ENRIQUES, FEDERIGO

Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 2$

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **VI** (1897), pp. 139-144.

Matematica. — *Le superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 2$. Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

1. Il sig. Noether ha introdotto nella teoria delle superficie algebriche due caratteri fondamentali, che ultimamente hanno ricevuto una opportuna estensione: sono il genere superficiale p (già considerato dal Clebsch) ed il genere lineare $p^{(1)}$.

È noto come questi caratteri si definiscano.

Data una superficie F, d'un certo ordine n (in S_3), si considerino le superficie d'ordine $n-4$, φ_{n-4}, ad essa *aggiunte*, le quali segano su F (all'infuori delle curve multiple e di certe curve *eccezionali* trasformabili in punti semplici) le *curve canoniche* di F: p e $p^{(1)}$ sono rispettivamente il numero delle φ_{n-4} (o delle curve canoniche) linearmente indipendenti, ed il genere delle dette curve canoniche.

Nell'ipotesi che si considera come più generale, delle superficie *regolari*, il genere p si può valutare mediante le formule di postulazione del sig. Noether, estese ormai al caso in cui F abbia singolarità qualunque: si ha così ad ogni modo la definizione aritmetica di un carattere invariantivo della superficie, che si designa con p_n e si chiama *genere numerico*, in opposizione al carattere precedente p o p_g detto *genere geometrico*. Si preferisce usare semplicemente la lettera p e il nome « genere (superficiale) » quando, come si suppone nel seguito, $p_g = p_n$.

Quanto al genere lineare $p^{(1)}$ (genere delle curve canoniche - $p > 0$) si deve notare che si possono avere anche qui diverse definizioni nel caso in cui le curve canoniche sieno riducibili: noi intenderemo sempre che $p^{(1)}$ sia il genere *virtuale* delle curve canoniche, comunque composte.

Il sig. Noether ha stabilito la disuguaglianza

$$p^{(1)} \geq 2p - 3$$

che vale sempre (come è facile vedere) comunque le curve canoniche sieno riducibili, purchè sia $p^{(1)} > 1$. Invece non si ha alcuna disuguaglianza analoga che fissi un massimo di $p^{(1)}$ dato p.

Perciò, quando si voglia procedere ad una classificazione effettiva delle superficie secondo i loro caratteri, converrà ordinare la classificazione secondo i valori del $p^{(1)}$, e cominciare dai valori più bassi che il $p^{(1)}$ può ricevere.

Ma il valore $p^{(1)} = 1$ è sotto molti rispetti eccezionale e dà luogo, come lo proveremo altrove (con esempî), ad infiniti tipi di superficie anche per valori fissati del genere p.

Cominceremo dunque ad esaminare le superficie di genere lineare

$$p^{(1)} = 2 \qquad \text{con } p > 0 \qquad (p=1\,,\ p=2)\,.$$

E perverremo alla seguente conclusione:

Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 2$ *e di genere superficiale* $(p_g = p_n =) p > 0$, *possono riferirsi birazionalmente ad uno dei seguenti tipi:*

1) $$p^{(1)} = 2 \qquad p = 1:$$

superficie F_6 *del 6° ordine dotata di 3 rette cuspidali giacenti in un piano e passanti per un punto dove la* F_6 *ha un contatto del 5° ordine con sè stessa;*

2) $$p^{(1)} = 2 \qquad p = 2:$$

piano doppio $z^2 = f(x\,y)$ *con curva di diramazione* $f(x\,y) = 0$ *del 10° ordine dotata di due punti 5pli infinitamente vicini.*

Diamo qui succintamente la dimostrazione del resultato.

2. Dobbiamo richiamare anzitutto dalla teoria generale delle superficie il seguente fatto fondamentale.

Sopra una superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$ e genere superficiale $p > 0$ esiste (almeno) una effettiva curva canonica (d'ordine > 0) [1].

Il sistema canonico ammette un sistema lineare *aggiunto* [2], di cui la dimensione vale

$$P_2 - 1 = p + p^{(1)} - 1\,,$$

il genere (virtuale)

$$P_2^{(1)} = 3p^{(1)} - 2$$

il grado (virtuale)

$$P_2^{(2)} = 4(p^{(1)} - 1)\,.$$

Questo sistema è il *sistema doppio* (completo) del sistema canonico; P_2 dicesi il *bigenere* della superficie.

Analogamente il sistema bicanonico ammette un sistema aggiunto, *triplo* del sistema canonico, che vien detto *sistema tricanonico*: la dimensione del sistema tricanonico vale

$$P_3 - 1 = p + 3p^{(1)} - 3\,,$$

il genere (virtuale)

$$P_3^{(1)} = 6p^{(1)} - 5\,,$$

(1) Cfr. la mia Memoria *Sui piani doppî di genere uno.* Mem. della Soc. it. delle Scienze, detta dei XL, 1896, § 4.

(2) Cfr. la mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (ibidem), cap. IV.

il grado (virtuale)

$$P_3^{(2)} = 9(p^{(1)} - 1)$$

(P_3 è il *trigenere* della superficie).

Se la superficie ha curve canoniche irriducibili (non si esclude che esse abbiano dei punti, base, comuni, i cui intorni vadano sommati ad esse) anche le curve bicanoniche e tricanoniche riescono irriducibili: di più le curve bicanoniche (cui una curva canonica presenta $p^{(1)}$ condizioni) non possono avere punti base (nemmeno in punti multipli) sopra una curva canonica e quindi non possono avere punti base sulla superficie; perciò i caratteri effettivi (genere e grado) del sistema bicanonico uguagliano in questo caso i caratteri virtuali.

3. Ciò posto consideriamo le superficie F coi caratteri

$$p^{(1)} = 2 \qquad p = 1\,,$$

e supponiamo dapprima che sopra F (o su una conveniente trasformata di essa) si abbia una curva canonica irriducibile. Le ∞^2 curve bicanoniche (irriducibili) di F non sono iperellittiche, giacchè altrimenti, incontrandosi esse in due coppie di punti coniugati (variabili), darebbero luogo, come si verifica facilmente, ad un sistema completo ∞^3 invece che ∞^2 (sarebbe allora $p = 2$ non $p = 1$).

Perciò il sistema tricanonico su F è semplice, vale a dire le curve di esso passanti per un punto generico non passano in conseguenza per altri punti variabili col primo. Le curve tricanoniche incontrano la curva canonica in 3 punti; questi formano, sulla detta curva di genere 2, una serie g'_3 che può avere al più un punto fisso, punto base semplice pel sistema tricanonico; segue che il genere effettivo delle curve tricanoniche uguaglia il suo valore virtuale $P_3^{(1)} = 7$. Se si considerano le curve tricanoniche di F che passano per un gruppo fissato della g'_3, si ha un sistema lineare ∞^3 che non possiede altri punti base: un sistema irriducibile di genere 7, e grado 6. Questo sistema è semplice almeno quando si sia fissato un gruppo generico della g'_3: per convincersene basta considerare la superficie F' di S_4, trasformata di F, che ha per sezioni iperpiane le curve tricanoniche; la F' ha l'ordine 9 o 8 (se il sistema tricanonico ha un punto base); vi è su F' una retta 3pla o (risp.) 2pla a immagine della curva canonica, e la proiezione della F' in S_3 fatta da un punto generico di questa retta riesce semplice se la F' non contiene ∞' curve sezioni di piani per a; ma in quest' ultimo caso il sistema bicanonico segato su F' dagli iperpiani per a sarebbe riducibile, ciò che si è escluso.

Possiamo dunque trasformare la data superficie F in una F_6, del 6^o ordine, in S_3, in modo che le sezioni piane di F_6 sieno le curve tricanoniche passanti per 3 punti fissi della curva canonica su F: la F_6 possiederà 3 rette eccezionali, passanti per un punto O, corrispondenti ai 3 punti nominati. L' intorno del punto O rappresenterà su F_6 la curva canonica, e quindi le sezioni piane per O daranno le curve bicanoniche.

Le sezioni piane generiche di F_6 hanno il genere 7: quelle fatte con piani per O hanno il genere 4. Queste ultime si segano due a due in 4 punti variabili, quindi O è un punto doppio di F_6: punto doppio particolare dove la superficie ha un contatto con sè stessa; l' ordine del contatto (cioè il numero dei punti doppî infinitamente vicini ad O sopra ogni sezione per O) è $\varrho + 2$, se ϱ denota la molteplicità di O per la curva doppia di F_6.

Esaminiamo questa curva doppia. Essa ha l' ordine 3, essendo 7 il genere delle sezioni piane di F_6; non può ridursi ad una retta tripla perchè altrimenti le curve canoniche, bicanoniche e tricanoniche si comporrebbero delle sezioni ellittiche di F_6 fatte coi piani per la retta tripla, e sarebbe $p^{(1)} = 1$.

Indichiamo con C_3 la curva doppia di F_6.

Vi sono ∞^2 superficie del 4° ordine biaggiunte ad F_6 seganti su di essa le curve bicanoniche; esse si spezzano nei piani per O ed in una superficie cubica fissa F_3 passante due volte per C_3: segue di qui che la C_3 è una cubica piana e che la F_3 si compone del piano di C_3 contato due volte e di un altro piano fisso α. Le condizioni che fissano il piano α possono soltanto essere espresse dal passaggio e dal contatto relativo a punti multipli proprî della F_6, e siccome è facile vedere che la F_6 non ha altri punti siffatti all' infuori di O, si conclude che il piano α deve passare per O e toccare in O la superficie, ossia deve essere il piano osculatore ad F_6 nel punto O, dove la F_6 ha un contatto con sè stessa.

Consideriamo la quadrica aggiunta alla F_6: essa si spezza nel piano di C_3 e in un altro piano fisso che, per le medesime ragioni, deve essere il piano α osculatore in O, prima considerato.

Ora se il piano α non fosse il piano di C_3, il che avverrebbe se C_3 non passasse per O, si avrebbe in α una curva del 6° ordine eccezionale, mentre la F_6 ha, come sappiamo, soltanto 3 rette eccezionali.

Dunque il piano di C_3 è il piano α e la C_3 ha in O almeno un punto doppio ($\varrho \geq 2$).

Il piano α contato due volte soddisfa alle condizioni imposte dal punto O alle superficie aggiunte, ma vi soddisfa appena se la C_3 ha in O la molteplicità $\varrho = 2$ e quindi la F_6 ha in O un contatto del 4° ordine con sè stessa: siccome l' intorno di O deve rappresentare la curva canonica di F_6, la quadrica aggiunta (ossia il piano α) deve essere *superaggiunta* relativamente al punto O. Per ciò si esige che la C_3 abbia in O un punto multiplo di ordine $\varrho = 3$, ossia che la C_3 si componga di 3 rette per O nel piano α. Ed allora la F_6 possiede 3 curve eccezionali date dagli intorni delle 3 rette doppie: essa avrà dunque (come deve avere) 3 rette eccezionali se le 3 rette doppie nominate sono cuspidali.

Ora si domanda: esisterà effettivamente una superficie F_6 del 6° ordine, dotata di 3 rette cuspidali giacenti in un piano α e passanti per un punto O dove la F_6 abbia un contatto del 5° ordine con sè stessa? e una tale F_6 avrà i caràtteri $p=1$, $p^{(1)}=2$?

Le due domande ammettono risposta affermativa.

Possiamo costruire una F_6 dotata delle singolarità domandate nel modo seguente:

Si prendano in un fascio di raggi 3 rette a, b, c. Consideriamo una superficie cubica F_3 per a, b, c. Possiamo costruire un'altra F_3 passante per a, b, c ed avente colla prima un contatto del 5° ordine nel punto O comune alle 3 rette. Le due F_3 si toccano secondo le rette a, b, c come risulta dalla ordinaria rappresentazione piana di una di esse. Prendiamo il piano α delle rette a, b, c contato 3 volte ed un cono cubico Γ di vertice O: la coppia di F_3 e la superficie $\alpha^3+\Gamma$ dànno luogo ad un fascio di superficie irriducibili del 6° ordine: la superficie generica F_6 del fascio ha appunto in O un contatto del 5° ordine con sè stessa, e possiede le a, b, c come rette cuspidali.

La F_6 dotata di queste singolarità ha anzitutto il genere geometrico $p_g=1$ perchè possiede *una* quadrica aggiunta: per essa anche il genere numerico $p_n=1$ perchè, le sue sezioni piane avendo il genere 7, la F_6 possiede ∞^7 superficie cubiche aggiunte cioè le superficie cubiche passanti per a, b, c, ed aventi in O un contatto del 4° ordine con una delle F_3 innanzi considerate (il numero di queste superficie cubiche si valuta tenendo presente la ordinaria rappresentazione piana della F_3). Infine la F_6 ha il genere lineare $p^{(1)}=2$; ciò si desume dal fatto che il suo bigenere vale

$$P_2=p^{(1)}+1=3$$

giacchè si hanno ∞^2 superficie cubiche biaggiunte alla F_6, composte del piano α contato due volte e di un qualsiasi piano per O: di ciò si ha una conferma nel fatto che due curve bicanoniche di F_6 si segano in $4(p^{(1)}-1)=4$ punti ecc.

4. La riducibilità della curva canonica sopra la superficie che si considera ($p=1$, $p^{(1)}=2$) farebbe cadere in difetto il ragionamento svolto innanzi, non permettendo di escludere a priori che le curve bicanoniche (o le loro parti variabili) sieno iperellittiche con due punti base, o che essi si spezzino in coppie di curve di genere due di un fascio. Ma la presenza di nuovi tipi di superficie corrispondenti a questi casi, si escluderebbe a posteriori coll'analisi dei piani doppi con curva di diramazione d'ordine 10 o 8 cui tali superficie dovrebbero potersi riferire mediante il sistema bicanonico, o mediante il sistema aggiunto al fascio di curve di genere due.

5. Passiamo a considerare le superficie di genere lineare $p^{(1)} = 2$ e di genere superficiale $p = 2$. Esse posseggono un fascio lineare di curve canoniche di genere 2. Le curve bicanoniche, aggiunte al fascio, sono ∞^3 e segano su ciascuna curva canonica la g_2^1 che le appartiene. Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema bicanonico ai piani di S_3 la superficie si trasforma in (una quadrica possedente un fascio di rette autoresiduo, dunque in) un cono quadrico da contarsi due volte. Il cono quadrico doppio possiede una curva di diramazione dell' ordine 10 (poichè le coniche sezioni piane rappresentano curve di genere 4 sulla superficie iniziale); tale curva sega le generatrici del cono (immagini di curve del genere 2) in 5 punti.

Per proiezione il cono quadrico doppio dà luogo al:

piano doppio con curva di diramazione del 10° ordine dotata di due punti quintupli infinitamente vicini.

Questo è il tipo delle superficie coi caratteri $p^{(1)} = 2$, $p = 2$, $c\partial\partial$.

Si noti che il ragionamento svolto non può cadere in difetto per la riducibilità delle curve canoniche, bastando, se mai, considerare il sistema aggiunto alle parti variabili di esse il cui genere non può essere < 2 giacchè per ogni superficie con un fascio di curve ellittiche si ha $p^{(1)} = 1$.