
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

**Sopra le superficie e le varietà a più
dimensioni le cui geodetiche sono
rappresentabili con equazioni lineari**

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **VII** (1903), pp. 52-58.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federico Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 – Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

L'Accademico Onorario Prof. FEDERIGO ENRIQUES legge una sua Nota : **Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari.**

In questa Nota mi propongo anzitutto di porgere una semplice dimostrazione sintetica di un classico teorema del Beltrami (*): le superficie rappresentabili sul piano, per modo che alle geodetiche corrispondano rette, sono a curvatura costante.

Questo teorema fu esteso alle varietà a più dimensioni dallo Schläfli (**), e quindi il sig. F. Schur (***) pervenne a stabilire un risultato molto più espressivo, che porge, in forma semplicissima, le condizioni perchè la metrica di una varietà sia una metrica proiettiva, e quindi la varietà stessa abbia curvatura costante.

Il risultato che il sig. Schur ha conseguito con calcoli laboriosi, viene qui raggiunto con un semplice ragionamento geometrico.

Quanto alla dimostrazione del teorema di Beltrami per le superficie, debbo avvertire essere fondata sull'ipotesi che le funzioni di cui si discorre sieno analitiche e dotate di singolarità discrete (che non ne im-

(*) Annali di Matematica, Serie 1^a, t. VII.

(**) Annali di Matematica, Serie 2^a, t. V.

(***) Mathematische Annalen, Bd. XXVII.

pediscano la prosecuzione in tutto il piano), le quali, del resto non importa di precisare.

Gli sviluppi sulle varietà non hanno bisogno di questa ipotesi ove si conceda stabilito, nel senso più esteso, il teorema di Beltrami, a cui si appoggiano.

1. Il problema di determinare le superficie rappresentabili geodeticamente sul piano, si scompone naturalmente nei due problemi seguenti:

a) assegnare tre funzioni monodrome E, F, G di due variabili u, v , per modo che il piano (uv) in cui la distanza elementare sia misurata da

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

abbia come geodetiche le rette

$$au + bv + c = 0;$$

b) determinare tutte le superficie applicabili sul piano suddetto o sopra una parte di esso, contata una o più volte.

Noi abbiamo da occuparci soltanto del primo problema.

Prendiamo dunque come data una superficie (astratta) F la quale sia rappresentata biunivocamente sul piano (uv) riguardato nella sua integrità, per modo che alle geodetiche di F corrispondano le rette di α . Allora alle linee di lunghezza nulla di F , che sono particolari geodetiche, corrisponderanno in α ∞^1 rette formanti un sistema tale che per ogni punto ne passeranno due; è il sistema rappresentato dall'equazione differenziale

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0.$$

Ora le suddette ∞^1 rette (stante l'analiticità del sistema) invilupperanno una conica, poichè due di esse, tenute fisse, vengono segate da una terza, variabile, secondo punteggiate che si trovano in una corrispondenza analitica *biunivoca*, e perciò sono proiettive.

Indicata con C la nominata conica inviluppo, si considerino le omografie piane che la trasformano in

sè stessa. Esse sono in generale ∞^3 , e divengono ∞^4 nel caso particolare in cui la C degeneri in una coppia di fasci di raggi.

Le suddette omografie rappresentano trasformazioni della superficie F , le quali lasciano invariato il sistema delle linee di lunghezza nulla $ds^2=0$, e mutano le geodetiche in geodetiche.

Per il fatto di lasciare invariato il sistema $ds^2=0$, le trasformazioni stesse conservano gli angoli; esse mutano dunque le traiettorie ortogonali di un fascio di geodetiche uscenti da un punto, in traiettorie ortogonali di un fascio analogo.

Ma, per una nota proprietà caratteristica delle geodetiche (che può dimostrarsi immediatamente in base alla loro proprietà di minimo) le traiettorie sopra nominate sono *cerchi geodetici*, nel senso del Bianchi. Si vede dunque che le trasformazioni della nostra superficie, mutano due cerchi geodetici uscenti da un punto qualsiasi in cerchi uguali, e perciò cambiano il quadrato dell'elemento lineare ds^2 in kds^2 , con k costante.

Quando la conica C del piano α sia irriducibile si prova subito che deve essere $k=1$. Infatti il gruppo ∞^3 delle omografie di C si lascia generare per moltiplicazione dalle ∞^2 omologie armoniche aventi come asse una retta qualsiasi e come centro il suo polo; ed a ciascuna di tali omologie corrisponde una trasformazione di F che lascia fermi tutti i punti di una geodetica, e perciò ogni arco di essa; per la quale trasformazione riesce quindi appunto $k=1$.

Se la C degenera in una coppia di punti, le omologie armoniche del piano che lasciano invariata la coppia generano un gruppo ∞^3 di omografie e le trasformazioni corrispondenti di F lasciano parimente invariato il ds^2 .

Così si conclude che la F ammette in ogni caso ∞^3 trasformazioni per applicabilità in sè stessa, e perciò ha curvatura costante.

È ciò che viene enunciato dal teorema di Beltrami:

Le superficie che si possono rappresentare sul piano, per modo che alle loro geodetiche corrispondano rette, sono superficie a curvatura costante.

2. Il risultato si estende alle varietà a più dimensioni. Ma in questo caso sussiste un teorema più espressivo dato dal sig. Schur.

Riferiamoci alle varietà V a 3 dimensioni (x_1, x_2, x_3). L'estensione al caso di varietà a più dimensioni non presenta difficoltà, esigendo solo poche modificazioni del ragionamento che andiamo ad esporre.

Le geodetiche uscenti da un punto di V , secondo gli elementi lineari di una *giacitura*

$$\lambda dx_i + \mu dx'_i,$$

costituiscono (al variare di $\lambda:\mu$) una superficie, che da Riemann prende il nome di superficie geodetica.

Quando la varietà V si può rappresentare sopra lo spazio ordinario, per modo che alle sue geodetiche corrispondano le rette, ogni superficie geodetica di V contiene ∞^2 linee geodetiche.

Supponiamo soltanto che nella varietà V si abbiano due punti A e B , (assai vicini) tali che ogni superficie geodetica passante per uno di essi contenga ∞^2 linee geodetiche.

Ammettendo che nella varietà V , (la quale può essere qui limitata) per due punti passi una linea geodetica, abbiamo dunque che ogni superficie geodetica per A o per B , contiene la linea geodetica di V che ne congiunge due punti arbitrarii.

Allora si vede che l'intersezione di una superficie geodetica F per A con una per B è una linea geodetica di V .

Pertanto se si rappresenta la superficie F sulla *stella* degli elementi lineari pel punto B , facendo corrispondere ad ogni punto di F l'elemento lineare della linea geodetica che lo *proietta* da B , avremo che alle geodetiche di F corrisponderanno giaciture nella stella (precisamente le giaciture delle superficie geodetiche *proiettanti* da B le linee suddette).

Ma la stella degli elementi lineari per B si può riferire *proiettivamente* ad un piano, in guisa che agli elementi della stella corrispondano i punti del piano, e alle giaciture le rette. Si conclude dunque che la superficie F si può rappresentare sul piano, in modo che alle sue geodetiche corrispondano rette di questo.

Dunque la F è una superficie a curvatura costante.

3. Al variare di una superficie geodetica di V per il punto A , la sua curvatura resterà fissa o varierà in modo continuo. Si dimostrerà quindi che essa rimane fissa, confrontando due superficie geodetiche F , F' , per A , nell'ipotesi che esse abbiano una curvatura ambedue negativa o ambedue positiva.

Rappresentiamo le F , F' sopra due piani α , α' dello spazio ordinario, uscenti da un punto A' e secantisi secondo una retta l' , che prendiamo come immagine della linea geodetica l comune alle due superficie.

La rappresentazione sia posta in modo che alle linee geodetiche di F , F' corrispondano rispettivamente le rette di α , α' , e che le coniche assolute dei due piani (involute dalle immagini delle linee di lunghezza nulla) seghino la retta l' nei medesimi due punti X , Y , reali o immaginari coniugati.

Allora possiamo valutare l'arco di l compreso fra due punti M , N , in funzione del birapporto che i punti $M'N'$, ad essi corrispondenti su l' , formano con X , Y .

Se si designa con $-\frac{1}{4k^2}$ la curvatura della superficie F , avremo

$$\overline{MN} = k \log (M'N'XY),$$

ove k è reale o puramente immaginario.

Ma una formula analoga ci permette di esprimere lo stesso arco $\overline{MN}$, in funzione della curvatura di F' ; si deduce dunque che le curvature di F , F' sono uguali. E perciò, secondo si è detto, risultano uguali le curvature di due superficie geodetiche qualsiasi di V , uscenti dal punto A , o analogamente da B .

4. Ciò posto possiamo porre nella varietà V una trasformazione per applicabilità, costruendo semplicemente una *simmetria* rispetto ad una qualsiasi linea geodetica l uscente da A (o da B), nel modo seguente: Pongasi anzitutto nella stella degli elementi lineari uscenti da A , una simmetria rispetto all'elemento lineare di l ; e facciasi così corrispondere ad ogni linea geodetica p per A , quella geodetica, p' , distinta da p , che forma con l il medesimo angolo e giace nella superficie geodetica pl .

Quindi ad ogni punto P di p , facciasi corrispondere il punto P' di p' , che determina su quest'ultima linea un arco $\overline{AP'} = \overline{AP}$, e giace da parte opposta di P rispetto ad l , sopra la nominata superficie pl .

La corrispondenza così ottenuta è effettivamente una trasformazione per applicabilità di V . Per dimostrarlo bisogna paragonare l'arco geodetico compreso fra due punti P, Q , a quello compreso fra i corrispondenti P', Q' , e far vedere che essi sono eguali.

A tal fine confrontiamo i due triangoli geodetici $APQ, AP'Q'$. Essi hanno uguali per costruzione due coppie di lati e gli angoli compresi:

$$\overline{AP} = \overline{AP'} \quad \overline{AQ} = \overline{AQ'} \quad \hat{PAQ} \pm \hat{P'AQ'};$$

inoltre essi appartengono a due superficie geodetiche per A , aventi la stessa curvatura costante.

Si conclude dunque che

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'} \quad \text{c. d. d.}$$

5. Le simmetrie rispetto alle linee geodetiche uscenti da A , danno per moltiplicazione ∞^3 *rotazioni* della varietà V attorno ad A , che sono altrettante trasformazioni per applicabilità di V , in ciascuna delle quali restano fermi tutti i punti di una linea geodetica uscente da A .

Ora la V ammetterà analogamente ∞^3 rotazioni attorno a B . E combinando per moltiplicazione le rotazioni di V attorno ai due punti A e B , si riuscirà a portare

uno di questi due punti in un punto arbitrario C di V , e a costruire quindi un *gruppo trasformato* di rotazioni della V attorno a C .

Segue di qui che la varietà V è a curvatura costante. E si ha pure immediatamente che ogni superficie geodetica di essa contiene ∞^2 linee geodetiche, poichè combinando le rotazioni di due angoli retti attorno ad una sua linea geodetica, colla simmetria rispetto ad un punto di essa, si riesce a costruire una *simmetria rispetto alla superficie*. Infatti una tale simmetria deve trasformare in sè stessa ogni linea geodetica di V congiungente due punti della superficie suddetta, e quindi deve lasciar fermi i punti di questa linea; onde questi dovranno appartenere alla superficie.

6. In definitiva enunceremo il teorema di Schur :
Se in una varietà a tre o più dimensioni, le superficie geodetiche uscenti da due punti assai vicini contengono ciascuna ∞^2 linee geodetiche, ogni altra superficie geodetica contiene del pari ∞^2 linee geodetiche, e la varietà è a curvatura costante.

