Enriques, Federigo

Sulle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 3$

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **VI** (1897), pp. 169-174.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 3$. Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

1. In una precedente Nota ho determinato le superficie di genere lineare $p^{(1)} = 2$ (e di genere superficiale $p > 0$).

Mi propongo di effettuare qui l'analoga ricerca per $p^{(1)} = 3$. Per semplicità mi riferirò ancora a superficie (regolari) di genere

$$p_n = p_g = p > 0\,,$$

e supporrò inoltre che esse abbiano curve canoniche irriducibili (senza esclu-

(1) Veronese e Bordiga, Mem. citate. Questa superficie, come nota il Bordiga, era però già nota al Caporali che ne aveva dato notizia nella Nota *Sopra i sistemi lineari di curve algebriche piane* (Milano, 1879, Hoepli).

(2) Vedi ad es. Del Pezzo: *Sulle superficie dell' n^{mo} ordine immerse nello spazio ad n dimensioni*. Rend. del Circ. mat. di Palermo t. I, fasc. 4, 1887.

Di questa superficie F_2^4 mi sono occupato anch' io nella Nota citata nella prima pagina della presente.

dere che il sistema canonico possa avere dei punti base i cui intorni vadano sommati alle curve canoniche).

In corrispondenza al valore $p^{(1)} = 3$ $(p > 0)$ si può avere

$$p = 3 \,,\; p = 2 \,,\; p = 1 \,.$$

Ecco i relativi tipi di superficie ($p^{(1)} = 3$, $p > 0$, curve canoniche irriducibili):

1) $$p^{(1)} = 3 \qquad p = 3:$$

piano doppio $z^2 = f(xy)$ *con curva di diramazione* $f(xy) = 0$ *di ordine 8*;

2) $$p^{(1)} = 3 \qquad p = 2:$$

piano doppio $z^2 = f(xy)$ *con curva di diramazione* $f(xy) = 0$ *composta di una retta r e di una curva del 9° ordine dotata di 3 punti tripli su r e di altri due punti tripli infinitamente vicini.*

3) $$p^{(1)} = 3 \qquad p = 1:$$

a) superficie di ordine 8 dotata di una curva doppia d'ordine 14 (che può degenerare) la quale è definita, nel caso generale, come la curva doppia d'una superficie di ordine 7, razionale, a sezioni ellittiche;

b) piano doppio $z^2 = f(xy)$ *con curva di diramazione* $f(xy) = 0$ *di ordine 10, dotata di un punto quadruplo e di 4 coppie di punti tripli infinitamente vicini.*

2. Le superficie coi caratteri

$$p^{(1)} = 3 \qquad p = 3$$

si determinano subito.

Il sistema canonico (irriducibile) ha il grado $p^{(2)} = p^{(1)} - 1 = 2$ e però non ha punti base: la rete canonica riferita proiettivamente alla rete delle rette di un piano dà la rappresentazione della superficie su questo piano doppio; la curva di diramazione del piano doppio ha l'ordine 8.

3. Si abbia una superficie F coi caratteri

$$p^{(1)} = 3 \qquad p = 2 \,.$$

Il sistema bicanonico ha la dimensione

$$P_2 - 1 = 4 \,,$$

il genere

$$P_2^{(1)} = 7 \,,$$

il grado

$$P_2^{(1)} = 8 :$$

esso è irriducibile, tale essendosi supposto il sistema canonico. Una curva bicanonica sega le ∞^1 curve canoniche di F, ciascuna in 4 punti variabili, costituenti un gruppo della g_4^2 canonica, perciò il sistema bicanonico non ha punti base: segue che i precedenti caratteri di esso dati virtualmente sono anche i suoi caratteri effettivi. Dimostriamo che le curve canoniche sono iperellittiche, e perciò tutte le curve bicanoniche passanti per un punto della superficie F passano in conseguenza per un altro punto variabile col primo.

Facciamo la dimostrazione per assurdo.

Se le curve canoniche della superficie F non sono iperellittiche, in opposizione all'ipotesi precedente il sistema bicanonico è un sistema semplice, e la superficie F si può trasformare in una F_8 d'ordine 8 di S_4, a sezioni (iperpiane) di genere 7. La F_8 deve possedere un fascio autoresiduo di quartiche piane (canoniche) di genere 3, i cui piani (segandosi a due a due secondo una retta) hanno una retta fissa comune r.

Ora mostreremo (per assurdo) che una siffatta F_8 non può esistere.

In S_4 vi sono ∞^{34} varietà cubiche V_3; esse segano sulla F_8 (supposta esistente) un sistema lineare che è (tutto o in parte) il sistema 6-canonico (6plo del sistema canonico), ossia il sistema aggiunto al sistema 5-canonico.

Il sistema 5-canonico di F_8 ha il genere

$$P_5^{(1)} = 5p^{(1)} + 10\,(p^{(1)} - 1) - 4 = 31\,,$$

e però il sistema 6-canonico ha la dimensione

$$P_6 - 1 = p + 31 - 1 = 32\,.$$

Segue che per F_8 passano almeno ∞^1 varietà cubiche V_3. Ora una V_3 per F_8 non può essere che un cono cubico di 2ª specie di asse r, perchè la V_3 contiene ∞^1 quartiche in altrettanti piani per r.

È dunque assurdo che esistano due V_3 per F_8, giacchè due coni cubici di asse r non possono aver comuni che piani per r.

È dunque assurda l'esistenza della F_8.

Segue che le curve canoniche della data superficie ($p^{(1)} = 3$, $p = 2$) sono iperellittiche, e le curve bicanoniche passanti per un punto (di una di esse) passano in conseguenza per un altro punto coniugato del primo.

Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema bicanonico agli iperpiani di S_4, si ottiene ora (non più una F_8 semplice, ma) una F_4 (del 4° ordine) doppia (con una certa curva di diramazione) trasformata della data superficie F. La F_4 deve essere razionale normale in S_4, quindi a sezioni normali ellittiche; la F_4 è dunque la intersezione di due quadriche di S_4 (superficie di *Segre*).

Sulla F_4 le curve canoniche della data superficie F hanno per immagini (doppie) le coniche d'un fascio autoresiduo: i piani di queste coniche passano per una retta r, non appartenente ad F_4, e congiungente due punti doppi A, B di F_4.

Vi sono su F_4 (in generale 16 rette, nel nostro caso) 8 rette, di cui 4 passano per A, 4 per B. Prendiamo una retta a per A. Gli iperpiani per a segano su F_4 le cubiche C_3 di una rete omaloidica col punto base A.

Una conica C_2 sezione di F_4 con un piano per r ed una C_3, segano su un'altra C_3 un gruppo di 3 punti (incluso il punto A), e siccome sulla F_4 doppia $|C_2 + C_3|$ è il sistema aggiunto alla rete $|C_3|$, si vede così che le C_3 rappresentano, sulla superficie F riferita alla F_4 doppia, curve di genere 4.

Proiettiamo F_4 da a sopra un piano, essa verrà rappresentata su questo, punto per punto. La data superficie F verrà dunque rappresentata sul piano doppio π, e (siccome le rette del piano sono le proiezioni delle C_3) la curva di diramazione del detto piano doppio sarà una C_{10} del 10° ordine, della quale farà parte una retta a' immagine del punto A. Le immagini delle sezioni iperpiane di F_4, sul piano π, sono date dalle cubiche che passano per tre punti fissi $A_1 A_2 A_3$ di a' e per altri due punti fissi infinitamente vicini $B_1 B_2$ (corrispondenti al punto doppio B di F_4), alle quali cubiche si può aggiungere la parte fissa a'.

Si trae di quì che le 8 rette di F_4 incontrano ciascuna in 4 punti (inclusi i punti A o B) la curva di diramazione. Quindi la C_{10}, curva di diramazione del piano doppio π, ha 3 punti qudrupli in $A_1 A_2 A_3$ e due punti tripli infinitamente vicini in $B_1 B_2$. D'altra parte si verifica facilmente che: il piano doppio con curva di diramazione C_{10} dotata di due punti tripli infinitamente vicini (riuniti in B) e di 3 punti quadrupli su una retta r (facente parte di C_{10}) ha il genere superficiale

$$p = (p_g = p_n =)\, 2$$

e il genere lineare

$$p^{(1)} = 3\,,$$

avendosi, sul piano, come immagini delle curve canoniche le rette per B (aumentate della parte fissa eccezionale r).

4. Passiamo alle superficie F coi caratteri

$$p^{(1)} = 3 \qquad p = 1\,.$$

Il sistema bicanonico ha la dimensione $P_2 - 1 = 3$, il genere 7 e il grado 8, come nel caso precedente. Questi caratteri virtuali sono anche per esso caratteri effettivi, giacchè stante la supposta irriducibilità della curva canonica il sistema bicanonico è irriducibile, ed inoltre esso non ha punti base sulla curva canonica, giacchè sega su questa curva la serie canonica completa $(p_g = p_n = p)$.

In generale il sistema bicanonico è semplice e si può quindi trasformare la F in una F_8 d'ordine 8 di S_3, a sezioni piane del genere 7. La F_8 deve possedere una curva doppia C_{14} dell'ordine 14, eventualmente riducibile a curve d'ordine minore con maggiore molteplicità.

Vediamo come si può caratterizzare la C_{14} nel caso generale.

La F_8 possiede una superficie biaggiunta φ_7, d'ordine 7, che presa insieme ad un piano dà una biaggiunta φ_8 d'ordine $8 = 2 . 8 - 8$. La φ_7 possiede la C_{14} come curva doppia. La φ_7, supposta irriducibile, è dunque una superficie a sezioni ellittiche, ed è una superficie razionale perchè per la C_{14} passa una superficie, φ_4, del 4° ordine.

D'altra parte si prenda una superficie φ_7, del 7° ordine, razionale, a sezioni ellittiche, e si consideri la sua curva doppia C_{14}. È facile provare che la C_{14} è curva doppia per una superficie irriducibile F_8, di ordine 8, coi caratteri

$$p^{(1)} = 3 \qquad p_n = p_g = p = 1 \, .$$

Si può costruire una tale superficie F_8 considerando una superficie del sistema lineare determinato dalla φ_7 aumentata di un piano e dalla φ_4 (aggiunta a φ_7) contata due volte.

La F_8 così costruita ha effettivamente il genere

$$(p =) \; p_n = p_g = 1 \, ,$$

ammettendo *una* superficie aggiunta del 4° ordine (anche secondo le formule aritmetiche); essa possiede una curva canonica del 4° ordine, questa è una quartica piana di genere $p^{(1)} = 3$, come resta provato anche dal fatto che le curve bicanoniche, sezioni piane, di F_8 la segano in $2p^{(1)} - 2 = 4$ punti.

Dunque il tipo generale delle superficie coi caratteri

$$p = 1 \qquad p^{(1)} = 3$$

è la superficie F_8 di ordine 8 avente come curva doppia, la curva C_{14} dell'ordine 14 doppia per una superficie razionale del 7° ordine: tutti i caratteri di questa curva doppia si possono valutare facilmente.

In questo tipo generale rientrano, eventualmente in corrispondenza a degenerazioni della C_{14} (e della φ_7), tutte le superficie coi nominati caratteri $p = 1$ $p^{(1)} = 3$ (curva canonica irriducibile) salvo quella, che dovremo considerare a parte, per cui il sistema bicanonico non riesce semplice: questa infatti non rientra nel precedente tipo, almeno se non si vogliono riguardare come possibili le degenerazioni della C_{14} per cui degenera anche la F_8 stessa, riducendosi ad una F_4 doppia.

5. Procediamo dunque ad esaminare partitamente le superficie dotate dei caratteri $p^{(1)} = 3$, $p = 1$ (curva canonica irriducibile), sopra cui le curve

bicanoniche passanti per un punto generico, passano in conseguenza per un altro punto variabile col primo. In questo caso la curva canonica di F riesce iperellittica, le curve bicanoniche segando su di essa la serie (completa) doppia della g_2^1. Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema bicanonico di F si ottiene ora come trasformata di F, non più una F_8 semplice, ma una F_4, del 4° ordine, doppia.

La F_4 è una superficie normale di S_3 e contiene una conica antoresidua rispetto alle sezioni piane di F_4, immagine della curva canonica di F. Il piano della detta conica tocca in ciascun punto di essa conica la superficie F_4.

La curva di diramazione della F_4 incontra la conica e quindi il piano di essa in 8 punti; essa ha dunque l'ordine 8. Segue che le sezioni piane di F_4 hanno il genere due, ossia la F_4 è la superficie (razionale) del 4° ordine con retta doppia.

La F_4 si può rappresentare sopra un piano π, assumendo come immagini delle sue sezioni, le curve del 4° ordine C_4 che passano due volte per un punto O ed una volta per 8 punti $A_1 A_2 \dots A_8$ (1).

Poichè la F_4 possiede un piano tangente secondo una conica, fra le C_4 ve n'è una che si riduce ad una conica contata due volte, e perciò gli 8 punti $A_1 \dots A_8$ compongono 4 coppie di punti infinitamente vicini $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$, $A_7 A_8$.

Su F_4 vi è una rete omoloidica di quartiche, immagini delle rette del piano π, essa rappresenta su F un sistema di grado $n = 2$ e di un certo genere π: le curve del sistema sono incontrate dalle curve bicanoniche (sezioni piane di F_4 contate due volte) in $2\{2(\pi - 1) - n\} = 8$ punti; dunque si ha $\pi = 4$. Segue che la curva di diramazione C_8 della F_4 viene rappresentata sul piano π da una curva del 10° ordine C_{10} dotata del punto quadruplo O e delle coppie di punti tripli infinitamente vicini $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$, $A_7 A_8$.

Il piano doppio dotato della curva di diramazione C_{10}, fornisce effettivamente (come si può verificare) una superficie coi caratteri

$$p = p_g = p_n = 1 \qquad p^{(1)} = 3\,,$$

ed è, per ciò che abbiamo visto, il tipo delle superficie dotate di questi caratteri (curva canonica irriducibile) che hanno un sistema bicanonico non semplice.

Le verifiche relative ai caratteri dei piani doppi considerati in questa Nota, verifiche che abbiamo omesso di sviluppare, si compiono subito come corollario di alcuni resultati generali sui piani doppi, che avremo occasione di esporre altrove.

(1) Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung*. Mathem. Annalen, Bd I. Sturm, Mathem. Annalen, Bd. IV.