Enriques, Federigo

Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria

in Questioni riguardanti la Geometria elementare,Enriques, F. ed., Zanichelli, Bologna, 1900, pp. 1-31. ((I articolo))

ARTICOLO PRIMO

« Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria » di Federigo Enriques a Bologna.

Le questioni che si riferiscono ai fondamenti della Geometria sono variamente intese, a seconda delle tendenze individuali, sicchè la loro importanza rispetto all' insegnamento viene pure apprezzata in modo diverso, in relazione al diverso giudizio.

All' indirizzo tecnico o professionale di coloro che, avendo di mira soltanto le applicazioni della scienza, poco o nulla si curano dei principii teorici, fa riscontro un indirizzo critico tendente ad introdurre, fino negli elementi, quel rigore logico che costituisce la suprema legge armonica dell' edificio geometrico. Ma contro questa tendenza, in gran parte pel modo come si traduce in atto, si levano da ogni parte obiezioni non prive di valore, in nome delle esigenze didattiche. Molti credono che le questioni relative ai postulati della nostra scienza abbiano soltanto un valore logico rispondente ad un senso critico raffinato, e sono tratti a domandarsi se valga la pena di affaticare con esse la mente dei giovani per una compiacenza subiettiva del maestro, rendendo così inutilmente difficili i primi passi del discente, e allontanando da lui l' acquisto delle cognizioni positive più atte a suscitarne l' interesse.

Dinnanzi a tali giudizii discordi, stimiamo non inutile dedicare all' argomento alcune osservazioni, proponendoci di rischiararne due aspetti principali: 1.° quale sia il valore scientifico delle questioni relative ai principii della Geometria; 2.° se e come la conoscenza di esse possa rendere l' opera del maestro più efficace e più utile.

I

§ 1. **Le basi empiriche della Geometria.** — Insistiamo anzitutto su ciò, che i problemi relativi ai principii non rispondono soltanto al desiderio d' un ordinamento logico rigoroso della scienza. Ben più alta è la loro importanza e più vasto il loro campo! Tanti problemi della psicologia e della teoria della conoscenza vi si riannodano!

Rivolgiamo la nostra attenzione al complesso delle cognizioni geometriche e cerchiamo un confronto nel dominio delle cognizioni fisiche.

Si sottopongano due enunciati a persona che non abbia alcuna idea dei metodi di dimostrazione matematica: *a)* in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull' ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra i cateti; *b)* nella caduta dei gravi le velocità sono proporzionali ai tempi.

La supposta persona cercherà di *verificare coll' esperienza* l' esattezza dei due enunciati, procedendo fondamentalmente nello stesso modo; potrà ricorrere ad es. nel primo caso al taglio della carta o all' uso di strumenti di misurazione delle aree; nel secondo caso alla macchina d' Atwood o al piano inclinato di Galileo.

Stabiliti in questo modo, i due enunciati appaiono ugualmente esprimenti due *verità fisiche*, a noi rivelate dall' esperienza, ossia dalle sensazioni aiutate e corrette dagl' istrumenti.

Ma per chi ha un' idea dell' organismo matematico le cose appaiono diversamente. La dimostrazione sperimentale dell' enunciato *a)* non sembra soddisfacente, se ne vuole la *dimostrazione matematica,* mentre sembra impossibile di accampare la stessa esigenza relativamente all' enunciato *b).*

Dunque, vien fatto di domandare, vi è una *certezza matematica* superiore alla *certezza fisica,* sicchè ciò che sembra rigorosamente dimostrato al fisico si presenta ancora incerto al matematico, come un problema da risolvere? E dove attingerà il secondo questa superiore certezza che al primo non è dato raggiungere?

Per rispondere conviene esaminare in che cosa consista il procedimento di dimostrazione matematica.

Il matematico a cui viene proposta una questione possiede già alcune preliminari cognizioni; sono proprietà che, nel momento, egli ritiene fondate senza discussione, ed il suo modo di procedere è soltanto una *deduzione logica* di nuove conseguenze dalle premesse conosciute. Il suo è essenzialmente un *processo di riduzione.*

Anche nella dimostrazione del fisico c' è una riduzione a cose note; l' uso d' uno strumento più complicato e l' interpretazione delle esperienze cui esso conduce è legato ad un procedimento mentale che si fonda sull' uso d' istrumenti più semplici e sull' interpretazione, già nota, delle relative esperienze; soltanto questo procedimento mentale *non è più soltanto logico, ma è anche empirico*, in quanto trae nuovi elementi dalle sensazioni.

Ora quì è tutta la differenza e tutta la superiorità del metodo matematico. Ogni sensazione, e quindi anche ogni esperienza, racchiude qualche cosa d' incerto o di non bene determinato [1], sicchè la riduzione fisica sembra contenere qualche elemento d' incertezza rispetto alle premesse; al contrario invece la riduzione matematica appare perfetta, sicchè alle nuove deduzioni si attribuisce esattamente lo stesso valore di certezza accordato alle premesse.

Ma non dimentichiamo la cosa essenziale, che cioè la dimostrazione matematica e fisica sono soltanto due diversi processi di riduzione, fondati su alcuni dati *noti.* Ora su che si appoggia la conoscenza di questi dati? Generalmente sopra un processo di riduzione analogo, che ci sospinge di passo in passo a dati sempre più semplici.

Ma non possiamo risalire indefinitamente la serie, senza giungere a qualche cosa che dobbiamo primitivamente accettare senza riduzione ulteriore, sotto pena di aggirarci in un circolo vizioso.

Appunto a questi *dati primitivi* dobbiamo volgere la nostra attenzione. Dobbiamo domandarci su quale fondamento noi siamo tratti ad accettarli, e se i dati geometrici a cui conduce il procedimento di riduzione matematica, si appoggino sopra una base essenzialmente diversa dei dati primitivi della fisica.

La domanda involge veramente le più gravi difficoltà filosofiche. Ma, senza entrare in discussioni troppo ardue ed elevate, non consentanee all' indole di questo scritto, ci limitiamo a rispondere che i dati primitivi della Geometria e della Fisica vengono acquistati fonda-

---

[1] Veramente sarebbe quì il caso di distinguere tra *esperienze qualitative* e *quantitative,* ma non ci sembra necessario di dilungarci su tale distinzione.

mentalmente nello stesso modo, sulla base di certe *sensazioni immediate* o di certe *esperienze elementari* semplicissime, interpretate conformemente alla *struttura logica* della nostra mente.

La semplicità e soprattutto la riprova che dà la costante ripetizione di queste esperienze, la facoltà di procurarne volontariamente e di attenderne i resultati, e la loro logica concordanza, sembrano le sole ragioni per cui si attribuisce il massimo grado di certezza ai *postulati* ricavati dalle nominate esperienze elementari, escludendo, per quanto è possibile, tutto ciò che comparisce di non bene definito o determinato nel fenomeno della sensazione.

Ma in definitiva la base della certezza è una sola, nella Geometria come nella Fisica; è una *base empirica* che dà anche alla Geometria il carattere di una scienza sperimentale.

Nè invero il differente modo di sviluppo delle due scienze stabilisce tra di esse una intima differenza. La dimostrazione puramente logica e matematica si applica anche nello studio dei fenomeni fisici, allorchè si ha una connessione ben determinata con altri fenomeni sperimentalmente conosciuti. Dunque vi è soltanto una differenza di grado: il metodo empirico usato per stabilire poche proposizioni fondamentali nella Geometria, prevale invece nella dimostrazione delle proposizioni fisiche.

Ciò che si è detto relativamente alla *dimostrazione* delle proposizioni geometriche, si può ripetere parallelamente, paragonando la *definizione* degli enti geometrici a quella degli enti fisici. Gli enti fisici, sieno oggetti o relazioni fra oggetti, vengono definiti, in generale, mediante un' osservazione sensibile, cioè per via empirica; la definizione logica si dà soltanto di taluni enti più complicati o meno osservabili nella realtà. All' opposto invece, nella Geometria, si cerca per quanto è possibile di definire logicamente ciò che è oggetto di studio, riducendo così ogni concetto ad altri concetti più semplici. Ma questo processo di definizione è anch' esso un processo di riduzione, sicchè la pretesa di tutto definire logicamente appare anche quì illusoria e priva di senso.

Alcuni enti geometrici, elementi primitivi su cui si basano le successive definizioni, debbono esser *dati* in modo empirico o psicologico come enti della realtà fisica o rappresentanti di tali enti. Sicchè questi *concetti primitivi* della Geometria non appaiono diversi dai concetti fisici.

E quì, come nell' ordine dimostrativo, la scienza geometrica e la fisica si presentano medesimamente sotto un aspetto empirico, avendosi soltanto una differenza di grado nel maggior ufficio che la definizione logica ha, nel primo caso, in confronto alla definizione empirica o psicologica.

§ 2. **L' intuizione geometrica.** — Esaminiamo ora più attentamente le osservazioni elementari su cui riposano i postulati della Geometria, ed avvertiamo un peculiare carattere che le distingue dalle comuni osservazioni fisiche.

Questo carattere risiede nel sentimento di necessità che accompagna l' *evidenza geometrica* e dà quasi l' illusione di una necessità logica.

Ma sarebbe un errore grossolano, scambiare l' evidenza geometrica coll' evidenza logica. Quest' ultima si può riferire soltanto ad una relazione di dipendenza tra gli enunciati di due fatti, mai all' enunciato d' un fatto.

Si potrebbe pensare tuttavia che i postulati esprimessero condizioni *a priori* della sensibilità soggettiva, quasi leggi strutturali della psiche, anzichè dati reali delle sensazioni esteriori. Tale modo di vedere, strettamente *kantiano,* sembra ormai oltrepassato dalla critica.

Però le circostanze da cui esso ha origine meritano una speciale considerazione.

Si può affermare un fatto geometrico elementare, ossia enunciare un postulato, senza eseguire un' esperienza effettiva. Basta rivolgere l' *intuizione interna* sopra certi concetti che troviamo già formati nella nostra mente.

Un procedimento analogo può essere seguito anche per enunciare i più comuni e semplici fatti fisici che ci sono familiari, quando l' osservazione ripetuta di essi ci ha già permesso di conoscerli in modo adeguato. L' intuizione ci appare allora come la ripresentazione mentale d' una esperienza. Tuttavia, in questo ultimo caso, essa ha piuttosto un carattere contingente che necessario.

Per spiegarci il sentimento di necessità che accompagna i postulati geometrici, bisogna considerare una differenza peculiare tra i due casi: *mentre generalmente noi assistiamo consci al formarsi dei concetti fisici, la costruzione dei concetti geometrici ci appare anteriore ad ogni atto della coscienza riflessiva.* E poichè di questi ultimi concetti non possiamo immaginare condizioni formative diverse, le proprietà di essi si presentano alla nostra mente come indissolubilmente legate in un fisso vincolo di relazioni.

Lo studio di queste relazioni è oggetto del problema matematico concernente i principii della Geometria, intuitivamente fondata. Ma alla formazione degli stessi concetti geometrici si volgono le ricerche psicologiche, ed alla rispondenza che essi trovano nella realtà fisica si riattacca il problema filosofico.

Noi parleremo anzitutto, in breve, delle questioni, che quì si presentano nell' ordine matematico, e indicheremo poi come esse si leghino alle accennate questioni psicologiche e filosofiche.

§ 3. **Concetti e proposizioni fondamentali della Geometria.** — Poichè le proposizioni della Geometria vengono logicamente ordinate secondo *definizioni* e *dimostrazioni*, e poichè vi sono *concetti primitivi* o *fondamentali* che non possono essere definiti per mezzo di altri più semplici, e *postulati* ossia *proposizioni fondamentali* non dimostrabili per mezzo di altre proposizioni più elementari; nasce il problema di scegliere i concetti che per la loro semplicità sembrano più atti ad essere dati come primitivi (senza definizione) e di assegnare le proposizioni che per il loro carattere elementare sembra più conveniente enunciare come postulati (senza dimostrazione). Ma la semplicità ed elementarità, di cui quì si parla, non hanno un valore assolutamente obiettivo, poichè esprimono una più facile visibilità o *evidenza intuitiva.* D' altra parte, la nostra intuizione ci dà, come immediatamente evidenti, più proposizioni e più concetti, di quanti occorre mettere a fondamento di una formulazione logica della Geometria.

Pertanto il problema di assegnare una tale formulazione può essere risoluto secondo varii criterii. Vi sono tuttavia delle condizioni teoriche, a cui si cerca generalmente di uniformarsi, per quanto è possibile, quasi a norme di una ideale perfezione logica:

a) 1). Tutti i concetti che compariscono nella trattazione debbono esser dati esplicitamente come *primitivi* o *fondamentali,* senza definizione, o venir definiti logicamente per mezzo dei concetti primitivi.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nella trattazione se non i concetti primitivi, ed i *concetti puramente logici,* come p. e. i concetti di *appartenenza* (significato dal verbo « essere » o « contenere »), di *ordine*, di *corrispondenza,* ecc.

2) È desiderabile che i concetti primitivi sieno fra loro *assolutamente indipendenti,* per modo che non sia possibile definire logicamente uno qualunque di essi per mezzo degli altri.

b) 1). Tutte le proposizioni che compariscono nella trattazione debbon essere enunciate esplicitamente come *postulati,* o venire logicamente dimostrate per mezzo di altri postulati.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nel ragionamento, se non le premesse contenute nei postulati e gli *assiomi* esprimenti le leggi della logica deduttiva.

2) È desiderabile che i postulati sieno fra loro *assolutamente indipendenti,* per modo che nessuno di essi possa essere dimostrato in base ai rimanenti.

Le condizioni *a) 1)* e *b) 1)* sono essenziali, perchè si abbia una Geometria trattata in modo *rigorosamente* logico. Esse permettono di dimenticare il contenuto dei concetti che vi figurano, considerando la trattazione stessa come una *teoria logica astratta* nella quale entrano soltanto dei simboli non determinati, legati da certe relazioni.

Questo modo astratto di concepire la Geometria ha una grande importanza, perchè fissando in varie guise il senso dei simboli indicati, si possono ottenere varie *interpretazioni* di una stessa teoria astratta, riuscendo così a porre un legame fra più teorie geometriche concrete; un tale legame consiste in ciò che « si possono tradurre tutte le proposizioni dell' una teoria in proposizioni dell' altra, sostituendo, in modo determinato, i concetti che figurano nella prima con quelli della seconda ». Un esempio di ciò si ha nella *legge di dualità* della Geometria proiettiva o della Geometria sferica.

Ogni insieme di proposizioni, che soddisfi ai requisiti *a) 1)* e *b) 1),* può considerarsi come una *teoria logica astratta,* capace di ricevere generalmente varie interpretazioni concrete (geometriche o non geometriche), purchè le ipotesi espresse dai postulati sieno *logicamente compatibili,* ossia *non contradditorie.*

La possibilità di ricevere una interpretazione effettiva sicchè la teoria possa riguardarsi come esprimente un insieme di fatti intuitivi o fisici, assicura *a priori* che la condizione di compatibilità è soddisfatta, e ciò in base ad un supremo principio della ragione.

Per la Geometria dunque, in quanto essa è fondata sull' intuizione, non occorrerà domandarsi se i postulati sono compatibili, purchè essi sieno intuitivamente evidenti.

I requisiti *a) 2), b) 2)* esprimono piuttosto condizioni di *eleganza* della trattazione, anzichè condizioni di rigore. Vedremo più tardi in qual senso tali requisiti appariscano veramente importanti.

L' indipendenza di più concetti può essere riconosciuta immediatamente coll' intuizione (ad es. quando si tratta di concetti rientranti in diverse categorie logiche) ed allora essa può servir di base al riconoscimento della indipendenza di alcuni gruppi di postulati.

D' altra parte si può riconoscere che un postulato *a* è indipendente da altri dati *b, c*..., facendo vedere che l' ipotesi opposta ad *a* è compatibile colle *b, c*.... Perciò si presenta naturale il procedimento seguente: si attribuisca convenzionalmente un senso, diverso dal senso originale, ai simboli che entrano nella trattazione a denotare i concetti primitivi, e si cerchi così di *interpretare* la teoria logica basata su *b, c*... e sulla negazione di *a,* in un modo conforme all' intuizione. La possibilità di una siffatta interpretazione serve a stabilire l' indipendenza domandata.

Quì è forse opportuno di avvertire che non sarebbe lecito affermare l' indipendenza della proposizione *a* dalle *b, c*..., soltanto in base all' inanità d' innumerevoli tentativi fatti per dimostrare la *a*; tale dimostrazione invero potrebbe essere difficilissima ma non impossibile.

Volendosi l' indipendenza assoluta di un sistema di postulati, occorre anzitutto che essi vengano formulati in modo *non ricorrente,* cioè che ciascuno di essi abbia un senso prescindendo dagli altri. In mancanza di questo requisito si potrà domandare soltanto l' *indipendenza ordinata,* ossia l' impossibilità di dedurre ciascun postulato dai *precedenti.*

L' indipendenza di un sistema di postulati è anche relativa alla *composizione* dei postulati stessi. Quando una proposizione a si lasci scomporre in due altre *(più semplici)* a', a'', che prese insieme equivalgano ad a, può ben accadere che la a non dipenda dalle altre proposizioni date $b, c \ldots$, ma che in base alle $b, c \ldots$ si riesca a dimostrare la a'; allora è chiaro, che il postulato a contiene qualche cosa di superfluo, potendo essere rimpiazzato con a''.

Si può istituire una analoga osservazione relativamente all' indipendenza dei concetti fondamentali, ove si consideri la possibilità di sostituire un dato concetto A *più particolare,* con due altri B e C *più generali,* per modo che A risulti definito come un elemento comune alle classi di enti B e C.

L' indipendenza dei concetti e delle proposizioni fondamentali ha dunque un valore tanto più significativo quanto più sono osservate le condizioni di:

a) 3) *Generalità* dei concetti.

b) 3) *Semplicità* dei postulati.

Noi non vogliamo entrare in discussioni logiche troppo sottili, per mostrare come non sia possibile soddisfare a queste condizioni in modo assoluto. Si può tuttavia attribuire ad esse un valore relativo convenientemente precisato, ed *avvicinarsi* così, in varii modi, ad una formulazione logica della Geometria idealmente perfetta.

Ma i criterii di cui si è discorso hanno soltanto un valore logico, sicchè una formulazione della Geometria che più si avvicini ad essere idealmente perfetta secondo tali criterii, può apparire non soddisfacente sotto altri riguardi.

Abbiamo osservato che è lecito di concepire la Geometria in modo astratto, rilevando il vantaggio di una siffatta concezione. La Geometria astratta può ricevere varie interpretazioni e trarre così nuovi aiuti da varie forme dell' intuizione. Ma ove, all' opposto, si voglia prescindere affatto da ogni maniera d' interpretarla, costruendo un edifizio puramente logico, in base a criterii esclusivamente logici, si corre il pericolo di cadere nel vuoto.

S' incontrerebbe quì, nel campo matematico, quella stessa esagerazione formale di cui offrono largo esempio certe recenti manifestazioni dell' arte: nobile è l' idealità della forma che si eleva salendo dalle materie particolari alle più alte espressioni dell' armonia generale; ma il pensiero sfuma e si dilegua nel nulla, come nebbia vaga, incoerente, allorchè si oltrepassano i limiti del reale per seguire soltanto le leggi dei simboli.

Restando nel campo della Geometria, non bisogna dimenticare che tale scienza è scienza di fatti, fisici o intuitivi, che vogliano considerarsi. Il formalismo logico deve essere concepito, non come un fine da raggiungere, ma come un mezzo atto a svolgere e ad avanzare le facoltà intuitive. Gli stessi resultati più lontani, logicamente stabiliti, non debbono ancora considerarsi come un acquisto maturo, fino a che non possano essere in qualche modo intuitivamente compresi. Ma *nei principii l' evidenza intuitiva deve risplendere luminosa.*

Ora come tale condizione d' evidenza si accorda colle norme logiche sopra indicate?

Si trovano qui certi limiti, non prefissati in modo assoluto, ma relativi allo stato di sviluppo della nostra coscienza geometrica.

c) 1) Perchè i postulati possano dirsi evidenti, debbono riferirsi immediatamente ai concetti primitivi. Questa condizione costringe talvolta ad assumere concetti primitivi non indipendenti.

Se intendiamo che il concetto A venga definito logicamente per mezzo di altri concetti $B, C \dots$, anche le proprietà di A dovranno essere dedotte da quelle (che ci vengono rivelate dalla intuizione) di $B, C \dots$; quindi se nella trattazione figura un postulato desunto dal modo con cui A viene intuito, questo porta l'implicita considerazione di un nuovo elemento concettuale primitivo, non contenuto in $B, C \dots$

Un esempio di ciò è offerto dalla proposizione fondamentale del piano: se si pensa la *retta* come un ente primitivo, e si vuol *definire* il *piano* colla proiezione della retta da un punto esterno, si deve anche dimostrare che la superficie così costruita contiene ogni retta determinata da due dei suoi punti; se invece si dà questa proposizione come un postulato, si deve riguardare anche il piano come un ente primitivo, in quanto la nominata proposizione non potrebbe essere intuita se ci formassimo soltanto un' immagine mentale della retta e non avessimo una rappresentazione del piano.

c) 2) L' intuizione cade prima sui concetti particolari e sale, per astrazioni successive, ai concetti più generali.

Non diremo per questo che i concetti più generali allorchè sono intuiti hanno un minor grado di evidenza in confronto ai particolari, ma l' evidenza loro sta in relazione ad uno stato della mente più progredito, in cui si esercita una facoltà intuitiva più astratta.

Dunque la generalità dei concetti che si possono scegliere come fondamentali per la Geometria (e quindi in certo modo anche la semplicità dei relativi postulati) ha un limite nella capacità d' intuire l' astratto.

D' altra parte anche l' indipendenza dei postulati riesce veramente importante solo quando si sappia assorgere ai concetti più generali che derivano dal tralasciare qualcuno dei postulati. Sicchè l' importanza di essa è pur relativa alla capacità astratta dell' intuizione.

Questa capacità si svolge non soltanto coll' esercizio logico, ma anche, in maggior grado, coll' educazione sperimentale.

Riferiamoci ad un esempio: L' idea che comunemente ci si forma della « linea » e della « superficie », ricavata per astrazione da pochi casi particolari, è molto meno generale di quella accolta dal geometra. Chi ha avuto sott' occhio soltanto il piano, la sfera, i coni, i cilindri ed altre analoghe superficie a punti *ellittici* o *parabolici,* non si rappresenta una superficie (a punti *iperbolici)* attraversata in ciascun punto dal piano tangente, come ad es. l' *iperboloide rigato.* Similmente senza aver veduto la superficie di *Möbius* o qualche altra superficie *unilatera*, chi non affermerebbe che ogni superficie ha due facce ben distinte ed irriducibili per moto continuo?

La conoscenza delle superficie a punti iperbolici e delle unilatere, allarga il comune concetto della superficie, permettendoci di abbracciare coll' intuizione un maggior numero di casi.

Ma il geometra si spinge molto al di là della progredita intuizione, allorchè pensa linee e superficie con infinite oscillazioni, linee senza tangente e superficie senza piano tangente ecc.

Ebbene, la possibilità logica di tali casi non basta a dar luogo ad un concetto intuitivo di linea e di superficie in cui essi possano venir compresi. Pertanto siffatte linee e superficie (di cui il nome stesso è abusivo) non sono veri enti geometrici, ma piuttosto ideali rappresentanti delle funzioni.

I concetti di linea e di superficie sono fondamentali per la Geometria; gli sviluppi della teoria delle funzioni possono illuminare i rapporti logici fra le proprietà di tali enti, e possono anche svolgere fino ad un certo punto l' intuizione loro; ma vi è un limite nell' intuizione stessa, al di là del quale gli enti suddetti perdono il loro senso rappresentativo; e questo limite di generalità non può essere oltrepassato, da chi vuol porre a fondamento della Geometria concetti intuitivamente comprensibili.

c) 3) L' intuizione, nello scendere dai concetti generali ai particolari, rivela successivamente le nuove proprietà determinative in modo ricorrente (seguendo l' ordine inverso del procedimento d' astrazione che ha generato i detti concetti generali).

Questo fatto psicologico porta naturalmente ad enunciare una serie di postulati ricorrenti, pei quali non si può parlare d' indipendenza assoluta, ma soltanto di indipendenza ordinata.

L' assoluta indipendenza dei postulati esige dunque che i concetti particolari vengano generalizzati per astrazione, non in un modo solo, ma in più modi diversi.

Le osservazioni precedenti mostrano un rapporto necessario fra i progressi delle questioni riferentisi ai principii, ed i più elevati sviluppi della Geometria, tendenti a concetti più generali ed astratti, e ad una più alta educazione delle facoltà intuitive. Indicano così che tali progressi non dovranno condurre ad una ultima e non sorpassabile formulazione dei nominati principii, ma continueranno incessanti fino a che duri il moto progressivo della scienza.

§ 4. I principali indirizzi nelle ricerche relative ai principii della Geometria. — Nella Geometria elementare compariscono come enti fondamentali, il *punto,* la *retta* e il *piano,* a cui si riferiscono le relazioni di *appartenenza* (per es. « due punti appartengono ad *una* retta ecc. » cfr. art. 2), di *divisione in parti* o di *ordinamento* (art. 2, 4), di *congruenza* o di *movimento* (art. 3).

Questi concetti si presentano all' intuizione in modo ricorrente, sicchè ad es. la proprietà della congruenza o del movimento si esprimono in relazione alla retta e al piano ecc. Ma essi trovano uno sviluppo più generale ed indipendente in alcuni rami elevati della Geometria.

La Geometria proiettiva considera i concetti di retta e piano, prescindendo da ogni nozione di eguaglianza e di movimento; essa considera dunque esclusivamente l' insieme delle *proprietà grafiche,* lasciando da parte le *metriche* (che entrano soltanto nelle sue applicazioni). All' opposto invece i concetti metrici trovano uno svolgimento indipendente dalla nozione della retta e del piano, nella *Geometria metrica sopra le superficie* o *le varietà più volte estese* (studiata di solito coi metodi differenziali), dove all' idea dell' *eguaglianza di segmenti o di distanze* si sostituisce l' idea più generale della *ugual lunghezza di archi di linee.*

Ebbene, a questi due rami della Geometria corrispondono due indirizzi principali nelle ricerche concernenti i fondamenti della Geometria, i quali indirizzi pongono in luce l' assoluta indipendenza fra i concetti grafici e metrici, che, risp. in ciascuno di essi, vengono scelti come punto di partenza.

Ma i due rami indicati della scienza geometrica, hanno pur comuni alcune proprietà che insieme costituiscono una teoria distinta. Le proprietà relative alla divisione in parti della retta o del piano, alla continuità ecc., appartengono ad una più ampia famiglia di *linee* e di *superficie,* e lo studio generale di esse dà luogo, si può dire, ad una *teoria del continuo,* che è la Geometria generale delle linee, superficie, varietà a più dimensioni, comune fondamento della proiettiva e della metrica. A questa teoria del continuo si riattaccano alcuni resultati di Cantor sugli *insiemi*, e gli acquisti generali della *teoria della connessione* o *Analysis situs*. E da essa debbono venire illuminati, prima ed indipendentemente dalle nozioni di retta e piano o di congruenza, i concetti fondamentali di linea e superficie, i veri concetti *primi* della Geometria.

Sono dunque tre gruppi di concetti rispondenti a tre rami elevati della Geometria, ed esprimenti:

1) le proprietà generali delle linee, superficie, varietà;

2) le relazioni di appartenenza fra punti, rette, e piani;

3) le relazioni di congruenza;

intorno ai quali si svolgono tre indirizzi principali dei moderni studi critici.

E, come nei più alti sviluppi della scienza, tutti i metodi della Geometria e dell' Analisi recano quì il loro contributo; in modo speciale i metodi sintetici-proiettivi, la teoria delle forme differenziali quadratiche, gli studi sui gruppi di trasformazioni e quelli sui corpi di numeri, concorrono a rischiarare i principii di una luce più viva. Resta così confermata nel fatto la relazione che avevamo avvertito dover esistere tra i fondamenti della scienza ed i suoi più lontani sviluppi.

A quel modo che l' osservazione più minuta non sa distinguere le parti costitutive di un embrione nella cellula uovo, mentre esse appariscono differenziate, in ordine alle loro funzioni, nello sviluppo embrionale più avanzato; così, anche nell' organismo geometrico, i rapporti tra i concetti fondamentali mal si disvelano negli elementi, ad una critica istituente fra di essi un paragone immediato, e ricevono invece, ed aspettano ancora, una più chiara spiegazione dal progresso delle elevate teorie.

§ 5. **Il problema psicologico dell'acquisto delle nozioni spaziali.** — Ora, quali rapporti legano le menzionate ricerche matematiche al problema psicologico dell' origine dei concetti geometrici?

Abbiam detto che tali concetti nascono da un' esperienza idealizzata, la quale si è continuamente ripetuta in uno stato della mente anteriore alla coscienza adulta.

Le condizioni di una siffatta esperienza sono da un lato caratteri degli organi di senso, e d' altro lato *leggi associative* del pensiero, cioè *elementi strutturali* della psiche secondo i quali si compie, per così dire, l' *interpretazione* dei fenomeni sensibili.

Le sensazioni che contengono qualche elemento spaziale sono le *generali sensazioni tattili-muscolari*, appartenenti a tutta la cute; quelle del *tatto speciale,* cioè dell' organo (comunemente la mano) preso come sede di paragone costante, ed infine quelle della *vista.*

Nella *Psicologia fisiologica* (da Helmoltz, Wundt ...) si istituiscono esperienze atte a decidere quali proprietà geometriche possano venire acquisite immediatamente dall' una o dall' altra sensazione. Ma nell' interpretare tali esperienze, occorre conoscere profondamente i rapporti fra i concetti a cui le anzidette proprietà si riferiscono, onde si possa separare dalla nozione di un fatto, tutto ciò che non è ad essa indissolubilmente legato.

Allora si arriva ad una prima conclusione generale, cioè che la vista dà, in modo immediato, soltanto le nozioni grafiche e non le metriche. All' opposto invece dalle sensazioni tattili-muscolari, si acquista la conoscenza immediata delle proprietà (metriche) della congruenza, e solo in via subordinata la conoscenza della retta e del piano.

Questa osservazione, implicitamente contenuta in Helmoltz, viene fatta esplicitamente dal Klein.

Si può andare più innanzi tenendo presente la distinzione accennata fra sensazioni tattili-muscolari generali e sensazioni del tatto speciale.

Le prime, fino a che non si sia localizzata per abitudine una sede di paragone, sono incapaci di dare la nozione della congruenza. Il loro contenuto, per quanto riguarda le cognizioni spaziali, si limita alle relazioni più generali inerenti alle linee e alle superficie, relazioni che abbiam detto costituire l'oggetto della teoria del continuo, ed essere comune fondamento delle proprietà grafiche e delle metriche.

Onde: *i tre rami della Geometria, in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la Geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all' acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.*

Non entreremo nelle discussioni che occorrerebbero per giustificare questa conclusione, e dovremo pure arrestarci dinnanzi ai problemi più particolari che quì si riattaccano: come da ciascun gruppo di sensazioni traggano origine i concetti geometrici fondamentali, e come essi si leghino fra loro secondo le leggi logiche e associative, le quali trovano poi la loro espressione nei postulati.

Gli studi che da alcuni anni andiamo facendo intorno a tali argomenti, troveranno miglior posto in altro luogo.

Vogliamo tuttavia richiamare l' attenzione del lettore su questo punto; che vi è differenza tra postulati aventi il loro fondamento in un sol gruppo di sensazioni, e postulati i quali nascono dall' associarsi di sensazioni appartenenti a gruppi diversi. Questi ultimi debbono avere in confronto ai primi un minor grado di evidenza intuitiva.

Si arriva così a spiegare psicologicamente i tentativi, annoverati dalla storia delle Matematiche, per bandire dai fondamenti della Geometria il *postulato delle parallele* (cfr. art. 6). La sua minore evidenza si spiega osservando che esso è un *postulato d' associazione fra le sensazioni ottiche* da cui scaturiscono i concetti grafici, *e le sensazioni tattili-muscolari* o *meccaniche*, onde hanno origine i metrici. Infatti, se noi cerchiamo di renderci ragione della repugnanza che proviamo a contraddire l' ipotesi di una unica parallela ad una retta data, passante per un punto dato, riconosciamo che essa dipende dal doppio modo onde siamo soliti rappresentarci le rette parallele, in un dato piano: come limiti di due rette che si tagliano, ove il punto comune si allontani indefinitamente in un verso determinato; e come linee *equidistanti.* In questo doppio modo di rappresentazione vi è un fatto d' associazione ottico-meccanica, che riposa appunto sulla sensibile validità del postulato delle parallele.

§ 6. **Il problema filosofico della Geometria.** — Ed ora veniamo a considerare i problemi relativi ai principii della Geometria dal punto di vista filosofico.

Dappoichè l' analisi psicologica rischiara l' oscurità avvolgente le origini dei nostri concetti geometrici, e, spiegandone l' acquisto, permette di riattaccare il senso di necessità inseparabile dai postulati, alle leggi d' associazione del pensiero che presiedono alle condizioni formative di essi, si è condotti logicamente a riconoscere che questa necessità ha soltanto un valore subiettivo. Sicchè non può dirsi *a priori* che la Geometria reale dello spazio fisico debba essere esattamente conforme alla nostra intuizione.

Il dubbio ardito che qui si solleva urta invero con ciò che costituisce una credenza intimamente fissata nel nostro cervello; ma di esso facilmente possiamo renderci ragione, raffigurandoci, con Helmoltz e Clifford, altri esseri pensanti in diverse condizioni spaziali.

Un essere A a due dimensioni, che possa liberamente muoversi nel piano, acquisterà la conoscenza della Geometria piana ordinaria; ma alla stessa conoscenza perverrà ancora un essere B, mobile sopra una superficie sferica, purchè le dimensioni di questa sieno estremamente grandi rispetto al campo in cui B può muoversi, per modo che il detto campo si confonda approssimativamente col piano tangente alla sfera. Così, l'uno e l'altro avranno la nozione d'una linea tracciata sopra la rispettiva superficie, misurante la minima distanza fra due punti, linea che potranno chiamare *retta*. E questa *retta*, estendendo mentalmente le proprietà di essa osservate nella regione accessibile alle loro esperienze, se la figureranno come una linea indefinitamente estesa ed aperta nei due sensi; ma questa figurazione sarà falsa nella Geometria sferica, dove la linea chiamata retta è un circolo massimo, cioè una linea chiusa e di lunghezza finita, sebbene grandissima rispetto a B.

Senza dilungarci su altri esempi di simil genere, chiaro apparisce, per analogia, come possano immaginarsi varie *forme spaziali* rispondenti solo in parte ai requisiti che attribuiamo ordinariamente allo spazio, ma pur tali che nell'ambiente a noi accessibile dieno luogo a condizioni geometriche sensibilmente identiche. Se il nostro spazio fisico fosse appunto rispondente ad una di queste forme, la nostra intuizione geometrica sarebbe pur la stessa che oggi possediamo, ma estesa al di fuori del campo delle nostre osservazioni potrebbe condurci a conclusioni assolutamente erronee, come abbiam visto nell' esempio ipotetico relativo all' essere B.

Nulla ci dice che così non sia di fatto. Ricoscendo che la Geometria si appoggia sopra una base empirica, dobbiamo pur riconoscere che le proposizioni di questa scienza hanno, come le proposizioni fisiche, una validità relativa ed approssimata; onde, ad assicurarci della loro esattezza, conviene esercitare un controllo sopra le esperienze elementari che la nostra intuizione ci rappresenta fissate come in un modello ideale, ed istituire ancora, fin dove sia possibile, nuove e più precise esperienze.

Così il problema filosofico dello spazio conduce ad una ricerca fisica. Ma questa ricerca deve essere guidata dall' analisi matematica, cui spetta indicare i fatti meglio verificabili sopra cui si asside l' edifizio geometrico.

Ispirato a tali idee, Helmoltz ha proposto di caratterizzare la Geometria mediante le proprietà fondamentali del movimento dei corpi solidi (astrazion fatta dal tempo). E la questione da lui enunciata ha ricevuto oggi una risposta più precisa e soddisfacente dalla trattazione gruppale di Sophus Lie.

Le proprietà fondamentali del movimento fisico, più precisamente verificabili in un campo dello spazio accessibile all' esperienza, permettono di ritenere valida in esso la Geometria generale prescindente dal postulato delle parallele. Quest' ultimo postulato non ammette una prova sperimentale di esattezza comparabile a quella spettante ai postulati del movimento.

Così la Geometria, detta non-euclidea, acquista un alto interesse filosofico, giacchè essa appare, non soltanto *logicamente,* ma anche *fisicamente* possibile.

Che il postulato delle parallele non sia una conseguenza logica dei primi principii relativi alla retta, al piano e alla congruenza; che esso sia dunque, in questo senso, indimostrabile; nulla dice ancora relativamente alla sua validità fisica. Ma quando si sia osservato che i fatti, costituenti la base di quei primi principii, sono verificabili sperimentalmente in modo assai esatto, mentre il fatto nuovo richiesto per la teoria delle parallele, o richiede una verificazione impossibile nello spazio infinito o si fonda su esperienze meno precise, allora la questione della Geometria fisica ha fatto un progresso, sebbene nel senso del dubbio.

Questo dubbio, per altro, non può modificare la nostra intuizione geometrica. Così il modello ideale ch' essa ha costruito dello spazio, e che, se pur non esattamente, lo rappresenta con un' approssimazione superiore ad ogni sensibile valutazione d' errore, resta e resterà sempre lo spazio euclideo!

II

§ 7. Sullo scopo dell' insegnamento secondario. — Insegnanti chiamati ad educare le menti dei giovani, preparandole a ricevere una più alta coltura, non lasciate di approfondire lo spirito filosofico della vostra scienza: quello spirito di relazione che tutto coordina in una sintesi, e fa brillare sugli umili particolari la grande luce dell' idea generale!

Certo voi non potrete spingere le intelligenze poco destre dei discepoli nelle elevate regioni della critica, non dovrete aprir loro i larghi orizzonti della filosofia scientifica. Ma pur dalle vostre osservazioni più elementari scaturirà una scintilla di quella fiamma che avrete acceso nel pensiero. E l' opera vostra sarà vero ammaestramento ed educazione delle menti; risponderà così al nobile scopo dell' insegnamento secondario.

Una chiara coscienza di tale scopo deve costituire la base di ogni giudizio didattico. Perciò occorre anzitutto distinguere l' obietto della scuola media che è compimento a sè stessa, in ordine ad esigenze tecniche e professionali, da quello della scuola che prepara a studi superiori. Quest'ultima è attuata nel ginnasio-liceo, ed anche, ormai, nella sezione fisico-matematica degli istituti tecnici.

Di essa soltanto vogliamo parlare [1].

E ci uniamo al concetto di chi ritiene *l'insegnamento secondario* debba piuttosto *educare le intelligenze*, che dare una serie di nozioni utili o fondamentali. Il qual concetto, invero, trova poco generali accoglienze, tutti i bisogni della vita pratica suscitando uno sfrenato desiderio di correre rapidamente al fine, e togliendo la chiara visione di quel che importi l'addestramento delle facoltà intellettive.

Eppur l'indugio che fu speso a rendere atti allo studio, sarà più tardi largamente ricompensato!

Ce lo dicono i frutti di quella stessa coltura classica che è oggetto di controversie tanto vivaci. Nella quale, sia detto quì per incidenza, consideriamo come studio essenziale lo studio del Greco, contro cui si appuntano le maggiori obiezioni.

Spesso si proclama l'inutilità di una fatica senza pratico compenso, e più universalmente si rimprovera l'insuccesso d'un insegnamento così presto e facilmente dimenticato. Non si ascolta la voce di protesta affermante che il sentimento del bello, culto supremo dell'anima ellenica, ebbe la virtù di educare e d'ingentilire gli spiriti; meno ancora si riflette come di quella grammatica apparentemente scomparsa dalla memoria, resta pur sempre, acquisto perenne, la nozione di alcune armoniche leggi che presiedono all'atteggiarsi del pensiero nelle lingue.

Se tali criterii ristretti d'immediata utilità dominano i giudizi contro le più alte tradizioni dell'arte e della coltura, qual meraviglia ch'essi s'impongano nel modo di considerare l'insegnamento matematico?

[1] D'altra parte le principali raccomandazioni svolte nel seguito, possono indirizzarsi, forse non inutilmente, anche agl'insegnanti delle Scuole Normali, cui è affidato il nobile compito di preparare i futuri educatori del popolo.

Certo non si discute quì l' utilità delle applicazioni, le quali aprono la via ad altri studi numerosi; ma quell'insegnamento si vorrebbe togliere appunto a coloro che più debbono correggere con esso le imprecise attitudini dell' intelletto. E all' insegnamento stesso, pei giovani cui viene accordato, si assegna un fine male addicentesi al proposito educativo: dare rapidamente molte nozioni di resultati complessi e difficili, sembra ad alcuni il miglior modo di preparare i futuri matematici. Invece poco vale lo studio così spinto innanzi, senza svolgere nelle menti lo spirito logico e di relazione.

Noi stessi nella scuola, abbiamo avuto di ciò ampia conferma.

E però qui insistiamo, esortando specialmente gli insegnanti degli istituti tecnici, a penetrare più addentro nei rapporti delle proposizioni semplici e luminose, anzichè affaticare, con scarso frutto, i discepoli, cogli artifici dei problemi astrusi e complessi.

§ 8. **Sull' insegnamento della Geometria.** — Alla Geometria si concede volentieri un posto speciale nell' insegnamento matematico secondario; sicchè gli stessi giovani cui l' astrattezza dell' Algebra ispira diffidenze ed antipatie, di sovente trovano in essa una ricreazione dilettevole. Invero la Geometria, fra tutte le discipline matematiche, ha il vantaggio di volgersi ad un maggior numero di attitudini, più comunemente sviluppate fra gli adolescenti.

Il puro esercizio logico alletta soltanto qualche intelligenza critica convenientemente coltivata, perchè esige una fatica più intensa e meno consueta. Invece le sensazioni, nella loro infinita varietà di colore e di grado, sono fin dalla nascita la prima sorgente di piacere.

Piace agli spiriti leggeri e non addestrati allo sforzo, la sensazione quasi passiva e mutabile. Ma, a poco a poco, vincendosi coll' esercizio la penosa difficoltà dell' attendere, si fa più forte il piacere delle sensazioni a cui la mente partecipa in modo attivo, colla fissità del pensiero.

Tra queste è l' osservazione dei fatti geometrici, così capace di suscitare largo interesse in ogni grado di coltura, che il Froebel non dubitò di proporla come divertimento educativo all' infanzia.

Le figure e i modelli, stimolando la curiosità, inducono a considerare le semplici relazioni che loro appartengono, ed incitano a cercare le più riposte; onde il senso logico si addestra coll' esercizio e si rallegra nel successo.

Qualsiasi maestro di Geometria deve tener presente che l' interesse degli allievi si volge ai resultati, tanto più vivace, quanto più essi appaiono espressione di fatti, non evidenti, ma semplici e luminosi. La verifica grafica è attesa dal giovane come la conferma d' una scoperta, quando p. es. gli si è insegnata la costruzione dell' esagono regolare, o gli si sono mostrate le proposizioni sul punto di concorso delle mediane o delle bisettrici d' un triangolo, il teorema dei triangoli omologici, e così via.

Onde l' uso larghissimo di figure e di modelli, ed anche l' effettuazione di vere esperienze geometriche, vale ad accrescere la fiducia nel ragionamento dimostrativo e a farne meglio sentire l' importanza ([1]).

Questa pratica ha anche un altro vantaggio; dà ai giovani un' idea adeguata del posto che alla Geometria spetta nell' ordine delle scienze. Essi la vedono svolgersi

---

([1]) A questo proposito ci sembra utile rilevare l' interesse della accurata *discussione delle figure*, di cui si può forse persuadere i giovani presentando loro qualche divertente paradosso geometrico.

Cfr. W. W. R. Ball, *Récréations et problèmes mathématiques*. Ch. II. 3me édition trad. par Fitz, Patrick. Paris, Hermann, 1898.

in un tempo come scienza logica ed empirica. Dovranno poi assorgere al concetto esatto della sua struttura logica, e comprenderla in uno sguardo generale con largo spirito di sintesi. Perciò occorre che la materia sia sapientemente ordinata; che delle varie proposizioni si cerchino gl' intimi rapporti, e si facciano scaturire spontaneamente dalle intelligenze, addestrate con esercizio graduale.

Il senso dell' armonia guadagnerà, a poco a poco, gli spiriti, suscitando il desiderio illusorio d' un ordine logico assolutamente compiuto, in cui tutto dovrebbe essere definito e dimostrato.

Che tale domanda sia priva di senso, dovrà allora mostrare il maestro. Volgendo l' attenzione del discente sopra il carattere di metodo riduttore che spetta alla definizione e alla dimostrazione, ne desumerà il bisogno di trarre alcune proposizioni e alcuni concetti fondamentali da un' esperienza immediata.

Tutte le proposizioni geometriche, in quanto esprimono fatti, possono essere appoggiate sopra un' esperienza; ma *non tutte le esperienze hanno lo stesso valore dimostrativo,* giacchè in ragione della cresciuta complicatezza si mescola ad esse un crescente elemento d' errore. Al contrario invece *il ragionamento logico più complesso ha come il più semplice una forza probativa assoluta,* non per stabilire un fatto, ma per stabilire una *dipendenza* tra due fatti.

Ecco dunque illuminata tutta l' importanza dello svolgimento logico della Geometria: non soltanto esso permette di *prevedere* ciò che avrà una conferma dalla esperienza; ma fornisce una certezza del resultato più complesso uguale alla certezza accordata alle semplici premesse, la quale è desunta da un' altra esperienza, tanto più sicura, quanto più elementare.

Quì sarà il caso di discutere la natura delle esperienze elementari cui si appoggiano i postulati. Sono osservazioni immediate, tante volte ripetute e controllate, che si rivelano come già acquisite, *evidenti* all' *intuizione;* ma l' evidenza loro è una visibilità psicologica che non deve esser confusa coll' evidenza logica, quest' ultima riferendosi sempre ad una relazione, *mai* ad un fatto.

Procedendo in quest' ordine di considerazioni, scaturisce il dubbio intorno all' assoluta validità fisica della Geometria. Ma non oseremmo consigliare agl' insegnanti di affacciarlo alla mente dei giovani. Temiamo possa non esser compreso ove non soccorra la scuola filosofica, preparando con qualche nozione discreta del problema della conoscenza. E d' altronde, anche senza spingersi tanto innanzi, ci pare che il fine essenziale dell' insegnamento sia raggiunto, se si riesce a *far comprendere come lo sviluppo logico della Geometria riposi sopra una base empirica, distruggendo la strana illusione per cui i postulati fondati sopra un esperimento immediato, sembrano quasi avere un grado di certezza inferiore ai teoremi, che pur da quelli dipendono.*

Se poi taluno arditamente vorrà sollevare un più alto sguardo ai problemi filosofici che quì si riattaccano, non lasci di avvertire il carattere diverso delle proposizioni verificabili nel campo finito accessibile ai nostri sensi, in confronto al postulato delle parallele che si riferisce allo spazio infinito, ed appare quindi un' osservazione estesa dal nostro stesso intelletto. Ed avverta pure che le affermazioni ad esso sostituibili, relative a dati finiti, riposano sopra esperienze *quantitative* visibilmente approssimate.

§ 9. **Le esigenze didattiche relative all' insegnamento dei principii della Geometria.** — Il modo di trattare gli elementi che risponde al concetto pedagogico sopra accennato, esige forse qualche spiegazione ulteriore. Abbiam detto che vogliamo uno sviluppo razionale ed empirico in un tempo. Nei principii ci piace che si cominci con una serie di *osservazioni,* presentando i concetti fondamentali come rappresentanti ideali di enti della realtà, ed enunciando i postulati come espressione di fatti elementari. Quindi possono dedursene teoremi a grado a grado più complessi, e alla loro dimostrazione logica si può far seguire la verifica sperimentale. Ma ciò che è empirico si tenga accuratamente distinto da ciò che è logico, sicchè le prime osservazioni enuncino *tutti i postulati* occorrenti; non mai un nuovo dato della intuizione, dimenticato nelle premesse, s' insinui nascostamente nel ragionamento dimostrativo. Questa è la sola, importante, anzi necessaria, *condizione di rigore.*

Altri credono che occorra portare, fin nei primi principii dell' insegnamento geometrico, una critica raffinata, tendente a scomporre, con analisi minuta, tutte le proposizioni fondamentali. E di queste si sforzano d' altra parte a ridurre il numero, tenendo conto di tutte le relazioni di dipendenza logica che una tale critica riesce a scoprire. Credono così di educare meglio lo spirito logico. In realtà ottengono troppo spesso il resultato opposto.

Pensiamo che il discente non ha ancora nessun concetto dello svolgimento d' una scienza logica, e ci renderemo conto dell' impressione penosa ch' egli proverà innanzi ad un tal modo d' insegnamento. Il maestro ha di mira tante relazioni riposte e lontane che a lui sono sconosciute; il maestro ha il concetto di una logica formale indipendente dalla materia che ne costituisce il contenuto; ma come potrebbe giungere a questo concetto astrattissimo chi non ebbe ancora esempio di una materia logicamente ordinata?

Alla sua mente si presentano per la prima volta enunciate in modo esplicito, proposizioni che egli ha ritenuto sempre come evidenti; di alcune gli si dice di accoglierle come esprimenti dei fatti già a lui familiari, ma di altre, della stessa natura, gli si offre una dimostrazione che sembra quasi oscurare col dubbio la limpida certezza.

In tali discussioni si riuscirebbe soltanto ad affaticare ed allontanare colla noia dallo studio, menti pur disposte ad apprendere, quando si sappia suscitarne l' interesse, aprendo dinnanzi agli occhi il campo largo dei fatti!

Con quale vantaggio?

In obbedienza ad un criterio teorico, che non ha alcun valore imperativo ed è anche teoricamente discutibile; perchè infine, considerata la Geometria nel suo aspetto di scienza fisica, i rapporti logici fra i postulati nulla tolgono alla perfezione del loro sistema, la quale dall' intima concordanza delle parti riceve anzi nuova conferma.

Insistiamo recisamente su questo punto essenziale: *nell' insegnamento della Geometria si può e si deve tener conto della condizione di rigore, enunciando come postulato tutto ciò che si trae immediatamente dall' osservazione; ma per il rigore non importa affatto cercare l' indipendenza dei postulati, ed anzi didatticamente è preferibile trarre dall' osservazione un maggior numero di principii evidenti.*

Nè di più grande interesse ci sembra il separare minutamente, nelle varie proposizioni logiche, l' affermazione d' un fatto che alla mente si presenta come il resultato d' un' unica esperienza elementare; anzi didatticamente ci par meglio che esso venga enunciato in modo conciso, purchè esatto e completo. Così il rigore matematico può essere pienamente raggiunto senza affaticare il discente.

E quando le difficoltà dei principii saranno vinte, e la suprema armonia della scienza geometrica apparirà chiara nell' ordine dei resultati e nei loro intimi rapporti, sapientemente posti in luce, allora, come abbiam detto, il maestro potrà opportunamente considerare la Geometria nell'ordine delle scienze, spiegandone la mirabile struttura.

Così egli avrà contribuito, secondo il suo debito, a richiamare l' attenzione dei giovani sopra un punto della generale teoria della conoscenza; in loro suscitando il desiderio di assorgere analogamente, da ogni ramo dello scibile, a quest' ordine di considerazioni, pur troppo lasciate fuori della coltura nel nostro paese.

Le nozioni acquisite nel campo dei problemi relativi ai principii della Geometria, e lo spirito filosofico accresciuto da tali studi, varranno in tal modo a rendere più utile ed efficace l' opera degli educatori delle menti.