Enriques, Federigo

Sui piani doppi di genere uno

Mem. Soc. It. d. Scienze (III) **X** (1896), pp. 201-222. ([con un'Aggiunta di G. Castelnuovo])

Sui piani doppi di genere uno.

Memoria di FEDERIGO ENRIQUES

presentata dal Socio E. Beltrami ed approvata dal Socio L. Cremona.

1. Nella teoria delle curve algebriche e delle funzioni ad esse relative compariscono prime le curve iperellittiche il cui campo di razionalità è

$$x \quad \sqrt{f(x)},$$

dove f indica un polinomio in x.

Come estensione diretta si presentano fra le superficie i *piani doppi*, cioè le superficie il cui campo di razionalità è

$$x \quad y \quad \sqrt{\varphi(xy)},$$

dove φ indica un polinomio in x, y. Ma le ricerche intorno ai piani doppi (Clebsch, Noether) si sono limitate alla determinazione delle condizioni di razionalità, cioè alla determinazione delle forme cui deve potersi ricondurre il polinomio $\varphi(xy)$ con trasformazione birazionale su x, y, affinchè $x, y, \sqrt{\varphi(xy)}$ sieno esprimibili razionalmente per due parametri. Tale questione è completamente esaurita.

Considerando come appartenenti ad una medesima *classe* due piani doppi

$$x \quad y \quad \sqrt{\varphi(xy)} \qquad , \qquad X \quad Y \quad \sqrt{\psi(XY)}$$

allorchè con una trasformazione birazionale tra i piani (xy) (XY) si può trasformare la curva di diramazione $\varphi(xy) = 0$ dell'uno, nella curva di diramazione $\psi(XY) = 0$ dell'altro, si ha il resultato (1):

I piani doppi razionali rientrano nelle tre classi rappresentate dai seguenti tipi:

1) piano doppio con curva di diramazione d'ordine $2n$ $(n \geq 1)$ dotata di un punto $(2n-2)$ plo;

2) piano doppio con curva di diramazione del 4° ordine;

(1) Cfr. Clebsch « *Ueber den Zusammenhang* etc.» (Mathem. Annalen, III). — Noether « *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* » (Sitzungsberichte der phil. med. Soc. zu Erlangen, 1878).

3) piano doppio con curva di diramazione del 6° ordine dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

Ora interessa di passare allo studio dei piani doppi (non razionali) di genere > 0, anche perchè a questi si collegano trascendenti (come gli integrali doppi di Clebsch, Noether) che sono la naturale estensione delle trascendenti iperellittiche.

In questo lavoro mi propongo di portare un primo contributo alla teoria dei piani doppi di genere > 0, classificando quei piani doppi che occupano naturalmente il primo posto dopo i piani doppi razionali, cioè il posto analogo a quello occupato dalle curve di genere 1 fra le curve iperellittiche.

Tale classificazione (il primo esempio di classificazione completa d'una famiglia di superficie non razionali mediante caratteri) mostrerà anche l'utilità di un nuovo carattere recentemente introdotto nella teoria delle superficie (accanto ai generi geometrico e numerico).

Ma appunto perchè dobbiamo fare uso di questo carattere e richiamare alcuni resultati generali della teoria delle superficie, non sarà male che cominciamo dal riassumere brevemente ciò che dobbiamo utilizzare nel seguito, anche prima di esporre i nuovi resultati qui ottenuti.

2. [1] Nella teoria generale delle superficie algebriche si pone a fondamento la possibilità di trasformare una qualsiasi superficie data in una superficie (priva di singolarità in un iperspazio, o ciò che è lo stesso in una superficie) di S_3 dotata soltanto di curva doppia e punti tripli (*impropri*) che sono tripli anche per la curva doppia.

Senza entrare nella questione tuttora dibattuta se tale ipotesi sia limitativa, osserviamo che per le superficie rappresentabili sul piano doppio, che qui considereremo, la trasformazione cui sopra si allude potrebbe essere eseguita senza difficoltà fondandosi sulla nota teoria delle singolarità delle curve piane (applicata alla curva di diramazione del piano doppio).

Si abbia una superficie F di S_3 dotata di sola curva doppia e punti tripli impropri: denotiamo con n il suo ordine.

Si dicono *superficie aggiunte* ad F quelle superficie φ che passano semplicemente per la curva doppia.

Vi sono in generale sopra F delle curve che godono carattere d'invarianza rispetto a trasformazioni birazionali e diconsi *curve canoniche*: esse possono essere definite in modo invariantivo [2]: esse si costruiscono proiettivamente su F come sezioni (parziali) della F colle superficie φ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte ad F (fuori della curva doppia contata due volte e di certe curve }eccezionali{ trasformabili in punti semplici).

Il numero delle curve canoniche di F, o delle φ_{n-4}, linearmente indipendenti, costituisce il *genere geometrico superficiale* p_g di F: il genere (virtuale) delle curve canoniche costituisce il *genere lineare* $p^{(1)}$ di F.

[1] Cfr. anche per le citazioni la mia « *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* » (Memorie dell'Accad. dei XL, 1896).

[2] « *Introduzione* ecc. », § 38.

Considerando tutte le superficie d'ordine $n-4$ e supponendo che esse seghino sulla curva doppia una serie completa e non speciale (fatte le opportune riduzioni se la detta curva si spezza), si ottiene una formula aritmetica, detta di *postulazione* (1), che permette di calcolare il numero delle φ_{n-4}, linearmente indipendenti, aggiunte ad F.

Il numero p_n così calcolato è uguale a p_g se è vera l'ipotesi nella quale si è istituito il calcolo: ciò accade per le superficie che si considerano come *regolari*. In caso diverso è $p_n < p_g$.

Il numero p_n dicesi *genere numerico* di F e si può darne un significato invariantivo (2) che mostra come esso non muti per una trasformata di F (fatte opportune modificazioni se le singolarità della detta superficie trasformata sono più elevate).

Sopra F possono ancora in generale definirsi certe *curve* dette *bicanoniche* che godono pure del carattere d'invarianza per trasformazioni birazionali (3): esse si ottengono come sezioni (parziali) di F colle *superficie* Φ_{2n-8} d'ordine $2n-8$ *biaggiunte* ad F, cioè passanti due volte per la curva doppia di F (e non spezzate in F e in una residua superficie). Il numero delle curve bicanoniche di F linearmente indipendenti costituisce il *bigenere* P di F.

Noi ci riferiremo a superficie F (regolari) di genere $p_g = p_n = 1$. Esse hanno il bigenere $P \geq 1$, perchè la φ_{n-4} (aggiunta ad F) contata due volte costituisce una Φ_{2n-8} biaggiunta ad F. Nel caso che di solito si considera come generale, non esistono altre Φ_{2n-8} aggiunte ad F, se non quelle appartenenti al sistema lineare determinato dalla detta Φ_{2n-8} e della F presa insieme con un'arbitraria superficie d'ordine $n-8$ (se $n \geq 8$), cioè si ha in generale $P=1$: ma può anche essere $P>1$ ed aversi su F (una sola curva canonica ed) infinite curve bicanoniche.

Noi ci riferiremo a superficie per le quali, oltre ad essere $p_g = p_n = 1$, è anche $P=1$, ossia alle *superficie che hanno tutti i generi uguali ad uno* (vedremo tra un momento che per le superficie aventi $p_g = p_n = P = 1$ anche il genere lineare $p^{(1)}$ deve considerarsi come uguale ad 1, mentre non vale l'inversa, cioè le superficie aventi $p_g = p_n = p^{(1)} = 1$ possono avere $P=1$ o $P=2$).

3. Ricordate le nozioni precedenti notiamo che le superficie razionali si ottengono nella classificazione delle superficie in corrispondenza ai valori nulli dei generi (4) e perciò si può dire che il risultato precedentemente citato di Clebsch-Noether (n. 1) dà la *classificazione dei piani doppi aventi i generi nulli* ($p_g = p_n = P = 0$).

Nel presente lavoro si risolve il problema successivo della classificazione dei piani doppi aventi tutti i generi uguali ad 1, e si ottiene il teorema:

I piani doppi che hanno tutti i generi uguali ad 1 ($p_g = p_n = P = 1$) *rientrano in una delle 4 classi rappresentate dai seguenti tipi:*

1) *piano doppio con curva di diramazione del 6° ordine;*

(1) Cfr. Noether (Annali di Matematica, t. V).

(2) « *Introduzione* ecc. » § 40.

(3) « *Introduzione* ecc. » § 39.

(4) Castelnuovo « *Sulle superficie di genere zero* ». (Memorie Accad. XL, 1896).

2) *piano doppio con curva di diramazione di 8° ordine dotata di due punti 4pli che possono essere infinitamente vicini;*

3) *piano doppio con curva di diramazione del 10° ordine dotata di un punto 7plo e due punti 3pli infinitamente vicini (distinti);*

4) *piano doppio con curva di diramazione del 12° ordine dotata di un punto 9plo e tre punti 3pli infinitamente vicini (distinti).*

§ I.

4. Avanti di entrare a parlare più specialmente dei piani doppi, dobbiamo fare alcune osservazioni generali riguardanti le superficie F per le quali

$$p_g = p_n = \mathrm{P} = 1.$$

Cominciamo dal ricordare che ogni superficie regolare di genere p $(=p_g=p_n)>0$ può essere trasformata in una superficie F senza curve eccezionali (curve trasformabili in punti semplici). La F può supporsi priva di singolarità in un certo iperspazio S_r a cui appartiene. Un sistema lineare irriducibile $|C|$ privo di punti base su F si dice *puro*: $|C|$ si dice *semplice* se esso è tale che il passaggio di una C per un punto generico di F non porti di conseguenza il suo passaggio per altri punti di F (quindi ∞^3 almeno).

Dato su F un sistema puro semplice $|C|$ resta definito su F un altro sistema $|C'|$, *aggiunto* a $|C|$, di cui le curve segano gruppi canonici alle C e che può considerarsi come *somma* di $|C|$ col sistema canonico [1]. Essendo $p_g=p_n$, $|C'|$ sega su una C la serie canonica completa: perciò essendo $|C|$ semplice (in guisa che può supporsi essere il sistema delle sezioni iperpiane di una trasformata di F) $|C'|$ è irriducibile e non ha punti base su F, ossia è anch'esso un sistema puro.

Denotando con π il genere (delle curve generiche C ossia il genere) di $|C|$, e con n il suo *grado* (numero delle intersezioni di due C), con π' il genere di C', e con $p^{(1)}$ il genere lineare di F (ossia il genere virtuale delle curve canoniche, supposte esistenti) si ha

$$(1) \qquad p^{(1)} = \pi' - 3(\pi - 1) + n:$$

questa formula segue dalla proprietà delle curve canoniche K di segare le curve C in $2(\pi-1)-n$ punti, e dall'essere

$$|C'| = |C + K|.$$

Denotando ancora con n' il grado di $|C'|$ si ha pure la formula

$$(2) \qquad p^{(1)} - 1 = n' - 4(\pi - 1) + n.$$

Le formole (1) (2) sono senz'altro applicabili al caso che la superficie F abbia il genere

$$p = (p_g = p_n =)\ 1$$

[1] « *Introduzione* ecc. » IV, VI.

purchè esista su di essa una effettiva curva canonica. Ma nel caso $p = 1$ tale curva può anche mancare, giacchè se si suppone la F proiettata da punti esterni in una superficie F' di S_3 avente un certo ordine m, l' intersezione della F' colla superficie aggiunta d' ordine $m - 4$ può essere costituita soltanto dalla curva doppia.

In questo caso manca il significato assegnato a $p^{(1)}$, ma possiamo ancora prendere convenzionalmente

$$p^{(1)} = \pi' - 3(\pi - 1) + n$$

come genere virtuale della curva canonica (non esistente) e chiamarlo genere lineare di F, avvertendo che esso conserva ancora il suo carattere d' invarianza ([1]). Il $p^{(1)}$ può ora valutarsi subito.

Invero (mancando il sistema canonico $|K|$) si ha ora

$$|C'| = |C|$$

e però

$$\pi' = \pi \qquad n' = n,$$

ed, una C' segando una C in $2\pi - 2$ punti, si ha

$$n = 2\pi - 2,$$

sicchè

$$p^{(1)} = 1.$$

Sussiste allora anche la formula

$$p^{(1)} - 1 = n' - 4(\pi - 1) + n = 0. \tag{2}$$

Vediamo ora che valore può avere il bigenere P d' una superficie regolare di genere $p = (p_g = p_n =) 1$.

Il numero $P - 1$ rappresenta la dimensione del sistema doppio del sistema canonico: se dunque manca su F la curva canonica dovrà prendersi $P = 1$.

Supponiamo invece che esista su F una effettiva curva canonica di genere $p^{(1)}$.

Essa può considerarsi come un sistema lineare $|K|$ di dimensione 0, ed il sistema bicanonico (che è il più ampio sistema lineare cui appartiene la K contata due volte) come il sistema $|K'|$ aggiunto a $|K|$ secondo la definizione data nella mia « *Introduzione* ecc. » di sistema aggiunto ad un sistema lineare comunque riducibile di dimensione ≥ 0 ([2]); quindi in virtù dei risultati generali ivi dimostrati la dimensione del sistema bicanonico $|K'|$ sarà

$$P - 1 = p^{(1)} \ ([3]):$$

([1]) « *Introduzione* ecc. » § 41.

([2]) Cfr. l' osservazione in fine del § 27.

([3]) L. c. § 40. Veramente in quel ragionamento si suppone la dimensione di $|K| > 0$, ma il ragionamento vale ancora in questo caso, almeno per dimostrare che è $P - 1 \geq p^{(1)}$ ciò che a noi qui basta: si vedrebbe poi l' assurdità di supporre $P - 1 > p^{(1)}$.

si ha dunque

$$P = p^{(1)} + 1 ,$$

formula che non è più vera se manca su F la curva canonica, poichè in questo caso si è detto doversi prendere

$$p^{(1)} = 1 \qquad P = 1 .$$

5. Ora ci proponiamo la seguente questione:

La superficie F può possedere una effettiva curva canonica di genere (virtuale) $p^{(1)} = 0$?; in altre parole può essere $P = 1$ per una superficie F che possegga una effettiva curva canonica?

La risposta è negativa.

Facciamo la dimostrazione per assurdo.

Supponiamo dunque che sopra la superficie F di genere $p = (p_g = p_n =) 1$ esista una effettiva curva canonica K di genere (virtuale) $p^{(1)} = 0$. Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile semplice puro su F. Sieno π, n il genere e il grado di $|C|$: la curva K incontra la C in

$$2(\pi - 1) - n$$

punti.

Sia $|C'|$ il sistema aggiunto a $|C|$ (che è anch'esso irriducibile, semplice, puro), e sieno π', n' risp. il genere e il grado di $|C'|$. Si ha dalle formule (1) (2) (in cui è posto $p^{(1)} = 0$)

$$\pi' = 3(\pi - 1) - n$$

$$n' = 4(\pi - 1) - n - 1$$

e perciò

$$2(\pi' - 1) - n' = 2(\pi - 1) - n - 1 .$$

Segue che le curve C' incontrano la K in un numero di punti $(2(\pi' - 1) - n')$ minore del numero delle intersezioni di K colle C.

Dunque procedendo a considerare il sistema aggiunto a $|C'|$ e così via, si arriva ad un sistema irriducibile semplice, puro, $|C^{\nu}|$, di cui le curve non incontrano K, tale dunque che (indicati con π_ν n_ν il suo genere e il suo grado) si ha

$$2(\pi_\nu - 1) - n_\nu = 0 .$$

Trasformiamo la superficie F in una F_{n_ν} (di ordine n_ν) in S_3 avente come sezione piane ∞^3 curve generiche C^ν: sulla F_{n_ν} manca la curva canonica; ma si potrebbe pensare che essa venisse rappresentata dall'intorno di qualche punto multiplo (non mai di qualche punto semplice di F_{n_ν}, perchè dalla curva canonica K si sono già escluse le componenti eccezionali).

Per eliminare il dubbio che qui si presenta osserviamo che si può supporre di aver preso $|C|$ in modo che sia privo di curve fondamentali proprie (cioè di curve fondamentali diminuenti il genere delle curve residue); allora la stessa proprietà vale per $|C^\nu|$ [1] e quindi F_{n_ν} non ha punti multipli propri, vale a dire la sezione piana generica di F_{n_ν} fatta con un piano passante per un punto multiplo O, ha lo stesso genere π_ν della sezione non passante per O.

Osservato ciò, vediamo se l'intorno d'un punto multiplo O può costituire (tutto o in parte) la curva canonica di F_{n_ν}. Se O è iplo, esso (essendo improprio) è $(i-1)$ plo almeno per la superficie $\varphi_{n_\nu-4}$ d'ordine $n_\nu-4$ aggiunta ad F_{n_ν}; dovrebbe essere iplo perchè il suo intorno facesse parte della curva canonica su F_{n_ν}.

Ma questo è impossibile perchè allora in un piano generico per O la sezione di $\varphi_{n_\nu-4}$ e di F_{n_ν} si segherebbero in i punti (infinitamente vicini ad O) fuori dei punti multipli.

È del pari analogamente impossibile che (non tutto ma) una parte dell'intorno di O su F_{n_ν} faccia parte della curva canonica.

Dunque questa curva canonica non può venire in alcun modo rappresentata su F_{n_ν} e però non esiste nemmeno su F.

Resta così dimostrato che:

Le superficie di genere $p_g = p_n = 1$ e di bigenere $P = 1$ non posseggono curva canonica ed hanno quindi il genere lineare (virtuale) $p^{(1)} = 1$.

Si deduce [2]:

Sopra una superficie avente i generi

$$p_g = p_n = P = 1$$

(che può supporsi già assunta senza curve eccezionali e senza singolarità in un iperspazio):

ogni sistema lineare irriducibile puro di genere π è di grado $2\pi - 2$ e di dimensione π;

ogni sistema lineare irriducibile ∞^π di genere π e grado $2\pi - 2$ è puro $(\pi \geq 1)$;

ogni sistema lineare irriducibile (∞' almeno) di genere π e grado n, dotato di σ punti base di molteplicità risp. $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_\sigma$, è contenuto in un sistema lineare puro di genere

$$\Pi = \pi + \sum_1^\sigma \frac{\varrho_i(\varrho_i - 1)}{2}$$

e di grado

$$N = 2\Pi - 2 = n + \sum_1^\sigma \varrho_i^2.$$

§ II.

6. Si abbia una superficie F avente i generi

$$p_g = p_n = P = 1,$$

rappresentabile sul piano doppio.

[1] Cfr. Castelnuovo « *Sulle superficie di genere zero* », l. c. § 5.

[2] Cfr. le mie « *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* ». Memorie dell'Accad. di Torino 1893 (III); e la « *Introduzione* ecc. », § 42.

Possiamo supporre F proiettivamente data in un certo S_n, in guisa che essa non abbia alcuna singolarità e non possieda curve eccezionali.

Sopra F si ha una involuzione I di coppie di punti, le cui coppie corrispondono ai punti del piano doppio.

Riguardata I come una trasformazione (involutoria) di F in sè stessa, non vi è alcun punto (fondamentale) di F cui corrisponda una curva, giacchè tale curva sarebbe eccezionale.

Un sistema lineare su F si dirà *appartenente* all' involuzione I se le sue curve passanti per un punto di F passano in conseguenza per il coniugato in I.

Dico che si possono costruire su F dei sistemi lineari senza punti base (puri) appartenenti ad I.

Invero si considerino le quadriche inviluppo della S_r cui F appartiene, come gli elementi (punti) di un $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$: in questo spazio lineare $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ è contenuta la varietà di tutte le coppie di punti di S_r : in particolare le coppie di punti di F appariscono in esso come i « punti » d' una superficie F′ in corrispondenza [1, 2] colla F. Al sistema delle sezioni iperpiane di F′ (in $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$) corrisponde appunto su F un sistema lineare puro $|C|$ appartenente all' involuzione I.

La superficie F′ si può considerare come una superficie (razionale) doppia, trasformata della F, ottenuta col riferire proiettivamente agli iperpiani dello spazio ($S_{\frac{r(r+3)}{2}}$) che la contiene gli elementi (curve) del sistema lineare $|C|$: ed il fatto che $|C|$ è puro si può esprimere dicendo che la superficie doppia F′ non possiede curve eccezionali, cioè curve a cui corrispondano punti di F.

Possiamo aggiungere un'altra osservazione e cioè che $|C|$ costruito nel modo anzidetto non ha su F alcuna curva fondamentale, (all' infuori delle coppie di I), giacchè ad una curva fondamentale di $|C|$ su F, corrisponderebbe una singolarità di F′, mentre due punti (non coniugati) di F danno due coppie di I, e queste *prendono il nome di due* punti di F′.

7. Rappresentiamo punto per punto le superficie F′ sopra un piano π, e sia $|K|$ il sistema lineare delle immagini delle sezioni iperpiane di F′. Il piano π è un piano doppio rappresentativo della superficie F di genere 1; il sistema $|K|$ è un sistema di curve piane di π, privo di curve fondamentali proprie, cui corrisponde su F un sistema puro ($|C|$). Se n è l'ordine delle K e $p>1$ il loro genere, consideriamo le ∞^{p-1} curve d'ordine $n-3$ aggiunte alle K; esse formano un sistema lineare che, spogliato delle eventuali componenti fisse, costituisce il *sistema aggiunto* (¹) (puro) $|K'|$ di $|K|$. Dico che a $|K'|$ corrisponde (come a $|K|$) un sistema puro su F.

Invero si supponga l'opposto. Allora il sistema $|K'|$ deve avere qualche punto base O sopra la superficie F′ rappresentata dal sistema $|K|$ in π: ma questo è impossibile perchè le curve K′ (considerate su F′) segano la serie canonica completa sopra ogni sezione iperpiana di genere p, e la sezione generica di F′ per un punto

(¹) Cfr. Castelnuovo « *Ricerche sui sistemi lineari di curve piane* » (Memorie dell'Accad. di Torino 1891).

arbitrario O è sempre di genere p, poichè F′ non ha punti multipli. Si ossservi che non importa quì tener conto del fatto che F′ è priva di singolarità, basta tener conto del fatto che F′ non ha punti singolari diminuenti il genere delle sezioni iperpiane per essi, cioè che $|K|$ non ha curve fondamentali proprie.

Ciò posto se $|K'|$ è irriducibile, semplice e privo di curve fondamentali proprie, e se esso ha ancora il genere >1 potremo concludere ugualmente che il suo sistema aggiunto $|K''|$ rappresenta un sistema puro di F e così via. Ma è noto che se $|K'|$ è irriducibile e semplice, esso è pure privo di curve fondamentali proprie [1].

Noi siamo dunque condotti ad esaminare quando avverrà che spingendo l'operazione di aggiunzione nel piano π, a partire da $|K|$, si incontri un (primo) sistema lineare riducibile, o non semplice, o di genere ≤ 1.

Il sig. Castelnuovo ha già avuto occasione di occuparsi di tale questione, ma non ha pubblicato completamente i risultati ottenuti; egli mi comunica la conclusione seguente:

L'operazione di aggiunzione successivamente applicata nel piano a partire da un sistema lineare irriducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie, conduce sempre ad uno dei seguenti sistemi:

1) *Sistema lineare* (∞^1 *almeno*) *di curve razionali, determinato dal gruppo dei punti base.* (Se il sistema ha una dimensione >1 esso è semplice e non possiede curve fondamentali proprie, cioè non è rappresentativo d'un cono).

2) *Sistema lineare, irriducibile, semplice* (∞^3 *almeno*) *di curve ellittiche privo di curve fondamentali proprie, determinato dal gruppo base.*

3) *Rete di curve ellittiche riducibile* (*per trasformazione birazionale*) *alla rete delle cubiche passanti per 7 punti base.*

4) *Sistema lineare* ∞^3 *di curve di genere due riducibile al sistema delle sestiche con 8 punti base doppi* [2].

Noi possiamo dunque affermare che sul piano doppio π si ha sempre un sistema lineare del tipo 1) o 2) o 3) o 4) rappresentativo di un sistema puro sopra F.

Andiamo a discutere partitamente i singoli casi che si presentano.

8. Caso 1. Esiste sul piano doppio π un sistema lineare (∞^1 almeno) di curve razionali rappresentativo di un sistema puro sopra la superficie (di genere 1) F.

Indicheremo questo sistema con $|L|$.

Anzitutto:

α) $|L|$ può essere un fascio: allora si ha in corrispondenza su F un fascio puro appartenente all'involuzione I (di cui le coppie sono riferite ai punti di π); questo fascio è necessariamente composto di curve ellittiche (n. 5).

Se $|L|$ non è un fascio (e quindi ∞^2 almeno), possiamo considerare una superficie razionale normale Φ rappresentata su π, avente come (immagini delle) sezioni iperpiane le curve razionali L: la Φ è una immagine doppia senza curve eccezionali della superficie F.

[1] Cfr. Castelnuovo « *Sulle superficie di genere zero* ». § 5.

[2] La dimostrazione di questo teorema si trova nell'*Aggiunta* pubblicata alla fine della Memoria.

Ora si hanno i tre casi [1]:

β) La superficie Φ è un piano. Allora alle rette (L) del piano Φ corrispondono su F le curve di una rete pura di grado due e (però anche) di genere due, appartenente all'involuzione I (n. 5).

γ) La superficie Φ è una superficie di VERONESE (del 4° ordine in S_5).

Allora su Φ vi è una rete (omoloidica) di coniche, senza punti base, cui corrisponde su F una rete pura di grado due e (però anche) di genere due appartenente all'involuzione I.

δ) La superficie Φ è una rigata (razionale normale) d'un certo ordine $n-1$, appartenente ad un S_n, ma (nel nostro caso) non un cono. Allora alle generatrici di Φ corrispondono su F le curve d'un fascio puro, dunque curve ellittiche.

9. CASO 2. Esiste su π un sistema lineare (∞^3 almeno) irriducibile semplice di curve ellittiche, privo di curve fondamentali proprie, cui corrisponde un sistema puro (appartenente all'involuzione I) sopra la superficie F di genere 1.

Sia $|L|$ questo sistema, determinato dal gruppo base.

Possiamo considerare una superficie razionale normale Φ rappresentata sul piano π, avente come sezioni (piane o iperpiane) le L: tale Φ è priva di punti doppi, mancando $|L|$ di curve fondamentali proprie: la Φ può riguardarsi come una immagine doppia senza curve eccezionali della superficie.

La Φ è notoriamente una superficie d'un certo ordine n (≤ 9) in S_n e non avendo punti doppi contiene (almeno) una rete omaloidica senza punti base di curve razionali, cubiche o quartiche [2]. A questa rete corrisponde su F una rete pura di grado due e (quindi) di genere due.

10. CASO 3. Esiste sul piano π una rete di cubiche $|L|$ con 7 punti base, cui corrisponde un sistema puro su F.

Alla rete di cubiche $|L|$ corrisponde sulla superficie F di genere 1, una rete pura di grado 4 appartenente all'involuzione I: le curve della rete (essendo questa di grado 4) hanno il genere 3; e la rete stessa è contenuta in un sistema lineare completo (rispetto al grado e rispetto al genere) $|C|$, di dimensione 3.

Questo sistema $|C|$ non appartiene all'involuzione I, altrimenti gli corrisponderebbe sul piano doppio π un sistema lineare ∞^3 contenente la rete di cubiche $|L|$, ed avente lo stesso grado 2, mentre un tal sistema sul piano π non esiste.

Può bensì darsi che il sistema $|C|$ non sia semplice ed appartenga ad un'altra involuzione I' su F: questo è l'unico caso possibile se $|C|$ non è semplice, perchè la serie (canonica) segata sopra una C generica dalle altre C (*serie caratteristica* di $|C|$) è sempre semplice oppure composta con una g_2', se la C è iperellittica.

Aggiungasi che se $|C|$ appartiene ad una involuzione I', ad I' corrisponde su π una serie di coppie di punti cui appartiene la rete $|L|$, ossia l'involuzione (di coppie

(1) Deduzione immediata del teorema di PICARD « *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales* » (Crelle, Bd. C.). Cfr. anche GUCCIA (Circolo di Palermo, t I).

(2) Il lettore potrà trovare raccolti i resultati noti sulle superficie a sezioni ellittiche (DEL PEZZO, GUCCIA, CASTELNUOVO) nel mio lavoro dei Mathem. Annalen (1895) « *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ed intersezioni variabili iperellittiche* ».

di punti) determinata da questa rete: dunque la (supposta) involuzione I′ deve esser permutabile coll'involuzione I, per modo che la I faccia corrispondere ad ogni coppia di punti coniugati in I′, una coppia analoga.

Comunque sia, l'involuzione I su F trasforma in sè stesso il sistema completo $|C|$, poichè trasforma in sè una rete dello stesso grado e in esso contenuta (la rete corrispondente ad $|L|$).

Riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ ai piani di S_3: la F si trasformerà in una superficie F_4 del 4° ordine, eventualmente ridotta ad una quadrica F_2 doppia (i cui punti rappresenterebbero le coppie di I′). L'involuzione I viene rappresentata su F_4 o su F_2 da una involuzione, subordinata da un'omografia involutoria che trasforma in sè la superficie. Vi è una rete di sezioni piane unite (le curve corrispondenti alle cubiche L di π), dunque l'omografia, che trasforma in sè F_4 (o F_2), e subordina su di essa l'involuzione I, è un'omologia (armonica).

La curva di coincidenza di I (corrispondente alla curva di diramazione del piano doppio π) è la sezione di F_4 (o F_2) col piano d'omologia.

Dunque la curva di conincidenza di I su F appartiene al sistema completo $|C|$. Di qui segue che la curva di diramazione del piano doppio π è una sestica con 7 punti doppi, cioè una curva del sistema $|2L|$ doppio della rete di cubiche $|L|$. Infatti eseguendo la trasformazione $[1, 2]$ che fa passare da π ad F, si passa dal sistema $|2L|$ al sistema $|2C|$ e dalla curva di diramazione di π alla curva di coincidenza di I contata due volte, cioè ad una curva del sistema (completo) $|2C|$.

Si deduce che alle rette del piano π corrispondono su F le curve di genere due di una rete di grado due, (rete pura).

11. Caso 4. Esiste sul piano π un sistema lineare ∞^3 $|L|$ di sestiche di genere due, con 8 punti base doppi, rappresentativo di un sistema puro sopra F.

Al sistema $|L|$ di grado 4 corrisponde su F un sistema puro di grado 8 e (quindi) di genere 5, contenuto in un sistema completo ∞^5 $|C|$ (dello stesso grado e genere).

Ragionando come nel numero precedente si prova che $|C|$ è semplice, oppure appartiene ad una involuzione I′ permutabile con I: deve aver luogo il secondo caso se sopra le C immagini delle L le altre C segano una serie (canonica) composta, cioè se quelle C sono iperellittiche (ed allora si deduce che sono iperellittiche tutte le C).

Dico che effettivamente, il fatto enunciato deve accadere, e quindi $|C|$ deve appartenere ad una involuzione I′ su F (permutabile con I).

Notiamo, a tal fine, che una C immagine di una L possiede una serie g^1_4 *autoresidua* (rispetto alla serie canonica), corrispondente alla g^1_2 di L, perchè alla serie caratteristica di $|L|$ (composta colla g^1_2) corrisponde una g^2_8 contenuta nella serie canonica di C: ogni gruppo della nominata g^1_4 è mutato in sè dall' involuzione di genere due γ^1_2 le cui coppie sono rappresentate dai punti di L. Ciò posto l' affermazione precedente si riduce all' affermazione del lemma:

Se una curva di genere 5 possiede una involuzione di genere due γ^1_2 (di coppie di punti) *la quale muti in sè ciascun gruppo di una serie* g^1_4 *autoresidua, la curva è iperellittica* (e la g^1_4 è contenuta in una g^2_4 doppia della g^1_2).

La dimostrazione del lemma si farà per assurdo.

Una curva di genere 5, non iperellittica, può rappresentarsi colla curva canonica C_8 d'ordine 8 di S_4. Suppongasi che su C_8 vi sia una involuzione γ^1_2 di genere due la quale muti in sè ciascun gruppo di una g^1_4 autoresidua.

Le coppie di gruppi della g^1_4 formano una g^2_8 segata su C_8 dagli iperpiani per una retta r, da cui C_8 viene proiettata secondo un cono quadrico di 2ª specie Q.

Le coppie della γ^1_2 vengono congiunte dalle generatrici di una rigata (di genere due) il cui ordine è 6: (¹) questa rigata giace sul cono Q, ed ammette la direttrice r (asse di Q) come retta doppia.

L'involuzione γ^1_2 su C_8 viene subordinata da un'omografia involutoria di S_4 che trasforma in sè C_8, la rigata di 6° ordine, e il cono Q: questa omografia ha come punti uniti (doppi) i punti di r. Essa possiede ancora un piano di punti uniti (non incidente ad r) che incontra tutte le generatrici della rigata (ognuna delle quali possiede due punti uniti): la sezione di questo piano colla rigata (appartenendo a Q) è una conica λ necessariamente doppia per la rigata. Ma questa conclusione è assurda, perchè la corrispondenza $[2, 2]$ che viene ad intercedere fra r e λ ha il genere ≤ 1, mentre essa dovrebbe avere il genere (due) della rigata.

Così il lemma è stabilito.

Dal precedente lemma segue, come abbiamo detto, che il sistema $|C|$ su F appartiene ad una involuzione I', permutabile con I. Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ agli iperpiani di S_5, si ha in S_5 una immagine doppia di F, del 4° ordine: la indicheremo con F_4. Sopra F_4 vi è una involuzione rappresentativa di I.

Si può supporre che la F_4 sia una rigata o una superficie di Veronese.

Nella prima ipotesi (dato che essa sia possibile) alle generatrici di F_4 dovrebbero corrispondere su π le cubiche aggiunte alle sestiche L: a queste cubiche corrisponderebbero dunque su F coppie di curve ellittiche d'un fascio necessariamente razionale (perchè la F è regolare (²)), e quindi d'un fascio puro su F: la curva di coincidenza dell'involuzione I su F sarebbe costituita da *due* curve del fascio, e però la curva di diramazione del piano doppio π sarebbe composta di due delle nominate cubiche, ossia sarebbe una sestica L (spezzata).

La F_4 sia, invece, una superficie di Veronese.

L'involuzione I di F muta in sè le curve d'un sistema ∞^3 dello stesso grado 8 contenuto in $|C|$ e però muta in sè il sistema completo $|C|$. Questo vuol dire che la I su F_4 è subordinata da un'omografia involutoria (che trasforma in se F_4). Ora un'omografia involutoria di S_5 che trasformi in sè una superficie di Veronese F_4, ha, su questa, una conica di punti uniti, ed un altro punto unito. (Lo si vede rappresentando F_4 sul piano in guisa che alle sue coniche corrispondano le rette del piano).

La detta conica, congiunta al punto nominato, rappresenta la curva di coincidenza di I su F. Ma al detto punto unito su F_4 corrisponde (come è facile vedere) su π il 9° punto comune alle cubiche aggiunte alle sestiche L (aventi 8 punti base doppi),

(¹) Segre, per es. nella Nota « *Sulle curve normali di genere p...* » Rend. dell'Istit. Lombardo, 1888.

(²) Castelnuovo « *Alcuni resultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* », n. 10 (Memorie dell'Accad. dei XL, 1896).

il quala punto di π è immagine di una coppia comune alle involuzioni I ed I' su F; dunque alla curva di diramazione del piano doppio π corrisponde su F una curva che, contata due volte, appartiene al sistema completo $|C|$ (rappresentato dalle quartiche sezioni iperpiane di F_4).

Si deduce, analogamente a ciò che si è fatto nel numero precedente, che la curva di diramazione del piano doppio π è una sestica L (con 8 punti doppi).

Quindi alle rette del piano doppio π corrispondono (in ogni caso) su F le curve di genere due di una rete di grado 4 (rete pura).

12. La nostra analisi essendo compiuta possiamo riassumere i resultati ottenuti enunciando il teorema:

Se una superficie F *avente tutti i generi uguali ad* 1 *è rappresentabile sul piano doppio, ossia possiede una involuzione razionale* I *di coppie di punti,*

1) *la superficie contiene una rete pura di genere due e grado due appartenente all'involuzione* I,

2) *oppure contiene un fascio lineare puro di curve ellittiche similmente appartenente all'involuzione* I.

Nel 1° caso la rappresentazione di F sul piano doppio π i cui punti sono riferiti alle coppie di I può esser fatta in modo che la curva di diramazione sia una sestica.

Nel 2° caso in modo che alle curve ellittiche del fascio nominato corrispondano (doppiamente) le rette d'un fascio in π, ed allora la curva di diramazione del piano doppio π segherà le rette di questo fascio in 4 o in 3 punti variabili cioè sarà una curva d'un certo ordine $2n$ avente un punto $(2n-4)$plo o $(2n-3)$plo (nel centro del fascio).

Se la F fosse rappresentata in un altro modo sul piano doppio π, si potrebbe sempre ridurci ad uno dei casi precedenti operando una trasformazione birazionale nello stesso piano π.

§ III.

13. Per esaurire la classificazione dei piani doppi aventi tutti i generi uguali ad 1 noi dobbiamo ora esaminare quali tipi di piani doppi con curva di diramazione d'ordine 6, o d'ordine $2n$ dotata di punto $(2n-4)$plo o $(2n-3)$plo riescono effettivamente di genere 1.

Si ha anzitutto:

Il piano doppio con sestica di diramazione ha in generale tutti i generi uguali ad 1.

I casi di degenerazione (corrispondenti a note singolarità della sestica) portano a noti piani doppi razionali o a piani doppi rappresentativi di rigate.

Tenendo conto del fatto che un piano doppio con curva di diramazione <6 $(=4$ o $=2)$, ha il genere 0, potremo limitarci nel seguito all'esame di piani doppi con curva di diramazione d'ordine $2n>6$, dotata di punto $(2n-4)$plo o $(2n-3)$plo.

14. Se si costruisce un piano doppio prendendo una qualsiasi curva di diramazione C_{2n} d'ordine $2n>6$, dotata di punto $(2n-4)$plo o $(2n-3)$plo O, questo

piano doppio risulta in generale di genere >1. Bisogna dunque ricercare le singolarità ulteriori da attribuirsi a C_{2n} perchè il piano doppio risulti di genere 1.

Ma, pel nostro scopo, si può indifferentemente sostituire ad una data C_{2n} una analoga curva di diramazione C_{2m} operando nel piano una trasformazione di Jonquières che lasci immutato il fascio di rette di centro O (pur scambiandone fra loro le rette): di ciò possiamo valerci, occorrendo, per semplificare la ricerca.

E possiamo anche supporre di aver già portato all' infinito il punto O, disponendo (eventualmente) d' una trasformazione omografica del piano: e supporre ancora (senza restrizione) che la retta all' infinito del piano non si stacchi da C_{2n}.

Allora assumiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xyz in guisa che l' asse x abbia come punto all' infinito il punto O: sia

$$\varphi(xy)=0$$

l' equazione della curva di diramazione C_{2n} del piano doppio; il polinomio $\varphi(xy)$ sarà soltanto di grado 4 o 3 in x.

Costruiamo la superficie F che ha per equazione

$$z^2=\varphi(xy):$$

essa è una immagine (semplice) del nostro piano doppio: il suo ordine è $2n$.

Indicato con A il punto all' infinito dell' asse z, la F ha A come punto $(2n-2)$plo; la F possiede inoltre la retta OA (retta all' infinito del piano xz) come $(2n-4)$pla o risp. $(2n-3)$pla secondo la moltiplicità di O per C_{2n}; infine la F possiede una curva doppia (sia pur ridotta all' intorno di A), che viene proiettata dal punto A secondo un cono d' ordine $n-1$ [1].

Le superficie d'ordine $2n-4$ aggiunte ad F si spezzano in quel cono fisso (d' ordine $n-1$) ed in residue superficie φ_{n-3} d' ordine $n-3$: queste φ_{n-3} si spezzano in gruppi di $n-3$ piani passanti per la retta OA, essendo ellittiche le sezioni di F con questi piani [2].

Se la C_{2n} non ha altre singolarità oltre O, la F ha dunque il genere $n-2$.

Ulteriori singolarità della F posssono corrispondere soltanto ad ulteriori punti multipli di C_{2n} oltre O. Se C_{2n} ha un punto multiplo B che influisce (sulla determinazione delle superficie aggiunte e quindi) sul genere di F, il piano che proietta B dalla retta OA si stacca da tutte le φ_{n-3}: la sua sezione con F costituisce una curva eccezionale di F rappresentata sul piano doppio dalla retta OB.

Dunque il piano doppio non può possedere altre curve eccezionali che rette proiet-

(1) Cfr. la mia Nota « *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche* », § 5 (Accad. dei Lincei, 1896).

(2) Cfr. NOETHER « *Zur Theorie des eindeutingen Entsprechens algebraischer Gebilde* » (Mathemat. Annalen. Bd. VIII).

— CASTELNUOVO « *Osservazioni intorno alla Geometria sopra una superficie* » (Nota I, Istituto Lombardo, 1891).

tanti da O un punto multiplo della curva C_{2n}: ciò è d'accordo col fatto che il fascio delle rette per O deve rappresentare un fascio puro su F.

15. Ciò posto supponiamo che la F abbia i generi uguali ad 1 e consideriamo la curva di diramazione C_{2n} del piano doppio su cui F è rappresentata, curva avente un punto $(2n-4)$plo o $(2n-3$plo O.

Consideriamo sul piano doppio il sistema lineare di tutte le curve razionali d'un certo ordine s assai alto, che hanno come $(s-1)$plo il punto O, e passano semplicemente per gli altri (eventuali) ϱ punti multipli di C_{2n}. A questo sistema $|K|$ (di grado $2s-1-\varrho$) corrisponde su F un sistema lineare puro di grado $4s-2-2\varrho$, e quindi di genere $\pi=2s-\varrho$ $(4s-2-2\varrho=2\pi-2)$.

Con una opportuna trasformazione di Jonquières del piano, che lasci fermo il fascio di rette O, il sistema $|K|$ può essere ricondotto ad uno dei seguenti tipi d'ordine minimo [1].

a) sistema $|K_r|$ costituito dalle curve d'un certo ordine r avente un punto base $(r-1)$plo O ed un punto base semplice B (distinto da O);

b) sistema $|K_r|$ delle curve d'un certo ordine r avente un punto base $(r-1)$plo O e λ punti base semplici infinitamente vicini ad O $(0 \leq \lambda \leq r-1)$: si aggiunga che questi λ punti (ossia le λ tangenti fisse delle K_r in O) possono supporsi non coincidenti.

La trasformazione eseguita nel piano muta C_{2n} in una curva C_{2m} d'un certo ordine $2m$ nella quale intenderemo incluse, *una* volta, le curve fondamentali che, contate un numero dispari di volte, vengono a corrispondere a punti (semplici o multipli) di C_{2m}.

Il piano doppio con curva di diramazione C_{2n} viene trasformato nel piano doppio con curva di diramazione C_{2m}.

I punti multipli di C_{2m} che possono influire sul genere del piano doppio sono soltanto i punti base di $|K_r|$: infatti $|K_r|$ rappresenta un sistema puro e quindi una K_r non può incontrare fuori dei punti base una retta eccezionale per O, come è una retta che congiunga un punto multiplo di C_{2m} influenti sul genere del piano doppio.

Dunque i punti multipli di C_{2m} influenti sul genere (del piano doppio ossia) di F, sono, oltre O, il punto B nel caso *a*), i λ $(\geq o)$ punti infinitamente vicini ad O sulle tangenti fisse delle K_r nel caso *b*).

Discutiamo ora separatamente i casi *a*) e *b*).

16. *caso a*). Il sistema $|K_r|$ ha il grado

$$r^2-(r-1)^2-1=2r-2\ ,$$

sicchè il suo corrispondente su F ha il grado

$$4r-4$$

e (poichè si tratta d'un sistema puro) ha il genere

$$\pi=2r-1 \quad (2\pi-2=4r-4).$$

[1] Guccia « *Generalizzazione di un teorema di Noether* » (Circolo di Palermo, t. I).

Segue che sopra una K_r (considerata come immagine doppia d'una curva iperellittica di genere π su F) vi sono

$$2\pi + 2 = 4r$$

punti di diramazione, distinti.

Ora questi punti contano fra i $2rm$ punti d'intersezione della K_r con C_{2m}, dai quali bisogna togliere, debitamente contati, i punti d'intersezione assorbiti nelle singolarità di C_{2m}.

Anzitutto fra le due rm intersezioni di K_r con C_{2m}, ne cadono in O

$$(2m-4)(r-1)$$

oppure

$$(2m-3)(r-1)$$

secondochè O è $(2m-4)$plo o $2m-3)$plo per C_{2m}: nel 1° caso quel numero và interamente tolto da $2rm$ perchè l'intorno di O non fa parte della curva di diramazione C_{2m}; all'opposto nel 2° caso gli $r-1$ punti di K_r infinitamente vicini ad O sono da considerarsi come punti di diramazione, e perciò pel nostro computo dobbiamo togliere da $2rm$ (non l'intiero numero $(2m-3)(r-1)$ ma) soltanto

$$(2m-3)(r-1)-(r-1)=(2m-4)(r-1):$$

si vede dunque che il risultato è lo stesso nei due casi.

Dopo aver tolto da $2rm$ il numero delle intersezioni di K_r con C_{2m}, assorbite in O, che non rappresentano punti di diramazione per K_r, bisogna ancora togliere il numero analogo relativo al punto B (base semplice per K_r).

Ora se donotiamo con ϱ la moltiplicità di B per C_{2m}, si ha che l'intorno di B figura o nò come facente parte della curva di diramazione C_{2m} secondochè ϱ è dispari o pari: ciò si potrebbe anche verificare trasformando B in una curva. Segue che il numero delle intersezioni di K_r e C_{2m} assorbite in B, che non rappresentano punti di diramazione di K_r, è $\overline{\varrho}$, dove $\overline{\varrho}$ designa il massimo numero pari contenuto in ϱ.

Otteniamo dunque il numero dei punti di diramazione su K_r dato da

$$2\pi + 2 = 4r = 2rm - (2m-4)(r-1) - \overline{\varrho}\,.$$

Si ricava l'uguaglianza fra numeri interi

$$4 + \overline{\varrho} = 2m.$$

La discussione di essa è breve.

Il punto B non può avere per C_{2m} una molteplicità $\varrho > 4$ senza che da C_{2m} si stacchi la retta O B, e (nella peggiore ipotesi) non può avere una molteplicità $\varrho > 5$ senza che la O B si stacchi due volte da C_{2m}: ora la C_{2m} può bensì spezzarsi, ma non mai contenere parti multiple (giacchè queste si possono supporre tolte un numero pari di volte); si conclude che

$$\varrho \leq 5 \qquad \bar{\varrho} \leq 4 .$$

D'altra parte, abbiamo già escluso dalla nostra discussione i casi in cui $2m \leq 6$ (n° 13), dunque vi è un solo modo di soddisfare alla predetta equazione in numeri interi, cioè prendendo

$$\bar{\varrho} = 4 \qquad 2m = 8 .$$

Nel caso *a*) siamo dunque condotti ad un tipo di piano doppio avente come curva di diramazione una curva di 8° ordine dotata di due punti quadrupli o (ciò che corrisponde ad un caso particolare del precedente) dotato di un punto 5plo e uno 4plo.

17. *caso b*). Il sistema $|K_r|$ ha il grado

$$r^2 - (r-1)^2 - \lambda = 2r - 1 - \lambda$$

sicchè il suo corrispondente su F ha il grado

$$4r - 2 - 2\lambda$$

ed (essendo puro) il genere

$$\pi = 2r - \lambda \qquad (2\pi - 2 = 4r - 2 - 2\lambda) .$$

Segue che sopra una K_r (considerata come immagine doppia d'una curva iperellittica di genere π su F) vi sono

$$2\pi + 2 = 4r - 2\lambda + 2$$

punti di diramazione, distinti.

Vediamo di valutare in altro modo il medesimo numero.

La K_r incontra C_{2m} in

$$2rm$$

punti, di cui

$$(2m - 4)(r - 1) \text{ o } (2m - 3)(r - 1)$$

sono riuniti in O, e (indicando con $\varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_\lambda$ le molteplicità per C_{2m} dei λ punti base di $|K_r|$ infinitamente vicini ad O)

$$\sum_1^\lambda \varrho_i$$

sono riuniti nei λ punti multipli di C_{2m} infinitamente vicini ad O.

Ora se O è $(2m-4)$plo per C_{2m} il suo intorno non deve riguardarsi come appartenente a C_{2m} e perciò le $(2m-4)(r-1)$ intersezioni di K_r che cadono in O debbono anzitutto esser tolte dal numero totale $2rm$ delle intersezioni di K_r e C_{2m}, nel computo dei punti di diramazione che cadono su K_r. Successivamente si deve togliere nello stesso modo da $2rm$ il numero ϱ_i per ogni punto ϱ_i plo di C_{2m} infinitamente vicino ad O, avente una molteplicità pari; invece $\varrho_i - 1$ per ogni punto analogo di molteplicità dispari. Denotando ancora con $\overline{\varrho}_i$ il massimo numero pari contenuto in ϱ_i, si ha dunque (quando O è $(2m-4)$plo per C_{2m}) il numero dei punti di diramazione su K_r dato da

$$2\pi + 2 = 4r - \lambda + 2 = 2rm - (2m-4)(r-1) - \sum_1^\lambda \overline{\varrho}_i :$$

in questo caso si ha quindi l'equazione fra numeri interi

$$6 + \sum \overline{\varrho}_i = 2m + 2\lambda .$$

Supponiamo invece che O sia $(2m-3)$plo per C_{2m}.

Nell'eseguire il nostro computo possiamo ancora considerare O come $(2m-4)$plo, togliendo dunque anzitutto da $2rm$ il numero $(2m-4)(r-1)$, perchè ora ogni punto di K_r infinitamente vicino ad O conta come un punto di diramazione: se uno di questi punti (base per K_r) è ϱ_i plo per C_{2m} e ϱ_i è pari si dovrà ancora in corrispondenza ad esso togliere ϱ_i da $2rm - (2m-4)(r-1)$; ma se ϱ_i è dispari, l'intorno del punto ϱ_i plo deve riguardarsi come facente parte di C_{2m} e però come innanzi toglieremo dal numero precedente soltanto $\varrho_i - 1$: dopociò veniamo a considerare in quel punto di K_r un punto di diramazione (appartenente all'intorno del punto ϱ_i plo di C_{2m}) che và a sovrapporsi al punto di diramazione che ivi già si trova perchè quel punto appartiene all'intorno di O; ma siccome quando due punti di diramazione sono riuniti essi non contano più come un punto di diramazione, bisogna togliere ancora 2 dal numero precedente: dunque per ogni punto ϱ_i plo di molteplicità dispari infinitamente vicino ad O si viene in definitiva a togliere $\varrho_i - 1 + 2 = \varrho_i + 1$ dal numero delle intersezioni di C_{2m} con K_r, pel computo dei punti di diramazione su K_r. (Se a qualcuno facesse difficoltà il precedente ragionamento sui punti infinitamente vicini ad O, non ha che da trasformare in una curva il punto O, decomponendo così la singolarità di C_{2m} che ivi si trova). Possiamo esprimere complessivamente il resultato del computo ottenuto colle avvertenze precedenti, introducendo la notazione $\underline{\varrho_i}$ per indicare il minimo numero pari che contiene ϱ_i (dunque ϱ_i o risp. $\varrho_i + 1$ secondochè ϱ_i è pari o dispari); allora si ha che il numero dei punti di diramazione su K_r è

$$2\pi + 2 = 4r - 2\lambda + 2 = 2rm - (2m-4)(r-1) - \sum_1^\lambda \underline{\varrho_i} :$$

in questo caso si ha dunque l'equazione in numeri interi

$$6 + \sum_1^\lambda \underline{\varrho_i} = 2m + 2\lambda .$$

Questa equazione non differisce da quella ottenuta pel caso in cui O è $(2m-4)$plo per C_{2m} se non pel significato diverso di $\overline{\varrho}_i$ $\underline{\varrho}_i$ quando ϱ_i è dispari.

Procediamo alla discussione della nominata equazione fondamentale tra numeri interi, che scriveremo nella forma

$$6+\Sigma_1^\lambda x_i = 2m+2\lambda.$$

Tenendo conto della possibilità che la curva C_{2m} si spezzi staccandosene *una* volta la retta che proietta da O un punto $\varrho_i$plo, si ha, nel primo caso

$$\varrho_i \leq 5\,,$$

nel secondo caso

$$\varrho_i \leq 4\,,$$

dunque risp.

$$\overline{\varrho}_i \leq 4\,, \qquad \underline{\varrho}_i \leq 4\,,$$

ossia

$$x_i \leq 4\,.$$

D' altra parte si ha, risp. nei due casi,

$$\Sigma\varrho_i \leq 2m-4 \qquad \Sigma\varrho_i \leq 2m-3\,,$$

onde (nella peggiore ipotesi è sempre)

$$\Sigma x_i \leq 2m-3+\lambda \qquad (x_i \leq \varrho_i+1)\,.$$

Ponendo

$$\Sigma x_i = 2m+3+\lambda-x$$

dove $x \geq 0$, l'equazione fondamentale diventa

$$3-x=\lambda\,,$$

da cui si deduce

$$\lambda=0\,, \quad \text{o} \quad \lambda=1\,, \quad \text{o} \quad \lambda=2\,, \quad \text{o} \quad \lambda=3\,;$$

ora le x_i (non nulle) essendo pari (ed avendosi $x_i \leq 4$) si ha

$$x_i=2 \quad \text{o} \quad x_i=4:$$

supporre che una x_i valga 2 o che essa manchi è indifferente rispetto all'equazione fondamentale

$$6+\Sigma_1^\lambda x_i = 2\,m+2\,\lambda:$$

potremo dunque prescindere dalle x_i uguali a 2; la loro eventuale presenza permetterebbe solo di aggiungere delle singolarità (non influenti sul genere del piano doppio) alla curva C_{2m}. Ciò posto avremo risp. pei 4 valori di λ

$$\Sigma x_i=0\;,\; \Sigma x_i=4\;,\; \Sigma x_i=8\;,\; \Sigma x_i=12\,.$$

Corrispondentemente l'equazione fondamentale ci dà

$$2m = 6 \ , \ 2m = 8 \ , \ 2m = 10 \ , \ 2m = 12 \, .$$

Siccome abbiamo già escluso il caso $2m = 6$, restano da esaminare i tre casi seguenti:

α) $$2m = 8 \quad , \quad \lambda = 1 \, .$$

Allora l'equazione fondamentale $6 + \Sigma x_i = 2m + 2\lambda$ ci dà

$$\Sigma x_i = x_1 = 4 :$$

segue, secondochè O è 4plo o 5plo per $C_{2m} \equiv C_8$, risp.

$$\overline{\varrho_1} = 4 \quad \text{cioè } \varrho_1 = 4 \quad (\text{essendo assurdo } \varrho_1 = 5)$$

o

$$\underline{\varrho_1} = 4 \quad \text{cioè} \quad \varrho_1 = 4 \quad \text{o} \quad \varrho_1 = 3 \, .$$

Dunque la curva di 8° ordine C_8 ha due punti 4pli infinitamente vicini oppure (caso particolare del precedente) un punto 5plo O ed un punto 3plo o 4plo ad esso infinitamente vicino.

β) $$2m = 10 \quad , \quad \lambda = 2 \, .$$

Allora l'equazione fondamentale ci dà

$$\Sigma x_i = x_1 + x_2 = 8 \, ,$$

$$x_1 = x_2 = 4 \, .$$

Si deduce che il punto O, 6plo o 7plo per ($C_{2m} \equiv$) C_{10}, deve essere 7plo per essa, poichè altrimenti vicino ad un punto 6plo vi sarebbero due punti 4pli o 5pli.

Si avrà quindi

$$x_i = \underline{\varrho_i} = 4 \, ,$$

e però

$$\varrho_i = 3 \quad \text{o} \quad \varrho_3 = 4 \, .$$

Dunque la curva C_{10} del 10° ordine ha un punto 7plo e due punti tripli (distinti) infinitamente vicini, di cui (in particolare) uno può essere 4plo.

γ) $$2m = 12 \quad , \quad \lambda = 3 \, .$$

Allora dall'equazione fondamentale si trae

$$\Sigma x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 4 \, .$$

La curva ($C_{2m} \equiv$) C_{12} è del 12° ordine e (come innanzi si deduce che) il punto O è 9plo (non 8plo) per essa: accanto ad O si hanno tre punti tripli infinitamente vicini (distinti).

18. Riassumendo concludiamo come già in principio avevamo enunciato:

I piani doppî coi generi ($p_g = p_n = P$) *uguali ad* 1 *rientrano tutti nelle 4 classi aventi per tipi:*

1) *il piano doppio con curva di diramazione del 6° ordine;*

2) *il piano doppio con curva di diramazione dell' 8° ordine dotata di due punti 4pli* (distinti o infinitamente vicini);

3) *il piano doppio con curva di diramazione di ordine 10 dotata di un punto 7plo e di due punti 3pli ad esso infinitamente vicini* (distinti);

4) *il piano doppio con curva di diramazione d' ordine 12 dotata di punto 9plo e di 3 punti 3pli ad esso infinitamente vicini* (distinti).

Si verifica facilmente che i nominati piani doppî hanno in generale i generi 1.

Ogni piano doppio coi generi uguali ad 1 può essere ricondotto ad uno dei 4 menzionati o ad un suo caso particolare mediante una trasformazione birazionale del piano.

F. Enriques.