Enriques, Federigo and Castelnuovo, G.

Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche

Annali Mat. Pura Appl. (III) **VI** (1901), pp. 165-225.

Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.

(*Di* G. Castelnuovo, *a Roma* e F. Enriques, *a Bologna.*)

In questa Memoria ci siamo proposti di esporre i resultati di alcune ricerche che abbiamo ultimamente compiute intorno alla teoria delle superficie algebriche. Ma poichè i nuovi resultati a cui siamo pervenuti si appoggiano sopra quelli precedentemente raggiunti, dai quali è occorso rimuovere qua e là inutili limitazioni, ci trovammo costretti ad allargare il primitivo proposito esponendo al lettore un quadro di tutti o quasi tutti i più essenziali resultati che abbiamo ottenuto in questa teoria, da sette anni fino ad oggi.

Naturalmente abbiamo riferito i teoremi colle spiegazioni necessarie, lasciando però da parte quelle dimostrazioni che era affatto inutile di riprodurre.

Il metodo di esposizione da noi tenuto speriamo possa contribuire alla chiarezza della lettura, giacchè esso rende, a nostro parere, accessibile il lavoro anche a chi non abbia alcuna conoscenza speciale dell'argomento.

Crediamo utili tuttavia poche parole d'introduzione per spiegare a quale scopo sieno dirette le nostre ultime ricerche, ed a quali nuovi resultati esse ci abbiano condotto.

Nello studio dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie è fondamentale la nozione del *sistema aggiunto* ad un sistema lineare dato (§ I).

Partendo da un sistema $|C|$ e costruendo il suo aggiunto $|C'|$, l'aggiunto di questo (2° aggiunto) $|C''|$, e così continuando, si ottiene una serie generalmente illimitata di sistemi lineari

$$|C|,\quad |C'|,\quad |C''|,\ldots,\quad |C^{(i)}|,\ldots;$$

e dalla considerazione di questa scaturiscono i *caratteri* e i *sistemi di curve invarianti* per la superficie (§ II).

In casi particolari la serie sopra nominata si arresta ad un ultimo sistema aggiunto $| C^{(i)} |$; si ha allora un processo di riduzione che si è già rivelato utile nello studio delle superficie razionali (involuzioni piane, e condizioni di razionalità).

Determinare tutte le superficie sopra cui il procedimento di aggiunzione si estingue, è la questione fondamentale che ci siamo proposti.

La risposta a tale questione è che *tutte le superficie dotate di questa proprietà sono riferibili a rigate (razionali o no).*

Da questa risposta, che comprende come casi particolari i vari resultati già ottenuti col metodo di riduzione sopra nominato, seguono due ordini di nuove conseguenze:

1) Conseguenze relative alle *condizioni di trasformabilità* di una superficie *in una rigata* (§§ V e VI), dalle quali si deducono in particolare le note *condizioni di razionalità* (§ VI, n.° 23);

2) Conseguenze relative alla teoria generale delle superficie, segnatamente la possibilità di eliminare le curve eccezionali per ogni superficie che non appartenga alla famiglia delle rigate, e gli sviluppi che si riattaccano alla nozione del *genere lineare* (§ V, n.° 18 e § VI).

In luogo di un più ampio resoconto di tali resultati porgiamo al lettore un indice particolareggiato della Memoria, richiamando specialmente la sua attenzione sopra le questioni risolute nel § V, le quali fanno fede (se non c'inganniamo) dei progressi portati da queste nuove ricerche nella teoria delle superficie algebriche.

INDICE

I. *Prime proprietà dei sistemi lineari di curve sopra una superficie.*

1. Definizioni; caratteri dei sistemi lineari; operazioni elementari sopra di essi.
2. Sistemi aggiunti e teorema fondamentale che li riguarda.

II. *Caratteri invarianti delle superficie.*

3. Il genere geometrico e i plurigeneri.
4. Il genere numerico e il teorema di RIEMANN-ROCH per le superficie.
5. L'invariante relativo ω, e il genere lineare.
6. L'invariante I di ZEUTHEN e SEGRE.
7. Alcune diseguaglianze tra i caratteri di un sistema lineare di curve.

III. *Sulle curve eccezionali.*

8. Curve eccezionali di prima specie.
9. Curve eccezionali di seconda specie.
10. In qual modo le curve eccezionali si comportino nell'aggiunzione.

IV. *Superficie sopra le quali il procedimento di aggiunzione si estingue; loro riferibilità a rigate.*

11. Riepilogo dei principali resultati noti intorno alla trasformabilità di una superficie in una rigata.
12. Preparazione della superficie.
13. Superficie aventi il carattere $\omega \leq 1$.
14. Superficie aventi il carattere $\omega > 1$.
15. Conclusione.

V. *La trasformabilità di una superficie in una rigata desunta dall'esistenza di certi sistemi di curve sopra di essa.*

16. Superficie contenenti un sistema lineare di curve di genere π e grado $n > 2\pi - 2$; (in particolare superficie a sezioni di genere 3).
17. Superficie possedenti una serie continua di curve razionali; involuzioni sopra rigate.

18. Superficie con infinite curve eccezionali.
19. Superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali in sè stesse non formante un gruppo d'ordine finito.

VI. *Il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie, e la sua importanza nel decidere se la superficie sia trasformabile in una rigata.*

20. Il genere lineare $p^{(1)}$ per le superficie con un numero finito di curve eccezionali.
21. Definizione generale del genere lineare; condizione di trasformabilità di una superficie in una rigata.
22. Il genere lineare secondario.
23. Condizioni di razionalità di una superficie.
24. Questioni insolute.

I. Prime proprietà dei sistemi lineari di curve sopra una superficie.

1. Le considerazioni che seguono si riferiscono alla geometria sopra una superficie algebrica F, che supponiamo appartenere ad un certo spazio S_r a $r \geqq 3$ dimensioni, ed essere *priva di punti multipli.*

Questa ipotesi non porta invero alcuna restrizione al nostro studio, giacchè ogni superficie data, con singolarità qualunque, può essere birazionalmente trasformata in un'altra, appartenente ad un S_r con $r \geqq 5$, priva di singolarità (*).

Sopra F considereremo *sistemi lineari* $|C|$ *di curve* (algebriche) C, ai quali generalmente non verranno *imposti* dei *punti base*; ed ogni sistema $|C|$ verrà considerato nella maggiore ampiezza possibile, cioè *completo* (o *normale*), per modo che non esista alcun sistema lineare di curve *dello stesso ordine* contenente $|C|$. Qui importa ricordare che una qualunque curva (*totale*) C *determina il sistema completo cui appartiene* (**). Assegnando dunque, sopra F, un sistema lineare $|C|$, supporremo, ove la scelta sia arbitraria, che le curve C sieno *irriducibili*, ∞^1 almeno, e non passino per alcun punto fisso *(punto base)*.

Noi in seguito dedurremo dai sistemi lineari irriducibili e privi di punti base, scelti su F, nuovi sistemi lineari, mediante certe operazioni; ma queste saranno di tal natura che i nuovi sistemi costruiti non dovranno mai avere, *a priori*, dei punti base, per effetto delle operazioni stesse. Riservandoci di fissare, fra un momento, le operazioni di cui si tratta, avvertiamo subito che colle condizioni enunciate *non* si esclude:

1) che i sistemi costruiti, ∞^1 almeno, pur essendo composti di curve irriducibili, abbiano dei *punti base accidentali*, i quali però si debbono ri-

---

(*) Allo studio di una siffatta trasformazione sono rivolti i noti lavori dei Sigg. Noether, Del Pezzo, Segre, Picard, B. Levi. E, sebbene il procedimento seguito da questi geometri vada soggetto talvolta a qualche limitazione, o, per alcuni, non appaia affatto immune da critiche, così da porgere una dimostrazione luminosa del resultato, valida per tutti i casi di singolarità complicate, noi ci teniamo egualmente sicuri della esattezza della conclusione, alla quale si può giungere per molteplici vie. Ad una di queste vie accenniamo nell'articolo sulle *Superficie algebriche* scritto per la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.*

(**) Cfr. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra una superficie algebrica.* Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), (serie III), tom. X, 1896, §§ 9, 11, guardare come *virtualmente non esistenti*, nel senso che verrà precisato più tardi;

2) che i sistemi costruiti come si è detto, ∞^1 almeno, riescano composti di curve *riducibili*, la quale ipotesi dà luogo a due casi (*):

a) che le curve del sistema si compongano di un certo numero di *componenti fisse*, e di *componenti variabili irriducibili* (costituenti un sistema lineare irriducibile virtualmente privo di punti base su F);

b) che le curve del sistema, all'infuori di *eventuali componenti fisse*, sieno composte ciascuna di più *curve variabili di un fascio*, lineare o no (sistema ∞^1 di curve tale che un punto di F appartenga ad *una* curva del sistema), il fascio essendo ancora virtualmente privo di punti base;

3) che i sistemi indicati sieno ∞^0, cioè constino di *una sola curva* (irriducibile o no).

La convenzione di riguardare come *virtualmente non esistente* un punto base accidentale A di un sistema lineare $|C|$ costruito su F, si traduce nella seguente:

Se la superficie F viene trasformata in un'altra superficie F^*, per modo che al punto A di F corrisponda su F^* una curva a^* *(curva eccezionale), la curva a^* si deve riguardare come facente parte di tutte le curve trasformate delle C.*

Questa convenzione porta di conseguenza altre convenzioni relative al modo di valutare i caratteri di $|C|$, le quali verranno esposte tra poco.

Cominciamo a stabilire la natura delle operazioni che intendiamo eseguire sui sistemi lineari dati su F.

Anzitutto *opereremo per somma e per sottrazione.*

Dati due sistemi lineari (completi) $|C|$ e $|K|$, dicesi *sistema somma* di essi, e designasi con $|C+K|$, il sistema lineare completo contenente tutte le curve composte di una C e di una K; questo sistema è irriducibile se sono irriducibili $|C|$ e $|K|$, a meno che questi non coincidano in un unico fascio; esso è privo di punti base, tali essendo $|C|$ e $|K|$.

Dati due sistemi lineari $|C|$ e $|K|$, e *supposto che* $|C|$ *contenga parzialmente* $|K|$ (vale a dire che una e quindi ogni curva K formi parte di una o più curve C), dicesi *sistema differenza* $|C-K|$ (o *residuo di* $|K|$ *rispetto* a $|C|$) il sistema completo costituito dalle curve che insieme ad una K compongono una C; questo sistema $|X|$ riesce *indipendente dalla*

(*) Cfr. Enriques, l. c., § 5.

curva K considerata (*), e può definirsi mediante l'equazione simbolica

$$|K + X| = |C|.$$

Nella sottrazione possono ottenersi sistemi riducibili, comunque si operi su sistemi irriducibili; inoltre, pur essendo $|C|$ privo di punti base, $|C - K|$ può avere dei punti base accidentali, che in ogni caso debbono riguardarsi come virtualmente non esistenti.

Ad ogni sistema lineare $|C|$ competono tre caratteri fondamentali: la *dimensione,* il *genere*, il *grado*, invariabili per una trasformazione birazionale della superficie.

Relativamente al genere e al grado occorrono le seguenti spiegazioni:

1) Il genere d'un sistema lineare $|C|$, irriducibile e privo di punti base, è il genere π di una curva C generica. Se $|C|$, ancora irriducibile, possiede dei punti base di molteplicità $j_1, j_2 \ldots$, si debbono distinguere il *genere effettivo* di $|C|$, cioè il genere π di una C generica, ed il suo *genere virtuale* calcolato in armonia colla convenzione di riguardare i punti base di $|C|$ come virtualmente non esistenti; quest'ultimo carattere verrà dato da

$$\pi + \Sigma \frac{j(j-1)}{2}.$$

Se $|C|$ è riducibile, il suo genere (*virtuale*) dovrà essere valutato mediante la formula

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$

che dà il genere di una curva composta di due componenti aventi rispettivamente i generi π_1, π_2, e secantisi in i punti.

Questa formula, estesa al caso di più componenti, permette di determinare il genere di $|C|$ comunque riducibile; tuttavia se in $|C|$ comparisce una componente fissa γ, contata più volte, occorre considerare il *numero i delle intersezioni di γ con sè stessa* calcolato in base alla nozione sotto esposta di *grado virtuale* d'un sistema lineare.

Se si sommano due sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$, i cui generi valgano rispettivamente π_1, π_2, e dove una C_1 e una C_2 si seghino in i punti, si calcolerà il genere di $|C_1 + C_2|$ mediante la formula indicata innanzi

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1.$$

(*) Enriques, l. c., § 13.

Qui è opportuno ricordare il seguente principio che si appoggia sopra ragioni di continuità e di connessione, e di cui faremo uso frequente:

Se una curva generalmente irriducibile, di genere π, varia in un sistema continuo, e per una posizione particolare si spezza in due componenti distinte, queste hanno almeno un punto comune, fuori dei punti base eventuali del sistema, e quindi ogni componente parziale di quella ha il genere $\leqq \pi$.

2) Il grado d'un sistema lineare irriducibile $|C|$, ∞^1 almeno, privo di punti base su F, è il numero n delle intersezioni di due curve C generiche. Se $|C|$, pur essendo irriducibile, ha dei punti base, conviene distinguere il suo *grado effettivo*, cioè il numero n delle intersezioni *variabili* di due C, ed il suo *grado virtuale* cioè il numero totale delle intersezioni di due C, ove un punto base j^{plo} viene computato per j^2 intersezioni; questo secondo carattere $n + \Sigma j^2$ è quello cui ci riferiremo generalmente, d'accordo colla convenzione di riguardare come virtualmente non esistenti i punti base di $|C|$.

Ma la definizione esposta non ha più senso se $|C|$ è riducibile, contenendo delle parti fisse.

Ecco come si definisce in questo caso il grado (virtuale) di $|C|$.

Osserviamo anzitutto che se $|C_1|$, $|C_2|$ sono due sistemi lineari irriducibili, i cui gradi valgano rispettivamente n_1, n_2, e se si designa con i il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2, il grado di $|C_1 + C_2|$ vale

$$N = n_1 + n_2 + 2\,i.$$

Ora se $|C_1|$ è un sistema lineare riducibile, si può sempre determinare, in infiniti modi, su F un sistema irriducibile $|C_2|$ in guisa che $|C_1 + C_2|$ riesca irriducibile; si dimostra poi che il valore di n_1 tratto dalla formula precedente è indipendente dalla scelta arbitraria di $|C_2|$, e si definisce questo valore come il *grado* (*virtuale*) di $|C_1|$ (*). Questa definizione vale anche se $|C_1|$ è ∞^0; resta così fissato che cosa s'intenda colla locuzione « *numero delle intersezioni di una curva con sè stessa* ». È però da avvertire che questo numero può ben essere negativo, mentre esso è $\geqq 0$ se la curva appartiene ad un fascio.

La definizione del grado virtuale rende sempre valida la formula data innanzi

$$N = n_1 + n_2 + 2\,i,$$

(*) Enriques, l. c., § 15.

la quale esprime in ogni caso il grado del sistema somma di due sistemi dati su F, comunque riducibili.

Termineremo questo paragrafo ricordando due nozioni fondamentali per lo studio delle superficie e dei sistemi lineari sopra di esse:

a) *Curva fondamentale* per un sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base sopra la superficie F, è una curva che non ha alcuna intersezione colle curve C del sistema.

Se al contrario $|C|$ si considera come dotato di punti base *assegnati*, deve riguardarsi come curva fondamentale per esso ogni curva di F che non seghi le C fuori dei punti base del sistema.

b) *Curva eccezionale* è una curva γ di F la quale può essere trasformata in un punto semplice mediante un'opportuna trasformazione birazionale della superficie.

Se si designa con F^* la superficie trasformata di F, e con G^* il punto di F^* che corrisponde alla curva γ di F, avremo che al sistema lineare delle curve C, sezioni, piane o iperpiane di F, corrisponderà sopra F^* un sistema lineare $|C^*|$ avente G^* come punto base. Ed il punto G^* dovrà riguardarsi come un punto base *assegnato* per $|C^*|$, non già come virtualmente inesistente, giacchè altrimenti, ritornando ad F, si sostituirebbe al sistema dato $|C|$ composto delle curve sezioni di F, il sistema composto delle C e della curva fissa γ.

Questa osservazione mostra che mentre si può prescindere affatto dalla considerazione di sistemi dotati di punti base assegnati, finchè si rimane sopra una superficie data F, ciò non è più lecito quando si consideri insieme ad F una sua trasformata F^*, a meno che, nel passaggio da F ad F^*, non si cambi simultaneamente il sistema delle nostre convenzioni.

2. Accanto alle operazioni di addizione e sottrazione applicate ai sistemi lineari dati su F, introdurremo ancora l'operazione (*aggiunzione*) che fa passare da un sistema lineare dato $|C|$, al suo *sistema aggiunto* $|C'|$.

Quando $|C|$ è un sistema irriducibile ∞^r, con $r \geqq 2$, privo di punti base e di curve fondamentali, su F, le curve C' aggiunte a $|C|$ sono definite dalla sola condizione di segare gruppi *canonici*, cioè gruppi delle serie $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, sulla curva C generica supposta di genere π; (viene eccepito soltanto il caso in cui fra le ∞^r C ve ne sieno ∞^{r-1} riducibili). Le curve C' (quando esistono) formano sempre un sistema lineare completo, virtualmente privo di punti base su F, che dicesi *sistema aggiunto a* $|C|$.

Essendo $|C|$ e $|K|$ due sistemi lineari, soddisfacenti alle condizioni dette innanzi, sussiste la *relazione fondamentale* (*)

$$|(C+K)'|=|C+K'|=|C'+K|,$$

dove col simbolo $|(C+K)'|$ si denota il sistema aggiunto a $|C+K|$, ecc.

Questa relazione, estesa a tutti i casi, in cui non figurano punti base, permette di definire in modo determinato il sistema lineare aggiunto ad un qualsiasi sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base, su F, anche quando $|C|$ abbia delle curve fondamentali, o sia riducibile ecc.

L'operazione di aggiunzione applicata a sistemi lineari virtualmente privi di punti base, su F, porta sempre (quando è effettuabile) a sistemi lineari del pari virtualmente privi di punti base.

Accanto al sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ si può considerare l'aggiunto di esso $|C''|$ (2° *aggiunto* a $|C|$) e così via; vale allora anche per gli i-mi aggiunti di due sistemi lineari qualunque $|C|$ e $|K|$, virtualmente privi di punti base su F, la relazione fondamentale

$$|(C+K)^i|=|C+K^i|=|C^i+K|,$$

sotto la sola condizione di esistenza dei sistemi designati dai simboli.

Se un sistema lineare $|C|$ dato sopra F possiede un punto base h-plo, che si consideri non più come virtualmente inesistente, ma come *assegnato*, il sistema aggiunto $|C'|$ verrà definito aggiungendo la condizione che questo punto sia $(h-1)$-plo per le curve C'.

Premesso ciò, si può osservare il carattere invariante della operazione di aggiunzione, e la limitazione a cui tale invarianza è vincolata:

Se F ed F^* sono due superficie senza singolarità, in corrispondenza birazionale, e $|C|$, $|C^*|$ sono due sistemi lineari omologhi sopra di esse, al sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ su F, spogliato delle sue eventuali componenti eccezionali aventi per immagini punti di F^*, corrisponde su F^* il sistema $|C^{*\prime}|$ aggiunto a $|C^*|$ spogliato delle sue eventuali componenti eccezionali aventi per immagini punti di F (**).

Ritornando alla superficie F e ad un sistema $|C|$ privo di punti base sopra quella, è utile notare pel seguito come si riesca ad esprimere il grado n' del sistema aggiunto $|C'|$ in funzione del genere π' di questo e del genere π di $|C|$. Vale precisamente la formola

$$n'=\pi+\pi'-2.$$

(*) Enriques, l. c., cap.[i] III, IV e particolarmente § 27.

(**) Cfr. Enriques, l. c., § 25.

Questa si giustifica formando il sistema $|C + C'|$ che ha il genere $\pi + \pi' + (2\pi - 2) - 1 = 3\pi + \pi' - 3$, ed ha per sistema aggiunto $|2C'|$; calcolando il numero delle intersezioni di una curva di questo con una curva di quello, si perviene all'uguaglianza

$$2(2\pi - 2) + 2n' = 2(3\pi + \pi' - 4),$$

donde segue subito la formola da dimostrare.

II. Caratteri invarianti delle superficie.

3. Alla nostra superficie F appartengono due serie di *caratteri invarianti* per trasformazioni birazionali: *caratteri geometrici* e *caratteri aritmetici.*

I caratteri geometrici che vogliamo considerare sono il *genere* p_g ed i *plurigeneri* P_i $(P_1 = p_g)$. Essi possono definirsi nel seguente modo:

Consideriamo su F due sistemi lineari $|C|$, $|K|$ ed i successivi aggiunti di essi $|C'|$, $|C''|\ldots$, e rispettivamente $|K'|$, $|K''|\ldots$ Si ha, per la relazione fondamentale,

$$|K + C^i| = |C + K^i|,$$

e quindi sussiste la relazione simbolica

$$|C^i - C| = |K^i - K|.$$

Essa dice che « se un sistema $|C|$ è contenuto nel suo i-mo aggiunto, la stessa proprietà spetta ad ogni altro sistema $|K|$, ed il sistema residuo è indipendente dal sistema da cui si parte ».

Questo sistema lineare

$$|C^i - C|$$

avrà dunque carattere invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie, purchè si prescinda dal fatto che una siffatta trasformazione può aggiungere o togliere al sistema certe componenti fisse eccezionali (cfr. n.° 2).

Siccome « ogni curva eccezionale della superficie F compare, contata i volte, come componente fissa di $|C^i - C|$ », così potremo dire: *il sistema* $|C^i - C|$ *spogliato delle curve eccezionali della superficie* F *che entrano in esso come componenti fisse, ciascuna i volte, ha (quando esiste) una relazione invariante colla superficie.*

Questo sistema

$$|C^i - C| = |i\,C' - i\,C|,$$

spogliato delle sue componenti eccezionali, secondo la convenzione ora fatta, sarà detto il *sistema i-canonico* della superficie (*sistema canonico* quando $i = 1$); il numero delle curve i-canoniche linearmente indipendenti è un carattere invariante della superficie F, che si designa con P_i, e vien chiamato lo *i-genere* di F (o semplicemente il *genere* p_g per $i = 1$; *bigenere* per $i = 2$, ecc.) (*).

Quando il genere p_g è maggiore di 0, si ha, a fortiori, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$... Invece può essere $p_g = 0$, e $P_2 > 0$ come si ricava da effettivi esempi. In generale si deve ammettere che possano annullarsi tutti i plurigeneri fino ad un certo ordine i, ma non P_i; allora fra i plurigeneri successivi saranno certo non nulli almeno P_{2i}, P_{3i},... È infine utile notare che se per una superficie F uno dei plurigeneri P_i è maggiore di 0, per ogni sistema lineare di genere π e grado n appartenente ad F, si ha sempre

$$n \leqq 2\,\pi - 2,$$

comunque i caratteri n e π s'intendano definiti, in senso virtuale, o in senso effettivo. Segue di qui che tutti i plurigeneri sono nulli per le superficie contenenti un fascio di curve razionali (rigate), e così per le superficie contenenti un fascio di curve ellittiche dotato di qualche punto base, in generale per le superficie contenenti un sistema lineare per cui

$$n > 2\,\pi - 2.$$

Quando esistono effettive curve i-canoniche, i caratteri di esse forniscono nuovi caratteri geometrici della superficie (cfr. n.° 20).

I plurigeneri della superficie F si possono definire anche nel modo seguente:

Si proietti F (da punti esterni generici) in una superficie F_1 dello stesso ordine n nello spazio ordinario S_3, in guisa che F_1 sia dotata soltanto di curva

(*) L'invarianza del sistema canonico e quindi del genere è stata stabilita algebricamente dal sig. NOETHER nella Memoria *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*, Mathem. Annalen Bd. 2, 8. L'invarianza delle curve pluricanoniche e dei plurigeneri è stabilita da ENRIQUES l. c., § 39. Esempi di superficie con $p_g = 0$, $P_2 > 0$ sono stati dati da ENRIQUES l. c.; CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, Memorie della Società ital. d. Scienze (dei XL) (serie III), t. X (1896); ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, Rendic. Accad. dei Lincei, 1898, doppia e di punti tripli che siano tripli anche per la detta curva. Allora le curve i-canoniche (all'infuori di eventuali curve eccezionali) si possono costruire segando F_1 colle superficie *i-aggiunte* d'ordine $i(n-4)$.

S'intende per superficie *i-aggiunta* ad F_1 una superficie Φ, che passa per la curva doppia di F_1, e sega F_1 nell'intorno della detta curva come se passasse i volte per essa; dunque sono *aggiunte* (semplici) a F_1 le superficie passanti semplicemente per la sua curva doppia; sono *biaggiunte* le superficie passanti per essa doppiamente; sono *triaggiunte* le superficie che passano doppiamente per la curva doppia di F_1 e toccano le due falde di F_1, ecc.

Abbiamo così che P_i *è il numero delle superficie* $\Phi_{i(n-4)}$, *d'ordine* $i(n-4)$, *i-aggiunte ad* F_1, *che sono linearmente indipendenti, e tali che nessuna superficie del sistema lineare da quelle determinato contenga la* F_1.

4. Tra i caratteri aritmetici della superficie F, ha importanza fondamentale il *genere aritmetico* o *numerico* che indicheremo con p_a (o p_n). Riferendoci alla nominata proiezione F_1 di F in S_3, il p_a viene definito come il valore aritmetico della espressione che indica, in base ai caratteri della curva doppia di F_1, quante sono le superficie Φ_{n-4}, linearmente indipendenti, aggiunte ad F_1, nell'ipotesi di validità delle formule di postulazione di NOETHER (*). Questa definizione è legata alla circostanza che F_1 è dotata di singolarità ordinarie (anzi di sola curva doppia e punti tripli).

Il genere aritmetico p_a può essere definito indipendentemente da questa particolare rappresentazione della superficie F, nel seguente modo:

Si consideri su F *un sistema lineare irriducibile,* ∞^3 *almeno,* $|C|$, *e si indichino con* $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ *le deficienze delle serie lineari di gruppi di punti segate su una* C *generica dai sistemi di curve*

$$|C'|, \quad |C+C'|, \quad |2C+C'| \ldots;$$

sussiste allora l'uguaglianza fondamentale

$$p_g - p_a = \Sigma\, \delta_i \; (**).$$

Questa uguaglianza, quando si sia provata l'invarianza del 2.° membro, definisce il carattere invariante p_a, essendo già stabilita l'invarianza di p_g (genere geometrico).

Si hanno pure due teoremi che pongono in luce l'invarianza ed il significato della differenza $p_g - p_a$, e quindi del genere numerico p_a:

(*) Cfr. NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, Annali di Matematica (serie 2), tom. V (1871).

(**) ENRIQUES, *Introduzione*..., citata, § 40.

La deficienza della serie (canonica) *segata sopra la curva generica d'un sistema lineare irriducibile* $|C|$ *dal sistema aggiunto* $|C'|$ *ammette come massimo* $p_g - p_a$ (*), ed esistono sistemi in relazione ai quali il massimo è raggiunto; dunque la dimensione di $|C'|$ è sempre

$$\geqq p_a + \pi - 1$$

designando con π il genere di $|C|$ (essa è d'altra parte $\leqq p_g + \pi - 1$).

La deficienza della serie caratteristica d'un sistema lineare irriducibile $|C|$ (serie segata sopra una C generica dalle altre C) *ammette come massimo* $p_g - p_a$, ed esistono sistemi per i quali il massimo è raggiunto (**).

Da quest'ultimo teorema segue, come corollario, la *estensione* alle superficie *del notissimo teorema di* Riemann-Roch, che per i sistemi *non speciali* di curve, cioè non contenuti nel sistema canonico, si enuncia nel modo seguente (***):

Se $|C|$ *è un sistema lineare irriducibile, non speciale, di genere* π, *grado* n, *dimensione* r, *appartenente ad una superficie di genere numerico* p_a, *sussiste la relazione*

$$r \geqq n - \pi + 1 + p_a .$$

Designeremo brevemente il teorema precedente col nome di *teorema di* Riemann-Roch *per le superficie.*

Esistono sistemi (non speciali) per i quali sussiste l'uguaglianza

$$r = n - \pi + 1 + p_a ;$$

tali sistemi diconsi *regolari.* Si possono anzi costruire sistemi regolari di dimensione alta quanto si vuole, giacchè si dimostra che è regolare il sistema $|(hK)'|$ aggiunto al multiplo secondo h di un sistema $|K|$ irriducibile, almeno ∞^3, purchè h sia sufficientemente elevato; basta p. e. prendere

$$h > p_g - p_a .$$

(*) Enriques, l. c.

(**) Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali*... Annali di Matematica (serie 2), tom. XXV (1897), n.° 29 e seg.

(***) Questo enunciato relativamente al caso $p_g = p_a$ *(superficie regolari)* si trova in una Nota del sig. Noether, Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc., t. CIII, 1886. Della sua giustificazione, sempre pel caso delle superficie regolari, si è occupato Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, IV, 2, Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino (1893). La dimostrazione generale del teorema fu data da Castelnuovo, l. c., n.° 34.

Le due proprietà più notevoli di un sistema regolare sono (*):

1) *la serie caratteristica di un sistema regolare ha la deficienza massima* $p_g - p_a$;

2) *la serie segata dal sistema canonico sopra ogni curva di un sistema regolare è completa.*

L'ultima proposizione per le superficie che hanno il genere geometrico $p_g = 0$ dice che 2') *la serie caratteristica di un sistema regolare è non speciale.*

Ora valendoci di questi risultati siamo in grado di *estendere la formola data dal teorema di* Riemann-Roch $r \geqq n - \pi + 1 + p_a$ *anche ai sistemi lineari riducibili.* Per brevità ci limiteremo a dar l'estensione nel caso $p_g = 0$, che solo interessa pel seguito del nostro lavoro.

Partiamo perciò da un sistema regolare irriducibile $|K|$ almeno ∞^3 di di grado N, dimensione R, genere Π, e consideriamo una curva γ formante parte di una particolare curva K. Il sistema $|K|$ sega sulla γ una serie di cui l'ordine sia i; diciamo anzitutto che una tal serie è non speciale. Ciò segue dal fatto che se immaginiamo in uno S_3 una superficie F, d'ordine N, di cui le sezioni piane siano curve K, una delle quali si spezzi nella γ d'ordine i e in una curva residua C, poichè (in virtù della 2')) una sezione piana K non ammette curve aggiunte d'ordine $N - 4$, non potrà nemmeno la γ ammettere curve aggiunte d'ordine $i - 4$, giacchè in caso opposto una tal curva aggiunta, insieme alla C, darebbe una curva d'ordine

$$i - 4 + N - i = N - 4$$

aggiunta alla sezione piana $\gamma + C$, il che è assurdo; si conclude che la serie g_i segata sulla γ dalle sezioni piane K (cioè dalle rette del piano di γ) è non speciale. Dunque la dimensione della g_i sarà $\rho \leqq i - \omega$, essendo ω il genere di γ; in altri termini, occorrono $\rho + 1 \leqq i - \omega + 1$ condizioni perchè una K contenga la γ. Segue che la dimensione del sistema residuo $|C| = |K - \gamma|$ sarà

$$r \geqq R - i + \omega - 1.$$

Per calcolare il genere π e il grado n di $|C|$ in base agli analoghi caratteri Π, N di $|K|$, ci conviene introdurre il numero j delle intersezioni di γ

(*) Castelnuovo, l. c., n.[i] 35, 36.

con una C; avremo allora, come risulta subito,

$$\pi = \Pi - j - \omega + 1,$$

$$n = N - j - i.$$

E di qua si ricava

$$r - n + \pi \geq R - N + \Pi,$$

ossia (poichè $|K|$ è regolare)

$$r - n + \pi \geq p_a + 1,$$

la quale dimostra che per il sistema $|C|$ vale il teorema di Riemann-Roch; e ciò senza che si sia posta la restrizione della irriducibilità di $|C|$.

Ora per dimostrare che il teorema di Riemann-Roch vale per *ogni sistema riducibile* $|C|$, basta osservare che dato comunque $|C|$, si può sempre costruire un sistema irriducibile $|K| = |(h\,D)'|$ (aggiunto al sistema h-uplo di un sistema irriducibile D), il quale sia regolare, e tanto ampio da contenere $|D|$ in guisa che il residuo $|K - C| = |\gamma|$ sia per di più irriducibile; basta infatti per ciò sceglier h sufficientemente elevato. Supponendo, per semplicità, che il sistema $|D'|$ sia irriducibile, si prenderà a tal fine, in primo luogo $h > -p_a$, per assicurare la regolarità di $|(h\,D)'|$, in secondo luogo h così grande ancora che il sistema $|(h-1)\,D|$ contenga $|C|$ per modo che $|(h-1)D - C|$ sia irriducibile, giacchè allora seguirà, a fortiori, la irriducibilità di

$$|(h\,D)' - C| = |(h-1)\,D - C + D'|.$$

5. Fra i caratteri aritmetici della superficie F, si debbono porre anche alcuni *invarianti relativi*, cioè caratteri invariabili per quelle particolari trasformazioni birazionali che non introducono (in nessuno dei due sensi) curve eccezionali, come trasformate di punti semplici. Da questi invarianti relativi si possono desumere poi, operando convenientemente, degli invarianti *assoluti*.

Il *primo invariante relativo*, che designeremo con ω, si definisce nel modo seguente:

Prendiamo sopra F un qualsiasi sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base, e dotato d'un sistema aggiunto $|C'|$. Sieno π, n, il genere e il grado di $|C|$, sia π' il genere di $|C'|$. *L'espressione*

$$\omega = \pi' - 3\,(\pi - 1) + n,$$

come risulta dalla proprietà fondamentale del sistema aggiunto, *non dipende dalla scelta del sistema* $|C|$, *e costituisce perciò un invariante relativo della superficie* F (*). Infatti se si trasforma birazionalmente la superficie F in una superficie F^*, in guisa che le sezioni piane (o iperpiane) di F ed F^* abbiano per immagine rispettivamente su F^* ed F curve di un sistema privo di punti base, il valore di ω calcolato coi caratteri delle sezioni piane di F, coincide col valore di ω calcolato in relazione alle sezioni piane di F^*. Al contrario il carattere ω diminuisce in quelle trasformazioni di F che introducono su F^* nuove curve eccezionali corrispondenti a punti della F stessa, e precisamente diminuisce di una unità per ogni curva eccezionale introdotta; aumenta invece di una unità per ogni curva eccezionale di F che scompare venendo trasformata in un punto semplice di F^*.

Si potrebbe avere un'altra espressione analoga di ω introducendo, in luogo di π', il grado n' del sistema aggiunto $|C'|$, che vale (n.° 2)

$$n' = \pi + \pi' - 2\,;$$

è qui utile notare la formula

$$n - (2\pi - 2) = n' - (2\pi' - 2) + \omega - 1.$$

Una terza espressione, più notevole, dello stesso invariante ω, si ha introducendo anche il genere π'' del sistema $|C''|$, secondo aggiunto di $|C|$. Si trova infatti (**)

$$\omega - 1 = \pi - \pi' - (\pi' - \pi'').$$

Noi vedremo in seguito (n.° 20) che se la superficie F non possiede curve eccezionali, il carattere ω di questa è un invariante assoluto, e non differisce dal *genere lineare* $p^{(1)}$ definito dal sig. Noether (come genere delle curve canoniche) e più tardi, sotto ipotesi più generali, da Enriques.

Ma ora, senza insistere su ciò, vogliamo mostrare come la conoscenza dell'invariante relativo ω di una superficie possa permettere di fissare un limite inferiore al valore dello i-genere P_i della superficie, in corrispondenza ad ogni valore di i (***).

Partiamo perciò da una superficie F di genere aritmetico p_a, sopra cui esista un sistema $|C|$ irriducibile, privo di punti base, tale che tra il grado n

(*) Cfr. Enriques, *Introduzione...*, § 41.

(**) Castelnuovo, *Sul genere lineare*... Rendic. Accad. d. Lincei, giugno 1897.

(***) Cfr. Castelnuovo, l. c.

e il genere π passi la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$; sia ad es. il sistema delle sezioni piane. Potendosi, ove occorra, sostituire a $|C|$ un suo multiplo, pur continuando a valere una disuguaglianza analoga alla precedente, siamo liberi di ammettere, senza introdurre restrizioni, che il sistema $|C|$ possegga un sistema aggiunto $|C'|$; indichiamone il genere con π' ed il grado con

$$n' = \pi + \pi' - 2.$$

Ciò posto, proponiamoci di calcolare i caratteri del sistema $|K^i| = |iC' - iC|$, che (ove esista) è il sistema i-canonico, o tutt' al più ne differisce per qualche curva eccezionale fissa; supporremo $i > 1$. Cominceremo per ciò a calcolare la dimensione r_i' di $|iC'|$, di cui un limite inferiore si può esprimere, mediante il teorema di Riemann-Roch esteso alle superficie, in funzione del grado e del genere di $|iC'|$, e quindi del grado e del genere di $|C'|$; fatti i calcoli si trova

$$r_i' \geqq p_a + \frac{i(i+1)}{2}(\pi - 1) + \frac{i(i-1)}{2}(\pi' - 1).$$

Consideriamo poi la serie che il sistema $|iC'|$ sega sopra la curva generica di $|iC|$; la detta serie ha l'ordine $2i^2(\pi - 1)$, ed è certo non speciale perchè il genere della curva a cui appartiene vale

$$i(\pi - 1) + \frac{i(i-1)}{2} n + 1 < i^2(\pi - 1) + 1 \qquad (n < 2\pi - 2, \quad i > 1).$$

Segue che la dimensione della serie stessa sarà

$$\rho_i \leqq i(2i - 1)(\pi - 1) - \frac{i(i-1)}{2} n - 1.$$

Dunque finalmente la dimensione del sistema $|K^i| = |iC' - iC|$ verrà data da

$$R_i = r_i' - \rho_i - 1 \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(n + \pi' - 3\pi + 2).$$

Ora il numero $R_i + 1$ delle curve K^i linearmente indipendenti è, per definizione, lo i-genere P_i della superficie; si arriva così, tenendo conto inoltre della definizione di ω, alla formola richiesta

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + 1 \qquad (n < 2\pi - 2, \ i > 1). \tag{1}$$

È qui da osservare che la (1) vale anche nella ipotesi $n = 2\pi - 2$, purchè allora si sappia che la serie segata dal sistema $|iC'|$ sopra una curva generica di $|C|$ è non speciale; mentre se la serie stessa fosse speciale, occorrerebbe modificar la (1) diminuendo di una unità il secondo membro. In ogni caso ($n \leqq 2\pi - 2$) si trova che il genere (virtuale) Π_i e il grado (virtuale) N_i del sistema $|K^i|$ sono espressi da

$$\Pi_i = \frac{i(i+1)}{2}(\omega - 1) + 1, \quad N_i = i^2(\omega - 1). \tag{2}$$

Noi siamo partiti dalla ipotesi che il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F abbia $n \leqq 2\pi - 2$; se invece sussistesse la disuguaglianza contraria $n > 2\pi - 2$, o la $\pi > \pi'$ in qualche modo equivalente alla precedente, allora non esisterebbe certo il sistema $|K^i| = |iC' - iC|$, ma potrebbe esistere il sistema $|K^{-i}| = |iC - iC'|$. Del detto sistema si calcolano facilmente la dimensione R_{-i}, il grado N_{-i} e il genere Π_{-i} $(i \geqq 1)$ seguendo una via perfettamente analoga a quella sopra indicata. Si trova precisamente, se $\pi > \pi'$,

$$R_{-i} \geqq p_a + \frac{i(i+1)}{2}(\omega - 1), \tag{1'}$$

$$\Pi_{-i} = \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + 1, \quad N_{-i} = i^2(\omega - 1). \tag{2'}$$

Ma il sistema $|K^{-i}|$ non offre grande interesse, perchè, come vedremo, esso non può presentarsi che sopra le superficie razionali o rigate.

6. Un *secondo invariante relativo* della superficie F, si ottiene nel modo seguente:

Si consideri sopra F un fascio lineare di curve irriducibili, di genere $\pi > 0$, avente n punti base (considerando ora come punto base *assegnato*, *ogni* punto comune alle curve del fascio), e si designi con δ il numero delle curve del fascio dotate di un punto doppio; *l'espressione*

$$I = \delta - n - 4\pi$$

non dipende dalla scelta arbitraria del fascio, e costituisce perciò un invariante relativo della superficie (*).

(*) Cfr. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie*... Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino, 1896. L'espressiône I per un fascio di sezioni piane di una superficie (dello spazio S_3) fu considerata dapprima dal Sig. ZEUTHEN, che ne mise in luce il carattere invariante sotto una forma un pò diversa (V. il n.° 24 delle *Études géométriques*... Mathem. Annalen, IV, 1871), e più tardi dal Sig. NOETHER (*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*... Mathem. Annalen, VIII, 1874, pag. 526), il quale ne diede l'espressione per mezzo dei due generi p_a, $p^{(1)}$ della superficie, come sarà indicato nel séguito.

Questo carattere varia, come ω, ma in senso opposto, nelle trasformazioni che introducono nuove curve eccezionali, o al contrario ne fanno scomparire.

Riproduciamo brevemente, per chiarezza, la dimostrazione che di queste proprietà dà il sig. Segre, rimandando il lettore, desideroso di maggiori particolari, alla Memoria originale citata.

Siano $|C|$, $|C_1|$ due fasci lineari situati sulla nostra superficie, fasci che possiamo supporre del tutto indipendenti tra loro; indichiamo con π, π_1 i generi delle curve C, C_1, con n, n_1 i numeri dei punti base dei due fasci, con s il numero dei punti comuni a due curve generiche C, C_1. Fissiamo la nostra attenzione sulla curva T luogo dei punti di contatto di una C con una C_1; ed esaminiamo in quanti punti la T sia segata da una C e da una C_1, fuori dei punti base dei due fasci. I punti comuni alla T e ad una C sono evidentemente i punti doppi della serie g^1_s segata sulla C dal fascio $|C_1|$; il loro numero è

$$M = 2s + 2\pi - 2.$$

Similmente si riconosce che la T è segata da una C_1 in

$$M_1 = 2s + 2\pi_1 - 2$$

punti. Al variare della C e della C_1 questi due gruppi di punti descrivono sulla T due serie lineari ∞^1 di ordine M ed M_1 rispettivamente; detto P il genere di T, la prima serie avrà $2M + 2P - 2$ punti doppi e la seconda $2M_1 + 2P - 2$. Ora una semplice osservazione mostra che un punto doppio della prima serie (segata da $|C|$ su T) è o un punto doppio di una curva del fascio $|C|$ che sia dotata di una tale singolarità, o un contatto tripunto di una curva C e di una curva C_1 che abbiano un siffatto contatto, o finalmente un punto base del fascio $|C_1|$. Indicando perciò con δ il numero delle curve di $|C|$ che son dotate di un punto doppio, con δ_1 il numero analogo per $|C_1|$, e con τ il numero delle coppie di curve C, C_1 che hanno un contatto tripunto, abbiamo la relazione

$$2M + 2P - 2 = \delta + \tau + n_1,$$

e similmente l'altra

$$2M_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau + n.$$

Di qua sottraendo e sostituendo ad M, M_1 i loro valori, si trova in fine

$$\delta - n - 4\pi = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1,$$

uguaglianza che dimostra il carattere invariantivo della espressione

$$I = \delta - n - 4\pi,$$

per i fasci tracciati sulla nostra superficie.

La definizione del carattere I, per essere applicata a *tutti* i casi, esige alcune particolari convenzioni relative al valore da attribuire a δ, quando nel fascio considerato si abbiano curve dotate di punti multipli d'ordine > 2, oppure quando il fascio stesso abbia dei punti base infinitamente vicini, o infine quando esistano nel fascio delle curve contate due o più volte. Nei primi due casi (che sono stati analizzati dal Segre, corrispondentemente alle ipotesi più semplici) si può dire che il δ viene definito seguendo la legge della continuità, sempre valida nel campo algebrico: ogni curva dotata d'un punto multiplo viene a contare un certo numero di volte nella determinazione del δ, onde questo è sempre (ciò che a noi importa nel seguito) maggiore o uguale a 0.

Quando invece esiste nel fascio dato $|C|$ una curva contata due (o più) volte, si può dire, aritmeticamente, che essa equivale ad un certo numero di curve del fascio dotate d'un punto doppio, numero che entra a costituire il δ; ma non è evidente che il detto numero sia $\geqq 0$; occorre precisamente di provare che così è, per poter asserire che in ogni caso si ha $\delta \geqq 0$.

Supponiamo adunque che una particolar curva $C^{(0)}$ del fascio $|C|$ si spezzi in guisa che una sua componente irriducibile χ, di genere $\rho \geqq 0$, sia da contarsi due o più volte, ad es. due volte, sicchè $C^{(0)} = 2\chi + \psi$, dove ψ indica la curva residua che potrebbe del resto mancare. Qui si osservi che $C^{(0)}$ può anche avere in un qualche punto base di $|C|$ una molteplicità superiore di una, due... unità a quella che presenta ivi la curva C generica; ma in tal caso si deve riguardare la curva $C^{(0)}$ come composta della curva propriamente detta, a cui va aggiunto il punto base (o la curva eccezionale in cui può trasformarsi) contato una, due... volte; sicchè il detto punto semplice o multiplo deve esser riguardato come componente di ψ. Le due parti χ e ψ di $C^{(0)}$ avranno un certo numero i di punti comuni (fatta astrazione da quelli che vengono assorbiti dai punti base di $|C|$, presi coll'ordine di molteplicità relativo alla curva C generica); e sarà certo $i > 0$ se ψ esiste, in virtù di una osservazione fatta nel n.° 1.

Accanto al fascio $|C|$ consideriamo un secondo fascio generico $|C_1|$ affatto indipendente dal primo; ed occupiamoci come prima (e adottando le stesse notazioni) della curva luogo dei contatti di una C e di una C_1.

La nostra curva questa volta si spezza nella χ (che è componente doppia di $C^{(0)}$) e in una curva T di genere P su cui fisseremo la nostra attenzione. Osserviamo subito che la T passerà semplicemente per le i intersezioni di χ e ψ, giacchè i detti punti, essendo tripli per la curva $C^{(0)} = 2\chi + \psi$, devono esser doppi per la curva (luogo dei contatti) $T + \chi$.

La curva T è segata da una C generica (fuori dei punti base di $|C|$) nei punti in cui C è toccata da una C_1, vale a dire in

$$M = 2s + 2\pi - 2$$

punti. Similmente vediamo che la curva T è segata da una C_1 generica nei punti in cui C_1 vien toccata da una C, tolti però tra questi i punti in cui C_1 è segata dalla χ; indicando dunque con M_1 il numero delle intersezioni di T e C_1 (fuori dei punti base di $|C_1|$), e con σ il numero delle intersezioni di χ e C_1, avremo

$$M_1 + \sigma = 2s + 2\pi_1 - 2.$$

I due fasci $|C|$, $|C_1|$ determinano così sulla T due serie lineari ∞^1 di ordine M, M_1. La prima serie ha $2M + 2P - 2$ punti doppi, ma tra questi alcuni appartengono al gruppo segato su T dalla $C^{(0)} = 2\chi + \psi$; e precisamente questo gruppo, contenendo i punti tripli (nelle i intersezioni di χ e ψ) e $2\sigma + 2\rho - 2$ punti doppi (nei contatti di χ con curve C_1), conta per $2i + 2\sigma + 2\rho - 2$ punti doppi tra quelli che la serie considerata possiede. Gli altri punti doppi della detta serie provengono (come nel ragionamento generale) dai Δ punti doppi isolati posseduti da curve C, dai τ contatti tripunti di una C con una C_1, e finalmente dagli n_1 punti base del fascio $|C|$. Sicchè abbiamo l'uguaglianza

$$2M + 2P - 2 = \Delta + \tau + n_1 + 2i + 2\sigma + 2\rho - 2.$$

Consideriamo in secondo luogo la serie di ordine M_1 segata sopra T dal fascio $|C_1|$. I $2M_1 + 2P - 2$ punti doppi di questa provengono dai δ_1 punti doppi isolati di curve C_1, dai τ contatti tripunti sopra nominati, e finalmente dagli n punti base del fascio $|C|$; dunque

$$2M_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau + n.$$

Paragonando colla precedente, e tenendo conto dei valori trovati per M, M_1, avremo in fine

$$\Delta + (2\rho - 2 + 2i) - n - 4\pi = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1.$$

Si conclude che la curva χ di genere ρ, componente doppia di una particolare curva C, conta nel numero delle curve C dotate di punto doppio come $2\rho - 2 + 2i$ unità, dove i è il numero delle intersezioni di χ colla curva residua ψ. Ora se ψ esiste, ed è quindi $i > 0$, sarà certo $2\rho - 2 + 2i \geqq 0$ (poichè $\rho \geqq 0$) La stessa conclusione vale se, mancando la ψ, il genere ρ di χ fosse superiore a 0. Ma evidentemente la conclusione ultima cadrebbe se una curva C risultasse dal raddoppiamento di una curva χ razionale, in modo che in ciascun punto base del fascio la molteplicità di 2χ riuscisse uguale alla molteplicità della C generica.

Ora mostreremo che questo caso è impossibile. Infatti, poichè il genere di 2χ è uguale al genere $\pi \geqq 0$ di C, se χ fosse razionale, dovrebbe χ avere $\pi + 1 > 0$ intersezioni con se stessa, cioè $\pi + 1 > 0$ sarebbe il grado di χ, e quindi $4(\pi + 1) > 0$ sarebbe il grado di 2χ ossia di $|C|$. Ma siccome d'altra parte $|C|$ è un fascio, in cui ogni punto comune a due C vien considerato come punto base assegnato, il grado di $|C|$ è *zero*, il che contraddice l'ultimo risultato. Dunque in ogni caso la curva doppia χ equivale a un numero positivo o nullo di curve C dotate di punto doppio.

Questa conclusione sussiste pure se la χ entra $k \geqq 2$ volte come componente di una particolar curva del fascio $|C|$, perchè allora si trova che la χ conta come $2\rho - 2 + ki \geqq 0$ curve C dotate di punto doppio. E ad un analogo risultato si perverrebbe se una particolare curva C contenesse più parti ciascuna da contarsi più volte.

Permane sempre adunque la conclusione generale che *una componente multipla di una curva del fascio equivale ad un certo numero* $\geqq 0$ *di curve del fascio dotate d'un punto doppio*, di guisa che, valutando secondo tale equivalenza il « numero δ delle curve del fascio dotate d'un punto doppio », sempre risulta

$$\delta \geqq 0,$$

e l'espressione

$$\delta - n - 4\pi$$

ha il valore dell'invariante I.

Abbiamo affermato poc'anzi che il carattere I è un invariante relativo, e precisamente che esso aumenta di una unità per ogni trasformazione della superficie F, in cui si sostituisca ad un punto di F una curva eccezionale; e diminuisce di una unità nel caso opposto. Tale affermazione si giustifica facilmente. Infatti si calcoli il valore del carattere I di F riferendosi ad un certo fascio $|C|$ tracciato su F; si trasformi quindi la F in una nuova superficie F^*, per modo che ad un punto (fondamentale) O di F, non base per $|C|$, corrisponda su F^* una curva (eccezionale) χ^*; e si consideri su F^* il fascio $|C^*|$ che corrisponde a $|C|$. I caratteri n, π di $|C|$ coincidono cogli *analoghi caratteri* n^*, π^* di $|C^*|$, se i punti base di $|C^*|$ non sono fondamentali per la trasformazione, onde si ha in tale ipotesi

$$n = n^*, \quad \pi = \pi^*.$$

Ma alla curva C passante per O, corrisponde su F^* una curva composta $C^* + \chi^*$ avente un punto doppio nel punto comune alle due componenti, sicchè, *caeteris paribus*, si ha, come numero delle curve C^* dotate d'un punto doppio,

$$\delta^* = \delta + 1,$$

e il carattere $I^* = \delta^* - n^* - 4\pi^*$ di F^* vale

$$I^* = I + 1.$$

Allo stesso resultato si perviene nell'ipotesi che il punto fondamentale O di F sia un punto base per $|C|$; in questo caso non muta il valore di δ, ma il fascio perde nella trasformazione un punto base, onde $n^* = n - 1$.

Segue di qui che I si comporta come l'invariante ω, colla differenza però che mentre I cresce o decresce di una o più unità, ω decresce o cresce dello stesso numero.

Dunque $\omega + I$ sarà un *invariante assoluto* relativamente ad una qualsiasi trasformazione birazionale della superficie. Si può chiedere in quale rapporto esso stia cogli altri invarianti già noti. Si trova che *l'invariante* $\omega + I$ *è strettamente legato al genere aritmetico dalla notevolissima relazione*

$$\omega + I = 12\,p_a + 9.$$

Questa formola si può dire stabilita dal sig. Noether (*), il quale veramente pone al posto di ω il *genere lineare* $p^{(1)}$ (genere delle curve canoniche), supponendo dunque $p_g > 0$, e riferendosi ad una superficie priva di curve eccezionali, dotata di singolarità ordinarie. La sostituzione di ω a $p^{(1)}$ rende la relazione precedente valida indipendentemente dal valore del p_g, e dall'esistenza di curve eccezionali. Effettivamente se si proietta la data superficie F in una superficie F_1 di S_3, dotata soltanto di curva doppia e punti tripli, basta calcolare I riferendosi ad un fascio di sezioni piane di F_1, e p_a,

(*) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...* Mathem. Annalen VIII (1874), pag. 526.

ω mediante le formule di equivalenza e di postulazione di CAYLEY-NOETHER, per trovare verificata la relazione sopra scritta (come appunto fa il NOETHER con quelle ipotesi più restrittive).

Osservazione. — L'invariante relativo I di una superficie F venne sopra definito mediante i caratteri (δ, n e π) di un fascio *lineare* di curve appartenente alla superficie stessa. Ora, pel seguito, giova notare come si possa calcolare I anche quando si parta da un fascio *irrazionale* di curve supposto esistente su F, vale a dire da un sistema composto di ∞^1 curve, tale che per ogni punto di F passi una sola curva del sistema, senza però che le singole curve possano farsi corrispondere birazionalmente ai singoli valori di un parametro.

Sia $[\Gamma]$ un fascio irrazionale di curve sopra F; indichiamo con ρ il genere della curva Γ generica, con $\rho' > 0$ il genere che ha il fascio, ove si considerino le curve come elementi. Notiamo subito che, supposta al solito la F priva di singolarità, il fascio irrazionale non può avere sopra F alcun punto base; giacchè un punto base di $[\Gamma]$ dovrebbe riguardarsi come una traiettoria *razionale* delle ∞^1 Γ, sulla quale le curve stesse segherebbero una involuzione *irrazionale*, il che è assurdo (teorema di LÜROTH). Ciò premesso, per ottenere la formola desiderata, noi possiamo seguire due vie.

La prima via consiste nell'applicare il ragionamento sopra riferito del sig. SEGRE al fascio irrazionale $[\Gamma]$ e ad un fascio razionale $|C|$ tracciato sulla stessa superficie. Il detto ragionamento va solo modificato in ciò che le due serie di gruppi di punti segate da $[\Gamma]$ sopra una C e sopra la curva dei contatti T, sono questa volta irrazionali, di genere ρ'; a quelle serie va dunque applicata la nota formola di ZEUTHEN che dà il numero dei punti doppi di una involuzione irrazionale.

La seconda via, che parte da un concetto meno semplice, ma conduce più rapidamente allo scopo, consiste nel formare un fascio *lineare* $|C|$ in cui ogni curva C sia composta di un certo numero m di curve Γ; ciò si ottiene, quando m sia sufficientemente alto, fissando entro al fascio $[\Gamma]$ (sistema ∞^1 di genere ρ') una serie lineare g^1_m di gruppi di m curve Γ. Il fascio lineare $|C|$ così costruito ha *zero* punti base; ed il genere di una sua curva C vale

$$\pi = m(\rho - 1) + 1.$$

Detto adunque δ il numero delle curve C dotate di un punto doppio, si ha, per la formola già dimostrata (che subito si estende ai fasci $|C|$ riducibili),

$$I = \delta - 4m(\rho - 1) - 4.$$

Ora una curva composta C possiede un punto doppio, sia quando una Γ componente ha un punto doppio, sia quando due delle Γ componenti la stessa C coincidono, e nell'ultimo caso anzi la C conta per $2\rho-2$ unità entro al gruppo delle δ curve C sopra nominate. Ora siccome l'ultimo caso si presenta $2m+2\rho'-2$ volte (cioè tante volte quanti sono gli elementi doppi di una g_m^1 sopra un ente di genere ρ'), così si avrà la relazione

$$\delta = \Delta + (2\rho - 2)(2m + 2\rho' - 2),$$

ove Δ è il numero delle curve Γ dotate di un punto doppio. Sostituendo nella espressione di I, si trova infine la formola

$$I = \Delta + 4(\rho - 1)(\rho' - 1) - 4$$

che risolve appunto la questione proposta.

7. La relazione di Noether data innanzi permette di dedurre una diseguaglianza, che ha (come vedremo più tardi) importanza fondamentale nello studio dei sistemi lineari appartenenti alle superficie di genere geometrico

$$p_g = 0$$

e di genere numerico

$$p_a = -p \qquad (p \geqq 0).$$

Si consideri sopra F un sistema lineare $|C|$ di curve irriducibili, di grado n e genere π, privo di punti base. Indicando con δ il numero delle curve dotate di punto doppio appartenenti ad un suo fascio generico, avremo

$$I = \delta - n - 4\pi = 12p_a - \omega + 9,$$

ossia ponendo $p_a = -p$,

$$4\pi + n = 12p + \omega - 9 + \delta.$$

Ma, per il teorema di Riemann-Roch (n.° 4),

$$\pi - 1 - n + r \geqq -p,$$

quindi

$$5\pi + r \geqq 11p + \omega - 8 + \delta.$$

Questa diseguaglianza si estende al caso in cui $|C|$ abbia dei punti base accidentali sopra la superficie F, quando si designi con π il genere virtuale di $|C|$, mantenendo per δ il significato precedente.

Basta perciò mostrare che in ogni caso (essendo n il grado virtuale di $|C|$) si ha

$$4\pi + n \geqq 12p + \omega - 9 + \delta.$$

Ora, designando con π_e, n_e, il genere e il grado effettivi del sistema irriducibile $|C|$, con $h_1 \dots h_\sigma$ gli ordini di moltiplicità dei suoi σ punti base, avremo

$$n = n_e + \sum_1^\sigma h^2, \qquad \pi = \pi_e + \sum_1^\sigma \frac{h(h-1)}{2} \geqq \pi_e,$$

$$4\pi + n \geqq 4\pi_e + n_e + \sum_1^\sigma h^2,$$

e poichè

$$\sum_1^\sigma h^2 \geqq \sigma,$$

segue

$$4\pi + n \geqq 4\pi_e + n_e + \sigma.$$

D'altra parte, valutando I in relazione ad un fascio contenuto in $|C|$, si trova

$$I = \delta - (n_e + \sigma) - 4\pi_e,$$

e quindi

$$4\pi_e + n_e + \sigma = 12p + \omega - 9 + \delta,$$

onde segue la disuguaglianza da dimostrare.

Tenendò conto che in ogni caso $\delta \geqq 0$, si conclude che *per ogni sistema lineare irriducibile, ∞^1 almeno, virtualmente privo di punti base sopra la superficie F, vale la disuguaglianza*

$$5\pi + r \geqq 11p + \omega - 8.$$

III. Sulle curve eccezionali.

8. Innanzi di procedere allo studio delle superficie sopra cui il procedimento di aggiunzione, applicato ad un qualunque sistema lineare, si estingue dopo un numero finito di operazioni, è indispensabile che premettiamo alcune considerazioni relativamente alle curve eccezionali che possono appartenere ad una superficie.

Ci riferiamo, al solito, ad una superficie F priva di singolarità, appartenente ad un certo spazio S_r.

Abbiam detto che una curva γ di F (che in qualche caso particolare potrà anche essere composta, come spiegheremo più tardi) dicesi *eccezionale*, se si può trasformare birazionalmente la superficie F in una superficie F^* per modo che alla γ corrisponda l'intorno di un punto semplice G^* su F^*; in tal caso si può anche supporre, senza introdurre restrizioni, che la F^* sia come F una superficie priva di punti singolari. Nella trasformazione sopra nominata, alle sezioni piane o iperpiane di F^* corrisponderanno su F delle curve C componenti un sistema lineare; questo sistema trasformante potrà avere o non avere punti base sopra la curva γ.

Nel 2.° caso la γ non avrà alcuna intersezione colle curve generiche C, ossia sarà *fondamentale* per $|C|$; inoltre ad ogni punto di essa corrisponderà un punto nell'intorno del nominato punto G^*. Nel 1.° caso invece i punti base di $|C|$ che si trovano su γ saranno *punti fondamentali* per la trasformazione, ed avranno come corrispondenti su F^* delle curve (eccezionali) passanti per G^*.

Una curva eccezionale di F che non contenga punti fondamentali verrà detta una *curva eccezionale di 1.ª specie*, mentre chiameremo di *2.ª specie* una curva eccezionale contenente necessariamente qualche punto fondamentale, curva tale cioè che non possa essere mutata in un punto senza che qualche punto di essa si muti in una curva.

Una curva eccezionale di 1.ª specie γ ha gli stessi caratteri, grado e genere virtuali, dell'intorno di un punto semplice della superficie; precisamente denotando con ν il grado e con ρ il genere di γ, si ha

$$\nu = -1, \qquad \rho = 0.$$

L'eguaglianza $\rho = 0$ segue dal fatto che la curva γ, la quale è razionale, non ha punti doppi, poichè questi sarebbero punti fondamentali.

Quanto a ν, per trovarne il valore, basta ricorrere alla definizione (n.° 1) di grado di una curva isolata (sistema lineare ∞^0), ed osservare che lo staccamento di γ da $|C|$ diminuisce di 1 il grado del sistema, mentre le curve residue hanno $i = 1$ intersezioni con γ; queste osservazioni si giustificano subito se si pensa che alle curve di $|C - \gamma|$ corrispondono su F^* le sezioni iperpiane passanti per G^*.

Alle cose dette innanzi deve aggiungersi, per chiarezza, un'osservazione.

Poniamo che si abbiano sopra la F due curve γ, γ_1, secantisi in un punto, a cui corrispondano rispettivamente sopra F^* il punto G^* ed un punto G^*_1 infinitamente vicino a G^*. In questo caso si troverebbe (ricorrendo alla solita definizione di grado) che il grado virtuale di γ vale $\nu = -2$, e quello di γ_1 vale $\nu_1 = -1$; (i generi di γ, γ_1 sono ambedue nulli). Si ha dunque, per quanto concerne γ, un'apparente contraddizione colle cose dette innanzi; ma la ragione sta in ciò che all'intorno di G^* su F^* corrisponde su F non la sola curva γ, ma la curva $\gamma + \gamma_1$, e quindi la $\gamma + \gamma_1$ deve pensarsi come *una intera curva eccezionale.* (D'altra parte anche la γ_1 da sola potrebbe pensarsi come un'intera curva eccezionale corrispondente all'intorno del punto G^*_1). Fatta questa convenzione, si trova che il grado virtuale della curva $\gamma + \gamma_1$ vale $\nu + \nu_1 + 2 = -1$, ed il genere $\rho = 0$, come innanzi si è detto.

La convenzione fatta ha del resto una portata generale: parlando di una curva eccezionale intendiamo sempre d'includere in essa tutte le componenti (curve) che rappresentano l'intorno di un punto sopra una superficie trasformata. Ed allora vale sempre l'affermazione che « una curva eccezionale di 1.ª specie ha il genere $\rho = 0$ e il grado $\nu = -1$ ».

Viceversa si può dimostrare che « una curva γ su F di genere virtuale $\rho = 0$ e grado virtuale $\nu = -1$ è una curva eccezionale di 1.ª specie ».

A tal fine suppongasi intanto che le curve K sezioni iperpiane di F formino un sistema regolare ∞^r; detto n l'ordine di F (grado del sistema) e π il genere delle nominate K, p_a il genere aritmetico della F, avremo

$$r = n - \pi + 1 + p_a .$$

Sommando a $|K|$ la curva $|\gamma|$, il cui ordine verrà designato con m, si trova che il grado di $|K + \gamma|$ vale

$$N = n + 2m + \nu = n + 2m - 1,$$

ed il suo genere

$$\Pi = \pi + \rho + m - 1 = \pi + m - 1;$$

la dimensione virtuale di $|K + \gamma|$, calcolata in base al teorema di Riemann-Roch per le superficie (dimensione inferiore od uguale alla dimensione effettiva), sarà quindi

$$R = N - \Pi + 1 + p_a = r + m.$$

L'addizione di γ amplia dunque effettivamente il sistema $|K|$, conducendo ad un nuovo sistema lineare irriducibile la cui dimensione effettiva è $\geqq r + m$.

Ma si vede anche facilmente che la dimensione effettiva è proprio $r + m$, e quindi il sistema $|K + \gamma|$ è regolare come $|K|$; infatti le curve di quello segano γ in $m + \nu = m - 1$ punti, per modo che lo staccamento di γ impone alle curve di $|K + \gamma|$ m condizioni al più.

Ora proseguendo a sommare γ a $|K+\gamma|$ e così via, si arriverà, dopo m operazioni, ad un sistema irriducibile $|K_0|=|K+m\gamma|$, le cui curve non segheranno più γ; il sistema $|K_0|$ avrà dunque la curva γ come fondamentale, e non avrà alcun punto base sopra F (come non ne aveva $|K|$). Trasformando ora la F in una superficie F^* mediante il detto sistema $|K_0|$, la γ verrà trasformata interamente in un punto semplice.

In tutto ciò che abbiamo detto figura l'ipotesi che il sistema $|K|$ delle sezioni di F sia regolare; questa ipotesi non è però essenziale, poichè ove non fosse soddisfatta, basterebbe sostituire alle K le curve d'un sistema regolare privo di punti base su F, quale è p. es. l'aggiunto ad un multiplo di $|K|$ d'ordine sufficientemente alto.

Si può applicare il procedimento esposto successivamente a più curve eccezionali di 1.ª specie appartenenti alla superficie F, purchè esse non si seghino fra loro, giacchè, sotto questa condizione, ognuna di tali curve rimane curva eccezionale di 1.ª specie nelle trasformazioni successive di F.

Dunque *è sempre possibile effettuare sopra una data superficie F una conveniente trasformazione priva di punti fondamentali su F, per modo da fare scomparire (mutandole in punti semplici) quantesivogliano curve eccezionali di 1.ª specie, non secantisi fra loro.*

Se invece si hanno su F *due* curve eccezionali di 1.ª specie γ, γ_1 aventi un punto comune (non due curve componenti insieme una sola curva eccezionale), dopo la trasformazione che muta l'una di esse, p. e. γ, in un punto G^*, la γ_1 si cambia in una curva eccezionale γ^*_1 *di 2.ª specie.* Infatti il grado virtuale di γ^*_1, come quello di $\gamma+\gamma_1$, vale $-1+(-1)+2=0$ anzichè -1. Per chiarire la cosa, si può considerare l'esempio di una superficie F che sia riferibile ad una rigata F^*, e contenga due curve γ, γ_1 con un punto comune, una delle quali γ corrisponda ad un punto G^* di F^*, e l'altra γ_1 alla generatrice γ^*_1 di F^* che passa per G^* (l'ufficio di γ, γ_1 è del resto scambievole). La nominata generatrice di F^* è una curva eccezionale di 2.ª specie, la quale non può essere trasformata in un punto semplice, senza che qualche punto di essa si muti in una nuova curva eccezionale.

9. Una curva eccezionale di 2.ª specie della superficie F, per la sua stessa natura non può essere eliminata senza che vengano create nuove curve eccezionali.

Abbiamo già visto che un esempio di curva siffatta è offerto da una generatrice d'una superficie rigata. Un altro esempio vien dato da una retta o da una conica del piano, ecc.

Che cosa si ottiene dunque applicando il procedimento esposto innanzi al caso delle curve eccezionali di 2.ª specie?

In sostanza il procedimento suddetto consiste in ciò.

Si consideri su F un sistema regolare $|K|$ privo di punti base; si trasformi F in una superficie F^*, per modo che la curva eccezionale γ, considerata su F, si muti in un punto G^* di F^*. Il sistema $|K^*|$ di F^* corrispondente a $|K|$ ha il punto G^* come punto base di un certo ordine m; quel sistema è contenuto perciò in un sistema più ampio $|K^*_1|$, ugualmente regolare, composto di curve dello stesso ordine non aventi G^* come punto base.

Ora il sistema $|K^*_1|$ di F^* ha per corrispondente su F un sistema $|K_1|$ il quale avrà la curva γ come fondamentale (sicchè potrebbe servire a trasformare la γ in un punto), ma esso possederà dei punti base su γ, se γ è una curva eccezionale di 2.ª specie, all'opposto di quel che accadeva se γ era di 1.ª specie. Si può ampliare $|K_1|$ che è contenuto in un sistema $|K_2|$ di curve dello stesso ordine (egualmente regolare) senza punti base sopra γ; ma la curva γ, fondamentale per $|K_1|$, non sarà più fondamentale per $|K_2|$. Il procedimento qui indicato non ha termine, poichè si può operare su $|K_2|$ come già si era operato su $|K|$, e così via. Ma come a priori si poteva prevedere, il detto procedimento non conduce mai ad un sistema trasformante che permetta di eliminare la γ, senza che qualche punto di essa dia origine a nuove curve eccezionali.

Comunque, una curva eccezionale γ, di 1.ª o di 2.ª specie, esistente sopra una superficie F permette di ampliare (nel modo anzidetto) un sistema regolare $|K|$ appartenente alla superficie, costruendo un nuovo sistema $|K_1|$ i cui caratteri (grado e genere effettivi) si esprimono semplicemente mediante quelli (n e π) di $|K|$ e mediante il numero m delle intersezioni di γ colle K. Infatti se si considerano i sistemi trasformati $|K^*|$, $|K^*_1|$ sopra una superficie F^*, trasformata di F, ove alla γ corrisponda un punto G^*, il sistema $|K^*|$ può considerarsi dedotto da $|K^*_1|$ coll'imposizione del punto G^* come base m-plo.

Quindi il grado e il genere di $|K_1|$ (o $|K^*_1|$) saranno dati da

$$n_1 = n + m^2,$$

$$\pi_1 = \pi + \frac{m(m-1)}{2},$$

e si avrà dunque

$$n_1 - 2\pi_1 = n - 2\pi + m.$$

Così l'esistenza di una curva eccezionale d'ordine m (> 0) sopra una superficie F, di cui le sezioni iperpiane K formano un sistema (supposto regolare) di grado n e genere π, permette di trasformare la F in una superficie F_1 le cui sezioni iperpiane formano un nuovo sistema regolare, di grado n_1 e genere π_1, con

$$n_1 - 2\pi_1 > n - 2\pi.$$

Sicchè o si giunge, dopo un certo numero finito di trasformazioni, ad una superficie in corrispondenza con F che non possiede più curve eccezionali (e questo accade se F contiene soltanto un numero finito di curve eccezionali di 1.ª specie non secantisi fra loro), o si giunge ad una trasformata di F in cui la differenza $N - 2\Pi$ fra l'ordine N, cioè il grado del sistema delle curve sezioni iperpiane, e il doppio del genere Π delle nominate curve, può supporsi tanto grande quanto si vuole.

Conviene di enunciare il resultato ottenuto sotto forma negativa, nel modo seguente:

Se una superficie è tale che per ogni sistema lineare irriducibile di curve sopra di essa il grado non superi il doppio del genere diminuito di due ($N \leqq 2\Pi - 2$), *la superficie possiede solo un numero finito di curve eccezionali; queste sono precisamente di 1.ª specie e non si segano fra loro. La superficie può quindi essere trasformata in un'altra priva affatto di curve eccezionali.*

L'importanza del resultato apparirà chiara quando avremo dimostrato che le superficie contenenti un sistema lineare per cui il grado supera il doppio del genere diminuito di 2, sono razionali o riferibili a rigate (n.° 16). Per ora è lecito soltanto di trarne la conclusione che « una superficie avente « il genere o qualcuno dei plurigeneri superiore a zero, si può trasformare « in guisa da non contenere curve eccezionali ».

Questo resultato era stato fino ad ora intravvisto o dimostrato soltanto con qualche restrizione superflua (*).

10. Quando sopra una superficie F si procede per aggiunzione a partire da un dato sistema lineare irriducibile, p. es. dal sistema delle sezioni iperpiane, i successivi sistemi aggiunti che si ottengono possono essere irriducibili o riducibili. Tra le cause che portano la riducibilità è da annoverare l'esistenza di curve eccezionali di 1.ª specie d'ordine convenientemente basso; infatti dopo un certo numero di aggiunzioni (assai grande in relazione al suo

(*) Enriques, *Introduzione...*, § 42.

ordine) una curva eccezionale di 1 ª specie diventa fondamentale pel sistema costruito, e proseguendo si distacca una, due, tre... volte dai sistemi successivamente aggiunti. A questo fatto va collegata la circostanza paradossale che per gli ultimi sistemi nominati il genere virtuale delle curve spezzate è inferiore al genere effettivo delle curve variabili che di quelle fan parte. Prima di analizzare più da vicino il fatto segnalato, stimiamo utile di darne un esempio.

Consideriamo perciò la superficie razionale F, appartenente ad un S_{47}, che viene rappresentata sul piano dal sistema delle curve C_{11}, d'ordine 11, aventi due punti quintupli A e B. Alla retta AB corrisponde sopra F una retta p che è eccezionale di 1.ª specie. Le curve aggiunte alle sezioni di F sono rappresentate sul piano dalle C_8, d'ordine 8, aventi in A e B due punti quadrupli, onde pel loro sistema la retta p è fondamentale. Operando nuovamente per aggiunzione si ottiene su F un sistema (2.° aggiunto) che contiene p come parte fissa, rappresentato sul piano dal sistema delle quintiche C_5 composte della retta AB e delle quartiche che hanno in A e B due punti doppi; il genere virtuale del nominato sistema sopra F è 0, il genere effettivo della parte variabile è 1.

Rendiamoci ora ragione in modo generale del fatto sopra avvertito. Sia γ una curva d'ordine m sopra una superficie F; ρ e ν denotino rispettivamente il genere e il grado virtuali di γ.

Designando con $|C|$ il sistema delle sezioni di F, con π il suo genere e con n il suo grado (ordine della superficie F), costruiamo il sistema

$$|(C+\gamma)'| = |C'+\gamma|$$

aggiunto a $|C+\gamma|$, e valutiamo il numero delle intersezioni di una curva generica di esso con una $C+\gamma$.

Essendo

$$\pi+\rho+m-1$$

il genere di $|C+\gamma|$, il numero richiesto sarà

$$2\{\pi+\rho+m-1\}-2\,;$$

d'altra parte esso verrà dato anche da

$$(2\pi-2)+m+x'+\nu,$$

ove, nel quadrinomio sopra scritto, il 1.° termine esprime quante sono le intersezioni di C' con C, il 2.° le intersezioni di γ con C, il 3.° le intersezioni di C' con γ, il 4.° le intersezioni di γ con se stessa.

Di qui ricaviamo la seguente espressione di x':

$$x' = m + 2\rho - 2 - \nu.$$

Operando successivamente per aggiunzione sopra $|C'|$, e costruendo così i successivi sistemi aggiunti $|C''|, \ldots, |C^i|$, otteniamo la formula

$$x^{(i)} = m + i(2\rho - 2) - i\nu, \qquad (1)$$

la quale esprime il numero delle intersezioni delle C^i colla γ; ben inteso, il numero stesso ha un significato virtuale se la γ fa parte delle curve C^i. In questa ultima ipotesi, supposto per generalità che la γ entri un certo numero $h\,(\geqq 0)$ di volte come componente fissa nelle C^i, otterremo il numero (effettivo) delle intersezioni di una $C^i - h\gamma$ con γ, dalla formula

$$x_h^{(i)} = m + i(2\rho - 2) - (i + h)\nu. \qquad (2)$$

Premesse queste formule, supponiamo che la γ sia una curva eccezionale di 1.ª specie; allora si ha

$$\rho = 0 \qquad \nu = -1,$$

e la formula (1) diventa

$$x^{(i)} = m - i.$$

Il numero $x^{(i)}$ è dunque negativo per $i > m$, supposto che esista (per un siffatto valore di i) il sistema $|C^i|$ aggiunto i-mo a $|C|$; e questo significa che la γ si stacca come parte fissa dalle curve C^i; precisamente si può dire in generale che essa si stacca $h = i - m$ volte $(h > 0)$, ed è fondamentale pel sistema delle curve residue, poichè dalla (2) si ricava

$$x_h^{(i)} = 0.$$

Valutando poi il genere virtuale di $|C^i|$, si vede che esso è inferiore di

$$\frac{h(h-1)}{2} = \frac{(i-m)(i-m-1)}{2}$$

unità rispetto al genere di $|C^i - h\gamma|$.

Vediamo così giustificata in un modo affatto generale l'osservazione ora fatta intorno allo staccarsi delle curve eccezionali di 1.ª specie dai sistemi successivi aggiunti a $|C|$.

Le formole scritte innanzi ci permettono ora d'invertire l'osservazione stessa nel modo seguente:

Se una curva γ di F si stacca un certo numero di volte, come parte fissa, da tutte le curve C^i, aggiunte i-me al sistema C delle sezioni iperpiane di F (supposte le C^i ∞^1 almeno), e rimane fondamentale, cioè senza intersezioni, colle curve residue, la γ è una curva eccezionale di 1.ª specie d'ordine $< i$.

Poniamo infatti che la γ si stacchi un certo numero h (> 0) di volte da $|C^i|$; l'ipotesi dell'enunciato porta l'eguaglianza

$$x_h^{(i)} = m + i(2\rho - 2) - (i + h)\nu = 0.$$

Ora perchè questa sia soddisfatta deve essere intanto $\nu \leq 0$. Infatti nell'ipotesi opposta $\nu > 0$ si ha

$$x_{h+1}^{(i)} < 0, \qquad x_{h+2}^{(i)} < 0 \ldots,$$

dal che segue che il sistema $|C^i - (h + 1)\gamma|$, ottenuto staccando da $|C^i - h\gamma|$ la curva fondamentale γ, consta di una sola curva costituita dalla γ contata un certo numero di volte, senza curve residue; quindi la dimensione di $|C^i|$ (o di $|C^i - h\gamma|$) vale

$$r^{(i)} = 1,$$

ossia il sistema $|C^i - h\gamma|$ è un fascio, del quale la γ contata una o più volte (sia p. e. s volte) costituisce tutta una curva. Ora la curva $s\gamma$ ha il grado $s^2\nu > 0$, e questo dunque deve essere anche il grado del fascio $|C^i - h\gamma|$; ma di qui risulta un assurdo perchè il grado del fascio stesso è pur dato da $s\,x_h^{(i)} = 0$, denotando $s\,x_h^{(i)}$ il numero delle intersezioni di $s\gamma$ con una curva di $|C^i - h\gamma|$.

Restano pertanto da considerare i casi

$$\nu = 0, \qquad \nu = -1, \qquad \nu \leq -2,$$

in corrispondenza ai quali, essendo ρ per sua natura non negativo (γ irriducibile), si deve avere $\rho = 0$, perchè possa essere $x_h^{(i)} = 0$.

Ma l'ultima ipotesi $\nu \leq -2$ si esclude subito, perchè si avrebbe

$$x_h^{(i)} \geq m + 2h > 0,$$

mentre si è supposto già $x_h^{(i)} = 0$.

Vedremo pure che è impossibile l'ipotesi $\nu = 0$.

A tal fine supponiamo che il sistema $|C^i - h\gamma|$, che per ipotesi non contiene γ come parte fissa, sia privo di componenti fisse, dalle quali (eventualmente) si potrebbe averlo spogliato. Detta $r^{(i)} \geq 1$ la dimensione del detto sistema, consideriamo le curve di esso che passano per un punto di γ, e perciò si spezzano nella γ e in curve residue $C^i-(h+1)\gamma$. Queste ultime hanno $x_{h+1}^{(i)}=0$ intersezioni con γ; ma ciò è impossibile tranne che nei seguenti due casi: *a*) se $|C^i-h\gamma|$ è un fascio lineare del quale una curva sia la γ; *b*) se $|C^i-h\gamma|$ è un fascio lineare, la cui curva generica si componga di più curve variabili in un fascio irrazionale del quale una curva è la γ. Ciò dipende dal fatto che se una curva generalmente irriducibile varia in un sistema algebrico (ad es. in un fascio), e per una posizione particolare si spezza, ad es. in due parti, le due parti devono avere almeno *una* intersezione comune; non *zero* come si era trovato considerando la γ e la $C^i-(h+1)\gamma$ (cfr. n.° 1). Ora, sia nella ipotesi *a*), che nella ipotesi *b*), la nostra superficie contiene un fascio di curve razionali, come la γ, e quindi può trasformarsi birazionalmente in una rigata (cfr. n.° 11). Sopra tale rigata la γ avrebbe come immagine una generatrice, sulla quale non si troverebbero punti base del sistema $|C|$ corrispondente al sistema delle sezioni iperpiane di F. Ora è facile persuadersi che procedendo per aggiunzione, sopra una rigata, a partire da un sistema lineare irriducibile, non potrà avvenire che da uno dei successivi sistemi aggiunti si distacchi, come parte fissa, una generatrice non contenente punti base del sistema. Con ciò resta dimostrato che l'ipotesi $\nu=0$ è incompatibile colle nostre premesse.

La curva γ che si distacca (h volte) da $|C^i|$, restando fondamentale pel sistema residuo, ha dunque i caratteri $\rho=0$, $\nu=-1$, ossia è una curva eccezionale di 1.ª specie.

Riassumendo, concludiamo:

Operando per aggiunzione ripetuta sopra il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di una superficie F, il sistema $|C^i|$, supposto ∞^1 almeno, a cui si perviene dopo i operazioni, potrà contenere delle parti fisse, contate un certo numero di volte, che sieno fondamentali pel sistema residuo; tali curve saranno le curve eccezionali di 1.ª specie, appartenenti ad F, che hanno l'ordine inferiore ad i, e queste soltanto.

Se dunque la superficie F non contiene curve eccezionali di 1.ª specie d'ordine minore di i, una componente fissa γ di $|C^i|$, che entri $h\,(>0)$ volte nella curva generica C^i, avrà $x_h^{(i)}>0$ intersezioni colle curve residue $C^i-h\gamma$; ma in tal caso paragonando il genere $\pi^{(i)}$ di $|C^{(i)}|$ a quello $\pi_h^{(i)}$ di $|C^i-h\gamma|$, si troverà certo

$$\pi^{(i)} \geqq \pi_h^{(i)}.$$

Infatti si ha

$$\pi^{(i)}=\pi_h^{(i)}+\rho_h+h\,x_h^{(i)}-1\,,$$

dove

$$\rho_h = h(\rho - 1) + \nu \frac{h(h-1)}{2} + 1$$

esprime il genere di $h\gamma$ in funzione del genere $\rho \geqq 0$ di γ e del grado ν di γ. Ora la differenza

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = \rho_h + h\, x_h^{(i)} - 1$$

è certo $\geqq 0$ se è $\nu > 0$, poichè allora si ha $\rho_h \geqq 0$, $x_h^{(i)} > 0$. Alla stessa conclusione si arriva se $\nu = 0$; giacchè in tal caso risulta

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = h \left\{ \rho + x_h^{(i)} - 1 \right\}$$

dove $h \geqq 1$, $\rho \geqq 0$, $x_h^{(i)} \geqq 1$.

Per esaminare finalmente l'ultima ipotesi $\nu < 0$, ossia $-\nu = \nu' > 0$, si trasformi la differenza $\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)}$, tenendo conto della espressione (2) di $x_h^{(i)}$; si troverà

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = h \left\{ (\rho - 1)(2i + 1) + m \right\} + \frac{h(h + 2i + 1)}{2} \nu',$$

risultato certo $\geqq 0$, tranne quando sia

$$\rho = 0, \qquad m < i, \qquad \nu' = 1;$$

ma queste soluzioni son da respingersi, perchè esse porterebbero alla conclusione esser γ (di grado $\nu = -\nu' = -1$ e genere $\rho = 0$) una curva eccezionale di prima specie avente l'ordine m inferiore ad i, contro l'ipotesi espressamente fatta. Rimane dunque dimostrato che in ogni caso è $\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} \geqq 0$; donde l'enunciato:

Se sopra una superficie F non esistono curve eccezionali di prima specie d'ordine inferiore ad i, il distaccarsi di eventuali componenti fisse dal sistema i-mo aggiunto (supposto almeno ∞^1) ottenuto partendo dalle sezioni iperpiane di F, non può mai aver l'effetto di rialzare il genere delle curve residue.

IV. Superficie sopra le quali il procedimento di aggiunzione si estingue: loro riferibilità a rigate.

11. Vogliamo qui anzitutto riepilogare, e completare in qualche punto, i principali resultati noti che si riferiscono alle condizioni di trasformabilità di una superficie in una rigata (razionale o no):

1) *Una superficie contenente un fascio di curve (irriducibili) razionali si può riferire ad una rigata, le cui generatrici corrispondono alle curve del fascio* (*).

2) *Una superficie contenente un fascio lineare di curve (irriducibili) ellittiche dotato di un punto base semplice o doppio, è razionale o riferibile ad una rigata ellittica* (**).

3) *Una superficie contenente un fascio lineare di curve (irriducibili) di genere due con uno o più punti base di moltiplicità i_1, $i_2 \dots$, ove $\Sigma\, i > 2$, è razionale o riferibile ad una rigata di genere uno o due* (**).

4) *Una superficie contenente un sistema lineare di curve (irriducibili) di genere $p > 2$ e di dimensione $r \geqq 3p - 5$, è razionale oppure riferibile ad una rigata.*

A questo resultato si arriva imponendo alle curve del nominato sistema lineare successivamente $p-2$ punti doppi. Se per l'imposizione di un punto doppio le curve del sistema si spezzano, lo spezzamento ha luogo in una curva razionale passante per il punto doppio ed in una residua curva dello stesso genere delle primitive, quindi la superficie risulta riferibile ad una rigata; altrimenti si perviene ad un fascio lineare di curve di genere due (eventualmente composte con curve razionali o ellittiche costituenti pure un fascio, certo lineare perchè dotato di punti base semplici per la superficie), e si ricade in uno dei casi esaminati innanzi.

(*) Il teorema fu dimostrato, pel caso in cui il fascio sia di genere 0, dal sig. Noether, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen III (1870); e in modo completo da Enriques, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.* Mathem. Annalen LII (1899).

(**) Castelnuovo ed Enriques, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*, n.° 5, Rendic. d. Circolo Mat. di Palermo, XIV 1900; cfr. una osservazione a piè di pagina nella Nota di Castelnuovo, *Le trasformazioni generatrici*... Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino, 1901.

Non ci diffonderemo a spiegare ulteriormente i particolari di questa dimostrazione, rinviando il lettore alla Nota di ENRIQUES (*), *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari . . .*, ove il metodo stesso è applicato per dimostrare che « una superficie contenente un sistema lineare di curve di genere p e di dimensione $r \geqq 3p + 5$ è razionale o riferibile ad una rigata di genere p ». Se qui si è ottenuto un resultato più espressivo, in cui l'ultima diseguaglianza è sostituita dalla $r \geqq 3p - 5$, ciò dipende dal fatto che ci siamo potuti servire dei teoremi 2), 3), che son più espressivi di quelli di cui anni fa si poteva disporre.

12. Prendiamo ora a studiare le superficie F sopra cui il procedimento di aggiunzione, applicato successivamente al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane, ha termine dopo un numero finito di operazioni; e cominciamo dal dimostrare che il presentarsi di questo fatto (esaurimento del processo di aggiunzione) non dipende dalla natura proiettiva della superficie, cosicchè esso si ripete per ogni trasformata della F.

A tal fine basterà ricollegare l'esaurimento del processo di aggiunzione applicato a $|C|$, all'esistenza su F di un sistema lineare di curve di grado N e genere $\Pi > 0$, ove

$$N > 2\Pi - 2.$$

Avvertiamo intanto che, in base alla ipotesi fatta, la superficie F avrà tutti i plurigeneri nulli, ed in particolare il genere

$$p_g = 0;$$

quindi il genere aritmetico, che non può superare p_g, sarà inferiore od uguale a zero, ossia

$$p_a = -p \qquad \text{con} \qquad p \geqq 0.$$

Sieno ora $\pi, \pi', \ldots, \pi^{(i)}$ i generi dei sistemi $|C|, |C'|, \ldots, |C^i|$ successivi aggiunti a $|C|$, ciascuno dei quali è supposto ∞^1 almeno. Il genere π può supporsi grande quanto si vuole in confronto a p; ma se, come supporremo, $|C^i|$ è l'ultimo aggiunto di dimensione $\geqq 1$, il suo genere $\pi^{(i)}$ non potrà superare $p + 1$, altrimenti si avrebbe un successivo aggiunto $|C^{i+1}|$, ∞^1 almeno.

Nella serie di numeri

$$\pi, \pi', \ldots, \pi^{(i)}$$

(*) *Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino*, 1894.

si troveranno dunque due numeri consecutivi $\pi^{(s)}$, $\pi^{(s+1)}$ in ordine decrescente, tali cioè che

$$\pi^{(s)} > \pi^{(s+1)}.$$

Consideriamo allora il grado $n^{(s+1)}$ del corrispondente sistema $|C^{s+1}|$; avremo (n.° 2)

$$n^{(s+1)} = \pi^{(s)} + \pi^{(s+1)} - 2 > 2\,\pi^{(s+1)} - 2.$$

Il sistema $|C^{(s+1)}|$ è dunque tale che in esso il grado supera il doppio del genere diminuito di 2.

Si può invertire il resultato ottenuto mostrando che « se ad F appartiene un sistema lineare $|K|$ di genere Π e grado N, ove

$$N > 2\,\Pi - 2,$$

il processo di aggiunzione applicato al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F si estingue dopo un numero finito di operazioni ».

A tal fine sommiamo a $|C|$ un multiplo, d'ordine s abbastanza elevato, di $|K|$, in guisa da ottenere che il grado n_s e il genere π_s del sistema somma $|C_s| = |C + s\,K|$ verifichino la disuguaglianza analoga a quella supposta per $|K|$, cioè $n_s > 2\,\pi_s - 2$. Questo resultato si può sempre ottenere; infatti calcolando colle note formole i caratteri di $|s\,K|$ e poi di $|C + s\,K|$, si trova la relazione

$$n_s - (2\,\pi_s - 2) = n - (2\,\pi - 2) + s\,\{N - (2\,\Pi - 2)\};$$

ed il secondo membro è certo positivo quando s sia sufficientemente elevato.

Ora le curve C'_s, aggiunte a $|C_s|$, segheranno le C_s in $2\,\pi_s - 2$ punti; le C''_s, seconde aggiunte, segheranno le C_s in

$$2\,\pi_s - 2 - \{n_s - (2\,\pi_s - 2)\} < 2\,\pi_s - 2$$

punti; le C'''_s segheranno le C_s in un numero ancora minore,

$$2\,\pi_s - 2 - 2\,\{n_s - (2\,\pi_s - 2)\},$$

di punti, ecc.

Pertanto (visto che quei numeri di intersezioni non possono divenir negativi) si conclude che dopo un certo numero di operazioni l'aggiunzione applicata a $|C_s|$ dovrà per forza estinguersi. Prima di quel punto si estinguerà dunque anche il processo di aggiunzione applicato a $|C|$, avendosi

$$|C'_s| = |C' + s\,K|,$$

$$|C''_s| = |C'' + s\,K|, \text{ ecc.}$$

Resta così giustificata l'affermazione che:

« L'estinguersi del procedimento di aggiunzione applicato al sistema « delle sezioni iperpiane di F è un fatto che ha carattere invariantivo, fatto il « quale si accorda sempre coll'esistenza sopra F di qualche sistema lineare per « cui il grado supera il doppio del genere diminuito di 2. »

Ciò premesso, sia F una superficie su cui il processo d'aggiunzione applicato al sistema delle sezioni iperpiane C si estingue dopo un numero finito d'operazioni.

Possiamo supporre che la F sia priva di singolarità, inoltre che le sue sezioni iperpiane C compongano un sistema lineare regolare, essendo queste restrizioni d'indole proiettiva soltanto. Designamo (come innanzi) con C', C'', . . . , C^i le curve dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$, fermandoci all'ultimo sistema $|C^i|$, ∞^1 almeno.

Le curve eccezionali di 1.^{a} specie, d'ordine $<i$, che appartengono ad F, si distaccano, come parti fisse, da $|C^i|$, restando fondamentali pel sistema residuo; pertanto esse non si segheranno fra loro, e quindi si potrà trasformare la superficie in modo che esse vengano eliminate, cioè mutate in punti, senza che nessun punto (fondamentale) di F dia origine a nuove curve eccezionali. Il sistema trasformante si ottiene sommando a $|C|$ ciascuna delle nominate curve fondamentali contata tante volte quant'è l'ordine della curva stessa; a tale sistema è dunque applicabile l'aggiunzione i volte, come a $|C|$.

Si conclude così che, senza introdurre alcuna restrizione essenziale, si può supporre la superficie F *convenientemente preparata*, in guisa da non contenere curve eccezionali di 1.^{a} specie d'ordine inferiore ad i.

In tale ipotesi avremo (n.° 10) che « i sistemi $|C'|$, $|C''|$, . . . , $|C^i|$ successivi aggiunti al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F, potranno es- « sere irriducibili o riducibili; ma, in quest'ultimo caso, spogliando ciascuno « dei nominati sistemi $|C^s|$ delle sue componenti fisse, si otterrà un sistema « il cui genere non sarà superiore al genere $\pi^{(s)}$ di $|C^s|$ ».

13. Ciò posto, studiamo più da vicino la superficie F, convenientemente preparata, sopra cui il procedimento di aggiunzione applicato alle sezioni iperpiane $|C|$, termina dopo i operazioni, arrestandosi all'ultimo sistema aggiunto $|C^i|$, ∞^1 almeno.

Come innanzi designamo con

$$\pi, \pi', \pi'', \ldots, \pi^{(i)}$$

i generi rispettivi di $|C|$, $|C'|$, $|C''|$,..., $|C^i|$, e denotiamo con s il più piccolo indice ($\leqq i$) per cui si trova

$$\pi^{(s)} < \pi^{(s-1)}.$$

Distinguiamo quindi due casi, secondochè il carattere ω della superficie F vale

$$\omega \leqq 1,$$

oppure

$$\omega > 1.$$

1.° caso: $\omega \leqq 1$.

In questo caso, in virtù dell'eguaglianza (n.° 5)

$$\pi - \pi' - (\pi' - \pi'') = \omega - 1,$$

sarà

$$\pi - \pi' \leqq \pi' - \pi'' \leqq \pi'' - \pi''' \ldots,$$

sicchè, dall'indice $s-1$ in poi, i successivi generi

$$\pi^{(s-1)}, \; \pi^{(s)}, \; \pi^{(s+1)}, \ldots, \; \pi^{(i)}$$

andranno sempre decrescendo, mentre le differenze positive

$$\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)}, \; \pi^{(s)} - \pi^{(s+1)}, \ldots$$

andranno generalmente crescendo, o almeno non decresceranno.

Indichiamo con $D > 0$ la prima di queste differenze; poniamo cioè

$$\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)} = D,$$

relazione che equivale all'altra

$$n^{(s)} - (2\pi^{(s)} - 2) = D,$$

dove $n^{(s)} = \pi^{(s-1)} + \pi^{(s)} - 2$ è il grado di $|C^s|$. Allora l'ultimo sistema aggiunto $|C^i|$ (∞^1 almeno) della nostra serie, del quale il genere

$$\pi^{(i)} \leqq p + 1,$$

avrà una dimensione

$$r \geqq \pi^{(i-1)} - p - 1 \geqq D + \pi^{(i)} - p - 1,$$

Ora qui può supporsi che D sia grande quanto si vuole in confronto a p, ad es.

$$D \geqq 3(p+1).$$

Se così non fosse, basterebbe sostituire al sistema di partenza $|C|$ un suo multiplo $|hC|$ (e quindi alla superficie F, di cui le C sono sezioni iperpiane, una sua trasformata F_h, avente come sezioni le curve di $|hC|$, la quale può supporsi convenientemente preparata). Infatti partendo dal sistema $|hC|$ troveremo nella serie dei successivi aggiunti, e precisamente al posto d'ordine sh, il sistema $|hC^s|$, di grado $N^{(sh)}$ e genere $\Pi^{(sh)}$, dove

$$N^{(sh)} - (2\,\Pi^{(sh)} - 2) = h\,\{ n^{(s)} - (2\,\pi^{(s)} - 2) \},$$

sicchè avremo

$$D_h = \Pi^{(sh-1)} - \Pi^{(sh)} = N^{(sh)} - (2\,\Pi^{(sh)} - 2) = h\,D;$$

e basterà prendere h sufficientemente grande, per avere D_h grande quanto si vuole.

Supposto dunque di aver già realizzata la disuguaglianza sopra scritta

$$D \geqq 3\,(p+1),$$

fissiamo la nostra attenzione sopra il sistema $|C^i|$ che si presenta ultimo nella serie degli aggiunti

$$|C|,\ |C'|,\ |C''|, \ldots,\ |C^i|.$$

Staccando da questo sistema le eventuali componenti fisse, otterremo (data la *conveniente preparazione* di F) un sistema lineare di genere

$$\rho \leqq \pi^{(i)} \leqq p+1,$$

e di dimensione

$$r \geqq D + \pi^{(i)} - p - 1 \geqq 3\,\rho,$$

come segue subito dalle disuguaglianze precedenti relative a ρ e a D. Ora il detto sistema lineare potrà essere: *a*) irriducibile, oppure *b*) riducibile, cioè composto colle curve γ d'un fascio.

Nell'ipotesi *a*), la presenza del nominato sistema prova subito, in virtù dei teoremi del n.° 11 (*), che *la superficie F è riferibile ad una rigata di genere ρ* (dove trattandosi di una superficie di genere numerico $-p$, dovrà risultare $\rho = p$).

Nell'ipotesi *b*), designando con θ il genere delle curve γ del fascio sopra nominato, e tenendo conto del fatto che in ciascuna delle ∞^r curve C^i en-

(*) Basterebbe anzi per ciò che fosse $r \geqq 3\rho - 5$; se qui si parte da una disuguaglianza meno espressiva, è in vista di ciò che segue, come pure per tener conto dei casi $\rho = 1,\ 2$.

trano almeno r componenti γ, avremo

$$p+1 \geqq \rho \geqq r(\theta-1)+1;$$

e poichè (come innanzi)

$$r \geqq 3\rho,$$

ne consegue

$$\theta \leqq 1.$$

Vediamo se può essere $\theta=1$, ipotesi che porta $\rho \geqq 1$, e quindi $\pi^{(i)} \geqq 1$. Consideriamo a tal fine il sistema $|C^{i-1}|$, di cui $|C^i|$ è l'aggiunto; il valore $\pi^{(i-1)}$ del suo genere soddisferà alla diseguaglianza

$$\pi^{(i-1)} \geqq D+\pi^{(i)} \geqq D+1.$$

Ponendo dunque

$$\pi^{(i-1)}=D+1+x \quad \text{con} \quad x \geqq 0,$$

saranno $2(D+x)$ i punti segati da una C^i sopra una C^{i-1}. Ma poichè la C^i si compone (a meno di parti fisse) di almeno r curve γ, ciascuna delle quali sega la C^i in un certo numero t di punti, si dovrà avere

$$2(D+x) \geqq r\,t.$$

D'altronde la dimensione r di $|C^i|$ è $\geqq \pi^{(i-1)}-p-1 \geqq D+x-p$. Sostituendo si trova

$$(D+x)(t-2) \leqq t\,p,$$

e questa relazione, se si bada che $D>3p$, porta di conseguenza

$$t=2.$$

Dunque ogni γ sarebbe segata da una C^{i-1} in due punti. Ma allora, per la formola (1) del n.° 10, la γ (curva ellittica di grado 0) sarebbe segata in due punti da una $C^{i-2}, \ldots$ e finalmente da una C generica (sezione di F), il che è assurdo, visto che allora la γ generica sarebbe una conica e quindi razionale.

Resta dunque possibile soltanto l'ipotesi $\theta=0$, la quale dice che « le curve γ del fascio suindicato sono razionali ». Tanto basta per concludere che anche in questo caso, e quindi *ogniqualvolta l'invariante ω della superficie F è $\leqq 1$, la superficie stessa è riferibile ad una rigata* (n.° 11, 1).

14. *Secondo caso* $\omega>1$.

È utile premettere qualche osservazione sulla nostra superficie F, sopra cui il procedimento di aggiunzione si estingue, e che ha i caratteri $\omega>1$, $p_a=-p \leqq 0$.

Osserviamo anzitutto che se $|C|$ è un sistema lineare, privo di punti base su F, avente il grado n ed il genere $\pi \geqq p+1$, tra i suoi caratteri ed il genere π' del sistema aggiunto sussistono le disuguaglianze

$$n > 2\pi - 2, \qquad \pi > \pi'.$$

Per dimostrare la prima basta partire dalla definizione di ω,

$$n - (2\pi - 2) - (\pi - \pi') = \omega - 1 > 0,$$

notando che se fosse $n \leqq 2\pi - 2$, dovrebbe risultare $\pi' > \pi$, e quindi $\pi' > p + 1$. Siccome d'altronde il grado del sistema aggiunto $|C'|$ vale

$$n' = \pi + \pi' - 2 < 2\pi' - 2,$$

seguirebbe, sempre nella stessa ipotesi, l'esistenza del secondo aggiunto $|C''|$ di genere $\pi'' > \pi' > \pi$. E così si continuerebbe all'infinito, mentre per ipotesi il processo di aggiunzione deve estinguersi sopra F. Risulta dunque dimostrata la prima disuguaglianza.

Quanto alla seconda si osservi che dal negarla, dal porre cioè $\pi' \geqq \pi \geqq p + 1$, segue (applicando la disuguaglianza già dimostrata al sistema $|C'|$) $n' > 2\pi' - 2$, ossia (sostituendo a n' il valore sopra scritto) $\pi > \pi'$, contro la ipotesi ora ammessa $\pi' \geqq \pi$.

E qui si noti incidentalmente che le due disuguaglianze (insieme al ragionamento che ha servito a giustificarle) sussistono pure per le superficie con $\omega = 1$, purchè la ipotesi $\pi \geqq p + 1$ si sostituisca ora coll'altra $\pi > p + 1$, e ciò per evitare un caso di eccezione ($p = 0$, $\pi = 1$) che altrimenti si presenterebbe.

Una seconda osservazione sulla nostra superficie $F(\omega > 1)$ è che essa non può possedere un fascio irrazionale di curve (serie irrazionale di cui una sola curva passa per un punto generico della superficie).

Ammesso infatti che la nostra superficie, di cui il genere geometrico p_g è certo nullo, possegga un fascio irrazionale, risulta anzitutto che il genere aritmetico $p_a = -p$ dovrà esser inferiore a 0 ($p > 0$), poichè una superficie regolare ($p_g = p_a$) non possiede fasci irrazionali (*).

Il fascio d'altra parte non potrà comporsi di curve razionali, perchè, se così fosse, la superficie potrebbe trasformarsi in una rigata, mentre, come vedremo tra poco direttamente (n.° 21), una rigata ha il carattere $\omega \leqq 1$, contro

(*) Castelnuovo, *Alcuni risultati*..., n.° 10. Memorie della Società italiana d. Scienze (dei XL), (serie III), tom. X, (1896).

l'ipotesi. Posto adunque che sia $\rho > 0$ il genere di una curva generica del fascio, e ρ' il genere del fascio, avremo (applicando la formola di Zeuthen-Segre estesa ai fasci irrazionali, n.° 6, Oss.) che l'invariante relativo I della superficie sarà espresso da

$$I = \Delta + 4(\rho - 1)(\rho' - 1) - 4,$$

dove $\Delta \geqq 0$ è il numero delle curve del fascio dotate di punto doppio. Dunque $I \geqq -4$; e per la relazione tra I, ω e $p_a = -p$ (n.° 6) si deduce

$$\omega \leqq -12p + 13,$$

la quale contraddice alla ipotesi $\omega > 1$ unita all'osservazione secondo cui deve essere $p \geqq 1$.

Premesse queste osservazioni, ritorniamo alla nostra superficie F di genere aritmetico $-p \leqq 0$, avente $\omega > 1$, sopra la quale il processo di aggiunzione si estingue. Partendo dal sistema $|C|$ delle sezioni piane, formiamone i successivi aggiunti, fino all'ultimo aggiunto $|C^i|$, almeno ∞^1. Designando, secondo il solito, con $\pi^{(i)}$ il genere di $|C^i|$, avremo

$$\pi^{(i)} \leqq p + 1.$$

Ora il sistema $|C^i|$ potrebbe esser riducibile; prescindendo in tal caso dalle sue componenti fisse, otterremo (n.° 10) o un sistema lineare irriducibile di genere

$$\rho \leqq \pi^{(i)} \leqq p + 1,$$

oppure un sistema composto colle curve γ di un fascio lineare, delle quali il genere virtuale designeremo ancora con ρ; ora qui, fatta astrazione dalla ipotesi $\rho = 0$ che condurrebbe senz'altro a conchiudere la razionalità di F, si avrà ancora

$$\rho \leqq \pi^{(i)} \leqq p + 1.$$

In ogni caso avremo dunque su F un sistema lineare irriducibile $|K|$, virtualmente privo di punti base, di genere virtuale

$$\rho \leqq p + 1$$

e di genere effettivo $\leqq \rho$.

Indichiamo con r la dimensione di $|K|$, ed applichiamo a $|K|$ la disuguaglianza del n.° 7; troveremo

$$5\rho + r \geqq 11p + \omega - 8,$$

ossia, poichè $\omega \geqq 2$ e $\rho \leqq p+1$, avremo

$$r \geqq 6p - 11.$$

Questa disuguaglianza ci conduce subito al risultato che desideriamo, *quando si faccia la ipotesi* $p \geqq 3$ (*). Infatti allora l'ultima formola ci dà

$$r \geqq 3p - 2 \geqq 7,$$

donde segue (ricordando la $\rho \leqq p+1$)

$$r \geqq 3\rho - 5.$$

Si conclude (n.° 11), tanto se $\rho = 0, 1, 2$, quanto se $\rho > 2$, che *la superficie F è riferibile ad una rigata.*

Restano dunque da trattare *le ipotesi* $p = 0, 1, 2$, delle quali la terza specialmente darebbe luogo ad una discussione alquanto minuziosa, se volessimo seguire una via analoga a quella tenuta per $p \geqq 3$. Si arriva invece rapidamente al risultato per la via completamente diversa che qui indichiamo.

Sia $|C|$ il sistema delle sezioni piane della superficie F, od un multiplo di quello abbastanza elevato per far sì che il genere di $|C|$ sia $\pi \geqq p+1$, e che inoltre il sistema aggiunto $|C'|$ sia irriducibile. Allora, detto π' il genere di $|C'|$, risulterà intanto, per una osservazione precedente, $\pi > \pi'$. Ciò premesso, formiamo il sistema $|K^{-2}| = |2C - 2C'|$. Noi abbiamo già calcolato i caratteri del detto sistema (n.° 5, formole (1)', (2)'), ed abbiamo trovato che, indicandone con R, Π, N la dimensione, il genere virtuale ed il grado, si ha (tenuto conto della ipotesi $p \leqq 2$)

$$R \geqq 3\omega - 3 - p \geqq 3\omega - 5$$

$$\Pi = \omega, \quad N = 4(\omega - 1).$$

Ora dal fatto che esista su F un sistema di genere $\omega \geqq 2$ e dimensione $R \geqq 3\omega - 5$, si conclude senz'altro (n.° 11, 4)) che F è riferibile birazionalmente ad una rigata; e ciò anche nella ipotesi estrema $\omega = 2$, in cui il sistema può ridursi ad un fascio, giacchè il fascio o possiede $N = 4$ punti base semplici, ed allora si può applicare la proposizione 3) del n.° 11, o possiede un punto base (accidentale) doppio, ed allora la curva generica del fascio

(*) È qui da notarsi che la discussione del caso $\omega > 1$, $p > 0$ procede in certo modo per assurdo; giacchè la discussione stessa, unita alla osservazione (n.° 21) che per una rigata si ha $\omega \leqq 1$, mostra che la ipotesi $\omega > 1$ conduce solo alle superficie razionali, per le quali d'altronde è $p = 0$. Ma non par facile dedurre direttamente la $p = 0$ dalla $\omega > 1$.

ha il genere effettivo $\omega - 1 = 1$, e si può ricorrere alla proposizione 2) del n.° 11. Dunque in ogni caso *la nostra superficie F con $\omega > 1$ è riferibile ad una rigata.*

15. Riassumendo il resultato della discussione precedente (n.i 13, 14), arriviamo infine al teorema fondamentale:

Se sopra una superficie il procedimento di aggiunzione applicato ad un qualsiasi sistema lineare ha termine dopo un numero finito di operazioni, la superficie può trasformarsi birazionalmente in una rigata (razionale o no).

V. La trasformabilità di una superficie in una rigata desunta dall'esistenza di certi sistemi di curve sopra di essa.

16. In forza di ciò che si è detto al n.° 12, il resultato ultimamente ottenuto si può enunciare dicendo:

Una superficie contenente un sistema lineare di curve di dimensione $\geqq 0$, di genere $\pi > 0$, e di grado $n > 2\pi - 2$, è riferibile ad una rigata.

Il resultato vale sia che si tratti di un sistema riducibile o irriducibile, ed in questo secondo caso si possono indifferentemente considerare i caratteri effettivi del sistema (in rispondenza all'ipotesi che il sistema stesso abbia dei punti base assegnati), o i caratteri virtuali (in rispondenza all'ipotesi che gli eventuali punti base del sistema si riguardino come virtualmente inesistenti); ma il caso in cui si considerano i caratteri virtuali è sempre più espressivo.

Per riconoscere l'ampiezza del resultato ottenuto basterà considerare dei valori particolari del genere π.

Per $\pi = 1$ ritroviamo, maggiormente esteso, il resultato 2) riportato al n.° 11 concernente le superficie con un fascio lineare di curve ellittiche; per $\pi = 2$ troviamo il resultato 3) del n.° 11 sulle superficie con un fascio lineare di curve di genere due.

Per $\pi = 3$ si ottengono già dei resultati interamente nuovi; in particolare lo studio delle superficie a sezioni di genere 3 fa un progresso essenziale mediante il teorema:

Una superficie, d'ordine superiore a 4, a sezioni di genere 3, è razionale, o rigata, o trasformabile in una rigata di genere 1 o 2.

E per esaurire completamente il detto studio (poichè le superficie razionali a sezioni di genere 3 sono già note) basterà classificare i sistemi lineari di curve di genere 3 appartenenti ad una rigata ellittica o di genere due.

17. Dal teorema del precedente numero discende l'importante corollario:

Se una superficie contiene una serie continua (algebrica) ∞^1 di curve razionali, o questa serie è tale che ogni punto della superficie appartiene ad una curva di essa, cioè la detta serie costituisce un fascio di un certo genere $p \geqq 0$, ed allora la superficie è trasformabile in una rigata di genere p; o la serie è tale che per ogni punto passano più curve di essa, ed allora la superficie è razionale.

La prima parte dell'enunciato essendo già nota (cfr. n.° 11, 1)), basterà stabilire la seconda.

Designando con C le curve razionali della serie, avremo per un teorema del sig. Humbert (*), (la superficie essendo priva d'integrali di differenziali totali di 1.ª specie) che le C saranno contenute totalmente in un sistema lineare; il genere π di questo sistema verrà dato dal numero dei punti doppi variabili delle C, e il grado n di esso dal numero delle intersezioni variabili di due C.

Pel nostro scopo occorre provare che

$$n > 2\pi - 2.$$

A tal fine stabiliamo una corrispondenza razionale tra la superficie F ed una superficie F' possedente un fascio di curve razionali C'; ciò si ottiene rappresentando birazionalmente ciascuna C su ciascuna C', e facendo quindi corrispondere ad ogni punto di F (pel quale passerà un certo numero $\nu > 1$ di curve C) un gruppo di ν punti sopra F'. Si può anche supporre che la F' sia una rigata e le C' generatrici di essa, poichè in caso opposto basterebbe assoggettare F' ad una conveniente trasformazione birazionale (n.° 11, 1)).

Così avendo operato, ai punti della F corrispondono sulla rigata F' i gruppi di ν punti di una *involuzione* I_ν, cioè di una serie di gruppi cosiffatta che ogni punto della superficie appartenga ad *un* gruppo della serie. È ora facile stabilire qual significato abbiano per la detta involuzione I_ν di F' i caratteri π e n relativi al sistema delle curve C di F.

Il genere π (numero dei punti doppi variabili appartenenti ad una C) viene dato dal numero dei gruppi I_ν che hanno due punti sopra una data generatrice di F'; il grado n (numero dei punti variabili comuni a due C) è invece il numero dei gruppi di I_ν aventi un punto sopra una data gene-

(*) *Sur quelques points de la théorie...* Journal de Mathématiques (4.^{me} s.^{e}), X (1894), pag. 195.

ratrice ed un secondo punto sopra una seconda generatrice pur data. Ora è chiaro che se le due ultime generatrici vengono a coincidere in una, gli n gruppi di I_ν ora nominati, divengono i π gruppi di I_ν che hanno due punti su quella generatrice, più un certo numero $\delta \geqq 0$ di gruppi di I_ν aventi un punto sulla detta generatrice ed un secondo punto infinitamente vicino al primo.

Di qui si ricava $n = 2\pi + \delta$, ossia $n \geqq 2\pi$; donde si trae che la superficie F' è razionale o riferibile ad una rigata irrazionale; ma la seconda alternativa resta esclusa per l'esistenza su F di una serie di curve razionali non formanti un fascio.

All'enunciato sopra scritto possiamo dare anche le seguenti forme equivalenti:

Ogni involuzione sopra una rigata è razionale o riferibile ad una nuova rigata, il cui genere non può superare quello della data.

In particolare si ha il resultato noto:

Le involuzioni piane sono razionali (*).

Sotto forma algebrica il precedente resultato generale si esprime dicendo:

Se l'equazione algebrica

$$f(x\,y\,z) = 0$$

si può risolvere ponendo x, y, z funzioni razionali di due parametri X, Y, legati da una relazione algebrica, e di un parametro t:

$$x = x(X\,Y\,t), \quad y = y(X\,Y\,t), \quad z = z(X\,Y\,t),$$
$$\varphi(X\,Y) = 0,$$

e se le scritte formule di risoluzione non sono razionalmente invertibili, si possono introdurre nuovi parametri

$$X_1 = X_1(X\,Y), \quad Y_1 = Y_1(X\,Y), \quad t_1 = t_1(t)$$

funzioni razionali dei precedenti, per modo che le x, y, z si esprimano per X_1, Y_1, t_1 in modo razionale invertibile, oppure si può risolvere la $f(x\,y\,z) = 0$ ponendo x, y, z funzioni razionali di due nuovi parametri indipendenti u, v, che sieno alla lor volta razionalmente esprimibili per x, y, z.

18. Ricordando ciò che si è trovato al n.° 9, il teorema generale del n.° 16 ci permette anche di enunciare il corollario:

(*) CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* Mathem. Annalen, XLIV (1893).

Una superficie contenente infinite curve eccezionali è riferibile ad una rigata (razionale o no).

Una superficie contenente una curva eccezionale di 2.ª specie è riferibile ad una rigata (razionale o no).

Una superficie, non riferibile ad una rigata, si può trasformare in guisa da non contenere alcuna curva eccezionale.

Quest'ultimo resultato è soprattutto importante pel fatto che, rispondendo in modo preciso alle previsioni, solo in parte giustificate, fatte intorno all'argomento, permette ormai di ritenere eliminata dallo studio delle superficie la grave difficoltà inerente alle curve eccezionali.

19. Il resultato del n.º 16 permette anche di colmare una lacuna tutt'ora esistente nello studio delle superficie con una serie continua di trasformazioni birazionali in sè stesse.

Le superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali, formanti un *gruppo* (nel senso di Lie), sono state studiate anzitutto dal sig. Picard (*), che, tenendo di mira il caso più interessante del gruppo permutabile, giunse alla scoperta delle superficie iperellittiche, oggetto di ulteriori studi notevolissimi del sig. Humbert (**). Le ricerche del sig. Picard, per quanto concerne le superficie dotate di un gruppo di trasformazioni non permutabili, furono in qualche punto proseguite da Castelnuovo ed Enriques (***) (i quali dettero l'estensione alle superficie del teorema di Schwartz per le curve, considerando il caso di gruppi ∞^2 o più ampi), ed infine furono, si può dire, condotte a termine dalla profonda analisi del sig. Painlevé (****).

Ma tutte queste ricerche lasciano da parte le superficie dotate di una serie continua di trasformazioni non appartenenti ad un gruppo (possedente un numero finito di dimensioni); e la domanda, formulata dai sig. Picard e Painlevé, se esistano superficie siffatte oltre alle superficie razionali e alle rigate, rimaneva tuttora senza risposta.

I resultati di questo lavoro permettono di rispondere in modo negativo alla domanda suddetta.

(*) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques*, Journal de Mathématiques (4.^{me} s.^{e}) V (1889).

(**) Journal de Mathématiques (4.^{me} s.^{e}) IX (1893).

(***) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc., Juillet 1895.

(****) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, pag. 265 e seg. (Paris, Hermann, 1897).

Si abbia infatti una superficie F dotata di una serie continua ∞^1 di trasformazioni birazionali in sè stessa. Moltiplicando ad r ad r le trasformazioni della serie, e facendo poi crescere il numero r, due casi potranno presentarsi; o si otterrà una serie di trasformazioni, la cui dimensione andrà sempre crescendo con r, e sarà anzi r stesso; oppure si giungerà alla fine ad un gruppo dipendente da un numero finito di parametri, nel qual gruppo la serie data sarà contenuta. Noi dobbiamo naturalmente occuparci del primo caso. Applichiamo le ∞^r trasformazioni nominate al sistema lineare $|C|$, di genere π e grado n, formato colle sezioni (piane o iperpiane) di F. Otterremo una serie continua di curve C_r di genere π, la cui dimensione andrà crescendo senza limite col crescer di r. Altrettanto accadrà dunque del numero N_r delle intersezioni di due C_r generiche, giacchè tutte le C_r segano sopra una di queste una serie (lineare o no) di gruppi, la cui dimensione è la dimensione della serie delle C_r o ne differisce in meno per una unità.

Consideriamo d'altra parte, tra le nominate C_r, quelle curve $\overline{C_r}$ che provengono dalle sezioni C di F per effetto di *una* determinata tra le ∞^r trasformazioni. Quelle $\overline{C}_r$ formano evidentemente un sistema lineare $|\overline{C}_r|$, di cui il genere e il grado (effettivi) coincidono col genere π e il grado n di $|C|$. Però il sistema $|\overline{C_r}|$ avrà generalmente un certo numero σ di punti base di molteplicità $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$; tenendo conto delle $\sum\limits_1^\sigma h^2$ intersezioni assorbite da questi, si avrà il grado virtuale di $|\overline{C_r}|$ che dovrà coincidere col numero N_r delle intersezioni di due C_r generiche; dunque

$$N_r = n + \sum_1^\sigma h^2.$$

Similmente, detto Π_r il genere virtuale di $|\overline{C_r}|$, si avrà

$$\Pi_r = \pi + \frac{1}{2} \sum_1^\sigma h\,(h-1).$$

Ora dalle due relazioni si ricava

$$N_r - 2\,\Pi_r = n - 2\,\pi + \sum_1^\sigma h.$$

Ma poichè, col crescere di r, il numero N_r, e quindi $\sum\limits_1^\sigma h^2$, può rendersi grande quanto si vuole, si potrà anche rendere grande ad arbitrio

$\sum_1^\sigma h \geqq \sqrt{\sum_1^\sigma h^2}$, e per conseguenza si potrà rendere positiva la differenza $N_r - 2\Pi_r$. Tanto basta per concludere (n.° 18) che

Una superficie la quale ammetta una serie continua di trasformazioni birazionali non appartenenti ad un gruppo (d'ordine finito), è razionale o riferibile ad una rigata di genere $p > 0$.

Nel piano e sulle superficie rigate di genere $p > 0$ si costruiscono agevolmente serie di trasformazioni non appartenenti ad un gruppo; queste, come è chiaro, operano intransitivamente sui punti della superficie quando sia $p > 1$.

VI. Il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie e la sua importanza nel decidere se la superficie sia trasformabile in una rigata.

20. Nel n.° 5, definendo l'invariante relativo ω di una superficie F, abbiamo osservato che esso diviene un invariante assoluto $p^{(1)}$ quando la superficie F sia priva di curve eccezionali. Se al contrario la superficie F possiede un certo numero *finito* $e > 0$ di curve eccezionali, nel qual caso essa può trasformarsi in una superficie priva di curve eccezionali, il valore dell'invariante assoluto $p^{(1)}$ non coincide col valore di ω calcolato sulla F, ma ne differisce di e unità; e si ha precisamente

$$p^{(1)} = \omega + e.$$

L'invariante assoluto $p^{(1)}$ così definito prende il nome di *genere lineare* (o *Curvengeschlecht*) della superficie F (*). La definizione è in perfetto accordo con quella data dal sig. Noether, nel caso in cui la superficie abbia il genere geometrico $p_g > 0$, giacchè allora $p^{(1)}$ è precisamente il *genere (virtuale) delle curve canoniche di F*, mentre $p^{(1)} - 1$ è il grado (virtuale) del sistema canonico. Ma la definizione sopra riferita comprende altri casi che sfuggono alla definizione di Noether; precisamente quella si estende ad ogni superficie che non sia trasformabile in una rigata (cfr. n.° 18). Come essa possa estendersi anche alla classe delle rigate si vedrà tra poco.

Osserviamo per ora che sulle superficie dotate di un numero finito (zero incluso) di curve eccezionali, il genere lineare $p^{(1)}$ è sempre $\geqq 1$. Ciò segue

(*) Cfr. Enriques, *Introduzione...*, § 41.

dal fatto che, ammesso di aver trasformato la nostra superficie in una F priva di curve eccezionali, e detti π, π', π'' ... i generi del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F e dei successivi aggiunti $|C'|$, $|C''|$..., si ha, per definizione, l'uguaglianza

$$(\pi - \pi') - (\pi' - \pi'') = p^{(1)} - 1,$$

e sussistono pure tutte le analoghe che si ottengono aumentando di una unità per volta gli apici di tutte le π. Ora se fosse $p^{(1)} < 1$, $p^{(1)} - 1 < 0$, le differenze $\pi - \pi'$, $\pi' - \pi''$, $\pi'' - \pi'''$ ... formerebbero una serie di valori crescenti (cfr. n.° 13), e quindi da un certo punto in poi i generi dei successivi aggiunti andrebbero decrescendo; ma allora (tenuto conto del n.° 10) l'aggiunzione si dovrebbe esaurire dopo un numero finito di operazioni, il che non può certo accadere sulla superficie F.

Osserviamo inoltre che sulle superficie di cui stiamo ora parlando, il carattere $p^{(1)} \geqq 1$ permette di fissare un limite inferiore al valore dei singoli plurigeneri, stabilendo così (tranne in un caso) l'esistenza dei sistemi pluricanonici da un certo punto in poi, e dandone inoltre i caratteri. Infatti, detto $|C|$ il sistema delle sezioni piane della nostra superficie F priva di curve eccezionali, e $|C'|$ il sistema aggiunto, sappiamo che il sistema i-canonico $|K^i|$ di F è dato dalla identità $|K^i| = |i\,C' - i\,C|$. Se adunque indichiamo con p_a, $p^{(1)}$ il genere aritmetico e il genere lineare di F, ed ammettiamo che tra il grado n e il genere π di F passi la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$, abbiamo per lo i-genere P_i la limitazione (n.° 5 (1))

$$P_i \geqq \frac{i\,(i-1)}{2}\,(p^{(1)} - 1) + p_a + 1 \qquad (n < 2\pi - 2,\ i > 1); \tag{1}$$

mentre il genere virtuale Π_i e il grado virtuale N_i del sistema i-canonico, di cui $P_i - 1$ è la dimensione, sono espressi da

$$\Pi_i = \frac{i\,(i+1)}{2}\,(p^{(1)} - 1) + 1, \quad N_i = i^2\,(p^{(1)} - 1) \qquad (n \leqq 2\pi - 2,\ i \geqq 1). \tag{2}$$

La formola (1) è stata ottenuta nella ipotesi che pel sistema $|C|$ valesse la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$; mentre le superficie che stiamo ora considerando possono anche avere sezioni piane C per cui valga la relazione $n = 2\pi - 2$ (non mai $n > 2\pi - 2$, chè altrimenti la superficie sarebbe riferibile ad una rigata e quindi possederebbe infinite curve eccezionali). Ammessa l'ultima uguaglianza si osservi (n.° 5) che il ragionamento con cui si perviene alla formola (1), e la (1) stessa, continuano a sussistere quando si sappia che la serie segata dal sistema $|i\,C'|$ sopra una curva di $|i\,C|$ è non speciale; mentre se la serie stessa fosse speciale bisognerebbe modificare la (1) diminuendo di 1 il secondo membro. Ma in questo secondo caso si ottiene un risultato molto più espressivo osservando che la detta serie, se è speciale, è la serie canonica (come risulta dal confronto del suo ordine col genere della curva a cui appartiene); allora però $|i\,C'|$ è il sistema aggiunto ad $|i\,C|$. Ora dall' identità

$$|i\,C'| = |(i\,C)'| = |(i-1)\,C + C'|$$

segue

$$|(i-1)\,C'| = |(i-1)\,C|;$$

e questa afferma che esiste il sistema $(i-1)$-canonico, composto di una sola curva d'ordine zero; quindi $P_{i-1}=1$. D'altronde, uguagliando ad es. i gradi di $|(i-1)\,C|$ e $|(i-1)\,C'|$, si trova che nelle stesse ipotesi è $p^{(1)}=1$; e direttamente si vede che la superficie in questione ha il genere geometrico p_g e tutti i plurigeneri minori o uguali a 1, in particolare però

$$P_{i-1} = P_{2(i-1)} = P_{3(i-1)} = \cdots = 1\,,$$

mentre il genere aritmetico vale $p_a \leq p_g \leq 1$. Per una siffatta superficie è inutile di surrogare la formola (1) con un'altra, la quale non potrebbe dar nulla di più di quel che ora si sia esposto.

Concludiamo adunque:

Sopra una superficie possedente un numero finito di curve eccezionali (e quindi non trasformabile in una rigata), la quale abbia il genere lineare $p^{(1)}>1$, *lo i-genere* P_i *è espresso dalla formola* (1), *ed è quindi maggiore di zero per tutti i valori di i superiori ad un certo limite* (*).

Se invece la superficie ha il genere lineare $p^{(1)}=1$, la formola (1) può cadere realmente in difetto. Esistono infatti superficie a sezioni di genere π, d'ordine $n=2\,\pi-2$, le quali hanno

$p^{(1)}=1, \quad p_a = P_i = 1$ per qualsiasi valore di i,

come ad es. la superficie generale del quarto ordine; e superficie che nella stessa ipotesi $(n=2\,\pi-2)$ hanno

$p^{(1)}=1, \quad p_a=0, \quad P_i=0,\ 1,$ secondochè i è dispari o pari,

come ad es. la superficie del sesto ordine passante doppiamente per gli spi-

(*) Quest' ultima osservazione è stata applicata nello studio delle superficie con $p^{(1)}=2,\ 3\ldots$ Cfr. due Note di Enriques nei Rendic. della R. Accad. d. Lincei, febbraio e marzo 1897.

goli di un tetraedro. Altri tipi di superficie si potrebbero citare, sui quali non intendiamo fermarci qui.

Ritornando alle superficie con $p^{(1)} > 1$, accanto al limite inferiore per lo i-genere fissato dalla (1), si può assegnare pure un limite superiore a P_i mediante la formola

$$P_i \leqq p_g + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)}-1)+1, \tag{2}$$

dove i deve esser preso abbastanza grande perchè sia $P_{i-1} > 0$. La (2) si giustifica osservando che il sistema i-canonico sega sulla curva generica del sistema $(i-1)$-canonico la serie canonica, lasciando per residuo il sistema canonico. Anche la (2) cade in difetto per $p^{(1)} = 1$, come risulta da effettivi esempi di superficie rappresentabili sul piano doppio (*).

21. Nel numero precedente noi abbiamo definito il genere lineare $p^{(1)}$ per ogni superficie avente un numero finito di curve eccezionali. Ora si può chiedere se quella definizione possa presentarsi sotto tal forma, da estendersi anche al caso delle superficie che posseggono infinite curve eccezionali e quindi appartengono alla famiglia delle rigate.

Basta osservare a tal fine che, per definizione, sopra una superficie della prima categoria, possedente $e \geqq 0$ curve eccezionali, il genere lineare $p^{(1)} = \omega + e$ è il massimo valore che possa assumere l'invariante relativo ω calcolato sopra tutte le superficie in corrispondenza birazionale con quella considerata (appartenenti cioè alla stessa classe di quella); quel massimo corrisponde precisamente alle superficie della classe che son prive di curve eccezionali.

Ora è il caso di esaminare se partendo da una superficie della seconda categoria (razionale o rappresentabile sopra una rigata), e calcolando i valori di ω per tutte le superficie birazionalmente identiche a quella, questi valori ammettano un massimo finito, che sarà allora un invariante assoluto della superficie. La risposta, come ora vedremo, è affermativa; potremo adunque dar la seguente definizione generale del genere lineare (**):

Dicesi genere lineare (principale) $p^{(1)}$ *di una data superficie qualsiasi*

(*) Cfr. Enriques, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Rendic. della R. Accad. d. Lincei, 1898.

(**) Castelnuovo, *Sul genere lineare di una superficie...* Rendic. della R. Accad. d. Lincei, giugno 1897; occorre però avvertire che in questa Nota sono scambiati gli aggettivi *principale* e *secondario* applicati ai generi lineari. La nuova dicitura adottata nel testo sembra la più conveniente.

il massimo valore che assume l'invariante relativo ω calcolato su tutte le superficie in corrispondenza birazionale con quella.

Veniamo ora a dimostrare l'esistenza del massimo valore di ω per le superficie razionali, e per quelle che son rappresentabili sopra una rigata irrazionale.

Trattiamo anzitutto questo secondo caso.

Se una superficie F è in corrispondenza birazionale con una rigata di genere $p > 0$, la F contiene un fascio di genere p di curve razionali, immagini delle generatrici della rigata. Questo fascio ci permette di calcolare l'invariante relativo I della F, servendoci della estensione della formola di ZEUTHEN-SEGRE stabilita nella osservazione del n.° 6. Troviamo precisamente

$$I = \Delta - 4p,$$

dove $\Delta \geqq 0$ è il numero delle curve del fascio irrazionale che posseggono un punto doppio (e quindi si spezzano, trattandosi di curve razionali). Segue di qua che $I \geqq -4p$, ed il valore minimo, $-4p$, è raggiunto se F stessa è rigata, poichè per una rigata è $\Delta = 0$. D'altra parte si ha la relazione fondamentale (n.° 6)

$$I + \omega = 12 p_a + 9 = -12p + 9 \qquad (p_a = -p).$$

Segue subito di qua che

$$\omega \leqq -8(p-1) + 1,$$

il valore massimo essendo raggiunto quando ad es. ω venga calcolato sulla rigata stessa. Dunque per definizione:

*Una rigata di genere $p > 0$ (ed ogni superficie riferibile **birazionalmente** a quella) ha il genere lineare*

$$p^{(1)} = -8(p-1) + 1$$

Il ragionamento ora applicato alle rigate irrazionali non si estende al piano e alle superficie razionali. Per queste conviene proceder direttamente nel modo che segue. Si osservi anzitutto che il valore di ω calcolato per il piano, partendo da un sistema privo di punti base, ad es. dal sistema delle quartiche piane ($\pi = 3$, $n = 16$, $\pi' = 0$), è

$$\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1) = 10.$$

Rimane però il dubbio che calcolando ω per una superficie razionale, diversa dal piano, si possa trovare un valore superiore. Per toglier questo dubbio si consideri una superficie razionale F il cui ω sia > 1, e sopra questa si fissi un sistema lineare irriducibile $|C|$ di curve, privo di punti base, avente il genere $\pi \geqq 1$, e il grado n; sia $|C'|$ il sistema aggiunto, di cui indichiamo con π' il genere. Per l'arbitrio di cui si dispone nella scelta di $|C|$, si potrà sempre supporre che $|C'|$ sia irriducibile; ed allora si concluderà (in base al n.° 14) che $\pi > \pi'$. Ciò premesso, si formi il sistema $|C - C'|$. Il n.° 5 (formole (1)', (2)') ci insegna a calcolarne i caratteri. Vediamo così che la dimensione del detto sistema è

$$R \geqq \omega - 1;$$

mentre il genere (virtuale) vale

$$\Pi = 1.$$

Dunque $|C - C'|$ è un sistema di curve ellittiche di dimensione $\geqq \omega - 1$. E siccome sopra il piano, o sopra una superficie razionale, un sistema di curve ellittiche ha la dimensione $\leqq 9$, segue che per la nostra superficie è $\omega \leqq 10$; mentre per il piano è $\omega = 10$. Concludiamo:

Il genere lineare di una superficie razionale è $p^{(1)} = 10$, e coincide col valore che ha l'invariante relativo ω calcolato sul piano.

Riassumendo, possiamo dire ormai che per ogni superficie vien definito il genere lineare $p^{(1)}$. Precisamente, in relazione coi valori del genere lineare, le superficie possono classificarsi nel seguente modo:

A) Superficie per cui il genere lineare $p^{(1)} \geqq 1$; la famiglia di queste si suddivide in due:

a) se sulla superficie esiste un sistema con $n > 2\pi - 2$, la superficie è razionale ($p^{(1)} = 10$) o riferibile a una rigata ellittica ($p^{(1)} = 1$);

a') se sulla superficie non esiste un sistema siffatto, il processo di aggiunzione applicato a partire da un sistema generico non si estingue mai; ed anzi se $p^{(1)} > 1$, esistono i sistemi pluricanonici da un certo punto in poi ($P_i > 0$ per i abbastanza elevato); mentre nulla di definitivo si può dire per ora, sotto tal rapporto, se $p^{(1)} = 1$.

B) Superficie per cui il genere lineare $p^{(1)} < 1$; *queste superficie son tutte riferibili birazionalmente a rigate di genere* $p > 1$, *dove* $p^{(1)} = -8(p-1) + 1$.

Si ha di qua un criterio per decidere se una superficie sia rappresentabile sopra una rigata di genere $p > 1$; mentre un criterio analogo, basato esclusivamente sul valore di $p^{(1)}$, viene a mancare per le superficie rappresentabili sul piano o sulla rigata ellittica ($p = 0, 1$).

22. Volendo dare una condizione che valga ad esprimere la riferibilità di una superficie ad una rigata, anche nei casi $p = 0, 1$, si presenta assai naturale l'idea di modificare la definizione del genere lineare $p^{(1)}$ data innanzi, introducendo, accanto al carattere $p^{(1)}$ già definito, un nuovo invariante che diremo *genere lineare secondario* e designeremo con $\overline{p^{(1)}}$. Si chiamerà *genere lineare secondario* $\overline{p^{(1)}}$ *di una classe di superficie, il massimo valore che raggiunge l'invariante relativo* ω, *calcolato su quelle superficie della classe per le quali è soddisfatta la condizione* $n \leqq 2\pi - 2$ *tra l'ordine e il genere di una sezione piana.*

Dunque per definizione è sempre $\overline{p^{(1)}} \leqq p^{(1)}$. Anzi il genere lineare secondario non differisce dal principale $p^{(1)}$ per quelle superficie che hanno un numero finito di curve eccezionali (e quindi non sono trasformabili in rigate), perchè queste superficie posseggono solo sistemi lineari per cui $n \leqq 2\pi - 2$. Ed è pure $\overline{p^{(1)}} = p^{(1)}$ per le rigate di genere $p > 1$, potendosi supporre che le sezioni piane della rigata su cui si calcola l'$\omega = p^{(1)}$, siano curve speciali ($n \leqq 2\pi - 2$), coll'avvertenza che la rigata si ridurrebbe a un piano doppio quando fosse iperellittica. Invece per il piano e la rigata ellittica il carattere $p^{(1)} = 10, 1$ differisce necessariamente dal $\overline{p^{(1)}}$ che non può superare il valore zero. Che sia $\overline{p^{(1)}} \leqq 0$ segue da ciò, che in una superficie con infinite curve eccezionali avente il carattere ($\overline{p^{(1)}} =$) $\omega \geqq 1$, il sistema delle sezioni piane soddisfa coi suoi caratteri alla disuguaglianza $n > 2\pi - 2$ (n.° 14), e non alla $n \leqq 2\pi - 2$ che serve di base al calcolo del $\overline{p^{(1)}}$. Ora volendo dimostrare che tanto per il piano, quanto per la rigata ellittica è proprio $\overline{p^{(1)}} = 0$, basta far vedere che sull'una e sull'altra superficie si possono costruire sistemi lineari di curve per i quali $n \leqq 2\pi - 2$, ed $\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1) = 0$.

Per il piano si consideri infatti il sistema ∞^2 delle sestiche con 8 punti base doppi e due punti base semplici coniugati sulle sestiche (sistema del quale, volendo, si potrebbe anche prendere un multiplo); qui si ha $n = 2$, $\pi = 2$, $\pi' = 1$, e quindi $n = 2\pi - 2$, $\omega = 0$.

Per ottenere un esempio relativo alle rigate ellittiche, si parta anzitutto da una rigata priva di singolarità, come è la rigata del quinto ordine dello spazio a quattro dimensioni; si seghi questa mediante le varietà del sesto ordine che passano per 14 generatrici. Si otterrà un sistema lineare di curve, che (come facilmente si verifica) ha la dimensione 6, il grado 12 e il genere 6; il sistema, essendo privo di punti base, ha il carattere $\omega = 1$ (n.° 21).

Se ora si costringono le curve del sistema a passare doppiamente per un punto della rigata, si otterrà un nuovo sistema ∞^3 rappresentativo di una superficie di ordine $n = 8$, a sezioni del genere $\pi = 5$, dello spazio ordinario, per la quale è $n = 2\pi - 2$, $\omega = 0$.

In breve possiamo dire che per ogni superficie si ha

$$\overline{p^{(1)}} = p^{(1)},$$

tranne che per il piano e per le rigate ellittiche che hanno

$$\overline{p^{(1)}} = 0 \text{ e rispettivamente } p^{(1)} = 10,\ 1.$$

Concludiamo:

La condizione perchè una superficie possa porsi in corrispondenza birazionale con una rigata (razionale o no) viene espressa dall'esser il genere lineare secondario $\overline{p^{(1)}} \leqq 0$.

Nelle applicazioni concrete questo criterio non ha però un vero valore pratico, giacchè il calcolo del $\overline{p^{(1)}}$ esige in sostanza l'effettuazione di quelle stesse operazioni che occorrono per riconoscere direttamente se la superficie sia riferibile ad una rigata.

23. Il criterio suddetto permette tuttavia di ritrovare le condizioni già note di razionalità di una superficie. Si abbia una superficie di genere aritmetico e geometrico nullo, $p_a = p_g = 0$, e di genere lineare secondario $\overline{p^{(1)}}$. Applicando a questo caso il ragionamento del n.º 20, si trova un limite inferiore al bigenere della superficie, limite dato dalla formola

$$P_2 \geqq \overline{p^{(1)}}.$$

Se ora si suppone che la superficie abbia anche il bigenere nullo, $P_2 = 0$ (ipotesi che porta con sè l'altra $p_g = 0$), ne seguirà $\overline{p^{(1)}} \leqq 0$; la superficie sarà dunque riferibile ad una rigata, che d'altra parte dovrà esser razionale perchè si ha $p_a = 0$ (donde si trae $\overline{p^{(1)}} = 0$). E siccome inversamente una superficie razionale ha certo $p_a = P_2 = 0$, si conclude (*):

Le condizioni di razionalità di una superficie sono espresse dall'annullarsi del genere aritmetico e del bigenere ($p_a = P_2 = 0$).

24. Ora si affaccia spontanea la domanda: Quando il genere aritmetico p_a di una superficie è inferiore a 0, si riuscirà ad esprimere le condizioni

(*) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*. Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), (serie III), tom. X (1896).

perchè la superficie sia riferibile ad una rigata (di genere $-p_a$), annullando un certo numero di plurigeneri? Per dare una risposta occorre esaminare se le superficie non riferibili a rigate, aventi il genere lineare (principale = secondario) $p^{(1)} > 0$, debbano possedere sempre delle curve pluricanoniche di un certo indice i, sia pur elevato. Ora dalla formola

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1,$$

che sussiste quando $p^{(1)} > 1$, abbiamo già concluso che, in questa ipotesi, esistono curve i-canoniche per i assai alto. Ma se $p^{(1)} = 1$, l'esistenza di curve pluricanoniche di indice qualsiasi resta dubbia per ora.

Non sappiamo dunque rispondere oggi all'importante questione sopra enunciata. Soltanto alcuni esempi di superficie contenenti un fascio ellittico di curve ellittiche (superficie che ci proponiamo di studiare) mostrano che è impossibile di esprimere le condizioni perchè una superficie di genere aritmetico $-p$ $(p > 0)$ sia riferibile ad una rigata, coll'annullare un certo numero di plurigeneri dipendente dal valore di p.

Firenze, autunno 1900.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo VI della Serie III, pag. 165 e seguenti.

Milano, 1901. — Tip. BERNARDONI
di C. Rebeschini e C.