
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche

Rendiconti Circ. Mat. Palermo (I) **X** (1896), pp. 30-35.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 – Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

UN'OSSERVAZIONE RELATIVA ALLA RAPPRESENTAZIONE
PARAMETRICA DELLE CURVE ALGEBRICHE.

Nota di **Federigo Enriques**, in Bologna.

Adunanza del 25 agosto 1895.

1. La presente Nota trae origine da una questione inerente alla rappresentazione parametrica algebrica d'una curva.

Si abbia una curva algebrica C che, senza restrizione, possiamo supporre piana, data da un'equazione

$$f(x, y) = 0.$$

La più generale rappresentazione parametrica algebrica della curva si ottiene ponendo le x, y funzioni razionali d'un parametro t e d'un irrazionale X legato a t da un'equazione di grado n in X

$$\varphi(X, t) = 0,$$

mediante le formole

$$(1) \quad x = f_1(X, t), \quad y = f_2(X, t):$$

si può dire allora che le

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

sono funzioni *irrazionali di grado n* in t .

Avviene *generalmente* che le formole (1) insieme alla $f(x, y) = 0$

permettono di esprimere inversamente X, t come funzioni razionali di x, y ; cioè danno una rappresentazione parametrica *semplice* della curva C ; ma in casi particolari può accadere l'opposto. In ogni caso però si deve supporre che *un* valore di X resti determinato, quando sono dati x, y, t [in guisa da soddisfare alle (1)]; altrimenti x, y resulterebbero funzioni razionali di t e di una funzione razionale di X e si dovrebbero riguardare come funzioni irrazionali del parametro t aventi un grado $< n$.

Abbiamo dunque in ogni caso al variare di t [mediante le (1)] una serie razionale di gruppi di n punti sulla curva C : per un noto teorema di Lüroth si può supporre che i gruppi della serie corrispondano *biunivocamente* ai valori del parametro t , bastando altrimenti sostituire al parametro t un nuovo parametro τ funzione razionale di t ; supposto ciò, le formule (1) daranno una rappresentazione parametrica semplice della curva C (ossia ciascun punto di C corrisponderà ad *un* valore di t) se i nominati gruppi di n punti su C formano una involuzione lineare g_n^1 ; accadrà invece l'opposto se quella serie di gruppi è tale che un punto di C appartiene a più d'un gruppo (ha l'indice $\delta > 1$). Che cosa potrà dirsi in quest'ultimo caso relativamente alla rappresentazione parametrica della curva C ?

La risposta è data dal seguente enunciato:

Se le coordinate dei punti d'una curva algebrica

$$f(x, y) = 0$$

si esprimono come funzioni irrazionali di grado n d'un parametro t ed ogni punto della curva corrisponde a più valori di t ;

1) *o le x, y si possono riguardare come funzioni irrazionali di grado n d'un parametro τ che è alla sua volta funzione razionale di t ;*

2) *oppure la curva è trasformabile in una curva d'ordine n (eventualmente multipla), ed ammette quindi infinite rappresentazioni parametriche semplici di grado n e di grado $< n$.*

Stante le considerazioni precedenti risulta chiaro che questo enunciato è contenuto nel seguente enunciato geometrico (da cui si ottiene per $r = 1$):

Sopra una curva algebrica, una serie razionale ∞^r ($r \geq 1$) di gruppi di n punti è lineare (involutoria) o è contenuta in una serie lineare più ampia g_n^s ($s > r$).

2. Sopra una curva algebrica C esista una serie razionale ∞^r di gruppi di n (> 1) punti di un certo indice $m > 1$.

Supponiamo dapprima che gli m gruppi della serie definiti da un punto generico della C non abbiano comuni altri punti variabili con esso, o come diremo brevemente che la data serie sia *semplice*.

Gli elementi (gruppi) della serie possono riferirsi biunivocamente ai punti della curva K razionale normale d'ordine m in S_m : allora ad un punto della C corrispondono m punti della K (omologhi ai gruppi appartenenti sulla C al punto dato) e quindi ad un punto della C corrisponde un iperpiano (S_{m-1}) segante sulla K gli m punti; al variare del punto della C si ha così in S_m una serie ∞^r di iperpiani, e gli elementi della serie (iperpiani) corrispondono biunivocamente ai punti della C ; per un punto della K passano n dei nominati iperpiani, dati dagli n punti della C che compongono il gruppo (della data serie) corrispondente ad esso. Si può dire che la serie d'iperpiani considerata sia di classe n , cioè che per ogni punto di S_m (anche fuori di K) passino n iperpiani di essa?

La risposta affermativa alla precedente questione vien data da una considerazione del sig. Segre (*).

Se la classe della serie di iperpiani fosse $\delta > n$, soltanto per un punto appartenente all'inviluppo della serie potrebbero passare meno di δ iperpiani, ed in conseguenza tutti i punti della K (per ciascuno dei quali passano solo n iperpiani distinti) apparirebbero al nominato inviluppo; ma allora (la K appartenendo all'inviluppo della serie di iperpiani), per una nota proprietà degli inviluppi, ogni iperpiano di essa serie sarebbe tangente alla K , e quindi non la segherebbe più in m punti (distinti), contro il supposto.

Ora operiamo in S_m una trasformazione reciproca; agli iperpiani della nostra serie corrisponderanno i punti d'una curva C' d'ordine

(*) *Introduzione alla Geometria sopra l'ente algebrico semplicemente infinito*, n° 23 (Annali di Matematica, 1894).

n (in corrispondenza biunivoca coi punti di C), ed ai punti di K gli iperpiani di una serie di classe m , seganti sulla C' i gruppi di n punti della serie razionale ∞^1 di grado n e indice m trasformata di quella supposta esistente sulla C .

La C' può (eventualmente) appartenere ad un spazio S_s con $s < m$ dimensioni; allora la data serie di grado n e indice m sulla C risulta immersa in una serie lineare g_n^s (dello stesso grado).

Supponiamo ora, ciò che per un momento avevamo escluso, che sulla C la data serie non sia semplice, cioè che i gruppi di m punti di essa determinati da un punto generico abbiano comune, oltre quel punto, altri $v - 1$ punti ($v > 0$) variabili con esso; allora la serie risulta *composta* mediante i gruppi d'una involuzione γ_v di grado v , e considerando gli elementi (gruppi) di questa come i punti d'una curva, si può ancora applicare il ragionamento precedente: si deduce ancora che sulla C la data serie è contenuta in una serie lineare dello stesso grado g_n^s ($1 < s \leq m$) (composta coi gruppi della γ_v). Infine osserveremo che per $m = 1$ la serie è una g_n^1 .

Sussiste dunque in ogni caso il teorema sopra enunciato per le serie ∞^1 . Ma esso si estende subito alle serie di dimensione > 1 , notando che in tal caso la serie stessa può riguardarsi come contenente infinite serie razionali ∞^1 aventi comune un gruppo di n punti, e quindi tutta la serie razionale risulta contenuta nella g_n^s completa a cui il detto gruppo di n punti appartiene.

3. Il teorema enunciato al n° 1 trova la sua più semplice espressione nel caso ($n = 2$) delle curve iperellittiche ed in questo caso esprime una proprietà nota (*): questa può anche enunciarsi dicendo che « *sopra una curva iperellittica di genere $p \geq 1$ ogni involuzione irrazionale è trasformata in sè stessa dalla (o da ciascuna) g_2^1 appartenente alla curva* ».

Ed è anche da osservarsi che lo stesso fatto si può riguardare come

(*) Cfr. P a i n l e v é, *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre*, ch. II (Annales de l'École Normale, 1891); S e g r e, *Introduzione*, ecc., op. cit.; nota al n° 67.

la proprietà degl'integrali iperellittici (di 1^a specie)

$$I = \int_{x_0}^x \psi[x \sqrt{\varphi(x)}] dx$$

riducibili ad ellittici, di ammettere una trasformazione birazionale (involutoria) in sè stessi e di trasformarsi in integrali ellittici mediante una sostituzione razionale

$$x = \theta(X).$$

Basta invero ricordare come l'esistenza di un integrale iperellittico I riducibile ad un integrale ellittico coi periodi ω, ω' , porti di conseguenza l'esistenza d'una curva ellittica

$$p(I | \omega, \omega'), \quad p'(I | \omega \omega')$$

trasformata razionale della

$$y^2 = \varphi(x),$$

ossia porti l'esistenza d'una involuzione ellittica su quest'ultima curva (e viceversa) (*).

4. Passando ad estendere il teorema del n° 2 alle superficie, stabiliamo che :

Sopra una superficie algebrica una serie razionale (di dimensione ≥ 1) di curve è sempre contenuta totalmente in un sistema lineare.

Supponiamo che la serie in questione sia ∞^1 .

Se essa non è un fascio (sistema lineare ∞^1), per ogni punto della data superficie F passa un numero finito $\nu > 1$ di curve della serie : considerando le curve della serie come gli elementi d'un ente algebrico razionale $\infty^1 K$, ad ogni punto della superficie F corrisponde un gruppo di ν elementi su K . Inversamente si può sup-

(*) Cfr. a proposito della riducibilità degli integrali abeliani (in particolare iperellittici) Picard, Appell, Brioschi, Goursat, Poincaré (Bulletin de la Société Mathématique e Comptes Rendus; 1882-86), come anche Kowalevsky (Acta Mathematica, 1884).

porre senza restrizione (analogamente a ciò che si è fatto nel n° 2) che la data serie di curve su F sia *semplice* e quindi a ciascuno dei detti gruppi di ν elementi su K corrisponda *un* punto di F . Figuriamoci l'ente K come una serie di iperpiani d'indice ν in un S_ν : ai punti di F vengono allora a corrispondere i punti d'una superficie ψ in S_ν (ciascun punto di ψ essendo comune ai ν iperpiani della serie che corrispondono al punto omologo di F): gli iperpiani della serie non sono tangenti a ψ in tutti i punti della linea sezione, altrimenti per ogni punto di ψ passerebbero meno di ν iperpiani; quindi la serie di curve che essi segano su ψ (ciascuna curva essendo contata una volta) viene contenuta totalmente nel sistema lineare delle sezioni iperiane di ψ .

Il teorema stabilito per le serie di curve ∞^1 si estende alle serie razionali di dimensione > 1 , usufruendo della estensione alle superficie dei teoremi sulle serie g_n^r complete relativi alle curve, estensione che si ha colla più generale considerazione dei sistemi normali comunque riducibili (*).

La proposizione stabilita deve essere confrontata coll'interessante teorema del sig. Humbert (**): « Sopra una superficie algebrica « *priva di integrali di differenziali totali di 1ª specie, ogni serie algebrica di curve è contenuta totalmente in un sistema lineare* ».

Il teorema del sig. Humbert è più generale rispetto alla natura delle serie di curve, che noi supponiamo razionale; esso racchiude invece una restrizione, che non compare nel nostro enunciato, relativamente alla natura della superficie.

Cutigliano Pistoiese, 12 agosto 1895.

FEDERIGO ENRIQUES.

(*) Cfr. la mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie dell'Accad. dei XL, 1895).

(**) *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (Comptes Rendus, 1893).