Enriques, Federigo

Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **V** (1896), pp. 191-197.

Matematica. — *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

1. Nella teoria delle superficie hanno fondamentale importanza le così dette curve *canoniche* (sezioni della superficie supposta d'ordine n con superficie aggiunte d'ordine $n-4$) possedenti carattere invariantivo rispetto a trasformazioni birazionali.

Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti è il genere (geometrico superficiale) p della superficie, mentre il genere di esse curve ne costituisce il 2° genere o *genere lineare* $p^{(1)}$.

Le superficie ($p>1$, $p^{(1)}=1$) di cui le curve canoniche sono (irriducibili) ellittiche o si spezzano in curve ellittiche (d'un fascio) sono state considerate dal sig. Noether [1]. Nello stesso lavoro il sig. Noether ha dimostrato che le superficie a curve canoniche irriducibili hanno il genere lineare $p^{(1)} \geq 2p-3$, e che il valore minimo $p^{(1)}=2p-3$ si ottiene in corrispondenza alle superficie di cui le curve canoniche sono iperellittiche.

A queste superficie è dedicata la presente Nota, nella quale mi propongo dunque di determinare tutti i tipi di superficie aventi curve canoniche irriducibili iperellittiche ($p>2$, $p^{(1)}>1$).

E innanzi tutto un richiamo per spiegare come deve intendersi l'irriducibilità del sistema canonico [2].

[1] *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.* Mathem. Annalen VIII.

[2] Per questa osservazione e per l'altra contenuta nel § 2 riferentisi alla teoria generale delle superficie, si può confrontare la mia: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie dell'Accad. dei XL, 1896).

Allorchè è data una superficie F_n d'ordine n e se ne considera la sezione con una generica superficie aggiunta φ_{n-4} d'ordine $n-4$, si deve anzitutto ritrarne la curva multipla stessa contata opportunamente secondo risulta dal modo di comportarsi in essa di una superficie aggiunta (dunque $i(i-1)$ volte se si tratta di una curva ipla ordinaria): la parte residua contiene sempre come parti fisse quelle, eventuali, curve (*eccezionali*) che con una trasformazione della superficie possono esser mutate in un punto semplice; ma di queste curve eccezionali si distinguono due specie, secondochè il punto che viene a corrispondere ad una di esse sopra una opportuna trasformata $F'_{n'}$ d'ordine n', non appartiene o invece appartiene a tutte le superficie $\varphi_{n'-4}$ d'ordine $n'-4$ aggiunte a $F'_{n'}$: ora le curve eccezionali della *1ª specie* debbono ancora essere ritratte dalla sezione di F_n colle φ_{n-4}; le intersezioni residue costituiscono propriamente le curve canoniche di F_n. Dunque nelle curve canoniche di F_n verrebbero incluse le eventuali curve eccezionali della *2ª specie*, la presenza delle quali costituisce perciò un caso di riducibilità del sistema canonico di F_n. Siccome poi si tratta di questioni invariantive ammettendo la irriducibilità del sistema canonico, deve anche escludersi la presenza di qualche punto di F_n (comune a tutte le φ_{n-4}) che in una trasformazione di F_n possa dar luogo a curve eccezionali di 2ª specie: in altre parole il sistema canonico su F_n non deve avere punti base (chè l'intorno d'un punto base costituirebbe una componente fissa del sistema stesso). Per queste superficie a sistema canonico irriducibile (che debbono riguardarsi costituenti il caso generale) si ha che il numero delle intersezioni variabili di due curve canoniche (di genere $p^{(1)}$) è

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

(Noether, l. c.).

Ciò premesso (a scanso di equivoci) si ha il resultato seguente:

Le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono irriducibili iperellittiche

$$(p > 2, \quad p^{(1)} > 1)$$

a) posseggono un fascio razionale di curve di genere due, oppure sono rappresentabili;

b) sul piano doppio con curva di diramazione dell' 8º ordine $(p = 3)$;

c) o sul piano doppio con curva di diramazione del 10º ordine $(p = 6)$.

2. Avanti di entrare in argomento, cioè di venire alla dimostrazione del resultato innanzi enunciato, mi par conveniente di riportare la proprietà che caratterizza le curve canoniche sopra una superficie di fronte ad un qualsiasi sistema lineare (irriducibile) su di essa tracciato, poichè di questa proprietà dovremo far uso più volte nel seguito.

Sopra una superficie F una curva canonica sega la curva generica C di un qualsiasi sistema lineare irriducibile $|C|$, secondo un gruppo che sommato all'intersezione di un'altra C (ossia ad un gruppo della serie *caratteristica* di $|C|$) e al gruppo dei punti base di $|C|$, costituisce un gruppo canonico (di $2p^{(1)}-2$ punti) della detta C (di genere $p^{(1)}$).

Viceversa tale proprietà è caratteristica per le curve canoniche.

È sottinteso che alla superficie F si possa indifferentemente sostituire una sua trasformata, e però si debba tener conto opportunamente delle curve eccezionali di F cui venissero a corrispondere punti base per $|C|$, aggiungendo esse pure alle curve canoniche, appunto come si fa dei nominati punti base.

3. Consideriamo una superficie F a curve canoniche (irriducibili) iperellittiche ($p > 2$, $p^{(1)} > 1$). Consideriamo su di F un fascio generico di curve canoniche: le infinite g_2^1 appartenenti alle curve (iperellittiche) del fascio, danno luogo ad una involuzione Γ_2^2 su F: se gli elementi (coppie) di questa Γ_2^2 si considerano essi stessi come i punti (in senso astratto) d'una nuova superficie F′, la F′ possiede un fascio razionale di curve razionali (ciascuna curva essendo costituita dalle infinite coppie di una delle nominate g_2^1), e però è razionale (1), ossia rappresentabile punto per punto sul piano. Per conseguenza la data F è rappresentabile sul piano doppio, riferendo ai punti del piano le coppie della Γ_2^2 (e ciò osserva pure il sig. Noether, Mathem. Annalen VIII). Segue (2) che tutte le curve canoniche di F *appartengono* all'involuzione Γ_2^2 ossia contengono infinite coppie di questa (costituenti alla lor volta su ciascuna curva una involuzione γ_2^1).

La involuzione Γ_2^2 ottenuta su F a partire da un fascio di curve canoniche (iperellittiche), varierà con questo fascio, o sarà indipendente da esso?

È facile riconoscere che la Γ_2^2 non varia al variare del fascio di curve canoniche scelto su F. Si può fare la dimostrazione per assurdo nel modo seguente:

se la Γ_2^2 su F varia col fascio nominato, essa deve variare con continuità, e con continuità deve variare ancora l'involuzione γ_2^1 composta dalle coppie di Γ^2 appartenenti ad una data curva canonica; si ha dunque sulla curva canonica una serie continua di involuzioni γ_2^1, le quali debbono essere razionali (3), e la curva stessa è in conseguenza una curva ellittica ($p^{(1)}=1$), mentre abbiamo supposto che essa sia di genere $p^{(1)} > 1$.

(1) Cf. Noether, *Ueber Flächen welche eine Schaar rationaler Curven besitzen*, Math. Ann. III.

(2) Cf. Castelnuovo, Istituto lombardo 1891, e le mie: *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, VI (Memorie Accad. Torino 1893).

(3) Il teorema che afferma l'impossibilità di una serie continua di involuzioni irrazionali sopra una curva è stabilito implicitamente dal sig. Painlevé: *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre*, Annales de l'École normale 1891, ed esplicitamente (con altro metodo) dal sig. Castelnuovo, Atti dell'Accad. di Torino 1893, e dal sig. Humbert, Comptes rendus e Journal de Mathématiques 1893.

Deduciamo che sopra la superficie F vi è una involuzione Γ_2^2 alla quale appartengono tutte le curve canoniche, tale che le coppie di Γ_2^2 formano su ciascuna curva canonica (iperellittica) la g_2^1 che essa possiede.

Dunque nella rappresentazione di F sul piano doppio (ottenuta riferendo ai punti del piano le coppie di Γ_2^2) le curve canoniche hanno per immagini le curve *razionali* d'un sistema lineare ∞^{p-1}. Questo sistema lineare di curve razionali è determinato dal gruppo base, perchè altrimenti ogni curva razionale del sistema più ampio cogli stessi punti base sarebbe l'immagine (doppia) di una curva su F cui spetterebbero le stesse proprietà caratteristiche per le curve canoniche (§ 2).

Questa osservazione ci permette di affermare in particolare che le ∞^{p-2} curve canoniche di F passanti per un suo punto generico A, (le quali curve passano in conseguenza per il punto coniugato di A nella Γ_2^2), non passano tutte per altri punti variabili con A.

4. Riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema canonico ∞^{p-1} su F, agli iperpiani S_{p-2} di un S_{p-1}: si ottiene allora in S_{p-1} una superficie Φ i cui punti rappresentano le coppie della Γ_2^2, cioè una superficie doppia (dotata d'una certa curva di diramazione) su cui la F viene rappresentata. La Φ è (per ciò che si è detto innanzi) una superficie razionale rappresentabile sul piano prendendo come immagini delle sezioni iperpiane le ∞^{p-1} curve razionali di un sistema determinato dai punti base; essa è dunque una superficie normale a sezioni iperpiane razionali; perciò il suo ordine vale

$$p-2=\frac{p^{(1)}-1}{2}.$$

La Φ può essere (¹):

1° un piano;

2° una superficie di Veronese del 4° ordine in S_5;

3° una superficie rigata.

Discutiamo partitamente i tre casi.

Caso 1°. Se la Φ è un piano (doppio), si ha

$$p=3 \quad p^{(1)}=3,$$

e poichè una retta del piano è l'immagine (doppia) di una curva canonica su F, di genere 3, la curva di diramazione del piano doppio Φ ha l'ordine 8.

Caso 2°. Se la Φ è una superficie di Veronese del 4° ordine in S_5, si ha

$$p=6 \quad p^{(1)}=9,$$

e poichè una sezione iperpiana di Φ è l'immagine (doppia) di una curva ca-

(¹) Cfr. Picard, I von Crelle, C. e Guccia, Circolo Mat. di Palermo, I.

nonica su F avente il genere $p^{(1)} = 9$, la curva di diramazione su Φ ha l'ordine 20.

Rappresentiamo la Φ punto per punto sul piano, in guisa che le sezioni iperpiane di essa abbiano per immagini le coniche, ed avremo rappresentato la superficie F sul piano doppio con curva limite di ordine 10.

Caso 3°. La Φ sia una rigata razionale normale in S_{p-1} ($p > 3$).

Dico che le generatrici di Φ rappresentano (doppiamente) curve di genere 2 (costituenti un fascio) su F.

Si escluda dapprima che la Φ stessa sia in cono. Allora le generatrici di Φ non hanno alcun punto comune, e poichè inoltre a Φ non appartiene alcuna curva eccezionale, le curve C di F corrispondenti alle rette di Φ formano pure un fascio (lineare) senza punti base; perciò le curve canoniche segano le curve C (di genere π) su F, ciascuna in un gruppo canonico di $2\pi - 2$ punti e poichè le segano in *due* punti, le C stesse hanno il genere $\pi = 2$.

Se la Φ è un cono, potrebbe nascere il sospetto che il suo vertice fosse immagine di qualche punto base pel fascio delle curve C aventi come immagini (doppie) le generatrici di Φ. Ma in questo caso possiamo valutare il genere π delle C nel seguente modo:

Un iperpiano pel vertice del cono Φ (di S_{p-1}) sega il cono stesso in $\frac{p^{(1)} - 1}{2}$ generatrici, al gruppo delle quali corrisponde su F una curva canonica spezzata in altrettanti componenti di genere π ciascuna: queste componenti debbono esser fra loro connesse, come si deduce riguardando la detta curva spezzata come limite di una curva canonica irriducibile, e però se si valuta il genere ($p^{(1)}$) della nominata curva composta secondo la nota formula che dà il genere d'una curva spezzata [1], si ha

$$p^{(1)} \geq \pi \frac{(p^{(1)} - 1)}{2},$$

da cui segue (essendo $\pi > 1$) $\pi = 2$. Del resto ciò può anche confermarsi col computo dell'ordine della curva di diramazione su Φ e del numero delle sue intersezioni colle generatrici di Φ.

Resta così provato che le superficie a curve canoniche iperellittiche rientrano nelle tre classi delimitate nel § 1.

Importa ora di vedere che le superficie di queste classi hanno effettivamente le curve canoniche iperellittiche.

5. Chè le superficie possedenti un fascio lineare di curve C di genere due abbiano le curve canoniche iperellittiche (supposto $p > 2$, $p^{(1)} > 1$),

[1] Cfr. Noether, *Acta matematica*, 8, e la mia: *Introduzione* ecc., § 16.

segue subito dalla proprietà caratteristica delle curve canoniche. Invero ciascuna curva canonica deve incontrare una C in due punti costituenti una coppia della $g_2{}^1$ su di essa, e quindi le C (costituenti un fascio lineare) determinano sopra ogni curva canonica una $g_2{}^1$. Rimane soltanto da stabilire che i piani doppi con curva limite di ordine 8 e 10 hanno risp. il genere $p=3$, $p=6$, e posseggono come immagini delle curve canoniche le rette e risp. le coniche del piano: da ciò segue invero che tali piani doppi rappresentano superficie algebriche a curve canoniche iperellittiche.

L'asserzione precedente è contenuta come corollario nel seguente enunciato:

Il piano doppio avente come curva limite la curva generale d'ordine $2n$ *ha il genere* $p=\frac{(n-3)n}{2}$, *e possiede come immagini delle curve canoniche le curve d'ordine* $n-3$ (*contate due volte*).

Sia

$$\varphi(xy)=0$$

l'equazione della curva limite d'ordine $2n$, e si rappresenti il piano doppio sulla superficie (d'ordine $2n$)

$$z^2=\varphi(xy)$$

che ha come $2(n-1)$plo il punto all'infinito O dell'asse z perpendicolare al piano $z=0$.

La sezione piana generica della superficie fatta con un piano per O ha il genere $n-1$, e quindi possiede oltre al punto $2(n-1)$plo O, altri $n-1$ punti doppi (sia pure infinitamente vicini ad O): in conseguenza le superficie d'ordine $2n-4$ aggiunte alla $z^2=\varphi(xy)$ (le quali sono cilindri di vertice O), si spezzano in un cilindro fisso d'ordine $n-1$ proiettante da O la curva doppia, ed in un qualsiasi cilindro d'ordine $n-3$ col vertice O.

Segue il precedente enunciato.

E rimane così esaurita la questione che forma argomento della presente Nota.

6. Aggiungeremo l'osservazione seguente relativa alla costruzione di una superficie proiettivamente determinata, tipo della classe di superficie con un fascio razionale di curve di genere due.

Tali superficie, da quanto si è detto, risultano riferibili al piano doppio con curva di diramazione d'ordine $2n$ dotata di punto $(2n-6)$plo.

Si può supporre il punto $(2n-6)$plo di questa curva nel punto all'infinito dell'asse x, ed allora la sua equazione (in coordinate cartesiane)

$$\varphi(xy)=0$$

conterrà x al 6° grado.

Il piano doppio è allora da riguardarsi come proiezione dal punto all'infinito dell'asse z, della superficie d'ordine $2n$

$$z^2 = \varphi(xy),$$

per cui la retta all'infinito dei piani $y =$ cost è $(2n - 6)$ pla.

Si deduce che:

Ogni superficie con un fascio razionale di curve di genere due può trasformarsi in una superficie di un certo ordine $2n$ *con retta* $(2n - 6)$ *pla e un (particolare) punto* $(2n - 2)$ *plo su questa.* In casi particolari si può rappresentare questa superficie sopra un'altra d'un certo ordine m con retta $(m - 5)$ pla o $(m - 4)$ pla e punto $(m - 2)$ plo su di essa.