Enriques, Federigo and
Castelnuovo, G.

Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi

Rendiconti Circ. Mat. Palermo **XIV** (1900), pp. 290-302.

Offerto dall'Autore.

TOMO XIV. **ANNO 1900.**

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

(28, via Ruggiero Settimo, 28)

ADUNANZA DEL 9 DICEMBRE 1900.

G. CASTELNUOVO e **F. ENRIQUES.**

Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi.

(Estratto)

SULLE CONDIZIONI DI RAZIONALITÀ DEI PIANI DOPPI.

Nota di **G. Castelnuovo** (Roma) e **F. Enriques** (Bologna).

Estratto dal t. XIV (1900) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza del 9 dicembre 1900.

I piani doppi $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ che sono razionali [tali adunque che esista una sostituzione razionale $x = \varphi(XY)$, $y = \psi(XY)$ trasformante il polinomio f in un quadrato perfetto *)], dànno luogo a tre *tipi* irriducibili, in cui la *curva di diramazione* $f = 0$ è rispettivamente:

1) una curva C_{2n} d'un certo ordine $2n$ dotata d'un punto $(2n - 2)$-plo;

2) una quartica generale C_4;

3) una sestica C_6 dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

La razionalità dei piani doppi di questi tipi è stata dimostrata da Clebsch e Noether, in relazione alla bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane appartenenti alle curve di diramazione sopra nominate.

Il sig. Noether ha poi dato il teorema **): Se un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ è razionale, la sua curva di diramazione si può trasformare, con una trasformazione birazionale del piano (xy), in una C_{2n} o in una C_4 o in una C_6 appartenenti ai tre tipi menzionati.

Ma, a vero dire, il ragionamento con cui l'Autore è pervenuto a quest'ultima importante proposizione, mentre non appare chiaramente espresso nella breve Nota di lui, lascia anche nella sua mente il dubbio,

*) La condizione *d'invertibilità* della trasformazione può ritenersi superflua in base al teorema della razionalità delle involuzioni piane.

**) Noether, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsberichte der physik. medicin. Soc. zu Erlangen, 14 Januar 1878).

francamente dichiarato, intorno alla possibile esistenza di qualche altro piano doppio razionale dotato di caratteri singolarissimi.

Ad escludere questo dubbio vale una dimostrazione indiretta della proposizione in parola fondata sopra la conoscenza dei tre tipi, a cui il sig. Bertini ridusse le involuzioni piane di coppie di punti *); infatti ogni piano doppio razionale può farsi nascere, per mezzo di una trasformazione [2, 1], da una involuzione che può supporsi ridotta ad uno dei tre tipi nominati **). E poichè le ricerche dei signori Kantor, Castelnuovo, Wimann hanno ormai rigorosamente giustificata la riduzione a tipi del sig. Bertini (ottenuta dall'Autore con un procedimento che lasciava qualche lacuna), anche la classificazione dei piani doppi razionali si palesa così sicuramente completa.

Una nuova dimostrazione diretta e luminosa, costituente la vera via maestra per giungere a questo resultato, scaturisce dal procedimento assai semplice che esponiamo nella presente Nota. Il qual procedimento ci ha condotti invero ad un teorema di più larga portata esprimente le condizioni di razionalità (o di riferibilità ad una rigata) di un piano doppio; un teorema che permette di verificare questa razionalità, qualunque sia la curva di diramazione assegnata, decidendo a priori la questione della sua trasformabilità in una delle curve C_{2n}, C_4, C_6 sopra nominate:

Le condizioni perchè un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f_{2n}(xy)}\}$ *sia razionale o rappresenti una rigata, sono espresse dalla non esistenza di curve d'ordine* $2n-6$, $2n-9$, ..., *aggiunte rispettivamente d'indice* $2, 3, \ldots$ *alla curva di diramazione, fatte però le opportune convenzioni sul modo di computare i punti multipli d'ordine dispari della detta curva* (cfr. n° 1).

Si può anche distinguere facilmente il caso della razionalità del piano doppio, dal caso in cui esso rappresenti una rigata di genere $p > 0$, poichè in quest'ultimo caso la curva di diramazione consterà di $2p+2$ curve razionali, costituenti insieme una curva di genere virtuale $-(2p+1)$, laddove la curva di diramazione di un piano doppio razionale ha sempre il genere virtuale $\geqq -1$.

---

*) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* [Annali di Matematica, s. II, t. VIII (1877), pp. 244-286]. Cfr. una Nota dello stesso Autore nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, v. XIII (1880).

**) Cfr. Bertini, *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, v. XXII (1889), pp. 771-778].

Introducendo la nozione dei *generi* o *plurigeneri* di una superficie [*genere* $P_1 = p_g$, cioè numero delle superficie φ_{n-4}, d'ordine $n-4$, linearmente indipendenti, che sono *aggiunte* ad una superficie F_n d'ordine n; *bigenere* P_2, cioè numero delle φ_{2n-8}, d'ordine $2n-8$, *biaggiunte* ad F_n, ... *)], si ha il teorema:

Le condizioni perchè un piano doppio con curva di diramazione C_{2n}, d'ordine $2n$, sia razionale o rappresenti una rigata, sono espresse dall'annullarsi dei plurigeneri P_2, P_3, ... $P_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$ $\left(\text{designando con } \left[\frac{2n}{3}\right] \text{ il massimo intero contenuto in } \frac{2n}{3}\right)$.

Può darsi del resto che queste condizioni dipendano dall'annullamento di un minor numero di generi P_2, P_3, ... Forse anzi dall'essere soltanto $P_2 = 0$ potrebbe trarsi come conseguenza $P_3 = P_4 = \ldots = P_{\left[\frac{2n}{3}\right]} = 0$.

Questo teorema ha notevoli applicazioni nello studio delle superficie contenenti sistemi lineari di curve ellittiche o iperellittiche (cfr. n° 5); ed il procedimento, che ad esso conduce, si manifesta utilissimo per la trattazione di varie questioni legate alle trasformazioni Cremoniane del piano (n° 6).

1. Dobbiamo ricordare anzitutto alcune nozioni d'indole generale sui piani doppi.

Abbiasi un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$. La sua curva di diramazione sarà sempre una curva C_{2n}, di un certo ordine pari $2n$ (poichè alla $f=0$ si deve aggiungere la retta all'infinito, se f è di grado dispari), ed inoltre si potrà supporre priva di componenti multiple, poichè una componente che entrasse più volte in C_{2n}, potrebbe sempre togliersi un numero pari di volte.

Ora se, nel piano (xy), si eseguisce una trasformazione birazionale, il piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ si cambia in un altro piano doppio $\{X, Y, \sqrt{F(XY)}\}$ avente come curva di diramazione una curva C_{2m}, d'un certo ordine pari $2m$, *trasformata* della C_{2n}. Ma il significato della parola *trasformata* è qui un pò diverso dal significato abituale, giacchè

*) Cfr. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), s. III, t. X (1896)], §§ 38, 39; Castelnuovo e Enriques, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* [Mathematische Annalen, t. XLVIII (1897)], n° 30.

occorre tener conto di quelle curve fondamentali del piano (XY), che nascono nella trasformazione da punti di C_{2n} [fondamentali pel piano (xy)]; precisamente se una di queste curve proviene da un punto r-plo di C_{2n}, essa dovrebbe esser computata r volte come componente della trasformata di C_{2m}. Siccome però nella detta trasformata si possono sopprimere tutte le componenti che vi entrano un numero pari di volte, si può dire in fine che la C_{2m}, trasformata della C_{2n}, consta della curva trasformata in senso proprio e delle curve fondamentali nascenti dai punti multipli d'ordine dispari della C_{2n} (curve da contarsi una sola volta).

Così essendo fissate le cose, si potrà sempre *trasformare* la C_{2n} in una curva C_{2m}, d'ordine pari $2m$, dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari e distinti. Relativamente alla C_{2m} si potranno considerare le curve C_{2m-3}, d'ordine $2m-3$, aggiunte (d'indice 1), le C_{2m-6}, d'ordine $2m-6$, aggiunte delle aggiunte (aggiunte d'indice 2 alla C_{2m}), ecc.

Ora le nominate curve C_{2m-3}, C_{2m-6}, ..., aggiunte (d'indice 1, 2, ...) alla C_{2m}, hanno carattere invariante relativamente ad ogni trasformazione birazionale del piano che muti la C_{2m} in una curva (d'ordine pari) dotata di punti multipli d'ordine pari, purchè si tenga conto delle eventuali curve (fondamentali) che nascessero da punti semplici della C_{2m}, scelti come fondamentali per la trasformazione. Se invece la C_{2m} si trasforma in una C_{2n} avente un punto multiplo O d'ordine dispari $(2i+1)$, il punto O viene a corrispondere ad una curva fondamentale facente parte della C_{2m}; e, secondochè tale curva appartiene o no alle aggiunte C_{2m-3}, C_{2m-6}, ..., le curve C_{2n-3}, C_{2n-6}, ... trasformate di queste, si comporteranno in O come le aggiunte, o avranno in O una molteplicità inferiore di una unità a quella delle aggiunte.

È lecito ancora di riguardare le C_{2n-3}, C_{2n-6}, ... come curve *aggiunte* (d'indice 1, 2, ...) alla C_{2n}, purchè si faccia una opportuna convenzione relativamente ai punti multipli d'ordine dispari della curva, attribuendo loro una *molteplicità virtuale*, che può differire di un'unità da quella effettiva. Quale sia questa molteplicità virtuale dei punti della C_{2n} risulta, in tutti i casi, dal comportamento delle curve C_{2n-3} (o delle C_{2n-6}, ...) che si è detto di voler considerare come aggiunte alla C_{2n}, cioè dal comportamento di quelle curve che si trasformano in aggiunte alla C_{2m}, quando la C_{2n} si trasforma in una curva C_{2m} dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari.

Del resto è facile determinarla nei casi più semplici:

Ogni punto multiplo d'ordine $2i+1$ della C_{2n} avrà per convenzione la molteplicità virtuale $2i$, tranne quando al punto stesso sia infinitamente vicino un altro punto $(2i+1)$-plo, nel qual caso la molteplicità virtuale del primo punto (e quella del suo infinitamente vicino) sarà, come l'effettiva, $2i+1$.

Quest'affermazione vale soltanto se si tratta di un *punto* multiplo nel senso proprio della parola; se il punto (O') di cui si discorre è esso stesso nell'intorno di 1° ordine di un altro punto O, la molteplicità virtuale di O' sarà $2i$ o $2i+1$, secondochè O ha una molteplicità d'ordine pari oppure d'ordine dispari.

Pel nostro scopo non è necessario andare più oltre, assegnando la molteplicità virtuale dei punti di C_{2n} che si trovino in un intorno d'ordine superiore di un *punto* multiplo (nel senso proprio della parola). Del resto tale questione, legata alla ricerca dell'influenza delle singolarità di C_{2n} sui generi del piano doppio (cfr. n° 4), ha già ricevuto una risposta nel caso, assai ampio, in cui le singolarità della C_{2n} possano ritenersi tutte definite mediante cicli lineari *).

2. Premesse, per chiarezza, queste nozioni, consideriamo una curva C_{2n}, data come curva di diramazione di un piano doppio, e attribuiamo ai punti multipli della C_{2n} le *molteplicità virtuali* secondo le convenzioni fatte innanzi.

Supponiamo ora che la C_{2n} sia priva di curve aggiunte di tutti gli indici $1, 2, 3, \ldots$, ed esaminiamo quali conseguenze discendano da questa ipotesi. In relazione alla forma del numero n rispetto al modulo 3, avremo da considerare tre casi:

$$A)\quad 2n = 6m, \qquad B)\quad 2n = 6m+2, \qquad C)\quad 2n = 6m+4.$$

Supporremo inoltre, tranne nell'ultimo caso, che sia $m > 0$, salvo ad esaminare in seguito i casi corrispondenti alla negazione di questa ipotesi, o di quelle che via via aggiungeremo.

---

*) Cfr. Enriques, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Aprile 1898). La valutazione del genere di un piano doppio quando la curva di diramazione abbia punti multipli distinti, e l'osservazione che un punto $(2i+1)$-plo figura in tal caso come fosse $(2i)$-plo, trovasi già in Noether (Göttinger Nachrichten, 7 Juni 1871). Più tardi, nella citata Nota di Erlangen (1878), il sig. Noether stesso fu condotto a considerare la particolarità proveniente da due punti $(2i+1)$-pli infinitamente vicini.

IPOTESI A. — La mancanza di curve (d'ordine 0) aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m} porta che la C_{6m} abbia (almeno) un punto di molteplicità $\geqq 2m+1$. Il punto O della C_{6m} la cui molteplicità (virtuale) è massima, avrà dunque una certa molteplicità virtuale:

$$a)\ 2m+2s+1, \quad o \quad a')\ 2m+2s+2, \quad \text{ove} \quad s \geqq 0;$$

e nella prima ipotesi la C_{6m} possederà (n° 1) due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini. *Supposto* (per ora) $s < 2m-1$, teniamo conto della condizione di non esistenza delle curve C_{3s+3} aggiunte d'indice $2m-s-1$ alla C_{6m}.

a) Per effetto dei punti multipli già menzionati della C_{6m}, ogni C_{3s+3} si ridurrebbe nella prima ipotesi ad una retta r [congiungente i punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini] da contarsi $3s+1$ volte, e ad una conica tangente alla retta in quei punti; per escludere la esistenza della C_{3s+3} è necessario dunque che la C_{6m} abbia qualche punto di molteplicità $\geqq 2m-s$ fuori della retta r. Allora però, mediante le coniche passanti per i due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini di C_{6m} e per uno degli ultimi punti multipli nominati, si riesce a trasformare la C_{6m} in una curva d'ordine inferiore.

a') Se il punto O della C_{6m} ha la molteplicità $2m+2s+2$, ogni C_{3s+3} aggiunta d'indice $2m-s-1$ alla C_{6m} si ridurrebbe ad un gruppo di $3s+3$ rette per O. Ad escludere l'esistenza di una C_{3s+3} occorre dunque ammettere che la C_{6m} sia dotata di (almeno) $3s+4$ punti $(2m-s)$-pli, fra i quali non si trovino due punti allineati con O; questi punti, come subito si verifica, non potranno tutti cadere nell'intorno di primo ordine del punto O. Del resto potrebbe darsi che due dei detti punti venissero sostituiti da un punto $(2m-s+1)$-plo, oppure tre da un punto $(2m-s+2)$-plo, ecc.; ma tutti questi casi sarebbero sempre più favorevoli pel nostro scopo. Ci metteremo dunque nella peggiore ipotesi supponendo che la C_{6m} abbia, oltre O (che ha l'ordine $2m+2s+2$), dei punti $(2m-s)$-pli, e non punti di molteplicità superiore. Ora se s è pari, le coniche passanti per O e per due punti siffatti permettono di trasformare la C_{6m} in una C_{6m-2}; se s è dispari, i punti $(2m-s)$-pli di C_{6m} saranno a coppie infinitamente vicini, e le coniche passanti per i punti di una tale coppia e per O permetteranno ugualmente di trasformare la C_{6m} in una C_{6m-2}.

IPOTESI B.—La mancanza di coniche aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m+2}, porta che la C_{6m+2} abbia dei punti di molteplicità non inferiore a $2m+1$.

Se la più alta molteplicità dei punti di C_{6m+2} è appunto $2m+1$, si avranno 6 punti $(2m+1)$-pli a coppie infinitamente vicini (n° 1) e non appartenenti ad una conica. Allora adoperando le quintiche (componenti una rete omaloidica), che hanno come doppi i nominati 6 punti, si riesce a trasformare la C_{6m+2} in una curva d'ordine $6m-2$.

Se vi sono punti della C_{6m+2} di molteplicità più elevata, possiamo supporre che il punto O di più alta molteplicità per la C_{6m+2} abbia la molteplicità virtuale:

b) $2m+2s+1$ con $s \geqq 1$, o *b'*) $2m+2s+2$, con $s \geqq 0$.

Supporremo $s < 2m$.

b) Nella 1ª ipotesi si avranno due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini (n° 1) della C_{6m+2}. Una C_{3s+2} aggiunta d'indice $2m-s$ alla C_{6m+2} dovrebbe avere questi punti come $(3s+1)$-pli, e quindi si spezzerebbe in una retta r da contarsi $3s$ volte e in una conica tangente ad r. Ad escludere l'esistenza di una tale C_{3s+2} occorre dunque che la C_{6m+2} abbia qualche punto di molteplicità $2m-s+1$ (o superiore) fuori di r. Allora le coniche passanti pei due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini e per uno dei punti nominati fuori di r, permettono di abbassare l'ordine della C_{6m+2} [cfr. il caso *a*)].

b') Se O è $(2m+2s+2)$-plo per la C_{6m+2} (con $s \geqq 0$), una C_{3s+2} aggiunta d'indice $2m-s$ alla C_{6m+2} dovrebbe essere composta di $3s+2$ rette per O. Ad escludere l'esistenza di una siffatta C_{3s+2} bisogna dunque ammettere che la C_{6m+2} sia dotata di (almeno) $3s+3$ punti di molteplicità $2m-s+1$, fra i quali non si trovino due allineati con O, e che non potranno cadere tutti nell'intorno di 1° ordine di O. Allora la C_{6m+2} si può trasformare in una curva d'ordine $6m$ mediante le coniche passanti per il punto O e per due dei nominati punti $(2m-s+1)$-pli; occorre sceglier questi due ultimi infinitamente vicini tra loro, dato che s sia pari, come è certo possibile in questa ipotesi [cfr. il caso *a'*)].

IPOTESI C. — La mancanza di rette aggiunte d'indice $2m+1$ alla C_{6m+4} porta che la C_{6m+4} abbia almeno tre punti $(2m+2)$-pli non allineati, oppure punti di molteplicità superiore. Se la C_{6m+4} ha tre punti $(2m+2)$-pli, il suo ordine si abbassa di due unità con una trasformazione quadratica. Supposto invece che la C_{6m+4} abbia un punto O di molteplicità superiore, conviene distinguere i due casi in cui O abbia la molteplicità virtuale:

c) $(2m + 2s + 1)$, con $s \geqq 1$, o c') $(2m + 2s + 2)$, con $s \geqq 0$.

Supporremo per ora, in ogni caso, $s < 2m + 1$.

c) Nel 1° caso la C_{6m+4} avrà due punti $(2m + 2s + 1)$-pli infinitamente vicini (n° 1), e, per la mancanza delle curve C_{3s+1} aggiunte d'indice $2m - s + 1$, possederà altri punti $(2m - s + 2)$-pli fuori della retta congiungente i punti multipli sopra nominati, sicchè l'ordine della C_{6m+4} potrà sempre abbassarsi con una trasformazione quadratica [cfr. i casi a) e b)].

c') Nel 2° caso la mancanza di curve C_{3s+1} aggiunte d'indice $2m - s + 1$ alla C_{6m+4}, porterà l'esistenza di punti di molteplicità $2m - s + 2$ per la C_{6m+4}, i quali saranno a coppie infinitamente vicini (n° 1), se s è dispari; e tra questi punti si potranno sempre scegliere due che, insieme al punto $(2m + 2s + 2)$-plo O, sieno base per una rete di coniche, la quale permetta di trasformare la C_{6m+4} in una curva d'ordine inferiore [cfr. i casi a') e b')].

Dalle considerazioni ora svolte in relazione ai tre casi A, B e C segue adunque che il processo di riduzione della C_{2n} $(2n = 6m,\ 6m + 2,\ 6m + 4)$ si arresterà soltanto quando sieno contraddette le ipotesi fatte per via, le quali possono così riassumersi: si è supposto $m > 0$ nei casi A e B, inoltre si è supposto $s < 2m - 1,\ 2m,\ 2m + 1$ nei casi A, B, C, rispettivamente. Quel processo di riduzione si arresterà dunque, quando si abbia $2n = 2$, oppure quando la C_{2n} possegga un punto $2n$-plo o due punti $(2n - 1)$-pli infinitamente vicini, e in questi soli casi. Ma l'ultima ipotesi per $n > 1$ porterebbe la riducibilità di C_{2n}, dalla quale si staccherebbe una retta contata $2n - 2 \geqq 2$ volte; e perciò essa deve essere esclusa.

Concludiamo pertanto:

« Se la C_{2n} è affatto priva di curve aggiunte d'indice 1, 2, 3, . . . ,
« essa può trasformarsi con una trasformazione birazionale di tutto il
« piano:

« 1) in una conica,

« 2) oppure in un gruppo di un numero pari di rette uscenti da
« un punto ».

3. Il processo di riduzione spiegato innanzi è ancora applicabile se mancano le curve aggiunte alla C_{2n} degli indici 2, 3, . . . , pure esistendo quelle d'indice 1; soltanto il processo medesimo in questa ipotesi si arresta prima.

Distinguendo ancora i 3 casi:

$$2n = 6m, \qquad 2n = 6m + 2, \qquad 2n = 6m + 4,$$

vediamo anzitutto che la riduzione non è ora più possibile quando $m = 0$, neppure nel 3° caso. Inoltre le diseguaglianze, a cui debbono soddisfare le molteplicità $2m + 2s + 1$ o $2m + 2s + 2$ dei punti di massima molteplicità della C_{2n}, affinchè la riduzione sia possibile, diventano quì più espressive, avendosi rispettivamente nei tre casi:

$$s < 2m - 2, \qquad s < 2m - 1, \qquad s < 2m.$$

Si conclude dunque che il procedimento di riduzione della C_{2n} si arresterà soltanto quando la C_{2n} sia divenuta una quartica, oppure quando essa ammetta un punto $(2n - 2)$-plo, o due punti $(2n - 3)$-pli infinitamente vicini. L'ultima ipotesi, volendo escludere che dalla C_{2n} si distacchi una retta contata un numero pari $(= 2n - 6)$ di volte, porta $2n \leqq 6$.

Si arriva quindi alla conclusione:

« Se la C_{2n} è priva di curve aggiunte degli indici 2, 3, ..., essa « può trasformarsi con una trasformazione birazionale del piano:

« 1) in una curva di un certo ordine 2ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) dotata di « un punto di molteplicità $2\nu - 2$ o di molteplicità superiore;

« 2) in una quartica piana C_4, affatto generale;

« 3) in una sestica C_6 con due punti tripli infinitamente vicini ».

E poichè i piani doppi aventi come curva di diramazione una delle nominate $C_{2\nu}$, C_4, C_6, sono razionali o rappresentano rigate (casi particolari corrispondenti all'elevarsi delle molteplicità dei punti della $C_{2\nu}$, o all'esistenza di ulteriori singolarità per la C_4 o per la C_6), così abbiamo il teorema:

Se la curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio è affatto priva di curve aggiunte C_{2n-6}, C_{2n-9}, ... degli indici 2, 3, ..., il piano doppio è razionale o rappresenta una rigata.

4. Allo scopo di invertire il resultato ottenuto, giova considerare il significato delle curve successivamente aggiunte alla curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio, significato relativo alla superficie rappresentata sul piano doppio.

L'equazione di questa superficie, F_{2n}, può mettersi sotto la forma:

$$z^2 = f_{2n}(xy),$$

ove f_{2n} è un polinomio di grado $2n$ in x, y, che, posto $=0$, rappresenta la C_{2n}.

Allora consideriamo i coni proiettanti dal punto all'infinito dell'asse z le C_{2n-6} aggiunte, d'indice 2, alla C_{2n}; ciascuno di essi sommato al piano all'infinito contato $2n-2$ volte, costituisce una superficie φ_{4n-8}, d'ordine $4n-8$, la quale è biaggiunta rispetto alla F_{2n}.

Questa affermazione si giustifica osservando il comportamento della φ_{4n-8} rispetto ai punti multipli della F_{2n}. La verifica riesce facile nel caso che la C_{2n} abbia soltanto punti multipli d'ordine pari e distinti fra loro, mentre l'estensione del resultato al caso generale si può ottenere facendo uso di un'opportuna trasformazione del piano, che muti (ove occorra) la C_{2n} in un'altra curva dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari e distinti.

Invero i punti multipli della superficie F_{2n} cadono soltanto:

1) nel punto all'infinito dell'asse z, che è un punto $(2n-2)$-plo particolare caratterizzato dal fatto che un piano generico passante per esso sega la superficie in una curva avente $n-1$ punti doppi nell'intorno di primo ordine del detto punto $(2n-2)$-plo, i quali congiunti al punto stesso dànno $n-1$ rette coincidenti colla retta all'infinito del piano secante;

2) nei punti multipli della C_{2n}, che sono punti doppi *particolari* per la F_{2n}; precisamente uno di questi punti doppi, che sia $2i$-plo per la C_{2n}, e nell'intorno del quale non cadano altri punti multipli della curva, resta definito per la F_{2n} dalla *particolarità,* che un piano generico passante pel detto punto sega la F_{2n} lungo una curva avente infinitamente vicini al detto punto doppio altri $i-1$ punti doppi *successivi* sopra la retta intersezione del piano nominato col piano della C_{2n}.

Si può quindi verificare che la φ_{4n-8} è biaggiunta alla F_{2n} (cioè si comporta come due superficie aggiunte prese insieme), osservando che, sopra ogni piano per uno (O) dei nominati punti singolari della F_{2n}, la φ_{4n-8} sega una curva che, presa insieme con due rette per O, costituisce una curva biaggiunta alla sezione piana di F_{2n} *).

Ora possiamo dunque dire che le C_{2n-6}, aggiunte d'indice 2 alla C_{2n}, rappresentano, sul piano doppio, quelle particolari *curve bicanoniche* della F_{2n}, la cui immagine sul piano stesso è doppia **); pertanto il numero

*) Cfr. Enriques, *Introduzione*, etc, §§ 31 e 39.

**) Cfr. Enriques, *Sui piani doppi*, etc. (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Aprile 1898).

delle C_{2n-6} linearmente indipendenti non sarà inferiore al *bigenere* P_2 della superficie.

Similmente si può vedere che il cono proiettante dal punto all'infinito dell'asse z una C_{2n-9}, aggiunta d'indice 3 alla C_{2n}, sommato al piano ($z = 0$) della C_{2n}, e al piano all'infinito, contato $4n - 4$ volte, costituisce una superficie F_{6n-12} *triaggiunta* alla F_{2n}, sicchè la C_{2n} sommata ad una C_{2n-9} rappresenta sul piano doppio una *curva tricanonica.*

In generale la C_{2n} contata s volte, presa insieme ad una curva aggiunta d'indice $s + 2$, rappresenta una curva ($s + 2$)-*canonica* della F_{2n}. Pertanto se mancano le curve pluricanoniche della F_{2n} fino all'ordine $\left[\frac{2n}{3}\right]$, cioè se sono nulli i plurigeneri P_2, P_3, ... $P_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$, la C_{2n} è affatto priva di curve aggiunte degli indici 2, 3, ...

Di qui si deduce (confrontando col resultato del n° 3):

Se per un piano doppio dotato di una curva di diramazione d'ordine $2n$, *sono nulli tutti i plurigeneri* P_2, P_3, ... $P_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$, *il piano doppio è razionale o rappresenta una rigata.*

L'inversa è pur vera, giacchè è noto che ogni piano doppio (o superficie) che sia razionale o riferibile ad una rigata, ha nulli tutti i plurigeneri. Donde segue che la curva di diramazione del piano doppio mancherà delle curve aggiunte degli indici 2, 3, ... ; osservazione questa che (in virtù del processo di riduzione del n° 3) dimostra e completa il teorema del sig. Noether:

La curva di diramazione di un piano doppio razionale, o rappresentante una rigata, può sempre ridursi, mediante una trasformazione birazionale del piano, ad uno dei tipi seguenti:

1) *curva di un certo ordine* 2ν ($\nu \geqq 1$), *dotata di un punto multiplo di ordine* $\geqq 2\nu - 2$;

2) *quartica piana* C_4;

3) *sestica piana* C_6, *dotata di due punti tripli infinitamente vicini.*

5. Le condizioni di razionalità (o di riferibilità a rigata) di un piano doppio, espresse mediante l'annullarsi dei plurigeneri, si applicano con successo in alcuni casi notevoli, dove non sarebbe egualmente facile di riconoscere la trasformabilità della curva di diramazione del piano doppio in una delle curve tipiche di Clebsch-Noether.

Citiamo anzitutto il caso delle *superficie contenenti un fascio lineare* *di curve ellittiche dotato di (almeno) un punto base semplice o doppio,* delle quali superficie si dimostra così che *sono razionali o riferibili a rigate ellittiche.*

Infatti, considerando un punto base, semplice o doppio, si può determinare razionalmente sopra ogni curva (ellittica) del fascio una g_2^1, e quindi rappresentare la superficie sopra un piano doppio. Ora i plurigeneri della superficie sono tutti nulli *), perchè il fascio in parola costituisce sulla superficie un sistema lineare di curve di *genere virtuale* π secantisi a due a due in $n > 2\pi - 2$ punti; (designando con $i_1, i_2, \ldots$ le molteplicità dei punti base del fascio si ha invero

$$\pi = 1 + \sum \frac{i(i-1)}{2} \qquad \text{ed} \qquad n = \sum i^2).$$

Nello stesso modo si ottiene il teorema:

Se una superficie contiene un fascio lineare di curve iperellittiche di genere $p > 1$, *con un certo numero di punti base di molteplicità* $i_1, i_2, \ldots,$ *per modo che si abbia*

$$\sum i > 2p - 2,$$

la superficie è razionale o riferibile ad una rigata; una tale superficie essendo sempre rappresentabile sul piano doppio ed avendo i plurigeneri nulli.

Questi resultati estendono sotto un certo aspetto quelli già ottenuti relativamente alle superficie contenenti sistemi lineari di curve iperellittiche **), i quali possono riassumersi nel teorema di Castelnuovo: *Una superficie contenente una rete di curve iperellittiche di genere* $p \geq 1$, *secantisi a due a due in gruppi non speciali, è razionale o riferibile ad una rigata.* Ma questo teorema, sotto un altro aspetto, dice di più, almeno nel caso $p > 2$.

Ora è interessante notare come anche l'ultimo teorema, in tutta la sua generalità, discenda dal resultato fondamentale di questa Nota, e possa così nuovamente dimostrarsi senza ricorrere alla razionalità delle involuzioni piane, di cui si fa uso nelle Note citate. Infatti, si dimostra subito (ad es. col ragionamento adoperato da Castelnuovo nella Nota dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, maggio 1894, pag. 477) che la

*) Cfr. la proprietà caratteristica delle curve canoniche, bicanoniche, etc. in Enriques, *Introduzione,* etc., §§ 38, 39.

**) Cfr.: Enriques (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, dicembre 1893); Castelnuovo (Ibidem, gennaio e maggio 1894). Un rifacimento di questi lavori si trova in Enriques, Mathematische Annalen, Bd. 46.

superficie contiene un fascio di curve razionali, o una serie razionale di curve razionali. Ora, nel primo caso i plurigeneri della superficie sono certo nulli; nel secondo caso poi risulta *) che la serie razionale di curve razionali è contenuta in un sistema lineare di curve dello stesso ordine e di un certo genere π, secantisi a due a due in $n > 2\pi - 2$ punti, donde segue nuovamente l'annullarsi dei plurigeneri; e così si può applicare sempre il resultato fondamentale della presente Nota.

6. Noteremo infine che il procedimento di riduzione spiegato al n° 2, ove pur si prescinda dalle speciali convenzioni riguardanti la molteplicità virtuale dei punti multipli della curva di diramazione di un piano doppio, dà la condizione perchè una curva piana (semplice o composta) sia trasformabile, con una trasformazione birazionale di tutto il piano, in un punto o in un gruppo di punti, questa condizione venendo espressa dalla mancanza di curve aggiunte d'indice 1, 2, ... Inoltre quel procedimento si rivela utilissimo nelle questioni di riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve di genere p secantisi a due a due in $n > 2p - 2$ punti, ove si noti che le curve aggiunte d'indice 1, 2, 3, ... dovranno segare la curva generica del sistema dato in gruppi composti di un numero di punti che va decrescendo (di almeno $n - 2p + 2$ unità per volta) col crescere dell'indice. Così ad es., per un sistema lineare (almeno ∞^1) di curve razionali si vede subito che mancano tutte le curve aggiunte d'indice 1, 2, ..., e si ottengono quindi i notissimi tipi d'ordine minimo pei detti sistemi lineari. Similmente per $p = 1$ ed $n > 0$ si avrà soltanto una curva aggiunta e mancheranno tutte le successive, sicchè si arriverà facilmente ai tipi pure notissimi dei sistemi lineari di curve ellittiche, ecc.

Si potrebbe anzi stabilire una serie di proposizioni generali sui tipi dei sistemi lineari di curve di genere p secantisi a due a due in n punti, ove si abbia rispettivamente $n > 4p - 4$, o $2n > 6p - 6$, $3n > 8p - 8$, ... ; ma lasciamo al lettore volenteroso la cura di proseguire in questo indirizzo.

Ottobre 1900.

G. Castelnuovo.
F. Enriques.

*) Humbert, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e serie, t. X (1894), pag. 195; Enriques, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII (1899).