immagini senza curve eccezionali, ed ai sistemi privi di punti base (puri) su tale ente, vediamo come l'operazione geometrica (*aggiunzione*) facente passare da un sistema lineare (irriducibile) $|C|$ al sistema aggiunto $|C_a|$ (ove possibile), riesce caratterizzata dalla relazione (1), che serve a definire l'aggiunzione appena fissato (ad arbitrio) il sistema $|C'_a|$ aggiunto ad un dato particolare sistema puro $|C'|$. Invero dalla (1) si ricava

$$|C_a| = |C + C'_a - C'|,$$

da cui si vede che $|C_a|$ (ove esista) è determinato (¹).

La precedente osservazione può porsi sotto aspetto analitico, sostituendo alla considerazione di $|C|\ |C'|$ le corrispondenti funzioni razionali dell'ente $f\ f'$, dove ciascuna funzione contiene un certo numero di parametri (il massimo possibile) e dove la $f f'$ non hanno punti di zero indipendenti dai valori dei parametri. Occorre per ciò di designare con $f\ f'$ la funzione contenente il più ampio numero di parametri appartenente al sistema lineare determinato dai prodotti delle funzioni f ed f', vale a dire la funzione corrispondente al sistema normale $|C + C'|$.

Conviene inoltre designare con φ l'*operazione funzionale* di aggiunzione, quindi con $\varphi(f)$, $\varphi(f')$, $\varphi(ff')$, le funzioni corrispondenti a $|C_a|$, $|C'_a|$, $|(C+C')_a|$; e con $\varphi(f)\ f'$, $\varphi(f')f$ le funzioni corrispondenti a $|C_a + C'|$, $|C'_a + C|$. Allora si ha simbolicamente

$$\varphi(ff') = \varphi(f)\cdot f' = \varphi(f')\cdot f.$$

È chiara l'analogia di questa equazione simbolica che definisce l'operazione fun-

(¹) Si avverta inoltre che l'indeterminazione nella scelta di $|C'_a|$ viene molto limitata se si vuole che l' aggiunzione riesca definita razionalmente sull' ente, indipendentemente dal sistema iniziale $|C'|$.

zionale φ appena fissata (arbitrariamente) la funzione corrispondente ad una data, coll'equazione funzionale

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \, . \, y = \varphi(y) \, . \, x$$

che ha per funzione integrale

$$\varphi(x) = Cx \quad (C = \text{cost}).$$

Il paragone tra la relazione data dal teorema fondamentale dell'aggiunzione coll'equazione funzionale

$$\varphi(x\,y) = \varphi(x) \, . \, y$$

mi pare ne faccia bene rilevare l'intima natura: questo paragone mi è stato suggerito da una conversazione col sig. PINCHERLE intorno alle sue recenti ricerche di calcolo funzionale ([1]).

Cenno d'estensione. Il teorema fondamentale permette di estendere il significato dell'aggiunzione anche rispetto a sistemi normali riducibili di dimensione ≥ 0. Non ci tratterremo su questa facile estensione che non occorre pel seguito.

28. *Non influenza delle curve fondamentali improprie d'un sistema lineare nella determinazione delle curve aggiunte.*

Si può ora domandare una definizione *diretta* delle curve C_a aggiunte ad un sistema irriducibile $|C|$ sopra un ente algebrico ∞^2, mostrando in qual modo la determinazione delle C_a fra le curve subaggiunte sia legata alle curve fondamentali di $|C|$. In questa ricerca *supporremo anzitutto il sistema lineare* $|C|$ *irriducibile semplice* ∞^3 *almeno e non possedente un fascio di curve unisecanti le* C: qualche altra limitazione relativa alla natura delle curve fondamentali di $|C|$ sarà posta in seguito; è appunto per la difficoltà che si incontra quando vi sono curve fondamentali infinitamente vicine (§ 8) che è preferibile di dare delle curve aggiunte la definizione indiretta del § 26., che comprende tutti i casi. Per precisare la definizione delle curve aggiunte a $|C|$ riferiamoci ad una superficie F senza singolarità, immagine dell'ente.

Sappiamo che il sistema $|C_a|$ (che supponiamo ∞^1 almeno) eventualmente spogliato di parti fisse fondamentali per $|C|$ è contenuto nel sistema $|K|$ subaggiunto a $|C|$, e che le curve residue si compongono (ove esistano) soltanto di un numero finito di curve fondamentali per $|C|$ il cui complesso denoteremo con θ; quindi $|K - \theta|$ coinciderà con $|C_a|$ a meno di eventuali parti fisse che gli si dovranno aggiungere.

La determinazione di $|C_a|$ (a meno di componenti fisse fondamentali per $|C|$ dipende dunque dalle curve di F fondamentali per $|C|$ le quali sono in numero finito: ciascuna curva fondamentale di $|C|$ avrà una *influenza nella determinazione delle curve aggiunte*, influenza data dal numero $r(\geq 0)$ delle volte che essa compare come componente in θ, cioè dal numero delle volte che essa deve essere staccata da $|K|$; una curva fondamentale di $|C|$ di cui la detta influenza valga $r = 0$, dovrà dirsi non avere influenza ecc.

([1]) Cfr. la sua Nota « *Sulle operazioni funzionali distributive* » (R. Accad. dei Lincei, Febbraio 1895).

Curve fondamentali di $|C|$ che compariscano come parti fisse in $|C_a|$ e non in $|K - \theta|$ non hanno certo influenza nella determinazione delle aggiunte a $|C|$, perchè se una tal curva θ' comparisse in θ si potrebbe staccare da $|K|$ la $\theta - \theta'$ anzichè la θ, ed il sistema residuo coinciderebbe ancora con $|C_a|$, a meno di parti fisse fondamentali per $|C|$ da sommarsi.

Teorema. Una curva fondamentale di $|C|$ *che ha influenza nella determinazione delle curve aggiunte a* $|C|$ *influisce anche sul genere delle curve residue, ossia è una curva fondamentale propria.*

Sia $|C_a|$ il sistema aggiunto di $|C|$ e supponiamo che esso non possieda come parti fisse delle curve fondamentali per $|C|$ (di cui eventualmente potrebbe spogliarsi); allora detto $|K|$ il sistema subaggiunto a $|C|$, $|C_a|$ è contenuto in $|K|$: se θ è (su F) una curva fondamentale di $|C|$ che ha influenza nella determinazione delle curve aggiunte si avrà

$$|C_a| = |K - \theta - \theta'|$$

denotando θ' un eventuale complesso di altre curve fondamentali per $|C|$.

Si indichi con

$$|C'| = |C - \theta|$$

il sistema residuo di θ rispetto a $|C|$; stante le ipotesi poste per $|C|$ questo sistema $|C'|$ è irriducibile tranne nel caso che per lo staccamento di θ si stacchi in conseguenza da $|C|$ qualche altra curva fondamentale, ma in ogni caso intenderemo di prescindere da queste parti fisse; si denotino con π, π' i risp generi di $|C|$ $|C'|$: si deve provare che

$$\pi' < \pi.$$

A tal fine si osservi che le K (di cui la θ non è parte fissa) segano le C generiche in $2\pi - 2$ punti, e quindi segano le C' in un numero di punti $\leq 2\pi - 2$; in conseguenza le curve del sistema $|K - \theta|$ segheranno le C' in un numero di punti $< 2\pi - 2$. A fortiori dunque le curve di $|C_a - \theta|$ segheranno le C' in un numero di punti $< 2\pi - 2$: ma (pel teorema fondamentale) $|C_a'|$ coincide con $|C_{a} - \theta|$ (o è contenuto in esso), quindi le curve di $|C_a - \theta|$ segano le C' in $2\pi' - 2$ punti (almeno): dunque

$$2\pi' - 2 < 2\pi - 2,$$

ossia

$$\pi' < \pi \qquad \text{c } \mathfrak{d}\mathfrak{d}.$$

Nel ragionamento si suppone tacitamente che da $|C_a|$ possa staccarsi θ (ossia che esista $|C_a'|$): la conclusione è vera indipendentemente da tale ipotesi, giacchè se il ragionamento precedente non sarà applicabile a $|C|$, sarà pur sempre applicabile ad $|n\, C|$ dove n è assai alto, e dall'avere stabilito che θ è curva fondamentale propria per $|n\, C|$ seguirà che essa è pure fondamentale per $|C|$. Il teorema può essere posto sotto altra forma, affermando che le curve fondamentali improprie di $|C|$ non influiscono nella determinazione delle sue curve aggiunte. Se ne trae il Corollario. *Se un sistema lineare irriducibile semplice* (*non possedente un fascio di unisecanti*) *è privo di curve fondamentali proprie, il suo sistema aggiunto, spogliato di eventuali componenti fisse fondamentali, coincide col sistema subaggiunto.*

Osservazione. Non sono soltanto le curve fondamentali improprie d'un sistema $|C|$ che non influiscono nella determinazione delle sue curve aggiunte.

Le curve fondamentali di $|C|$ non influenti nella determinazione delle sue curve aggiunte possono chiamarsi *curve fondamentali apparenti:* un esempio di esse (all'infuori delle curve improprie) è dato dalle curve fondamentali *irriducibili razionali* a cui non sieno infinitamente vicine altre curve fondamentali [1].

29. *Influenza delle curve fondamentali proprie d'un sistema lineare nella determinazione delle curve aggiunte.*

L'influenza di una curva fondamentale nella determinazione delle curve aggiunte a $|C|$, può essere valutata nel caso generale, quando $|C|$ *abbia curve fondamentali distinte:* conserviamo la limitazione che $|C|$ *sia semplice* e *non possieda un fascio di unisecanti.*

Si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F (d'ordine n) in S_3, la quale sia proiezione generica d'una superficie senza singolarità in un iperspazio e contenga una stella (avente un centro O iplo per F) di sezioni piane C (curve generiche di $|C|$) (cfr. § 8): la F (per costruzione) non ha punti multipli isolati fuori di O. Allora le curve subaggiunte a $|C|$ vengono segate su F da superficie ψ_{n-3} (di ordine $n-3$) aventi $O\,(i-1)$plo e seganti i piani generici per O secondo curve aggiunte alle sezioni di F. (Invero un tale ψ_{n-3} si costruisce col metodo del § 18). Una curva fondamentale di $|C|$ ha per immagine su F una retta s pla per O; la quale non sarà in generale $(s-1)$pla per una tale ψ_{n-3} (se è una retta fondamentale non apparente), ma sarà $(s-1)$pla per quelle tra le ψ_{n-3} considerate che segano su F curve aggiunte a $|C|$, giacchè tali curve aggiunte insieme ad O e a rette per esso costituiscono (per definizione) delle curve aggiunte (alle sezioni piane) su F.

Si osservi poi che una ψ_{n-3} avente una retta a per O, $s$pla per F, come $(s-1)$ pla, incontra un piano generico per a secondo una curva d'ordine $n-s-2$ (particolare) aggiunta alle sezione di F fuori di a, avente come ϱ plo ogni punto ϱ plo per essa su a (il quale è un punto $(\varrho+s)$plo non isolato per F): segue che una curva aggiunta a $|C|$ sega una curva C_1 residua della fondamentale a in un gruppo di punti appartenente alla serie somma di quella canonica di C_1 e del gruppo di punti comune a C_1, a [2].

D'altra parte le condizioni cui deve soddisfare una ψ_{n-3} la quale determini su F una curva aggiunta a $|C|$ (e non soltanto subaggiunta), sono tutte espresse dal contenere come $(s-1)$ple le rette $s$ple per F (distinte) passanti per O.

Dunque si trae il

Teorema. Se $|C|$ è un sistema lineare irriducibile semplice di genere > 0, dotato di curve fondamentali proprie distinte, e non possedente un fascio di unisecanti, le curve aggiunte a $|C|$ sono quelle che

1) *segano una curva C generica secondo un gruppo canonico;*

2) *segano una curva generica C_1 (di genere $\pi \geq 0$) residua d'una curva*

[1] Cfr. le mie «*Ricerche*» V, 4, 6.

[2] Parlando di serie somma di quella canonica e di un gruppo di λ punti sopra una curva C_1, includeremo convenzionalmente anche il caso in cui C_1 abbia il genere 0, riguardando allora come serie somma siffatta quella $\infty^{\lambda-2}$ dei gruppi di $\lambda-2$ punti su C_1.

fondamentale propria θ, *secondo un gruppo della serie somma della* $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ *canonica di* C_1 *e di quella cui appartiene il gruppo dei punti comuni a* C_1 *ed a* θ (1). L'enunciato perderebbe il significato se le C_1 residue di una θ fossero riducibili, ma allora $|C|$ possederebbe un fascio di unisecanti, o non sarebbe semplice.

Una estensione si può prevedere pel caso di curve fondamentali qualunque, che vengano distribuite in gruppi ciascuno dei quali si possa considerare come l'insieme di un certo numero r di curve fondamentali $\theta_1\ \theta_2 \ldots \theta_r$ infinitamente vicine. Allora occorrerà esaminare i sistemi $|C_1|\ |C_2| \ldots$ che si ottengono staccando da $|C|$ successivamente $\theta_1\ \theta_2 \ldots$ (riportando la cosa ad un multiplo di $|C|$ ove $|C|$ non sia assai ampio).

Il resultato che si prevede è analogo a quello più limitato che è stato stabilito: però l'argomento è delicato ed esige cautela ove si voglia trattare con rigore.

30. *Sistemi lineari possedenti un fascio di curve unisecanti.*

Un cenno speciale meritano i sistemi lineari possedenti un fascio di unisecanti che sono stati esclusi in varî enunciati precedenti: l'ente algebrico cui appartengono sistemi siffatti ammette come superficie immagine una rigata di cui le curve del sistema sono direttrici.

Cominciamo dunque a stabilire un lemma sui sistemi lineari appartenenti ad una rigata o più in generale ad una superficie con un fascio di curve razionali K.

Sopra una tale superficie si consideri un sistema lineare di curve seganti in $\varrho\ (> 1)$ punti variabili le curve K del fascio; sia $|C|$ il detto sistema che supponiamo irriducibile ∞^2 almeno.

Costruiamo un fascio razionale di curve composte ciascuna con un certo numero s (assai grande) di curve K, il che può farsi considerando una serie g_s^1 sull' ente ∞^1 che ha per elementi le curve K.

Trasformiamo la data superficie in una F di S_3, in modo che le curve del nominato fascio vengano segate dai piani per una retta a, ed in modo che le ∞^2 curve generiche C (di una rete) vengano segate dai piani per un punto O fuori di a. Sia n l'ordine di F, ed i la molteplicità per F della retta a; possiamo supporre senza restrizione $i > 0$; ogni piano per a sega ulteriormente F secondo s curve K ciascuna (incontrata da un piano per O in ϱ punti e quindi) d'ordine ϱ; si ha quindi

$$n = i + s\varrho.$$

Le curve aggiunte a $|C|$ sono contenute nel sistema delle curve aggiunte (alle sezioni piane) su F: queste ultime (non essendo F rigata) si trovano fra le sezioni di F colle superficie ψ_{n-3} d'ordine $n-3$, subaggiunte ad essa.

Ora una tale ψ_{n-3} ha la retta a come retta $(i-1)$pla, e sega quindi ulteriormente un piano generico per a secondo una curva d' ordine $n-2$, aggiunta alla curva composta di s curve K sezione di F: per conseguenza il gruppo delle intersezioni di una ψ_{n-3} con una curva K (d'ordine ϱ) appartiene alla serie segata sulla K stessa dal sistema somma delle altre $s-1$ curve K che sono nel suo piano, e delle curve d'ordine $\varrho-2$ aggiunte ad essa: ma poichè due K si segano soltanto in punti

(1) Tale è appunto la definizione diretta delle curve aggiunte a $|C|$ data nelle mie « *Ricerche* » III.

multipli di F (sull'ente non hanno punti comuni) si conclude che le ψ_{n-3} segano sopra una K una serie di gruppi di $\varrho - 2$ punti. Perciò le curve aggiunte a $|C|$ incontreranno pure le K in $\varrho - 2$ punti al più. Vale a dire:

Sopra un ente algebrico ∞^2 *possedente un fascio di curve razionali* K, *le curve aggiunte ad un sistema lineare irriducibile* ∞^2 *almeno di curve* ϱ *secanti le* K ($\varrho > 1$), *segano le* K *stesse in* $\varrho - 2$ *punti* al più; e si vedrebbe che tali curve aggiunte segano le K proprio in $\varrho - 2$ punti e non in meno (cfr. § 32).

Un corollario immediato è il seguente:

Sopra un ente algebrico ∞^2 *un sistema lineare irriducibile* $|C|$ ∞^2 *almeno, il quale possegga un fascio di curve unisecanti* (certo razionali) *non ammette curve aggiunte.*

Infatti se $|C|$ ammettesse curve aggiunte, una di queste sommata ad una C costituirebbe una curva aggiunta a $|2\,C|$ e segherebbe in un punto (almeno) le curve (razionali) dell'ente unisecanti le C, mentre le curve di $|2\,C|$ segano in due punti queste stesse curve.

Osservazione. Se sopra un ente algebrico ∞^2 esiste un fascio di curve razionali, partendo da un opportuno sistema irriducibile ed applicando successivamente l'operazione di aggiunzione si giunge a sistemi di curve bisecanti o unisecanti quelle del fascio, e quindi ad una superficie immagine dell'ente rigata o con un fascio di coniche (¹).

V.

Superficie aggiunte.

31. *Superficie aggiunte ad una di* S_3.

Sopra un ente algebrico si abbia un sistema lineare irriducibile semplice $|C|$: scegliamo come immagine dell'ente algebrico una superficie F di S_3 avente come sezioni piane ∞^3 curve C generiche: la F sia non rigata ed abbia l'ordine n. Le curve aggiunte a $|C|$ (che sono definite a meno di punti di F) vengono segate su F da particolari superficie (d'ordine $n-3$) subaggiunte ad F: queste s'indicheranno con φ_{n-3} e si diranno *superficie aggiunte* ad F.

La loro particolarità tra le subaggiunte dipende dal modo di comportarsi nei punti multipli isolati (propri) non *apparenti* su F, cioè in quei punti isolati di F che non sono immagini di curve fondamentali apparenti del sistema delle sezioni piane.

La definizione indiretta data di esse è generale qualunque natura abbiano le singolarità di tali punti. Ma le condizioni che vengono imposte alle φ_{n-3} aggiunte ad F dai punti multipli isolati possono facilmente essere fissate quando la F abbia *punti multipli isolati distinti* (immagini di curve fondamentali distinte per $|C|$); *allora una superficie* φ_{n-3} *aggiunta ad* F *è una superficie* (d'ordine $n-3$) *che sega un piano generico di* S_3 *secondo una curva aggiunta alla sezione di* F *ed un piano generico per un punto multiplo isolato* O *secondo una curva che insieme ad*

(¹) Cfr. Noether « *Ueber die Flächen welche ein Schaar rationaler Curven besitzen* ». Mathem. Annalen, III.

una retta per O *costituisce una aggiunta alla sezione di* F; (1) una tale superficie ha dunque come $(i-2)$ plo un punto iplo isolato ordinario di F (2). La definizione data delle superficie aggiunte ad F si estende alle superficie aggiunte d'ordine $> n-3$ o $< n-3$, (anche nel caso di singolarità arbitrarie per F).

Basta infatti valersi delle curve aggiunte ad $|r\,C|$ componenti il sistema $|C_n+(r-1)\,C|$ (se si vuole « curve aggiunte di *rango* $r-1$ su F ») o delle curve di $|C_a-(r-1)\,C|$ supposte esistenti (curve aggiunte di rango $-(r-1)$) e definire le particolari superficie subaggiunte ad F di cui tali curve sono sezioni con F (fuori della curva multipla), come *superficie* φ_{n-4+r} *aggiunte* ad F.

Adottata questa definizione delle φ_{n-4+r} per r assai alto, in modo che esistano infinite superficie d'ordine $n-4+r$ aggiunte ad F, potremo definire anche il sistema delle $\varphi_{n-4+r+s}$ $(s \gtreqless 0)$ come il sistema *normale* (cioè determinato dal gruppo base) somma del sistema delle φ_{n-4+r} e del sistema di tutte le superficie d'ordine s $(s>0)$, o invece come il sistema residuo di una superficie generale d' ordine s (contenuta nel sistema delle φ_{n-4+r}) rispetto al sistema φ_{n-4+r}. Possiamo esprimere ciò dicendo che: *riguardo ad ogni superficie* F_n *d'un certo ordine* n *in* S_3 *(non rigata) risultano definite le superficie aggiunte d'ordine* $n-4+r$ (φ_{n-4+r}), *in modo che ne esistono sempre infinite per* r *assai alto:* che « *le superficie aggiunte dei varî ordini si comportano ugualmente nei punti singolari di* F_n *e sono definite da tale comportamento* » : che « *la data definizione ricade in quella di* NOETHER *se le singolarità di* F *possono riguardarsi come ordinarie e nella mia* (delle « Ricerche ») *se la* F *ha punti isolati (propri) distinti* (caso che include quello delle singolarità ordinarie). Si potrebbe giungere ugualmente alla definizione delle superficie aggiunte ad F con opportuna estensione della definizione del sig. NOETHER per singolarità ordinarie, considerate le singolarità superiori come limiti di queste (3).

In ogni caso qualunque via si segua per stabilire il concetto delle superficie aggiunte ad F, si ha:

Sopra una superficie F *(d'ordine n) non rigata, in* S_3, *le curve aggiunte al sistema* $r$plo *di quello delle sezioni piane (curve aggiunte di rango* $r-1$ *su* F_n*) vengono segate (fuori della curva multipla e dei punti multipli) dalle superficie* φ_{n-4+r} *(d'ordine* $n-4+r$*) aggiunte ad* F_n. Alle parole « fuori dei punti multipli » si deve dare un significato conveniente tenuto conto delle *ipermolteplicità* che eventualmente le φ_{n-4+r} possono avere in un punto multiplo.

Corollario. Nel piano il sistema (non singolare) di tutte le curve C_n (d'ordine $n>3$) ha come sistema aggiunto ($=$ subaggiunto) quello di tutte le C_{n-3}, quindi (pel § 26) il sistema aggiunto ad un sistema lineare di C_n determinato da punti

(1) Questa interpretazione proiettiva dei resultati del § 29 si trova pure nelle mie « *Ricerche* » III.

(2) Ed in questo caso si ha delle superficie aggiunte l'ordinaria definizione di NOETHER. Si prevede poi che, ove le singolarità superiori sieno definite come riunioni di punti multipli isolati ordinari infinitamente vicini, e curve multiple ordinarie infinitamente piccole, le condizioni che un punto multiplo isolato impone alle superficie aggiunte si esprimeranno dicendo che esse debbono possedere come $(i-2)$ plo ciascuno di tali punti e come $(i-1)$ pla ciascuna di tali curve. Ciò si suppone generalmente in varî lavori.

(3) A questo proposito cfr. NOETHER, Göttinger Nachrichten, 1871.

base multipli è costituito da tutte le curve C_{n-3} *aggiunte* alle C_n (1) (nel senso ordinario di Brill e Noether).

Si può dunque affermare che: *data in* S_3 *una superficie (razionale)* F_m *d'un certo ordine* m, *rappresentata punto per punto sul piano, le curve* (*d'ordine* $n-3$) *del piano, aggiunte alle curve (d'ordine* n*) immagini delle sezioni piane di* F_m *rappresentano le sezioni di* F_m (fuori della curva multipla) *colle superficie* φ_{m-3} *d'ordine* $m-3$ *aggiunte ad* F_m *e viceversa.*

Questo teorema si trova già nelle mie « Ricerche » (III, 5), con qualche restrizione (punti isolati distinti per F_m): il sig. Humbert lo ha stabilito nuovamente per via indipendente (2), estendendo la considerazione alla φ_{n-4+r} (r qualunque): è chiaro come si perverrebbe anche quì a tale estensione.

32. *Superficie aggiunte alle rigate.*

Le superficie rigate, fatta eccezione dai coni, non hanno punti multipli isolati: è quindi naturale in ordine alla definizione generale di chiamare superficie aggiunte ad una rigata F di S_3 tutte le superficie (subaggiunte) seganti un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione di F; soltanto se F è un cono d'ordine n si imporrà altresì alle superficie aggiunte di possedere il vertice del cono F come $(n-2)$ plo.

Dopo ciò è essenziale notare come si estendano alle rigate i precedenti teoremi relativi alle superficie aggiunte, benchè le rigate stesse si siano dovute escludere innanzi a cagione del procedimento seguìto.

Lasciamo da parte i coni pei quali la verifica dei resultati si fa immediatamente. Cominciamo dal notare che:

Le superficie φ_{n-3+r} *d'ordine* $n-3+r$ *aggiunte ad una rigata* F *d'ordine* n *in* S_3 *segano le generatrici (fuori della curva multipla) in* $r-1$ *punti* (si suppone $r>0$; per $r=0$ non esistono φ_{n-3}).

Invero un piano per una generatrice a sega ulteriormente la F secondo una curva C d'ordine $n-1$ che sega la generatrice stessa fuori della curva multipla in *un* punto (variabile col piano): la sezione dello stesso piano con una φ_{n-3+r} è una curva d'ordine $n-3+r$ che passa pei punti fissi di C su a (punti della curva multipla) e si comporta in essi come la C: essa sega dunque a in $r-1$ punti.

Ora si consideri su F una curva k aggiunta al sistema segato dalle superficie d'ordine $r+1$ (necessariamente $r>0$): benchè la F sia rigata si prova col ragionamento del § 21 che la k sega la sezione piana generica di F in un gruppo sezione di una curva aggiunta d'ordine $n-3+r$ giacchè perciò si esige soltanto l'applicazione del teorema fondamentale (non seguirebbe invece la proprietà inversa): si deduce col procedimento del § 18 che questa curva k è sezione parziale di F (fuori della curva multipla) con una superficie aggiunta φ_{n-3+s} dove $s \geq r$: non diciamo $s=r$ appunto perchè F è rigata. Ma nel caso $s>r$ (seguendo appunto la

(1) Il sistema aggiunto ad un sistema lineare nel piano si trova considerato da Noether, Kantor e sistematicamente nel lavoro di Castelnuovo « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* » (Accad. di Torino, Memorie, 1891).

(2) Mathem. Annalen, 1895.

costruzione del § 18), la sezione di F colla φ_{n-3+s} oltrechè di k (e della curva multipla) si compone soltanto di generatrici della rigata (cioè di curve non aventi intersezioni variabili coi piani d'un fascio); si dedurrebbe quindi che k sega la generatrici di F in $s-1$ punti, mentre sappiamo dal § 30 che essa sega le dette generatrici in $r-2$ punti al più.

Concludiamo:

Sopra una superficie rigata d'ordine n in S_3, *le curve aggiunte al sistema segato dalle superficie d'ordine* $r+1$ $(r>0)$ *sono le sezioni della rigata (fuori della curva multipla) colle superficie aggiunte d'ordine* $n-3+r$.

E la cosa vale anche pei coni.

Si ha dunque che le rigate non dànno eccezione ai resultati generali.

Osservazione. Si noti come possono costruirsi sopra una rigata F (d'ordine n e genere p) i sistemi aggiunti ai sistemi segati delle superficie d'ordine $r+1$, per $r=1,2\ldots$ (sistemi aggiunti di rango r). In primo luogo il sistema aggiunto di rango 1 si compone di ∞^{p-2+n} curve ciascuna costituita di $2p-2+n$ generatrici. Gli altri si ottengono sommando a questo sistema le sezioni piane, le sezioni quadriche, ecc.

Segue che le superficie aggiunte ad F dall'ordine $n-2$ in su, segano sopra un piano *tutto* il sistema delle curve aggiunte di quel dato ordine alla sezione di F.

Vi sono su F curve subaggiunte di rango $r=0$ o di rango $r>1$ che non sono aggiunte: se ne possono infatti costruire componendole con gruppi di generatrici. Esse non possono ottenersi come ulteriori *sezioni totali di* F *fuori della curva multipla*, con superficie aggiunte.

33. *Interpretazione proiettiva del teorema fondamentale.*

Il teorema fondamentale del § 27. è suscettibile di una interpretazione proiettiva che (in virtù della definizione diretta che si ha per le superficie aggiunte ad una superficie di S_3 con punti multipli isolati distinti) può fornire una nuova definizione delle curve aggiunte ad un sistema lineare. Questa è la seguente.

Sopra una superficie F *(d'ordine n) in* S_3, *non rigata, le curve aggiunte ad un fascio lineare irriducibile di sezioni piane per una retta ipla (ordinaria) a, sono segate dalle superficie* φ_{n-3} *(d'ordine* $n-3$*) aggiunte ad* F *che hanno come ipla la retta a e come* $(\varrho-1)$*plo ogni punto* ϱ*plo di* F *su a.*

Dunque il sistema di curve così ottenuto su F non muta per una trasformazione birazionale di F in cui si conservi il detto fascio di sezioni piane, oppure si muti questo in un altro fascio dell'eventuale sistema lineare più ampio cui esso appartiene come fascio generico.

Una interpretazione analoga di quel teorema fondamentale si avrebbe riferendosi ad una rete segata su F dai piani d'una stella.

34. *Il teorema di* NOETHER *sulle superficie aggiunte alle curve gobbe e la sua inversione.*

Un'altra interpretazione proiettiva del teorema fondamentale del § 27. serve nuovamente a definire le curve aggiunte ad un sistema lineare, e fornisce come corollario il teorema del sig. NOETHER relativo alle superficie aggiunte alle curve gobbe ([1]).

([1]) Mathem. Annalen, VIII.

Sia F una superficie d'ordine n, in S_3 a sezioni piane C. Un sistema lineare $|K|$ (∞^1 almeno) su F venga segato da superficie f_m d'ordine m passanti per una curva K' e per certi punti base su F (semplici per F). Il sistema aggiunto a $|m\,C|$ vien segato su F dalle superficie aggiunte φ_{n-4+m} (d'ordine $n-4+m$): *le* φ_{n-4+m} *che passano per* K' *ed hanno come* $(i-1)$*plo ogni punto base* i*plo di* $|K|$ *su* F, *segano su* F *le curve aggiunte a* $|K|$; *viceversa queste curve aggiunte si ottengono sempre come sezioni di* F *con tali* φ_{n-4+m}. (Nell'applicare il teorema occorre qualche avvertenza riguardo alle curve che compongono K' qualcuna delle quali potrebbe esser l'intorno d'un punto multiplo su F, e riguardo ai punti base per $|K|$ qualcuno dei quali potrebbe essere pure un (parziale) intorno d'un punto multiplo).

In particolare dunque le dette φ_{n-4+m} segano su una K gruppi canonici, e ciò vale anche se invece di un sistema lineare si ha una sola K; in questo consiste il teorema di Noether, il quale segue già dal nostro teorema del § 20 (nel quale appunto non è essenziale che le curve residue di quella staccata sieno in numero infinito). Ma l'interpretazione proiettiva che abbiamo dato del teorema fondamentale ci dà anche di più, ci dà (si può dire) *l'inversione del teorema di* Noether (ove questo si applichi ad un sistema lineare sulla superficie F), *almeno in quella misura in cui essa è possibile.* (Si confrontino a questo proposito le considerazioni in principio del § 25).

35. *Completamento proiettivo del teorema del resto.*

Sappiamo (§ 19, 27, 28) che il sistema subaggiunto ed aggiunto ad un sistema $|C|$ sopra un ente algebrico sono sistemi normali: e sebbene nello stabilire questo fatto pel sistema subaggiunto si sieno imposte a $|C|$ le restrizioni del § 19., relativamente al sistema aggiunto esso risulta vero per ogni sistema $|C|$ (stante il teorema del § 27). Interpretando proiettivamente questo resultato otteniamo il complemento proiettivo del teorema del resto.

Sopra una superficie F_n *d'ordine* n *in* S_3, *tutte le superficie aggiunte di dato ordine segano su* F (*fuori della curva multipla*) *un sistema lineare normale.*

Ogni sistema lineare normale su F *può essere segato su di essa dalle superficie* φ *aggiunte ad* F *di ordine abbastanza alto che passano per curve* (*e punti*) *fisse* (*intersezioni residue*): *questo sistema su* F *viene dunque segato ugualmente dalle* φ *che passano per un'altra intersezione residua con* F.

Le rigate non fanno eccezione al teorema (§ 32); resterebbero soltanto fuori le superficie a sezioni razionali; ma per queste (che sono rigate razionali o superficie di Steiner) [1] la cosa si verifica direttamente.

Data su F una curva C si può considerare una φ di ordine abbastanza elevato che passa per essa; se C' è l'intersezione residua di φ, F, tutte le φ per C' segano su F un sistema normale: questo non dipende dall'ordine di φ (supposto assai alto), nè dalla φ da cui si parte come segue dal teorema precedente; se inoltre si tien conto dei buchi della C e si costringono le φ a passare per quei punti ed a toccare debitamente la F, il sistema ottenuto è il sistema normale cui appartiene la C (data

(1) Picard « *Giornale di Crelle* », t. C.

sull' ente), e però non muta neppure rifacendo la costruzione per una superficie trasformata (¹).

36. *Lemmi sulle superficie subaggiunte.*

1° *lemma. Se* C_n *è una curva piana d'ordine* n *e genere* π, *e con* C_{n-3+r} $(r \geq 1)$ *s'indicano le curve d'ordine* $n-3+r$ *aggiunte a* C_n, *il minimo sistema lineare di* $C_{n-3+(r+1)}$ *contenente* tutte *le curve spezzate in una retta e in una* C_{n-3+r} *è* il sistema normale di tutte *le curve d'ordine* $n-3+(r+1)$ *aggiunte a* C_n (²).

Per la dimostrazione si osservi che il minimo sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ predetto contiene le

$$\infty^{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}}$$

curve composte d'una retta a e d'una C_{n-3+r}, e le

$$\infty^{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}}$$

curve composte di un'altra retta a' e d'una C_{n-3+r}; questi due sistemi han comune il sistema composto di a, a' e di una $C_{n-3+(r-1)}$ che è

$$\infty^{\pi-1+(r-1)n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}}$$

e però il minimo sistema che li contiene entrambi ha una dimensione

$$\geq 2\left\{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}\right\}-\left\{\pi-1+(r-1)n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}\right\}$$

cioè

$$\geq \pi-2+(r+1)n+\frac{(r+1)(r+2)}{2};$$

ma questo sistema è contenuto o coincide con quello delle $C_{n-3+(r+1)}$ passanti pel punto comune ad a, a', e poichè le curve composte d'una retta e d'una C_{n-3+r} non passano tutte per quel punto, la dimensione del sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ considerate è

$$\geq \pi-1+(r+1)n+\frac{(r+1)(r-2)}{2},$$

e quindi è appunto la dimensione

$$\pi-1+(r+1)n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

del sistema normale di *tutte* le curve d'ordine $n-3+(r+1)$ aggiunte a C_n.

2° *lemma. Il minimo sistema lineare di curve piane* C_{n-2+r} *contenente* tutte *le curve composte d'una* C_{n-2} *aggiunta a* C_n *e d'una retta contata* r *volte* $(r \geq 1)$ *è* il sistema normale di tutte *le curve d'ordine* $n-2+r$ *aggiunte a* C_n.

Anzitutto si noti che una C_{n-2} ha come residuo rispetto al nominato sistema

(¹) Si vede così che l'enunciato precedente abbraccia in sè e completa il *Restsatz* di NOETHER (Mathem. Annalen, VIII) e quello stabilito nel cap. 3 delle mie « *Ricerche* ». (A questo proposito cfr. l'Appendice).

(²) Cfr. « *Ricerche* » pg. 33-34.

di C_{n-2+r} un sistema contenente tutte le rette $r$ple, quindi il sistema di *tutte* le curve d'ordine r. Segue che una retta $(r-1)$pla ha come residuo rispetto al sistema delle C_{n-2+r} un sistema di curve C_{n-1} (d'ordine $n-1$) contenente tutte le linee composte d'una C_{n-2} e d'una retta ossia (pel precedente lemma) il sistema di tutte le C_{n-1} aggiunte a C_n.

Adoperando ancora il precedente lemma si deduce analogamente che una retta $(r-2)$pla ha come residuo rispetto al sistema delle C_{n-2+r} il sistema di tutte le curve d'ordine n aggiunte alla data C_n ecc. sicchè infine risulta stabilito che una retta (semplice) ha come residuo rispetto al nominato sistema di C_{n-2+r} quello di tutte le $C_{n-2+(r-1)}$ e però il sistema delle C_{n-2+r} è quello di *tutte* le curve d'ordine $n-2+r$ aggiunte a C_n c. d. d.

Teorema. Se F_n *è una superficie d'ordine* n *in* S_3, *esiste un numero* h *assai alto, tale che le superficie* ψ_{n-2+h} *d'ordine* $n-2+h$ *subaggiunte ad* F_n *segano sopra ogni piano il sistema normale di tutte le curve d'ordine* $n-2+h$ *aggiunte alla sezione piana di* F_n*: altrettanto avviene allora (se* $h \geq 0$*) per le subaggiunte d'ordine superiore.*

Stabiliamo la prima parte del teorema; la seconda segue quindi come immediata applicazione del primo lemma, poichè fra le $\psi_{n-2+(h+1)}$ vi sono quelle composte d'una ψ_{n-2+h} e d'un piano.

Per ciò si fissi una retta generica a e in un piano α per essa si consideri una C_{n-2} aggiunta alla sezione di α la quale incontrerà a in $n-2$ punti che chiameremo $A_1 A_2 \ldots A_{n-2}$: si fissino inoltre π rette generiche $a_1 \ldots a_\pi$ incidenti a C_{n-2}, essendo π il genere delle sezioni piane di F_n. Allora in ogni piano per a resta fissata una curva C_{n-2} d'ordine $n-2$ aggiunta alla sezione di F_n, la quale passa per $A_1 \ldots A_{n-2}$ e incontra $a_1 \ldots a_\pi$, e questa C_{n-2} variando il piano per a genera una superficie ψ_{n-2+h} subaggiunta ad F_n (§ 19) d'un certo ordine $n-2+h$ dove $h \geq 0$; questa contiene a come retta $h$pla. Per ciò le ψ_{n-2+h} subaggiunte ad F_n segano sul piano (generico) α un sistema di curve contenente tutte quelle composte d'una retta $h$pla e d'una C_{n-2} aggiunta alla sezione di F_n: in virtù dei nostri lemmi precedenti le ψ_{n-2+h} subaggiunte ad F_n segano dunque su α il sistema di tutte le curve d'ordine $n-2+h$ aggiunte alla sezione di F_n: ciò è quanto dovevasi dimostrare.

37. *Dimensione virtuale del sistema delle superficie di dato ordine aggiunte ad una data.*

Le condizioni che i punti multipli isolati d'una superficie F in S_3 (non rigata), impongono alle superficie subaggiunte ψ perchè esse sieno aggiunte a F, sono indipendenti dall'ordine delle ψ (supposto assai alto); si tratta invero di imporre alle ψ un tal modo di comportarsi nei nominati punti multipli isolati di F, che dal sistema (subaggiunto di rango r) segato dalle ψ, vengano staccate un certo numero di volte le curve fondamentali del sistema $|C|$ determinato dalle sezioni piane di F, e questo numero è uguale al numero analogo calcolato per un sistema multiplo di $|C|$ il quale possiede le medesime curve fondamentali di $|C|$ coi medesimi caratteri (cfr. i § 21, 31).

Pertanto si può vedere che il sistema di curve segato sopra un piano dalle superficie φ_{n-4+k} d'ordine $n-4+k$ aggiunte ad una F d'ordine n in S_3, sarà *tutto* il sistema normale delle curve d'ordine $n - 4 + k$ aggiunte a quella sezione di F, se k è assai alto. Invero si designi con M_k il numero delle ψ_{n-4+k} (linearmente indipendenti) e con N_k quello delle φ_{n-4+k}; e si supponga di prendere $k \geq h$ dove h è già così grande che le (subaggiunte) ψ_{n-4+k} ($k = h$, $h+1, \ldots$) seghino sopra un piano generico il sistema di tutte le curve C_{n-4+k} aggiunte alla sezione di F, e così grande ancora che sia $M_k - N_k = M_h - N_h = P_h$; si designi con $\varDelta_k$ ($k = h, h+1 \ldots$) la deficienza del sistema di curve segate dalle φ_{n-4+k} sul piano stesso: allora si ha

$$M_{h+1} = N_{h+1} + P_h + \varDelta_{h+1}.$$

da cui

$$\varDelta_{h+1} = 0,$$

ed analogamente $\varDelta_{h+2} = 0$ ecc. c. d. d.

Più tardi (§ 40) sarà data la determinazione di un intero h al di là del quale avvenga il fatto menzionato ($\varDelta_k = 0$): intanto preme rilevare sotto altra forma il significato dell'osservazione precedente.

Suppongasi di aver preso $r > h$, e di voler calcolare il numero delle superficie $\varphi_{n-4+(r+1)}$ aggiunte ad F, dato il numero delle φ_{n-4+r}: si osserverà per questo che le φ_{n-4+r} aumentate d'un piano fisso α costituiscono $\varphi_{n-4+(r+1)}$; ora per staccare il piano α dal sistema delle $\varphi_{n-4(r+1)}$ bisogna scegliere *una* tra le $C_{n-4+(r+1)}$ sezioni su α delle $\varphi_{n-4+(r+1)}$ e imporre successivamente alle $\varphi_{n-4+(r+1)}$ che passano per essa di contenere ancora un altro punto di α; ciò (stantechè le $\varphi_{n-4+(r+1)}$ segano su α il sistema di tutte le curve aggiunte alla sezione di F) porta ad imporre alle $\varphi_{n-4+(r+1)}$

$$\pi + r\,n + \frac{r(r-3)}{2}$$

condizioni, essendo π il genere delle sezioni piane di F.

Si può dunque affermare che:

I numeri N_{n-4+r} esprimenti le dimensioni dei sistemi di superficie φ_{n-4+r} aggiunte ad una data d'ordine n, a sezioni di genere π (non rigata), formano al di là d'un certo valore per r una progressione aritmetica di terzo ordine che ha per ragione

$$\pi + r\,n + \frac{r(r-3)}{2}.$$

Se si immagina questa progressione prolungata anche al di sotto del detto valore di r, i termini di essa ci daranno dei valori che chiameremo le dimensioni *virtuali* dei sistemi di φ_{n-4+r}: è chiaro che questi valori non possono superare gli *effettivi* per $r \geq 0$, giacchè in questo caso il sistema segato su α dalle $\varphi_{n-4+(r+1)}$ può bensì non essere normale ed avere quindi una dimensione minore di

$$\pi - 1 + r\,n + \frac{r(r-3)}{2}$$

ma mai avere una dimensione maggiore.

La progressione aritmetica di terzo ordine di cui i termini esprimono le dimensioni virtuali dei sistemi di φ_{n-4+r}, riesce determinata appena se ne è calcolato un termine; basta per ciò avere il numero delle φ_{n-4+r} per r assai alto. Ciò vien dato, nel caso che F abbia singolarità ordinarie, dalle formole di postulazione del sig. Noether [1]. Il sig. Castelnuovo [2] ha osservato appunto che queste formule di postulazione possono esprimersi nel modo semplice detto sopra; sotto questa forma esse risultano ora estese a tutti i casi, indipendentemente da ogni restrizione per le singolarità di F.

Una ultima osservazione riguarda l'interpretazione invariantiva del resultato precedente.

Sia $|C|$ il sistema normale delle sezioni piane di F e quindi $|rC|$ il sistema normale cui appartengono le sezioni di F colle superficie d'ordine $r (>1)$.

Si indichi con $\delta(rC)$ la deficienza (≥ 0) della serie dei gruppi canonici segata sopra una curva generica di $|rC|$ dal sistema $|(rC)_a|$, ossia dalle φ_{n-4+r} aggiunte ad F: e si denoti con π_r il genere di $|rC|$, di guisachè la dimensione della serie segata dalle φ_{n-4+r} sulla curva generica di $|rC|$ valga

$$\pi_r - 1 - \delta(rC).$$

Ciò posto calcoliamo la dimensione N_{n-4+r} del sistema delle φ_{n-4+r}. Poichè per ogni curva sezione di una φ_{n-4+r} con F passano (per $r \geq 4$) $\infty^{\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6}}$ φ_{n-4+r}, e poichè per ogni gruppo sezione di una di tali curve con una curva di $|rC|$ passano $\infty^{N_{n-4+1}}$ curve tra quelle, si avrà

$$N_{n-4+r} = N_{n-4} + \pi_r - \delta(rC) + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6},$$

da cui (mutando r in $r+1$ e sottraendo)

$$N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r} = \pi_{r+1} - \pi_r - \delta\big((r+1)C\big) + \delta(rC) + \frac{r(r-3)}{2} + 1:$$

d'altronde se $\pi_1 = \pi$ è il genere delle sezioni piane di F si ha (§ 16)

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \pi + rn - 1;$$

dunque

$$N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r} = \pi + rn - \delta\big((r+1)C\big) + \delta(rC) + \frac{r(r-3)}{2}.$$

D'altra parte si è visto prima che $N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r}$ per r assai alto vale $\pi + rn + \frac{r(r-3)}{2}$: segue dunque che per r assai alto dovrà aversi

$$\delta\big((r+1)C\big) = \delta(rC).$$

Invece per valori inferiori (≥ 0) di r, $\delta(rC)$ (di sua natura positivo) è cre-

[1] Annali di Matematica, serie 2ª, t. V. Alcuni casi di queste formule erano stati trattati innanzi dal sig. Cayley.

[2] « *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* ». Rendic. Circolo Matematico di Palermo, t. IV.

scente perchè per $r > 0$ il sistema segato sopra un piano dalle φ_{n-3+r} $(r \geq 0)$ può essere incompleto ma non sovrabbondante, e quindi è sempre

$$N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r} \leq \pi + rn + \frac{r(r-3)}{2}$$

onde

$$\delta(rC) - \delta((r+1)C) \leq 0:$$

segue che il detto $\delta(rC)$ al crescere di r ammette un massimo.

Dunque si può enunciare il teorema:

Sopra un ente algebrico ∞^2 *si abbia un sistema lineare irreducibile semplice* $|C|$, (∞^3 *almeno*) *e s'indichi con* $\delta(rC)$ *la deficienza* (≥ 0) *della serie di gruppi canonici segata sulla curva generica di* $|rC|$ *dal sistema aggiunto* $|(rC)_a|$; *il* $\delta(rC)$ *è una funzione positiva o nulla di* r (*per* $r > 0$) *che non decresce al crescere di* r *e per* r *assai alto ammette un massimo* [1].

Nell'enunciato non figura (come sembrerebbe doversi) l'esclusione del fatto che $|C|$ possegga un fascio di curve unisecanti, perchè se ciò accade per $|C|$ non accadrà per $|2C|$, e mediante il teorema fondamentale la proprietà stabilita per $|2rC|$ si estende a $|(2r-1)C|$. D'altronde questa estensione rientrerebbe come corollario nel teorema del § 41.

Osservazione. Se immaginiamo di calcolare col procedimento seguito innanzi il numero N_{n-4+r} delle φ_{n-4+r} aggiunte ad F $(r > 0)$ partendo dal numero supposto noto $N_{n-4+(r-1)}$, e invece di supporre completo il sistema segato sopra un piano dalle φ_{n-4+r} ne indichiamo con ω_r la deficienza troviamo

$$N_{n-4+r} = N_{n-4+(r-1)} + \pi + (r-1)n + \frac{(r-1)(r-4)}{2} - \omega_r$$

da cui (facendo percorrere ad r la serie dei numeri interi da r a zero e sommando le successive uguaglianze)

$$N_{n-4+r} = N_{n-4} + \pi_r + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6} - \sum_1^{r-1} \omega_i$$

onde

$$\delta(rC) = \sum_1^{r-1} \omega_i$$

Le ω_i da un certo punto in poi divengono tutte nulle (appena $\delta(rC)$ ha toccato il suo massimo); quindi si ha:

Il massimo di $\delta(rC)$ *è uguale alla somma delle deficienze delle serie segate sulla curva generica* C *dai sistemi aggiunti a* $|C|$ *di tutti i ranghi* 0, 1, 2, ...

Ciò vale per ogni sistema semplice $|C|$; anche se questo possiede un fascio di unisecanti come si vede dando al ragionamento precedente la forma invariantiva.

[1] La questione dell'esistenza di questo massimo di δ (rC) mi si era presentata nelle « *Ricerche* » III, 2); io l'avevo ricondotta alle formule di postulazione di NOETHER che dànno il numero delle superficie aggiunte ad una data di S_3, onde essa era risoluta affermativamente solo con restrizioni relative alle singolarità della superficie.

VI.

Caratteri invariantivi d'una superficie.

38. *Curve canoniche e genere geometrico superficiale.*

La considerazione del sistema aggiunto ad un sistema lineare sopra un ente algebrico ∞^2, ed il relativo teorema fondamentale del § 27 conduce (come applicazione immediata) a stabilire tutti i caratteri invariantivi generalmente considerati per le superficie ed a trovarne dei nuovi.

È ciò che quì vogliamo mostrare. Riferiamoci ad una superficie F senza singolarità, immagine dell'ente.

Sieno $|C'||C''|$ due diversi sistemi lineari (irreducibili ∞' almeno): denotando al solito con $|C_a'||C_a''|$ i loro sistemi aggiunti (dove i simboli avranno un significato se questi sistemi esistono), e denotando con χ_1 il gruppo dei punti base per $|C'|$ e non per $|C''|$ (contati ciascuno una volta) e similmente con χ_2 il gruppo dei punti base per $|C''|$ e non per $|C'|$, si ha (ragionando nell'ipotesi che i simboli abbiano significato) a cagione del teorema fondamentale

$$|C' + C_a'' + \chi_1| = |C'' + C_a' + \chi_2|,$$

giacchè questi due sistemi coincidono ambedue col sistema $|(C' + C'')_a|$ aggiunto a $|C' + C''|$. Dalla relazione precedente si ricava la relazione simbolica

$$|C_a' - C' - \chi_1| = |C_a'' - C'' - \chi_2|,$$

la quale avrà un significato effettivo se uno dei simboli dei due membri (e per conseguenza l'altro) avrà significato; vale a dire se p. e. $|C_a'|$ contiene $|C'|$, giacchè in tale ipotesi nel residuo $|C_a' - C'|$ comparisce come parte fissa il gruppo di punti χ_1 (giacchè uno di questi punti iplo per $|C'|$ è $(i-1)$plo per $|C'_a|$). Allora anche $|C''|$ sarà contenuto in $|C_a''|$.

Il resultato ottenuto può essere enunciato riferendosi all'ente algebrico. È vero che mutando la superficie F scelta come immagine di esso, la definizione dei sistemi aggiunti $|C_a'|\,|C_a''|$ potrà mutare, ma la variazione porta soltanto a sommare o togliere contemporaneamente a $|C_a'|\,|C_a''|$ delle parti fisse (curve eccezionali o punti di F) date da punti dell'ente non base risp. per $|C'|\,|C''|$.

Si può dunque dire che se, sull'ente, $|C_a|$ contiene $|C'|$ (e l'indeterminazione di $|C_a'|$ non fa nulla a questo riguardo), anche $|C_a''|$ conterrà $|C''|$ ed i sistemi residui $|C_a' - C''|\,|C_a'' - C''|$ differiranno soltanto per parti fisse « punti dell'ente che sieno base per l'uno dei due sistemi $|C'|\,|C''|$ e non per l'altro ».

Si può anche aggiungere che in $|C_a' - C'|$ sono certo contenuti come parti fisse tutti i punti base di $|C'|$ sull'ente (e forse altri punti non base): questi punti sono dunque in numero finito.

Concludiamo:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 un sistema lineare irreducibile (∞^1 *almeno*) *è contenuto nel proprio sistema aggiunto, ogni altro sistema lineare irreducibile* *è contenuto nel suo aggiunto, ed ogni sistema ha rispetto al proprio aggiunto un sistema residuo (di dimensione* ≥ 0) *che spogliato dei punti fissi che entrano in esso come componenti, è indipendente dal sistema di partenza. Ogni sistema lineare irreducibile ha in questo caso (al più) un numero finito di punti base sull'ente e questi entrano come parte fissa a comporre le curve residue del sistema rispetto all'aggiunto.*

Una curva residua d'un sistema lineare irreducibile $|C|$ rispetto al sistema aggiunto $|C_a|$, spogliata dei punti base di $|C|$ e degli eventuali punti non base per $|C|$ e per $|C_a|$ che (sopra una superficie immagine) costituissero parti fisse di $|C_a|$, costituisce una *curva canonica* dell'ente algebrico: l'esistenza di una tal curva non dipende dalla scelta del particolare sistema $|C|$ sull'ente, ma dalla natura dell'ente stesso. Si ha infatti la proprietà caratteristica:

Una curva canonica di un ente algebrico ∞^2 F, *sommata agli eventuali punti base d'un sistema lineare* $|C|$ (*irreducibile* ∞^1 *almeno*) *costituisce una curva residua di* $|C|$ *rispetto al sistema aggiunto* $|C_a|$.

Per conseguenza:

Una curva canonica su F *sega sulla curva generica d'ogni sistema irreducibile* (∞^1 *almeno*) $|C|$ *un gruppo speciale residuo della serie caratteristica di* $|C|$ *e dei punti base di* $|C|$ *sull'ente* (¹).

« *Viceversa tale proprietà verificata rispetto ad un particolare sistema* $|C|$ *irreducibile semplice, non possedente un fascio di unisecanti, e dotato soltanto di curve fondamentali apparenti basta a caratterizzare una curva canonica sull'ente* F (²) (*a meno di parti fisse eccezionali*).

Più generalmente se $|C|$ *è su* F *un sistema irreduttibile semplice non possedente un fascio di unisecanti, e dotato di curve fondamentali proprie distinte, una curva canonica su* F *ha le segueuti proprietà caratteristiche*:

1°) *se ogni curva generica* C *in un gruppo residuo della serie caratteristica di* $|C|$ *e dei punti base di* $|C|$;

2°) *gode dell'analoga proprietà rispetto ad ogni sistema residuo d'una curva fondamentale propria rispetto a* $|C|$.

Effettivamente se K è una tal curva $K+C$ è una curva aggiunta a $|C|$ (§ 39).

Corollario. Una superficie a sezioni non speciali non possiede curve canoniche.

Infine se si prende come immagine dell'ente algebrico una superficie F_n d'ordine n in S_3 e ci si riferisce al sistema delle sue sezioni piane, si ha che una curva conica su F_n aumentata delle curve eccezionali su F_n e di una sezione piana deve esser sezione fuori della curva multipla d'una φ_{n-3} aggiunta; dunque:

Sopra una superficie F_n *d'ordine* n *in* S_3 *le curve canoniche* (*se esistono*)

(¹) Come serie residua d'un punto iplo o di una curva C rispetto ad una serie data, intendiamo quella ottenuta staccando gli i punti costituenti l'intorno di O su C.

(²) La condizione che $|C|$ sia semplice è superflua; non così quella che non vi sia su F un fascio di unisecanti le C. Si vede infatti che sopra una rigata non può esistere alcuna curva canonica stante la possibilità di trasformare la rigata in una rigata a sezioni non speciali: ma presa una rigata F a sezioni speciali senza punti multipli isolati vi sono sempre gruppi di generatrici che rispetto al sistema $|C|$ delle sezioni piane (o iperpiane) di F si troverebbero nelle condizioni dell'enunciato.

sono le sezioni di F_n *(fuori delle singolarità e fuori delle curve eccezionali su* F_n*) colle superficie aggiunte* φ_{n-4} *d'ordine* $n-4$*. Viceversa tali sezioni delle* φ_{n-4} *su* F_n *(se esistono) sono curve canoniche.*

Se la F_n è rigata non vi sono mai φ_{n-4} ad essa aggiunte o soltanto subaggiunte, come non vi sono mai curve canoniche sopra di essa.

Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti sopra un ente algebrico ∞^2 F costituisce il *genere geometrico superficiale* p o p_g dell'ente.

Si può dire che $p-1$ è la dimensione del sistema residuo d'un qualunque sistema $|C|$ su F rispetto al proprio aggiunto $|C_a|$.

Sarà dunque $p=0$ se su F nessun sistema $|C|$ è contenuto in $|C_a|$.

Sarà $p=1$ se (uno e quindi) ogni sistema $|C|$ è contenuto in $|C_a|$; vi è allora su F *una* curva canonica che può eventualmente aver l'ordine 0 (cioè mancare); questo 2° caso ha luogo se $|C|$ differisce da $|C_a|$ soltanto per gli eventuali punti base.

Quando $p>1$ vi è su F un sistema lineare *canonico* ∞^{p-1}.

In linea storica relativamente ai resultati esposti in questo §, possiamo dire che:

1°) Il genere delle superficie è stato introdotto da Clebsch (Comptes rendus, 1868), come il numero degli integrali doppi linearmente indipendenti ovunque finiti e continui sulle superficie.

2°) Il sig. Noether (Mathem. Annalen, II, VIII) ha considerato le curve canoniche sopra una superficie d'ordine n in S_3, come sezioni delle superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad essa: di tali curve (che corrispondono ai detti integrali) ha dimostrato algebricamente il carattere invariantivo in una trasformazione della superficie.

3°) Il sig. Noether (Comptes rendus, 1886) e il sig. Castelnuovo (Istituto lombardo, 1891) hanno osservato la proprietà delle curve canoniche sopra una superficie di segare sopra la curva generica d'un sistema (irreducibile) $|C|$ un gruppo contenuto nella serie residua della serie caratteristica di $|C|$.

4°) Tale proprietà, convenientemente precisata, è stata assunta da me come definizione delle curve canoniche sopra una superficie (*Ricerche*, cap. II): il loro carattere invariantivo resta quindi fissato per la natura stessa della loro definizione.

5°) La definizione indiretta data quì delle curve canoniche sopra una superficie a partire da un sistema lineare $|C|$ ha il vantaggio di essere indipendente dalla natura delle curve fondamentali di $|C|$, per le quali non si esige alcuna restrizione.

39. *Curve bicanoniche.*

Conservando le denominazioni poste in principio del precedente §, si considerino sopra il dato ente algebrico ∞^2 e risp. sopra una fissata superficie immagine, i sistemi lineari $|2\,C'|\,|2\,C''|\,|2C'_a|\,2C_a''|$; avremo la relazione simbolica

$$|2\,(C'+C'')_a| = |2\,C'_a+2\,C''+2\,\chi_2| = |2\,C'+2\,C_a''+2\,\chi_1|,$$

da cui segue

$$|\,2\,C_a'-2\,C''-2\,\chi_1\,| = |2\,C_a''-2\,C''-2\,\chi_2\,|.$$

Questa relazione simbolica seguirebbe (moltiplicando per 2) da quella del precedente §; ma potrebbe avvenire che quella non avesse significato e questa sì, ed in questo caso tale modo di deduzione non sarebbe che solamente formale. La precedente relazione ci dice che:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 F, *il doppio di un sistema lineare irreducibile* $|C|$ *è contenuto nel doppio del proprio sistema aggiunto* $|C_a|$, *altrettanto avviene per ogni altro sistema lineare su* F; *e le curve residue di* $|2C|$ *rispetto a* $|2C_a|$ *spogliate dalle loro componenti fisse costituite da punti base per* $|C|$ *o da punti che entrano come parti fisse in* $|C_a|$, *non dipendono dal sistema di partenza* $|C|$.

Queste curve si diranno *curve bicanoniche* sull'ente.

Le curve bicanoniche sopra un ente algebrico ∞^2 *godono della seguente proprietà caratteristica: prese insieme al gruppo dei punti base d'un qualunque sistema lineare irreducibile* $|C|$ (*ogni punto base venendo contato due volte*) *segano sopra la curva generica* C *un gruppo appartenente alla serie residua del doppio della serie caratteristica di* $|C|$ *rispetto al doppio della serie canonica su* C.

Una curva la quale goda di tale proprietà rispetto ad un sistema $|C|$ *semplice, non possedente un fascio di unisecanti, e dotato soltanto di curve fondamentali apparenti, è una curva bicanonica sull'ente* (*a meno di curve eccezionali*) ecc.

Le curve bicanoniche sopra un ente algebrico ∞^2F (se esistono) formano il *sistema lineare bicanonico* di F: il numero P delle curve bicanoniche linearmente indipendenti si chiamerà *bigenere* dell'ente algebrico F: si deve ritenere $P=0$ se nessun sistema $|2C|$ è contenuto in $|2C_a|$ ed invece $P=1$ se (uno e quindi) ogni sistema $|2C|$ è contenuto in $|2C_a|$ e vi è al più una curva residua (di $|2C_a-2C|$), che può anche mancare.

Se F possiede un sistema canonico (ha il genere $p>1$): *il sistema bicanonico è il doppio del sistema canonico.*

Ma la considerazione delle curve bicanoniche sopra un ente algebrico ∞^2, trae la sua effettiva importanza da ciò che:

Il bigenere P *può essere* >0 *e possono anche esservi infinite curve bicanoniche, sopra enti algebrici* ∞^2 *di genere* $p=0$.

Per stabilire questo fatto è sufficiente citare degli esempi.

Un primo esempio di superficie di genere $p=0$, per cui $P=1$ (sulla quale il doppio d'un sistema $|C|$ è contenuto nel doppio del sistema aggiunto a $|C|$), vien dato dalla *superficie* F *del 6° ordine con 6 rette doppie spigoli d'un tetraedro* (*e punti tripli nei vertici*) (¹); essa ha le sezioni non speciali, quindi certo il sistema aggiunto a quello $|C|$ delle sezioni piane (segato dalle superficie cubiche per gli spigoli del tetraedro) non contiene $|C|$ ed è $p=0$; invece il doppio di tale sistema aggiunto, segato su F dalle superficie del 6° ordine aventi come rette doppie gli spigoli dello stesso tetraedro, e segato ugualmente su F da tutte le quadriche, coincide col sistema $|2C|$: pertanto il numero P delle curve bicanoniche linearmente indipendenti deve considerarsi per questa superficie come uguale ad 1.

Sulla superficie nominata non si hanno però curve bicanoniche propriamente dette. Sotto questo aspetto riesce più luminoso il seguente esempio (comunicatomi dal sig. CASTELNUOVO):

(¹) Tale è la superficie

$$\varphi\,(x_1x_2x_3\,,\,x_1x_2x_4\,,\,x_1x_3x_4\,,\,x_2x_3x_4)+x_1x_2x_3x_4f(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,x_4)=0$$

dove $\varphi\,f$ sono forme quadratiche risp. nei prodotti $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$, $x_2x_3x_4$ e nelle $x_1, x_2, x_3\, x_4$.

Una superficie F^7 *del* 7^o *ordine passante tre volte per una retta* a *e due volte per una conica* c *(retta e conica senza punti comuni) avente inoltre 3 tacnodi* A, B, C *i cui piani tacnodali passano per* a *è di genere* 0 *e possiede come curve bicanoniche le quartiche ellittiche segate dai piani per* a.

Oltre al caso delle superficie di genere 0 le curve bicanoniche possono riuscire utili anche nello studio di superficie di genere < 0, ad es. quando esse si presentano in numero infinito sopra superficie di genere 1. La possibilità della cosa è provata dal seguente esempio: *Una superficie del* 5^o *ardine* F^5 *con 3 tacnodi siffatti che il loro piano seghi* F^5 *secondo una conica ed una cubica che si toccano in essi, ha il genere 1 e possiede un fascio di curve bicanoniche sezioni delle quadriche passanti per la conica e tangenti ai piani tacnodali.*

Infine ci si può domandare come si possono ottenere le curve bicanoniche sopra una superficie F_n di un certo ordine n in S_3.

La risposta più semplice si ha nel caso in cui F_n è dotata soltanto di punti multipli isolati *apparenti* e di curva doppia: in questo caso le superficie subaggiunte ad F sono anche aggiunte.

Possiamo supporre senza restrizione $n \geq 5$.

Una curva bicanonica λ sommata a curve eccezionali su F_n il cui complesso denoteremo con χ, e sommata all'intorno K della curva doppia di F_n, costituisce una curva $\lambda + \chi + K$ la quale presa insieme alla sezione ϱ di F_n con una quadrica incontra una sezione piana di F_n (di genere π) secondo un gruppo appartenente alla serie somma del doppio della serie canonica e degli intorni dei punti doppi; vale a dire che $\lambda + \chi + K + \varrho$ incontra una sezione piana di F_n secondo un gruppo della serie $g_{2\pi - 2 + n(n-3)}$ segata (fuori dei punti doppi) dalle curve aggiunte d'ordine $2n - 6$; in conseguenza la $\lambda + \chi + K$ incontra la detta sezione piana secondo un gruppo della serie segata dalle curve aggiunte di ordine $2n - 8$, ossia la detta $\lambda + \chi + K$ è una curva subaggiunta su F_n. Segue (§ 20) che K è sezione di F_n con una superficie φ_{2n-8} (subaggiunta ossia) aggiunta ad F_n d'ordine $2n - 8$: ma di questa sezione fa parte l'intorno K della curva doppia di F_n, quindi la C_{2n-8} ha la detta curva come doppia, e la $\lambda + \chi$ è la residua intersezione della F_n colla C_{2n-3} tolta la curva doppia contata 4 volte.

Così resta provato che ogni curva bicanonica su F_n è sezione (parziale) di F_n con una superficie φ_{2n-8} avente come doppia la curva doppia di F_n.

Più in generale si prova analogamente che: *Sopra una superficie* F_n *d'ordine* $n (\geq 5)$ *in* S_3 *le curve bicanoniche supposte esistenti vengono segate da superficie (d'ordine* $2n - 8$*) che possono dirsi superficie biaggiunte ad* F: queste si comportano in un modo determinato (1) relativamente alla singolarità di F_n. *Se* F_n *ha soltanto curva doppia e punti multipli isolati apparenti, le superficie biaggiunte ad essa d'ordine* $2n - 8$ *sono quelle che passano doppiamente per la curva doppia di* F_n.

(1) Una curva ipla di F_n è in generale ipla per le superficie biaggiunte, le quali hanno inoltre lungo essa un tale contatto con F_n da segare la F_n come superficie che avessero la curva come $(2i - 1)$pla, ecc.

Alle sezioni di tali superficie biaggiunte (spogliate delle componenti eccezionali) compete dunque il carattere invariantivo nelle trasformazioni birazionali della superficie.

Osservazione. Il concetto che conduce alla considerazione delle curve bicanoniche darebbe luogo ad una considerazione analoga di curve *pluricanoniche* o r *canoniche* $(r > 2)$: di queste curve ne esistono sempre (risp. per qualunque valore di r o per r pari) sopra enti algebrici dotati di curve canoniche e bicanoniche; tali sono infatti le curve composte d'un certo numero di curve canoniche o bicanoniche. Però è dubbio se all'infuori di questo caso (cioè sopra enti algebrici privi di curve bicanoniche) si possono avere curve pluricanoniche, ed è questa circostanza che renderebbe specialmente fruttuosa la considerazione delle curve pluricanoniche.

40. *Genere numerico.* Sopra un ente algebrico, e sopra una superficie immagine F (a cui ci riferiamo), si abbiano due sistemi lineari $|C|\,|C_1|$ (irreducibili ∞^1 almeno), il primo contenente il secondo. Sia p il genere geometrico di F, π, π_1 i generi di $|C|$, $|C_1|$: le dimensioni dei due sistemi aggiunti risp. a $|C|$ $|C_1|$ (pel § 39) valgono $p + \pi = 1 - \omega$, $p + \pi_1 - 1 - \omega_1$ dove

$$\omega \geq 0 \qquad \omega_1 \geq 0:$$

dico che

$$\omega \geq \omega_1$$

Sia C_2 una curva residua di $|C_1|$ rispetto a $|C|$, di genere virtuale π_2, ed $n > 0$ denoti il numero dei punti comuni ad una C_1 e ad una C_2 che sono punti di connessione per $C_1 + C_2$ in $|C|$. Potrà darsi che $|C_1|$ non sia tutto il residuo di C_2 rispetto a $|C|$, se $|C_1|$ possiede dei punti base (ipli) non base per $|C|$: allora il genere virtuale delle C_1 considerate come curve residue di C_1 rispetto a $|C|$ vale

$$\pi_1 + \sum \frac{i(i-1)}{2},$$

e si ha

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \sum \frac{i(i-1)}{2} + n - 1\,.$$

Comunque $|C_1|$ viene dedotto da $|C|$ staccando C_1 e imponendo i nominati punti base ipli alle curve residue. Allora il sistema aggiunto a $|C_1|$ si deduce dall'aggiunto a $|C|$ staccando C_2 e imponendo come $(i-1)$plo alle curve residue ciascuno dei nominati punti base ipli per $|C_1|$: le condizioni così imposte possono non essere tutte indipendenti, ed allora la dimensione del sistema aggiunto a $|C_1|$ risulta maggiore di quella calcolata nell'ipotesi opposta; pel nostro scopo dunque il supporre tutte indipendenti le nominate condizioni equivale a porci nel caso più sfavorevole. Ora ciascun punto base iplo per $|C_1|$ non base per $|C|$, impone alle curve residue di C_2 rispetto all'aggiunto a $|C|$ che debbono essere aggiunte a $|C_1|$ (e però debbono averlo come $(i-1)$plo), $\frac{i(i-1)}{2}$ condizioni: pel nostro scopo occorre dunque mostrare che la C_2 presenta alle curve aggiunte a $|C|$ che debbono contenerla un numero di condizioni

$$\leqq \pi_2 + n - 1 .$$

Ora così accade effettivamente.

Per cominciare dal caso più semplice supponiamo che C_2 sia irreducibile ed il suo genere virtuale π_2 sia uguale al suo genere effettivo; la serie segata su C_2 dal sistema aggiunto a $|C|$ è non speciale di grado $2\pi_2 - 2 + n$, poichè le aggiunte a $|C|$ segano una $C_1 + C_2$ in $2\pi - 2 = 2\left(\pi_1 + \pi_2 + \sum \frac{i(i-1)}{2} + n - 1\right) - 2$ punti e segano C_1 in $2\left(\pi_1 + \sum \frac{i(i-1)}{2}\right) + n - 2$ punti; essa ha quindi la dimensione

$$\pi_2 - 2 + n - \theta \qquad (\theta \geqq 0),$$

e però il numero delle condizioni presentate da C_2 alle curve aggiunte a $|C|$ è appunto $\leqq \pi_2 + n - 1$.

Supponiamo invece che C_2 pur essendo irreducibile su F possiede delle ipermolteplicità di guisachè il suo genere effettivo π_2' sia $< \pi_2$: ciò dipende dall'esistenza di qualche punto $(j+i)$plo per la C_2 $(j+i>1,\ i>0,\ j \geqq 0)$, $s$plo per $|C_1|$ $(s \geqq 0)$ ed $(s+j)$plo per $|C|$. In un punto siffatto imponiamo alle curve aggiunte a $|C|$ di avere la molteplicità $s+j+i-1$ (anzichè $s+j-1$); ciò porta $\frac{1}{2}\left\{(s+j+i-1)(s+j+i-2)-(s+j-1)(s+j-2)\right\}$ condizioni (o meno), cioè tante condizioni quanta è la diminuzione del genere di C_2 dipendente dalla ipermolteplicità (i) che essa ha nel nominato punto: dopo ciò le curve aggiunte a $|C|$ soddisfacenti alle dette condizioni rispetto ad ogni punto ipermultiplo di C_2, segano su C_2 una serie (non speciale) di grado $2\pi_2' - 2 + n$ (essendo π_2' il genere effettivo di C_2), e però C_2 presenta ad esse un numero di condizioni $\leqq \pi_2' + n - 1$: ancora in questo caso dunque la C_2 presenta alle curve aggiunte a $|C|$ che debbono contenerla un numero di condizioni

$$\leqq \pi_2 + n - 1 .$$

Allo stesso resultato si perviene se C_2 si spezza in più curve: riferiamoci per semplicità al caso in cui C_2 si compone di due curve irreducibili $C_2'\,C_2''$ (che possono anche coincidere) di generi virtuali risp. $\pi_2'\,\pi_2''$ con i $(\geqq 0)$ punti di connessione: l'estensione al caso generale non presenterebbe nuove difficoltà. Si indichino con n', n'' risp. i punti comuni (di connessione in $|C|$) a C_2', C_1 ed a C_2'', C_1; avremo $n = n_1' + n_1''$. Il ragionamento del § 20 ci dice che le curve aggiunte a $|C|$ segano su $C_2'\,C_2''$ due serie risp. di grado $2\pi_2' - 2 + n' + i$, $2\pi_2'' - 2 + n'' + i$.

La C_2' presenta dunque a tali curve aggiunte un numero di condizioni

$$\leqq \pi_2' + n' + i - 1 ,$$

e ciò (per le considerazioni precedenti) può affermarsi anche nel caso che essa abbia un genere effettivo $< \pi_2'$. Staccata la C_2' dal sistema aggiunto a $|C|$, il sistema residuo (ove la C_2'' non se ne stacchi di conseguenza) sega su C_2'' una serie di grado $2\pi_2'' + n'' - 2$ e però presenta a tale sistema residuo un numero di condizioni

$$\leq \pi_2'' + n'' - 1\,;$$

la $C_2 = C_2' + C_2''$ presenta dunque alle curve aggiunte a $|C|$ che debbono contenerla

$$\pi_2 + n - 1 = \pi_2' + \pi_2'' + i - 1 + n' + n'' - 1$$

condizioni, o meno.

Pertanto rimane stabilito il *lemma*. *Sieno* $|C|$ $|C_1|$ *due sistemi lineari irreducibili* (∞^1 *almeno) sopra un ente algebrico, e si indichino con* $\delta(C)$ $\delta(C_1)$ *le deficienze delle serie segate su una* C *o su una* C_1 *generica dai risp. sistemi aggiunti a* $|C|$, $|C_1|$: *se* $|C|$ *contiene* $|C_1|$ *si ha*

$$\delta(C) \geq \delta(C_1)\,.$$

Ora se anche $|C_1|$ non è contenuto in $|C|$ e $|C|$ è un sistema semplice potrà sempre prendersi r così grande che $|C_1|$ sia contenuto in $|rC|$: allora sarà

$$\delta(C_1) \leq \delta(rC)\,.$$

D'altronde si è visto nel § 38 che il $\delta(rC)$ per r assai grande assume un valore massimo costante (cioè indipendente da r) k: *il massimo* k *rappresenta dunque la massima deficienza della serie segata sopra la curva generica d'un qualsiasi sistema lineare (irreducibile* ∞^1 *almeno) dal sistema aggiunto, e questo massimo è raggiunto in corrispondenza ad un multiplo assai elevato di ogni sistema lineare semplice (irreducibile* ∞^3 *almeno) sull'ente algebrico.*

Porremo $k = p_g - p_n$ (≥ 0) e p_n si dirà *il genere numerico o aritmetico (superficiale) dell'ente algebrico. Il carattere* $k = p_g - p_n$ *di un ente algebrico si può anche definire come la somma delle deficienze delle serie segate sulla curva generica d'ogni sistema irreducibile semplice dei sistemi aggiunti di tutti i ranghi* ≥ 0 (cfr. § 37).

Il genere numerico di un ente algebrico è il numero virtuale delle sue curve canoniche linearmente indipendenti, ossia il numero virtuale delle superficie d'ordine $n - 4$ *(linearmente indipendenti) aggiunte ad una superficie d'ordine* n *in* S_3 *immagine dell'ente algebrico* (numero calcolato secondo le formole di postulazione del § 37).

A questo numero $p_n \leq p_g$ *compete, dunque, il carattere invariantivo nelle trasformazioni birazionali della superficie.*

Ciò fu stabilito dai sig. ZEUTHEN (1) e NOETHER (2) limitandosi però a trasformazioni dalle quali non nascano singolarità straordinarie della superficie. Nelle mie « *Ricerche* » (III, 2) ho notato (per $p_g > 0$) il significato funzionale del detto numero (relativo al sistema aggiunto), da cui apparisce il legame fra questo carattere ed il

(1) Mathem. Annalen, III.
(2) Mathem. Annalen, VIII.

genere geometrico. Concepii fin d'allora (come appare da una nota) il disegno di stabilire sotto il nuovo punto di vista l'invariantività del genere numerico per *tutti* i casi. Ma non ero ancora riuscito a liberarmi del tutto dalle formule di postulazione calcolate in base alle singolarità della superficie, ciò che quì è ottenuto cogli sviluppi del § 37; e d'altra parte non possedendo il teorema fondamentale non potevo prescindere dall'ipotesi $p_g > 0$. Mi limitai per ciò ad esaminare (per $p_g > 0$) quando si abbia $p_g = p_n$, ed il resultato si estenderebbe anche qui al caso $p_g = 0$, e si potrebbe enunciare dicendo che « per un sistema semplice privo d'un fascio di unisecanti è

$$\delta(rC) = 0 \qquad (r > 0)$$

se

$$\delta(2C) = 0 \text{ ».}$$

Ma il signor Castelnuovo è riuscito a fare un passo di più, mostrando che basta sapere che $\delta(C) = 0$ per concludere $\delta(rC) \geq 0$; quindi nella sua Memoria (1) si vedrà stabilito il teorema:

Un ente algebrico ∞^2 *ha i due generi superficiali uguali se sopra di esso vi è un sistema lineare irreducibile semplice* $|C|$ *tale che il sistema aggiunto* $|C_a|$ *seghi sulla curva generica* C *la serie canonica completa.*

Osservazione. Applicando la definizione posta innanzi all'ente algebrico razionale si trova $p_g = p_n = 0$.

Se si applica la stessa definizione all'ente rappresentabile con una rigata di genere p, si ha

$$p_g = 0 \qquad p_n = -p\,.$$

Infatti una rigata d'ordine n in S_3 non possiede superficie aggiunte d'ordine $n-3$, mentre le superficie aggiunte ad essa d'ordine $n-3+r$ $(r>0)$ segano sopra un piano generico il sistema di *tutte* le curve d'ordine $n-3+r$ aggiunte alla sezione piana della rigata (§ 32).

A questo proposito cfr. Cayley, « *On the deficiency of certain surfaces* » (2).

41. *Genere lineare.*

Se per un ente algebrico ∞^2 il genere geometrico vale

$$p_g > 0\,,$$

resta definito un carattere $(p^{(1)})$ dell' ente che è il genere del sistema canonico (tranne se, per $p_g = 1$, mancano curve canoniche propriamente dette): questo carattere si dirà il *genere lineare* (Curwengeschlecht) dell'ente. Per $p_g > 1$ si ha anche un altro carattere dell'ente, cioè il grado $p^{(2)}$ del sistema canonico intendendo di considerare il grado virtuale ove il sirtema canonico sia riducibile (con-

(1) « *Alcuni resultati sui sistemi lineari* » ecc.

(2) Mathem. Annalen, III.

tenendo una parte fissa che può o no essere un punto dell'ente) (¹), sussiste sempre (come dimostreremo) la relazione

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

data dal sig. NOETHER.

Ora ci proponiamo di definire per un ente algebrico, dei caratteri $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ $(= p^{(1)} - 1)$ che abbiano il significato precedente ove esista il sistema canonico, ma che esistano (sotto ipotesi molto late) anche se $p_g = 0$.

La restrizione imposta all'ente algebrico consiste nel supporre che esso ammetta una superficie immagine priva di curve eccezionali, e però ogni sistema lineare (irreducibile) su di esso abbia un numero finito di punti base: questa restrizione è da ritenersi soddisfatta (almeno in generale) se esistono sull'ente curve bicanoniche (o pluricanoniche) e quindi in particolare se $p_g > 0$ (cfr. l'Appendice). Ma per $p_g > 0$ lievi modificazioni al ragionamento darebbero il resultato indipendentemente da ciò.

Data la restrizione di cui sopra prendiamo appunto come immagine dell'ente algebrico una superficie F senza curve eccezionali: ciò che si dice su questa può considerarsi come detto sull'ente algebrico.

Per arrivare più naturalmente al resultato consideriamo dapprima l'ipotesi $p_g > 0$ (dove sia $|K|$ il sistema canonico) e valutiamo il $p^{(1)}$ (genere del sistema canonico). Sieno π, n il genere e il grado d'un sistema irreducibile $|C|$; π_a, n_a gli analoghi caratteri di $|C_a|$ (virtuali se $|C_a|$ è riducibile): sieno $i_1 \dots i_r$ le molteplicità dei punti base $A_1 \dots A_r$ di $|C|$ (su F ossia) sull'ente. Allora dico che si ha

$$\pi_a = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n - r .$$

Invero ciò segue (applicando la formula del § 16 che dà il genere d'una curva spezzata) dalla relazione

$$|C_a| = |C + k + \sum_1^r A_s| ,$$

ove si tenga conto del fatto che una $k + \sum A_s$ sega la C generica in $2\pi - 2 - n$ punti (§ 39).

Ciò posto si ricava pel genere lineare dell'ente il valore

$$p^{(1)} = \pi_a - 3(\pi - 1) + n + r , \tag{1}$$

calcolato in base ai caratteri di $|C|$ e di $|C_a|$.

In modo simile (per $p_g > 1$) denotando con $p^{(2)}$ il grado (virtuale) del sistema canonico, si ha (essendo $|C_a| = |C + k + \sum A_s|$)

$$n_a = p^{(2)} + 4(\pi - 1) - n + r$$

(¹) Effettivi esempi provano che non è sempre possibile trasformare in un punto semplice una curva d'una superficie d'ordine n in S_3 comune a tutte le superficie aggiunte φ_{n-4}, ciò che si riteneva generalmente supponendo l'invertibilità delle formule della memoria del sig. NOETHER (Math. Ann. VIII). Basta p. e. pensare alla superficie F^5 del 5° ordine con 3 tacnodi che dal piano di essi venga segata secondo una cubica ed una conica che si toccano in essi: questa F^5 ha i caratteri $p_g = 1$, $p^{(1)} = 1$. (Esempio suggeritomi dal sig. CASTELNUOVO).

da cui

(2) $$p^{(2)} = n_a - 4(\pi - 1) + n - r\,.$$

Dimostriamo ora indipendentemente dal significato di $p^{(1)}\,p^{(2)}$ relativo all'ipotesi $p_g > 1$, l'invariantività dei secondi membri nelle formule (1) (2); dimostriamo cioè che essi danno per $p^{(1)}\,p^{(2)}$ valori indipendenti dal particolare sistema $|C|$ scelto su F.

Per questo si consideri su F un altro sistema irreducibile $|C'|$ e si denotino per esso con $\pi'\ n'\ \pi_a'\ n_a'$ le quantità analoghe a $\pi\ n\ \pi_a\ n_a$; sia r' il numero dei punti base di $|C'|$ sull'ente (che per le ipotesi poste innanzi è finito).

Si vuol stabilire che

$$\pi_a - 3(\pi - 1) + n + r = \pi_a' - 3(\pi' - 1) + n' + r'$$
$$n_a - 4(\pi - 1) + n + r = n_a' - 4(\pi' - 1) + n' + r'\,.$$

Supponiamo per generalità che vi sia un certo numero σ di punti base comuni a $|C|\ |C'|$.

Essendo $A_1 \ldots A_{r-\sigma}$ i punti base per $|C|$ e non per $|C'|$, e $B_1 \ldots B_{r-\sigma}$ i punti base per $|C'|$ e non per $|C|$, abbiamo

$$|C + C_a' + A_1 + \cdots + A_{r-\sigma}| = |C' + C_a + B_1 + \cdots + B_{r-\sigma}| = |(C + C')_a|.$$

Si denoti con

δ il numero delle intersezioni di una C con una C'_a;

δ' il numero delle intersezioni di una C' con una C_a;

h il numero delle intersezioni di una C con una C';

i la somma delle molteplicità dei punti A per $|C|$;

i' la somma (analoga) delle molteplicità dei punti B per $|C'|$.

Il genere di $|C + C'_a + A_1 + \cdots + A_{r-\sigma}|$ vale

$$\pi + \pi_a' + \delta - 1 + i - (r - \sigma)$$

invece il genere di $|C'_a + C_a + B_1 + \cdots + B_{r-\sigma}|$ vale

$$\pi' + \pi_a + \delta' - 1 + i' - (r' - \sigma);$$

dunque intanto (sommando σ)

$$\pi + \pi_a' + \delta + i - 1 - r = \pi' + \pi_a + \delta' + i' - r'\,.$$

Analogamente uguagliando i gradi dei due sistemi si ha

$$n + n_a' + 2\delta + 2i - r = n' + n_a + 2\delta' + 2i' - r'$$

D'altra parte la curva di $|(C + C')_a|$ incontra quella di $|C + C'|$ (avente il genere $\pi + \pi' + h - 1$) in $2(\pi + \pi' + h - 2)$ punti: questo numero è anche quello delle intersezioni di una curva di $|C + C'|$ con una curva di $|C + C_a' + A_1 + \cdots + A_{r-\sigma}|$ e però vale anche

$$n + h + 2(\pi' - 1) + \delta + i\,;$$

o analogamente

$$n' + h + 2(\pi - 1) + \delta' + i'\,.$$

Uguagliando questi due numeri si trova

$$n + 2(\pi' - 1) + \delta + i = n' + 2(\pi - 1) + \delta' + i'.$$

Si ricavi di qua il valore della differenza $\delta + i - (\delta' + i')$ e si sostituisca nelle relazioni precedenti, facendo le opportune riduzioni; si deduce allora

$$\pi_a - 3(\pi - 1) + n + r = \pi_a' - 3(\pi' - 1) + n' + r'$$
$$n_a - 4(\pi - 1) + n + r = n_a' - 4(\pi' - 1) + n' + r',$$

appunto c. d. d.

Si può dunque affermare che:

Per un ente algebrico ∞^2 il quale ammetta una superficie immagine senza curve eccezionali restano definiti (dalle formule (1) (2)*) due caratteri $p^{(1)}$ $p^{(2)}$ le cui espressioni vengono formate col genere e col grado d'un qualunque sistema lineare e del suo aggiunto, e col numero dei punti base del sistema dell'ente. Questi caratteri se il genere dell'ente vale $p_g > 1$ (e pel 1° basta $p_g > 0$) sono il genere e il grado (virtuale) del sistema canonico.*

Conserveremo sempre al $p^{(1)}$ il nome di *genere lineare dell'ente.*

Dimostiamo ora che *vale in ogni caso sotto queste ipotesi più generali* (in cui può anche essere $p_g = 0$) *la relazione del sig.* Noether (data per $p_g > 0$)

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

Questa relazione (stante le formole (1) e (2)) equivale alla relazione

$$n_a - \pi_a = \pi - 2 \tag{3}$$

che dimostreremo sussistere sempre fra il grado (virtuale) e il genere del sistema $|C_a|$ aggiunto ad un qualunque sistema irreducibile $|C|$ e il genere π di $|C|$ stesso. *La relazione* (3) *vale anche se sull'ente non sono definiti $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$* (cioè indipendentemente dalle restrizioni precedenti per l'ente) ([2]). Basta stabilirla per un sistema irreducibile $|C|$ siffatto che abbia sull'ente soltanto punti base di molteplicità > 1 e che ammetta un sistema aggiunto irreducibile $|C_a|$ ed un 2° aggiunto $|(C_a)_a| = |C_{2a}|$: si estenderà la relazione ad ogni altro sistema col procedimento che stabilisce le formule (1) e (2) (anche indipendentemente dall'ipotesi che $|C|$ abbia un numero finito di punti base): il ragionamento diretto andrebbe solo lievemente modificato se $|C|$ avesse punti base semplici ecc. Ora nelle dette ipotesi si ha

$$|(C + C_a)_a| = |2\, C_a| = |C + C_{2a}|;$$

quindi il grado di $|2\, C_a|$ può essere valutato in due modi:

1°) determinando le intersezioni di due curve $C_a + C_a$, che sono $4\, n_a$;

2°) determinando le intersezioni di una $C_a + C_a$ con una $C + C_{2a}$ che sono $4(\pi - 1) + 4(\pi_a - 1)$: paragonando segue appunto

$$n_a - \pi_a = \pi - 2 \quad \text{c. d. d.}$$

([2]) Nel piano esso dice che il sistema aggiunto ad ogni sistema lineare è regolare. Cfr. Castelnuovo, « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* » (Acc. di Torino, Memorie, 1891).

Avvertenza. Se per $p_g > 1$ il sistema canonico è riducibile sull'ente (e deve riguardarsi come tale se ha dei punti base sopra una superficie immagine) $p^{(2)}$ è il grado virtuale di esso; prendendo il grado effettivo non varrebbe più la relazione $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$. Si prenda ad es. la superficie del 5° ordine con due tacnodi che ha un fascio di curve canoniche (sezioni piane per i due tacnodi aumentate del punto sezione della loro retta) di genere $p^{(1)} = 2$; il grado effettivo del sistema canonico è $= 0$, mentre quello virtuale è $p^{(2)} = 1$.

APPENDICE

42. *Superficie senza curve eccezionali.*

In tutto il corso del lavoro (tranne nell'ultimo §) non si è imposto agli enti algebrici considerati alcuna restrizione. Per collegare i risultati generali quì ottenuti a quelli delle « *Ricerche* » è opportuno aggiungere questi brevi sviluppi.

Fondamento di molte semplificazioni nello studio di un ente algebrico, è la possibilità di assumeıe come immagine dell'ente stesso una *superficie* F *senza curve eccezionali.*

Conviene quindi esaminare anzitutto quando ciò è possibile.

Vi sono certo delle superficie che non possono essere trasformate in tal guisa: tali sono le superficie con un fascio di curve razionali, (fra cui le superficie razionali, e le rigate).

All'infuori di queste è dubbio se vi sieno altre superficie siffatte.

Qui ci limiteremo a indicare come si possa almeno venire alla persuasione che ogni superficie avente il genere geometrico $p_g > 0$ (o soltanto il bigenere $p > 0$), può trasformarsi in una senza curve eccezionali; e ciò sarà dimostrato rigorosamente per le superficie aventi il genere numerico $p_n = p_g > 0$.

Cominciamo dal notare che una superficie F per cui $p_g > 0$ contiene un numero finito di curve eccezionali (§ 38).

Ora ciascuna di queste può essere trasformata in un punto (semplice per la trasformata F'); ma può domandarsi « nella trasformazione effettuata potrà accadere che qualche punto di F debba necessariamente mutarsi in una curva (eccezionale per F') » ?

Noi ci limiteremo a constatare che « se χ è una curva eccezionale su F, trasformandola in un punto non accadrà che a qualche punto di χ corrisponda una curva eccezionale su F' » : poichè non sembra probabile che nella trasformazione di χ in un punto debba necessariamente mutarsi in curva qualche punto fuori di χ, questa osservazione, una volta stabilita, si può riguardare come una dimostrazione non rigorosa del fatto che la F possa trasformarsi in una superficie F' con una curva eccezionale di meno, e quindi (dopo un numero finito di passaggi) in una superficie senza curve eccezionali.

Stabiliamo la precedente osservazione.

Supponiamo per semplicità che F sia priva di singolarità (in un iperspazio). Sia O un punto qualunque (semplice per F) della curva eccezionale χ, e supponiamo che esso si muti in una curva su F′ dove a χ corrisponde un punto; ciò dimostreremo essere assurdo: indichiamo con $|C|$ il sistema delle sezioni di F′ che avrà su F il punto base O, di una certa molteplicità $i > 0$: siccome χ si muta in un punto su F′, le curve C non hanno colla χ intersezioni variabili. Supponiamo per semplicità che $|C|$ non abbia altri punti base su χ: non farebbe alcuna difficoltà liberarsi da questa ipotesi riferendo a ciascun punto base il ragionamento che si fa per O. Precisando l'operazione di aggiunzione col partire da F consideriamo il sistema $|nC + C_a| = |((n+1)C)_a|$ dove n è assai grande: le curve di questo sistema segano su una C una serie completa (§ 40) e però da esse non si stacca (l'intorno del punto) O: se da esse si stacca la curva χ noi la immagineremo tolta; le curve variabili residue non hanno allora intersezioni variabili con χ giacchè le superficie aggiunte ad F′ (supposta F′ in S_3 dove eventualmente si proietterebbe) non passano per il punto fisso semplice di essa corrispondente a χ (basta considerare le ∞^3 polari rispetto ad F′, che sono particolari superficie aggiunte ad esso).

Abbiamo dunque che le curve di $|nC + C_a|$ su F hanno il punto O come $\{(n+1)i-1\}$plo (al più) e non come punto di molteplicità maggiore, e (private di χ) non hanno intersezioni variabili con essa, ma d'altra parte le curve di $|(n+1)C|$ contenuto in $|nC + C_a|$ (essendo $p_g > 0$) hanno O come punto $\{(n+1)i\}$plo, non contengono χ e non la segano ulteriormente: ciò costituisce manifestamente un assurdo.

Non sarebbe difficile estendere questo ragionamento alle superficie per cui $p_g = 0$ ma il bigenere $P > 0$.

Lasciamo stare questo, e indichiamo invece la dimostrazione rigorosa della trasformabilità di una superficie in una senza curve eccezionali pel caso $p_g = p_n > 0$.

A questa dimostrazione occorre premettere il lemma:

Sopra un ente algebrico avente il genere geometrico uguale al numerico $p_g = p_n > 0$, *il sistema aggiunto ad un sistema lineare irriducibile semplice senza curve fondamentali proprie* (spogliato di eventuali componenti fisse) *è pure esso* (*irriducibile*) *privo di curve fondamentali proprie.*

La dimostrazione del lemma si fa col procedimento adoprato dal sig. Castelnuovo pel caso $p_g = p_n = 0$ (ove però comparisce una eccezione) cfr. la sua Memoria c.

Ora consideriamo una superficie F di S_3, priva di punti multipli isolati, la quale abbia $p_g = p_n > 0$. Le curve C_a aggiunte alle sezioni piane su di essa, non passano tutte per uno stesso punto, altrimenti esse non segherebbero la serie canonica completa sopra una curva C sezione piana di F.

Per la medesima ragione non si stacca dalle C_a una curva fissa eccezionale di F.

Pertanto passando sull'ente dal sistema $|C|$ al sistema aggiunto $|C_a|$, e trascurando in quest'ultimo le eventuali parti fisse, si ha un sistema lineare irriducibile (contenente $|C|$) che ha (al più) come $(i-1)$plo ogni punto base iplo di $|C|$ e non ha nuovi punti base.

Stante il lemma posto innanzi si può applicare al sistema $|C_a|$ così dedotto, il ragionamento applicato a $|C|$: poichè $|C|$ ha un numero finito di punti base dotati di molteplicità finite, il procedimento ricorrente conduce ad un sistema lineare irreducibile (*puro*) privo di punti base sull'ente [1], e la superficie immagine dell'ente avente per sezioni le curve del sistema riesce priva di curve eccezionali.

Dunque è certo che:

Una superficie di genere geometrico uguale al numerico

$$p_g = p_n > 0$$

è trasformabile in una senza curve eccezionali.

Avvertenza. Nelle mie « *Ricerche* » si suppone costantemente la trasformabilità d'una superficie in una senza curve eccezionali (facendosi uso sistematico dei sistemi puri); questa ipotesi non è restrittiva nel campo delle superficie di genere geometrico e numerico $p_g = p_n > 0$ ivi considerate.

Ma si deve avvertire una differenza fra il significato dato quà alla parola « curva eccezionale » e il significato dato alla stessa parola nelle « *Ricerche* ». Noi intendiamo qua col nome di « curva eccezionale » la trasformata di un punto; invece nelle « *Ricerche* » la stessa locuzione denota una « curva appartenente a tutte le superficie (d'ordine $n-4$) aggiunte alla data superficie (d'ordine n in S_3) » (curva « ausgezeichnete » secondo NOETHER).

Il significato dato qui alla locuzione è più restrittivo, cioè (cfr. il § 38) « ogni curva eccezionale è una curva ausgezeichnete » *ma non viceversa*: il sig. NOETHER nel § 9 della sua citata Memoria (*Math. Ann.*, VIII), ha dato le formule di trasformazione di un punto semplice d'una superficie in una curva ausgezeichnete (cfr. le formule I_a I_c), ma queste formule non sono sempre invertibili come si è ritenuto fin qui (cfr. anche la fine del § 10 della sua citata Memoria); a provarlo basta l'esempio, già dato innanzi, delle superficie del 5° ordine con 3 tacnodi ($p_g = p_n = 1$) dove si ha *una* curva canonica (ausgezeichnete) di genere $p^{(1)} = 1$.

Devesi dunque esplicitamente avvertire che il resultato del cap. III, § 6 delle mie « *Ricerche* » concernente la superficie di genere $p_g = p_n = 1$ (cioè l'esistenza d'un sistema puro ∞^{π} di genere π e grado $2\pi - 2$ sulla superficie) si riferisce alle superficie di genere 1, prive di curve canoniche.

Nel seguito delle « *Ricerche* » si ammette, per $p_g = p_n > 1$ l'irreducibilità del sistema canonico; con ciò resta esclusa la possibilità di curve, « ausgezeichnete » non eccezionali.

43. *Sistemi lineari completi rispetto al genere.*

Allorchè un ente algebrico ammette delle superficie immagini prive di curve eccezionali, giova riferirci ad una di queste che sia inoltre priva di singolarità; le curve ed i sistemi lineari dati sull'ente si possono considerare indifferentemente come dati in senso proiettivo su questa superficie: in conseguenza di ciò si ha in molte cose una notevole semplificazione.

In questo caso si può porre accanto alla considerazione dei sistemi lineari completi rispetto al grado (o normali), quella dei sistemi *completi rispetto al genere* o brevemente completi.

Possiamo precisare il loro concetto così.

[1] Questo procedimento si trova già adoperato nelle « *Ricerche*, III ».

Sia F una superficie senza curve eccezionali, priva di singolarità in un certo S_r. Diremo che una curva C′ (data sull'ente) *appartiene* ad un sistema lineare $|C|$ se è contenuta (totalmente o parzialmente) in $|C|$, in guisa che $|C - C'|$ sia un gruppo di punti dell'ente; in altre parole se la C′, proiettivamente considerata su F è contenuta totalmente in $|C|$.

Allora si definirà come *completo rispetto al genere un sistema lineare irriducibile* $|C|$ *non appartenente ad un sistema più ampio di ugual genere.*

E si può stabilire che:

Sopra una superficie F *senza curve eccezionali una curva irriducibile* C *appartiene ad un determinato sistema lineare completo dello stesso genere* (di dimensione ≥ 0).

La dimostrazione del teorema si basa sui lemmi:

a) Sopra la superficie F senza curve eccezionali se una curva irriducibile C di genere π appartiene a due sistemi lineari irreducibili $|C_1|\,|C_2|$ dello stesso genere π, essa appartiene ad un sistema lineare più ampio pure di genere π, che contiene $|C_1|$ e $|C_2|$ (1).

In primo luogo si può supporre senza restrizione che $|C_1|\,|C_2|$ sieno normali (altrimenti si renderebbero tali). Consideriamo su F il sistema lineare

$$|C_1 + C_2 - C|.$$

Poichè C appartiene a $|C_1|\,|C_2|$, questi due sistemi appartengono ambedue a $|C_1 + C_2 - C|$, e (poichè F non ha curve eccezionali) proiettivamente su F le $C_1\,C_2$ sono curve totali di $|C_1 + C_2 - C|$ su F.

Ogni punto multiplo iplo ($i > 1$) di C è base iplo per $|C_1|$ e per $|C_2|$ (cui C appartiene, e che hanno il genere di C); un tal punto è quindi 2 iplo per $|C_1 + C_2|$ e iplo per $|C_1 + C_2 - C|$.

Oltre ai punti multipli di $|C|$, $|C_1|$ potrà avere dei punti base semplici su C comuni anche a $|C_2|$, doppi per $|C_1 + C_2|$ e semplici per $|C_1 + C_2 - C|$, ed infine $|C_1|$ potrà avere su F dei punti base semplici $A_1\,A_2 \ldots$ non base per $|C_2|$, e similmente $|C_2|$ potrà avere dei punti base semplici $B_1\,B_2 \ldots$ non base per $|C_1|$: la C passa pei punti $A_1\,A_2 \ldots B_1\,B_2 \ldots$, quindi $|C_1 + C_2 - C|$ non ha come punti base $A_1\,A_2 \ldots B_1\,B_2$.

Il sistema $|C_1 + C_2 - C|$ differisce da $|C_1|\,|C_2|$ appunto per ciò che questi due sistemi nascono da esso imponendo i punti base $A_1\,A_2 \ldots$ e risp. $B_1\,B_2 \ldots$: poichè questi sono punti semplici, $|C_1 + C_2 - C|$ ha come $|C_1|$, $|C_2|$ e come C il genere π.

Così viene stabilito il lemma.

b) Sopra un ente algebrico che non abbia come immagine una rigata di genere π un sistema lineare irriducibile di genere π ha al massimo la dimensione

(1) Così viene precisato il lemma a pag. 16 (I, 2) delle « *Ricerche* » che non varrebbe invece senza la restrizione quì introdotta: quell'errore è senza conseguenza nel seguito giacchè l'applicazione rimane limitata al caso in cui esso è valido ; così essenzialmente nel teorema del resto (III, 3).

Si avverta che quel lemma non precisato si trova richiamato nell'ultimo § della mia Nota, « *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere* ecc. » (Acc. di Torino 1894) dove ne è fatta l'applicazione *c*): si deve dunque introdurre in quell'enunciato la stessa restrizione che quì figura.

$3\pi + 5$ o 9 (per $\pi = 1$) (massimo raggiunto in corrispondenza agli enti razionali).

Per la dimostrazione cfr. la mia Nota, « *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica* » (Acc. di Torino; Atti, 1894).

c) Sopra una superficie senza curve eccezionali che non può essere una rigata, si abbia una curva irreducibile C di genere π: o essa non appartiene ad alcun sistema lineare (∞^1 almeno) dello stesso genere; o essa appartiene a qualche sistema lineare dello stesso genere: ma in questo 2° caso dati due di quei sistemi cui C appartiene se ne costruisce un altro più ampio dello stesso genere cui C parimente appartiene; l'ampliamento dei sistemi di genere π avendo un limite (*b*) si giunge necessariamente ad *un* sistema completo di genere π cui C appartiene, nel quale sono contenuti tutti gli altri sistemi di genere π cui C appartiene.

Con ciò è dimostrato il teorema.

Corollario proiettivo. Data una superficie trasformabile in una senza curve eccezionali, si cerchi se esiste una superficie di uno spazio più elevato (a sezioni iperpiane dello stesso genere) della quale la prima sia proiezione da punti semplici: con questo procedimento si giunge sempre ad una superficie *proiettivamente determinata* da cui si ottiene la prima come proiezione da punti semplici, e che invece non si ottiene a sua volta similmente da altra.

Osservazione. L'uso dei sistemi completi rispetto al genere in confronto all'uso dei sistemi completi rispetto al grado o normali, si presenta spontaneo per ottenere sistemi determinati da una sola curva, perchè la prima definizione di normalità d'un sistema irriducibile suppone la dimensione del sistema ≥ 1: ma quando il concetto di sistema normale sia convenientemente esteso ai sistemi riducibili (come nel § 11) esso può sostituire in ogni caso senza danno quello di sistema completo, ed offre anzi il vantaggio di essere adoperabile in *tutti* i casi.

44. *Ulteriori sviluppi.*

Nelle « *Ricerche* » (IV, 1) io avevo stabilito che « sopra un ente algebrico di genere $p_g = p_n > 0$ ogni sistema lineare normale o completo ha la serie caratteristica completa *se tale proprietà compete al sistema canonico* (supposto irriducibile) ».

Ora il sig. Castelnuovo dimostra la stessa proprietà indipendentemente da ogni ipotesi pel sistema canonico ed anche per $p_g = p_n = 0$.

In conseguenza di ciò il lettore potrà passare ai cap. IV, V, VI delle « *Ricerche* » (estensione del teorema di Riemann-Roch ecc.) ritenendo che « i resultati ivi ottenuti si possono riferire a tutti gli enti algebrici di genere $p_g = p_n$, pei quali si ha la irriducibilità del sistema canonico ($p_g = p_n > 1$) ove di questo sistema si fa uso »; ed eliminando la restrizione superflua ivi imposta.

INDICE DELLA MEMORIA