Enriques, Federigo

Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali

Math. Annalen **LII** (1899), pp. 449-456.

Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.

Di

Federigo Enriques a Bologna.*)

Una serie (algebrica) di curve (algebriche) sopra una superficie algebrica

$$f(x\,y\,z) = 0$$

dicesi costituire un *fascio* allorchè ogni punto generico della superficie appartiene ad *una* curva della serie.

Facendo astrazione dalle eventuali componenti fisse, un fascio di curve C sopra la superficie $f = 0$, può essere definito mediante due funzioni razionali

$$X(xyz), \quad Y(xyz),$$

legate fra loro da una relazione algebrica

$$\varphi(X\,Y) = 0,$$

le quali assumono lo stesso valore nei punti di una curva C.

Il genere p della relazione $\varphi = 0$ è il *genere del fascio;* se $p = 0$ il fascio è razionale o *lineare,* e le due funzioni X, Y possono venir sostituite da una sola.

Si abbia sopra la superficie $f = 0$ un fascio di curve C, irriducibili, razionali; vale a dire, rappresentato il fascio nel modo anzidetto, supponiamo che la curva generica C data dalle equazioni

$$(1) \qquad f = 0, \quad X = X(xyz), \quad Y = Y(xyz),$$

sia irriducibile, razionale. Allora le coordinate dei punti di essa si possono esprimere razionalmente per un parametro Z, colle formule

$$(2) \qquad x = \Phi_1(Z), \quad y = \Phi_2(Z), \quad z = \Phi_3(Z);$$

e così ogni curva C del fascio (corrispondente ad una coppia generica XY) si può pensare riferita punto per punto ad una retta, generatrice

---

*) Questo articolo è un rifacimento, con alcune semplificazioni, di due note pubblicate nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; Novembre, Decembre 1898.

del cilindro $\varphi(XY)=0$. Dopo ciò sembra, a prima vista, che la superficie $f=0$ risulti trasformata birazionalmente nel cilindro nominato. Ma questa deduzione non è affatto legittima, perchè la rappresentazione di una curva $C\equiv(XY)$ sopra la retta omologa, dipenderà in generale da alcune *irrazionalità aritmetiche*, che entreranno nei coefficienti delle funzioni Φ, e queste irrazionalità potranno variare colla C, dipendendo *algebricamente* da X, Y.

Si presentano pertanto due questioni che il sig[r] Noether ha studiate nella memoria „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen"*):

1) Assegnare le irrazionalità aritmetiche da cui può farsi dipendere la rappresentazione parametrica di una curva razionale C, con funzioni razionali di un parametro.

Il sig[r] Noether ha risposto completamente a tale questione, facendo vedere che ogni curva razionale può sempre essere trasformata, con una sostituzione razionale a coefficienti razionali, in una conica; e quindi l'irrazionalità di cui si tratta è, tutt' al più, un radicale quadratico. Da ciò segue, in particolare, che una superficie contenente un fascio di curve razionali può essere trasformata birazionalmente in una superficie contenente un fascio di coniche.

2) Vedere se, e come, le irrazionalità aritmetiche che entrano nella rappresentazione razionale di una curva C, possono scegliersi in guisa che risultino indipendenti dalla curva (o conica) C, considerata nel fascio, ossia da X, Y.

Il sig[r] Noether ha dimostrato che a tal fine occorre determinare una curva unisecante le C; ed ha determinato effettivamente una tale unisecante pel caso ($p=0$) in cui il fascio delle C sia lineare, dimostrando pertanto che, in questo caso, la superficie $f=0$ è razionale. La determinazione di una curva unisecante le (coniche) C, nel caso $p>0$, curva di cui l'esistenza restava dubbia**), viene stabilita in questo lavoro. Così rimane dimostrato in generale il teorema:

Ogni superficie algebrica $f(xyz)=0$ contenente un fascio di curve

---

*) Cfr. questi Annalen, Bd. III.

**) Posteriormente al lavoro citato del sig[r] Noether, la questione non ha ricevuto alcun contributo notevole, all' infuori di quello portato dal sig[r] Painlevé nelle sue belle „Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles", relativo al caso in cui le curve (razionali) C sieno le traiettorie di un gruppo semplicemente infinito di trasformazioni birazionali della superficie $f=0$, in sè stessa. Ma la dimostrazione del sig[r] Painlevé si appoggia in sostanza sul fatto, che sopra ogni curva C si hanno allora due punti *uniti*, i quali descrivono due curve separate, unisecanti le C. E, viceversa, per costruire il gruppo nominato, occorre conoscere le due curve (unisecanti) di punti uniti. Così, per quanto riguarda la questione generale qui trattata, non si poteva trarre aiuto dal resultato del sig[r] Painlevé.

razionali, si può trasformare birazionalmente in una rigata (p. e *in un cilindro* $\varphi(XY) = 0$), avente il genere p del fascio.

1. Sia F una superficie contenente un fascio di coniche C, avente un certo genere p.

Questa superficie si può rappresentare sopra una rigata doppia φ, giacchè ogni conica C del fascio può essere riferita ad una retta doppia per proiezione da un punto esterno, e tale operazione si può compiere in modo razionale dati i coefficienti dell' equazione della conica, ossia razionalmente per tutte le coniche del fascio.

La rigata doppia φ possederà una curva di diramazione costituita da una curva K bisecante le generatrici, e da un certo numero di generatrici $a_1 a_2 \dots a_\varrho$. Si può supporre che la K sia irriducibile, giacchè se essa fosse spezzata in due curve, unisecanti le generatrici di φ, a ciascuna di esse corrisponderebbe sopra F una curva unisecante le C, la quale permetterebbe di rappresentare la F sopra una rigata (semplice).

Supposto che la curva K possieda dei punti singolari, ci si può sempre ridurre al caso in cui siffatte singolarità non esistono. Infatti si trasformi la K in una curva K' priva di singolarità, in uno spazio S_r; unendo le coppie di punti di K' che corrispondono alle coppie di K poste sulle generatrici di φ, si può costruire una nuova rigata φ' in corrispondenza birazionale con φ*), sopra cui la F risulta rappresentata doppiamente; e la curva K' insième a qualche generatrice di φ' costituirà la curva di diramazione della nuova rigata doppia φ'.

Supporremo dunque addirittura che la curva K (curva di diramazione di φ) sia priva di punti singolari. La curva K, il cui genere denoteremo con π, apparterrà ad un certo spazio S_r, ed avrà, in esso, un certo ordine n. Essa può sempre trasformarsi in un' altra curva (normale) K' avente un certo ordine n', arbitrariamente grande, ed appartenente ad uno spazio $S_{r'}$ la cui dimensione $r' = n' - \pi$. Allora, come è stato indicato, si trasforma anche la rigata φ in una nuova rigata doppia φ' (normale in $S_{r'}$). Le generatrici di φ' che vengono a far parte delle nuova curva di diramazione sono in generale quelle che corrispondono ad $a_1 \dots a_\varrho$, più quelle che corrispondono a punti (fondamentali) della curva K; si può dunque evitare l'esistenza di queste ultime generatrici di diramazione, operando opportunamente la trasformazione di K in K', p. e. scegliendo come sistema trasformante (da riferirsi proiettivamente al sistema degli iperpiani di $S_{r'}$) il sistema di tutte le varietà V_{r-1}^m dello S_r, aventi un certo ordine m abbastanza alto.

La possibilità della indicata trasformazione ci permette di attribuire

*) Per tale costruzione cfr. Segre „Courbes et surfaces réglées algébriques" II. pag. 4. Questi Annalen, Bd. XXXIV.

senz' altro alla curva di diramazione della rigata doppia φ la proprietà di essere composta

a) di un certo numero ϱ di generatrici $a_1 \ldots a_\varrho$;

b) di una curva K di genere π, irriducibile, senza singolarità, bisecante le generatrici di φ, avente un ordine n arbitrariamente grande, in confronto ai valori indipendentemente fissati di π e ϱ, ed appartenente ad uno spazio S_r di dimensione $r = n - \pi$.

Siccome $n + \varrho$ è l'ordine della totale curva di diramazione per la rigata doppia φ, i numeri n e ϱ avranno la stessa parità.

2. Si considerino ora gli $\infty^{r-\varrho}$ iperpiani di S_r che passano per ϱ punti scelti fra le intersezioni di K colle generatrici $a_1 \ldots a_\varrho$, una sopra ciascuna generatrice. Gli iperpiani nominati segheranno sopra K una serie lineare $g^{r-\varrho}_{n-\varrho}$. Fra i detti iperpiani ve ne saranno alcuni tangenti in $\frac{n-\varrho}{2}$ punti alla K (fuori dei punti fissati sopra $a_1 \ldots a_\varrho$), purchè si abbia

$$r - \varrho \geq \frac{n-\varrho}{2}.$$

Questa disuguaglianza supposta soddisfatta (come può farsi prendendo $n \geq 2\pi + \varrho$), la effettiva determinazione degli iperpiani voluti dipende, come è noto, da un problema di bisezione, delle funzioni abeliane inerenti alla curva K.

Ora alla sezione di φ con uno degli iperpiani costruiti (tangente, ovunque la incontra, alla curva di diramazione della rigata doppia φ), corrisponde sopra F una curva Θ, bisecante le coniche C del fascio (di genere p) dato su F, ed avente il genere (minimo per le bisecanti)

$$P = 2p - 1;$$

ciò risulta dalla nota formula di corrispondenza del sig^r Zeuthen, poichè la curva stessa possiede una involuzione di genere p di coppie di punti, priva di elementi di coincidenza.

La curva Θ può spezzarsi in due curve di genere p, unisecanti le coniche C; anzi ciò accade sempre se $p = 0$; in questo caso si ottiene subito la rappresentazione della superficie F, punto per punto, sopra una rigata.

3. La curva Θ incontra una conica C generica in due punti A, B; le tangenti in A, B s'incontrano in un certo punto O; da O la conica stessa può essere proiettata sopra una retta doppia. Siccome tale operazione si compie razionalmente per ogni C, essa conduce a rappresentare la superficie F sopra una rigata doppia Φ, in modo che la curva di diramazione di Φ sia composta mediante una curva Θ' corrispondente alla Θ, più qualche generatrice.

Allora applicando alla Φ, in relazione alla Θ', i ragionamenti svolti innanzi per la φ, si può costruire sopra F una nuova curva bisecante λ, di genere minimo $P = 2p - 1$, corrispondente ad una curva unisecante le generatrici di Φ. Questa curva λ è con Θ in una semplice relazione: le coppie di punti segate da Θ e da λ sopra una conica C (del fascio dato su F) si separano armonicamente. Tale relazione può essere espressa dicendo che le curve Θ e λ sono due *bisecanti armoniche* del fascio di coniche C.

Concludiamo pertanto che „sopra una superficie F possedente un fascio, di genere p, di coniche, si possono costruire due bisecanti armoniche aventi il genere minimo

$$P = 2p - 1\text{“}.$$

Se una di queste è spezzata in due unisecanti, la F può riferirsi ad una rigata. Supporremo dunque che ambedue le curve sieno irriducibili ($p > 0$).

4. Le due curve si possono rappresentare doppiamente sopra uno stesso ente algebrico ∞^1 γ, di genere p, privo di elementi di diramazione; basta infatti considerare come ente γ il fascio delle coniche C, e far corrispondere ad ogni C (che è un elemento di γ) la coppia dei punti, della Θ o della λ, che si trovano su di essa.

Ad ogni serie lineare g'_n, presa su γ, corrisponde su Θ (e su λ) una serie lineare g'_{2n} composta colle coppie che corrispondono agli elementi di γ (coppie formanti un' involuzione che denoteremo collo stesso nome „γ“). In particolare può darsi che la detta g'_{2n} sia composta mediante una g'_n autoconiugata rispetto all' involuzione γ, ossia può darsi che ogni gruppo della g'_{2n} sia composto di due gruppi G_n, appartenenti ad una medesima g'_n, coniugati nell' involuzione nominata.

Come dimostreremo più tardi, è sempre possibile di scegliere sull' ente γ una g'_n cui corrisponda tanto sulla curva Θ come sulla λ una g'_{2n} composta mediante una g'_n autoconiugata. Poniamo di avere scelto una g'_n siffatta. Alla g'_n di γ corrisponde sulla superficie F un fascio *lineare* $|L|$ di curve riducibili L, ogni curva del fascio essendo composta di n coniche C; indichiamo con $C_1\, C_2 \ldots C_n$ le coniche costituenti insième una curva generica L del detto fascio lineare.

Ci proponiamo di costruire sopra la superficie F una involuzione I_n, di gruppi di n punti, alla quale il nominato fascio $|L|$ appartenga, vale a dire una involuzione I_n siffatta che il gruppo G_n individuato da un punto di C_1, abbia un punto sopra C_2, uno sopra $C_3 \ldots$ uno sopra C_n.

La costruzione di una tale I_n esige che le curve $C_1\, C_2 \ldots C_n$ vengano riferite l'una all' altra in un riferimento proiettivo, che sia razionalmente determinato allorchè è dato il gruppo di coniche $C_1\, C_2 \ldots C_n$. Si può stabilire un riferimento siffatto per mezzo delle curve Θ e λ. Consideriamo infatti ad es. le due coniche C_1 e C_2. Indichiamo con

A, B le intersezioni di C_1 con Θ, e con E, F le intersezioni della stessa C_1 con λ. Per ipotesi le coppie di punti segate da Θ su $C_1 C_2 \dots C_n$ si distribuiscono in *due* gruppi G_n, di una g'_n, coniugati rispetto alla involuzione γ; il punto A apparterrà ad *uno* di questi gruppi, il punto B all' altro. Allora si possono distinguere razionalmente le due intersezioni di C_2 con Θ, e chiamare A' il punto appartenente al gruppo G_n che contiene A, e B' il punto appartenente al G_n che contiene B. Similmente si possono distinguere le due intersezioni di C_2 con λ, coordinandole, in modo razionale, ai punti E, F, e chiamandole risp E', F'.

Ora esiste fra le due coniche C_1, C_2 un riferimento proiettivo determinato dalla corrispondenza delle coppie AA', BB', EE', FF', e ciò stante l'armonicità delle quaterne $ABEF$, $A'B'E'F'$.

In modo del tutto analogo vengono riferite proiettivamente, l'una all' altra, le n coniche del gruppo $C_1 C_2 \dots C_n$, sicchè un punto, preso ad. es. sulla C_1, appartiene ad *un* gruppo G_n costituito dai punti omologhi ad esso su $C_2 \dots C_n$. E al variare del gruppo $C_1 \dots C_n$, ossia al variare della curva composta $L \equiv C_1 + \dots + C_n$ entro il fascio lineare $|L|$, i nominati gruppi G_n formeramo una involuzione I_n, cui $|L|$ *appartiene* nel senso detto innanzi.

5. Ciò posto costruiamo una nuova superficie F', i punti della quale sieno in corrispondenza birazionale coi gruppi G_n dell' involuzione I_n definita sopra F. Ad ogni curva $L \equiv C_1 + \dots + C_n$ di F, corrisponderà su F' una curva razionale L', irriducibile, in corrispondenza biunivoca con ciascuna delle coniche $C_1 \dots C_n$; e le L' formeranno sopra F' un fascio lineare, come le L sopra F.

Ora, poichè appunto le curve razionali L' formano su F' un fascio lineare, si può costruire, nel modo indicato dal sig[r] Noether o come al n[0] 2, una curva χ' unisecante le L'. A questa curva corrisponderà sopra F una curva χ secante in n punti ciascuna L; ma la L essendo composta di n coniche $C_1 \dots C_n$, le n intersezioni cadranno una su ciascuna conica, per modo che la χ sarà una curva unisecante per le coniche C del fascio, dato sopra F.

Per mezzo della χ la F può essere riferita punto per punto ad una rigata, di cui le generatrici corrispondono alle coniche C.

Pertanto la dimostrazione del teorema emenciato è compiuta.

6. Resta per altro da giustificare il lemma di cui abbiamo fatto uso:

Date due curve Θ e λ, di genere $P = 2p - 1$, contenenti una stessa involuzione γ di genere $p (> 0)$, cioè riferite ad una medesima curva doppia o ente doppio γ, senza elementi di diramazione; si può determinare su γ una g'_n cui corrisponda, su ciascuna delle due curve Θ e λ, una g'_{2n} ciascun gruppo della quale sia composto con due gruppi (coniugati) di una g'_n, autoconiugata rispetto all' involuzione γ.

Questo enunciato sarebbe press' a poco evidente se le curve Θ e λ

potessero supporsi birazionalmente identiche; ma ciò non accadrà in generale, poichè esistono, secondo il sig[r] Hurwitz*), $2^{2p}-1$ curve di genere $P=2p-1$, birazionalmente distinte, rappresentate da una stessa curva doppia γ di genere p, senza elementi di diramazione.

Tuttavia la dimostrazione dell' enunciato si compie assai semplicemente, prendendo $n=2P=4p-2$, nel modo seguente.

Si assuma sopra γ un arbitrario gruppo G_{2p-1}, di $2p-1$ punti; esso appartiene ad una serie lineare completa g^{p-1}_{2p-1} (la cui dimensione è nulla nel caso $p=1$); indichiamo la detta serie con s. Ad essa corrisponde su Θ una serie $s_1 \equiv g^{p-1}_{4p-2}$, di cui ciascun gruppo è composto con $2p-1$ coppie dell' involuzione γ; la serie stessa è contenuta in una serie completa g^{2p-1}_{4p-1}. Ora mediante la serie g^{2p-1}_{4p-2} si trasformi la curva Θ in una curva Θ' d' ordine $4p-2$ di un S_{2p-1}, riferendo proiettivamente gli elementi, gruppi, della serie agli iperpiani di questo spazio (per $p=1$ la Θ' si riduce ad una retta doppia). Avremo una curva (Θ') trasformata in sè stessa da un' involuzione proiettiva, la γ; per questa involuzione si avrà un primo spazio S_{p-1} di punti uniti (non secante la curva), base pel sistema ∞^{p-1} degli iperpiani che segano sulla Θ' la serie s_1; esisterà dunque un secondo spazio S_{p-1} di punti uniti, e gli iperpiani per esso determineranno su Θ', e quindi su Θ, una seconda serie s_1', contenuta nella g^{2p-1}_{4p-2} completa, di cui ciascun gruppo sarà composto con $2p-1$ coppie dell' involuzione γ.

Ora alla serie s_1' corrisponde su γ una serie completa $s \equiv g^{p-1}_{2p-1}$, diversa dalla s, e quindi non avente con essa alcun gruppo comune. Alla serie $'g^{2p-1}_{4p-2}$ di Θ corrisponde invece su γ una serie non lineare di gruppi di $4p-2$ punti, la quale comprende entro di sè i gruppi della s e della s' contati due volte; questa serie non lineare è però contenuta in una serie lineare (completa) g^{3p-2}_{4p-2}, contenente le serie doppie della s e della s'.

Un gruppo G_{2p-1} di s, ed un gruppo G'_{2p-1} di s', contati due volte, appartengono dunque ad una serie lineare g'_{4p-2}. A questa g'_{4p-2} di γ, corrisponde sopra Θ una g'_{8p-4} ciascun gruppo della quale è composto con due gruppi coniugati (in γ) di una g'_{4p-2}, precisamente della g'_{4p-2} individuata dai gruppi G_{4p-2} e G'_{4p-2} corrispondenti a G_{2p-1} e G'_{2p-1}; infatti questi gruppi G_{4p-2} e G'_{4p-2}, appartenendo risp alle serie s_1 ed s_1', sono equivalenti; e poichè sono composti ciascuno di $2p-1$ coppie di γ, determinano, su Θ, una g'_{4p-2} trasformata in sè stessa dall' involuzione γ, cui corrisponde sull' ente (doppio) γ la g'_{4p-2} innanzi nominata.

---

*) „Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten". Questi Annalen Bd. XXXIX.

Ripetendo gli stessi ragionamenti in relazione alla curva λ, otterremo ancora sull' ente doppio γ un' altra serie completa $s'' \equiv g_{2p-1}^{p-1}$, diversa da s, tale che un qualsiasi gruppo G di s ed un qualsiasi gruppo G'' di s'', contati due volte, determineranno su γ una g'_{4p-2}, cui corrisponderà su λ una g'_{8p-4}, ciascun gruppo della quale sarà composto con due gruppi (coniugati) di una g'_{4p-2} autoconiugata rispetto all' involuzione γ.

Ora le serie complete s' ed s'', di γ, non hanno gruppi comuni oppure coincidono. Nel secondo caso (che si presenta se Θ e λ sono curve birazionalmente identiche), la g'_{4p-2} di γ cui corrisponde tanto su Θ come su λ una g'_{8p-4} composta con una g'_{4p-2} autoconiugata, è determinata senz' altro da due gruppi G, G', presi risp in s, s', contati due volte. Nel caso generale avremo invece su γ, tre serie complete g_{2p-1}^{p-1}: s, s', s'', senza gruppi comuni, che contate due volte saranno contenute in una stessa g_{4p-2}^{3p-2} (serie completa doppia di s). E pel nostro scopo basterà costruire, entro la detta g_{4p-2}^{3p-2} di γ, una g'_{4p-2} la quale contenga tre gruppi di $2p-1$ punti ciascuno, contati due volte, ed appartenenti risp alle serie s, s', s''; infatti ad una tale g'_{4p-2} corrisponderà tanto sopra Θ come sopra λ, una g'_{8p-2}, composta colle coppie di gruppi di una g'_{4p-2} autoconiugata.

Ora si riferiscano proiettivamente gli elementi (gruppi) della g_{4p-2}^{3p-2} di γ, ai punti di un S_{3p-2}; entro questo spazio si avranno tre varietà V_{p-1}, di dimensione $p-1$, i cui punti corrispondono ai gruppi delle serie s, s', s'', contati due volte; e le tre V_{p-1} non avranno punti comuni. Una retta di S_{3p-2} la quale si appoggi in 3 punti (necessariamente distinti) alle tre varietà V_{p-1}, darà entro la g_{4p-2}^{3p-2}, la serie g'_{4p-2} domandata; e di rette siffatte, incidenti alle tre V_{p-1}, ve ne sarà certo un numero finito, anzi un numero uguale al prodotto degli ordini delle tre varietà.

Nel caso $p=1$ il ragionamento svolto è ancora applicabile con lievi modificazioni di parole. Ma, poichè in questo caso Θ e λ sono curve ellitiche, come l'involuzione (o l'ente doppio) γ, il ragionamento si può presentare più semplicemente nella forma seguente: Ad ogni g_2' presa sull' ente γ, corrisponde tanto su Θ come su λ una g_4', la quale (in due modi) si può riguardare come composta colle coppie (coniugate in γ) di una g_2'; e ciò stante la ben nota permutabilità di un' involuzione ellittica (γ) e di un' involuzione razionale (g_2') sopra una curva ellittica.

Bologna, Gennaio 1899.