Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO AND AMALDI, U.

Elementi di Geometria [ad uso delle scuole secondarie superiori]

Zanichelli, Bologna, . (V edizione.)



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

FEDERIGO ENRIQUES E UGO AMALDI

ELEMENTI DI GEOMETRIA

AD USO

DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI

QUINTA EDIZIONE


R. Università di Pisa
04090
Istituto di Matematica

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
FIRENZE - ROMA - MILANO - PISA - R. Bemporad & F.
TORINO - S. Lattes & C.
NAPOLI - Fratelli Treves — PALERMO - A. Reber

PROPRIETÀ LETTERARIA

BOLOGNA - TIP. CACCIARI - XI - 1911.

PREFAZIONE

ALLA QUARTA EDIZIONE

Questa quarta edizione riproduce fedelmente il nostro trattato nella forma fissata dalla edizione precedente. Ci siamo limitati soltanto a chiarire alcuni punti, la cui redazione era sembrata oscura a qualche amico collega.

Dobbiamo perciò ringraziare in modo speciale dei suoi ottimi consigli il Prof. Concina.

In pari tempo rinnoviamo cordiali ringraziamenti a tutti quei colleghi, che ci furono larghi di osservazioni e di suggerimenti per le precedenti edizioni e in particolare ai Prof. B. Levi, A. Bottari, P. Cattaneo, G. Cerni, A. Conti, F. Ferrari, F. Podetti, U. Scarpis, G. Scorza.

Ed un pensiero di memore riconoscenza e di profondo rimpianto vada alla memoria di G. Vailati, così crudelmente e precocemente tolto agli studi e alla vita.

F. Enriques - U. Amaldi.

Avvertenza alla quinta edizione. — In base ad una accurata revisione, arrecammo al nostro trattato numerosi ritocchi, diretti a chiarirne ulteriormente la redazione.

F. E. - U. A.

INTRODUZIONE

Tra le proprietà fisiche dei corpi, che cadono sotto i nostri sensi, vi sono le *proprietà geometriche* o di *estensione*, per le quali, fatta astrazione dalla porosità, dalla durezza, dalle relazioni elettriche, magnetiche, chimiche, ecc., i corpi ci appaiono *di varia grandezza e forma* (*cubici, o sferici, o cilindrici,* ecc.).

La *Geometria* è la scienza che studia le proprietà di estensione.

Essa comporta, nel suo sviluppo, due stadii.

In un primo stadio si ha la *Geometria empirica* o d'*osservazione*, la quale desume le proprietà di estensione dei corpi dalla osservanzione sensibile di essi, o anche da esperienze appropriate mercè l'uso di strumenti di misura ecc.

In un secondo stadio, più progredito, la *Geometria* diventa scienza *razionale*, riuscendo a dedurre col ragionamento le più complicate proprietà di estensione, dalle più semplici che l'osservazione ha già fatto scoprire.

Allo scopo di raggiungere esattezza e rigore, la Geometria razionale sostituisce alla considerazione dei corpi fisici, p. e. dei corpi cubici, sferici, cilindrici ecc. quella di corpi ideali come il *cubo,* la *sfera* il *cilindro* ecc. immaginati dalla nostra mente, per i quali valgono

in modo perfetto ed assoluto quelle proprietà che l'osservazione ci ha mostrato valide pei corpi fisici in via approssimata.

A siffatti corpi ideali si dà il nome di *figure*.

Le figure rappresentano dunque i corpi fisici, e le proprietà geometriche di esse trovano riscontro in quelle dei corpi, tanto più adeguate quanto più i corpi stessi si avvicinano al *tipo* rappresentato dalla figura.

Le prime proprietà delle figure più semplici sono *evidenti,* cioè vengono *suggerite* in modo immediato dall'*osservazione* dei corpi reali che hanno fatto nascere nella nostra mente il concetto di quelle figure.

Il *ragionamento logico* permette di dedurre (*dimostrare*) proprietà delle figure meno evidenti e talvolta addirittura imprevedibili, le quali costituiscono vere scoperte geometriche.

La Geometria razionale comincia a dichiarare quali sono i **concetti fondamentali,** cioè le *figure* e le *relazioni* più semplici, che essa assume dalla osservazione (ed es. il **punto**, la **retta,** il **piano...,** l' **uguaglianza**.....), spiegando il significato fisico di questi concetti col confronto dei corpi e delle relazioni di essi, in cui i concetti medesimi trovano una rappresentazione. Dichiara inoltre, o enuncia, le proposizioni evidenti **(postulati)**, che esprimono le proprietà o i rapporti dei sudetti concetti, ossia rappresentano le proprietà più elementari dei corpi rilevate dall' osservazione. Così p. es. in base al fatto osservato, con qualche inevitabile imprecisione, nel campo accessibile alle nostre esperienze, che « stendendo due fili fra i medesimi capi essi si sovrappongono sensibilmente l'uno

all'altro » si enuncia come una verità generale e rigorosa il postulato che « la retta è determinata da due quali si vogliano dei suoi punti » ; venendo soppresse per l'ente ideale « retta » quelle limitazioni ed imperfezioni che si acoompagnavano all' osservazione fatta sul filo.

Combinando insieme le figure fondamentali (ad es. riunendole, o considerando la loro parte comune) si dà origine a figure via via più complesse, le quali si *definiscono per mezzo delle prime* spiegando logicamente come s'intende fatta la combinazione. Similmente si *definiscono* le *relazioni* più complesse di queste figure *per mezzo delle relazioni fondamentali* più semplici.

Così p. e. si definisce il triangolo per mezzo dei punti e dei segmenti che lo formano; si definisce l'uguaglianza fra due triangoli per mezzo di quella tra i segmenti e gli angoli di essi, ecc.

Nota. La definizione logica non implica sempre l'effettiva possibilità di combinare gli elementi fondamentali nel modo richiesto dalla definizione stessa. E perciò nei casi dubbi questa possibilità, ossia la *esistenza* della figura definita, deve essere riconosciuta coll'osservazione (cioè enunciando un postulato) o col ragionamento.

Possiamo citare due esempi, nel primo dei quali si vede come il tipo stesso della definizione implichi l'esistenza della figura definita, nel secondo invece occorre un particolare esame della questione.

Quando si riuniscono due figure date qualsiasi, ad es. *due cerchi* nel *piano*, si ottiene sempre una nuova

figura che si lascia così definire come l'insieme dei due cerchi. All'opposto invece la figura definita come « parte comune dei due cerchi dati » non esiste sempre, giacchè possono aversi due cerchi esterni l'uno all'altro. Occorrerà dunque accertarsi dell'esistenza di una tale figura, in ogni singolo caso, ciò che riesce facile se si suppone p. es. che le circonferenze dei due cerchi sieno secanti (nel qual caso la figura sudcetta è un *fuso circolare*).

Le proprietà più complesse delle figure fondamentali, o di quelle definite per mezzo di esse, si deducono successivamente, come abbiam detto, applicando il ragionamento logico, a partire dai postulati.

Così le suddette proprietà vengono *dimostrate,* facendosi vedere che la loro verità è una conseguenza necessaria della verità dei postulati, già riconosciuta in base all'osservazione.

Le proprietà geometriche che vengono dimostrate in tal modo si dicono *teoremi* [**Teor.**].

Per dimostrare un teorema basta mostrare che esso è una conseguenza logica di un teorema già stabilito innanzi; così il teorema viene ancora riattaccato, sebbene indirettamente, ai postulati.

Le conseguenze più immediate di un postulato o di un teorema, si dicono *corollari* di esso [**Cor.**]; e spesso si tralascia di mettere in luce la dipendenza dei corollari dalla precedente proposizione, tale dipendenza riuscendo chiara a chi vi rifletta un momento.

Si dicono anche corollari di una definizione le proposizioni che, in base a qualche precedente postulato

o teorema, si possono enunciare appena è stabilita la definizione suddetta [1].

Alla dimostrazione di un teorema è utile (e diventa anzi necessario per le applicazioni), accompagnare la rappresentazione della figura cui il teorema stesso si riferisce, mediante un appropriato disegno o modello sul quale la proprietà stabilita logicamente si renda visibile o verificabile coll'osservazione. A questo disegno o modello in quanto si pensa mentalmente sostituito colla figura ideale, si dà pure di consueto il nome di *figura*.

Spesso l'osservazione di una figura ci guida anche a supporre delle proprietà non evidenti di essa, inducendoci a porre delle domande (*problemi*; **Probl.**) e segnandoci la via per ottenere la risposta (*risoluzione*).

Queste poche norme di *logica* potranno essere più chiaramente intese ed apprezzate da chi, seguendo la via che storicamente ha dato origine alla scienza del ragionamento, torni a riflettervi dopo avere compiuto un primo studio della Geometria elementare, osservandone la struttura e l'ordine che abbiamo cercato di porre in luce in questo trattato.

---

[1] Talvolta una proposizione, che non ha importanza di per sè stessa, ma viene premessa allo scopo di dimostrare un successivo teorema, si dice *lemma*.

I.

GLI ENTI FONDAMENTALI: PUNTO, RETTA, PIANO

Punto, retta, piano.

1. Un corpo piccolissimo (p. es. la traccia di un lapis su di un foglio o un granello di sabbia) ci fornisce l'immagine di un **punto.** I punti si designano generalmente colle lettere maiuscole dell'alfabeto latino A, B, C...

2. Ogni insieme di punti dicesi *figura.*

L'insieme di tutti i possibili punti dicesi *spazio.*

3. Sono figure fondamendali la **retta** e il **piano.**

Le rette (e più tardi anche parti di esse) si designeranno colle lettere minuscole dell'alfabeto latino *a, b, c...*; i piani colle lettere greche α, β, γ...

4. Il foglio su cui si disegna (in quanto si pensi indefinitamente esteso) rappresenta un piano. Facendo scorrere la punta di un lapis lungo l'orlo di una riga, si possono *disegnare* (rappresentare) su di esso *delle rette,* le quali si pensano indefinitamente proseguite.

5. Le più ovvie e ben note osservazioni sperimentali ci suggeriscono alcune proposizione intuitivamente evidenti che enunciamo come *postulati.*

6. Postulato. — *Esistono quanti si vogliano punti, quante si vogliano rette, quanti si vogliano piani.*

Due punti appartengono ad una retta e ad una sola (loro congiungente).

Tre punti non in linea retta appartengono ad un piano e ad uno solo.

7. La retta a congiungente due punti A, B si designerà anche con AB.

Il piano α dei tre punti A, B, C (non in linea retta) si designerà pure con ABC.

8. **Postulato.** — *Nel piano vi sono quanti si vogliano punti e quante si vogliano rette.*

La retta che congiunge due punti arbitrarii di un piano appartiene ad esso.

9. **Cor.** — *Una retta e un punto non appartenente ad essa, giacciono in un piano e in uno solo.*

Se, infatti, A è il punto e a è la retta, si scelgano su a due punti distinti B, C; i tre punti non in linea retta A, B, C appartengono ad un piano e ad uno solo (n. 6), il quale contiene, insieme con A, la retta a (n. prec.) e quindi resta determinato ugualmente se invece di B, C si scelgono su a altri due punti.

Codesto piano si designa con Aa o aA.

10. **Cor.** — *Due rette aventi comune un punto (cioè segantisi) giacciono in un piano e in uno solo.*

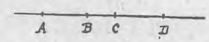
Infatti, se le due rette sono a, b ed è C il loro punto comune, si prenda su a un punto A; il piano Ab, *determinato* dal punto A e dalla retta b, contiene le due rette a, b.

Il piano contenente le due rette a, b, aventi un punto comune, si designa con ab.

Proprietà lineari della retta.

11. **Postulato.** — *I punti della retta sono ordinati secondo due* **ordini naturali o versi**, *opposti l'uno all'altro. In ciascun verso della retta non vi è nè primo nè ultimo punto, e fra due punti di essa vi sono infiniti punti intermedi.*

Per esempio, nell'annessa figura si vede che su a i punti A, B, C, D si succedono in un verso, D, C, B, A nell'opposto.

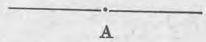


12. **Osservazione.** — La proprietà enunciata nel post. del n. prec. viene attribuita alla retta in quanto essa è pensata come **linea aperta illimitata.**

13. **Def.** — *Semiretta o raggio* è la parte di una retta che contiene un punto di essa *(origine* o *estremo)* e i suoi successivi in un dato verso.

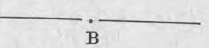
La semiretta che ha per origine A e contiene il punto B si designa con AB.

14. Un punto di una retta la divide in due semirette aventi comune l'estremo e non altri punti. Ciascuna di esse dicesi il *prolungamento* dell'altra



15. **Def.** — Se A, B sono due punti della retta a, dicesi *segmento* AB (o BA) di essa, la parte comune alle due semirette AB e BA.

I punti A e B diconsi *estremi* del segmento; ogni altro punto di esso, diverso dagli estremi, dicesi *interno.*



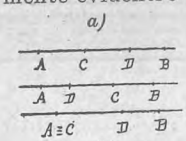
I prolungamenti delle semirette BA e AB diconsi anche *prolungamenti* del segmento AB.

Spesso indicheremo un segmento con una sola lettera, come a, b, c,...

16. I punti del segmento AB possono pensarsi ordinati in due modi opposti, secondo i due versi della retta. Si ha allora da distinguere il *segmento ordinato* AB dal segmento ordinato BA.

17. Dati sopra retta due segmenti AB, CD, il postulato del

n. 11 permette di decidere se essi abbiano o no una parte comune. Perciò basta guardare come si trovino gli estremi dell'uno rispetto all'altro. I criteri che così si hanno sono intuitivamente evidenti e si trovano enunciati nelle seguenti proposizioni:

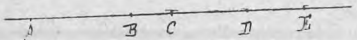


a) Se il segmento AB contiene i punti C, D, ogni punto interno a CD è interno ad AB.

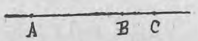
b) Se i punti C, D sono l'uno interno e l'altro esterno al segmento AB, i due segmenti AB, CD contengono un segmento comune.

c) Se i punti C, D della retta AB sono esterni al segmento AB, o i due segmenti AB, CD non hanno punti comuni, oppure il segmento CD contiene AB.

18. Più segmenti di una retta, AB, BC, CD, DE,... si dicono *consecutivi* se ciascuno di essi ha comune col seguente un estremo e nessun altro punto all'infuori di questo.



Più in generale, nel seguito, diremo *consecutivi* due segmenti (anche non in linea retta) aventi comune un estremo, e nessun altro punto all'infuori di esso.



19. Def. — Dati, sopra una retta, due segmenti consecutivi AB,BC, il segmento BC, determinato dal primo e dall'ultimo dei punti, estremi dei nominati segmenti, dicesi *somma* dei segmenti medesimi e si designa con

$$AB + BC.$$

Analogamente si può considerare, il segmento *somma di più segmenti di una retta l'uno all'altro consecutivi.* Ad es., riferendoci alla figura annessa al n. prec., vediamo che il segmento AE è somma dei segmenti consecutivi AB, BC, CD, DE.

Confronto di segmenti.

20. Osservazione. — Due **segmenti,** che possono anche pensarsi ordinati, sono **uguali (congruenti)** o **disuguali (non congruenti).**

Per designare che due segmenti AB, CD sono uguali scriveremo

$$AB = CD \text{ o } BA = DC \text{ ecc.}$$

o indifferentemente

$$CD = AB, \text{ ecc.}$$

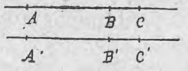
Nella pratica si verifica se due segmenti AB, CD sono uguali nel modo seguente. Si costruisca una sottilissima asta rigida, che si possa sovrapporre ad uno dei due segmenti, p. es. ad AB, e si muova quindi, portando un suo estremo in C e adagiando l'altro estremo sopra la retta CD, dalla parte di D; se i due segmenti sono uguali, compiuta l'operazione suddetta, il secondo estremo cadrà in D; se all'opposto sono disuguali, esso cadrà internamente od esternamente al segmento CD.

Per confrontare due segmenti nel modo precedentemente indicato, serve una *riga graduata* o una striscia di carta su cui possano farsi dei segni.

21. Sussistono le seguenti proposizioni intuitivamente evidenti:

Postulato. — *Due segmenti uguali ad un terzo sono uguali fra di loro.*

22. Postulato. — *Segmenti che siano somme di segmenti consecutivi ordinatamente uguali sono uguali.*



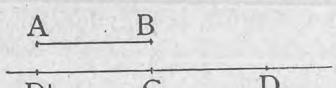
P. es. se è

$$AB = A'B',\ BC = B'C',$$

allora

$$AB + BC = A'B' + B'C'.$$

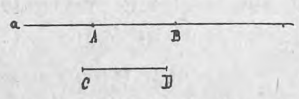
23. Postulato. — *Su di una data semiretta esiste un segmento determinato, che ha un estremo nell'origine della semiretta ed è uguale ad un dato segmento.*



24. Cor. — *Sopra una retta vi sono due segmenti, uguali ad un dato segmento, ed aventi come estremo un punto assegnato.*

Tali segmenti giacciono da parti opposte rispetto al punto.

25. Alludendo al modo, in cui nella pratica si eseguiscono le costruzioni, faremo uso talvolta di locuzioni come la seguente: « portare un segmento CD sopra una retta *a*, sovrapponendo l'estremo C ad un punto A di *a*, e adagiandolo da una parte di A ». La quale locuzione significa che s'intende di determinare (costruire), nella parte voluta della retta, quel punto B per cui riesca



$$AB = CD.$$

26. Postulato. — *Il segmento* AB *è uguale al segmento* BA (*invertibilità* del segmento).

Ciò significa che un segmento AB si può con un movimento (ribaltamento) riportare su sé stesso in modo che i due estremi si scambino fra loro, andando A in B e B in A.

27. Possiamo ora apprendere a *sommare* più segmenti quali si vogliano a, b, c,..., h.

Dicesi *somma*:

$$a + b + c + ... + h$$

di essi qualsiasi segmento che sia somma di altrettanti segmenti di una stessa retta, consecutivi, ordinatamente uguali ai dati.

Sommare più segmenti vuol dire costruirne la somma.

Nota. — Per quanto si è detto or ora, la somma di più segmenti si può costruire in infiniti modi, in quanto possiamo scegliere a nostro arbitrio la semiretta su cui prendere, a partire dall'origine, i segmenti consecutivi, ordinatamente uguali ai dati. Ma dal n. 22 risulta che tutti i segmenti, ottenuti come somma dei segmenti dati, sono uguali fra loro.

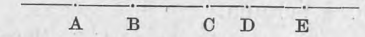
Valgono per la somma le seguenti proprietà, che sono conseguenze dei postulati dianzi enunciati e che, del resto, si possono verificare sperimentalmente.

28. Teor. — *Somme di segmenti ordinatamente uguali sono uguali*

Ciò risulta dalla def. del n. prec. e dal post. del n. 22.

29. Teor. — *La somma di più segmenti non muta se a due o più addendi consecutivi si sostituisce la loro somma.*

Dati più segmenti a, b, c, d, e presi su di una retta i segmenti



$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DE = d$$

avremo (n. 27)

$$AE = a + b + c + d.$$

Ma è anche

$$AE = AB + BD + DE$$

e

$$BD = b + c;$$

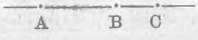
talchè risulta

$$AE = a + (b + c) + d$$

e quindi

$$a + b + c + d = a + (b + c) + d.$$

30. Teor. — *La somma di più segmenti gode della proprietà commutativa,* cioè il segmento somma non muta se si muta l'ordine degli addendi.



Per dimostrare questo teorema nel caso di due segmenti a, b, prendiamo su di una retta due segmenti consecutivi $AB = a$, $BC = b$, talchè sia

$$AC = a + b.$$

Allora è

$$CA = CB + BA$$

e d'altra parte, per il n. 26,

$$CB = BC = b,\ BA = AB = a,\ CA = AC;$$

cosicchè avremo

$$a + b = b + a.$$

Ciò premesso risulta senz'altro che in una somma di più segmenti si possono scambiare di posto due addendi consecutivi h e k, perchè anzitutto ad essi si può sostituire la loro somma (n. 23), e in secondo luogo, per quanto s'è visto or ora, codesta somma non muta se si scambiano di posto h e k.

Infine è chiaro che con successivi scambi di posto fra addendi consecutivi si può eseguire qualsiasi mutamento d'ordine negli addendi di una somma.

31. Teor. — *La somma di più segmenti gode della proprietà associativa,* cioè ad alcuni addendi si può sostituire la loro somma.

Se codesti addendi sono consecutivi, il teor. si è già dimostrato al n. 29.

In caso contrario, per convincersi della verità del teor., basterà con opportuni mutamenti d'ordine, portare gli addendi considerati ad essere consecutivi.

32. Def. — Se un segmento è uguale alla somma di due altri, esso si dice *maggiore* di ciascuno di questi, e ognuno di questi ultimi si dice *minore* del primo.

Se il segmento AB è maggiore di CD e quindi CD è minore di AB, si scrive:

$$AB > CD,\ CD < AB.$$

33. Discendono da codesta definizione e dai post. prec. i seguenti teoremi:

Teor. — a) *Se un segmento è maggiore di un altro e questo è maggiore od uguale di un terzo, il primo segmento è maggiore dell'ultimo* cioè

se $a > b,\ b > c$

allora $a > c$ (n. 32, 21).

b) *Se due segmenti non sono disuguali, due segmenti ad essi rispettivamente uguali sono disuguali nello stesso senso* cioè

se $a > b$ e $a' = a,\ b' = b,$

si ha $a' > b'$ (nn. 32, 21).

c) *Dati due segmenti, o essi sono uguali o uno dei due è maggiore dell'altro* (nn. 23, 32).

d) *Se con due segmenti disuguali si sommano segmenti uguali, si ottengono somme disuguali; e di queste è maggiore quella di cui fa parte il segmento maggiore* (nn. 22, 32).

34. Def. — La somma di m segmenti uguali ad un dato segmento dicesi *multiplo* secondo m del segmento dato.

Se un segmento è multiplo secondo n di un altro, questo dicesi *summultiplo* secondo n di quello o *parte aliquota ennesima* di esso.

Se a o AB è un segmento, designeremo il suo multiplo secondo m col simbolo ma o mAB e il summultiplo secondo n col simbolo $\frac{a}{n}$ o $\frac{AB}{n}$ che leggesi « un ennesimo di a o di AB ».

35. Cor. — *I multipli o i summultipli di segmenti uguali secondo uno stesso numero* n *sono uguali.*

In particolare le metà di segmenti uguali sono uguali.

36. Dalle definizioni precedenti discende ancora che, se m, n sono numeri interi:

1) il multiplo secondo m di na è multiplo di a secondo mn;

2) il summultiplo secondo m del summultiplo secondo n di un segmento a è summultiplo di a secondo mn.

37. È intuitivamente evidente il

Postulato (di ARCHIMEDE). — *Dati due segmenti si può trovare un numero* m *così grande che l'*m^mo^ *multiplo del minore sia maggiore dell'altro.*

38. Def. — Se di due segmenti a, b il primo a è maggiore del secondo, il segmento c tale che sia (n. 32) $b + c = a$ dicesi *differenza* di a e b e si scrive

$$c = a - b;$$

sarà quindi anche

$$b = a - c.$$

Sottrarre un segmento minore da un segmento maggiore vuol dire costruirne la differenza.

39. Teor. — *Differenze di segmenti uguali sono uguali* (nn. 33 *b*, *d*)

Se da segmenti disuguali si sottraggono segmenti uguali, dal segmento maggiore si ottiene la differenza maggiore (nn. 33 *b*, *d*)

Proprietà superficiali del piano.

40. Postulato. — *Una retta* a *di un piano lo divide in due parti* (*dette anche bande, o regioni o semipiani*) *contenenti ciascuna quanti si vogliano punti, per modo che:*

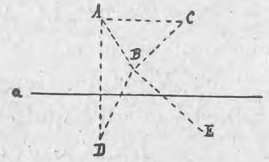
un punto del piano, fuori della retta, appartiene all'una o all'altra parte;

due punti di una medesima parte fuori di a, *sono gli estremi di un segmento che non sega la retta;*

due punti di parte diversa (*opposta*) *sono gli estremi di un segmento che sega la retta* a.

I punti della retta si riguarderanno come comuni alle due bande opposte, e si dirà anche che la retta *limita* ciascuna delle due bande e che le *separa.*

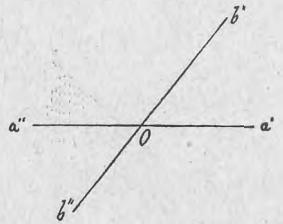
P. es., nell'annessa figura vediamo il foglio diviso dalla retta a in due parti, ad una delle quali appartengono i punti A,B,C, all'altra i punti D, E. I segmenti AB, BC, AC, DE non segano a; invece A, BD, BE ecc. la segano.



41. Dal prec. post. segue che due rette a, b secantisi in un punto O, dividono il piano in quattro parti, ciascuna delle quali è comune a due semipiani limitati l'uno dalla a l'altro dalla b.

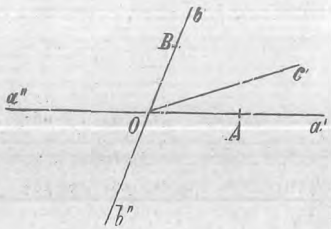
Codeste quattro parti si dicono *regioni angolari* o *angoli.*

Le due rette a, b restano divise da O in quattro semirette, a', a'', b', b'': gli angoli suddetti sono *limitati* da a', b'; b', a''; a'', b''; b'', a' che diconsi rispettivi *lati.*



I lati di un angolo si riguardano come appartenenti all'angolo.

Il punto O si dice *vertice* di ciascuno dei quat-

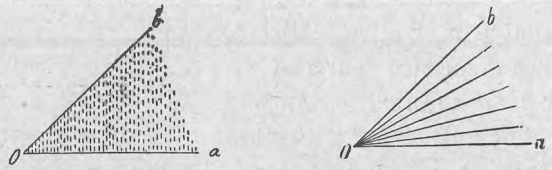


tro angoli. L'angolo di lati a', b' si designa con $\widehat{a'b'}$ o $\widehat{b'a'}$ od anche, ove B, A siano due punti appartenenti alle semirette a', b' rispettivamente, con $\widehat{AOB}$ o $\widehat{BOA}$.

42. Precisando ciò che si è detto al n. prec. abbiamo che l'angolo $\widehat{a'b'}$ è la figura costituita da quei punti che giacciono simultaneamente da quella parte della retta di a' da cui cade la semiretta b' e da quella parte della retta di b' da cui cade la semiretta a'.

43. Tornando alla precedente figura, abbiamo che ogni semiretta c' uscente da O (e distinta da a', a'', b', b'') appartiene ad uno dei quattro angoli: se appartiene all'angolo $\widehat{a'b'}$ ed è distinta dai lati, si dice *compresa* fra a' e b' od anche *semiretta dell'angolo* $\widehat{a'b'}$ e tutti i suoi punti diconsi *interni* all'angolo $\widehat{a'b'}$.

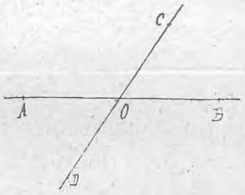
44. Si può considerare un angolo come generato in due modi: dall'insieme dei suoi punti o dall'insieme delle sue semirette.



Quando si vuol fare questa distinzione si dà il nome di *regione angolare* alla prima figura e di *angolo* alla seconda. Ma per noi sarà indifferente il considerare l'una o l'altra generazione.

45. Se le due rette AB, CD si segano nel punto O, gli angoli da esse determinati si distribuiscono in coppie, distinte con nomi speciali. Gli angoli $\widehat{BOC}$ e

$\widehat{AOD}$ si dicono *opposti* al *vertice*; e tali diconsi pure gli angoli $\widehat{COA}$, $\widehat{DOB}$.



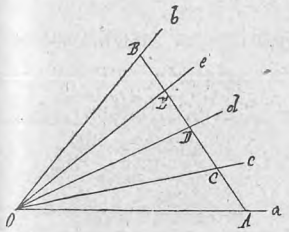
Gli angoli $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ si dicono *adiacenti* e così si dicono adiacenti gli angoli $\widehat{COA}$ e $\widehat{AOD}$, $\widehat{AOD}$ e $\widehat{DOB}$, $\widehat{DOB}$ e $\widehat{BOC}$.

46. Seguono dal post. del **n.** 40 le seguenti proposizioni che del resto sono evidenti all'intuizione:

Teor. — a) *Se un segmento ha gli estremi sui due lati di un angolo, ogni semiretta che dal vertice va ad un punto di codesto segmento appartiene all'angolo e, viceversa, ogni semiretta dell'angolo incontra codesto segmento.*

b) *Se due semirette appartengono all'angolo di due altre, l'angolo definito dalle due prime è contenuto nell'angolo definito delle due seconde.*

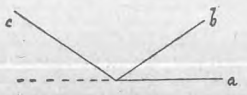
47. Le semirette di un angolo $\widehat{AOB}$ vengono *ordinate* secondo due versi, come i punti in cui incontrano il segmento AB. Si può quindi distinguere *l'angolo ordinato* $\widehat{AOB}$, dall'angolo ordinato $\widehat{BOA}$.



Vediamo che le semirette dell'angolo susseguentisi in uno dei due versi rappresentano posizioni assunte successivamente da ogni semiretta mobile, che descriva l'angolo muovendosi intorno al vertice nel verso considerato.

48. Due angoli aventi comune un lato (ed il vertice) diconsi *consecutivi*, quando giacciono da banda opposta del lato comune.

Più angoli presi, in un certo ordine, diconsi *consecutivi*, quando ciascuno è consecutivo rispetto al precedente.



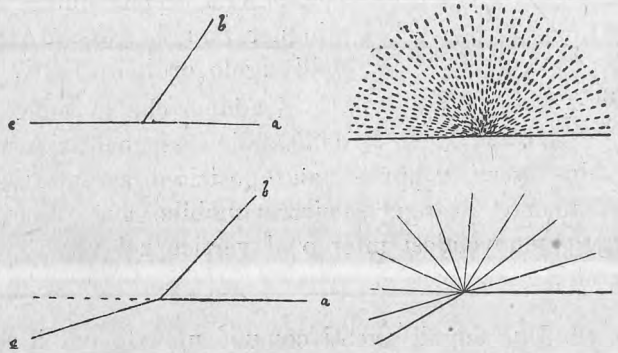
49. Def. — Si dice *somma* di due o più angoli consecutivi, l'insieme delle semirette (o dei punti) che appartengono ad essi.

Nella figura del n. prec., l'angolo $\widehat{ac}$ è la somma di $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$.

50. Affinchè la somma di due angoli si possa sempre considerare come un angolo, siamo tratti ad estendere il concetto dell'angolo, considerando *angoli piatti* (in cui i due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro) e *angoli concavi* (in cui i prolungamenti dei lati sono interni all'angolo).

Un' ulteriore estensione si rende necessaria quando si consideri la somma di più angoli consecutivi; si presentano in tal caso *angoli di un giro e di più che un giro.*

Nel seguito parlando di angoli senz'altro, intenderemo *angoli convessi*, cioè angoli nel senso primitivo (n. 41).



Confronto di angoli.

51. Osservazione. — Due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$, che possono anche pensarsi come ordinati, sono **uguali (congruenti)** o **disuguali (non congruenti).**

Nel primo caso si scrive

$$\widehat{ab} = \widehat{cd}, \text{ o } \widehat{ba} = \widehat{cd},$$

o $$\widehat{cd} = \widehat{ab} \text{ ecc.}$$

indifferentemente.

Si verifica sperimentalmente se due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ sono uguali, provando se dei modelli di essi (per esempio ritagliati in carta) siano o no sovrapponibili.

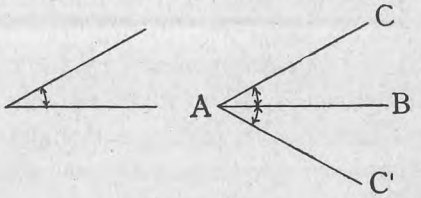
Nella pratica pel confronto degli angoli si usano varie specie di strumenti misuratori (*goniometri*). Il più comune e più semplice è il *semicircolo graduato* o *rapportatore.* Più tardi impareremo a ricondurre il riconoscimento dell'uguaglianza fra angoli a quello dell'uguaglianza fra segmenti *per mezzo del compasso.*

Stabiliamo ora i seguenti postulati:

52. Postulato. — *Due angoli uguali ad un terzo sono uguali fra di loro.*

53. Postulato. — *Somme di angoli consecutivi uguali sono uguali.*

54. Postulato. — *Data in un piano una semiretta si può determinare da una parte assegnata rispetto a questa e per l'origine di essa, una semiretta che colla semiretta prefissata formi un angolo uguale ad un angolo dato.*

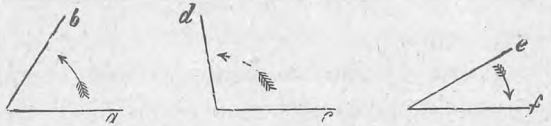


55. Cor. — *In un piano, dati una*

semiretta ed un angolo, esistono due angoli uguali all' angolo dato ed aventi come lato comune la semiretta data.

56. Postulato. — *L'angolo* $\widehat{AOB}$ *è uguale all'angolo* $\widehat{BOA}$ (invertibilità dell'angolo).

57. Se si hanno due angoli in un medesimo pianto, si possono *confrontare i loro versi*: gli angoli $\widehat{a\,b}$ e $\widehat{c\,d}$ dell'unita figura hanno *versi concordi,* gli angoli $\widehat{a\,b}$ ed $\widehat{e\,f}$ (o $\widehat{c\,d}$ ed $\widehat{e\,f}$) hanno *versi discordi.*



Il significato di queste locuzioni (che potrebbero essere definite in modo preciso) riesce sufficientemente spiegato dalle figure annesse.

Due angoli uguali (e ordinati) si dicono *direttamente* o *inversamente uguali* secondo che hanno versi concordi o discordi.

58. Come pei segmenti, anche per gli angoli si estende il concetto di *somma,* chiamando *somma di più angoli* l'angolo (convesso o piatto o concavo, ecc.) somma di altrettanti angoli consecutivi, uguali rispettivamente ai dati.

In base ai postulati dei nn. 52, 53 si dimostra che *somme di angoli uguali sono uguali* e che valgono per la somma di angoli la *proprietà associativa* e la *commutativa.*

59. In modo perfettamente analogo a quello tenuto pei segmenti, si definiscono *fra angoli* le relazioni di *maggiore* e *minore* ($>$, $<$) chiamando un angolo $\widehat{a\,b}$ *maggiore* di un altro $\widehat{c\,d}$, quando $\widehat{a\,b}$ è somma di due angoli, di cui uno sia uguale a $\widehat{c\,d}$; così pure si definisce la *differenza* di due angoli (cfr. n. 38).

Valgono anche per gli angoli le relazioni analoghe a quelle del n. 33 relative alla loro uguaglianza o disuguaglianza.

60. Estenderemo agli angoli anche le definizioni e le notazioni assegnate al n. 34 per i segmenti, chiamando *multiplo secondo n* di un angolo dato α l'angolo $n\alpha$ uguale alla somma di n angoli uguali al dato; l'angolo α, alla sua volta, si dirà *summultiplo* secondo n dell'angolo $n\alpha$.

Valgono senz'altro per i multipli e summultipli di angoli le considerazioni fatte ai nn. 35, 36 pei multipli e summultipli di un segmento.

61. L'intuizione ci dà ancora come evidenti il postulato seguente e quello del n. 66.

Postulato. — *Tutti gli angoli piatti sono uguali fra loro.*

62. Cor. — *Angoli adiacenti ad angoli uguali sono uguali.*

Invero essi sono differenze di angoli uguali.

63. Cor. — *Due angoli opposti al vertice sono uguali.*

Infatti essi sono adiacenti ad un medesimo angolo.

64. Def. — Dato un angolo, ogni angolo uguale al suo adiacente dicesi suo *supplementare.*

65. Cor. — *Angoli supplementari ad angoli uguali sono uguali* (nn. 62, 52).

66. Postulato. — *Dato un angolo qualsiasi, si può trovare un numero* m *così grande che il suo multiplo secondo* m *sia maggiore di un giro.*

67. Cor. — *Dati due angoli, si può trovare un numero* m *così grande che l'*m^{mo} *multiplo dell'angolo minore sia maggiore dell'altro.*

ESERCIZI

Gli esercizi che qui proponiamo sono divisi in due gruppi. I primi si riferiscono all'uguaglianza fra segmenti ed angoli e richiedono dimostrazioni brevissime. I secondi sono rivolti a educare l'osservazione geometrica, richiamando l'attenzione dello scolaro sopra alcune questioni di divisione in parti della retta e del piano.

1. Siano A, B, C tre punti in linea retta e sia M il punto di mezzo di AB (cioè tale che AM = BM). Dimostrare che il segmento CM è uguale alla semisomma o alla semidifferenza dei segmenti CA e CB secondo che il punto C è sul prolungamento di AB o interno al segmento AB.

2. Siano OA, OB, OC tre semirette uscenti da un punto e OM la bisettrice di $\widehat{AOB}$. Dimostrare che l'angolo $\widehat{COM}$ è uguale alla semisomma o alla semidifferenza degli angoli $\widehat{COA}$, $\widehat{COB}$, secondo che OC è esterna o interna all'angolo $\widehat{AOB}$.

3. Se quattro semirette uscenti da un punto formano quattro angoli consecutivi, tali che il primo sia uguale al terzo e il secondo al quarto, le semirette sono a due a due il prolungamento l'una dell'altra.

4. Se in un piano un raggio di luce vien riflesso da una retta speculare suscettibile di ruotare nel piano intorno al punto di incidenza, quando la retta speculare avrà ruotato di un certo angolo, il raggio riflesso avrà ruotato di un angolo doppio.

5. Su di una retta giacciono 1, 2, 3, ..., n punti: a quante semirette e a quanti segmenti si dà luogo in tal modo?

6. Si congiungano a due e due in tutti i modi possibili due, tre, quattro, cinque... punti e si determini il numero delle rette che così si ottengono.

Si indichino le parti in cui il piano resta diviso da codeste rette.

7. Si costruiscano tutti i punti di intersezione di due, tre, quattro, cinque rette e si determini il loro numero osservando i casi di eccezione.

Si indichino le parti di piano, a cui danno luogo codeste rette.

8. Dati nel piano tre punti A, B, C non in linea retta, assegnare le parti del piano stesso dove si trovano i punti P tali che il raggio BA appartenga all'angolo convesso $\widehat{BCP}$.

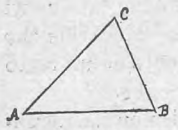
9. Sopra una carta geografica, servendosi di quattro colori, distinguere i diversi paesi in modo che due paesi confinanti siano coloriti con tinte diverse. (Si intendono confinanti due paesi che abbiano comune almeno un tratto di confine che si può immaginare rappresentato schematicamente da un certo numero di segmenti).

10. Mostrare un esempio in cui tre colori non basterebbero allo scopo indicato dall'eserc. prec.

II.

FIGURE POLIGONALI

Triangoli.



68. Consideriamo tre punti A, B, C, non in linea retta e i tre segmenti AB, BC, CA.

Gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$, contenenti rispettivamente i segmenti AC, BA, CB, sono tali che ogni punto comune a due di essi appartiene anche al terzo.

Se p. es. il punto P è comune all'angolo di vertice A e a quello di vertice B vuol dire (n. 42) che esso cade rispetto alla retta AC alla parte di B e rispetto alla retta BC dalla parte di A; il che vuol dire appunto che esso appartiene anche all'angolo di vertice C.

69. Def. — Dati tre punti A, B, C, non in linea retta, dicesi *triangolo* ABC la figura costituita dai punti comuni ai tre angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$.

I tre punti dati sono i *vertici* e i tre segmenti AB, BC, CA i *lati* del triangolo: l'insieme di questi si dice *contorno* e la loro somma *perimetro*.

I punti del triangolo non giacenti sul contorno diconsi *interni* al triangolo.

Infine gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$, contenenti rispettivamente i lati CA, AB, BC, si dicono *angoli del triangolo*.

Osservazione. — Gli angoli *ordinati* (n. 47) $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ hanno uno stesso verso (n. 57), che corrisponde al verso CAB in cui si può immaginare descritto il contorno del triangolo da un punto mobile. Al verso opposto ACB sul contorno corrisponde il verso opposto per gli angoli del triangolo: $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$.

70. Dalla def. prec. e dal n. 40 discende il

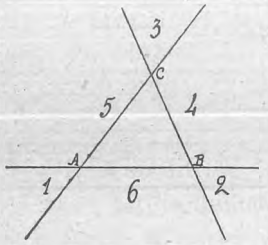
Cor. — *Ogni segmento che congiunge due punti del contorno o due punti interni ad un triangolo, appartiene ad esso.*

71. Talvolta riferendosi tacitamente alla posizione in cui si immagina il triangolo rispetto all'osservatore, ad uno dei suoi lati si dà il nome di *base*. Questo nome si usa particolarmente nel caso di un triangolo avente due lati uguali, per designare il terzo lato. Un triangolo avente due lati uguali si dice *isoscele*. In un triangolo isoscele gli angoli interni compresi fra la base e i lati uguali si dicono *angoli alla base* e gli angoli compresi fra la base e i prolungamenti dei lati uguali, si dicono *angoli sotto la base*. Parlando del *vertice* di un triangolo isoscele, senza nominare di quale si tratti, si intende riferirsi a quello *opposto* alla base, cioè non giacente su di essa.

72. I punti del piano non appartenenti al triangolo si dicono *esterni*.

I sei angoli adiacenti (n. 45) ai tre triangoli del triangolo diconsi *angoli esterni* (del triangolo). Un angolo esterno si dice opposto a ciascuno dei due angoli del triangolo non adiacenti ad esso.

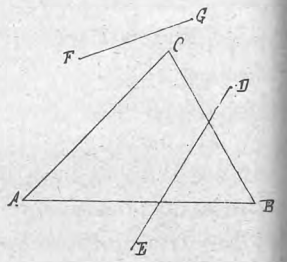
73. Prolungati i lati di un triangolo, i punti esterni ad esso rimangono distribuiti in sei regioni, delle quali tre sono gli angoli opposti al vertice dei tre angoli del triangolo (regioni 1, 2, 3, della figura), e le altre tre



(regioni 4, 5, 6, della figura) si ottengono sopprimendo il triangolo in ciascuno dei suoi tre angoli.

Tenendo conto della posizione relativa del triangolo e delle sei regioni esterne, si può dimostrare, come conseguenza dei postulati ammessi e delle definizioni date, che *ogni segmento che congiunge un punto interno ed uno esterno sega il contorno in un punto e in uno solo.*

Siccome si deduce parimenti che il segmento congiungente due punti esterni (e non passante per un vertice) o non sega il contorno o lo sega in due punti, possiamo concludere che il contorno del triangolo *divide il piano in due parti* (che diconsi *limitate* dal contorno) *per modo che, considerando due punti i quali non si trovino sopra una retta passante per un vertice:*



se essi giacciono nella medesima parte, il segmento che li congiunge non sega il contorno o lo sega in due punti;

se essi giacciono da parte opposta, il detto segmento sega il contorno in un punto.

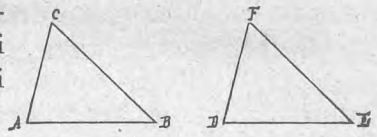
Nota. — Delle due parti, una è lo stesso triangolo e si distingue dall'altra per essere *finita*, cioè per la proprietà di contenere soltanto dei segmenti di retta e non intere rette o semirette come la parte esterna *(infinita)*.

Triangoli uguali.

74. Def. — Due triangoli ABC, DEF, presi i loro vertici nell'ordine scritto, si dicono *uguali o con-*

gruenti quando i lati e gli angoli dell'uno sono ordinatamente uguali ai lati e agli angoli dell'altro, cioè se $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$, $\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{F}$.

Per denotare l'uguaglianza o congruenza dei triangoli ABC, DEF si scrive $ABC \equiv DEF$, od anche



$$BCA \equiv EFD, \quad CBA \equiv FED \text{ ecc.}$$

Si può anche dire che due triangoli sono uguali quando per ogni lato dell'uno vi è un lato uguale dell'altro (lato corrispondente) e sono uguali gli angoli opposti ai lati uguali (angoli corrispondenti).

75. Cor. — *Due triangoli uguali ad un terzo sono uguali fra loro.*

76. Nota. — L'uguaglianza o congruenza di triangoli non gode di tutte le proprietà analoghe a quelle della uguaglianza o congruenza di segmenti (nn. 20-26): p. es. non vale per essa la proprietà analoga a quella del n. 22. Studieremo più avanti (Cap. V) una relazione *(uguaglianza di superficie)* che comprende come caso particolare l'uguaglianza definita al n. 73 e che è analoga alla uguaglianza dei segmenti. A designare codesta relazione più generale useremo il segno $=$; mentre usiamo $\equiv$ per il caso particolare dell'uguaglianza o congruenza definita al n. 73.

77. Osservazione. — Quando due triangoli siano realizzati con modelli fisici (p. es. quando siano ritagliati nella carta) si può riconoscere sperimentalmente se essi sono uguali, provando se possono *sovrapporsi.*

Siano, per esempio ABC, DEF due triangoli uguali, tali cioè che sia

$AB=DE$, $BC=EF$, $CA=FD$, $\widehat{A}=\widehat{D}, \widehat{B}=\widehat{E}$, $\widehat{C}=\widehat{F}$.

Possiamo portare ABC su DEF, sovrapponendo l'angolo $\widehat{C}$ all'angolo uguale $\widehat{F}$, in modo che la semiretta CA si disponga sulla semiretta FD. Allora, siccome per ipotesi i segmenti CA, CB sono uguali rispettivamente a FD, FE, i punti A, B andranno a coincidere con D, E rispettivamente, e quindi è certo senz'altro che il lato AB e gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ si sovrapporranno esattamente al lato DE e agli angoli $\widehat{D}$, $\widehat{E}$.

Notiamo che la sovrapposizione dei due triangoli effettuata nel modo anzidetto si realizzerà con un movimento nel piano, se i due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ (e quindi anche $\widehat{BCA}$, $\widehat{EFD}$ e $\widehat{CAB}$, $\widehat{FDE}$) hanno ugual verso, nel qual caso si dice che i due triangoli come i loro angoli corrispondenti (n. 57), sono *direttamente uguali*. Nel caso opposto, in cui i due triangoli diconsi uguali *inversamente*, per sovrapporre l'uno dei triangoli all'altro occorre farlo uscire dal piano, eseguendo p. es. un ribaltamento di esso intorno ad un lato.

78. Per definizione (n. 74) affinchè due triangoli siano uguali debbono sussistere sei uguaglianze fra i loro elementi (lati ed angoli). Ma la verifica compiuta poc'anzi ci ha mostrato come si possa senz'altro affermare la sovrapponibilità di due triangoli quando si conosca soltanto la uguaglianza di alcuni fra i loro elementi. Nascono così dei *criteri* per giudicare della uguaglianza dei due triangoli.

Un primo criterio è suggerito appunto dalla esperienza or ora indicata, in quanto essa ci ha mostrato che i due triangoli ABC, DEF, sono sovrapponibili, se

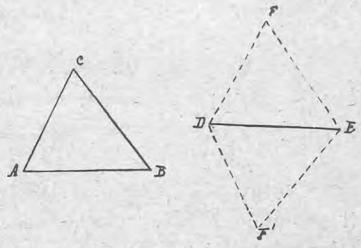
$$\widehat{C} = \widehat{F},\ CA = FD,\ CB = FE.$$

Lo enunciamo in generale come segue:

79. 1° CRITERIO D'UGUAGLIANZA DEI TRIANGOLI. — **Postulato**. — *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, essi sono uguali, avendo rispettivamente uguali anche i rimanenti lati e gli angoli opposti ai lati uguali.*

80. Cor. — *Dati in un piano un triangolo e un segmento uguale ad uno dei lati di esso, si può determinare (costruire) sopra codesto segmento come lato (base) e da una banda di esso, un triangolo uguale al triangolo dato.*

Sia ABC il triangolo dato e sia DE il segmento dato, uguale ad AB. A partire da E e dalla banda prefissata rispetto a DE, possiamo condurre una semiretta EF, tale che sia $\widehat{DEF} = \widehat{ABC} =$ (n. 54).

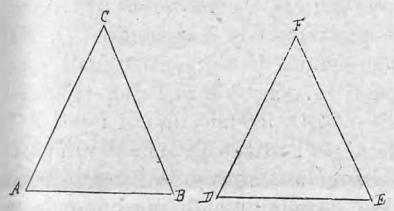


Preso sulla semiretta EF a partire da E il segmento EF uguale a BC, il triangolo DEF è uguale ad ABC perchè per ipotesi è AB = DE e per costruzione è

$$\widehat{B} = \widehat{E},\ BC = EF.$$

81. Cor. — *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.*

Supposto che nel triangolo ABC sia AC = BC diciamo che è $\widehat{A} = \widehat{B}$.



Sulla base DE = AB si costruisca (da una qualsiasi delle parti rispetto a DE) il triangolo DEF uguale ad ABC (n. prec.); i lati e gli angoli di DEF saranno ordinatamente uguali a quelli di ABC, e in particolare sarà

$$\widehat{A} = \widehat{D}.$$

Ma per ipotesi è AC = BC; onde, essendo AC = DF, BC = EF, risulta che i quattro segmenti AC, BC, DF, EF sono tutti uguali; e allora nei due triangoli ABC, EDF, essendo il lato AC uguale al lato EF, il lato BC uguale a DF, e gli angoli compresi uguali, concludiamo, in base al n. 79, che gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali e quindi in particolare

$$\widehat{B} = \widehat{D}.$$

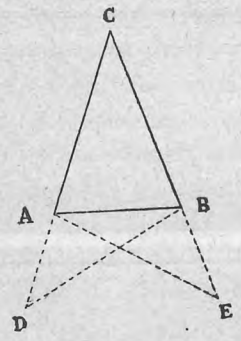
Dalla quale uguaglianza d'angoli, essendo come si è visto sopra $\widehat{A} = \widehat{D}$, risulta veramente

$$\widehat{A} = \widehat{B}.$$

Nota. — In sostanza la dimostrazione prec. ci dice che il triangolo ABC è uguale tanto al triangolo DEF quanto al triangolo EDF; o, in altre parole, che il triangolo DEF si può sovrapporre ad ABC in due modi, sia facendolo opportunamente strisciare sul piano sia anche ribaltandolo prima intorno alla base DE e poi facendolo strisciare sul piano.

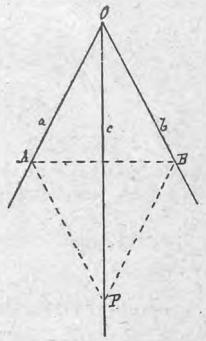
Come esercizio riportiamo qui anche la dimostrazione che per la proposizione prec. dà EUCLIDE.

Dato il triangolo ABC, isoscele sulla base AB, se ne prolunghino i lati uguali CA, CB di due segmenti uguali qualsiansi AD, BE e si congiunga D con B, E con A. Avremo anzitutto che i segmenti CD, CE come somme di segmenti uguali sono uguali (n. 22). Allora i due triangoli AEC, BDC, avendo uguali i lati AC, CE ai lati BC, CD rispettivamente, e, l'angolo compreso all'angolo compreso, saranno uguali (n. 79) onde in particolare sarà $\widehat{E} = \widehat{D}$, AE = BD. Ricordando che è per costruzione BE = AD, si conclude che i due triangoli ABE, BAD, avendo uguali i lati AE, BE ai lati BD, AD rispettivamente e l'angolo compreso all'angolo compreso, sono uguali (n. 79), e hanno perciò uguali gli angoli $\widehat{ABE}$, $\widehat{BAD}$ sotto la base del triangolo isoscele. Saranno quindi uguali anche gli angoli alla base $\widehat{B}$ ed $\widehat{A}$, come adiacenti di angoli uguali (n. 62).



82. Cor. — *Un angolo può essere dimezzato colla seguente costruzione:*

Indicando con O il vertice di $\widehat{ab}$, si prendano sulle due semirette a, b rispettivamente due segmenti OA, OB uguali e sulla base AB dalla parte opposta di O rispetto alla retta AB, si costruisca il triangolo ABP, uguale ad ABO (n. 80); da ultimo si congiunga O con P. Diciamo che la semiretta OP biseca l'angolo $\widehat{AOB}$.



Siccome il triangolo AOB, e quindi anche il triangolo uguale ABP, è per costruzione isoscele, abbiamo

$$\widehat{OAB} = \widehat{ABO}, \quad \widehat{BAP} = \widehat{PBA}.$$

Allora gli angoli $\widehat{OAP}$, $\widehat{PBO}$, come somme di angoli uguali saranno uguali, e, considerata la semiretta OP, nei triangoli AOP, BOP, in cui è

$$AO = BO, \quad AP = BP, \quad \widehat{OAP} = \widehat{OBP},$$

avremo che anche tutti gli altri lati ed angoli saranno ordinatamente uguali (n. 79) e in particolare

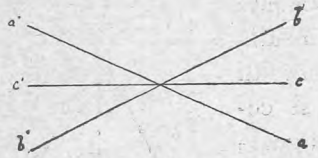
$$\widehat{AOP} = \widehat{BOP}:$$

cioè la semiretta OP divide veramente per metà l'angolo dato.

Nota. — Dal fatto che metà di angoli uguali sono uguali (n. 35) segue l'unicità della semiretta c, bisettrice dell'angolo $\widehat{ab}$.

83. Cor. — *Le due semirette che bisecano due angoli opposti al vertice appartengono alla medesima retta (bisettrice).*

Dati due angoli opposti al vertice $\widehat{a\,b}$, $\widehat{a'\,b'}$, sia c la semiretta che biseca l'angolo $\widehat{a\,b}$. Diciamo che la semiretta che biseca l'angolo $\widehat{a'\,b'}$ appartiene alla stessa retta di c. Basta perciò dimostrare che il prolungamento c' di c biseca l' angolo $\widehat{a'\,b'}$.



Perciò si osservi che per costruzione è $\widehat{ac} = \widehat{cb}$ e che pel n. 63 è

$$\widehat{ac} = \widehat{a'c'},\quad \widehat{cb} = \widehat{c'b'}$$

onde risulta che è veramente $\widehat{a'c'} = \widehat{c'b'}$.

84. II° CRITERIO D'UGUAGLIANZA. **Teor.** — *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli e il lato comune, i due triangoli sono uguali;* cioè sono uguali i rimanenti angoli e i lati opposti agli angoli uguali.

Dati i due triangoli ABC, A'B'C' tali che sia

$$\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'},\quad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'},\quad AB = A'B',$$

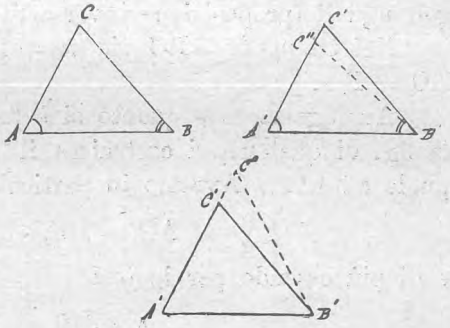
dico che i due triangoli sono uguali. Basterà dimostrare che deve sssere $AC = A'C'$: e allora, in base al I° criterio (n. 79) risulterà l'uguaglianza dei due triangoli.

Noi qui dimostreremo il teorema *indirettamente* (o *per riduzione all'assurdo*); cioè faremo vedere che, supponendo che oltre essere verificate le nostre ipotesi sia anche AC disuguale da A'C', si è condotti ad una contraddizione. (1)

(1) Diconsi *indirette* o *per riduzione all' assurdo* quelle dimostrazioni, per cui la verità della proposizione da dimostrare si assoda, constatando che il supporre falsa codesta proposizione condurrebbe o a negare qualche ipotesi contenuta nella proposizione medesima o a concludere falso qualche postulato ammesso o qualche teorema dimostrato precedentemente.

Sia dunque, se pur è possibile, AC disuguale da A'C'.

Allora sulla semiretta A'C' esisterà un punto C'' distinto da C', tale che A'C'' = AC; e i triangoli ABC, A'B'C'', essendo



$$AB = A'B',\quad AC = A'C'',\quad \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'},$$

saranno uguali: onde in particolare risulterà $\widehat{A'B'C''} = \widehat{ABC}$; e quindi

$$\widehat{A'B'C''} = \widehat{A'B'C'}.$$

Ma poichè la semiretta B'C'' è distinta da B'C' si avrebbe di qui la conclusione assurda che un angolo è uguale ad una sua parte.

85. Osservazione. — Il secondo criterio di uguaglianza si verifica anche sperimentalmente portando l'uno sull'altro i due triangoli, in modo che si sovrappongano i lati uguali e gli angoli adiacenti.

Ma la dimostrazione data dianzi fa vedere che la proposizione è già insegnata implicitamente dalla esperienza eseguita per ottenere il primo criterio (n. 78).

86. Cor. — *Se un triangolo ha due angoli uguali. i lati opposti ad essi sono uguali;* cioè *il triangolo è*

isoscele (1) ed ha per base il lato comune ai due angoli uguali (proposizione inversa di quella del n. 81.)

Nel triangolo ABC sia $\widehat{A} = \widehat{B}$: diciamo che è AC = BC.

Analogamente a quanto si è fatto al n. 81 (vedi la fig. di quel n.) si costruisca il triangolo DEF uguale ad ABC. Avremo in particolare

$$AC = DF,$$

e di più essendo per ipotesi

$$\widehat{A} = \widehat{B}$$

e per costruzione

$$\widehat{A} = \widehat{D},\ \widehat{B} = \widehat{E}$$

i quattro angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{D}, \widehat{E}$ saranno tutti uguali. Allora nei due triangoli ABC, EDF, essendo l'angolo $\widehat{A}$ uguale ad $\widehat{E}$, l'angolo $\widehat{B}$ uguale a $\widehat{D}$ e il lato AB uguale a ED, concludiamo, in base al n. prec. che i lati opposti agli angoli uguali sono uguali e quindi in particolare

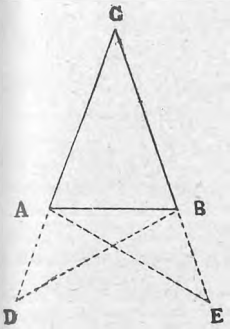
$$BC = DF.$$

Onde, essendo, come si è visto sopra, AC = DF, risulta veramente

$$AC = BC.$$

Nota. — Si può ripeter qui l'osservazione della nota al n. 81.

Di questo stesso teorema si può dare, sulle tracce di EUCLIDE, un'altra dimostrazione, analoga alla seconda dimostrazione da noi esposta pel teor. del n. 81.



Dato il triangolo ABC, in cui è per ipotesi $\widehat{BAC} = \widehat{ABC}$, si prolunghino i lati CA, CB di due segmenti uguali qualsiasi AD, BE. Allora nei due triangoli ABD, BAE il lato AB è comune, i lati AD, BE sono uguali per costruzione, e infine gli angoli $\widehat{DAB}$, $\widehat{EBA}$ sono uguali, come adiacenti di angoli uguali (n. 62).

Si conclude, in base al I criterio (n. 73) che i due triangoli sono uguali e, quindi, che BD = AE, $\widehat{ADB} = \widehat{BEA}$, $\widehat{DBA} = \widehat{EAB}$. In base a quest'ultima uguaglianza e all'ipotesi dell'uguaglianza dei due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$, si conclude che i due angoli $\widehat{DBC}$, $\widehat{EAC}$ sono uguali come somme di angoli uguali. E allora confrontando i due triangoli DBC, EAC si trova che essi hanno uguali il lato BD al lato AE e gli angoli $\widehat{CDB}$, $\widehat{DBC}$ agli angoli $\widehat{CEA}$, $\widehat{EAC}$ rispettivamente, e perciò in base al II criterio (n. prec.) sono uguali. Si ha in particolare DC = EC e quindi, sottraendo i due segmenti uguali DA, EB,

$$AC = BC.$$

(1) Ravviciniamo questa proposizione a quella del n. 81. Se indichiamo con I l'*ipotesi* che «un triangolo abbia due lati uguali» e con T la *tesi* che «il triangolo ha uguali due angoli» la proposizione del n. 81 si può enunciare sotto la forma:

a) *da* I *consegue* T;

e quella del n. 86 si può enunciare:

b) *da* T *consegue* I.

Due proposizioni della forma *a), b)* si dicono l'una *inversa* o *reciproca* dell'altra.

Giova notare che non sempre insieme con un teor. sussiste il teor. inverso.

Ma *quando sono simultaneamente vere le due proposizioni* a) *e* b), *sono pur vere le altre due*:

c) dalla negazione di I *consegue la negazione di* T;

d) dalla negazione di T *consegue la negazione di* I;

Invero data la negazione di I, non può sussistere T, giacchè in tal caso, per la *b*), sussisterebbe la I; e data la negazione di T non può sussistere I perchè, per la *a*), da I consegue T.

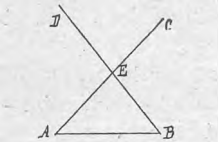
Il principio precedente dicesi *prima legge delle inverse*. Le proposizioni *c)* e *d)* diconsi rispettivamente *contraria* e *contronominale* della *a)*.

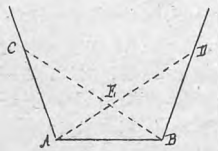
Notiamo che la contronominale non è altro che l'*inversa della contraria*.

87. Dato un segmento AB, si conduca per A ad arbitrio una semiretta AC distinta da AB, e poi dalla stessa banda del suo punto C rispetto alla AB, si conduca da B la semiretta BD, tale che $\widehat{DBA}$ sia uguale a $\widehat{BAC}$.

Se le due semirette si incontrano in un punto E il triangolo ABE, avendo, per costruzione, gli angoli alla base uguali, è isoscele (n. prec).

Se le due semirette AC, BD non hanno nessun punto comune, prendiamo ad arbitrio su di esse due segmenti AC, BD uguali e congiungiamo A con D, B con C. Poichè il punto C giace rispetto alla AB dalla stessa parte di D e rispetto alla DB dalla stessa parte di A, il punto C è interno all'angolo $\widehat{DBA}$ e quindi è tale anche la semiretta BC. Ne segue che il segmento AD il quale congiunge due punti dei due lati del medesimo angolo, interseca il segmento BC in un punto E (n. 46, *a*).



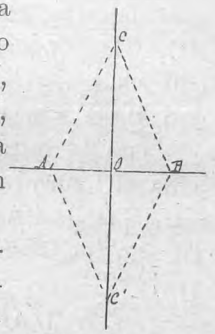


Ora i due triangoli ABC, ABD, aventi comune il lato AB e uguali per costruzione i lati AC, BD e gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DBA}$, sono uguali ed hanno quindi uguali gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAD}$ (n. 79). Allora il triangolo ABE, avente gli angoli alla base uguali, è isoscele (n. prec.).

Sappiamo dunque costruire su di una base data quanti triangoli isosceli vogliamo.

88. Cor. — *Un segmento può esser dimezzato colla seguente costruzione:*

Sul segmento dato AB e da una banda determinata rispetto ad esso costruiamo un qualsiasi triangolo ABC isoscele (n. prec.) e sulla stessa base, ma dalla banda opposta rispetto ad AB costruiamo il triangolo ABC', uguale ad ABC (n. 80). Poichè C, C', cadono da bande opposte rispetto alla AB, la retta CC' interseca la AC in un punto O. Diciamo che è AO = BO.

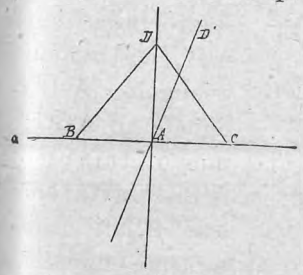


Infatti, abbiamo anzitutto che, essendo i due triangoli ABC, ABC' isosceli ed uguali, con la base in comune, gli angoli $\widehat{ACO}$, $\widehat{BCO}$ sono uguali (cfr. n. 82). Allora i due triangoli AOC, BOC hanno uguali i lati AC, BC e gli angoli adiacenti ad essi $\widehat{OAC}$, $\widehat{OBC}$ e $\widehat{ACO}$, $\widehat{BCO}$: essi sono quindi uguali (n. 84) ed hanno uguali i lati AO, BO.

Nota. — Dal fatto che metà dei segmenti uguali sono uguali (n. 35) segue l'unicità del punto O che dimezza il segmento AB.

89. Cor. — *Per un punto di una retta passa una retta ed una sola, che forma colla data angoli adiacenti uguali* (retta perpendicolare alla data).

Data la retta *a* e su di essa preso il punto A, si portino su *a* da una parte e dall'altra di A due segmenti uguali AB, AC e sul segmento BC come base si costruisca un triangolo isoscele BCD: congiunto D con A, diciamo che gli angoli adiacenti $\widehat{BAD}$, $\widehat{CAD}$ sono uguali.



Infatti i due triangoli ABD, ACD hanno ordinatamente uguali gli angoli $\widehat{DBA}$, $\widehat{DCA}$ come angoli alla

base del triangolo isoscele BCD e i lati BA, CA, e BD, CD per costruzione. Ne risulta che i due triangoli sono uguali (n. 79) e hanno quindi uguali gli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{CAD}$.

Ora la retta AD è la sola passante per A, la quale colla BC formi angoli adiacenti uguali; infatti un'altra retta qualsiasi AD′ per A avrà una semiretta AD interna ad uno degli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAC}$. Se AD′ è interna a $\widehat{DAC}$, avremo

$$\widehat{D'AC} < \widehat{DAC} \text{ e } \widehat{DAB} < \widehat{D'AB};$$

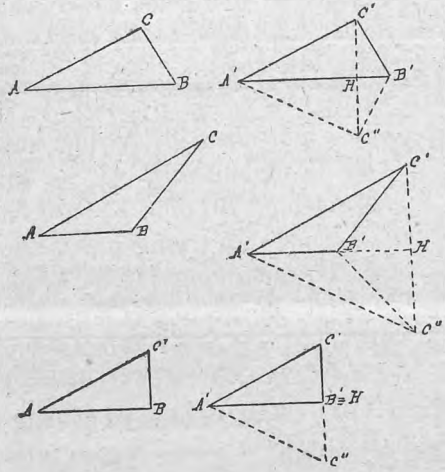
onde risulta, poichè $\widehat{DAC}$, $\widehat{DAB}$ sono uguali, che $\widehat{D'AC}$ è minore di $\widehat{D'AB}$.

90. III° CRITERIO DI UGUAGLIANZA. — **Teor.** — *Se due triangoli hanno uguali rispettivamente i tre lati essi sono uguali;* cioè hanno uguali anche gli angoli opposti ai lati uguali.

Dati i due triangoli ABC, A′B′C′ in cui è

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ CA = C'A',$$

dico che i due triangoli sono uguali.



Infatti sulla base A′B′ dalla parte opposta di C′ rispetto alla retta A′B′, costruiamo il triangolo A′B′C″ uguale ad ABC; il nuovo triangolo A′B′C″ avrà anche esso i lati ordinatamente uguali ad A′B′C′.

Se noi dimostreremo che gli angoli $\widehat{A'C'B'}$, $\widehat{A'C''B'}$, sono uguali, concluderemo che i triangoli A′B′C′, A′B′C″, per cui è

$$A'C'' = A'C',\ B'C'' = B'C',\ \widehat{A'C'B'} = \widehat{A'C''B'},$$

sono uguali (n. 79), e dalle uguaglianze fra triangoli

$$A'B'C' = A'B'C'',\ A'B'C'' = ABC$$

dedurremo che veramente i triangoli ABC, A′B′C′ sono uguali.

Per dimostrare che è $\widehat{A'C'B'} = \widehat{A'C''B'}$, consideriamo il segmento C′C″, il quale, congiungendo due punti da parti opposte rispetto alla retta A′B′, intersecherà questa retta in un punto H; e distinguiamo tre casi secondo che H è interno al segmento A′B′ o è esterno o coincide con uno degli estremi.

Se H è interno od esterno al segmento A′B′, i triangoli C″C′A′, C′C″B′, avendosi per costruzione

$$A'C'' = A'C',\ B'C' = B'C'',$$

sono isosceli, onde risulta

$$\widehat{A'C'C''} = \widehat{A'C''C'},\ \widehat{C''C'B'} = \widehat{C'C''B'};$$

e allora concludiamo che gli angoli $\widehat{A'C'B'}$, $\widehat{A'C''B'}$, sono uguali, perchè sono rispettivamente somme o differenze di angoli uguali (nn. 58, 59).

Se poi H coincide con uno degli estremi del segmento A′B′, p. es. con B′, il triangolo C″C′A′ è isoscele, perchè per costruzione è A′C″ = A′C′, onde risulta

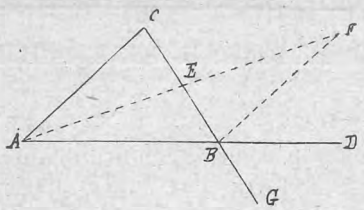
$$\widehat{A'C'B'} = \widehat{A'C''B'}.$$

Disuguaglianze fra elementi di triangoli.

91. Teor. — *In ogni triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti.*

Dato il triangolo ABC, consideriamo il prolungamento BD del lato AB: vogliamo dimostrare che l'angolo esterno $\widehat{DBC}$ è maggiore di ciascuno degli interni opposti $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$.

Perciò determinato il punto medio E del segmento BC (n. 88) consideriamo il segmento AE, e sul prolungamento di esso prendiamo il segmento EF uguale ad AE. La semiretta $\widehat{AF}$ è interna all'angolo $\widehat{BAC}$, perchè congiunge il vertice col punto E interno al segmento BC che ha gli estremi sui lati: sarà quindi interno all'angolo $\widehat{BAC}$ anche il punto F: ma questo punto è per costruzione esterno al triangolo: onde resta stabilito che il punto F è interno all'angolo $\widehat{DBC}$, perchè questo angolo contiene tutti i punti dell'angolo $\widehat{BAC}$, che non appartengono al triangolo (n. 73). Ne discende che la semiretta BF appartiene al medesimo angolo ed è distinta dai lati, e che l'angolo $\widehat{FBC}$ è una parte di $\widehat{DBC}$, ossia è minore di esso.



Si considerino allora i due triangoli AEC, FEB. In essi gli angoli $\widehat{CEA}$, $\widehat{BEF}$ sono uguali perchè opposti al vertice (n. 63), ed è per costruzione

$$CE = BE, \quad AE = FE:$$

onde risulta (n. 79) che i due triangoli sono uguali ed è in particolare $\widehat{ACB} = \widehat{FBC}$. Ma essendo $\widehat{FBC}$ minore di $\widehat{DBC}$ concludiamo che l'angolo esterno $\widehat{DBC}$ è maggiore dell'interno opposto $\widehat{ACB}$.

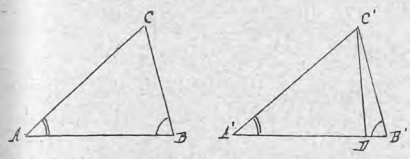
Per dimostrare che $\widehat{DBC}$ è maggiore di $\widehat{BAC}$ basta notare che il suo opposto al vertice $\widehat{GBA}$ è rispetto a $\widehat{BAC}$ nella stessa posizione, in cui $\widehat{DBC}$ giace rispetto ad $\widehat{ACB}$.

92. Il precedente teorema regge direttamente le conseguenze del n. seguente e del n. 95.

93. Teor. — *Se due triangoli hanno uguali un lato, l'angolo opposto ed un angolo adiacente ad esso, i due triangoli sono uguali; cioè hanno uguali il terzo angolo e i lati opposti agli angoli uguali.*

Siano i triangoli ABC, A'B'C', in cui si abbia

$$AC = A'C', \quad \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}, \quad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$



Vogliamo dimostrare che è anche

$$AB = A'B',$$

onde risulterà (n. 79) che i due triangoli sono uguali.

Ragionando per assurdo supponiamo che AB, A'B' non siano uguali: allora uno dei due segmenti sarà maggiore dell'altro, p. es. sarà $A'B' > AB$. Si prenda in tal caso sulla semiretta A'B' a partire da A' il segmento $A'D = AB$; il punto D sarà interno ad A'B'. Condotto allora il segmento C'D, nei triangoli ABC, A'DC' è per ipotesi $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{DA'C'}$ e per costruzione $AB = A'D$: ne risulta che i due triangoli sono uguali (n. 79) e in particolare che sono uguali gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{C'DA'}$. Ma questa conclusione è assurda, giacchè per una parte l'angolo $\widehat{C'DA'}$ è esterno al triangolo B'C'D ed è quindi (n. prec.) $\widehat{C'DA'} > \widehat{C'B'A'}$; e d'altra parte abbiamo per ipotesi $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$.

Non può dunque accadere che uno dei due segmenti AB, A'B' sia maggiore dell'altro. Ne risulta AB = A'B' e quindi

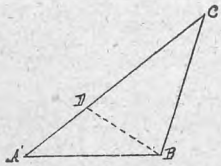
$$ABC \equiv A'B'C'.$$

94. Nota. — Ricordando il n. 84, si può dire che: *Sono uguali due triangoli, aventi uguali un lato e due angoli disposti nel medesimo modo rispetto ad esso.*

95. Teor. — *Se in un triangolo due lati non sono uguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto al lato minore.*

Nel triangolo ABC sia CA > BC: diciamo che è $\widehat{CBA} > \widehat{BAC}$.

Siccome è CA > BC, sulla semiretta CA esiste un punto D, interno al segmento CA, tale che è CD = CB.



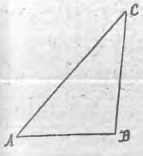
Poichè D è interno a CA, la semiretta BD è interna all'angolo $\widehat{CBA}$ ed è perciò $\widehat{CBA} > \widehat{CBD}$. Ma il triangolo BCD è per costruzione isoscele sulla base BD, onde risulta (n. 81) $\widehat{CBD} = \widehat{BDC}$; e, da altra parte, l'angolo $\widehat{BDC}$ è esterno rispetto al triangolo ABD, ed è perciò maggiore dell'interno opposto $\widehat{BAC}$ (n. 93). Abbiamo dunque le tre relazioni

$$\widehat{CBA} > \widehat{CBD},\ \widehat{CBD} = \widehat{BDC},\ \widehat{BDC} > \widehat{BAC}$$

dalle quali risulta che veramente l'angolo $\widehat{CBA}$, opposto al lato AC maggiore di BC, è maggiore dell'angolo $\widehat{BAC}$, opposto al lato BC.

96. Teor. (inverso del prec.) — *Se in un triangolo due angoli non sono uguali, il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore.*

Nel triangolo ABC sia $\widehat{CBA} > \widehat{BAC}$: diciamo che è AC > BC.



Non può essere infatti AC = BC, giacchè sarebbe in tal caso (n. 81)

$$\widehat{CBA} = \widehat{BAC};$$

nè può aversi AC < BC, perchè allora avremmo (n. prec.) $\widehat{CBA} < \widehat{BAC}$. (1)

97. Teor. — *In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

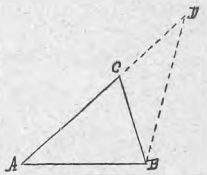
Dato il triangolo ABC, diciamo che ogni lato è minore della somma degli altri due, che, p. es., è

$$AB < BC + CA.$$

Si prenda infatti sul prolungamento di AC il segmento CD = CB: avremo

$$AD = BC + CA$$

e siccome BA e BD cadono da parti opposte rispetto a BC, l'angolo $\widehat{DBA}$ sarà maggiore di $\widehat{DBC}$. Ma, per costruzione il triangolo BDC è isoscele



(1) Giova fermare l'attenzione sulla forma del precedente ragionamento.

I teor. dei nn. 81, 95 ci dicono che:

In un triangolo ABC:

da CA > BC *consegue* $\widehat{CBA} > \widehat{BAC}$,
» CA = BC » $\widehat{CBA} = \widehat{BAC}$,
» CA < BC » $\widehat{CBA} < \widehat{BAC}$,

Da queste proposizioni discendono senz'altro le rispettive inverse (cioè i nn. 86, 96), in quanto sui due lati CA, BC non si possono fare altre ipotesi all'infuori delle tre suindicate e di più le tesi conseguenti si escludono a vicenda, talchè, ammessa una di queste tre tesi, dovrà valere la corrispondente ipotesi, le altre due conducendo ad una contraddizione. Si ha così un primo esempio di applicazione della *seconda legge delle inverse*:

Se tutte le possibili ipotesi che si possono fare su di uno stesso soggetto, conducono, considerate singolarmente, a tesi che si escludono a vicenda, da ciascuna di queste consegue l'ipotesi corrispondente.

(rispetto alla base BD) cosicchè gli angoli alla base $\widehat{DBC}$, $\widehat{CDB}$ saranno uguali (n. 81). Avremo quindi che nel triangolo $\widehat{ABD}$ l'angolo $\widehat{BDA}$ è minore di $\widehat{DBA}$ e quindi (n. 96) che il lato AB, opposto al primo, è minore del lato AD, opposto al secondo, ossia che è veramente

$$AB < BC + CA$$

Ora riferendoci allo stesso triangolo ABC, diciamo che, p. es., BC è maggiore della differenza di AB, AC.

Se AB = AC l'asserzione non ha bisogno di essere dimostrata.

Se AB e AC non sono uguali, supponiamo, per fissare le idee, AB > BC. Allora dalla relazione

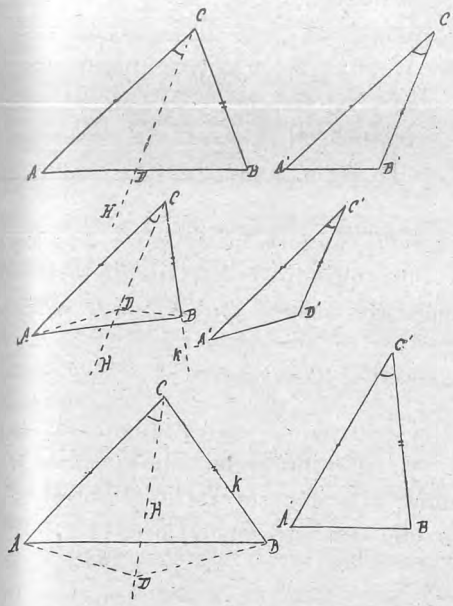
$$AB < AC + BC$$

deduciamo appunto (n. 39)

$$AB - AC < BC.$$

Nota. — Si avverta che la dimostrazione della prima parte del teorema è necessaria soltanto per il lato maggiore, quella della seconda per i due minori.

98. Teor. — *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali e l'angolo compreso disuguale, gli altri due lati sono disuguali, e il lato maggiore appartiene al triangolo in cui è l'angolo maggiore.*



Siano i due triangoli ABC, A'B'C' tali che

$$BC = B'C',$$

$$CA = C'A',$$

mentre gli angoli

$$\widehat{ACB},\ \widehat{A'C'B'}$$

sono disuguali: sia precisamente

$$\widehat{ACB} > \widehat{A'C'B'}.$$

Diciamo che è

$$AB > A'B'.$$

Per l'ipotesi fatta $\widehat{ACB} > \widehat{A'C'B'}$, esisterà una semiretta CH, interna all'angolo $\widehat{ACB}$, tale che $\widehat{ACH} = \widehat{A'C'B'}$. Preso sulla semiretta CH il segmento CD = C'B' = CB, abbiamo che nei triangoli ADC, A'B'C' è per ipotesi AC = A'C' e per costruzione $\widehat{ACD} = \widehat{A'C'B'}$, CD=C'B': se ne conclude che i due triangoli ADC, A'B'C' sono uguali ed è quindi AD = A'B'. Basterà quindi dimostrare che è AB > AD.

Ora possono verificarsi i tre casi seguenti: *a*) il punto D cade sulla retta AB: *b*) il punto D è interno al triangolo ABC; *c*) il punto D è esterno a questo triangolo.

Nel primo caso, siccome la semiretta CD è interna all'angolo $\widehat{C}$, il punto D è interno al segmento AB (n. 46) ed è quindi AB > AD.

Nel secondo e terzo caso, siccome per costruzione è CD = CB, sono uguali gli angoli $B\widehat{D}H$, $D\widehat{B}K$ come angoli alla base (n. 81) o sotto la base (nn. 81, 62) di un triangolo isoscele. Ne risulta $B\widehat{D}H > D\widehat{B}A$, perchè quest'ultimo è minore di $D\widehat{B}K$; ma $B\widehat{D}A$ è maggiore di $B\widehat{D}H$, onde sarà, a più forte ragione, $B\widehat{D}A > D\widehat{B}A$.

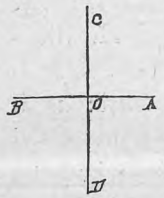
Ma in un triangolo all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore (n. 96); quindi dal triangolo ABD risulta veramente anche nei casi *b*), *c*) AB > AD ossia

$$AB > A'B'.$$

Nota. — Se nella costruzione del triangolo ACD si sceglie come lato AC il minore dei due lati AC, BC non può presentarsi che il caso *c*). Ciò si potrebbe dedurre dal teorema che dimostreremo al n. 115.

Perpendicolari.

99. Due rette AB, CD intersecantisi in un punto O determinano, come sappiamo, quattro angoli $A\widehat{O}C$ $C\widehat{O}B$, $B\widehat{O}D$, $D\widehat{O}A$, dei quali il primo e il terzo sono uguali, e il secondo e il quarto son pure uguali, perchè opposti al vertice (n. 63). D'altra parte due consecutivi quali si vogliano di essi sono adiacenti, onde risulta che, se due consecutivi di codesti quattro angoli sono uguali, essi sono tutti e quattro uguali, perchè angoli adiacenti di angoli uguali sono uguali (n. 62). Ma noi abbiamo già visto al n. 89 come per un punto di una



retta data si possa condurre una retta (ed una sola) che formi colla data angoli adiacenti uguali. Daremo allora la seguente

100. Def. — Due rette intersecantisi si dicono *perpendicolari*, se i quattro angoli da esse formati sono uguali.

Come s'è osservato, basta per questo che uno di quei quattro angoli sia uguale ad uno dei due angoli adiacenti.

Due semirette o due segmenti si dicono perpendicolari se sono perpendicolari le rette cui appartengono.

101. Def. — L'angolo di due semirette uscenti da un punto e fra loro perpendicolari dicesi *angolo retto.*

Risulta di qui e dai nn. precedenti che l'angolo retto si può anche definire come l'angolo che è uguale ai suoi adiacenti.

Esso si può considerare come la *metà* dell'angolo piatto, il quale dicesi perciò *angolo di due retti.*

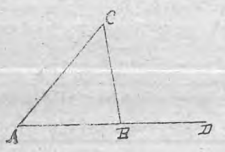
102. Teor. — *Tutti gli angoli retti sono uguali.*

Infatti essi sono metà di angoli (piatti) uguali, (nn. 61, 60).

103. La somma di due angoli supplementari è uguale ad un angolo piatto ossia a due retti; e, reciprocamente, se la somma di due angoli è uguale a due retti, i due angoli primitivi sono supplementari.

Se più angoli consecutivi danno per somma l'angolo di un giro si può dire che la loro somma è quattro retti.

104. Teor. — *La somma di due angoli di un triangolo è minore di due retti.*



Dato il triangolo ABC, diciamo che la somma degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ è minore di due retti.

Considerato, infatti, l'angolo esterno $\widehat{DBC}$, adiacente a $\widehat{CBA}$, sappiamo che l'angolo interno $\widehat{BAC}$ è minore dell'angolo esterno non adiacente $\widehat{DBC}$ (n. 91).

Ne risulta (nn. 59, 33) che la somma di $\widehat{BAC}$ e $\widehat{CBA}$ è minore della somma degli angoli $\widehat{DBC}$ e $\widehat{CBA}$, fra loro adiacenti, cioè di due retti.

105. Def. — Un angolo (convesso) che non sia retto si dice *acuto* od *ottuso* secondo che è minore o maggiore di un retto.

106. Cor. — *Se un triangolo ha un angolo retto o un angolo ottuso, gli altri due angoli sono acuti* (n. 97).

107. Cor. — *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele son tutti e due acuti.*

108. Def. Un triangolo avente un angolo retto dicesi *rettangolo*. I lati intorno all'angolo retto si dicono *cateti*; quello opposto all'angolo retto si dice *ipotenusa*. L'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei cateti (n. 96).

Un triangolo che abbia un angolo ottuso dicesi talvolta *ottusangolo*; e si dice *acutangolo* un triangolo che abbia tutti e tre gli angoli acuti.

Nel triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri due (n. 96).

109. In forza del n. 102, i criteri di uguaglianza stabiliti in generale per i triangoli ci permettono di enunciare i seguenti corollari:

Due triangoli rettangoli sono uguali

a) *se hanno uguali i cateti* (n. 79);

b) *se hanno uguali un cateto e l'angolo (acuto) adiacente ad esso* (n. 84);

c) *se hanno uguali un cateto e l'angolo (acuto) opposto ad esso* (n. 93);

d) *se hanno uguali l'ipotenusa ed un angolo (acuto) adiacente ad essa* (n. 93).

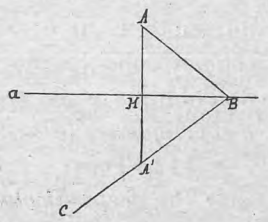
110. Teor. — *Per un punto dato vi è una perpendicolare ed una sola ad una retta data.*

Il teorema è già stato dimostrato al n. 89 nel caso, in cui il punto e la retta dati si appartengono.

Perciò ci rimane a considerare qui il caso, in cui il punto dato A è fuori della retta data a.

Cominciamo col costruire effettivamente una retta per A, perpendicolare ad a, e poi dimostreremo che essa è unica.

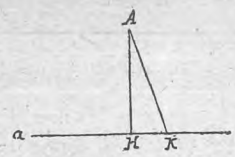
Si congiunga A con un punto qualsiasi B di a, e per questo punto B si conduca dalla parte opposta di A rispetto alla a, la semiretta BC, che non sia il prolungamento di BA e che formi con la a angoli uguali a quelli formati con la stessa retta dalla semiretta BA. Sulla semiretta BC si prenda il segmento $BA' = BA$. Congiunto A con A' diciamo che la AA' è perpendicolare alla a.



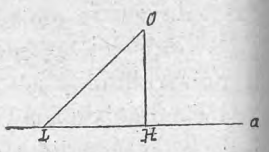
Siccome infatti A e A' cadono da parti opposte rispetto alla a, il segmento AA' interseca, in un punto H, la a. Si considerino allora i triangoli ABH, A'BH. Poichè per costruzione è $AB = A'B$, $\widehat{ABH} = \widehat{A'BH}$ e HB è comune, essi sono uguali (n. 79) ed

hanno in particolare, uguali gli angoli $\widehat{BHA}$, $\widehat{BHA'}$. Ma questi angoli sono adiacenti: onde si conclude senz'altro che la AH è perpendicolare alla a.

È poi manifesto che da un punto A esterno ad una retta a non si possono condurre due perpendicolari alla a. Se invero esistessero due siffatte perpendicolari AH, AK, il triangolo AHK avrebbe gli angoli $\widehat{H}$, $\widehat{K}$ entrambi uguali ad un retto; il che è impossibile (n. 106).



111. Data una retta a e un punto O fuori di essa, il segmento della perpendicolare alla a per O, compreso fra O e l'intersezione H di essa con a, si suol chiamare « *segmento perpendicolare* » o semplicemente « *perpendicolare* abbassata da O su a »; il punto H si dice *piede* della perpendicolare.



Ogni segmento OL congiungente il punto O con un punto L di a, distinto da H, si suol chiamare *obliqua* condotta da O alla retta a: L dicesi piede dell'obliqua e il segmento HL si chiama *proiezione dell'obliqua sulla retta a*.

112. Teor. — *Data una retta e un punto fuori di essa, la perpendicolare abbassata dal punto sulla retta è minore di ogni obliqua condotta dal punto alla retta; e di due oblique l'una è maggiore, uguale o minore dell'altra, secondo che la proiezione della prima è maggiore, uguale o minore della proiezione della seconda.*

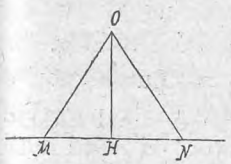
Data la retta a e il punto O fuori di essa, sia OH la perpendicolare abbassata da O su a.

a) Se OL è una qualsiasi obliqua condotta da O alla retta a (vedi fig. al n. prec.), diciamo che

OL è maggiore di OH. Infatti il triangolo OLH è rettangolo in H: onde risulta che l'ipotenusa OL è maggiore del cateto OH (n. 108).

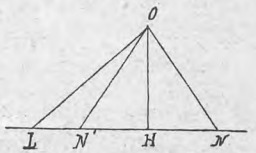
b) Siano OM, ON due oblique, le cui proiezioni HM, HN siano uguali, talchè i punti M, N cadranno da parti opposte del punto H. Diciamo che le oblique OM, ON sono uguali.

Infatti i triangoli OMH, ONH, rettangoli in H, hanno il cateto OH in comune e i cateti HM, HN uguali per ipotesi, onde (n. 109, *a*) i due triangoli sono uguali e hanno uguali, in particolare, le ipotenuse OM, ON.



c) Siano in secondo luogo due oblique OL, ON', giacenti entrambi dalla stessa parte della perpendicolare OH.

Diciamo che è maggiore quella obliqua che ha proiezione maggiore, cioè, nel caso della figura, la OL.



Infatti l'angolo $\widehat{ON'L}$, esterno rispetto al triangolo ON'H, è maggiore (n. 91) dell'interno opposto $\widehat{OHN'}$, il quale è retto. Perciò l'angolo $\widehat{ON'L}$ è ottuso, e nel triangolo OLN' il lato OL, opposto all'angolo ottuso, è maggiore degli altri due lati, in particolare di ON' (n. 108).

d) Siano, infine, due oblique OL, ON, giacenti da parti opposte della perpendicolare OL, e aventi proiezioni disuguali. Diciamo che è maggiore la OL, avente la proiezione maggiore.

Infatti, essendo HL > HN, potremo prendere fra H ed L un punto N' tale che sia HN' = HN.

Allora, per il caso *b*), le due oblique ON, ON', aventi proiezioni uguali, saranno uguali.

Ma per quanto si è visto or ora si avrà

$$OL > ON'.$$

Avremo quindi anche

$$OL > ON.$$

Nota. — Poichè le varie ipotesi fatte dianzi sulle proiezioni si escludono a vicenda, le conclusioni precedenti sono invertibili, cioè « oblique uguali avranno proiezioni uguali ecc. ». (Cfr. la nota a piè della pag. 39).

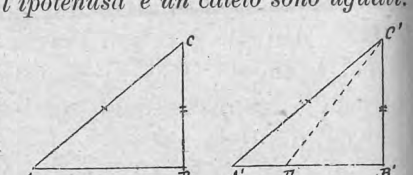
113. Def. — Data una retta e un punto fuori di essa, dicesi *distanza del punto dalla retta* la perpendicolare abbassata dal punto sulla retta od ogni altro segmento uguale a codesta perpendicolare.

Triangoli rettangoli.

Come applicazione del teorema del n. 112 dimostreremo un nuovo criterio di uguaglianza dei triangoli rettangoli che va aggiunto a quelli del n. 109.

114. Teor. — *Due triangoli rettangoli che hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto sono uguali.*

Siano i due triangoli ABC, A'B'C', rettangoli in B, B' rispettivamente e tali che sia



$$AC = A'C',\ BC = B'C'.$$

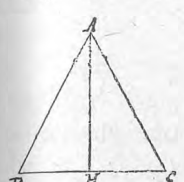
Diciamo che i due triangoli sono uguali. Basta perciò dimostrare che è AB = A'B' (n. 109 *a*). Se così non fosse, uno di codesti due segmenti p. es. A'B' sarebbe maggiore, di modo che fra A' e B' esisterebbe

un punto D tale che B'D = BA. Condotto C'D, i due triangoli ABC, DB'C', che sono rettangoli e hanno i cateti uguali, sono uguali (n. 109, *a*), e hanno quindi le ipotenuse AC, DC' uguali. Ma è, per ipotesi, AC = A'C'; onde risulta che le oblique C'A', C'D condotte da C' alla A'B' ed aventi proiezioni disuguali, sono uguali, il che è impossibile (n. 112).

Abbiamo dunque che veramente è AB = A'B' e che i due triangoli ABC, A'B'C' sono uguali.

Nota. — Il teorema prec. può essere esteso anche ai triangoli ottusangoli ed acutangoli (vedi Eserc. n. 17 alla fine del capitolo).

115. Cor. — *La perpendicolare condotta dal vertice alla base di un triangolo isoscele biseca la base e l'angolo al vertice.*



Dato il triangolo isoscele ABC di vertice A, sia AH la perpendicolare abbassata da A sulla base. Diciamo che è

$$BH = HC \text{ e } \widehat{BAH} = \widehat{HAC}.$$

Invero i due triangoli ABH, ACH, che per costruzione sono rettangoli, hanno le ipotenuse uguali per ipotesi e il cateto AH in comune, e perciò sono uguali (n. prec.). Sarà quindi appunto

$$BH = HC,\ \widehat{BAH} = \widehat{HAC}.$$

Nota. — La proposizione si deduce ugualmente dal n. 109 *d*).

116. Il corollario precedente in quanto enuncia due distinte proposizioni, ammette due inverse. Queste sono vere entrambe.

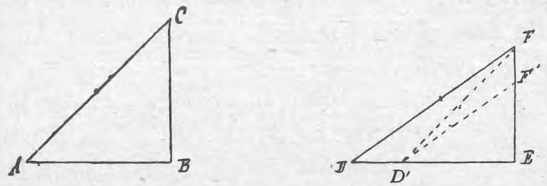
a) *In un triangolo isoscele la congiungente il vertice col punto di mezzo della base è perpendicolare alla base* (n. 90).

b) *In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è perpendicolare alla base* (n. 79).

117. Nota — Se per un triangolo è verificata la proprietà indicata al n. 115 o una delle due proprietà indicate al n. prec. il triangolo è isoscele.

118. Teor. — *Se due triangoli rettangoli hanno le ipotenuse uguali, e un cateto del primo è minore di un cateto del secondo, l'altro cateto del primo è maggiore del cateto rimanente del secondo.*

I triangoli ABC, DEF rettangoli in B, E rispettivamente, abbiano le ipotenuse AC, DF uguali e il



cateto AB minore del cateto DE. Diciamo che l'altro cateto BC è maggiore di EF.

Anzitutto BC non può essere uguale ad EF poichè, se così fosse, i due triangoli rettangoli ABC DEF, avendo uguali le ipotenuse e i cateti BC, EF, sarebbero uguali (n. 109) ed avrebbero uguali i cateti AB, DE, il che è contro l'ipotesi.

Sia in secondo luogo, se è possibile, BC minore di EF. Potremo allora prendere una parte EF′ di EF, la quale sia uguale a BC; e siccome per ipotesi DE è maggiore di AB, potremo scegliere fra D ed E un punto D′ tale che D′E sia uguale ad AB. Congiunto D′ con F′, otteniamo il triangolo rettangolo D′EF′, il quale ha i cateti uguali ai cateti del triangolo rettangolo ABC, ed è quindi ad esso uguale (n. 109, *a*). Saranno in particolare uguali le ipotenuse AC, D′F′: ma per ipotesi AC è uguale a DF, onde risulta che DF è uguale a D′F′.

Ma questa uguaglianza è assurda. Invero congiunto F con D′, abbiamo che delle due oblique D′F′, D′F, condotte da D′ alla EF, la D′F è maggiore, e delle due oblique FD′, FD, condotte da F alla DE, è maggiore la FD (n. 112.) Discende di qui che la DF è, a più forte ragione, maggiore di D′F′.

Dunque anche l'ipotesi che BC sia minore di EF risulta assurda. Si conclude che veramente BC è maggiore di EF.

Luoghi geometrici.

119. Def. — Una figura contenente infiniti punti si dirà *luogo geometrico* (o *luogo*) dei punti che godono di una certa proprietà, allorchè:

1) tutti i punti della figura godono della proprietà indicata;

2) ogni punto che gode della proprietà stessa appartiene alla figura suddetta, cioè soltanto i punti della figura godono di quella proprietà [1].

Così ad es. il semipiano limitato dalla retta *a* che contiene il punto A è il luogo dei punti che giacciono con A dalla medesima parte di *a*; la retta *a* è il luogo dei punti appartenenti ai due semipiani limitati da *a*, ecc.

---

[1] Le proposizioni 1), 2), che *caratterizzano* il luogo, sono l'una *inversa* dell'altra.

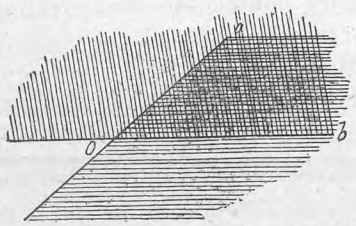
120. Sia F_1 una figura luogo dei punti che godono di una certa proprietà A, ed F_2 il luogo dei punti che godono di una proprietà B.

I detti luoghi si possono combinare generalmente in due modi diversi:

1) per *riunione*, considerando l'insieme dei punti che appartengono all'una *o* all'altra delle due figure. Si ottiene così una figura $(F_1 + F_2)$ che costituisce il luogo dei punti soddisfacenti all'una *o* all'altra delle due proprietà A, B.

2) per *interferenza*, considerando l'insieme dei punti comuni ad F_1 ed F_2 (supposto che le due figure abbiano dei punti comuni). Per tal modo si ottiene l'insieme di tutti i punti (in numero finito o infinito) che soddisfano all'una *e* all'altra delle due proprietà A, B.

Se p. es. i luoghi dati sono due semipiani limitati dalle rette *a*, *b* secantisi nel punto O, combinandoli per interferenza si ottiene una della quattro regioni angolari convesse formate dalle due rette (nella fig. è tratteggiata doppiamente); combinandoli per riunione si ottiene invece la regione angolare concava che comprende quella convessa or ora accennata e le due regioni angolari adiacenti (nella figura è tutta la parte tratteggiata).

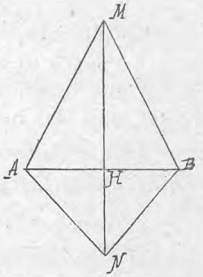


Così pure un triangolo, si ottiene combinando per interferenza i tre semipiani limitati dalle rette dei lati e contenenti i vertici.

121. Le considerazioni generali che abbiamo abbozzato riescono utili in quanto permettono di dedurre la conoscenza di nuovi luoghi geometrici da quella di alcuni luoghi che si siano già in qualche modo determinati; inoltre esse ci guideranno più tardi a trarre partito dalla considerazione dei luoghi geometrici per la risoluzione di problemi in cui si tratti di determinare i punti che soddisfano a molteplici condizioni.

Qui intanto ci limitiamo alle seguenti semplicissime determinazioni di luoghi.

122. Teor. — *Il luogo dei punti equidistanti da due punti è la perpendicolare innalzata sul loro segmento nel punto di mezzo* (asse del segmento).



Dati i due punti A, B, sia H il punto di mezzo di AB. Conduciamo la perpendicolare ad AB in H.

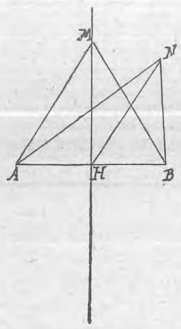
a) Diciamo che ogni punto N di codesta perpendicolare è equidistante da A e B.

Invero (supposto M distinto da H) i segmenti AM, MB come oblique aventi proiezioni AH, BH uguali sono uguali (n. 112).

b) Diciamo in secondo luogo che ogni punto N, equidistante da A e B, appartiene alla perpendicolare ad AB nel punto medio H.

Condotti infatti, i segmenti NA, NH, NB e supposto N, distinto da H, otteniamo i due triangoli AHN, BHN, i quali, avendo ordinatamente uguali i tre lati sono uguali (n. 90). Ne risulta che gli angoli adiacenti $\widehat{AHN}$, $\widehat{BHN}$ sono uguali e perciò retti, ossia che la HN coincide con la perpendicolare in H alla AB.

123. Combinando per interferenza il luogo or ora trovato col semipiano da una banda della retta AB troviamo che il luogo dei punti del piano che giac-



ciono da una banda della AB e sono equidistanti da A e B è la semiretta condotta dal punto di mezzo di AB, perpendicolarmente ad esso e dalla banda considerata.

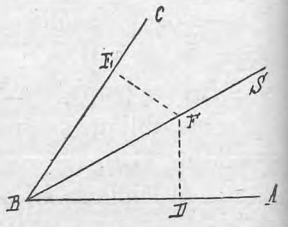
124. Dati due punti A, B, si dimostra facilmente, ricorrendo al teorema del n. 96, che il luogo dei punti del piano, la cui distanza da B è minore di quella da A è quello dei due semipiani relativi all'asse HM del segmento AB, in cui cade B.

Similmente il luogo dei punti che distano da B più che da A è l'altro di codesti due semipiani.

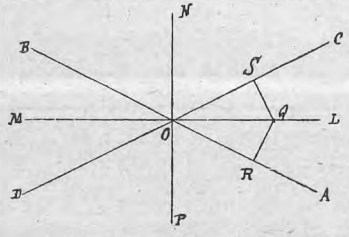
I due luoghi nominati si dicono *separati* dall'asse HM di AB, cioè dal luogo dei punti equidistanti da A e B.

125. Teor. — *Il luogo geometrico dei punti di un angolo equidistanti dai lati è la semiretta bisettrice dell'angolo.*

Lasciamo come esercizio per il lettore di dimostrare questo teorema (v. fig.).



126. — Considerando i quattro angoli formati da due rette AB, CD che si incontrano in un punto O, e applicando a ciascuno di essi il teorema precedente, otteniamo, combinando per riunione i quattro luoghi geometrici che così si hanno, il seguente



Cor. — *Il luogo geometrico dei punti del piano, equidistanti da due rette che si intersecano, è l'insieme delle bisettrici (fra loro perpendicolari) delle due coppie di angoli opposti al vertice formati dalle due rette.*

127. Dal teorema precedente si deduce che il luogo dei punti, la cui distanza dalla retta AB è maggiore di quella dalla retta CD (fig. prec.), è l'insieme dei punti interni all'angolo $\widehat{LON}$ e al suo opposto al vertice, e che il luogo dei punti che distano da CD più che da AB è l'insieme dei punti interni all'angolo $\widehat{NOM}$ e al suo opposto al vertice.

Codesti due luoghi si dicono *separati* dalle due rette LM, NP, cioè dal luogo dei punti equidistanti da AB e CD.

Poligoni.

128. Si può considerare una serie di figure tra le quali si trovano come casi particolari i triangoli considerati dianzi.

Siano dati nel piano n punti $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ($n \geq 3$), tali che non ve ne siano tre consecutivi in linea retta e che quando si congiungano a due a due nell'ordine in cui son dati (il primo col secondo, il secondo col terzo, ..., l'ultimo col primo) ogni congiungente lasci tutti gli altri $n-2$ punti da una stessa parte.

Allora gli n segmenti A_1A_2, A_2A_3,...., A_nA_1 sono tali che due non consecutivi non possono intersecarsi (n. 40).

Inoltre gli n angoli (convessi) $A_n\widehat{A_1}A_2$, $A_1\widehat{A_2}A_3$,..., $A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ contengono ciascuno tutti gli n punti dati; e sono tali che ogni punto comune ad $n-1$ fra essi appartiene anche all'n^{mo}.

Ciò si dimostra in modo analogo a quello del n. 68

129 Def. — Siano dati nel piano n punti $A_1, A_2, .., A_n$ ($n \geq 3$) tali che tre consecutivi non siano in linea retta, e che quando si congiungano a due a due nell'ordine in cui sono dati (il primo col secondo, il secondo col

terzo...., l'ultimo col primo) ogni congiungente lasci tutti gli altri $n-2$ punti da una stessa parte.

Si dice *poligono* $A_1A_2...A_n$ la figura costituita dai punti comuni agli n angoli $A_n\widehat{A_1}A_2$, $A_1\widehat{A_2}A_3$, ..., $A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$, che contengono gli n punti dati.

Gli n punti $A_1, A_2 ..., A_n$ diconsi lati e gli n segmenti A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 *lati* del poligono. L'insieme dei lati dicesi *contorno* ed ogni segmento uguale alla somma dei lati si dice *perimetro*.

Il poligono a tre vertici è il triangolo. I poligoni a 4, 5, 6, 10, 15,... vertici diconsi rispettivamente *quadrangolo, pentagono, esagono, decagono, pentadecagono,....*

Gli n angoli $A_n\widehat{A_1}A_2$, $A_1\widehat{A_2}A_3$, ... $A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ si dicono *angoli del poligono*, e i $2n$ angoli adiacenti si designano col nome di *angoli esterni.*

Osservazione. — Gli angoli (ordinati,

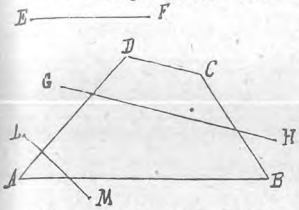
$$A_1\widehat{A_2}A_3,\ A_2\widehat{A_3}A_4,\ ....,\ A_{n-1}\widehat{A_n}A_1,\ A_n\widehat{A_1}A_2$$

hanno tutti ugual verso, e il verso comune di codesti angoli corrisponde al verso $A_1, A_2, ..., A_n$, in cui si può immaginare descritto il contorno da un punto mobile, conformemente all' *ordine dei vertici* del poligono, dato dalla costruzione (cfr. n. 65).

130. I punti del poligono non giacenti sul contorno diconsi *interni* al poligono. Diconsi invece *esterni* i punti non appartenenti al poligono (cioè nè giacenti sul contorno nè interni).

131. Le proprietà relative alla posizione reciproca dei punti interni ed esterni ad un poligono sono riassunte nel seguente enunciato:

Il contorno di un poligono divide il piano in due parti (che diconsi *limitate* dal contorno, ad esse comune) *tali che considerati due punti, fuori del contorno, non appartenenti ad una retta passante per un vertice:*



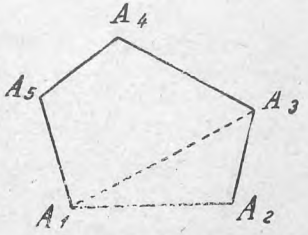
se essi giacciono dalla medesima parte, il segmento che li congiunge non sega il contorno o lo sega in due punti;

se essi giacciono da parti opposte il detto segmento incontra il contorno in un punto.

Delle due parti una è il poligono ed è *finita* (cfr. Nota al n. 69) e l'altra è *infinita.*

132. Teor. — *In un poligono ogni lato è minore della somma dei rimanenti.*

Il teorema si è dimostrato pel caso del triangolo al n. 90; si dimostra in generale, argomentando da $n-1$ ad n o per *induzione* (1).



Supponiamo p. es. dimostrato il teorema pei poligoni di quattro lati: diciamo che esso è vero anche pei poligoni di cinque lati. Dato il poligono $A_1A_2A_3A_4A_5$ vogliamo mostrare che il lato A_1A_2 è minore della somma degli altri quattro lati. Considerati perciò i tre vertici consecutivi A_1, A_2, A_3, conduciamo la diagonale A_1A_3. Nel triangolo $A_1A_2A_3$ pel n. 90 si ha $A_1A_2 < A_2A_3 + A_1A_3$: e nel poligono a quattro lati $A_1A_3A_4A_5$ si ha per l'ipotesi fatta

(1) Si applica cioè il seguente principio:

Se un poligono gode di una certa proprietà, e se si è dimostrato che, ammessa codesta proprietà per un poligono ad un numero qualsiasi n di lati, essa deve sussistere per il poligono ad $n+1$ lati, ogni poligono godrà di quella proprietà.

Questo principio si può applicare ad ogni classe di figure geometriche che sia *numerabile*, cioè tale che ad ogni sua figura corrisponda un numero (intero) ed uno solo e ad ogni numero (intero) una figura ed una sola.

L'indicato principio, nella sua forma generale, prende il nome di " *legge d'induzione.* ,,

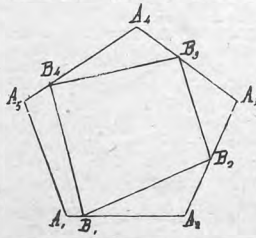
$$A_1A_3 < A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_1.$$

Perciò, a più forte ragione, A_1A_2 sarà minore della somma di A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1.

Così si dimostra che se il nostro teorema è vero pei poligoni di $n-1$ lati è vero anche per quelli ad n lati. Ma noi sappiamo che il teorema è vero pei triangoli (poligoni a tre lati). Esso verrà quindi pei poligoni a 4, 5, 6,..... lati, cioè per ogni poligono.

Nota. Evidentemente può qui ripetersi l'osservazione fatta al n. 90 pel caso del triangolo.

133. Teor. — *Se un poligono è contenuto in un altro* (cioè se i vertici del primo appartengono al secondo) *il perimetro del primo è minore di quello del secondo.*

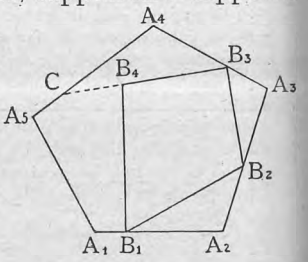


Consideriamo anzitutto il caso in cui il secondo poligono è *iscritto* nel primo, cioè i vertici del secondo appartengono al contorno del primo. Sia p. es., il poligono $B_1B_2B_3B_4$, iscritto nel poligono $A_1A_2A_3A_4A_5$. Abbiamo evidentemente (n. prec.)

$$B_1B_2 < B_1A_2 + A_2B_2,\ B_2B_3 < B_2A_3 + A_3B_3,$$
$$B_3B_4 < B_3A_4 + A_4B_4,\ B_4B_1 < B_4A_5 + A_5A_1 + A_1B_1$$

e quindi risulta senz'altro che il perimetro di $B_1B_2B_3B_4$ è minore del perimetro di $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Per passare al caso generale, supponiamo dapprima che il secondo poligono abbia un solo vertice interno al primo; p. es. consideriamo il poligono $B_1B_2B_3B_4$, di cui i vertici B_1, B_2, B_3, appartengono al contorno di $A_1A_2A_3A_4A_5$ e il vertice B_4 è interno.



Si prolunghi uno dei lati concorrenti in B_4 per es. B_3B_4, fino ad incontrare in C il contorno di $A_1A_2A_3A_4A_5$. Otteniamo così un poligono $A_1A_2A_3B_3CA_5$, il quale è iscritto in $A_1A_2A_3A_4A_5$ e, alla sua volta ammette come poligono iscritto il poligono $B_1B_2B_3B_4$. Risulta allora dalla prima parte di questa dimostrazione che

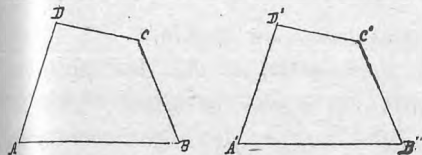
$$\text{perim. di } B_1B_2B_3B_4 < \text{perim. di } A_1A_2A_3B_3CA_5 < \text{perim. di } A_1A_2A_3A_4A_5$$

e quindi che veramente il perimetro di $B_1B_2B_3B_4$ è minore di quello di $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Analoga dimostrazione vale nel caso in cui due o più vertici del secondo poligono siano interni al primo.

Poligoni uguali.

134. Def. — Due poligoni ABC.....H, A'B'C'.....H', presi i loro vertici nell'ordine scritto, si dicono *uguali* o *congruenti* se hanno ordinatamente uguali i lati e gli angoli, compresi fra lati uguali.



Così p. es. i due quadrangoli ABCD, A'B'C'D', presi i loro vertici nell'ordine scritto, si diranno uguali se è

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ CD = C'D',\ DA = D'A'$$

e

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}, \widehat{D} = \widehat{D'}.$$

Scriveremo $ABCD \equiv A'B'C'D'$.

Per il simbolo precedente si veda la Nota n. 76.

135. Osservazione. — La definizione precedente si giustifica, analogamente al n. 74, osservando che i due poligoni considerati sono sovrapponibili.

Nel caso in cui una coppia di angoli corrispondenti (e quindi per l' osservazione del n. 129 tutte le altre) hanno ugual verso, i due poligoni sono sovrapponibili l' uno all'altro con un movimento nel piano e si dicono *uguali direttamente*. Nel caso opposto, in cui le coppie di angoli corrispondenti hanno versi discordi, i due poligoni non si possono sovrapporre se non facendone uscire uno dal piano, p. es. ribaltandolo intorno ad un suo lato: in tal caso i due poligoni si dicono *inversamente uguali*.

136. Come già succede nel caso dei triangoli, per dimostrare l'uguaglianza di due poligoni ad n lati non occorre proprio di accertare l'uguaglianza di tutte le coppie di lati e di angoli, come è indicato dalla definizione. Alcune di codeste $2n$ uguaglianze sono conseguenze delle altre, come risulta p. es. dai seguenti teoremi, la cui dimostrazione proponiamo come esercizio.

137. Teor. — *Due quadrangoli sono uguali, se hanno ordinatamente uguali*:

a) *tre lati e i due angoli compresi;*

b) *oppure due lati, l'angolo compreso e altri due angoli;*

c) *oppure i quattro lati e un angolo.*

138. Teor. — *Si può concludere che due poligoni di ugual numero di lati sono uguali, se si sa che hanno ordinatamente uguali tutti i lati e gli angoli compresi fra lati uguali, eccettuati:*

a) *due angoli consecutivi e il lato ad essi comune;*

b) *o due lati ed un angolo adiacente almeno ad uno di essi;*

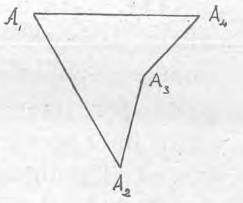
c) *o tre angoli consecutivi,*

sui quali non si fa nessuna ipotesi.

Poligoni concavi.

139. Si può estendere il concetto di poligono,

quale è stato dato al n. 129, considerando poligoni *concavi*, cioè tali che la retta di qualche lato non lasci tutti i vertici da una stessa parte, mentre tuttavia non accade mai che due lati, non consecutivi, si seghino a vicenda.



P. es. il quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$ è concavo, perchè la retta A_3A_4 lascia da parti opposte i vertici A_1, A_2.

Un poligono soddisfacente alle condizioni della nostra prima definizione (n. 129) si dice *convesso*.

Noi quando nel seguito parleremo di poligoni, senz'altra indicazione, intendiamo parlare di poligoni convessi.

140. Qui intanto gioverà enunciare rapidamente alcune osservazioni sui poligoni tanto convessi che concavi.

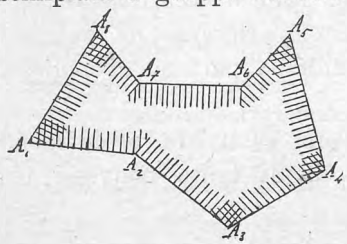
I lati di un poligono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, sia esso convesso o concavo, danno luogo a due *serie* di angoli $A_1\widehat{A_2}A_3$, $A_2\widehat{A_3}A_4$, ...; gli angoli di ciascuna serie hanno ugual verso; se il poligono è convesso, tutti gli angoli di una serie sono convessi, e quelli dell'altra sono concavi; ai primi abbiamo dato il nome di angoli del poligono (n. 121). Quando si tratti invece di un poligono concavo, in ciascuna delle due serie vi è almeno un angolo concavo; onde se, in modo rispondente all'intuizione della figura, vogliamo considerare anche in questo caso gli angoli di una serie come *angoli* del *poligono*, bisognerà dire che fra questi angoli qualcuno è sempre concavo.

Riferendoci p. es. al poligono $A_1A_2A_3A_4$, rappresentato dalla figura precedente, considereremo come an-

goli di esso gli angoli convessi $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$, $\widehat{A_4}$ e l'angolo concavo $\widehat{A_3}$.

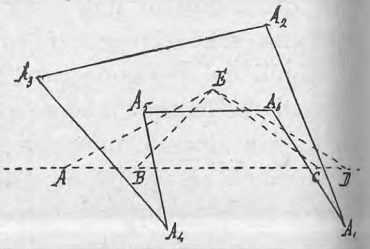
141. Dato un poligono convesso, tutti i semipiani definiti dalle rette dei lati e contenenti i vertici hanno comune il poligono, il quale è così ottenuto combinando per interferenza codesti semipiani: mentre i semipiani opposti danno per riunione la parte di piano esterna al poligono.

Quando si tratta invece di un poligono concavo, la superficie si ottiene in generale combinando alcuni semipiani a gruppi fra loro per riunione (in corrispondenza degli angoli concavi del poligono) e determinando l'interferenza delle parti di piano (regioni angolari concave e semipiani) che così si ottengono. E i semipiani opposti, combinati fra loro opportunamente (cioè in modo opposto) determinano la parte di piano esterna.



Codeste due parti di piano (che si dicono limitate dal contorno del poligono) sono tali che:

dati dati due punti del piano, fuori del contorno, i quali non si trovino sopra una retta passante per un vertice. il segmento che li congiunge sega il contorno nn numero pari (o nullo) oppure un numero dispari di volte, secondochè i punti suddetti giacciono nella medesima parte o in parti diverse rispetto al poligono (v. fig.).



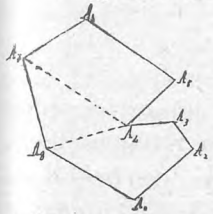
142. Prolungando opportunamente alcuni lati di un poligono concavo (penetranti nel poligono stesso)

si può dividere il poligono in tanti poligoni convessi *non ricoprentisi* (cioè non aventi comuni, a due a due, punti interni) di cui esso risulti la riunione.

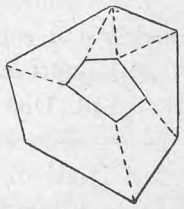
Allora il poligono concavo si dirà *somma* di codesti poligoni convessi *(parti)*.

In generale diremo *somma* di più poligoni *non ricoprentisi* la riunione di essi.

È particolarmente interessante il caso in cui i poligoni non ricoprentisi di cui si considera la somma, presi in un certo ordine, siano a due a due *adiacenti*, cioè abbiano in comune uno o più segmenti, parte del contorno. Allora la somma di essi è generalmente un poligono convesso o concavo, che si ottiene togliendo semplicemente i segmenti comuni.



Ma può anche accadere che si ottenga una somma, la quale si possa definire come interferenza della parte di piano interna ad un poligono e della parte esterna ad un altro (o a più altri).



143. Def. — Due poligoni qualsiasi (convessi o concavi) $A_1A_2 \ldots A_n$, $A'_1A'_2 \ldots A_n$, si diranno *uguali* o *congruenti* allorchè i lati e gli angoli di una serie dell'uno sono ordinatamente uguali ai lati e agli angoli di una serie dell'altro (n. 133).

Allora anche gli angoli delle due serie rimanenti sono ordinatamente uguali.

Questa definizione ricade in quella del n. 129, stabilita per i poligoni convessi.

144. L'uguaglianza di due poligoni, anche in questo caso più generale, può essere verificata speri-

mentalmente mediante la *sovrapponibilità* di essi col movimento.

Ed anche qui si può distinguere l'uguaglianza *diretta* dalla *inversa*, secondo che i due poligoni possono o no essere fatti coincidere con un movimento *nel* piano. Il primo caso si presenta quando le coppie di angoli corrispondenti nei due poligoni hanno verso concorde: il secondo quando hanno verso discorde.

Poligonali.

145. Def. — Dati nel piano, in un certo ordine n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, non in linea retta, la figura costituita dagli n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *(vertici)* e dagli $n-1$ segmenti $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ *(lati)* dicesi *linea spezzata* o *poligonale* $A_1A_2 \ldots . A_n$.

La somma dei lati della poligonale dicesi *perimetro*, e il segmento A_1A_n *risultante*.

I punti A_1 e A_n diconsi *termini* della poligonale.

146. Due lati consecutivi di una poligonale definiscono due angoli, uno convesso e l'altro concavo. Così i lati di una poligonale $A_1A_2 \ldots . A_n$ danno luogo a due serie di n-2 angoli ciascuna.

Se si considerano tutti gli *angoli ordinati* secondo un certo verso prefissato, le due serie sono date da

$$A_1\widehat{A_2}A_3,\ A_2\widehat{A_3}A_4,\ \ldots,\ A_{n-2}\widehat{A_{n-1}}A_n$$

e

$$A_3\widehat{A_2}A_1,\ A_4\widehat{A_3}A_2,\ \ldots\ A_n\widehat{A_{n-1}}A_{n-2}$$

147. Si estende alle poligonali la def. del n. 143

Def. — Due poligonali dello stesso numero di lati diconsi *uguali* o *congruenti* se hanno ordinatamente uguali i lati e gli angoli di una serie.

Se due lati non consecutivi della poligonale hanno qualche punto comune, la poligonale si dice *intrecciata*; si dice *sciolta* nel caso contrario.

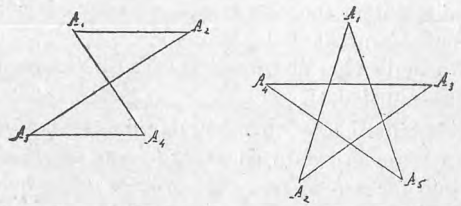
Una poligonale sciolta si dice *convessa*, se ciascun suo lato lascia tutti da una parte i vertici che non appartengono al lato considerato; si dice *concava*, quando la retta di qualcuno dei lati non lascia tutti i vertici da una stessa parte.

148. Se i due termini di una poligonale coincidono, la poligonale si dice *chiusa*.

Una poligonale chiusa ad n lati ha, in ciascuna serie, n angoli ed è chiaro che una poligonale chiusa sciolta costituisce il contorno di un poligono (convesso o concavo).

E notiamo che l'uguaglianza di due poligonali sciolte implica l'uguaglianza dei corrispondenti poligoni (n. 134) e viceversa.

149. Le poligonali chiuse intrecciate conducono a estendere ulteriormente il concetto di poligono e a considerare *poligoni intrecciati*.



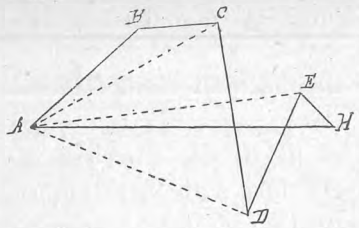
Ma noi non ci indugeremo su questa estensione.

150. Teor. — *La risultante di una poligonale è minore del perimetro.*

Pel caso di una poligonale convessa, poichè chiudendola si ottiene un poligono convesso, il teorema è già stato dimostrato (n. 132).

La dimostrazione data in quel caso si estende al caso generale. Consideriamo infatti, p. es. una poligonale di sei lati ABCDEH. Congiunto il termine A col vertice C, otteniamo una poligonale ACDEH il cui perimetro è evidentemente minore di quello della primitiva poichè (n. 97)

$$AC < AB + BC.$$



Sulla nuova poligonale, avente un lato di meno della primitiva, possiamo ripetere un' osservazione analoga: così procedendo troveremo che il perimetro della poligonale è maggiore del perimetro di una poligonale di due soli lati AE, EH (n. 97). Ne risulta che AH è minore del perimetro della poligonale primitiva.

Costruzioni.

151. Nelle applicazioni della Geometria al disegno si suppone dato un foglio che rappresenta il piano fondamentale in cui si opera. Col *lapis* si segnano quanti si vogliano *punti*, e, se occorre, si segnano sopra una retta, sopra un segmento, entro un angolo, entro un triangolo, ecc.

Coll'aiuto della *riga* si traccia la *retta* o il segmento congiungente due punti dati.

Per determinare (costruire) sopra una retta un *segmento uguale* ad un segmento dato ed avente come estremo un punto segnato, si può far uso di una *riga graduata* che permette il *trasporto* del segmento: più spesso si usa all' uopo il *compasso* di cui parleremo più tardi.

Per determinare (costruire) un angolo uguale ad un angolo dato avente un dato lato, occorrerebbe tagliar un foglio di carta per modo che quando fosse disteso sul piano i suoi orli si potessero adagiare sui lati dell'angolo, e poi trasportarlo.

Quest' ultima operazione è quanto mai incomoda ed inesatta, ed ora impareremo, come applicazione dei teoremi sulle

perpendicolari, ad eseguire la costruzione in altro modo facendo uso della *squadra*, cioè di una lastra di legno o di metallo che realizzi un angolo retto. Più tardi una costruzione più semplice sarà data col *compasso*.

La riga, la riga graduata, il compasso, la squadra, sono *istrumenti* che permettono di effettuare certe costruzioni geometriche.

Volendo studiare che cosa si possa ottenere coll'uso di uno strumento, si comincia col fissare il modo o i modi di adoperarlo indicando le *costruzioni fondamentali* che così si effettuano. Si cerca poi di determinare, cioè *costruire un* elemento che soddisfi a date condizioni prefissate, *riducendo la proposta determinazione all'esecuzione successiva di più costruzioni fondamentali.*

Due istrumenti che permettono di effettuare le stesse costruzioni fondamentali, si possono sostituire l'uno all' altro, e si dicono *equivalenti.*

152. In queste prime applicazioni adopereremo la *riga graduata* e la *squadra*, che ci permettono di eseguire immediatamente le seguenti *costruzioni fondamentali.*

1) CON LA RIGA (senza far uso della graduazione di essa): *Congiungere due punti.*

La riga, supposta abbastanza lunga, si adagia sul foglio in modo che uno stesso suo orlo vada a sfiorare i due punti dati, e poi si fa scorrere la matita lungo l'orlo della riga andando da un punto all'altro.

2) COLLA RIGA GRADUATA: *Costruire sopra una retta con un punto come estremo, e da una parte di esso, un segmento uguale ad un segmento dato.*

La riga graduata si adagia sul foglio con un orlo lungo il segmento dato e una delle graduazioni in uno degli estremi del segmento, e poi si guarda a quale altra graduazione della riga è più vicino l' altro estremo del segmento. Si ha così sull'orlo della riga un segmento *sensibilmente* uguale al segmento dato, raggiungendosi un' *approssimazione* che si può rendere teoricamente grande quanto si vuole.

Questo segmento d'orlo della riga può essere trasportato sopra la retta data, in guisa che abbia un estremo nel punto fissato e giaccia rispetto ed esso nella parte della retta che è stata assegnata.

È poi di per sè manifesto in qual modo la riga graduata permetta di costruire la *somma di quanti si vogliono segmenti* e la *differenza di due segmenti dati.*

3) CON LA SQUADRA: *Condurre per un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

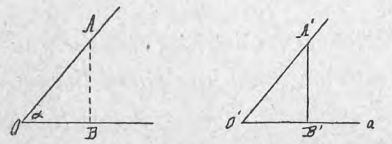
Si fa scorrere uno dei due orli della squadra, che sono lati dell'angolo retto, lungo la retta data, finchè l'altro orlo giunga a sfiorare il punto dato, e allora si fa scorrere lungo quest'ultimo orlo la matita.

Più innanzi vedremo come la squadra si possa sostituire col compasso, che ha anzi un uso più largo.

Intanto vediamo come, con gli indicati strumenti usati ad effettuare le costruzioni fondamendali, si risolvano i più semplici problemi costruttivi. Avremo così un'interessante applicazione pratica dei teoremi d'uguaglianza dei triangoli.

153. Probl. — *Costruire sopra una semiretta data, e da una banda assegnata di essa, un angolo uguale ad un angolo dato.*

Dato l'angolo α di vertice O e la semiretta a di origine O', si prenda ad arbitrio sopra un lato di α il punto A, e da esso si abbassi la perpendicolare AB sopra l'altro lato [3)]: poi sulla semiretta a si prenda il segmento O'B' uguale ad OB [2)], da B' si innalzi la perpendicolare alla OB' [3)] e su di essa dalla banda prefissata rispetto ad a, si prenda il segmento B'A' uguale a BA [2)]. Infine si congiunga O' con A' [1)].



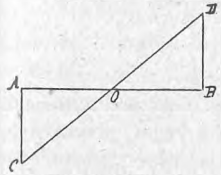
L'angolo $B'\widehat{O'}A'$ è uguale all'angolo α: infatti i triangoli OBA, O'B'A' rettangoli per costruzione in B, B' ed aventi i cateti OB, BA uguali a O'B', B'A' rispettivamente, sono uguali (n. 109) ed hanno quindi uguali gli angoli $B\widehat{OA}$, $B'\widehat{O'}A'$.

154. Nota. — Si può dire che la costruzione precedente permette di effettuare il trasporto di un qualsiasi angolo. Essa dà evidentemente il modo di costruire la *somma* di quanti si vogliono angoli dati e la *differenza di due angoli dati.*

155. Probl. — *Dati un triangolo e un segmento uguale ad un lato di esso, costruire su questo segmento come base e da una parte prefissata di esso, un triangolo uguale al dato.*

Una costruzione, eseguibile cogli strumenti nominati sopra, è indicata al n. 80.

156. Probl. — *Bisecare un segmento dato.*



Dal n. 88 e dal n. prec. risulta una costruzione atta a risolvere il problema; ed un' altra ne risulta dal n. 109 *c*): si conducano, mediante la squadra le due rette perpendicolari al segmento nei suoi estremi A, B e si prendano su queste, da parti opposte di AB, i segmenti uguali AC, BD. Il segmento CD sega AB nel punto medio cercato. Infatti i due triangoli rettangoli ACO, BDO hanno AC = BD e gli angoli in O uguali, perciò [n. 109 *c*)] sono uguali e AO = BO.

ESERCIZI

Proponiamo qui come esercizi alcuni teoremi da dimostrare e alcuni problemi da risolvere. Essi si susseguono nell'ordine stesso in cui si succedono nel capitolo precedente i teoremi, dai quali essi rispettivamente dipendono.

1. Una retta non può traversare più di quattro delle sette regioni del piano determinate da un triangolo.

2. Discutere le mutue posizioni di due triangoli in relazione colle parti che essi possono avere comuni.

3. Quattro rette di un piano, che a due a due si segano, determinano sei punti: scegliendone opportunamente quattro come vertici, si possono ottenere *due* quadrilateri convessi, uno dei quali ha le quattro rette come lati.

4. Dato un triangolo, un quadrilatero o un poligono convesso di un numero qualsiasi di lati e una retta passante per un vertice, si discuta quando questa abbia una ulteriore intersezione col contorno.

5. Quale è il poligono che ha tante diagonali quanti sono i lati?

6. In un quadrangolo, se le diagonali si dimezzano, sono uguali i lati opposti e gli angoli opposti.

7. In un quadrangolo, se le diagonali sono uguali e si dimezzano scambievolmente, i quattro angoli sono uguali.

8. Se sopra i lati AB, BC, CA di un triangolo equilatero (cioè avente i lati uguali), si prendono i tre punti D, E, F per modo che sia AD = BE = CF, il triangolo DEF è anche esso equilatero.

9. In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali (cioè i segmenti congiungenti i punti medi dei lati uguali, coi vertici degli angoli opposti) sono uguali.

10. Nel triangolo equilatero i tre segmenti congiungenti i punti medi dei lati coi vertici opposti sono uguali.

11. In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base (cioè i segmenti di coteste bisettrici compresi fra i vertici e i lati opposti) sono uguali.

12. In un triangolo isoscele i segmenti delle bisettrici degli angoli sotto la base compresi fra i vertici e i prolungamenti dei lati opposti sono uguali.

13. Dato un angolo di vertice O, si prendano su di un lato due segmenti arbitrari OA, OA′ e sull'altro lato i segmenti rispettivamente uguali OB, OB′, e si congiungano A con B′ e A′ con B. Dimostrare:

a) che i due segmenti AB′, A′B hanno un punto H comune:

b) che A′B = AB′;

c) che sono uguali i triangoli AA′H, BB′H;

d) che $\widehat{AOH} = \widehat{BOH}$;

e) che $\widehat{AHO} = \widehat{OHB}$.

Nota. — Questo esercizio dà luogo ad una costruzione per bisecare un angolo qualunque, mediante la riga e la riga graduata.

14. Se un quadrangolo ha i lati opposti uguali, anche gli angoli opposti sono uguali e le diagonali si dividono scambievolmente per metà.

15. Due poligoni di egual numero di lati, in cui i lati sono ordinatamente uguali e le diagonali che vanno ad un vertice sono uguali ed egualmente disposte, sono uguali.

16. Se in un triangolo sono uguali due altezze (cioè i segmenti delle perpendicolari abbassate da due vertici sui lati opposti o sui loro prolungamenti, compresi fra codesti vertici e codesti lati) il triangolo è isoscele.

17. Se due triangoli hanno ordinatamente uguali due lati

e l'angolo opposto al primo lato, essi sono uguali, purchè l'angolo opposto al secondo lato sia in entrambi i triangoli o acuto o retto o ottuso (cfr. n. 114).

Def. — Due punti si dicono *simmetrici* rispetto a un punto *(centro di simmetria)* se la loro congiungente è dimezzata da codesto punto.

Due punti si dicono *simmetrici* rispetto ad una retta (asse di simmetria), se appartengono ad una medesima perpendicolare a codesta retta e ne sono equidistanti.

Due figure si dicono *simmetriche* rispetto ad un punto o ad un asse se ciascuna è costituita da tutti e soli i punti simmetrici dei punti dell'altra, rispetto al punto o alla retta considerati.

18. Costruire la figura simmetrica di un poligono rispetto ad un punto o ad una retta.

19. Dimostrare che la figura del numero precedente è un poligono uguale al dato.

La uguaglianza è diretta nel primo caso, inversa nel secondo.

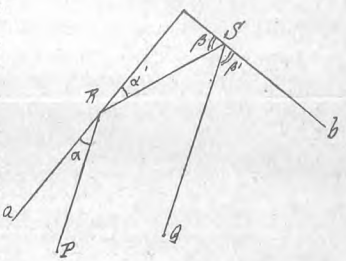
20. Date due rette a e b, perpendicolari ed aventi comuni il punto O, sia F′ la figura simmetrica di una figura F rispetto ad a e sia F″ la figura simmetrica di F′ rispetto a b. Dimostrare che F è simmetrica di F″ rispetto al punto O.

Alla considerazione dei punti simmetrici rispetto a una retta si collegano i seguenti problemi, che intervengono nella teoria della riflessione dei raggi luminosi o sonori, e nello studio della deviazione di un punto materiale che urti una superficie elastica (giuoco del bigliardo).

21. Dati, fuori di una retta a e da una stessa banda rispetto ad essa, due punti B e C, si determini su a un punto X, tale che i due raggi XB, XC formino, colle due semirette in cui a è divisa da X, due angoli uguali.

[Per la costruzione si consideri il simmetrico di uno dei due punti B, C rispetto ad a.....].

22. Dati entro un angolo $\widehat{a\,b}$ due punti P, Q, costruire una poligonale, PRSQ, avente i vertici R, S su a, b rispettivamente, e tale che i due angoli formati da RP, RS con a siano uguali fra loro e i due angoli formati da SR, SQ colla b siano a pure eguali fra loro.



[Preso il simmetrico P_1 di P rispetto ad a, si cominci col risolvere il problema del numero prec. pei punti P_1, Q e per la retta b].

23. Problema analogo al precedente per il triangolo, pel quadrangolo, pel pentagono.

[Se dato il triangolo ABC, sono P e Q i termini prefissati della poligonale, si consideri il simmetrico P_1 di P rispetto ad uno dei lati, p. es. a BC, e si cominci col risolvere il problema del n. prec. rispetto ai punti P_1 e Q e all'angolo $\widehat{A}$.

Così in ogni caso, il problema or ora proposto per un poligono di un certo numero n di lati si riduce al problema analogo per un poligono di n-1 lati, e, proseguendo, si ricade sul problema del n. 21].

24. In un triangolo, se si congiunge un punto interno cogli estremi di un lato, l'angolo compreso da codesti due segmenti è maggiore dell'angolo compreso fra gli altri due lati del triangolo. (Si consideri la retta passante pel punto dato entro il triangolo e il vertice comune ai due lati ultimamente nominati; si ricordi quindi il n. 91).

25. In un triangolo la somma dei tre segmenti, che congiungono un punto interno coi tre vertici, è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

26. In un poligono la somma dei segmenti che congiungono un punto qualsivoglia coi vertici è maggiore del semiperimetro.

27. In un triangolo una *mediana* (segmento congiungente un vertice col punto medio del lato opposto) è minore della

semisomma dei lati concorrenti con essa e maggiore della semidifferenza dei lati medesimi. (Si prolunghi di altrettanto la mediana, si congiunga l'estremo con uno degli estremi del lato, a cui si è condotta la mediana, e si ricordi il n. 97).

28. In ogni quadrangolo il perimetro è maggiore della somma delle diagonali e minore del doppio di codesta somma.

I seguenti problemi si collegano ordinatamente a quelli dei nn. 21-23.

29. Dati due punti B, C fuori di una retta a e da una stessa banda di essa, determinare su a un punto tale che la somma delle sue distanze da B e C sia minore della somma analoga relativa ad ogni altro punto di a.

(Cfr. esercizio n. 21).

30. Dato un angolo e due punti interni ad esso, determinare fra le poligonali a tre lati, che hanno come termini i due punti prefissati e gli altri due vertici sui due lati dell'angolo (poligonali inscritte nell'angolo) quella che ha il perimetro minimo.

(Cfr. esercizio n. 22).

31. Analogo problema per un triangolo, per un quadrangolo, per un pentagono.....

(Cfr. esercizio n. 23).

Le seguenti proposizioni (che si riattaccano al n. 91) costituiscono una serie ordinata di esercizi, ciascun esercizio dipendendo dal precedente (1).

32. Dato un triangolo se ne può costruire un secondo che abbia un angolo non maggiore della metà di un angolo del primo, per modo che le somme degli angoli nei due triangoli sieno uguali.

33. La somma degli angoli di un triangolo non può superare due retti (dimostrazione per assurdo).

(1) Questi esercizi un po' più difficili dei precedenti, possono offrire occasione a qualche insegnante di dare più tardi qualche notizia intorno alle questioni critiche relative alla teoria delle parallele (*Geometria non euclidea*).

34. La somma degli angoli di un quadrangolo non può superare quattro retti.

35. Si supponga di avere verificato sperimentalmente che in un certo triangolo ABC la somma degli angoli è proprio uguale a due retti.

Allora si può:

a) Dimostrare che una semiretta interna ad un angolo per un vertice di ABC, divide il triangolo suddetto in due altri, per ciascuno dei quali la somma è uguale a due retti.

b) Dimostrare che per ogni triangolo contenuto in ABC la somma degli angoli è uguale a due retti.

c) Costruire un quadrangolo R avente i quattro angoli retti *(rettangolo)*.

d) Costruire un rettangolo i cui lati siano multipli di quelli di R.

e) Dimostrare che per ogni triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti.

f) Dimostrare che per ogni quadrangolo la somma degli angoli vale quattro retti.

III.

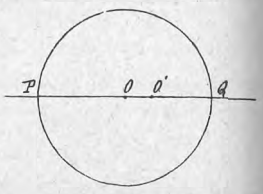
IL CERCHIO

Circonferenza e cerchio.

157. Def. — Il luogo dei punti del piano che hanno da un punto dato O distanze uguali ad un segmento AB dicesi *circonferenza* di *centro* O e *raggio* AB.

Sopra ogni retta per O vi sono, da bande opposte, due punti R, Q della circonferenza (n. 24), e il punto O è punto medio del loro segmento.

Da ciò segue che una circonferenza non può avere due centri O, O′, perchè in tal caso il segmento PQ avrebbe due punti medi.



Tutti i segmenti che congiungono O coi singoli punti della circonferenza diconsi genericamente *raggi*. Essi, per definizione, sono tutti uguali.

Ogni segmento passante pel centro di una circonferenza e avente gli estremi su questa dicesi *diametro* della circonferenza. Tutti i diametri di una stessa circonferenza sono uguali, perchè sono doppi del raggio.

Ogni semiretta uscente dal centro O ha *un* punto comune colla circonferenza.

158. Nota. — Dalla definizione stessa di una circonferenza come luogo, discende che vi è una sola circonferenza, la quale abbia un centro dato e passi per un punto dato.

159. Osservazione. — Per generare una circonferenza basta considerare il movimento sul piano di un punto che abbia da un punto fisso una distanza costante.

Nella pratica si usa perciò un *compasso*, di cui una punta è sostituibile con una matita.

160. Def. — Data una circonferenza di centro O e raggio AB, la figura costituita dai punti della circonferenza e dai punti che hanno da O una distanza minore di AB, dicesi *cerchio* di centro O e raggio AB.

I punti che hanno da O una distanza minore di AB diconsi *interni* sia rispetto al cerchio che rispetto alla circonferenza; i punti la cui distanza da O è maggiore di AB, diconsi esterni.

Ogni circonferenza *divide* il piano in *due parti*, la prima delle quali contiene i punti interni *(cerchio)*, la seconda contiene i punti esterni. I punti della circonferenza si considerano come comuni alle due parti di piano indicate.

La circonferenza e il cerchio si designano, indicandone il centro e il raggio, o, quando non siavi possibilità di equivoco, indicandone soltanto il centro.

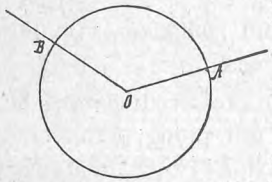
161. Def. — Due cerchi o due circonferenze si dicono *uguali* se hanno raggio uguale.

162. Osservazione. — Si giustifica codesta defi-

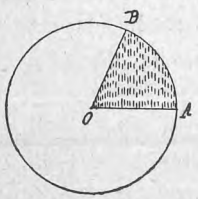
nizione, osservando che se si hanno due cerchi di raggio uguale, realizzati mediante modelli fisici, e con un movimento si porta l'uno ad avere con l'altro il centro comune, i due cerchi si sovrappongono l'uno all'altro.

Archi e settori.

163. Dato un cerchio di centro O, ogni angolo convesso o concavo avente il vertice in O dicesi *angolo al centro* del cerchio dato.



Questo angolo divide la circonferenza in due *parti,* aventi comuni i due punti A e B, l'una interna e l'altra esterna all'angolo. Codeste due parti diconsi *archi* e i punti A e B loro *estremi.*



Analogamente l'angolo $\widehat{AOB}$ divide il cerchio in due parti che si dicono *settori circolari.*

164. Def. — Due archi della stessa circonferenza o due settori del medesimo cerchio si dicono *uguali* se sono compresi da angoli al centro uguali.

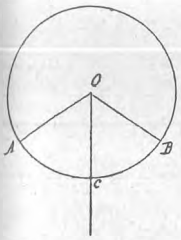
Per denotare l'uguaglianza di archi o settori di circonferenze o cerchi useremo il solito segno $\equiv$.

Discende dalla definizione di archi o settori uguali che un diametro divide in due parti uguali tanto la circonferenza quanto il cerchio (n. 61).

Codeste parti della circonferenza e del cerchio si dicono rispettivamente *semicirconferenze* e *semicerchi.*

Le due semicirconferenze (come i due semicerchi)

determinate da un diametro giacciono da bande opposte rispetto ad esso.



165. Probl. — *Bisecare un arco dato.*

Dato l'arco AB si consideri l'angolo, che comprende AB. Costruita la bisettrice OC di $\widehat{AOB}$ (n. 82), questa, come interna ad $\widehat{AOB}$, interseca l'arco AB in un punto interno C, e siccome è $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$, si ha per definizione che gli archi AC, CB sono uguali.

Il punto medio C è unico perchè unica è la bisettrice di $\widehat{AOB}$.

166. Def. — Siano dati due archi AB, BC di una stessa circonferenza aventi comune soltanto l'estremo B e nessun altro punto fuori di questo. L'arco AC si dice allora *somma* di AB e BC.

È manifesto come il concetto di somma si possa estendere anche al caso di archi che *si ricoprono* in parte.

Se l'arco AC è somma di due altri AB e BC, il primo si dice *maggiore* di ciascuno di questi, i quali alla lor volta di dicono ciascuno *minore* di AC. Di più l'arco AB si dice *differenza* di AB e BC: così pure BD si dice differenza di AC e AB.

E' allora facile dimostrare le seguenti proposizioni.

167. Teor. — *Archi, somme o differenze di archi rispettivamente uguali, sono uguali* (nn. 59, 28, 39).

168. Teor. — *Se in uno stesso cerchio, o in cerchi uguali, due archi o settori sono disuguali, l'arco o il settore maggiore corrisponde all'angolo al centro maggiore.*

169. Teor. *Se in uno stesso cerchio o in cerchi uguali due archi o settori corrispondono ad angoli al centro disuguali, l'arco o settore corrispondente all'angolo al centro maggiore è maggiore.*

170. Cor. *Dati due archi si può scegliere il numero* m *abbastanza grande perchè l'* m^mo *multiplo del minore sia maggiore dell'altro* (n. 67).

Diametri, centro e corde.

171. Def. — Il segmento congiungente due punti di una circonferenza dicesi *corda* della circonferenza o del cerchio.

I diametri sono corde aventi la particolarità di passare pel centro.

La corda che congiunge gli estremi di un arco si dice *sottesa* da esso.

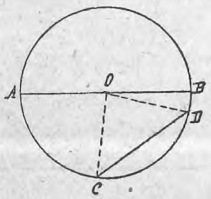
Ogni corda, salvi gli estremi, è interna al cerchio, e i suoi prolungamenti sono esterni (n. 105).

Di qui risulta che una retta non può avere più di due punti comuni collà circonferenza.

Le due parti in cui un cerchio è diviso da una sua corda si dicono *segmenti circolari.*

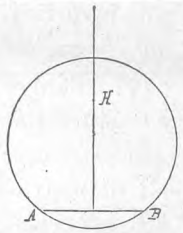
172. Teor. — *Un diametro è maggiore di ogni altra corda,* non passante pel centro.

Dati nel cerchio O il diametro AB e la corda CD non passante per il centro, i tre punti C, D, O, determinano un triangolo: e in esso CD è minore della somma degli altri due lati OC, OD (n. 97). Ma i segmenti OC, OD, OA, OB come raggi di uno stesso cerchio sono tutti uguali, onde concludiamo che CD è minore della somma di OA e OB, cioè appunto del diametro AB.



173. Teor. — *In un cerchio la perpendicolare ad una corda nel suo punto di mezzo passa pel centro.*

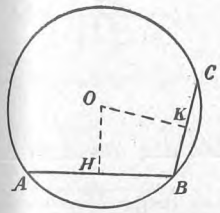
Dato un cerchio e la sua corda AB, diciamo che la perpendicolare innalzata sulla AB dal suo punto medio passa pel centro del cerchio.



Invero codesta perpendicolare è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B (n. 122). Ad essa quindi apparterrà il centro del cerchio.

174. Probl. *Costruire il centro di un cerchio assegnato.*

Si conducano ad arbitrio due corde AB, BC del cerchio aventi un estremo comune, e, determinati i rispettivi punti di mezzo H, K, si innalzino in essi le perpendicolari, le quali sono distinte, altrimenti le due rette BA, BC per B sarebbero perpendicolari ad una stessa retta, il che è impossibile (n. 110). Ora queste perpendicolari passano tutte e due pel centro (n. 173) e perciò si incontrano precisamente in esso.



175. — Notiamo che per costruire, nel modo detto dianzi, il centro di un cerchio basta conoscere tre punti della circonferenza (A, B, C).

Allora, se due cerchi hanno tre punti punti comuni, applicando a codesti tre punti la costruzione indicata, concludiamo che i due cerchi hanno il centro in comune. Ma non v'è che una sola circonferenza la quale abbia un dato centro e passi per un punto prefissato. Possiamo perciò enunciare il

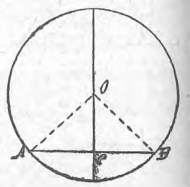
Cor. — *Due circonferenze non possono avere più di due punti in comune.*

176. Il teorema del n. 173 sull'asse di una corda si può invertire in due modi: si ottengono così i due teoremi seguenti.

177. Teor. — *Il diametro di un cerchio che dimezza una corda è perpendicolare ad essa.*

Dato il cerchio O e una sua corda AB, diciamo che il diametro OC passante pel punto di mezzo C di AB è perpendicolare ad AB.

Congiunto, infatti, il punto O con A e B, i triangoli OCA, OCB hanno il lato OC comune, i lati OA, OB uguali per definizione, e i lati AC, BC uguali per ipotesi: essi sono quindi uguali e hanno perciò uguali gli angoli $\widehat{OCA}$, $\widehat{OCB}$ i quali sono adiacenti. Se ne conclude (n. 100) che il diametro OC è perpendicolare alla corda AB.



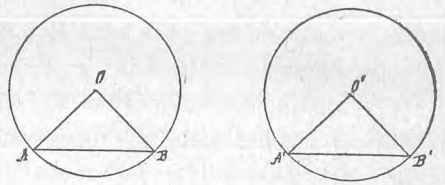
178. Teor. — *Il diametro perpendicolare ad una corda la dimezza.*

Dato il cerchio O e la corda AB, sia OC la perpendicolare abbassata da O su AB (fig. prec.). Diciamo che è AC = CB.

Si conducano i raggi OA,OB. I triangoli OAC, OBC, rettangoli per ipotesi in C, banno il cateto OC comune e le ipotenuse OA, OB uguali per definizione; essi sono perciò uguali (n. 114), onde risulta AC = CB.

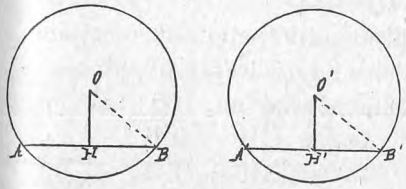
179. Teor. — *In cerchi uguali o nello stesso cerchio se due corde sono uguali, gli archi che le sottendono sono uguali e viceversa.*

Se le due corde AB, A′B′ dei due cerchi uguali O, O′ sono uguali, i due triangoli ABO, A′B′O′ sono uguali avendo ordinatamente uguali i lati (n. 90) perciò sono uguali gli angoli al centro $\widehat{AOB}$ $\widehat{A'O'B'}$ e gli archi su cui insistono (n. 164).



Viceversa, se sono uguali gli archi AB, A′B′, sono pure uguali gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, e quindi i triangoli AOB, A′O′B′ (n. 79); onde resulta l'uguaglianza delle corde AB, A′B′.

180. Teor. — *In cerchi uguali o nello stesso cerchio, se due corde sono uguali, esse hanno ugual distanza dai rispettivi centri.*



Siano anzitutto AB, A′B′ due corde uguali, rispettivamente dei cerchi O, O′ uguali. Abbassate dai centri O, O′ su AB, A′B′ rispettivamente le perpendicolari OH, O′H′, diciamo che OH e O′H′ sono uguali.

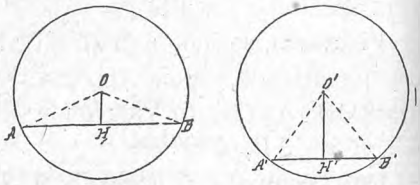
Infatti i piedi H, H′ di codeste perpendicolari dimezzano le corde uguali AB, A′B′ rispettivamente (n. 178), onde sarà HB = H′B′. D'altra parte è per ipotesi OB = O′B′, cosichè i due triangoli rettangoli OHB, O′H′B′ hanno uguali l'ipotenusa e un cateto. Essi sono perciò uguali (n. 114) e si ha veramente OH = O′H′.

181. Teor. — *Se in cerchi uguali o nello stesso*

cerchio due corde sono disuguali, la maggiore ha dal centro del rispettivo cerchio distanza minore.

Siano AB, A′B′, due corde disuguali di circonferenze uguali e sia $AB > A'B'$. Se O, O′ sono i rispettivi centri e OH, O′H′ le distanze di O, O′ da AB, A′B′ ordinatamente, diciamo che è $OH < O'H'$.

Infatti i punti H, H′ dimezzano le corde AB, A′B′ rispettivamente (n. 178): cosichè sarà HB maggiore di H′B′. Ma allora nei due triangoli rettangoli OHB, O′H′B′, i quali hanno per ipotesi le ipotenuse uguali, e i due cateti HB, H′B′ disuguali, gli altri due cateti saranno disuguali nel senso contrario (n. 118), sarà cioè veramente OH minore di O′H′.



182. Prese, in cerchi uguali o nello stesso cerchio, due corde AB, A′B′ e considerate le relative distanze OH, O′H′ dal centro, abbiamo dai nn. 180, 181 che:

da $AB > A'B'$ *consegue* $OH < O'H'$,
» $AB = A'B'$ » $OH = O'H'$,
» $AB < A'B'$ » $OH > O'H'$.

Basta ragionare per esclusione, come al n. 96 (*seconda legge delle inverse,* cfr. la nota a piè della pag. 39) per concludere che sussistono le proposizioni inverse.

Abbiamo così il

Teor. *In cerchi uguali o nello stesso cerchio:*

a) *se due corde hanno ugual distanza dai centri dei rispettivi cerchi, sono uguali;*

b) *se due corde non sono equidistanti dai centri dei rispettivi cerchi, la corda che ha distanza minore è maggiore.*

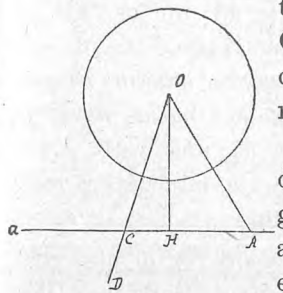
Intersezioni di rette e cerchi.

Poichè una retta non può avere con una circonferenza più di due punti comuni (n. 175), appaiono possibili tre casi: o che la retta intersechi la circonferenza in due punti, o che abbia con essa un sol punto comune, o che non ne abbia nessuno.

I seguenti criteri ci dimostrano come effettivamente si possano presentare tutti e tre i casi or ora accennati.

183. Teor. — *Se una retta ha dal centro di un cerchio distanza maggiore del raggio, la retta è tutta costituita da punti esterni al cerchio.*

Sia O il centro di un cerchio ed *a* una retta, tale che la sua distanza OH da O sia maggiore del raggio. Diciamo che ogni punto A della retta *a* è esterno al cerchio O.



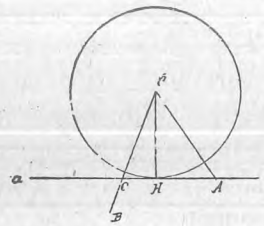
Infatti ogni punto A di *a* dista da O di un segmento maggiore di OH (n. 112) e quindi anche del raggio, ed è perciò esterno al cerchio.

184. Def. — Una retta tutta costituita da punti esterni ad un cerchio si dice *esterna* ad esso.

185. Nota. — Una retta esterna ad un cerchio lo lascia tutto da quella parte dove cade il centro.

186. Teor. — *Se una retta ha dal centro di un cerchio distanza uguale al raggio, essa ha comune colla circonferenza un punto ed uno solo, cioè il piede della perpendicolare abbassata dal centro sulla retta, e gli altri suoi punti sono esterni al cerchio.*

Sia il cerchio di centro O e sia la retta *a*, tale



che la sua distanza OH da O sia uguale al raggio del cerchio. Ne risulta senz'altro che H appartiene alla circonferenza.

Diciamo che un punto A di a, diverso da H, è esterno al cerchio. Infatti l'obliqua OA è maggiore della perpendicolare OH (n. 112), e perciò il punto A è esterno al cerchio.

187. Def. — Una retta, avente un sol punto comune con una circonferenza, dicesi *tangente* alla circonferenza o al cerchio.

Il punto comune alla retta e alla circonferenza dicesi *punto di contatto* della tangente.

188. Nota. — Una tangente ad un cerchio O lo lascia tutto da quella parte dove cade il centro.

189. Cor. — *La perpendicolare ad un raggio di un cerchio nella sua estremità è tangente al cerchio.*

190. Per trattare il caso di una retta, la cui distanza dal centro del cerchio sia minore del raggio cominceremo col fare le seguente

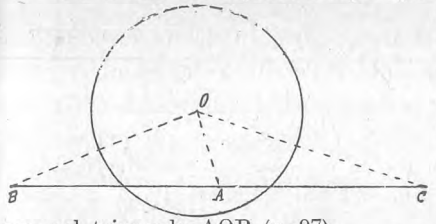
Osservazione. — Descritta sul foglio una circonferenza, si segni col lapis, servendosi della riga, il segmento che congiunge un punto interno con un punto esterno al cerchio. Noi vediamo che ad un certo istante la punta del lapis traversa la circonferenza e rimane poi esterna ad essa; vediamo cioè che il segmento descritto ha comune con la circonferenza un punto ed uno solo. Enunciamo perciò il seguente

191. Postulato. — *Il segmento che congiunge un punto interno ed uno esterno ad un cerchio, ha comune con la circonferenza un punto ed uno solo.*

192. Teor. — *Una retta, che abbia un punto interno ad un cerchio, interseca la circonferenza in due punti.*

Se la retta passa anche pel centro, si è già notato che essa interseca la circonferenza in due punti (n. 157).

Sia a una retta passante pel punto A interno al dato cerchio O e non passante pel centro. Portati su a, da una parte e dall'altra di A, i segmenti AB, AC uguali al diametro e congiunto O con A, B, C abbiamo, nel triangolo AOB (n. 97)

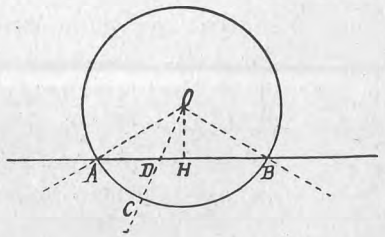


$$OB > AB - OA.$$

Ma essendo AB uguale al diametro ed OA minore del raggio, risulta OB maggiore del raggio del cerchio e, quindi, B esterno ad esso. Analogamente si dimostra che anche C è esterno al cerchio; onde risulta, che ciascuno dei due segmenti AB, BC ha comune colla circonferenza un punto ed uno solo (n. prec.) e quindi che la retta a interseca la circonferenza O in *due* punti.

193. Nota. — Appare di qui e dai numeri precedenti come le due parti in cui il piano resta diviso da una circonferenza (n. 160) sono tali che « congiungendo due punti fuori della circonferenza, i quali non si trovino sopra una tangente, se questi appartengono ad una medesima parte, si ha un segmento che *non* sega la circonferenza o la sega in *due* punti; se appartengono a parti opposte, si ha un segmento che sega la circonferenza in *un* sol punto ».

194. Teor. — *Se una retta ha dal centro di un cerchio distanza minore del raggio, essa ha comune con la circonferenza due punti.*



Dato il cerchio O, sia a una retta la cui distanza OH da O

sia minore del raggio. Il punto H è quindi interno al cerchio O, e la *a* interseca la circonferenza in due punti A, B (n. 192).

195. Def. — Una retta avente comuni due punti con una circonferenza dicesi *secante.*

196. Nota. — I due archi, in cui la circonferenza O è divisa dalla secante *a,* cadono da bande opposte rispetto ad essa.

Se la retta AB passa pel centro basta riferirci al n. 157. Supposto che AB non sia un diametro, i due raggi OA, OB dividono il piano in due regioni angolari l'una convessa e l'altra concava, le quali contengono ciascuna uno degli archi AB (n. 163).

Considerando dapprima l'arco AB contenuto nella regione convessa, (vedi fig. al n. 194) diciamo che esso giace rispetto alla retta AB da banda opposta del centro O. Condotta invero per O una semiretta interna alla regione angolare convessa, sia D il punto in cui essa interseca la corda AB (n. 46). Poichè OD è minore di OA (n. 112), il punto C della semiretta OD, che appartiene all'arco AB considerato sarà tale che $OC > OD$ e quindi cadrà rispetto alla AB da banda opposta del centro O.

Guardando poi all'arco AB che appartiene all'angolo concavo $\widehat{AOB}$, vediamo che esso giace, rispetto alla retta AB, nella banda contenente il centro O; invero, se si considera un punto interno al suddetto arco, il segmento che lo congiunge col centro essendo esterno all'angolo convesso $\widehat{AOB}$, non può segare il segmento AB.

Concludiamo così che i due archi AB sopra considerati sono da bande opposte rispetto alla retta AB.

197. Indicando con r il raggio del cerchio O e con h la distanza della retta *a* da O, abbiamo da quanto precede:

Se $h > r$, *la retta* a *è esterna al cerchio* O.
Se $h = r$, *la retta* a *è tangente.*
Se $h < r$, *la retta* a *è secante.*

Ma i tre casi che una retta sia rispetto ad una

circonferenza esterna o tangenge o secante si escludono l'un altro. Cosichè (per la *seconda legge delle inverse ;* cfr. la nota a piè della pag. 39), se si è verificato uno di essi, non può sussistere nessuna delle ipotesi che conducono ad uno dei due casi non verificati.

Risultano così senz'altro provate le seguenti proposizioni che invertono quelle dei nn. 183, 186, 194.

198. Teor. — *Ogni retta esterna ad un cerchio ha dal centro una distanza maggiore del raggio.*

199. Teor. — *Ogni tangente ad un cerchio ha dal centro distanza uguale al raggio, e quindi è perpendicolare, al raggio che va al punto di contatto.*

200. Nota. — Dal teor. del n. prec. e dal n. 89 risulta che *per un punto di una circonferenza passa una sola tangente.*

201. Teor. — *Ogni secante di un cerchio ha dal centro distanza minore del raggio.*

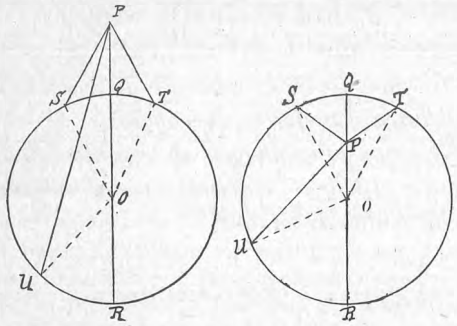
Posizione relativa di due cerchi.

Abbiamo dianzi considerati tutti i casi di intersezione e di posizione relativa di una retta e di una circonferenza. Ora passiamo ad occuparci delle intersezioni e delle posizioni relative di due circonferenze. Ma prima occorre premettere come lemma la seguente proposizione di cui dovremo fare uso frequente.

202. Teor. — *Dati un cerchio e un punto non appartenente alla circonferenza, fra i segmenti che vanno dal punto prefissato ai punti della circonferenza quello il cui prolungamento passa pel centro è minimo e quello che passa pel centro è massimo.*

Sia O il centro del dato cerchio e P un punto non appartenente alla circonferenza; P potrà essere interno od esterno al cerchio, ma le dimostrazioni seguenti valgono indifferentemente nei due casi.

La retta PO interseca la circonferenza in due punti Q, R. Uno dei due segmenti PQ, PR conterrà il centro O; sia PR. Diciamo che se PS è un qualsiasi altro segmento, che da P va alla circonferenza, il segmento PS è maggiore di PQ e minore di PR.



Condotto invero il raggio SO, dal triangolo OPS si ha (n. 97)

$$PS > OP - OS, \text{ ed anche } PS < OP + OS,$$

ossia, essendo $OS = OQ = OR$,

$$PS > PQ;\ PS < PR.$$

203. Lasciamo allo studioso la cura di dimostrare che fra i segmenti che dal punto vanno alla circonferenza:

1° *due segmenti sono uguali se i loro estremi sulla circonferenza insieme con l'estremo del segmento minimo* (o massimo) *determinano archi uguali*:

2° *due segmenti sono disuguali se i loro estremi insieme con l'estremo del segmento minimo* (o massimo) *danno archi, minori di una semicirconferenza, disuguali; e precisamente è maggiore quello il cui estremo dà con l'estremo del segmento minimo (o massimo) l'arco maggiore.*

204. Già sappiamo che due circonferenze non possono avere più di due punti comuni (n. 175), e perciò

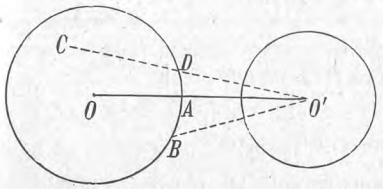
quanto alle loro intersezioni, si presentano come possibili tre casi; cioè, che le due circonferenze abbiano in comune o nessun punto o un punto o due punti.

I criteri seguenti mostrano come effettivamente si possono presentare tutti e tre codesti casi.

205. Teor. – *Se la distanza dei centri di due cerchi è maggiore della somma dei raggi, i due cerchi non hanno alcun punto comune e sono esterni l'uno all'altro* (cioè i punti dell'uno sono esterni all'altro).

Siano O, O′ i due cerchi di raggio r, r' rispettivamente e il segmento OO′ sia maggiore della somma $r + r'$ dei raggi.

Sarà a più forte ragione OO′ maggiore del raggio del cerchio O e perciò il punto O′ è esterno al cerchio O (n. 160). Allora il segmento OO′ interseca la circonferenza O in un punto A (n. 157) e siccome OO′ è maggiore di $r + r'$, il segmento O′A è maggiore del raggio r' del cerchio O′, cioè il punto A è esterno al cerchio O′.



Ma il segmento O′A, condotto da O′ ad un punto della circonferenza O è il minimo dei segmenti analoghi, perchè il suo prolungamento passa per O (n. 202). Preso quindi sulla circonferenza O un altro qualsiasi punto B, sarà O′B maggiore di O′A, cioè il punto B è esterno al cerchio O′.

Preso poi un punto C qualsivoglia, interno ad O, si congiunga C con O e O′: avremo allora (n. 97)

$$O'C > O'O - OC$$

e, siccome $OC < OA$,

$$O'C > O'O - OA = O'A$$

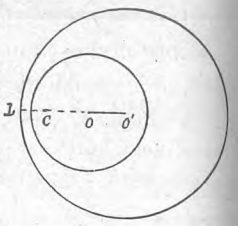
onde risulta che C è esterno al cerchio O′.

Similmente si dimostra che ogni punto del cerchio O′ è esterno al cerchio O.

206. Teor. — *Se la distanza dei centri di due cerchi disuguali è minore della differenza dei raggi, le due circonferenze non hanno nessun punto comune e il cerchio minore è interno al cerchio maggiore* (cioè ogni punto interno al primo è interno al secondo).

Siano O, O′ i centri dei due cerchi dati di raggio r, r' rispettivamente, e, supposto $r < r'$, sia $OO' < r' - r$.

Sarà a più forte ragione il segmento O′O minore del raggio r' del cerchio O′ e perciò il punto O sarà interno al cerchio O′. Indicati allora con L, C i punti in cui la semiretta O′O interseca rispettivamente le circonferenze O′ e O, avremo $O'L = r'$, $OC = r$ e i punti C ed L cadranno sul prolungamento di O′O.



Ma per la nostra ipotesi è

$$O'O < O'L - OC$$

e quindi

$$O'O + OC < O'L \text{ ossia } O'C < r';$$

e il punto C sarà interno al cerchio O′. Ma dei segmenti che da O′ vanno alla circonferenza O, il segmento O′C, il quale passa per O, è il massimo (n. 202). Ne risulta che tutti i punti della circonferenza O sono interni al cerchio O′.

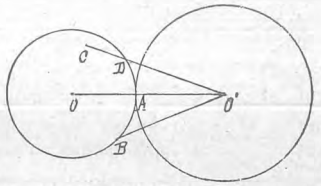
Analogamente si dimostra che tutti i punti della circonferenza O′ sono esterni al cerchio O.

Considerazioni analoghe a quelle del n. prec. mostrano che ogni punto del cerchio O è interno al cerchio O′.

207. Teor. — *Se la distanza dei centri di due cerchi è uguale alla somma dei raggi, le due circonferenze hanno comune un punto ed uno solo, nel quale hanno la medesima tangente, e che appartiene alla retta dei centri. Ciascun cerchio è esterno all'altro.*

Siano O, O′ i due cerchi di raggio r, r' e sia $OO' = r' + r$.

Sarà quindi OO′ maggiore del raggio del cerchio O, onde risulta che O′ è esterno al cerchio O e quindi il segmento OO′ interseca la circonferenza O in un punto A (n. 157). Dall'ipotesi che OO′ (= OA + AO′) sia uguale alla somma dei raggi, risulta che il segmento O′A è uguale ad r' ossia che il punto A appartiene anche alla circonferenza O′. La perpendicolare in A alla OO′ sarà tangente ad entrambi i cerchi O, O′ (n. 189).

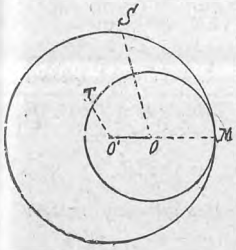


In secondo luogo si osservi che O′A, il cui prolungamento passa per O, è il minimo dei segmenti, che da O′ vanno ai punti della circonferenza O; onde si conclude, come al n. 205, che ogni punto B della circonferenza O, distinto da A ha dal punto O′ una distanza maggiore del raggio O′A del cerchio O′, cioè è esterno a questo cerchio. Similmente, ogni punto della circonferenza O′, distinto da A è esterno al cerchio O. E da ultimo, come al n. 205, si mostra che ogni punto interno ad O è esterno ad O′, ed ogni punto interno ad O′ è esterno ad O.

208. Def. — Di due cerchi che abbiano un solo punto comune si dice che si *toccano* o sono *tangenti* in quel punto (punto di *contatto*). Quando, come nel caso del teorema preced., i due cerchi sono l'uno esterno all'altro, si dice che i due cerchi si toccano *esternamente*.

209. Teor. — *Se la distanza dei centri di due cerchi disuguali è uguale alla differenza dei raggi, le due circonferenze hanno un punto ed uno solo in comune, il quale appartiene alla retta dei centri, e il cerchio minore è interno all'altro.*

Siano O, O′ i due cerchi di raggio r, r' e supposto $r' > r$, sia $OO' = r' - r$.



Allora O′O sarà minore di r', e perciò O sarà interno al cerchio O′. Ne risulta che il prolungamento di O′O interseca la circonferenza O′ in un punto M (n. 157). Ma O′O è uguale a $r' - r$ onde $OM = r' - (r' - r)$ è uguale ad r, cioè al raggio del cerchio minore; ossia il punto M della retta dei centri è comune alle due circonferenze.

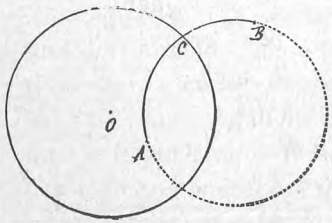
In secondo luogo si osservi che dei segmenti che dal punto O′ si possono condurre alla circonferenza O, il segmento O′M, passante pel centro, è il massimo (n. 202), cioè ogni altro segmento O′T è minore, ossia ogni punto della circonferenza O, distinto da M, è interno al cerchio O′. Così ogni punto della circonferenza O′, salvo M, è esterno al cerchio O.

E nel solito modo si mostra che ogni punto del cerchio O è interno ad O′.

210. Def. — Se due cerchi si toccano e, come nel caso del teorema precedente, uno di essi è interno all'altro, si dice che si toccano *internamente*.

211. Rimane ancora da considerare un caso. Per trattarlo premettiamo la seguente

Osservazione. — Descritta sul foglio una circonferenza O e congiunto mediante un arco di circonferenza un punto A interno con un punto B esterno al cerchio O, vediamo che un punto mobile il quale descriva l'arco AB assume, in un dato istante, la posizione di un punto della circonferenza O, e poi resta esterno ad essa.



Enunciamo perciò il seguente

212. Postulato. — *Un arco di circonferenza il quale abbia un estremo interno e l'altro estremo esterno ad un cerchio dato, ha un punto comune ed uno solo con la circonferenza.*

213. Cor. — *Date due circonferenze, se l'una passa per un punto interno e per un punto esterno all'altra, esse hanno comuni due punti.*

214. Teor. — *Se la distanza dei centri di due cerchi è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi, le due circonferenze hanno comuni due punti simmetrici rispetto alla retta dei centri* (cioè giacenti su di una stessa perpendicolare alla retta dei centri ed equidistanti da essa). *I due archi in cui ciascuna delle due circonferenze è divisa da codesti due punti, sono l'uno interno e l'altro esterno all'altra circonferenza.*

Siano O, O′ i due cerchi dati di raggio r, r' rispettivamente e supposto $r' \geq r$ sia $r' - r < OO' < r' + r$.

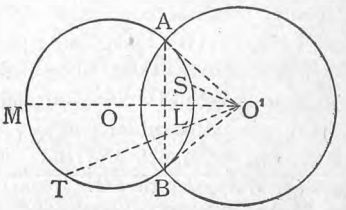
Per provare che le due circonferenze hanno due punti in comune, dimostreremo che la circonferenza O ha un punto interno e un altro esterno alla O′ (n. prec.).

Anzitutto dall'ipotesi $OO' > r' - r$ risulta in ogni caso

$$OO' + r > r';$$

cioé se si porta sul prolungamento di O′O il segmento $OM = r$, il punto M appartenente alla circonferenza O, risulta esterno al cerchio O′.

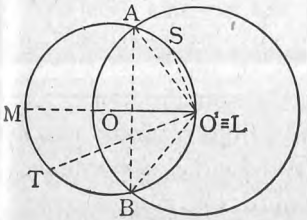
Per provare che la circonferenza O ha anche un punto interno ad O′, distinguiamo tre casi secondo che OO′ è maggiore, uguale o minore del raggio r del cerchio minore.



Se $OO' > r$, si prenda entro il segmento OO′ il punto L tale che OL sia uguale ad r: codesto punto L apparterrà alla circonferenza O, ed essendo per ipotesi

$$OO' < r' + r,$$

il segmento $O'L = OO' - r$ sarà minore di r' cioè il punto L della circonferenza O sarà interno al cerchio O′.

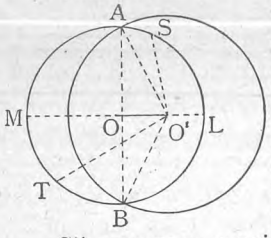


Se $OO' = r$, la circonferenza di centro O e raggio r passa pel centro O′ dell'altra circonferenza.

Sia infine $OO' < r$. Se a partire da O sulla OO′ portiamo il segmento OL uguale ad r, il punto L apparterrà alla circonferenza O: d'altra parte avremo

$O'L = OL - OO' = r - OO'$ e quindi $O'L < r < r'$, onde risulta che il punto L della circonferenza O è interno al cerchio O'.

Dimostrato così in ogni caso che la circonferenza O ha un punto M esterno e un punto L interno alla O', ne risulta che le due circonferenze hanno comuni due punti A, B (n. prec.); e codesti punti sono certo fuori della retta OO' dei centri, perchè questa retta interseca la O solo nei punti M ed L, dei quali il primo è esterno, il secondo interno alla O.



Ciò premesso, possiamo dimostrare, senza distinzione di casi, che A e B sono equidistanti dalla retta OO' e appartengono alla medesima perpendicolare a codesta retta.

Per ciò, consideriamo l'asse della corda AB comune ai due cerchi; poichè questo deve passare pel centro di ciascuno dei due cerchi (n. 163) e per un punto di una retta passa una sola perpendicolare ad essa (n. 89), concludiamo che la retta dei centri coincide con l'asse del segmento AB, e quindi la corda comune AB è bisecata perpendicolarmente dalla retta OO'.

Vogliamo in terzo luogo dimostrare che l'arco ALB è interno al cerchio O' (cioè che tutti i punti dell'arco, salvo gli estremi, sono interni al cerchio) e l'arco BMA gli è esterno. Infatti, dei segmenti che dal punto O' vanno alla circonferenza O, il segmento O'L, il cui prolungamento passa per O, è il minimo (n. 202). Condotti allora i segmenti O'A, O'B, raggi del cerchio O', avremo che un altro segmento O'S od O'T qualsiasi, condotto da O' alla circonferenza, sarà minore o maggiore di O'A secondo che il suo estremo S o T appartiene all'arco ALB o all'arco BMA (n. 203). Se ne conclude che l'arco ALB è interno al cerchio O e l'arco BMA è esterno.

Analogamente si dimostrerebbe che dei due archi AB della circonferenza O' l'uno è interno e l'altro è esterno al cerchio O.

215. Nota. — L'arco AB della circonferenza O che è interno al cerchio O' divide questo in due parti (che diconsi *limitate* dal suddetto arco ad esse comune), contenenti l'una i punti del cerchio O' che sono esterni ad O, l'altra i punti interni.

216. Def. — Di due circonferenze, aventi due punti comuni, tali quindi che ciascuna di esse sia divisa dall'altra in due archi, uno interno e l'altro esterno, si dice che *si segano o che sono secanti.*

217. Riassumiamo in un quadro le proposizioni precedenti.

Indichiamo con a la distanza dei centri O, O' dei due cerchi che si considerano, con r, r' i rispettivi raggi, e supponiamo, per fissare le idee, $r' \geq r$.

Se $a > r + r'$, i due cerchi sono l'uno esterno all'altro,	e *le circonferenze non hanno punti comuni.*
Se $a < r + r'$, i due cerchi sono l'uno interno all'altro,	
Se $a = r + r'$, i due cerchi sono l'uno esterno all'altro,	e *le circonferenze si toccano*
Se $a = r' - r$, i due cerchi sono l'uno interno all'altro,	

Se $r + r' > a > r' - r$ *le circonferenze hanno due punti comuni, nei quali si segano.*

Ma i tre casi che due circonferenze: 1) non abbiano punti comuni; 2) ne abbiano uno solo; 3) ne abbiano due, si escludono l'un l'altro. Perciò (per la cosidetta *seconda legge delle inverse*) se uno di essi si verifica, non può sussistere nessuna delle ipotesi che conducono ad uno dei due casi non verificati.

Possiamo quindi senz'altro enunciare le seguenti proposizioni che invertono i risultati precedenti.

218. Teor. — *Se due circonferenze non hanno punti comuni, la distanza dei loro centri o è maggiore della somma dei raggi o è minore della differenza dei raggi.*

219. Teor. — *Se due circonferenze si toccano, la distanza dei centri è uguale alla somma o alla dif-*

ferenza dei raggi, secondo che il contatto avviene esternamente o internamente. In ogni caso il punto di contatto appartiene alla retta dei centri.

220. Cor. — *Se due circonferenze si toccano, esse hanno nel punto di contatto la stessa tangente.*

Infatti la perpendicolare alla retta dei centri nel punto di contatto è tangente a tutti e due i cerchi (n. 189).

221. Teor. — *Se due circonferenze hanno due punti comuni, la distanza dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi.*

Costruzioni col compasso.

222. Agli istrumenti considerati al n. 151, aggiungiamo ora il compasso, di cui una punta mobile si può sostituire con un lapis. Esso permette di effettuare la seguente

COSTRUZIONE FONDAMENTALE: *Costruire la circonferenza che ha un centro dato e un raggio dato.*

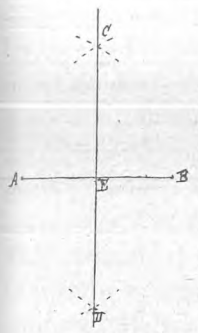
In particolare, il compasso serve, in sostituzione della riga graduata, a *trasportare i segmenti,* in quanto si adopera per tagliare su di una retta data, a partire da un punto di essa e da una banda prefissata rispetto a questo, un segmento uguale ad un segmento dato.

Con la riga e col compasso si risolvono tutti i problemi incontrati fin qui, e, in particolare, si effettua la costruzione della perpendicolare, onde si rende superfluo l'uso della squadra.

Cominciamo appunto dal risolvere col compasso e la riga i problemi relativi alla costruzione di perpendicolari.

223. Probl. — *Costruire la perpendicolare ad un segmento dato nel suo punto di mezzo* (asse del segmento).

Si descrivano due circonferenze uguali, di centro A e B e di raggio uguale o maggiore al dato segmento AB. Poichè la distanza AB dei loro centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza (che è nulla), le due circonferenze si segano in due punti C, D cadenti da bande opposte rispetto alla AB (n. 214). Diciamo che la CD, secante la AB in un punto E, è l'asse del segmento AB.



Infatti C e D, poichè le due circonferenze descritte hanno raggi uguali, sono equidistanti dagli estremi del segmento AB, onde (n. 122) appartengono all'asse di questo segmento.

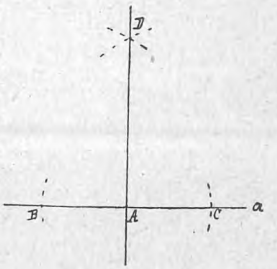
Nota. — La costruzione riesce ugualmente se il raggio delle circonferenze descritte è minore di AB, purchè ne superi la metà.

224. La costruzione precedente permette di *bisecare un segmento dato.*

225. Probl. — *Condurre da un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

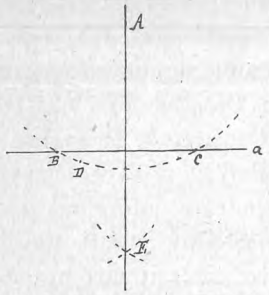
Bisogna distinguere due casi secondo che il punto dato appartiene o no alla retta data.

1) Sia data la retta a e il punto A su di essa. Descritta, centro in A, una circonferenza di raggio arbitrario, questa interseca la a in due punti B, C tali che A è il punto medio del segmento BC. Allora, centro in B e in C, si descrivano due circonferenze di raggio uguale ad un segmento maggiore di AB.



Codeste due circonferenze si intersecano in un punto D equidistante da B e da C (e nel simmetrico di D rispetto ad a) (n. 214). La AD è l'asse del segmento BC (n. 122) cioè la perpendicolare in A alla BC.

2) Data la retta a e il punto A fuori di essa, si prenda un punto D che cada, rispetto alla a, da banda opposta di A, e, centro in A, si descriva la circonferenza di raggio AD. Poichè AD è maggiore della distanza di A dalla a, la circonferenza tracciata interseca in due punti B e C la a (n. 194). Le due circonferenze di centri B e C e di raggio AD si intersecano oltre che in A nel punto E (simmetrico di A rispetto alla a) (n. 214), e la retta AE è perpendicolare alla a.

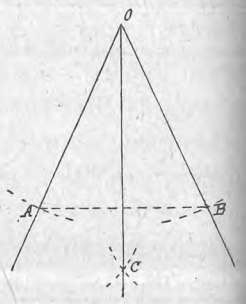


226. Probl. — *Bisecare un angolo dato.*

Dato l'angolo $\widehat{O}$, si descriva, centro in O, una circonferenza di raggio arbitrario, la quale intersecherà i due lati di O in due punti A, B.

Facendo centro in A e B, con raggio uguale o maggiore ad AB, si descrivano due archi di circonferenza, i quali si incontrino in un punto C (n. 214).

I due triangoli ABO, ABC per costruzione sono isosceli, onde OC è la bisettrice dell'angolo AOB. Vale infatti il ragionamento del n. 82 dove è considerato un caso particolare della figura.

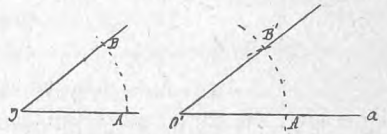


227. Probl. — *Bisecare un arco dato.*

Basta costruire l'asse della corda sottesa dall'arco dato, o, se si conosce o si è costruito il centro della relativa circonferenza, bisecare l'angolo al centro corrispondente all'arco considerato (n. 164).

228. Probl. — *Costruire sopra una semiretta data, e da una banda assegnata rispetto ad essa, un angolo uguale ad un angolo dato* (trasporto dell'angolo).

Dati la semiretta a d'origine O' e un angolo di vertice O, con centro in O e raggio arbitrario si descriva un arco che intersechi in A, B i due lati dell'angolo dato. Allora, centro in O', si descriva il cerchio di raggio uguale ad OA, il quale intersechi a nel punto A'; e dal punto A', e dalla banda prefissata rispetto ad a si costruisca, nel cerchio or ora descritto, la corda A'B' uguale ad AB. L'angolo $\widehat{A'O'B'}$ è uguale all'angolo dato $\widehat{AOB}$.



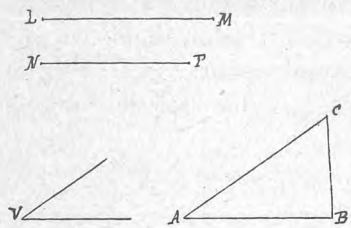
Infatti i due triangoli isosceli ABO, A'B'O' hanno uguali per costruzione le basi AB, A'B' e i lati AO, A'O', e quindi sono uguali (n. 90) ed hanno uguali gli angoli al vertice.

229. Nota. — La costruzione or ora indicata permette di *trasportare* un angolo senza ricorrere alla squadra come al n. 154.

230. Poichè due triangoli aventi due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali sono uguali (n. 79), quando si vorrà costruire un triangolo uguale ad un triangolo dato (*trasportare il triangolo dato*) basterà costruire un triangolo avente due lati e l'angolo compreso uguali ordinatamente a due lati e all'angolo compreso del triangolo dato. Siamo così condotti al seguente:

231. Probl. — *Costruire un triangolo avente due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali a due segmenti e ad un angolo dati*; ossia come più brevemente si usa dire: *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo compreso.*

Siano dati i segmenti LM, NP e l'angolo $\widehat{V}$.

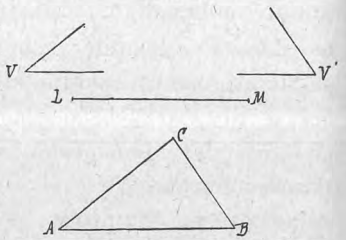


Costruito un angolo $\widehat{A}$ uguale a $\widehat{V}$, sui lati di questo si prendano i segmenti AB, AC uguali ad NP, LM rispettivamente. Il triangolo ABC soddisfa al problema.

232. Mediante considerazioni analoghe a quelle svolte dianzi, si vede come i vari criteri di uguaglianza dei triangoli ci conducano a porre in vari modi il problema di costruzione di un triangolo. Nella stessa guisa i teor. dei nn. 137, 138 suggeriscono diversi modi di costruire un quadrangolo (o poligono) uguale a un dato. Noi qui tratteremo i casi seguenti che sono i più importanti, proponendo come esercizi le costruzioni relative ai poligoni.

233. Probl. — *Costruire un triangolo, dati un lato e i due angoli adiacenti.*

Dati il segmento LM e gli angoli $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$, per costruire un triangolo avente un lato e i due angoli adiacenti uguali ordinatamente ad LM, $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$, si prenda un segmento AB uguale ad LM e per A, B si conducano da una stessa banda



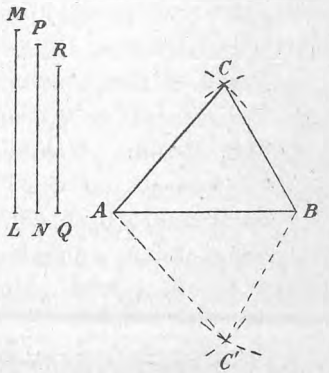
rispetto alla AB, due semirette le quali formino colle semirette AB, BA due angoli uguali rispettivamente a $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$. Se codeste due semirette si incontrano in un punto C, il triangolo ABC soddisfa al problema.

Nota. — Condizione per la risolubilità del precedente problema è, come si vedrà più tardi, che la somma degli angoli dati sia minore di due retti. (Cfr. n. 265).

234. Probl. — *Costruire un triangolo, dati i tre lati.*

Dati i segmenti LM, NP, QR, si prenda un segmento AB uguale ad uno di essi, p. es. ad LM, e, centro in A, B, si descrivano le circonfererenze di raggi uguali rispettivamente ad NP, QR. Se c'è un punto C d'intersezione di codeste due circonferenze fuori della retta AB, il triangolo ABC soddisfa manifestamente al problema.

Quanto all'esistenza del punto C, osserviamo che se AB, distanza dei centri delle due circonferenze descritte, è o maggiore della somma di NP, QR, o minore della loro differenza, le due circonferenze non hanno punti comuni (nn. 205, 206), onde non esiste alcun triangolo avente i lati ordinatamente uguali ai tre segmenti dati, d' accordo col n. 97.



E pure d'accordo col numero citato, se AB è uguale alla somma o alla differenza di NP, QR, le due circonferenze hanno un sol punto comune, appartenente alla retta AB (nn. 207,

209), onde, anche in questo caso, non esiste un triangolo avente i lati uguali ordinatamente ai tre segmenti dati.

Se, infine, AB è minore della somma e maggiore della differenza di NP, QR, le due circonferenze hanno due punti comuni C, C′ da bande opposte rispetto alla AB (n. 214). Allora i due triangoli ABC, ABC′ (fra loro inversamente uguali) soddisfano tutti e due al problema.

Nota. — Qualora per segmento AB si prenda (come nella figura) il *maggiore* dei tre segmenti dati, è manifesto che basterà verificare se esso sia minore della somma degli altri due, e, verificata questa condizione, sarà senz'altro provata la risolubilità del problema mediante le costruzioni suesposte.

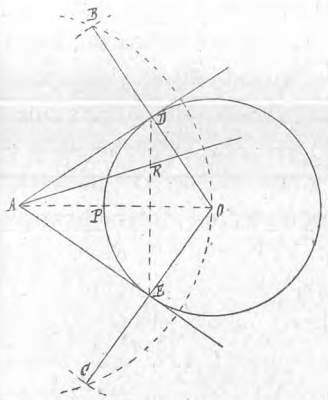
235. Risulta in particolare dal numero precedente che esiste un triangolo avente i tre lati uguali ad un qualsiasi segmento dato *(triangolo equilatero)*, e, come caso particolare del problema precedente, potremo risolvere il

Probl. — *Costruire un triangolo equilatero di lato dato.*

236. Probl. — *Dato un cerchio, condurre da un punto le tangenti ad esso.*

Se il punto dato è interno al cerchio, non passa per esso nessuna tangente, perchè tutti i punti di una tangente sono esterni al cerchio, tranne il punto di contatto che è sulla circonferenza (n. 186).

Se il punto dato è sulla circonferenza, vi è per esso una sola tangente al cerchio, la quale si ottiene costruendo pel punto dato la perpendicolare al raggio della circonferenza che passa per codesto punto (nn. 189, 199).



Consideriamo infine il caso in cui il punto dato A sia esterno al cerchio dato O.

Centro in A, si descriva la circonferenza di raggio AO, e, centro in O, si descriva la circonferenza di raggio uguale al diametro del cerchio dato. Le due circonferenze così descritte si intersecano in due punti.

Infatti in primo luogo la distanza AO dei loro centri, uguale ad uno dei due raggi, è certamente minore della somma di essi. Se poi è P l'intersezione della AO con la circonferenza assegnata, la differenza dei due raggi è data dalla differenza di 2PO e di AO = AP + PO, ossia anche dalla differenza di PO e AP; e quest'ultima differenza è certamente minore della somma dei medesimi segmenti PO, AP cioè di AO, distanza dei centri. Abbiamo dunque che le due circonferenze descritte si intersecano in due punti distinti B, C, cadenti da bande opposte rispetto alla AO (n. 214).

Poichè OB e OC sono uguali al diametro del cerchio dato, codesti due segmenti intersecheranno in due punti D, E, rispettivamente, la circonferenza data. Diciamo che le AD, AE sono tangenti al cerchio dato.

Infatti, poichè OB è uguale al diametro e OD al raggio del cerchio dato, D è il punto medio di OB; ma per costruzione A è equidistante da B e da O, onde AD è l'asse del segmento BO (n. 122), e quindi

è perpendicolare al raggio OD nel suo estremo. Concludiamo che la AD è tangente al cerchio dato (n. 189). Analogamente si dimostra che è tangente la AE.

Il problema proposto ammette dunque due soluzioni. Nè può ammetterne più di due, perchè se AT è una tangente condotta da A al cerchio O, il triangolo AOT, essendo rettangolo in T (n. 199) e avendo il cateto OT uguale al raggio del cerchio O, deve coincidere o con AOD o con AOE: cioè la tangente AT deve coincidere o con la AC o con la AE.

237. Ciascuna delle due tangenti AD, AE lascia tutto da una banda il cerchio dato (n. 188); perciò questo appartiene per intero all'angolo $\widehat{EAD}$. Di qui risulta intanto che ogni retta per A esterna all'angolo $\widehat{EAD}$ è anche esterna al cerchio dato. Presa poi una retta avente una semiretta interna all'angolo $\widehat{EAD}$, codesta semiretta incontra in un punto R il segmento DE, che ha gli estremi sui due lati dell'angolo considerato (n. 46). Ma DE è una corda del cerchio considerato, onde risulta che R è interno al cerchio (n. 171) e quindi che la retta AR è secante (n. 192).

Dalla costruzione del n. precedente e dalla considerazione dianzi fatta risulta il

Cor. — *Dati un cerchio e un punto esterno ad esso, per il punto passano due tangenti al cerchio e due soltanto, che definiscono quattro angoli ad uno dei quali appartiene il cerchio. Le rette pel punto dato, esterne a codesto angolo, sono esterne al cerchio; quelle che penetrano in esso sono secanti.*

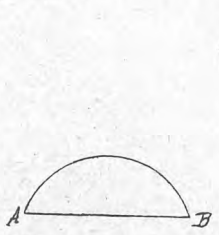
238. Siccome poi dalla costruzione del n. 236 risulta che i due triangoli rettangoli ADO, AEO sono uguali, possiamo enunciare il seguente

Cor. — *Condotte ad un cerchio da un punto esterno le due tangenti, i segmenti di esse compresi fra il punto esterno e i punti di contatto sono uguali.*

Figure a contorno curvilineo.

239. Si può considerare una serie di figure piane che vengono determinate da segmenti e archi di circonferenze e comprendono come casi particolari i poligoni rettilinei ed il cerchio considerati innanzi.

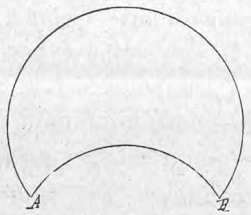
Qui ci limiteremo a poche figure e a qualche osservazione.



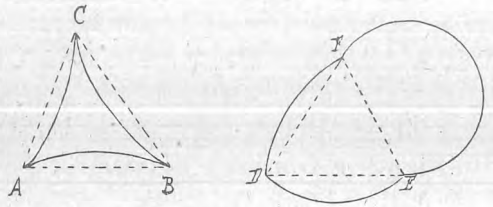
Segmento circolare.



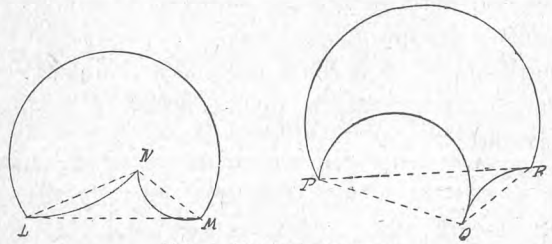
Fuso circolare.



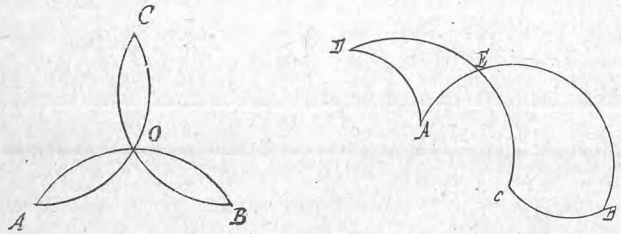
Lunula.



Triangoli a lati circolari.



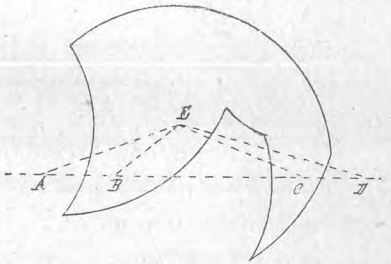
Triangoli a lati circolari.



Poligoni intrecciati a lati circolari.

240. Un poligono a lati circolari, si può definire combinando in modo opportuno, per riunione e per interferenza, parti di piano relative alle circonferenze dei lati e alle rette che congiungono le coppie dei vertici consecutivi del poligono. I punti appartenenti al poligono e non giacenti sul contorno diconsi *interni: esterno* dicesi ogni punto non appartenente al poligono.

241. Il contorno di un poligono sciolto a lati circolari divide il piano in due parti, una delle quali è il poligono per modo che:



dati due punti del piano fuori del contorno, i quali non si trovino sopra una retta passante per un vertice o tangente ad uno dei lati, il segmento che li congiunge sega il contorno un numero pari *(zero, due....)* o dispari di volte, secondochè i punti suddetti giacciono della medesima parte o da parte diversa rispetto al contorno del poligono.

Il contorno del poligono si considera come comune alle due parti di piano, che si dicono da esso *limitate*.

242. Preso un punto O interno ad un poligono a lati circolari si può costruire un segmento r che sia minore della distanza di O da un punto qualsiasi del contorno (cfr. n. 202)

Allora il cerchio di centro O e raggio r appartiene tutto al poligono, ossia, come si suol dire, è *interno* al poligono, mentre il contorno di questo cade tutto nella regione esterna al cerchio.

Allora ogni poligono a lati rettilinei avente i vertici sulla circonferenza di esso *(iscritto)*, è interno al poligono.

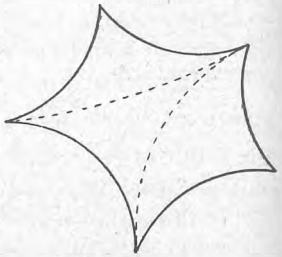
Dato dunque *un poligono a lati circolari si può costruire un poligono a lati rettilinei, p. es. un triangolo, tutto interno al poligono dato.*

243. Analogamente, dato un poligono a lati circolari, e un punto O del suo piano, si può costruire un segmento r' maggiore della distanza di O da un punto qualsiasi del contorno (n. 202).

Il cerchio di centro O e di raggio r' (ed a più forte ragione ogni poligono i cui lati rettilinei sieno tangenti ad esso, cioè *circoscritto* al cerchio suddetto) contiene nel suo interno il poligono a lati circolari, mentre tutti i punti esterni al cerchio sono esterni al poligono.

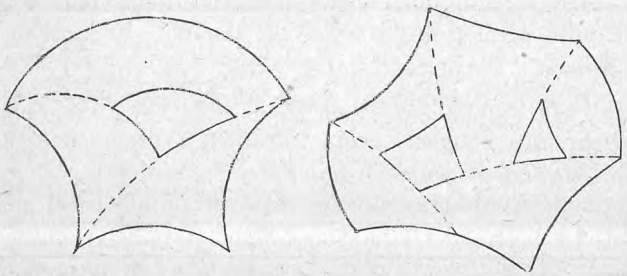
244. La riunione di più poligoni a lati circolari, non ricoprentisi (cioè non aventi punti interni comuni) si dice *somma* di essi.

È particolarmente interessante il caso in cui i poligoni di cui si considera la somma, presi in un certo ordine, siano a due a due *adiacenti*, cioè abbiano comune una parte del loro contorno (segmenti o archi).



Allora la loro somma è generalmente un nuovo poligono: così accade nella unita figura.

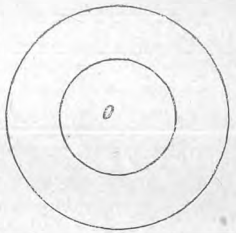
Tuttavia deve notarsi il caso in cui la somma di più poligoni ordinatamente adiacenti sia l'insieme dei punti del



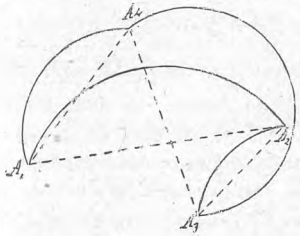
piano che si ottiene per interferenza della parte interna ad un poligono e di quella esterna ad un altro, o più generalmente,

interferendo un poligono colle parti di piano esterne a più altri.

Gli esempi più semplici relativi al primo caso, sono offerti dalla corona poligonale a contorno rettilineo (n. 142), e dalla *corona circolare* disegnata qui accanto.

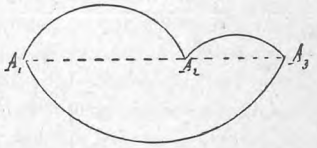


245. Le figure che si ottengono nel modo indicato, per somma di poligoni curvilinei, si chiameranno genericamente *figure a contorno curvilineo* (circolare e misto).



246. Dato un poligono a lati circolari P di vertici A_1, A_2,..., A_n, si può considerare il poligono rettilineo $A_1A_2 \ldots A_n$; questo può essere sciolto o intrecciato, pur essendo sciolto il poligono curvilineo. Non è neppure escluso il caso particolare in cui i vertici A_1, A_2 ...., si trovino tutti in linea retta; allora non si può parlare propriamente di un poligono, ma soltanto di un gruppo di segmenti A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_n\,A_1$ sulla retta.

Escludiamo per un momento questo caso particolarissimo.



Ogni arco, lato di P, giace da una parte della sua corda; il lato che ha per corda $A_1\,A_2$, può giacere dalla parte di essa che contiene A_3 (o A_4 ecc.), oppure da parte opposta. Questo ci fornisce un criterio per fissare la *posizione* di ogni lato (arco) rispetto alla sua corda.

Dato un qualsiasi poligono rettilineo $A_1A_2 \ldots A_n$ ed n archi le cui corde sieno uguali ordinatamente ai lati di esso, si può costruire *un determinato* poligono curvilineo P avente per vertici A_1, A_2, ... A_n e di cui i lati siano uguali agli archi assegnati ed abbiano una posizione fissata rispetto alle loro corde A_1A_2, A_2A_3,....

La costruzione resta ugualmente determinata se in luogo di qualche arco, viene assegnato, come lato del poligono P, un lato del poligono rettilineo $A_1A_2 \ldots A_n$.

Le osservazioni precedenti ci suggeriscono di dare la seguente

247. Def. — Due poligoni a lati circolari $A_1A_2 \ldots A_n$, $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ diconsi *uguali* se:

1) sono uguali le poligonali chiuse determinate dai loro vertici nell' ordine dato;

2) sono ordinatamente uguali gli archi che costituiscono i lati dei due poligoni a lati circolari;

3) questi archi sono nei due poligoni ugualmente posti rispetto alle loro corde.

Note. — Nel caso particolare in cui i vertici $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e così $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$ sieno in linea retta, la definizione data deve essere intesa nel modo seguente: i due poligoni a lati circolari si dicono uguali quando sieno ordinatamente uguali gli archi costituenti i lati (e quindi anche le loro corde A_1A_2, $A'_1A'_2$,...); e di più, a due archi dell'uno giacenti dalla medesima parte della retta A_1A_n corrispondano nell'altro due archi giacenti dalla stessa parte di $A'_1 A'_n$ e viceversa.

248. Osservazione. — Due poligoni a lati circolari, che siano uguali, sono *sovrapponibili* col *movimento*, ciò che dà un criterio sperimentale per verificarne l'uguaglianza.

Anche per due poligoni a lati circolari in uno stesso piano, come pei poligoni rettilinei, si può distinguere un'uguaglianza *diretta* o *inversa* (cfr. n. 135).

Se due poligoni a lati circolari sciolti sono uguali, essi si ottengono combinando *nello stesso modo,* per riunione o interferenza, parti di piano relative a rette e a circonferenze uguali.

ESERCIZI

1. Due circonferenze uguali sono simmetriche rispetto al punto di mezzo del segmento congiungente i loro centri o rispetto all'asse di codesto segmento (cfr. le definizioni a pagg. 71-72).

2. Se due corde uguali si tagliano, le parti dell'una sono rispettivamente uguali alle parti dell'altra.

3. Due corde che si dimezzino scambievolmente sono due diametri (n. 177).

4. Costruire un cerchio di dato centro e che tagli su una retta data un segmento uguale a un segmento assegnato. (Dal centro dato si abbassi la perpendicolare sulla retta data, ecc.).

5. Luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti.

6. Fra tutte le corde che passano per un punto interno ad un cerchio, quella che è perpendicolare al diametro passante per quel punto è la minima.

7. Archi uguali sottendono corde uguali e, viceversa, in cerchi uguali corde uguali sono sottese da archi uguali.

8. Se in uno stesso cerchio o in cerchi uguali due archi minori delle semicirconferenze sono disuguali, l'arco maggiore sottende la corda maggiore, e viceversa.

9. Se una retta incontra due circonferenze concentriche (di ugual centro) le parti intercette fra le due circonferenze sono uguali.

10. Due circonferenze intersecantisi non possono dimezzarsi scambievolmente. (Infatti la corda comune ecc.).

Def. — Se due circonferenze si segano in un punto, le tangenti in esso formano quattro angoli: quello fra questi che

contiene il fuso determinato delle due circonferenze si dice *angolo* di esse.

11. I due angoli di due circonferenze segantisi sono uguali. (Simmetria rispetto alla retta dei centri).

12. Costruire un triangolo dati un lato, l'angolo adiacente e l'una o l'altra delle mediane uscenti dai vertici degli altri angoli.

13. Condurre per un punto una retta la quale abbia una distanza data da un altro punto prefissato.

14. Luogo dei centri dei cerchi iscritti in un angolo (tangenti ai lati dell'angolo).

15. Costruire un triangolo dati due lati e l'altezza relativa al terzo lato.

16. Determinare il centro del cerchio tangente ai tre lati di un triangolo ed interno ad esso (cerchio iscritto). (Vedi esercizio n. 14).

17. Determinare il luogo dei punti medi delle corde di una data circonferenza, uguali ad un dato segmento.

18. Determinare il luogo dei punti tali che le tangenti condotte da essi ad una circonferenza data sieno uguali ad un dato segmento.

19. Qual'è il luogo dei punti per cui codeste tangenti riescono maggiori del segmento dato e quale quello per cui sono minori?

20. Determinare i punti del piano dai quali le tangenti condotte a due circonferenze date sono uguali ad un dato segmento. Discussione.

Def. — Il minimo dei segmenti condotti da un punto ad una circonferenza si dice *distanza* del punto dalla circonferenza.

21. Sopra una retta data trovare i punti che distano di un dato segmento da una circonferenza fissata.

Si discuta il caso in cui il segmento sia minore del raggio della circonferenza data.

22. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti ad una circonferenza data in un punto dato.

23. Costruire un cerchio di raggio dato tangente in un punto assegnato ad un cerchio dato. Discutere le soluzioni.

24. Costruire un cerchio tangente in un dato punto ad un dato cerchio e che passi per un punto prefissato. Discussione.

25. Luogo dei centri dei cerchi di dato raggio tangenti (internamente ed esternamente) ad un cerchio dato.

26. Sopra una retta, o sopra una circonferenza data, determinare i punti che sono centri di cerchi di raggio dato e tangenti ad una data circonferenza. Discussione (es. prec.).

27. Costruire un cerchio di raggio dato tangente a due cerchi dati. Discussione (es. n. 25).

28. In ogni quadrangolo circoscritto ad un cerchio, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

29. Se per un quadrangolo la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, in esso si può iscrivere un cerchio.

(Si considerino due lati AB, AD consecutivi; la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ da essi formato incontra uno almeno (BC) dei rimanenti lati. Si provi che vi è un cerchio tangente ai tre lati AB, AD, BC così scelti, ed interno ai due angoli da essi formati: poi si ragioni per assurdo).

30. Il segmento di una tangente ad un cerchio intercetto dalle tangenti per gli estremi di un diametro viene veduto dal centro secondo un angolo retto. (Si congiunga il punto di contatto col centro).

Def. — Un poligono equilatero ed equiangolo dicesi *regolare*. Il poligono regolare di quattro lati chiamasi *quadrato*.

31. Poligoni iscritti in cerchi uguali aventi i lati ordinatamente uguali sono uguali.

32. Un poligono equilatero iscritto in un cerchio è equiangolo.

33. Iscrivere in un cerchio un quadrato che abbia un vertice dato.

34. Iscrivere in un cerchio dato un quadrato di cui un lato passi per un punto prefissato dentro il cerchio. Indicare la condizione cui deve soddisfare il punto perchè il problema sia possibie.

(Dato dentro il cerchio O il punto M, si iscriva nel cerchio un qualsiasi quadrato ABCD. Se P è un punto in cui la

circonferenza di centro O e raggio OM sega uno dei lati di A C D, p. es. A, si congiunga O con P e con A. Costruito il triangolo $\widehat{MON}$ uguale al triangolo $\widehat{POA}$, si dimostra che la corda MN del cerchio O è lato di un quadrato iscritto nel cerchio. — Il metodo qui indicato consiste, in sostanza, nel costruire un figura uguale a quella richiesta, e nel farla poi *ruotare* intorno ad un punto, fino a portarla nella posizione particolare voluta. Codesto metodo, che vale a risolvere tutto un gruppo di problemi, si designa col nome di *metodo* delle *rotazioni)*.

35. Iscrivere in un cerchio un ottagono regolare avente un vertice fissato, o di cui un lato passi per un punto dato interno al cerchio.

36. Dividere un angolo retto in tre parti uguali. (Si consideri la metà di un angolo di un triangolo equilatero....)

Risoluto il precedente problema si risolve anche il seguente.

37. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero che abbia un vertice dato. (Cfr. es. prec.).

38. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero di cui un lato passi per un punto prefissato dentro il cerchio. Indicare la condizione di possibilità ed esaminare il caso in cui il punto dato sia esterno.

39. Iscrivere in un cerchio un esagono regolare avente un vertice fissato, e tale che un lato passi per un punto dato interno al cerchio.

40. Luogo dei punti di mezzo delle corde di un cerchio che sono uguali ad un dato segmento.

41. Date tre circonferenze che si seghino a due a due ma non passino per uno stesso punto, determinare il luogo dei punti la cui distanza da esse sia maggiore di un segmento assegnato. Discussione.

42. Si confrontino due triangoli a lati circolari *concavi* (lascianti tutta la figura nella parte esterna). Di due triangoli siffatti si può affermare che sono uguali se sono uguali i cerchi dati, ed inoltre

1) due lati e l'angolo compreso;

2) o un lato e i due angoli adiacenti.

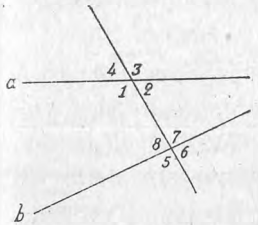
I medesimi criteri possono estendersi anche ad altri casi.

IV.

TEORIA DELLE PARALLELE E SUE APPLICAZIONI

Parallele.

249. In un piano due rette *a, b,* intersecate da una terza *c (trasversale)*, formano otto angoli, che a coppie assumono nomi speciali, a seconda delle parti di piano in cui cadono rispetto alle rette date. Riferendoci per esempio alla unita figura gli angoli 1 e 7, 2 e 8 diconsi *alterni interni,* gli angoli 4 e 6, 3 e 5 *alterni esterni*, gli angoli 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 *corrispondenti,* e infine gli angoli 1 e 8, 2 e 7 *coniugati.*



250. Il confronto degli angoli che due rette formano con una trasversale ci permetterà di riconoscere che esistono in un piano rette che non si incontrano (cfr. nn. 253, 254).

Def. — Due rette di un piano che non hanno punti comuni si dicono *parallele.*

251. Risulta dal n. 40, che *due rette* a, b, *paral-*

lele, dividono il piano che le contiene, in tre parti per modo che:

I. *Ogni punto del piano fuori di* a, b, *appartiene ad una delle parti e ad una sola.*

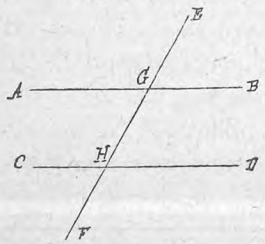
II. *Due punti, fuori di* a, b, *appartenenti ad una stessa delle tre parti, sono gli estremi di un segmento che non sega* a, b.

III. *Due punti fuori di* a, b, *appartenenti a due parti diverse, sono gli estremi di un segmento che sega almeno una delle due rette.*

252. Le tre parti di piano, cui si allude nell'enunciato prec., sono costituite la prima dai punti che giacciono rispetto ad *a* da banda opposta di *b*, la seconda dai punti che giacciono rispetto a *b* da banda opposta di *a*, ed infine la terza dai punti che sono dalla stessa banda di *b* rispetto ad *a* e dalla stessa banda di *a* rispetto a *b*. Quest'ultima parte dicesi *striscia* limitata dalle rette *a, b* (*lati della striscia*).

253. Teor. — *Se due rette di un piano intersecate da una terza, formano con essa due angoli alterni (interni od esterni) uguali, le due rette sono parallele.*

Siano le due rette AB, CD intersecate dalla EF nei punti G, H rispettivamente, e sia l'angolo interno $\widehat{AGH}$ uguale all'alterno $\widehat{DHG}$.



Le due rette AB, CD sono parallele, perchè se si incontrassero, formerebbero con la trasversale EF un triangolo avente un angolo interno uguale ad un esterno opposto (n. 91).

Se poi si supponessero uguali due angoli alterni esterni, per esempio $\widehat{BGE}$, $\widehat{CHF}$, avremmo che sarebbero uguali anche i rispettivi angoli opposti al vertice, i quali sono due angoli alterni interni; e ricadremmo nel caso or ora considerato.

254. Teor. — *Se due rette di un piano, intersecate da una terza, formano con essa angoli corrispondenti uguali o angoli coniugati supplementari, le due rette sono parallele.*

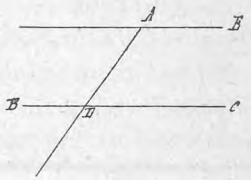
Infatti se (fig. prec.) sono uguali gli angoli corrispondenti $\widehat{BGE}$, $\widehat{DHG}$, quest'ultimo angolo $\widehat{DHG}$ sarà anche uguale all'opposto al vertice di $\widehat{BGE}$, cioè all'angolo $\widehat{AGH}$. Ma $\widehat{DHG}$ ed $\widehat{AGH}$ sono alterni interni, onde si conclude (n. prec.) che le due rette sono parallele.

Se poi l'angolo $\widehat{DHG}$ è supplementare del coniugato $\widehat{HGB}$, avremo che sono uguali gli angoli $\widehat{DHG}$, $\widehat{AGH}$, perchè supplementari del medesimo angolo $\widehat{BGH}$, (n. 65). Ma $\widehat{DHG}$, $\widehat{AGH}$ sono angoli alterni interni, onde le due rette AB, CD sono parallele (n. prec.).

255. Teor. — *In un piano tutte le perpendicolari ad una medesima retta sono parallele.*

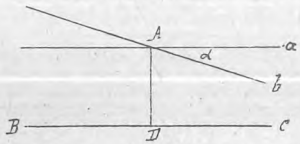
256. Teor. — *Per un punto dato si può sempre condurre una parallela a una retta data, non passante per esso.*

Dato il punto A e la retta BC, non passante per esso, si conduca per A una retta AD qualsiasi, che incontri la BC in D; e poi per A si conduca la retta AE per modo che risultino uguali gli angoli alterni interni $\widehat{DAE}$, $\widehat{ADB}$. La AE è allora parallela alla BC (n. 253).



Nota. — Praticamente conviene abbassare da A la perpendicolare AD sulla BC e condurre per A la perpendicolare alla AD (vedi fig. al n. seg.).

257. Osservazione. — Dato fuori di una retta BC un punto A, e condotta per A una parallela a alla BC (n. prec.), consideriamo per A una qualsiasi retta b distinta dalla a. Qualunque sia l'angolo α formato dalle due rette rette a, b, purchè le due rette siano sensibilmente distinte, vediamo che le b e c, prolungate convenientemente, si incontrano, e concepiamo che ciò accade sempre, per quanto piccolo si prenda l'angolo α.



Enunciamo perciò il seguente

258. Postulato (di EUCLIDE o delle parallele). — *Dati una retta e un punto fuori di essa, per questo passa una sola parallela alla retta data.*

259. Nota. — Al num. 256 per condurre dal punto A una parallela alla BC abbiamo considerato per A una *qualsiasi* delle rette, che incontrano la BC, e servendoci di essa abbiamo condotto a termine la costruzione. Il postulato prec. ci assicura che la costruzione conduce sempre alla medesima retta AE, *qualunque* sia la trasversale AD considerata.

260. Teor. — *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra di loro.*

Se, in un piano, le rette a e b, parallele alla medesima retta c, si incontrassero, per il loro punto comune passerebbero due rette parallele alla c, il che è contrario al postulato del n. 258.

261. Teor. — *Se in un piano si hanno più parallele, una retta secante rispetto ad una di queste sega anche tutte le altre.*

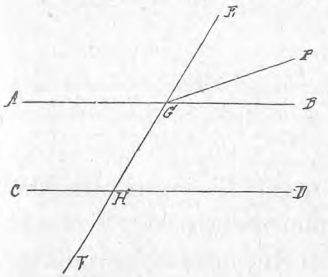
Se intatti una retta, che interseca una delle parallele considerate, non ne intersecasse un'altra, quest'ultima ammetterebbe due parallele distinte per un medesimo punto.

262. Il postulato del n. 258 ci permette ora di invertire le proposizioni dei nn. 253, 254.

263. Teor. — *Se due rette sono parallele, esse formano con ogni trasversale:*

1) *angoli alterni uguali;*
2) *angoli corrispondenti uguali;*
3) *angoli coniugati supplementari.*

Siano le due rette parallele AB, CD, intersecate dalla trasversale EF nei punti G, H rispettivamente.



1) Scelti due qualsivogliano angoli alterni, per esempio $\widehat{BGE}$ e $\widehat{CHF}$, diciamo che essi sono uguali.

Supposto che sieno disuguali, potremo condurre per G, dalla stessa parte di GB rispetto alla EF, la semiretta GP tale che l'angolo $\widehat{PGE}$ sia uguale a $\widehat{CHF}$. Allora le rette GP e CD, che con la trasversale EF formano angoli alterni uguali, sono parallele (n. 253), e pel punto G passano le due rette distinte GB, GP, entrambe parallele alla CD, il che è assurdo (n. 258). Abbiamo dunque veramente che gli angoli alterni $\widehat{BGE}$, $\widehat{CHF}$ devono essere uguali.

2) Diciamo che gli angoli corrispondenti, per es., $\widehat{BGE}$, $\widehat{DHG}$, sono uguali.

Infatti essendo uguali gli angoli alterni $\widehat{BGE}$, $\widehat{CHF}$, l'angolo $\widehat{BGE}$ sarà di conseguenza uguale anche all'opposto al vertice di $\widehat{CHF}$, cioè a $\widehat{DHG}$.

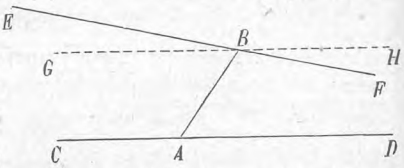
3) Diciamo infine che due angoli coniugati, p. es. $H\widehat{G}B$, $D\widehat{H}G$, sono supplementari.

Infatti $D\widehat{H}G$ è uguale al corrispondente $B\widehat{G}E$, e questo è supplementare di $H\widehat{G}B$.

264. Cor. — *Se due rette sono parallele, ogni perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra.*

265. Cor. — *Se due rette formano con una trasversale angoli coniugati non supplementari, le due rette si incontrano da quella parte, da cui la somma dei due angoli coniugati è minore di due retti.*

Siano CD ed EF due rette, che con la trasversale AB formino angoli coniugati non supplementari e, precisamente, sia $D\widehat{A}B + A\widehat{B}F$ minore di due retti, e quindi $E\widehat{B}A + B\widehat{A}C$ maggiore di due retti. Diciamo che le CD ed EF si incontrano dalla parte di F e D.



Anzitutto le due rette si incontrano perchè, se fossero parallele formerebbero angoli coniugati supplementari (n. 263): quindi la CD avrà un punto comune o colla semiretta BE o colla semiretta BF. In secondo luogo, condotta per B la parallela GH alla CD avremo che essendo $G\widehat{B}A + B\widehat{A}C$ uguale a due retti ed $E\widehat{B}A + B\widehat{A}C$ maggiore di due retti, sarà $E\widehat{B}A$ maggiore di $G\widehat{B}A$, e quindi la semiretta BE cadrà, rispetto alla GH, da parte opposta della CD e non avrà nessun punto comune con questa retta. Ne risulta che la retta DC ha un punto comune colla semiretta BF.

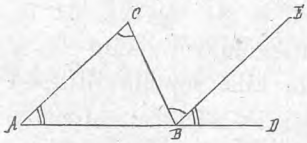
Nota. — Questa proposizione permette di assegnare la condizione di resolubilità del probl. del n. 233.

Somma degli angoli di un poligono.

266. Teor. — *In un triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni opposti.*

Dato il triangolo ABC e prolungato AB in D, diciamo che l'angolo esterno $D\widehat{B}C$ è uguale alla somma degli angoli $A\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}C$.

Condotta invero per B la parallela BE alla AC, avremo che sono uguali gli angoli $A\widehat{C}B$, $E\widehat{B}C$, come alterni interni formati dalle parallele AC, BE colla trasversale BC, e gli angoli $B\widehat{A}C$, $D\widehat{B}E$ come corrispondenti rispetto alle medesime parallele e alla trasversale AB (n. 263). Avremo quindi che la somma di $A\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}C$ è uguale alla somma di $E\widehat{B}C$ e $D\widehat{B}E$, cioè appunto a $D\widehat{B}C$.



267. — Discende di qui, come corollario, il seguente teorema fondamentale:

Teor. — *La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti.*

Infatti (fig. prec.) poichè la somma di $A\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}C$ è uguale a $D\widehat{B}C$, avremo che la somma dei tre angoli interni $A\widehat{C}B$, $B\widehat{A}C$, $C\widehat{B}A$ è uguale alla somma dei due angoli adiacenti $D\widehat{B}C$, $C\widehat{B}A$, cioè a due angoli retti.

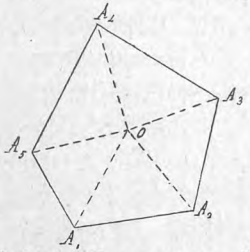
268. Cor. — *I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari* (cioè la loro somma è un angolo retto).

269. Cor. — *Se due angoli di un triangolo sono uguali rispettivamente a due angoli di un altro triangolo, anche i rimanenti angoli sono uguali.*

270. Nota. — In base al n. prec. il teor. del n. 86 è un corollario del secondo criterio di uguaglianza dei triangoli (n. 84).

271. Teor. — *La somma degli angoli di un poligono è uguale alla somma di tante volte due angoli retti quanti sono i lati del poligono, diminuita di quattro angoli retti.*

Sia il poligono convesso ad n lati $A_1A_2 \ldots A_n$ (nella figura si è preso un pentagono): diciamo che la somma dei suoi angoli è uguale alla somma di $2n$-4 angoli retti cioè ad n-2 angoli piatti (nel caso della figura a sei retti).



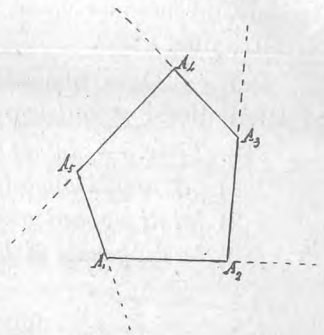
Congiunto, invero un punto interno qualsiasi O del poligono con ciascuno dei vertici, otteniamo il poligono decomposto in n triangoli (tanti quanti sono i lati). La somma degli angoli di questi n triangoli è, per una parte, uguale a $2n$ angoli retti (n. 267), e per l'altra è uguale alla somma degli angoli del poligono, aumentata della somma degli angoli aventi il vertice comune in O, cioè di quattro angoli retti. Quindi la somma degli angoli del poligono è uguale alla somma di tante volte due retti quanti sono i lati, diminuita di quattro angoli retti.

272. Nota. — Si può anche dire che *la somma degli angoli di un poligono è uguale a tante volte due retti quanti sono i lati meno due.*

273. Come caso particolare del teorema stabilito innanzi, abbiamo che la *somma degli angoli di un quadrangolo è uguale a quattro angoli retti.*

274. Cor. — *In ogni poligono equiangolo di* n *lati, ogni angolo è uguale alla* n.ma *parte di* 2n-4 *angoli retti.*

Così, in particolare, in un triangolo equiangolo (equilatero) ogni angolo è la terza parte di due retti; in un quadrilatero equiangolo gli angoli sono retti, ecc.



275. Proponiamo come esercizio la dimostrazione delle due seguenti proposizioni:

a) **Teor.** — *In un poligono di cui i vertici siano presi nel loro ordine, la somma degli angoli esterni, formati da ciascun lato col prolungamento del precedente, è uguale a quattro angoli retti.*

b) **Cor.** — *Un poligono non può avere più di tre angoli acuti.*

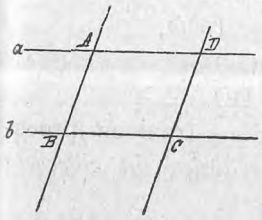
Parallelogrammi.

276. In un quadrangolo si designano col nome di *opposti* due lati non aventi vertici comuni.

Def. — Un quadrangolo in cui due lati opposti sono paralleli dicesi *trapezio.*

I due lati paralleli diconsi *basi* del trapezio.

277. Date due rette a, b parallele, intersecate da una trasversale nei punti A, B rispettivamente, se si conduce per un punto D di a, distinto ad A, la parallela alla AB, questa incontra la b in un punto C (n. 261) e si ottiene un quadran-



golo DCBA, in cui ogni lato è parallelo al lato opposto, e che può quindi considerarsi in due modi come trapezio, prendendo come basi due lati opposti oppure gli altri due.

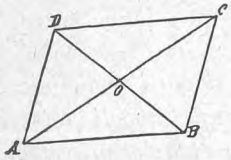
Def. — Ogni quadrangolo i cui lati opposti sono paralleli dicesi *parallelogramma:*

278. Teor. — *In un parallelogramma:*

1) *gli angoli opposti sono uguali;*

2) *i lati opposti sono uguali;*

3) *le diagonali si bisecano scambievolmente.*



1) Gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ sono uguali, perchè supplementari dello stesso angolo $\widehat{B}$ (n. 263). Analogamente dicasi per $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$.

2) Condotta la diagonale AC, i due triangoli ABC, CDA, col lato AC comune, hanno uguali gli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DCA}$, $\widehat{ACB}$ e $\widehat{CAD}$ come alterni interni rispetto alle parallele AB e DC, BC e AD e alla trasversale AC; essi sono perciò uguali (n. 84) e si ha

$$AB = CD, \quad BC = DA.$$

3) Le due diagonali AC, BD si intersecano in un punto O, perchè B e D cadono da bande opposte rispetto alla retta AD. I due triangoli ABO, CDO, per i quali, come si è ora dimostrato, è AB = CD, ed è

$$\widehat{OBA} = \widehat{ODC}, \quad \widehat{BAO} = \widehat{DCO},$$

per il n. 84 sono uguali. Ne risulta

$$AO = CO, \quad BO = DO.$$

279. Nota. — Risulta dalla dimostrazione precedente che: *Un parallelogramma è diviso da ciascuna sua diagonale in due triangoli uguali.*

280. Cor. — *Due parallelogrammi che abbiano rispettivamente uguali due lati consecutivi e l'angolo compreso sono uguali.*

Risulta infatti dal n. prec. che i due parallelogrammi hanno ordinatamente uguali tutti i lati e tutti gli angoli.

Nota. — Segue di qui in qual modo, dato un parallelogramma e un segmento uguale ad uno dei lati di esso, si costruisca su questo segmento, come lato, un parallelogramma uguale al dato.

281. Il teor. del n. 278 si inverte. Si ottengono così *tre diversi criteri per riconoscere se un quadrangolo è un parallelogramma.*

Teor. — *Un quadrangolo è un parallelogramma:*

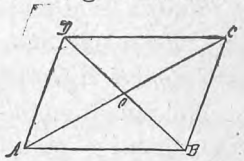
1) *se i lati opposti sono uguali;*

2) *se gli angoli opposti sono uguali;*

3) *se le diagonali si dimezzano scambievolmente.*

1) Nel quadrangolo ABCD i lati AB, BC siano uguali rispettivamente a CD, AD.

Occorre dimostrare che codesti segmenti sono a due a due parelleli. Condotta invero una delle diagonali, p. es. la AC, i due triangoli ABC, CDA sono uguali perchè hanno i tre lati ordinatamente uguali (n. 90). Allora dall' uguaglianza degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DCA}$, alterni interni formati dalle AB, DC colla trasversale AC, e dall'uguaglianza degli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAD}$, alterni interni formati dalle BC, AD, con la medesima trasversale, concludiamo (n. 253) che le AB, BC sono rispettivamente parallele alle DC, AD.



2) Gli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}$ siano uguali rispettivamente a $\widehat{C}, \widehat{D}$.

Si deve provare che, anche in questo caso, i lati opposti AD, BC, e così anche AB, DC, sono paralleli.

Perciò si noti che le somme d'angoli $\widehat{A}+\widehat{B}$ e $\widehat{C}+\widehat{D}$ sono, per le ammesse ipotesi, uguali, e che d'altra parte queste somme, prese insieme, valgono quattro angoli retti (n. 273), onde ciascuna vale due retti. Di qui, in base al n. 254, si conclude che le AD, BC sono parallele. Analogamente per le AB, DC.

3) Se nel quadrangolo ABCD (fig. prec.) il punto O comune alle due diagonali è tale che AO = OC, BO = OD, i due triangoli ABO, CDO hanno uguali, oltre le coppie di lati or or accennate, gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$ (n. 63), e sono perciò uguali (n. 79). Concludiamo che AB = CD.

Analogamente si dimostra che BC = DA, onde risulta, per la prima parte del presente teorema, che il quadrangolo è un parallelogramma.

282. Un altro criterio per riconoscere se un quadrangolo è parallelogramma è dato dal seguente

Teor. — *Un quadrangolo è parallelogramma se una delle coppie di lati opposti è costituita da due segmenti uguali e paralleli.*

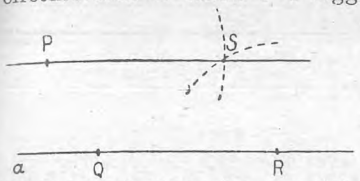
Nel quadrangolo ABCD i due lati opposti AB, DC siano uguali e paralleli (vedi fig. al n. prec.)

Condotta una delle diagonali, per esempio la AC, i due triangoli ACD, CAB, avendo il lato AC comune, uguali i lati CD, AB per ipotesi e gli angoli $\widehat{DCA}$, $\widehat{BAC}$, come alterni interni rispetto alle parallele DC, AB, e alla trasversale AC, sono uguali (n. 79), e quindi sono uguali i lati AD e CB. Ricadiamo così nel caso 1) del n. prec., onde si conclude che il quadrangolo è un parallelogramma.

283. Le proprietà dei parallelogrammi permettono di risolvere *col solo uso della riga e del compasso* il seguente

Probl. — *Condurre da un punto* P *la parallela ad una retta data.*

Presi sulla a due punti ad arbitrio Q, R, si descriva la circonferenza di centro P e raggio uguale a QR. Siccome nel triangolo PQR il lato PR è minore della somma degli altri due lati PQ e QR, e maggiore della loro differenza (n. 97), la circonferenza di centro R e raggio uguale a PQ intersecherà in due punti la prima circonferenza da noi tracciata (n. 214). Questi due punti cadranno da bande opposte rispetto alla PR. Se S è quello che cade dalla banda opposta di Q, la SP è la parallela cercata.



Infatti il quadrangolo PQRS ha per costruzione i lati opposti PQ ed SR, QR e PS uguali e perciò è un parallelogramma (n. 281).

Rettangolo, rombo e quadrato.

284. Se in un parallelogramma ABCD un angolo, p. es. quello in A, è retto, anche l'opposto, cioè l'angolo in C, che gli è uguale (n. 278), è retto. E gli altri due angoli, in B e D, come supplementari di $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ rispettivamente (n. 263) saranno pur essi retti; cosichè abbiamo il



Teor. — *Se un parallelogramma ha un angolo retto, ha retti anche gli altri tre.*

285. Similmente dal n. 278 risulta il



Teor. — *Se un parallelogramma ha due lati consecutivi uguali, ha uguali tutti e quattro i lati.*

286. Def. — Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti dicesi *rettangolo.*

Un parallelogramma avente tutti e quattro i lati uguali dicesi *rombo* o *losanga.*

Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti e tutti e quattro i lati uguali dicesi *quadrato.*

Si può costruire un rettangolo dati due suoi lati consecutivi, staccando due segmenti uguali ad essi sopra i lati d'un angolo retto, e mandando per gli estremi le parallele ai lati dell'angolo fino ad incontrarsi.

Il rettangolo così determinato dicesi « rettangolo contenuto dai due segmenti » o « rettangolo di essi ».

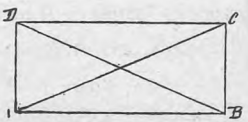
In particolare il quadrato resta definito, quando ne è dato il lato; il quadrato costruito sopra un segmento, dato come lato, si dice « quadrato di esso ».

287. Dai nn. 281, 273 discende il

Teor. *Un quadrangolo equilatero è un rombo; un quadrangolo equiangolo è un rettangolo; un quadrangolo equilatero ed equiangolo è un quadrato.*

288. Un altro semplice criterio per riconoscere se un parallelogramma è o no rettangolo, è dato dai due teoremi seguenti.

Teor. — *Nel rettangolo le diagonali sono uguali.*



Dato un rettangolo ABCD, si conducano le due diagonali

AC, BD. Allora i due triangoli ABC, BAD rettangoli in B, A rispettivamente, hanno il cateto AB comune e i cateti BC, AD uguali (n. 278). Essi sono quindi uguali (n. 109) ed hanno uguali le ipotenuse AC, BD.

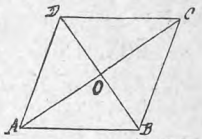
289. Teor. — *Un parallelogramma avente le diagonali uguali è un rettangolo.*

Condotte nel parallelogramma ABCD (fig. del n. prec.) le due diagonali, per ipotesi uguali, i due triangoli ABC, BAD hanno il lato AB comune, AC = BD (per ipotesi), BC = AD (n. 278), onde sono uguali, e $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$. Ma questi angoli sono supplementari (n. 263), onde si conclude che essi sono retti, cioè che ABCD è un rettangolo.

290. Un semplice modo per riconoscere se un parallelogramma è o no un rombo è dato dai due teoremi seguenti.

Teor. — *Le diagonali del rombo ne bisecano gli angoli e sono fra loro perpendicolari.*

Condotte nel rombo ABCD le due diagonali AC, BD, abbiamo che i triangoli BDA, BDC, aventi la base BD comune, sono isosceli, onde risulta (come al n. 82) che la AC dimezza gli angoli $\widehat{DCB}$, $\widehat{BAD}$. Di più la AC, congiungente i due punti A, C, equidistanti da B e D è l'asse del segmento BD (n. 122), onde risulta che la CA e la DB sono fra loro perpendicolari. Analogamente, considerando i due triangoli isosceli ACB, ACD si dimostra che la DB dimezza gli angoli $\widehat{ADC}$, $\widehat{CBA}$.

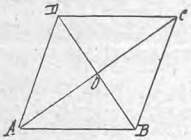


291. Teor. — *Un parallelogramma è un rombo.*

1) *se le diagonali sono perpendicolari;*

2) *se una diagonale biseca uno degli angoli.*

1) Se nel parallelogramma ABCD le diagonali sono perpendicolari, i triangoli rettangoli BOC, DOC aventi il cateto OC comune e i cateti BO, DO uguali (n. 278) sono uguali (n. 109) ed hanno uguali le ipotenuse BC, DC: onde risulta che il parallelogramma ABCD, avendo due lati consecutivi uguali, è un rombo (nn. 285, 286).



2) Se nel parallelogramma ABCD la diagonale AC biseca l'angolo $\widehat{C}$, ossia se $\widehat{ACB} = \widehat{DCA}$, essendo (per il n. 263) $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$, è anche $\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$, e quindi (n. 86) il triangolo ABC è isoscele, cioè AB = BC. Il parallelogramma è dunque veramente un rombo (n. 285).

292. Perveniamo ora, in base ai nn. 288-291, ad esprimere semplicemente i criteri per riconoscere se un parallelogramma è un quadrato mediante i seguenti corollari.

Cor. — *Le diagonali del quadrato ne bisecano gli angoli, e sono uguali e perpendicolari fra loro.*

293. Cor. — *Un parallelogramma è un quadrato:*

1) *se le diagonali sono uguali e perpendicolari;*

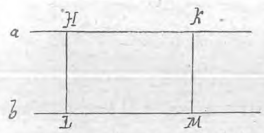
2) *se le diagonali sono uguali, e di una di esse si sa che divide per metà un angolo.*

Distanza di due parallele.

294. Teor. — *Se una retta è parallela ad un'altra, tutti i punti dell'una hanno ugual distanza dall'altra.*

Date le rette *a, b* parallele, si abbassino da due

punti H, K quali si vogliano della prima le perpendicolari HL, KM, alla seconda. Le HL, KM sono parallele fra di loro (n. 255), onde il quadrangolo HLMK è un parallelogramma (rettangolo), ed il segmento HL è uguale al segmento KM (n. 278).



295. Ogni perpendicolare alla *b* è perpendicolare anche alla *a* (n. 264), cosicchè la distanza dei punti della *a* dalla *b* è uguale alla distanza dei punti della *b* dalla *a*.

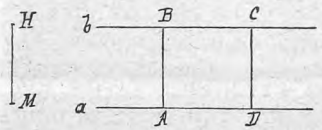
Questa distanza dicesi *distanza delle due parallele* od anche *larghezza della striscia* da esse definita.

296. Def. — Due striscie si dicono *uguali* se hanno uguale larghezza.

Osservazione. — La definizione di striscie uguali si giustifica osservando che due striscie aventi uguale larghezza si possono sovrapporre mediante il movimento.

297. Teor. — *Il luogo dei punti che distano di un segmento assegnato da una retta data e giacciono rispetto ad essa da una banda prefissata, è la parallela alla retta data, che ha da essa una distanza uguale al segmento assegnato e giace dalla banda considerata.*

Data la retta *a* e prefissata una banda rispetto a questa, sia MH il segmento dato. Per determinare il luogo dei punti della banda di piano prefissata, che hanno da *a* una distanza uguale ad MH, si innalzi, in un punto A di *a* e dalla banda prestabilita di *a*, la semiretta perpendicolare ad *a*, e su di essa si prenda il segmento AB uguale ad MH.



Sappiamo già dal n. 294 che ogni punto della parallela alla a per B ha da a una distanza uguale ad AB ossia ad MH.

Diciamo che, se C è un punto della banda prefissata di piano, tale che la sua distanza CD da a sia uguale ad AB, il punto C appartiene alla parallela alla a per B. Infatti nel quadrangolo ABCD i due lati opposti AC, DC, sono paralleli come perpendicolari alla stessa retta (n. 255) e di più sono per ipotesi uguali; onde concludiamo (n. 282) che ABCD è un parallelogramma e quindi la BC è parallela alla AD.

298. Cor. — *Il luogo dei punti del piano che hanno da una retta data la distanza uguale ad un segmento dato è la coppia delle due parallele alla retta data che giacciono da bande opposte ed hanno da essa una distanza uguale al segmento dato.*

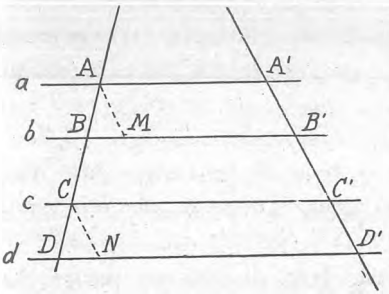
Divisione di un segmento in parti uguali.

299. Al n. 88 abbiamo imparato a dividere un segmento in due parti uguali, e quindi, riapplicando successivamente la medesima costruzione, in quattro, otto, ..., 2^n, ..., parti uguali.

Ora la considerazione delle parallele ci permetterà di giungere alla divisione di un segmento in un numero qualsivoglia di parti uguali mercè le relazioni che intercedono fra i segmenti che un gruppo di parallele determina sopra due trasversali.

Date più parallele e due trasversali, diremo *corrispondenti* due segmenti di queste, i quali siano intercettati dalle medesime due parallele. Sussiste allora il

300. Teor. — *Se più parallele sono segate da due trasversali, a segmenti uguali d'una di queste corrispondono segmenti uguali dall'altra, e a segmenti disuguali segmenti disuguali nello stesso senso.*

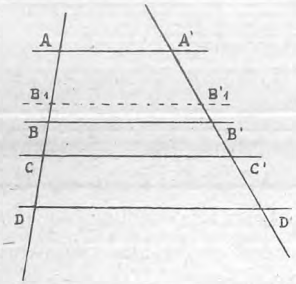


Le rette parallele a, b, c, d, vengano segate da due trasversali rispettivamente nei punti A, B, C, D, e A', B', C', D'; e sia per es. AB = CD. Diciamo che è

$$A'B' = C'D'.$$

Condotte invero da A, C le parallele alla A'D' fino ad incontrare (n. 261) rispettivamente le BB', DD', nei punti M, N, i due quadrangoli MB'A'A, ND'C'C risultano parallelogrammi, onde i segmenti A'B', C'D', sono uguali rispettivamente ad AM, CN (n. 278). D'altra parte nei due triangoli ABM, CDN, aventi i lati AB, CD uguali per ipotesi, sono uguali gli angoli $\widehat{ABM}$, $\widehat{CDN}$, come corrispondenti rispetto alle parallele b, d, e alla trasversale AD, e gli angoli $\widehat{BAM}$, $\widehat{DCN}$, come corrispondenti rispetto alle parallele AM, CN e alla medesima trasversale AD. I due triangoli sono perciò uguali (n. 84) ed hanno quindi uguali i lati AM, CN. Se ne conclude che i segmenti A'B', C'D', uguali a segmenti uguali, sono uguali fra di loro.

Stabilita così la prima parte dell'enunciato, facilmente se ne deduce la seconda. Perchè se invece di AB = CD, si ha p. es. AB > CD (fig. alla pag. seg.), si può staccare da AB un segmento $AB_1 = CD$; e la parallela per B_1 alle a, b, c, d va a segare la trasversale A'D' in un punto B'_1 interno al segmento A'B' tale che



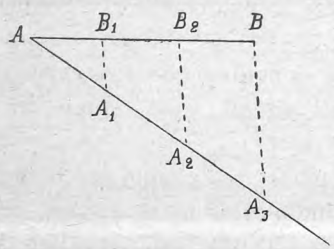
$A'B'_1 = C'D'$, e quindi risulta $A'B' > C'D'$.

301. Cor. — *Se due segmenti sono compresi fra due rette parallele, e, diviso il primo in un numero qualsivoglia di parti uguali, si conducono pei punti di divisione le parallele alle due rette date, queste dividono anche l'altro segmento in parti uguali.*

302. Come caso particolare di questo cor. si ha la seguente proposizione: *Se diviso un lato di un triangolo in quante si vogliono parti uguali, si conducono pei punti di divisione le parallele ad un altro lato, queste dividono il lato rimanente nello stesso numero di parti uguali.*

303. La proposizione prec. permette di *dividere un segmento assegnato in un numero dato qualsivoglia di parti uguali.*

Per fissare le idee, proponiamoci di dividere il segmento dato AB in *tre* parti uguali.



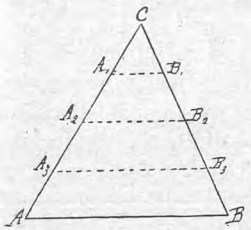
Sopra una semiretta uscente da uno degli estremi, p. es. da A, e distinta da AB, si portino di seguito tre segmenti AA_1, A_1A_2, A_2A_3, uguali ad un segmento arbitrario e, congiunto A_3 con B, pei punti A_1 e A_2, si conducano le parallele alla retta A_3B, fino ad incontrare (n. 261) la AB nei punti B_1 e B_2.

I tre segmenti AB_1, B_1B_2, B_2B, in cui resta diviso il segmento AB, sono uguali (n. prec.).

La costruzione precedente si può eseguire in innumerevoli modi; ma il risultato è sempre il medesimo, perchè il segmento AB_1, terza parte aliquota del segmento AB è unico (n. 35).

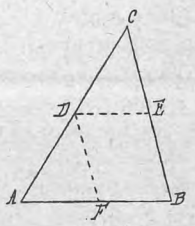
304. Cor. — *Se in un triangolo due lati sono divisi nel medesimo numero di parti uguali, le congiungenti i punti di divisione che, a partire dal vertice comune, occupano ugual posto, sono parallele al terzo lato.*

Nel triangolo ABC i lati AC e BC siano divisi nel medesimo numero n di parti uguali (nella figura abbiamo fatto $n = 4$). Diciamo che le congiungenti i punti di divisione di ugual posto, a partire da C, cioè le A_1B_1, A_2B_2.... sono parallele ad AB.



Infatti poichè CA_1 è la n^{ma} parte di CA, la parallela ad AB per A_1 deve incontrare CB in un punto B′ tale che CB′ sia la n^{ma} parte di CB (n. 302), onde risulta che B′ coincide con B_1 e che la A_1B_1 è parallela ad AB. Analogamente si dimostra che sono parallele ad AB le A_2B_2, A_3B_3....

305. Se in particolare, nel triangolo ABC dividiamo i lati AC, BC per metà in D, E rispettivamente, la DE è parallela ad AB. Condotta allora da D la parallela a CB fino ad incontrare in F la AB, F sarà il punto medio di AB (n. prec.). Ma nel parallelogramma FBED i lati opposti sono



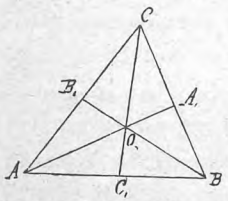
uguali, onde risulta che DE è uguale ad FB, ossia alla metà di AB. Abbiamo così il seguente

Cor. — *Il segmento congiungente i punti di mezzo di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è uguale alla metà di questo.*

Punti notevoli di un triangolo.

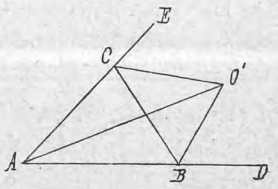
306. Teor. — *Le bisettrici degli angoli di un triangolo passano per uno stesso punto interno al triangolo, il quale è equidistante dai tre lati. E le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo, colla bisettrice dell'angolo interno non adiacente, si incontrano in un punto esterno al triangolo, pure equidistante dai tre lati.*

Dimostriamo la prima parte dell'enunciato.



Dato il triangolo ABC, conduciamo le bisettrici degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Siccome la somma di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ è minore di due retti (n. 104), sarà a maggiore ragione minore di due retti la somma della metà di $\widehat{A}$ e della metà di $\widehat{B}$. Ne risulta che codeste due bisettrici si incontrano in un punto O (n. 265), che dovendo appartenere nello stesso tempo agli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ è interno al triangolo.

Ora ricordiamo che la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai due lati (n. 125). Di qui risulta che il punto O, comune alle bisettrici di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, è equidistante dalle rette AB, BC, CA. Ma il luogo dei punti equidistanti dai lati BC e CA è la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$. Ne discende che il punto O appartiene anche alla bisettrice di $\widehat{C}$, e se ne conclude che le tre bisettrici passano per un medesimo punto O, equidistante dai tre lati.



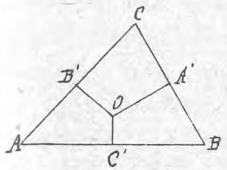
La seconda parte del teorema enunciato si dimostra in modo analogo alla prima (vedi l'unita fig.).

307. Risulta dal teorema precedente, che esistono quattro punti equidistanti dai lati di un triangolo, uno interno e tre esterni ad esso.

Il cerchio che ha il centro in uno di questi quattro punti ed è tangente ad uno dei lati, è tangente anche agli altri due (n. 186). Di codesti quattro cerchi tangenti ai tre lati, quello che ha il centro interno dicesi *iscritto*: gli altri tre si dicono *exiscritti* al triangolo.

308. Teor. — *In un triangolo le tre perpendicolari ai lati nei loro punti medi (assi dei lati) si incontrano in un punto equidistante dai tre vertici.*

Nel triangolo ABC divisi i lati AB e BC per metà nei punti C', A' rispettivamente, innalziamo in essi le perpendicolari. Queste non possono essere parallele, perchè altrimenti per il punto B si potrebbero condurre due perpendicolari distinte BA', BC' a due rette parallele, il che, per i nn. 264, 110 è assurdo.



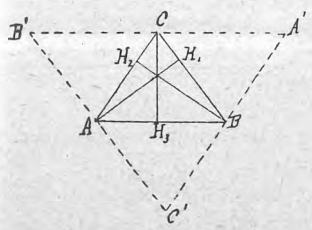
Il punto O, comune agli assi dei due segmenti AB, BC ha (n. 122) uguale distanza dai tre vertici A, B, C. In particolare il punto O è equidistante dai punti A, C e quindi appartiene alla perpendicolare ad AC nel punto di mezzo. Dunque veramente le tre perpendicolari nei punti di mezzo dei lati di un triangolo hanno un punto comune, il quale è equidistante dai tre vertici.

309. Il punto O è il centro della circonferenza passante pei vertici del triangolo ABC: essa dicesi *circoscritta* al triangolo.

Il triangolo si dice poi *iscritto* nella circonferenza (o nel cerchio).

310. Teor. — *In un triangolo le tre altezze passano per uno stesso punto* (ortocentro).

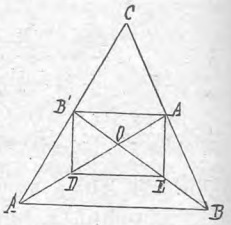
Dato il triangolo ABC, si conducano pei tre vertici di esso le parallele ai lati ad essi opposti: otteniamo così tre rette formanti il triangolo A'B'C' (n. 261).



Dei due quadrangoli ABCB', ABA'C, per costruzione parallelogrammi, si ha (n. 278) B'C = AB AB = CA', da cui B'C = CA'; onde risulta che C è il punto me-

dio di B'A'. Nello stesso modo si dimostra che A e B sono i punti medi dei segmenti B'C' e C'A' rispettivamente. Se allora da A, B, C abbassiamo le perpendicolari sulle rette BC, CA, AB rispettivamente, queste saranno perpendicolari alle corrispondenti parallele B'C', C'A, A'B' (n. 264) e siccome A, B, C sono i punti medi di B'C', C'A', A'B' rispettivamente, così codeste tre rette passeranno per un medesimo punto (n. 308).

311. Teor. — *In un triangolo le tre mediane passano per uno stesso punto* (baricentro), *che divide ciascuna mediana in due parti tali che quella avente un estremo nel vertice è doppia dell'altra.*

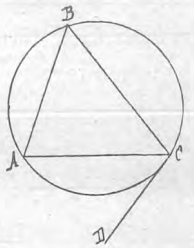


Sia ABC il triangolo dato, e siano B', A' i rispettivi punti di mezzo dei lati AC, BC, le mediane AA', BB' si incontrano in un punto O, in quanto gli estremi di ciascuna di esse giacciono da bande opposte rispetto all' altra. Divisi per metà i segmenti AO, BO in D, E rispettivamente, si conducano i segmenti B'D, DE, EA', A'B'. I due segmenti B'A', DE come quelli che congiungono i punti di mezzo di due lati dei triangoli ABC, ABO aventi comune la base AB, sono entrambi paralleli alla AC ed uguali alla metà del segmento AB (n. 305); essi sono quindi anche paralleli ed uguali fra loro. Il quadrangolo DEA'B' è quindi un parallelogramma (n. 282), onde DO, EO sono uguali rispettivamente ad OA', OB' (n. 278,3). Ma OD, OE sono, per costruzione, uguali a DA, EB rispettivamente: onde risulta che AO, BO sono il doppio di OA', OB' rispettivamente.

Collo stesso ragionamento si prova che la terza mediana del triangolo relativa al lato AB divide ciascuna delle altre due p. es. la AA', per modo che la parte avente per estremo A è doppia dell'altra, onde si conclude che essa passa per il punto O nel quale resta divisa in due parti, di cui quella terminata dal vertice è doppia dell'altra.

Angoli nel cerchio.

312. Def. — Dato un arco di circonferenza, ogni angolo avente il vertice in un punto dell' arco (distinto dagli estremi) e i lati passanti per gli estremi di esso, dicesi *angolo alla circonferenza iscritto nel dato arco.*

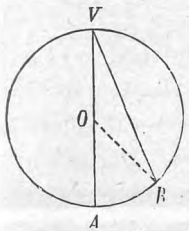


Codesta definizione si generalizza, chiamando angolo alla circonferenza, iscritto nell' arco dato CBA, anche l' angolo formato dalla corda CA e dalla semiretta tangente al cerchio in uno degli estremi di essa, per esempio in C, e giacente rispetto alla corda da banda opposta dell' arco considerato. Così si dirà iscritto nell' arco CBA tanto l' angolo $\widehat{ABC}$ quanto l' angolo $\widehat{ACD}$.

313. Un angolo alla circonferenza, iscritto in un dato arco, comprende fra i suoi lati l' altro arco di circonferenza avente i medesimi estremi dell' angolo dato: si dice che *insiste* su questo secondo arco.

L' angolo al centro (n. 163) che insiste sul medesimo arco si dice *corrispondente* al dato angolo alla circonferenza.

314. Teor. — *Ogni angolo alla circonferenza, è uguale alla metá dell' angolo al centro corrispondente.*



1°. Dato l' angolo $\widehat{AVB}$ alla circonferenza, di cui il lato AV passi per il centro O, consideriamo l' angolo al centro corrispondente $\widehat{AOB}$. Essendo quest' ultimo angolo esterno rispetto al triangolo OVB, abbiamo (n. 266)

$$\widehat{AOB} = \widehat{AVB} + \widehat{VBO}:$$

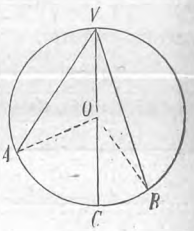
ma nel triangolo OVB, isoscele sulla base VB, è

$$\widehat{AVB} = \widehat{VBO},$$

onde risulta

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AVB}.$$

2°. Se l'angolo $A\widehat{V}B$ ha i lati da parti opposte rispetto al diametro OV, si avrà, congiungendo A e B con O,

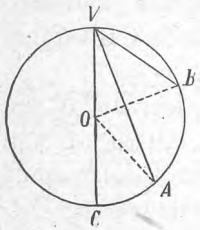


$$A\widehat{O}C = 2\,A\widehat{V}C,\quad C\widehat{O}B = 2\,C\widehat{V}B$$

e sommando membro a membro

$$A\widehat{O}B = 2\,A\widehat{V}B.$$

3°. Similmente, se i due lati cadono dalla stessa parte rispetto al diametro VC pel vertice avremo

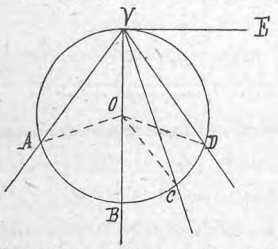


$$C\widehat{O}B = 2\,C\widehat{V}B,\quad C\widehat{O}A = 2\,C\widehat{V}A$$

e sottraendo membro a membro.

$$A\widehat{O}B = 2\,A\widehat{V}B.$$

4°. Se è dato un angolo alla circonferenza di cui un lato VE sia tangente al cerchio, si possono distinguere tre casi secondo che l'altro lato è interno o esterno all'angolo retto $B\widehat{V}E$ oppure coincide col diametro VO. In quest'ultimo caso l'angolo al centro corrispondente è l'angolo piatto $B\widehat{O}V$ ed è quindi doppio dell'angolo alla circonferenza data, il quale è retto. Negli altri due casi si dimostra, ragionando come nei casi 2° e 3° che l'angolo al centro corrispondente all'angolo dato è sempre doppio di esso.



315. Cor. — *Tutti gli angoli inscritti in archi uguali o in uno stesso arco sono uguali.*

Infatti sono uguali alla metà del medesimo angolo al centro o di angoli al centro uguali (n. prec.).

316. Cor. — *In uno stesso cerchio o in cerchi uguali, angoli alla circonferenza uguali insistono su archi uguali.*

Infatti i corrispondenti angoli al centro, essendo uguali, comprendono archi uguali (n. 164).

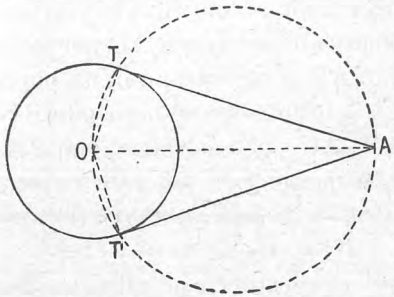
317. Cor. — *Ogni angolo iscritto in una semicirconferenza è retto.*

Infatti l'angolo al centro corrispondente è un angolo piatto.

318. La prec. proposizione insieme con quella del n. 179 conduce ad una nuova risoluzione (cfr. n. 236) del

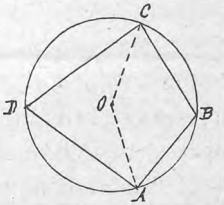
Probl. — *Dato un cerchio, condurre da un punto esterno le tangenti ad esso.*

Se O è il centro della circonferenza data e A è il punto dato, si descriva la circonferenza che ha per diametro il segmento OA. Se T, T' sono le intersezioni di esso con la circonferenza data (n. 213), le rette AT, AT' sono le tangenti cercate, perchè ciascuno degli angoli $A\widehat{T}O$, $A\widehat{T'}O$, come iscritto in una circonferenza, è retto (n. prec.) e sappiamo che la perpendicolare ad un raggio di un cerchio nel suo estremo è tangente al cerchio (n. 189).



319. Cor. — *In ogni quadrangolo iscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.*

Infatti, considerando p. es. il quadrangolo ABCD della annessa figura, si ha che i due angoli alla circonferenza $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ sono la metà dei due angoli al centro uno concavo e l'altro convesso, determinati dai lati

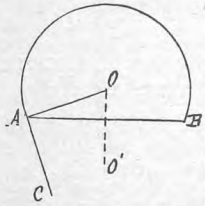


OA, OC, la cui somma vale quattro retti. Quindi i due angoli opposti del quadrangolo $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$, sommati insieme danno due retti.

320. Cor. — *Un parallelogramma iscrittibile in un cerchio è rettangolo* (n. 278).

321. Def. — Un arco si dice *capace* di un certo angolo, se uno, e quindi tutti gli angoli iscritti in esso, sono uguali all'angolo dato.

322. Probl. — *Sopra un segmento dato come corda descriveremo un arco di circonferenza capace di un dato angolo.*



Sia AB il dato segmento; da uno dei suoi estremi, p. es. da A, si conduca una semiretta AC, tale che l'angolo $\widehat{CAB}$ sia uguale all'angolo dato. La perpendicolare alla semiretta AC nel punto A, e l'asse del segmento AB si incontrano in un punto O, giacchè se fossero parallele ammetterebbero entrambe le due perpendicolari AB, AC pel medesimo punto A. L'arco AB di centro O, e raggio OA, giacente rispetto alla AB da banda opposta della semiretta AC, è l'arco cercato.

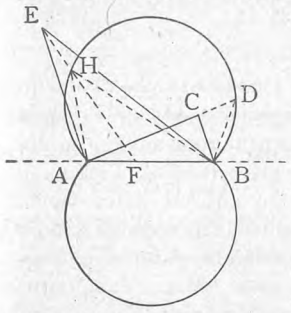
Infatti la AC, come perpendicolare all'estremità del raggio OA, è tangente all'arco AB (n. 189), cosicchè l'angolo $\widehat{CAB}$, uguale all'angolo dato, è iscritto nell'arco AB.

Se l'angolo uguale al dato si fosse costruito dalla banda opposta dell'angolo $\widehat{CAB}$ rispetto alla AB, avremmo ottenuto un punto O′ simmetrico di O rispetto ad AB, centro di un arco di raggio O′A = OA e capace dell'angolo dato.

323. Dato un punto fuori di un segmento, si suol dire che dal punto il segmento *si vede* sotto l'angolo che ha il vertice nel punto e i lati per gli estremi del segmento. Si può dimostrare il

Teor. — *Il luogo dei punti che giacciono da una banda rispetto ad un segmento dato e da cui codesto segmento si vede sotto un angolo dato, è l'arco avente per corda il segmento dato, capace del detto angolo e giacente dalla parte prefissata.*

È stato già dimostrato che ogni punto di codesto arco gode della proprietà richiesta.



In secondo luogo diciamo, che se un angolo, i cui lati passano per gli estremi A, B della data corda, ed ha il vertice dalla banda prefissata del segmento dato AB, ma non sull'arco AB, capace dell'angolo dato, non è uguale all'angolo dato.

Distinguiamo due casi secondo che il vertice del detto angolo è interno o esterno al segmento circolare definito dal segmento AB e dall'arco considerato.

Se $\widehat{ACB}$ è un angolo avente il vertice C interno al segmento circolare, il prolungamento di AC incontrerà l'arco AB in un punto D. Congiunto B con D, l'angolo $\widehat{ACB}$ è esterno rispetto al triangolo BDC, e quindi è maggiore dell'interno opposto ADB (n. 91), il quale è iscritto nell'arco AB.

Se invece $\widehat{AEB}$ è un angolo il cui vertice E cade esternamente al segmento circolare e dalla stessa banda del segmento rispetto alla retta AB, si congiunga il punto E con un punto F del segmento AB. Il segmento EF, congiungente un punto interno alla circonferenza ADB con un punto esterno, la intersecherà in un punto H, il quale, dovendo cadere rispetto ad AB dalla stessa parte del segmento circolare, apparterrà all'arco AB considerato dianzi. Congiunto H con A e B avremo (n. 91)

$$\widehat{AEF} < \widehat{AHF},\ \widehat{BEF} < \widehat{BHF},$$

onde risulta che $\widehat{AEB}$ è minore di $\widehat{AHB}$.

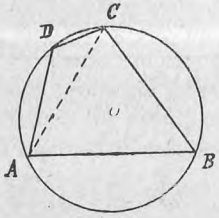
Nota. — La dimostrazione data or ora pel caso in cui E è esterno al segmento circolare vale senza eccezione, cioè anche quando i due segmenti AE, BE non segano (fuori di A, B) l'arco ADB (il che accade quando, l'arco ADB essendo minore di una semicirconferenza, le tangenti all'arco in A e B si incontrano, rispetto ad AB, dalla parte dell'arco, e il punto E si sceglie nell'angolo opposto al vertice a quello di codeste tangenti). Ma quando, come nel caso della figura, almeno uno dei due segmenti AE, BE sega l'arco, basta congiungere il punto d'intersezione coll'estremo opposto del segmento AB e ragionare analogamente al caso, considerato dapprincipio, del vertice interno al segmento circolare.

324. Risulta dalla dimostrazione precedente che il luogo dei punti, che giacciono rispetto al segmento AB dalla banda prefissata, e da cui si vede AB sotto un angolo maggiore del dato, è la superficie del segmento circolare (escluso l'arco): e il luogo dei punti che giacciono rispetto ad AB dalla banda fissata e da cui il segmento si vede sotto un angolo minore del dato è la parte del semipiano considerato, esterna al segmento circolare.

325. Cor. — *Il luogo dei punti da cui un segmento dato si vede sotto un dato angolo è l'insieme dei due archi* (uguali) *aventi per corda il dato segmento e capaci dell'angolo dato.*

326. Cor. — *Se un quadrangolo ha due angoli opposti supplementari, esso si può iscrivere in una circonferenza.*

Nel quadrangolo (convesso) ABCD gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ siano supplementari; tali sono quindi anche $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ (n. 273). Diciamo che la circonferenza O passante per A, B, C (n. 175) passa anche per D.



Infatti l'arco AC della circonferenza O che non contiene B, è capace dell'angolo supplementare di $\widehat{B}$ (n. 319), cioè di un angolo uguale a $\widehat{D}$.

Ma, poichè il quadrangolo è convesso, D cade, rispetto alla corda AC, da banda opposta di B: onde risulta (n. 323) che D appartiene all'arco AC di O, che non contiene B.

327. Cor. — *Se un quadrangolo ha due angoli opposti supplementari, le perpendicolari ai lati nei loro punti di mezzo passano per un medesimo punto che è il centro del cerchio circoscritto.*

Poligoni regolari.

328. Def. — Un poligono si dice *iscritto* in un cerchio, se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza: la circonferenza in tal caso si dice *circoscritta* al poligono o alla poligonale.

Un poligono si dice *circoscritto* ad un cerchio, se tutti i suoi lati sono tangenti al cerchio: questo si dice *iscritto* al poligono.

329. Notiamo che qualora si volessero iscrivere nel cerchio poligoni concavi, essi non potrebbero risultare sciolti. È invero facile convincersi che se un poligono iscritto in un cerchio è sciolto, è anche convesso. Infatti, se il poligono considerato è sciolto, un qualsivoglia suo lato AB non è intersecato da nessun altro lato, onde risulta che tutti i vertici del poligono appartengono ad uno solo dei due archi AB della circonferenza (n. 196) e quindi giacciono tutti da una stessa banda rispetto al lato AB.

330. Le definizioni del n. 328 si estendono alle poligonali (convesse) iscritte e circoscritte ad un arco.

Dato un arco di circonferenza dicesi *iscritta* in esso ogni poligonale (convessa) avente gli estremi negli estremi dell'arco e gli altri vertici sull'arco stesso.

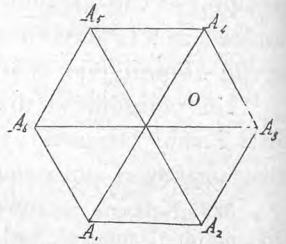
Dicesi invece *circoscritta* all'arco ogni poligonale (convessa), i cui lati siano tangenti all'arco e gli

estremi cadano sulle semirette dei raggi della circonferenza che vanno agli estremi dell'arco.

331. Def. — Un poligono si dice *regolare*, se ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali.

Similmente si dice *regolare* una poligonale se ha uguali tutti i lati e tutti gli angoli di una medesima serie.

332. Come esempi di poligoni regolari abbiamo già incontrato il triangolo equilatero e il quadrato. Facciamo ora vedere come si possa costruire un esagono regolare di dato lato. Considerato un triangolo equilatero A_1A_2O avente un lato prefissato (n. 235), si costruisca sul lato OA_2 e dalla parte opposta di A_1, il triangolo OA_2A_3, uguale ad OA_1A_2, (n. 84); sul lato OA_3, e da parte opposta di A_2, si costruisca il triangolo OA_3A_4 uguale ai primi due e così via.



Poichè l'angolo del triangolo equilatero è uguale alla terza parte di due angoli retti (n. 267), dopo aver costruito nel modo indicato sei triangoli equilateri, avremo che i sei angoli intorno ad O, sommati, daranno l'intero giro, onde risulta che l'ultimo triangolo equilatero avrà un lato comune col primo. Otteniamo così un esagono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, avente uguali tutti i lati e tutti gli angoli, come somma di angoli per costruzione uguali; si tratta dunque di un esagono regolare.

Notiamo che i segmenti OA_1, OA_2..., OA_6 sono tutti uguali al lato del triangolo equilatero da cui siamo partiti, e quindi ancora uguali al lato dell'esagono che abbiamo ottenuto.

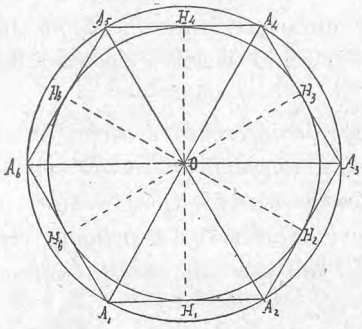
333. Abbiamo visto che esistono poligoni regolari di tre, quattro, sei lati. Insegneremo ora a costruirne numerosi altri. A ciò si giunge ricorrendo ad alcune proprietà generali dei poligoni regolari, che qui ci proponiamo di sviluppare.

334. Teor. — *Ad ogni poligono regolare si può circoscrivere ed iscrivere un cerchio.*

Sia dato un poligono regolare $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ avente un certo numero n di lati. Nella figura, per fissare le idee, facciamo $n = 6$. Abbiamo per ipotesi

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_5A_6 = A_6A_1;$$
$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \ldots = \widehat{A_5} = \widehat{A_6}.$$

Le bisettrici di due angoli consecutivi, p. es. di $\widehat{A_1}$ e $\widehat{A_2}$, si incontreranno in un punto O, perchè la somma degli angoli $\widehat{A_1}$ e $\widehat{A_2}$, è certamente minore di quattro retti (n. 274) e quindi la somma delle metà degli angoli $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}$ sarà minore di due retti. Siccome gli angoli $\widehat{A_1}$, e $\widehat{A_2}$, sono uguali, saranno uguali anche le rispettive metà, onde risulta che nel triangolo OA_1A_2 i lati OA_1, OA_2 sono uguali (n. 86). Di più i due triangoli OA_1A_6, OA_1A_2, aventi il lato OA_1 comune, ed uguali i lati A_1A_6, A_1A_2 per ipotesi, e gli angoli $O\widehat{A_1}A_6$, $O\widehat{A_1}A_2$ per costruzione, sono uguali (n. 79); risulta di qui l'uguaglianza dei lati OA_6, OA_2.



Inoltre l'angolo $O\widehat{A_6}A_1$ è uguale all'angolo $O\widehat{A_2}A_1$ che è la metà di $\widehat{A_2}$: siccome $\widehat{A_2}$ è uguale ad $\widehat{A_6}$, concludiamo che la retta A_6O è la bisettrice di $\widehat{A_6}$.

Così successivamente si dimostra che i segmenti OA_1, OA_2, ... , OA_6 sono uguali e quindi che la circonferenza di centro O e raggio OA_1 passa anche per i punti A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

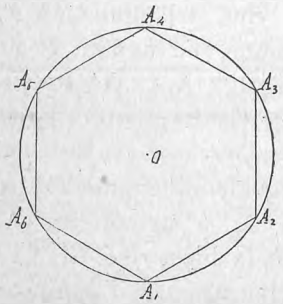
Si ha poi che i lati A_1A_2, A_2A_3, ... A_6A_1 come corde uguali di uno stesso cerchio, sono ugualmente

distanti dal centro (n. 180). Cioè, detti H_1, H_2, ..., H_6, i punti di mezzo dei lati A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_1, si ha (n. 177) $OH_1 = OH_2 = ... = OH_6$. Quindi la circonferenza di centro O, passante per H_1, passa anche per H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, e i lati del dato poligono sono ad essa tangenti (n. 189).

335. Il punto O, che è centro comune del cerchio iscritto e circoscritto al poligono regolare, si dice *centro* del poligono.

Il raggio del cerchio circoscritto dicesi *raggio* del poligono, e il raggio del cerchio iscritto *apotema* del poligono.

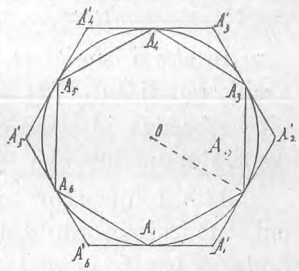
336. Teor. — *Se una circonferenza è divisa in un certo numero di archi uguali, il poligono iscritto che ha per vertici gli estremi di codesti archi* (nell' ordine in cui si susseguono sulla circonferenza) *e il poligono circoscritto, che ha per lati le tangenti in codesti estremi sono regolari.*



La circonferenza O sia divisa in un certo numero n di parti uguali A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_{n-1}, A_nA_1. Per fissare le idee, nella figura facciamo $n = 6$.

Diciamo in primo luogo che il poligono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ è regolare. Infatti i lati di esso sono uguali come corde sottese da archi uguali (n. 179). Di più essendo uguali gli archi A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, ..., A_5A_1, A_6A_2, come doppi di archi uguali, sono uguali gli angoli in essi rispettivamente iscritti $A_1\widehat{A_2}A_3$, $A_2\widehat{A_3}A_4$, ..., $A_5\widehat{A_6}A_1$, $A_6\widehat{A_1}A_7$ (n. 315).

Sia, in secondo luogo, $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5A'_6$ il poligono circoscritto al cerchio O, determinato dalle tangenti nei punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, ciascuna delle quali incontra la consecutiva, giacchè se p. es. le tangenti nei punti A_1, A_2 fossero parallele, i raggi OA_1, OA_2, sarebbero per diritto, e risulterebbe l'arco A_1A_2 uguale ad una semicirconferenza. Diciamo che il poligono circoscritto è regolare.



Considerati i due triangoli $A_1A_2A'_1$, $A_2A_3A'_2$, aventi le basi A_1A_2, A_2A_3 uguali, si ha anzitutto che ciascuno di essi è isoscele, perchè le tangenti condotte da un punto a una circonferenza sono uguali (n. 238). Congiunto poi O con A_2, gli angoli $O\widehat{A_2}A_1$, $O\widehat{A_2}A_3$ sono uguali perchè tali sono i triangoli OA_1A_2, OA_3A_2; saranno quindi uguali anche gli angoli $A_1\widehat{A_2}A'_1$, $A_3\widehat{A_2}A'_2$ come complementi di angoli uguali, e se ne conclude che saranno uguali anche i triangoli isosceli $A_1A_2A'_1$, $A_2A_3A'_2$, aventi uguali la base e gli angoli alla base.

Analogamente si dimostra che sono uguali i triangoli $A_2A_3A'_2$, $A_3A_4A'_3$, ..., $A_5A_6A'_5$, $A_6A_1A'_6$; e di qui discende che sono uguali gli angoli $\widehat{A'_1}$, $\widehat{A'_2}$ ..., $\widehat{A'_6}$ e altresì i segmenti $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, ..., $A'_5A'_6$, $A'_6A'_1$, come doppi di segmenti uguali.

337. Cor. — *Se in un cerchio è iscritto un poligono regolare, e si conducono le tangenti al cerchio nei vertici del poligono dato, i punti d' incontro di ciascuna tangente con la successiva sono i vertici di un poligono regolare, circoscritto al dato cerchio e avente il medesimo numero di lati del poligono dato.*

338. Cor. — *Se un poligono iscritto in un cerchio ha i lati uguali è regolare.*

Infatti i suoi lati, come corde uguali, sottendono archi uguali (n. 179), e quindi i vertici dividono la circonferenza in parti uguali. Risulta allora dal teorema del n. 336 che il poligono è regolare.

339. I due teoremi dei nn. 334, 336 si estendono col medesimo ragionamento anche alle poligonali: onde si ha il seguente

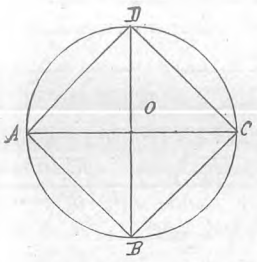
Teor. — *Ad ogni poligonale regolare si può circoscrivere ed iscrivere un cerchio.*

Se un arco di circonferenza è diviso in un certo numero di parti uguali, la poligonale iscritta che ha per vertici i punti di divisione, e la poligonale circoscritta che ha per lati le tangenti in codesti punti, sono regolari.

340. Risulta dai teoremi dei n. 334, 336 che il problema di costruire un poligono regolare di dato raggio e avente un determinato numero *n* di lati equivale al problema di *dividere una data circonferenza in un dato numero* n *di parti uguali,* ossia *di costruire un angolo al centro uguale alla* n^{ma} *parte di quattro retti.*

341. Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un quadrato,* ossia: *Dividere la circonferenza data in quattro parti uguali.*

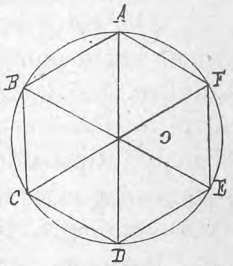
Sulla circonferenza data si assegni ed arbitrio un punto A come vertice del quadrato e si conducano il diametro AC passante per A e il diametro BD perpendicolare al primo. I quattro archi AB, BC, CD, DA sono uguali, perchè corrispondono ad angoli al centro uguali (n. 164): quindi sono uguali le corde



sottese (n. 179), e il quadrangolo ABCD, equilatero ed iscritto in una circonferenza, è regolare (n. 338).

342. Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un esagono regolare,* ossia: *Dividere una circonferenza data in sei parti uguali.*

Dato il cerchio O, supponiamo già risoluto il problema, e sia ABCDEF l'esagono cercato. Congiunti i vertici col centro O abbiamo che ciascuno dei triangoli isosceli OAB, OBC, ... , OFA ha come angolo al vertice O un angolo di un sesto di quattro retti, ossia di un terzo di due retti: cosicchè in ciascuno di codesti triangoli i due angoli alla base hanno per somma due terzi di due retti (n. 267). Risulta di qui che ciascuno dei detti triangoli è equiangolo e quindi (n. 86) è equilatero cosicchè il lato AB dell'esagono è uguale al raggio del cerchio.

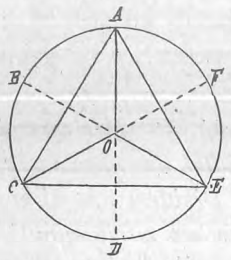


Dunque, per dividere in sei parti uguali la circonferenza data O, basta da un suo qualsiasi punto A (preso ad arbitrio come vertice) condurre le due corde AB, AF uguali al raggio, e dall'altro estremo D del diametro passante per A, condurre le altre due corde DC, DE uguali esse pure al raggio.

343. Cor. — *Il lato dell'esagono regolare è uguale al suo raggio.*

344. Divisa una data circonferenza in sei parti uguali AB, BC, CD, DE, EF, FA a partire dal punto

A assegnato ad arbitrio, gli archi AC, CE, EA, doppi di archi uguali, saranno uguali, e il poligono ACE sarà un triangolo equilatero. Resta così risoluto il



Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero,* ossia: *Dividere una circonferenza data in tre parti uguali.*

Nota. — Questo problema si può anche risolvere direttamente costruendo l'angolo al centro che equivale ad un terzo di quattro retti; tale angolo ci è fornito da quello che formano due bisettrici di un qualsiasi triangolo equilatero, oppure dal doppio di ciascuno degli angoli di un tale triangolo.

345. Se si suppone divisa una data circonferenza in un certo numero p di archi uguali, basta dimezzare (n. 165 o 227) ciascuno di codesti archi per ottenere la divisione della circonferenza data in $2p$ parti uguali. Ripetendo n volte successivamente codesta operazione si avrà la divisione della circonferenza in $2^n p$ archi uguali, qualunque sia n.

Possiamo perciò concludere che *sappiamo iscrivere circoscrivere ad un dato cerchio tutti i poligoni regolari di*

$$4,\ 8,\ 16,\ \ldots\ldots,\ 2^n,\ \ldots\ldots \text{ } lati$$

e di

$$3,\ 6,\ 12,\ \ldots\ldots,\ 3.2^n,\ \ldots\ldots \text{ } lati$$

Apprenderemo in seguito (Cap. V) a iscrivere anche i poligoni regolari di 4, 15 lati e quindi anche tutti i poligoni regolari il cui numero di lati è

$$5,\ 10,\ 20,\ \ldots\ldots,\ 5.2^n,\ \ldots\ldots$$

o

$$15,\ 30,\ 60,\ \ldots\ldots,\ 3.5.2^n,\ \ldots\ldots$$

ESERCIZI

1. Se due seganti di un cerchio sono parallele, gli archi compresi nella striscia sono uguali.

2. Le congiungenti gli estremi di due corde parallele e non uguali di una stessa circonferenza si intersecano sul diametro perpendicolare alle due corde.

3. Due angoli aventi i lati rispettivamente paralleli sono uguali o supplementari.

4. Due rette parallele segate da una terza formano due angoli coniugati di cui l'uno è i $\frac{3}{7}$ dell'altro. Qual parte di retto è ciascuno degli angoli che fa questa secante colle parallele?

5. Date due coppie di punti A, B e C, D, tali che AB=CD trovare un punto O tale che OA = OB, OC = OD. Discussione.

6. Dati due segmenti uguali AB, CD (purchè non paralleli e diretti nel medesimo verso) si può sempre trovare un punto O tale che, mediante una rotazione intorno ad O, AB si possa portare a coincidere CD.

7. Se due triangoli sono direttamente uguali e due lati dell'uno sono paralleli ai corrispondenti dell'altro, anche i terzi lati sono paralleli. Questa stessa proposizione si può estendere anche ai poligoni.

8. Dati due triangoli ABC, A'B'C' direttamente uguali e non aventi i lati paralleli, si può sempre trovare un punto O, tale che mediante una rotazione intorno ad O, ABC si possa portare a coincidere con A'B'C'.

Ciò vale anche per due poligoni direttamente uguali e non aventi i lati ordinatamente paralleli.

9. Se $A_1A_2 \ldots A_n$, $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ sono due poligoni di un piano direttamente uguali, gli assi dei segmenti $A_1A'_1$, $A_2A'_2 \ldots$, $A_nA'_n$ passano per un punto o sono paralleli.

10. In quale posizione devono essere quattro punti, affinchè esista una circonferenza equidistante da essi? (cfr. la def. all' es. 21, pag. 114). Quando ne esiste una, quante ne esistono?

11. Dati quattro punti A, B, C, D, costruire una circonferenza passante per A e B e tale che le tangenti condotte da C e D ad essa siano uguali. (Il centro del cerchio deve essere equidistante da A e B, da C e D. . . . .). Discussione.

12. Condotte le tangenti ad una circoferenza negli estremi di un diametro, il segmento di ogni altra tangente intercettato dalle due prime tangenti è visto dal centro sotto un angolo retto.

13. Quanto vale l'angolo di due bisettrici di un triangolo equilatero?

14. In un triangolo isoscele la somma degli angoli sotto la base supera di due retti l' angolo al vertice.

15. La bisettrice e l' altezza condotte da un vertice di un triangolo qualsiasi formano un angolo uguale alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo. (Si ricordi che in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari ecc.) Come si deve modificare l' enunciato se si vuole considerare la bisettrice dell'angolo esterno?

16. In un triangolo isoscele l' angolo che forma colla base la perpendicolare abbassata da un estremo di essa sul lato opposto è uguale alla metà dell' angolo al vertice. (Si abbassi dal vertice la perpendicolare sulla base. Si ottengono così due triangoli rettangoli aventi un angolo acuto comune. Come sono gli altri due angoli acuti?)

17. Costruire un triangolo equilatero, datane l' altezza. [Costruito un qualsiasi triangolo equilatero, si abbassi in esso un'altezza, e si noti che in tutti i triangoli equilateri sono uguali i rispettivi angoli interni e quindi anche gli angoli formati in ciascuno d'essi dall'altezza e da un lato].

18. Due triangoli ABC, A'B'C' aventi rispettivamente uguali gli angoli e il perimetro sono uguali. (Sui prolungamenti di BC si prendano BE = BA, CF = CA : eseguite le

analoghe costruzioni sull'altro triangolo, i triangoli EAF, E'A'F' sono uguali perchè $\widehat{E} = \frac{1}{2}\widehat{B}$, ecc.)

19. Sui lati di un triangolo qualsiasi ABC si costruiscano esternamente ad esso, i triangoli equilateri BCD, CAE, ABF. Dimostrare che i segmenti AD, BE, CF sono uguali. [Si considerino i due triangoli ADC, EBC, ecc.].

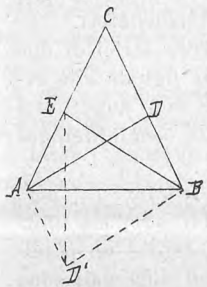
20. Costruire sopra un segmento dato come base un triangolo isoscele, avente l'angolo al vertice quadruplo dell'angolo alla base. (Quanto vale codesto angolo al vertice? Si tenga poi conto dell' es. 13).

21. Costruire un triangolo rettangolo, date l' ipotenusa e la somma dei cateti. (Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo cercato, rettangolo in B. Prolungato AB di un segmento BD = BC, del triangolo ADC si conoscono i lati AD, AC e l'angolo $\widehat{CDA}$).

22. Costruire un triangolo rettangolo data l'ipotenusa e la differenza dei cateti. (Cfr. la traccia dell' es. prec.).

23. Costruire un triangolo rettangolo, dati il perimetro ed un angolo acuto. (Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo rettangolare in C che ad esso soddisfa. Prolungato BA di AD = AC e AB di BE = BC, del triangolo DEC conosciamo il lato DE e gli angoli $\widehat{EDC}$, $\widehat{CED}$, perchè, ecc.).

24. Se in un triangolo i segmenti delle bissettrici di due angoli interni, compresi fra i rispettivi vertici e i lati opposti sono uguali, il triangolo è isoscele.



[La dimostrazione di questo teorema è alquanto riposta; perciò daremo una breve traccia della dimostrazione semplicisima data dal sommo geometra JACOB STEINER (1).

Nel triangolo ABC, siano uguali le bisettrici AD, BE degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$.

Per dimostrare che il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, si ragiona per assurdo.

Supposto per esempio BC > AC ne risulta

(1) *Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und das sphärische Dreiek* (*Gesammelle Werke*, 11 Bd. pag. 323)

$$\widehat{BAD} > \widehat{EBA}$$

e quindi

$$BD > AE,\ \widehat{ADB} > \widehat{AEB}.$$

Condotto allora per A, da banda opposta di E rispetto alla AB, il segmento AD′ uguale e parallelo a BD, il triangolo BAD′ risulta uguale ad ABD. Congiunto D′ con E, risulta $\widehat{BD'E} = \widehat{D'EB}$ e quindi, tenendo conto della disuguaglianza dianzi dedotta,

$$\widehat{ED'A} > \widehat{AED'}:$$

onde si conclude

$$AE > BD$$

contrariamente a quanto deducemmo prima dall'ipotesi].

25. Se in un triangolo rettangolo un angolo acuto è doppio dell'altro, l'ipotenusa è il doppio del cateto minore [Congiunto il punto medio dell'ipotenusa col vertice dell'angolo retto, si consideri il triangolo contenuto dal cateto minore e dal segmento dianzi condotto, e se ne determinino gli angoli interni].

26. Due angoli aventi i lati rispettivamente perpendicolari sono uguali o supplementari.

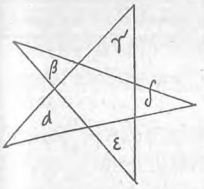
27. Sulla tangente in A ad un cerchio O si prendano due punti B e C, pei quali si conducano le tangenti BD, CE. Dimostrare che gli angoli $\widehat{BOC}$, $\widehat{DAE}$, sono uguali o supplementari [Cfr. l'es. prec.]

28. Dimostrare che, avuto riguardo agli angoli concavi, ottusi, retti, acuti, si hanno dieci specie di quadrilateri.

29. In ogni quadrilatero convesso: 1° le bisettrici di due angoli consecutivi si tagliano sotto un angolo uguale alla semisomma degli altri due: 2° le bisettrici di due angoli opposti si tagliano sotto un angolo uguale alla semidifferenza dei due altri.

30. Le bisettrici degli angoli di un quadrilatero formano un quadrilatero di cui gli angoli opposti sono supplementari (quadrilatero iscrittibile). Se il primo quadrilatero è un parallelogramma, il secondo è un rettangolo, le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogramma ed eguali alla loro differenza. Se il primo quadrilatero è un rettangolo, il secondo è un quadrato.

31. In un quadrilatero concavo ABCD avente l'angolo concavo $\widehat{C}$, la somma degli altri angoli del quadrilatero è uguale all'angolo convesso $\widehat{BCD}$; le bisettrici degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ si tagliano sotto un angolo uguale alla semisomma degli angoli convessi $\widehat{A}$ e $\widehat{BCD}$.



32. In ogni quadrilatero intrecciato, la differenza di due angoli opposti è uguale alla differenza degli altri due.

33. La somma degli angoli acuti α, β, γ, δ, ε, di un pentagono stellato è uguale a due retti. Quanto vale la somma degli angoli acuti di un ottagono stellato?

34. Dati due triangoli direttamente uguali e aventi i lati ordinatamente paralleli, si può far coincidere il primo col secondo mediante una *traslazione* (movimento del piano in cui i punti descrivono segmenti uguali e paralleli). [Confrontare es. 8].

35. Due segmenti uguali AB, A′B′ si possono sovrapporre mediante un ribaltamento (simmetria) combinato con una traslazione parallela all'asse del ribaltamento. [Congiunti i punti medi M, N di AA′, BB′, si abbassino sulla MN le perpendicolari AA_0, BB_0, $A'A'_0$, $B'B'_0$ e si confrontino i quadrilateri AA_0B_0B, $A'A'_0B'_0B'$....].

36. Due poligoni inversamente uguali si sovrappongono mediante un ribaltamento (simmetria rispetto ad un asse) combinato con una traslazione parallela all'asse del ribaltamento. [Confrontare l'esercizio precedente].

37. Se un segmento si muove parallelamente a sè stesso in modo che un suo estremo percorra una circonferenza, quale è il luogo descritto dell'altro estremo? [Dal centro della circonferenza si conduca il segmento parallelo, uguale e di ugual verso al dato, e si congiunga il suo estremo con due punti del luogo cercato].

38. Condurre da un punto a due parallele date una trasversale, il cui segmento intercetto dalla striscia sia uguale ad un segmento dato.

39. Condotte in un triangolo isoscele da un punto della base le parallele ai due lati, la somma dei segmenti di queste compresi fra la base e i lati, è uguale al lato del triangolo isoscele. [Si considerino i due triangoli e il quadrilatero, in cui resta diviso il dato triangolo].

40. Condotte in un triangolo equilatero per un punto interno le parallele ai tre lati, la somma dei segmenti di queste compresi fra i lati è uguale al doppio del lato del triangolo equilatero. [Si confrontino i tre triangoli e i tre quadrilateri in cui resta diviso il triangolo].

41. In un trapezio il segmento che congiunge i punti medi dei due lati non paralleli è uguale alla semisomma delle due basi, e il segmento che congiunge i punti medi delle due diagonali, è uguale alla semidifferenza delle due basi. [Pel punto medio di uno dei lati non paralleli si conduca la parallela al lato opposto fino a incontrare le due basi].

42. Per un punto dato fuori di un cerchio condurre una secante, tale che la somma delle distanze dei punti di intersezione da una retta data sia uguale ad un segmento dato. Discussione. [Tenendo conto dell'es. prec., e supposto risoluto il problema, qual'è la distanza che ha dalla retta data il punto medio della corda segata dalla circonferenza data sulla retta che vuolsi determinare?].

43. Costruire un parallelogramma datine i lati ed una diagonale. Discussione.

Def. — Chiamasi centro di un parallelogramma il punto di intersezione delle due diagonali.

44. Ogni parallelogramma è simmetrico di se stesso, rispetto al suo centro.

45. I parallelogrammi iscritti in un parallelogramma hanno lo stesso centro del parallelogramma dato.

46. In un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici. [Se il triangolo ABC è rettangolo in A, e O è il punto medio di BC, si prenda, sul prolungamento di AO il segmento OD = AO e si consideri il quadrilatero ABCD tenendo conto del numero 282].

47. Un triangolo in cui il punto medio di un lato sia equidistante dai vertici è rettangolo, ed ha il lato suddetto come ipotenusa [Cfr. la traccia dell'es. prec.].

48. In un triangolo rettangolo la differenza degli angoli acuti è uguale all'angolo compreso dall'altezza e dalla mediana relativa alla ipotenusa. [Si ricordi l'es. 26].

49. Se in un triangolo rettangolo un angolo acuto è doppio dell'altro, l'ipotenusa è il doppio del cateto minore. [Congiunto il punto medio dell'ipotenusa col vertice dell'angolo retto, si consideri il triangolo contenuto dal cateto minore e dal segmento dianzi condotto, e se ne determinino gli angoli interni].

50. Un segmento si muove cogli estremi su due rette, fra loro perpendicolari. Determinare il luogo descritto dal punto di mezzo del segmento. [Si congiuuga codesto punto di mezzo colla intersezione delle due rette date e si tenga conto dell'es. 46].

51. Iscrivere in un rettangolo un parallelogramma, di cui i lati siano paralleli alle diagonali del rettangolo e di cui un lato passi per un punto prefissato dentro il rettangolo.

52. Dimostrare che tutti i parallelogrammi iscritti in un rettangolo e aventi i lati paralleli alle diagonali di esso hanno perimetri uguali.

53. In un triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dagli altri due lati è costante. (Si confronti codesta somma colla distanza di un estremo della base dal lato opposto).

Come va modificato l'enunciato pei punti dei prolungamenti della base?

54. Determinare il luogo dei punti tali che la somma o la differenza delle loro distanze da due rette date è uguale a un segmento dato. [Pel caso della somma si consideri su ciascuna delle due rette date il punto che ha dall'altra distanza uguale al segmento dato, e poi si tenga conto dell'es. prec.].

55. In un triangolo equilatero la somma delle distanze di un punto interno dai tre lati è costante. [Vedi es. n. 53].

Come va modificato l'enunciato pei punti di ciascuua delle altre sei regioni in cui il piano è diviso dai prolungamenti dei lati?

56. Per un punto interno ad un angolo condurre una retta tale che il segmento di essa compreso tra i lati dell'angolo sia dimezzato dal punto dato. [Si prolunghi il segmento che

congiunge il vertice col punto dato di un segmento uguale, e per l'estremo si conduca la parallela ad uno dei lati dell'angolo, ecc.].

57. Se due circonferenze si segano e per uno dei punti di intersezione si conduce la parallela alla congiungente i centri, la distanza fra questi sarà la metà del segmento della parallela compresa fra le due circonferenze. [Si abbassino le perpendicolari dai centri dei due cerchi su codesta parallela alla loro congiungente].

58. Fra i segmenti condotti per un punto di intersezione di due circonferenze e limitati ad esse, quale è il massimo? [Cfr. es. prec.].

59. Se pei punti di intersezione di due circonferenze si conducono due rette parallele, i segmenti di queste parallele limitati alle circonferenze sono uguali. [Da uno dei centri si conduca la parallela alle due seganti e dall'altro centro si abbassi su di essa la perpendicolare, ecc.].

60. Condurre le tangenti comuni a due cerchi. [Se O, O' sono i centri delle due circonferenze, supposte disuguali, si descrivano dal centro del cerchio maggiore i cerchi che hanno per raggio la somma e la differenza dei raggi, e si conducano dall'altro centro le tangenti ai cerchi or ora descritti. Come sono le tangenti comuni ai due cerchi dati rispetto alle tangenti or ora costruite?].

61. Condurre una retta, che abbia da due punti dati distanze prefissate. [Cfr. es. prec.].

62. Condurre in un cerchio dato una corda uguale ad un segmento dato ed avente da un punto dato una distanza prefissata. [Si noti che tutte le corde uguali al dato segmento sono tangenti alla circonferenza.... Cfr. poi es. 60].

63. Condurre una retta su cui due circonferenze date intersechino segmenti prefissati. [Le rette su cui una data circonferenza interseca un dato segmento sono tangenti ad una circonferenza: quindi ecc.].

64. Determinare un punto che abbia da due rette date distanze date. Quante soluzioni si hanno?

65. Determinare un punto che abbia da un punto e da una retta dati distanze prefissate. Discussione.

66. Costruire un triangolo conoscendone la base, l'altezza e la mediana relativa alla base.

67. Il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele è una retta parallela alle prime due ed equidistante da esse (*bisettrice della striscia*).

68. La figura simmetrica di una retta a rispetto ad una retta parallela b è la parallela ad esse che giace rispetto alla b da banda opposta della a e dista da b come b da a.

69. Costruire un triangolo conoscendo la base, l'altezza e la mediana relative ad uno dei lati. [Si consideri la bisettrice della striscia].

70. La figura simmetrica di una retta a rispetto ad un punto A è la parallela alla a che ha da essa una distanza doppia di quella del punto A.

71. Condotti da un punto A tutti i segmenti che vanno ad una retta data, non passante per esso, il luogo dei punti medi di codesti segmenti, è la parallela alla retta data, equidistante da essa e dal punto A.

72. Se dagli estremi di un diametro di un cerchio si abbassano le perpendicolari su di una secante, i segmenti di queste compresi fra le intersezioni colla circonferenza e i piedi delle perpendicolari sono uguali. [Abbassata la perpendicolare sulla secante anche dal centro, si consideri il fascio delle tre parallele che così si ottiene, e si ricordi che il diametro perpendicolare ad una corda ecc.].

73. I segmenti che congiungono i punti medi dei lati consecutivi di un quadrilatero formano un parallelogramma, di cui le diagonali si segano nel punto di mezzo del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali del quadrilatero.

Esaminare sotto quali condizioni il parallelogramma è un rettangolo, una losanga, un quadrato.

74. Se E, F sono i punti medi dei lati opposti AB, DC del parallelogramma ABCD, le rette AF, EC dividono la diagonale BD in tre parti uguali. [Da B si conduca la parallela alla AF fino a incontrare in G la DC: come sono le tre rette AF, EC, BC? Si confronti inoltre il segmento CG coi segmenti DF ed FC].

75. Determinare il luogo dei punti di mezzo dei segmenti

condotti a una circonferenza data da un punto assegnato internamente o esternamente ad essa [Si consideri il punto medio del segmento che congiunge il punto dato col centro della circonferenza, ecc.].

Si noti il caso particolare in cui il punto dato appartiene alla circonferenza.

La riga a due orli (paralleli), oltre l'operazione di congiungere due punti A, B dati ad arbitrio, permette di eseguire la seguente *costruzione fondamentale:*

Condure ad una retta a *la parallela* b *da una parte assegnata rispetto ad essa e distante di un segmento uguale alla larghezza* l *della riga* [1].

Colla riga a due orli, usata ad eseguire codesta operazione fondamentale, si può risolvere una gran parte dei problemi risolubili mediante la riga e il compasso, non per altro tutti i problemi che si possono risolvere mediante codesti due strumenti. Fra i problemi risolubili colla riga a due orli, usata come si è detto dianzi, si ha la costruzione dei poligoni regolari costruibili con riga e compasso. Noi qui ci limiteremo a proporre come esercizio i problemi fondamentati relativi al trasporto nel piano delle figure, e aggiungeremo qualche indicazione sulla via da tenere nella risoluzione. Quando in codesti cenni parleremo di striscie, intenderemo le striscie di larghezza l, che si ottengono mediante la costruzione fondamentale.

Le costruzioni colla riga a due orli si fondano sulle proprietà delle striscie (nn. 294, 297, 298) e dei rombi (nn. 290, 291) in quanto la riga a due orli permette di costruire (entro un angolo acuto qualsiasi) una losanga (di altezza l).

---

[1] Per la risoluzione elementare di questi problemi nei casi più semplici confrontare due articoli dei prof. C. Marenghi e U. Concina nel *Bollettino di Matematiche* ecc. diretto da A. Conti (Anno II, nn, 5 e 8, 1901).

La riga a due orli si può usare ad eseguire un'altra costruzione, cioè: *Dati due punti* A, B *tali che* AB $> l$, *condurre per* A, B *rispettivamente due rette parallele e distanti fra loro del segmento* l. Usata in codesto modo, la riga a due orli sostituisce completamente il compasso. Cfr. l'articolo di G. Castelnuovo: *Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della Geometria analitica:* nei « Collectanea » di F. Enriques.

Divideremo gli esercizi in due gruppi dipendenti ciascuno da un problema particolarmente semplice.

Colla riga a due orli:

76. Data una retta a e un punto qualsiasi A fuori di essa, condurre per A la parallela alla a. [Preso su a un punto B ad arbitrio, si costruiscano a partire da AB e da una stessa parte rispetto ad essa due striscie contigue, e poi, ricorrendo alla considerazione delle diagonali, si completi il parallelogramma contenuto dalle due parallele esterne e dalla a, e che ha per vertice A].

77. Trasportare un segmento AB parallelamente a se stesso, portando l'estremo A in un punto A'. (Condotta per A' la parallela b alla retta a di AB, si determini il punto medio H di A'B, ricorrendo alla considerazione del parallelogramma contenuto dalle a, b e dalle due striscie che hanno comune il lato A'B: si prolunghi poi la AH, ecc.).

78. Trasportare un angolo parallelamente a se stesso portando il vertice in un punto prefissato.

Ancora colla riga a due orli:

79. Costruire la bisettrice di un angolo (n. 290).

80. Ruotare un segmento di un angolo dato intorno ad un suo estremo. (Si bisechi l'angolo, ecc.).

81. Ruotare un angolo intorno al suo vertice, portando un lato a coincidere con una semiretta prefissata pel vertice.

82. Condurre da un punto A la perpendicolare ad una retta a. [Si distinguano due casi a seconda che A appartiene alla a od è esterno ad essa. Se A appartiene alla a, si costruiscano sulla a due rombi uguali aventi comune il vertice A e un lato per esso, e se ne considerino le diagonali. Poi si applichi il problema precedente].

83. Indicati con α, β, γ gli angoli di un triangolo e con α_1, β_1, γ_1 i rispettivi complementi (cioè le differenze da un retto) si determinino i seguenti angoli, enunciando sotto forma di teorema i risultati che così si ottengono:

a) l'angolo di un'altezza con un lato adiacente;

b) l'angolo della congiungente i piedi di due altezze con uno dei due lati corrispondenti;

c) l'angolo della congiungente i piedi di due altezze con una di esse;

d) l'angolo di due delle congiungenti i piedi delle altezze.

e) l'angolo che la congiungente il punto medio di un lato col piede dell'altezza relativa ad un altro lato forma con quest'ultimo;

f) l'angolo della congiungente or ora indicata col primo lato;

g) l'angolo delle due rette che dal punto di mezzo di un lato vanno ai piedi delle altezze relative agli altri due lati;

h) l'angolo delle rette che dal piede di un'altezza vanno ai punti medi degli altri due lati;

i) l'angolo delle rette che dal piede di un'altezza vanno al punto medio di un altro e al piede dell'altezza relativa al terzo lato;

k) l'angolo di due bisettrici;

l) l'angolo delle bisettrici di due angoli esterni;

m) gli angoli dei raggi del cerchio circoscritto, che vanno ai vertici;

n) l'angolo di un raggio del cerchio circoscritto, che va ad un vertice, con un lato adiacente.

84. Se in un triangolo due mediane sono uguali, il triangolo è isoscele. [Si dimostra direttamente basandosi sulla proprietà del baricentro].

85. Il baricentro di un triangolo e il centro del cerchio circoscritto ad esso sono rispettivamente baricentro e ortocentro del triangolo dei punti medi dei lati.

86. Costruire un triangolo, conoscendo la posizione dei punti medi dei tre lati. [Il triangolo determinato da codesti tre punti medi ecc.].

87. Costruire un triangolo, dati i piedi delle tre altezze. [Il cerchio determinato da codesti tre punti ecc.].

88. Costruire un triangolo, conoscendo il piede di una altezza e i punti medi degli altri due lati. [Cfr. n. 305 ed es. 56.]

89. Costruire un triangolo conoscendone la base e le mediane relative ai due lati. [Si ricordi la proprietà del baricentro].

90. Costruire un triangolo, conoscendone la base e due mediane, una delle quali sia relativa alla base. [Come per l'es. prec.].

91. Costruire un triangolo conoscendone le tre mediane. [Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo richiesto e sia O il punto d'intersezione delle tre mediane: si dimostra facilmente (n. 311) che il parallelogramma che ha per lati OA, BO e per diagonale AB, ha l'altra diagonale uguale a CO: onde per costruire il triangolo ABC ecc.].

92. In un triangolo l'ortocentro, il baricentro e il centro del cerchio circoscritto si trovano su di una retta, e la distanza dei due primi fra codesti punti è doppia di quella degli altri due (Teorema di Eulero, 1765). [Se nel triangolo ABC sono H, S, M rispettivamente l'ortocentro, il baricentro e il centro del cerchio circoscritto ed è B_1 il punto medio di AC, si prolunghi HS di $SM_1 = \frac{1}{2}$ HS. Per dimostrare che M coincide con M_1, si consideri il triangolo SM_1B_1 e si noti che $B_1S = \frac{1}{2}$ SB e quindi M_1B_1 è parallela all'altezza relativa ad AC, ecc.].

93. In un triangolo il segmento di un'altezza compreso fra il vertice e l'ortocentro è doppio della distanza del lato corrispondente dal centro dal cerchio circoscritto. [Si applichi per la dimostrazione il teorema precedente, oppure ricorrendo alle notazioni dianzi usate, si conduca il diametro AMD: essendo DC, DB paralleli a BH, CH rispettivamente, se ne conclude che CD è uguale a BH per una parte, e per l'altra a $2MB_2$].

94. In un triangolo la congiungente il punto medio di un lato col punto medio del segmento della corrispondente altezza, compreso fra il vertice e l'ortocentro, è uguale al raggio del cerchio circoscritto. [Cfr. es. prec.].

95. In un triangolo i punti medi di due lati e il punto medio del segmento di una delle corrispondenti altezze, compreso fra il vertice e l'ortocentro, sono i vertici di un triangolo rettangolo. Le ipotenuse dei sei triangoli rettangoli che così si ottengono passano per un punto.

96. In un triangolo i punti medi dei lati, i piedi delle

altezze, e i punti medi dei segmenti di esse compresi fra i vertici e l'ortocentro appartengono ad una circonferenza (*circonferenza del* FEUERBACH o *dei nove punti*) il cui centro coincide col punto d'intersezione delle congiungenti ciascun punto medio di un lato col punto medio del segmento della relativa altezza, compreso fra il vertice e l'ortocentro.

97. Il diametro del cerchio del Feuerbach è uguale al raggio del cerchio circoscritto al triangolo [Cfr. es. 94].

98. Il centro del cerchio del Feuerbach è il punto medio del segmento che congiunge l'ortocentro col centro del cerchio circoscritto. [Indicando con F il centro del cerchio del Feuerbach e con A_1, B_1, C_1 i punti medi di BC, CA, AB e per il resto usando le notazioni degli esercizi precedenti si ha che M, S, F sono pel triangolo $A_1B_1C_1$ quello che H, S, M rispettivamente sono per ABC].

99. Dai vertici di un triangolo come centri si descrivano tre circonferenze, che si tocchino fra loro. [Si considerino il cerchio iscritto e i tre cerchi ex-iscritti ad un triangolo qualsiasi, si noti che i loro punti di contatto ecc.].

100. Sono dati un angolo e un punto: si conduca per il punto una retta che tagli dall'angolo un triangolo di perimetro uguale ad un segmento prefissato. [Immaginando risoluto il problema, si consideri il cerchio ex-iscritto al triangolo e interno all'angolo dato ecc.].

101. Le bisettrici degli angoli iscritti in un arco passano tutte pel punto medio dell'arco complementare.

102. Determinare il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate da un punto sulle rette che passano per un punto. [Cfr. nn. 317, 323].

103. La circonferenza descritta su di un lato di un triangolo come diametro interseca gli altri due lati nei piedi delle relative altezze.

104. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo il quale abbia:

a) gli angoli uguali a quelli di un dato triangolo;

b) i lati paralleli a tre rette date;

c) due lati paralleli a due rette date e il terzo lato passante per un punto dato.

105. Date due circonferenze segantisi, i segmenti che sulle rette passanti per uno dei due punti di intersezione sono determinati dalle due circonferenze, sono visti dall'altro punto di intersezione sotto un angolo costante.

106. Ogni angolo avente il vertice nell'interno di un cerchio è uguale alla semisomma degli angoli al centro corrispondenti agli archi compresi dall'angolo stesso e dal suo opposto al vertice.

107. L'angolo di due secanti di un cerchio, uscenti da un punto esterno ad esso, è uguale alla semidifferenza degli angoli al centro corrispondenti ai due archi compresi fra le due secanti.

108. Se due triangoli iscritti nello stesso cerchio sono tali che i lati del primo formino coi lati corrispondenti del secondo angoli uguali, i due triangoli sono uguali. Reciprocamente, se due triangoli uguali sono iscritti nello stesso cerchio, i lati dell'uno formano coi lati corrispondenti dell'altro angoli uguali [Cfr. es. prec.].

109. Se ABC è un triangolo equilatero iscritto in un cerchio ed M è un punto dell'arco BC, dimostrare che AM è uguale alla somma di CM, BM. [Preso su MA il segmento $MM' = MB$, si congiunga M' con B e si confronti il triangolo ABM col triangolo CBM, ecc. Si ricordi l'es. 17 pag. 71.].

110. Se di un triangolo sono dati un lato e l'angolo opposto, si determinino i luoghi dei punti medi degli altri due lati. [Cfr. l'es. n. 102].

111. Costruire un triangolo rettangolo date l'ipotenusa e l'altezza a questa relativa. Discussione.

112. Costruire un triangolo dati un lato, l'angolo opposto e la mediana relativa. Discussione.

113. Le altezze di un triangolo bisecano gli angoli del triangolo dei loro piedi. [Si consideri il cerchio iscritto].

114. Determinare dentro un triangolo un punto da cui i tre lati si vedano sotto il medesimo angolo. [Qual'è codesto angolo?]. Discussione.

115. Da un punto C di una circonferenza O si abbassi su di un diametro fisso AB la perpendicolare CD, e sul raggio OC si prenda un segmento OM uguale a CD. Trovare il luogo del punto M quando il punto C descrive la circonferenza. [Con-

dotto da O il raggio OE perpendicolare ad AB e dalla stessa parte di OC rispetto alla AB, si congiunga M con E, e si confrontino i due triangoli OCD, OEM, ecc. Si trova che il luogo è costituito dalle due circonferenze....].

116. Se sui lati di un triangolo equilatero qualsiasi si costruiscono tre triangoli equilateri ABD, BCE, CAF ; i centri dei cerchi a questi circoscritti, rispettivamante M, N, B, costituiscono un triangolo equilatero uguale al dato. [Si consideri l'esagono AMBNCP e se ne confrontino gli angoli e i lati.]

117. Se due circonferenze uguali si segano, e l'una passa pel centro dell'altra, ogni retta passante per l'una delle due intersezioni sega ulteriormente le circonferenze in due punti, che, congiunti colla seconda intersezione, danno un triangolo equilatero. [Si confrontino gli angoli del triangolo che hanno per vertici quei due punti cogli angoli del quadrangolo che ha per vertici opposti i due centri e le due intersezioni delle circonferenze.]

118. Qual'è il luogo dei punti di contatto di due circonferenze tangenti fra loro e che toccano in due punti dati una medesima retta? [Si considerino gli angoli che hanno i lati passanti pei due punti dati e il vertice nel punto di contatto (variabile) delle due circonferenze. Si trova che il luogo è una circonferenza].

119. Qual'è il luogo dei punti di contatto di due circonferenze tangenti fra loro e che toccano in due punti dati una medesima circonferenza? [Si trova che il luogo è una circonferenza].

120. Fissati un arco PR di una circonferenza C e un punto O esterno a C, si prenda un punto Q dell'arco PR e si considerino le due circonferenze PQO, RQO. L'angolo sotto cui esse si tagliano non varia al variare di Q sopra PR. [Si dimostri che il detto angolo è uguale ad $\widehat{OPQ} + \widehat{ORQ} = \widehat{PQR} - \widehat{POR}$, o è uguale ad $\widehat{OPQ} - \widehat{ORQ}$, o è uguale alla somma o alla differenza dei supplementari di $\widehat{OPQ}$, $\widehat{ORQ}$. Si discutano i varii casi possibili].

121. Se tre circonferenze si intersecano in uno stesso punto, i loro archi compresi fra gli altri tre punti di intersezione formano un triangolo curvilineo, nel quale la somma degli angoli iscritti nei lati è uguale a due retti. [Si considerino gli angoli formati dalle tre corde comuni ai dati cerchi presi a due a due].

122. Il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero è doppio del raggio del cerchio iscritto. [Dal centro O comune ai due cerchi si abbassi su di un lato AB del triangolo la perpendicolare, la quale incontri in C il cerchio circoscritto e si consideri il quadrilatero AOBC].

123. Si vuole lastricare un pavimento con piastrelle uguali, di forma poligonale regolare. Facendo astrazione dal contorno del pavimento, il quale può perciò considerarsi indefinitamente esteso, quali forme si possono assumere per le piastrelle?

124. Un triangolo equilatero insieme col suo simmetrico rispetto al centro del cerchio circoscritto dà luogo ad un poligono concavo (*stella regolare a sei punte*) in cui congiungendo a due a due i vertici degli angoli acuti si ottiene un esagono regolare.

125. Un quadrato insieme col quadrato uguale, le cui diagonali ne dimezzino i lati, dà luogo ad una figura poligonale (*stella regolare ad otto punte*), in cui congiungendo a due a due i vertici degli angoli acuti si ottiene un ottagono regolare.

126. Dato un esagono regolare si disegni col medesimo centro un esagono uguale, in modo che i vertici di entrambi determinino un dodecagono regolare (*stella regolare esagonale a dodici punte*).

127. Dato un quadrato si disegnino col medesimo centro due quadrati uguali, in modo che i vertici diano luogo ad un dodecagono regolare (*stella regolare tetragonale a dodici punte*).

128. Si costruisca un poligono regolare a quattro, sei, otto, dodici.... lati, quando ne sia dato:

a) il lato; o

b) la congiungente due determinati vertici non consecutivi.

129. Dato un poligono regolare ABCD .... H si costruisca (*senza ricorrere al cerchio circoscritto*) il poligono regolare del numero doppio di lati, avente fra i suoi vertici i punti A, B, C, D,... H. [Condotto AC, si bisechino gli angoli $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$, e per B si conducano le parallele a ciascuna delle due bisettrici fino ad incontrare l'altra].

V.

TEORIA DELLA EQUIVALENZA

Preliminari.

346. Def. — Se due poligoni P e P′ si possono dividere *mediante segmenti rettilinei* in un medesimo numero n di parti tali che le parti P_1, P_2..., P_n del primo siano ordinatamente uguali alle parti P'_1, P'_2,..., P'_n del secondo, si dirà che i due poligoni sono *equivalenti*.

In altre parole chiameremo *equivalenti* due poligoni che possano considerarsi come *somme di poligoni* non ricoprentisi ed adiacenti, *ordinatamente uguali*.

In particolare dunque dovranno riguardarsi come equivalenti due poligoni uguali.

Per indicare che i poligoni P, P′ sono fra loro equivalenti si scriverà indifferentemente,

P equiv. P′ o P′ equiv. P.

347. La definizione precedente si estende al caso in cui si confronti un poligono colla somma di altri due, *anche non adiacenti*. Così, un poligono si potrà dire equivalente alla somma di altri due quando sia divisibile in due parti rispettivamente equivalenti ad essi.

348. Cor. — *Due poligoni equivalenti si possono dividere in triangoli ordinatamente uguali.*

Ciò risulta facilmente dalla def. del num. 346 e dal fatto che due poligoni uguali si possono dividere in triangoli ordinatamente uguali.

349. Cor. — *Somme di poligoni equivalenti sono equivalenti.*

Rettangoli equivalenti.

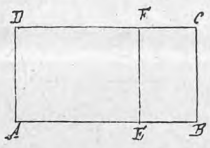
Le seguenti proposizioni (nn. 350-354) danno esempi di poligoni che vengono riconosciuti equivalenti applicando in modo diretto la definizione.

Qui e nel seguito ci sarà comodo talvolta di designare il rettangolo contenuto dai segmenti AB, CD, (n. 286) con r (AB, BD): così indicheremo con q (AB) il quadrato costruito sul segmento AB (n. 286).

350. Teor. — *Dati tre segmenti* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *il rettangolo contenuto dal segmento* $\boldsymbol{a+b}$, *somma di due di essi, e dal terzo segmento* $\boldsymbol{c}$, *è equivalente alla somma dei due rettangoli contenuti da* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *e da* $\boldsymbol{b}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *rispettivamente, cioè*

$$r\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \text{ equiv. } r\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + r\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

Sia ABCD il rettangolo dei due segmenti $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e sia precisamente $AB = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $BC = \boldsymbol{c}$. Se E è il punto di AB tale che $AE = \boldsymbol{a}$, e quindi $EB = \boldsymbol{b}$, si innalzi in E la perpendicolare ad AB, la quale incontri il lato opposto CD in F. Allora il rettangolo ABCD appare come somma dei due rettangoli AEFD, EBCF, il primo dei quali è contenuto da segmenti uguali rispettivamente



ad a e c, il secondo è contenuto da segmenti uguali rispettivamente a b e c, come appunto volevamo dimostrare.

351. Applicando successivamente il teor. prec. un numero sufficiente di volte, esso si estende al caso di tre, quattro, ..., n rettangoli aventi la stessa altezza, e si dimostra così il

Cor. — *Dati quanti si vogliono segmenti* $a, b, \ldots h$, k, *il rettangolo contenuto dal segmento* $a+b+\ldots+h$ *e da* k *è equivalente alla somma dei rettangoli contenuti da* a *e* k, *da* b *e* k ..., *da* h *e* K *rispettivamente, cioè*

$r(a+b+\ldots+h, k)$ equiv. $r(a, k)+r(b, k)+\ldots+r(h, K)$.

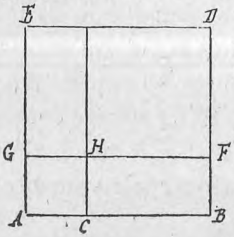
352. Discende di qui che, dato un rettangolo di base a e altezza k, il rettangolo di uguale altezza e di base na, dove n è un intero qualsiasi, è equivalente alla somma di n rettangoli uguali al rettangolo, dato o, come noi diremo, è *il multiplo* n^{mo} *di esso.*

Così il rettangolo di altezza K e base $\frac{a}{n}$, ammette come multiplo n^{mo} il rettangolo dato o, come diremo, è il suo n^{mo} *summultiplo.*

353. Teor. — *Se un segmento è diviso in qualsivoglia modo in due parti, il quadrato costruito sull'intero segmento è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle due parti e di due volte il rettangolo contenuto da codeste due parti, cioè*

$q(a+b)$ equiv. $q(a)+q(b)+2r(a, b)$.

Il segmento AB sia diviso in due parti dal punto C. Vogliamo dimostrare che il quadrato costruito sopra AB è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra AC e CB, e di due volte il rettangolo contenuto dai segmenti AC e CB.



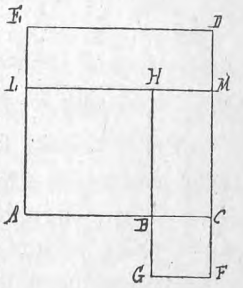
Infatti, costruito su AB il quadrato ABDE, si conduca da C la perpendicolare alla AB, e su di essa a partire da C e dalla stessa parte rispetto alla AB, da cui cade il quadrato, si porti il segmento CH uguale ad AC: infine da H si conduca la perpendicolare alla CH, la quale incontri le AE, BD nei punti G, F rispettivamente.

Le rette AE, CH, BD come perpendicolari ad una stessa retta sono parallele fra loro: così dicasi delle AB, GF, ED. I quattro quadrangoli AH, HD, CF, HE, sono quindi per costruzione rettangoli, e poichè il segmento HC è uguale ad AC, e i segmenti EG, FH sono uguali a CB, i rettangoli AH e HD sono quadrati. Risulta di qui veramente che il quadrato costruito su AB è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AC, e su CB e di due volte il rettangolo contenuto da AC e CB.

354. Teor. — *Dati due segmenti, la somma del quadrato costruito sulla loro differenza e di due volte il rettangolo contenuto dai due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due segmenti dati, cioè*

$q(a-b)+2r(a, b)$ equiv. $q(a)+q(b)$.

Siano AC e BC i segmenti dati; di modo che sarà AB la loro differenza. Costruiti su AC e BC, da bande opposte rispetto alla AC, i corrispondenti quadrati ACDE, BCFG, si prenda sul prolungamento di GB, a partire da B, il segmento BH uguale ad AB; e per H si conduca la parallela ad AC fino ad incontrare in L, M le rette AE, CD rispettivamente. Avremo allora che i segmenti LA, HB, MC, LH sono uguali ad AB, e i segmenti HM, LE, MD, CF sono uguali a BC (per costruzione e per il n. 278).



Di qui risulta anzitutto che il rettangolo ABHL è il quadrato costruito su AB, e che il rettangolo LMDE è contenuto da due segmenti uguali rispettivamente ad AC, BC. Siccome poi DM è uguale a CF, avremo che MF è uguale a DC ossia ad AC, e quindi HMFG è il rettangolo contenuto da AC, BC.

Risulta di qui che il quadrato ABHL costruito sulla differenza dei due segmenti AC, BC, aumentato di due volte il rettangolo contenuto da essi, cioè aumentato dei rettangoli LMDE, HMFG, dà il poligono AEDFGB somma dei quadrati costruiti sui due dati segmenti.

Parallelogrammi equivalenti.

355. Per andare innanzi nello studio dei poligoni equivalenti occorre premettere il seguente teorema fondamentale.

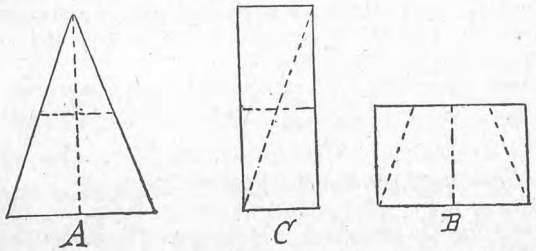
Teor. — *Poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra di loro.*

Siano dati tre poligoni A, B, C tali che

A equiv. C, B equiv. C;

diciamo che è anche

A equivale B.



Per l'ipotesi fatta A e C si possono decomporre nella somma di un certo numero finito di poligoni A_i a due a due uguali, e B e C si possono pur essi decomporre nella somma di un certo altro numero di poligoni B_i, a due a due uguali, ma in generale diversi da quelli di prima. Dobbiamo provare che anche A e B sono decomponibili nella somma di un certo numero finito di poligoni a due a due uguali.

Il poligono C sarà diviso nelle parti A_i da un certo sistema di segmenti $\boldsymbol{a}_i$ e nelle parti B_i da un certo altro sistema di segmenti $\boldsymbol{b}_i$, in generale distinti dagli $\boldsymbol{a}_i$.

Immaginando segnati in C tanto i segmenti $\boldsymbol{a}_i$ quanto i segmenti $\boldsymbol{b}_i$, avremo che il poligono C risulterà diviso in un certo numero di parti C_i, le quali si potranno considerare ottenute da C sia dividendo prima mediante i segmenti $\boldsymbol{a}_i$ nelle parti A_i, e poi suddividendo quelle mediante i segmenti $\boldsymbol{b}_i$; sia dividendo C prima mediante i segmenti $\boldsymbol{b}_i$ nelle parti B_i, e poi suddividendo queste mediante i segmenti $\boldsymbol{a}_i$.

Ciò premesso, se suddividiamo ciascuna parte A_i di A con quegli stessi segmenti coi quali essa è decomposta in C dai segmenti $\boldsymbol{b}_i$, decomponiamo evidentemente A nella somma di un numero finito di poligoni ordinatamente uguali ai poligoni C_i.

Così, suddividendo ogni parte B_i di B con gli stessi segmenti con cui essa è decomposta in C dai segmenti $\boldsymbol{a}_i$, otteniamo la decomposizione del poligono B nella somma di un numero finito di poligoni ordinatamente uguali ai C_i.

Concludiamo, quindi, che A e B sono decomponibili nello stesso numero finito di poligoni a due a due uguali, cioè sono equivalenti.

356. Def. — In un parallelogramma un lato qualsiasi si può prendere come *base*; e allora dicesi *altezza* (relativa a codesta base) la distanza tra la retta della base e quella del lato opposto (n. 295)

357. Teor. — *Parallelogrammi aventi uguali la base e l'altezza relativa sono equivalenti.*

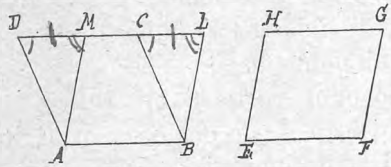
Siano ABCD, EFGH due parallelogrammi le cui basi AB, EF siano uguali e le cui altezze corrispondenti siano uguali.

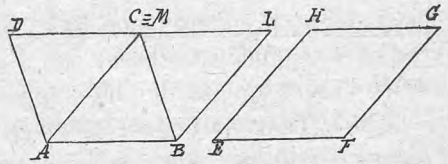
Sulla base AB e dalla stessa parte rispetto alla AB, da cui cade ABCD, si costruisca il parallelogramma ABLM uguale ad EFGH (n. 280). Basterà dimostrare che ABCD è equivalente ad ABLM (n. prec.).

Anzitutto, poichè le LM, CD sono parallele alla AB e le altezze dei due parallelogrammi relative al lato comune AB sono uguali, le rette LM e CD coincidono (n. 297).

Distinguiamo allora due casi, secondo che i segmenti LM, CD hanno comune un segmento (o un punto), oppure i detti segmenti sono esterni l'uno all'altro.

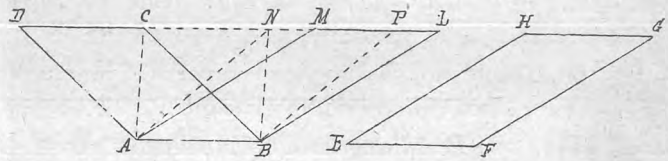
Consideriamo, per cominciare, il primo caso e supponiamo, per fissare le idee, che il punto M sia interno al segmento CD: e C sia interno ad ML. Allora, essendo CD uguale ad LM, sarà anche DM uguale a CL (n. 39): di più l'angolo $A\widehat{D}M$ è uguale a $B\widehat{C}L$, e l'angolo $D\widehat{M}A$ è uguale a $C\widehat{L}B$ (n. 263, 2°); se ne conclude che i due triangoli AMD, BLC sono uguali (n. 84) e quindi che i due parallelogrammi ABCD, ABLM si ottengono sommando triangoli uguali al medesimo trapezio ABCM e perciò sono equivalenti. Lo stesso ragionamento vale nel caso particolare in cui il punto M coincida con un estremo C del segmento CD: i due parallelogrammi si ottengono allora sommando triangoli uguali al medesimo triangolo ACB.





Consideriamo in secondo luogo il caso in cui LM sia esterno a CD: precisamente LM appartenga al prolungamento di DC.

Allora riportando di seguito, sul prolungamento di DC, a partire da C, un numero sufficiente di segmenti consecutivi uguali ad AB, otterremo certamente un



estremo P appartenente al segmento ML. Basterà infatti ripetere l'operazione precedentemente indicata fino a che si arrivi al primo multiplo del segmento CD maggiore od uguale a DM (n. 37). Congiungendo A e B con ciascuno dei punti, estremi dei segmenti così segnati, otteniamo una successione di parallelogrammi, di cui il primo è ABCD, l'ultimo è ABLM, e tali che due qualsiasi di essi consecutivi sono equivalenti perchè ricadono in uno dei due casi considerati dianzi. Se ne deduce allora che anche i parallelogrammi ABCD, ABLM sono equivalenti (n. 355).

358. Ci possiamo proporre di invertire la proposizione data al n. prec.: a tale scopo premetteremo la seguente

Osservazione. — Dopo aver tagliato da un foglio di carta un poligono qualsivoglia, e averlo diviso in qualsiasi modo mediante tagli rettilinei in parti poligonali, togliamo una qualsivoglia di queste parti. Se allora spostiamo una delle parti rimanenti in modo da ricoprire la lacuna così lasciata, vediamo che si dà luogo ad un'altra lacuna altrove. E così ci convinciamo che non è più possibile disporre le parti rimanenti in modo da ricostruire il poligono primitivo. Enunceremo perciò il seguente

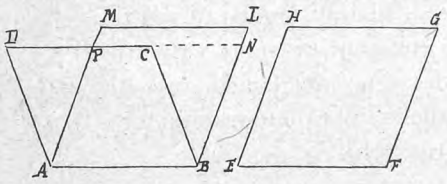
359. Postulato (dell'equivalenza o del De Zolt). — *Diviso un poligono in parti poligonali, la somma di queste all'infuori di una non è equivalente al poligono primitivo.*

360. Dopo ciò passiamo ad invertire la proposizione del n. 357 dimostrando il seguente

Teor. — *Parallelogrammi equivalenti, aventi basi uguali, hanno rispetto a queste uguali altezze.*

Siano ABCD, EFGH i due parallelogrammi equivalenti le cui basi AB, EF sono uguali; diciamo che sono pure uguali le altezze corrispondenti.

Supponiamo, se è possibile, il contrario, e, per fissare le idee, che il parallelogramma EFGH, rispetto alla base EF, abbia altezza maggiore di ABCD rispetto ad AB. Allora costruito sulla base AB, dalla stessa parte da cui cade ABCD, il parallelogramma ABLM, uguale ad EFGH, e quindi equivalente ad ABCD, i punti M, L stanno, rispetto alla DC, da banda opposta di A, B; onde la retta DC incontra i segmenti AM, BL in due punti interni P, N rispettivamente, e il parallelogramma ABLM è somma dei due parallelogrammi ABNP e PNLM.



Ma il parallelogramma ABNP è equivalente al parallelogramma ABCD, avente la stessa base ed uguale altezza (n. 357). Di qui risulta che i due parallelogrammi ABLM, ABNP, come quelli che sono equivalenti allo stesso parallelogramma ABCD, sono equivalenti fra loro (n. 355). Ma ciò è assurdo (n. prec.) perchè ABNP è una parte di ABLM.

361. Analogamente si dimostra, in base al postulato del n. 359, il seguente

Teor. — *Quadrati equivalenti sono uguali.*

Teorema di Pitagora e sue conseguenze.

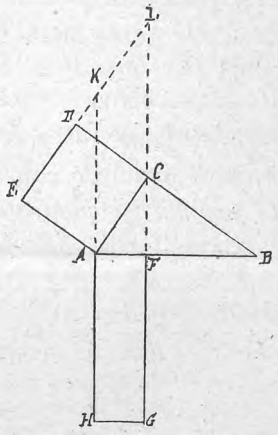
Il teorema sulla equivalenza dei parallelogrammi aventi basi ed altezze uguali conduce ad una serie di applicazioni che ci proponiamo di esporre ordinatamente, separandole in più gruppi. Il primo gruppo comprende le relazioni a cui danno luogo i quadrati dei lati di un triangolo.

Cominceremo coll'enunciare il seguente

362. Teor. — *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sopra un cateto è equivalente al rettangolo contenuto dall'ipotenusa e dalla proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.*

Sia il triangolo ABC rettangolo in C: abbassata da C la perpendicolare CF sull'ipotenusa, diciamo che il quadrato di AC è equivalente al rettangolo di AF ed AB.

Si costruisca infatti su AC il quadrato ACDE; poi sul prolungamento del segmento CF si prenda il segmento FG uguale ad AB e si conduca per G la parallela ad FA e per A la parallela ad FG. Codeste due rette si incontreranno in un punto H, perchè sono parallele a due rette AB, FG che si incontrano (n. 261); ed è manifesto che AFGH è il rettangolo di AF e AB.



Ciò premesso, si prolun-

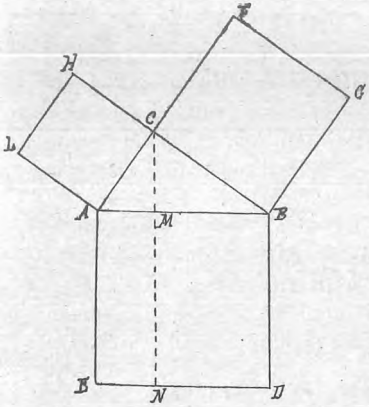
ghino HA e GF; poichè codeste due rette incontrano la AC, incontreranno anche la retta ED, parallela alla AC (n. 261); siano K, L le intersezioni. Allora il parallelogramma ACLK, come compreso fra le stesse due parallele fra cui è compreso il rettangolo AHGF, ha con questo uguale l'altezza relativa ai lati per diritto AK, AH. Diciamo che il parallelogramma e il rettangolo hanno uguali anche le basi AK, AH. Si considerino perciò i due triangoli AKE, ABC, rettangoli in E, C rispettivamente; in essi sono uguali i cateti AE, AC per costruzione e gli angoli acuti $\widehat{KAE}$, $\widehat{BAC}$, perchè possono immaginarsi ottenuti sottraendo lo stesso angolo $\widehat{CAK}$ da due angoli uguali perchè retti. Perciò i due triangoli AKE, ABC sono uguali (n. 109, *b*), ed hanno uguali le ipotenuse AK, AB; sono quindi uguali anche AK e AH; e il parallelogramma ACLK e il rettangolo AHGF sono equivalenti (n. 357).

Ma il parallelogramma ACLK ha la base comune col quadrato ACDE ed è compreso con esso fra le stesse parallele; concludiamo che il quadrato ACDE è equivalente al parallelogramma ACLK (n. 357) e quindi, per quanto si è visto dinanzi, al rettangolo AHGF (n. 355).

363. Teor. (di PITAGORA). — *In un tri ngolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.*

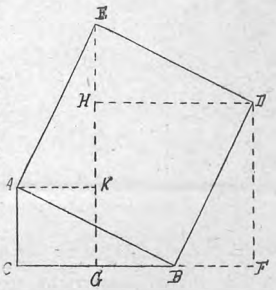
Dato il triangolo ABC rettangolo in C, si costruiscano su AB, BC, CA i quadrati ABDE, BCFG, ACHL, ciascuno da banda opposta del triangolo rispetto alla corrispondente base. Diciamo che il quadrato ABDE è equivalente alla somma dei quadrati

BCFG, ACHL. Abbassata infatti da C la perpendicolare CM sull'ipotenusa AB, e prolungatala fino ad incontrare DE in N, abbiamo (numero prec.) che il quadrato di AC è equivalente al rettangolo AMNE della ipotenusa AB e della proiezione AM su di essa del cateto AC; così il quadrato di BC è equivalente al rettangolo MBDN dell'ipotenusa AB e della proiezione MB del cateto BC su di essa. Concludiamo che la somma dei due indicati rettangoli, cioè il quadrato AB, è equivalente alla somma dei quadrati di AC e BC.



Del teor. di Pitagora daremo una seconda dimostrazione, la quale mette in evidenza la decomponibilità in parti uguali del quadrato costruito sulla ipotenusa e della somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Dato il triangolo ABC rettangolo in C, si costruisca sulla ipotenusa AB, dalla banda opposta e quella da cui cade il triangolo, il quadrato ABDE. Poi dai vertici D, E di questo si abbassino sulla retta BC le perpendicolari DF, EG le quali saranno parallele alla AC (n. 255), e infine dai punti D, A si conducano le perpendicolari DH, AK alla EG, le quali saranno parallele alla BC. Otteniamo così nella figura i due rettangoli ACGK, FGHD e i quattro triangoli ABC, AEK, EDA, BDF, che diciamo essere uguali. Essendo essi rettangoli in C, K, H, F rispettivamente, ed avendo per



costruzione le ipotenuse uguali, a dimostrare la loro uguaglianza, basterà far vedere che hanno a due a due un angolo acuto uguale (n. 109). Ora sono uguali gli angoli delle seguenti coppie: $\widehat{CAB}$ e $\widehat{KAE}$, $\widehat{AEK}$ ed $\widehat{EDH}$, $\widehat{EDH}$ e $\widehat{BDF}$, perchè gli angoli delle singole coppie sono complementari del medesimo angolo $\widehat{BAK}$, $\widehat{HED}$, $\widehat{HDB}$, rispettivamente.

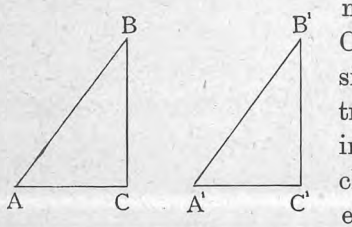
Dalla uguaglianza dei triangoli indicati risulta che AK=AC, HD = DF = BC, ossia che i rettangoli AG, HF sono quadrati e precisamente sono uguali ai quadrati costruiti rispettivamente sui cateti AC, BC del triangolo dato.

Ciò premesso, il quadrato AD si può considerare come la somma dei poligoni ABDHK, AEK, EDH, i quali sono rispettivamente uguali ai poligoni ABDHK, ABC, BDF. Ma la somma di questi tre ultimi poligoni è uguale precisamente alla somma dei quadrati AG, HF: onde rimane dimostrato che il quadrato AD è equivalente alla somma dei quadrati AG, HF.

364. Teor. (inverso del teorema di Pitagora). — *Se in un triangolo il quadrato costruito sopra un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due, l'angolo compreso da questi è retto.*

Nel triangolo ABC il quadrato costruito su AB sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BC e CA. Diciamo che l'angolo $\widehat{C}$ è retto.

Sui lati di un angolo retto $\widehat{C'}$ si prendano i segmenti C'A', C'B' uguali a CA, CB rispettivamente, e si congiunga A' con B'. Nel triangolo A'B'C' rettangolo in C', avremo (numero prec). che il quadrato di A'B' è equivalente alla somma dei quadrati di B'C' e A'C' (n. prec.), ossia, poichè B'C', A'C' si sono costruiti uguali a BC, AC rispettivamente, alla somma dei quadrati di BC e AC, la quale per

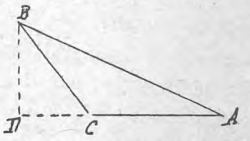


ipotesi è equivalente al quadrato di AB. Ne risulta (n. 355) che sono equivalenti i quadrati di AB e A'B' e quindi (n. 361) che sono uguali i segmenti AB e A'B'. Avremo allora che i due triangoli ABC, A'B'C', aventi i tre lati ordinatamente uguali, sono uguali (n. 90) ed hanno uguali gli angoli $\widehat{BCA}$, $\widehat{B'C'A'}$. Ma $\widehat{B'C'A'}$ per costruzione è retto. Sarà quindi retto anche l'angolo $\widehat{BCA}$.

365. La relazione data dal teorema di Pitagora si estende coi due seguenti teoremi:

Teor. — *In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati e del doppio del rettangolo di uno di questi e della proiezione dell'altro su di esso.*

Dato il triangolo ABC, ottusangolo in C, sulla retta AC si abbassi da B la perpendicolare BD; il punto D cadrà sul prolungamento di AC, perchè altrimenti avremmo un triangolo avente un angolo retto ed uno ottuso. Diciamo che il quadrato di AB è equivalente alla somma dei quadrati di AC, BC e del doppio del rettangolo di AC e CD. Infatti, dal triangolo ADB rettangolo in D si ha (n. 363) che



$$q\ (AB) \text{ equiv. } q\ (BD) + q\ (DA).$$

Ma, essendo DA = DC + CA, si ha (n. 353)

$$q\ (DA) \text{ equiv. } q\ (DC) + q\ (CA) + 2r\ (DC,\ CA),$$

onde risulta che

$$q\ (AB) \text{ equiv. } q\ (BD) + q\ (DC) + q\ (CA) + 2r\ (DC,\ CA).$$

Ma è n. (363)

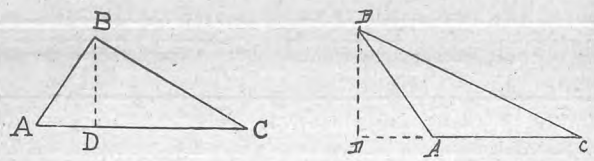
$$q\ (BD) + (DC) \text{ equiv. } q\ (BC);$$

quindi concludiamo che

$$q\ (AB) \text{ equiv. } q\ (BC) + q\ (CA) + 2r\ (DC,\ CA).$$

366. Teor. — *In un triangolo la somma del quadrato di un lato, opposto ad un angolo acuto, e del doppio del rettangolo contenuto da uno degli altri lati e dalla proiezione su di esso del terzo lato, è equivalente alla somma dei quadrati dei due lati che contengono l'angolo acuto.*

Sia ABC un triangolo, di cui l'angolo $\widehat{C}$ sia acuto. Abbassata da uno degli altri due vertici, per es. da B, la perpendicolare BD sul lato opposto o sul suo prolungamento, di-



ciamo che la somma del quadrato di AB e del doppio del rettangolo di AC e DC è equivalente alla somma dei quadrati di AC e BC.

Osserviamo che il piede D dell'altezza BD può cadere o dentro AC o sul prolungamento di CA. Nel primo caso il segmento AD è la differenza dei segmenti AC e DC, nel secondo è la differenza di DC e AC.

Ora (n. 363)

$$q\,(AB) \text{ equiv. } q\,(AD) + q\,(BD)$$

e, d'altra parte, per il n. 354,

$$q\,(AD) + 2\,r\,(AC, DC) \text{ equiv. } q\,(AC) + q\,(CD).$$

Avremo quindi

$$q\,(AB) + 2\,r\,(AC, DC) \text{ equiv. } q\,(AC) + q\,(CD) + q\,(BD).$$

Ma (n. 363)

$$q\,(BD) + q\,(CD) \text{ equiv. } q\,(BC);$$

e di qui e dalla relazione precedende risulta

$$q\,(AB) + 2\,r\,(AC, DC) \text{ equiv. } q\,(AC) + q\,(BC).$$

367. Nota. — I teoremi dei nn. 363, 365, 366 si invertono mediante la seconda legge delle inverse (n. 96); e da ciò si può desumere un criterio per decidere se un dato angolo di un triangolo è acuto, retto od ottuso. Il caso dell'angolo retto (inverso del teorema di Pitagora), è stato stabilito direttamente al n. 364.

Triangoli equivalenti.

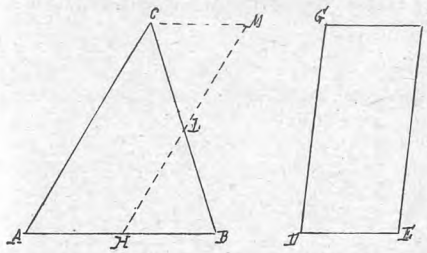
Il teorema sull'equivalenza dei parallelogrammi aventi basi e altezze corrispondenti uguali si estende ai triangoli mercè la proposizione del n. 369.

Premettiamo la seguente definizione.

368. Def. — In un triangolo, preso come *base* un qualsiasi dei lati, si dice *altezza* relativa a codesta base la distanza della retta di essa dal vertice opposto.

369. Teor. — *Un triangolo ed un parallelogramma, il quale abbia la stessa altezza e la base metà della base di quello, sono equivalenti.*

Sia ABC un triangolo e sia DEFG un parallelogramma avente la stessa altezza di ABC, e la base DE uguale alla metà di AB. Diciamo che il triangolo e il parallelogramma sono equivaleuti.



Divisa la base AB del triangolo per metà in H, si conduca da H la parallela ad AC e da C la parallela ad AB: sia M il punto di intersezione di codeste due rette, e sia L l'intersezione della HM con BC. I due parallelogrammi AHMC, DEFG, avendo ugual base ed uguale altezza, sono equivalenti (n. 357). D'altra parte, considerati i due triangoli, HBL, MCL, abbiamo che LB è uguale ad LC (n. 302), e di più che gli angoli $\widehat{HLB}$, $\widehat{LBH}$ sono uguali agli angoli $\widehat{MLC}$, $\widehat{LCM}$ rispettivamente (nn. 63, 263); cosichè i due triangoli sono uguali (n. 84). Il triangolo ABC e il parallelogramma AHMC essendo somme di poligoni rispettivamente uguali, sono equivalenti; quindi sono equivalenti (n. 355) il triangolo ABC e il parallelogramma DEFG.

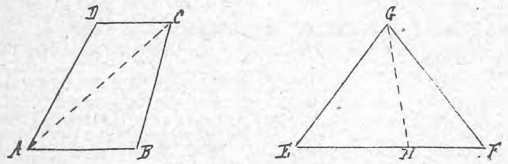
370. Teor. — *Triangoli di ugual base ed uguale altezza sono equivalenti.*

Invero due triangoli siffatti sono rispettivamente equivalenti a due parallelogrammi aventi ugual base (metà di quella dei triangoli) e la stessa altezza (n. prec.) e questi sono equivalenti fra loro (n. 357).

371. Def. — In un trapezio dicesi *altezza* la distanza delle due basi.

372. Ciò premesso discende dal teor. prec. il seguente corollario.

Cor. — *Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e di base uguale alla somma delle basi del trapezio.*



La figura suggerisce la dimostrazione che si può compiere per esercizio. (Il triangolo ABC è equivalente a GEH, ecc.).

373. Teor. (inverso del n. 370) — *Triangoli equivalenti ed aventi basi uguali, hanno altezze uguali.*

Infatti i due triangoli sono equivalenti rispettivamente a due parallelogrammi con basi metà e colle medesime altezze. Nell'ipotesi posta, questi parallelogrammi hanno basi uguali e sono equivalenti, perciò le loro altezze, che sono anche quelle dei due triangoli, saranno uguali (n. 360).

Trasformazioni di poligoni.

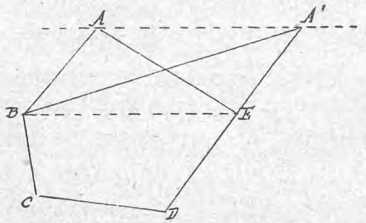
374. Il teorema relativo alla equivalenza dei triangoli aventi basi ed altezze uguali (n. 370) permette

di risolvere alcuni notevoli problemi di *trasformazione di un poligono.*

Si dice che un poligono A *si è trasformato* in un poligono B ogni qual volta si è costruito un poligono B equivalente ad A.

375. Probl. — *Trasformare un poligono in un triangolo.*

Sia dato il poligono ABCDE. Scelti ad arbitrio tre dei suoi vertici consecutivi E, A, B, per A si conduca la parallela alla diagonale BE, e si prolunghi DE fino ad incontrare codesta parallela in A'. Allora il poligono A'BCD ha un lato di meno del primitivo. D'altra parte i due triangoli ABE, A'BE hanno ugual base ed uguale altezza e sono perciò equivalenti (numero 370). Ne risulta che i due poligoni ABCDE, A'BCD, i quali hanno la parte BCDE comune e le parti residue equivalenti, sono equivalenti (n. 349). Abbiamo così ottenuto un poligono equivalente al primitivo, ma avente un lato di meno.

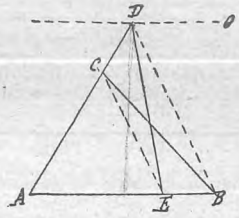


Ripetendo successivamente un numero sufficiente di volte la medesima costruzione, otterremo infine un triangolo equivalente al poligono dato.

376. Nota. — Il probl. prec. non è determinato, perchè sono infiniti i triangoli equivalenti ad un poligono dato.

Perciò ad un triangolo equivalente ad un poligono dato si possono imporre altre condizioni. Così è importante il seguente problema.

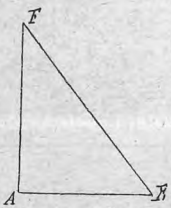
377. Probl. — *Trasformare un triangolo dato in un triangolo avente una data altezza.*



Dato il triangolo ABC, per trasformarlo in un triangolo avente un'altezza uguale ad un dato segmento, conduciamo la parallela *o* ad uno dei lati del triangolo, p. es. ad AB, alla distanza uguale al segmento dato, e sia D la intersezione con la *o* di uno degli altri due lati, p. es. di AC, o del suo prolungamento. Congiunto D con B, si conduca per C la parallela alla DB fino ad incontrare la AB in E.

Diciamo che il triangolo AED, il quale ha evidentemente l'altezza prefissata, è equivalente ad ABC. Invero i due triangoli ABC, AED ci appaiono come somme dello stesso triangolo AEC e rispettivamente dei due triangoli CED, CEB equivalenti (n. 370) per avere la base comune e i vertici opposti sulla medesima parallela alla base.

378. Costruito il triangolo AED, equivalente al dato ABC e avente l'altezza prefissata, ogni triangolo avente la base AE e il vertice opposto sulla retta *o*, soddisfa alle condizioni del problema precedente. Fra codesti infiniti triangoli ve n'è uno isoscele e ve ne sono due rettangoli.



Se AEF è uno di codesti triangoli rettangoli, ogni triangolo avente la base AF e l'altezza uguale ad AE è equivalente al dato ABC: onde possiamo dire d'aver risoluto il seguente

Probl. — *Trasformare un triangolo dato in un triangolo avente una base data.*

In particolare si potrà trasformare un triangolo dato nel triangolo isoscele equivalente che ha una base data.

Nota. — Giova osservare come il problema or ora enunciato si possa risolvere anche in modo diretto in dipendenza del n. 370, con una costruzione analoga a quella del n. 377.

379. Combinando insieme le costruzioni dei nn. 375 378, potremo risolvere il seguente

Probl. — *Trasformare un poligono dato in un parallelogramma avente un lato e un angolo dati.*

Il poligono dato si trasforma in un triangolo equivalente (n. 375) e questo alla sua volta in un triangolo avente come base un segmento doppio del lato EF assegnato (n. prec.), e quindi in un parallelogramma colla stessa altezza, la cui base sia uguale ad EF.

Da ultimo, fra tutti i parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza di quello or ora costruito e quindi ad esso equivalenti, possiamo determinare uno ABCD avente uno degli angoli, per esempio $\widehat{B}$, uguale all'angolo dato.

380. Come caso particolare del problema precedente sapremo risolvere quest'altro: *Trasformare un poligono in un rettangolo di data base* (o data altezza).

381. Dati due poligoni equivalenti A, A', trasformiamoli in due rettangoli R, R' aventi la stessa base prefissata ***a***.

Codesti due rettangoli, essendo equivalenti a due poligoni fra loro equivalenti, sono pure equivalenti fra loro (n. 355). Poichè essi hanno basi uguali, si conclude che hanno uguali anche le altezze (n. 360) e sono senz'altro uguali.

Abbiamo cioè il seguente

Teor. — *Trasformando poligoni equivalenti in rettangoli di ugual base, si ottengono rettangoli uguali.*

382. La costruzione del n. 380 permette anche di costruire un rettangolo equivalente alla somma di quanti poligoni si vogliono.

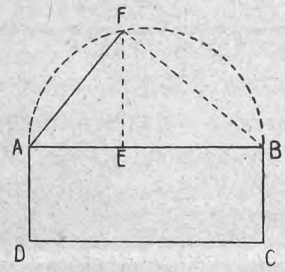
Si trasformino infatti codesti poligoni in altrettanti rettangoli aventi tutti una medesima base. Il rettangolo avente la stessa base di codesti rettangoli e l'altezza uguale alla somma delle altezze di essi è equivalente alla somma dei poligoni dati (n. 351).

In particolare potremo costruire un rettangolo equivalente alla somma di m poligoni uguali ad un poligono dato, cioè l'm^{mo} *multiplo di un poligono dato.*

383. Da ultimo, in base al n. 362, risolviamo il problema seguente, dopo di che potremo trasformare ogni poligono in un quadrato.

Probl. — *Trasformare un rettangolo in un quadrato.*

Dato il rettangolo ABCD, si porti sul lato maggiore AB il lato minore in AE, e descritta sul diametro AB, da una banda, la semicirconferenza si innalzi da E la perpendicolare ad AB fino a incontrare la semicirconferenza in F.



Diciamo che il quadrato di AF è equivalente al rettangolo dato.

Infatti il triangolo AFB è rettangolo in F (n. 317), e in esso il quadrato del cateto AF è equivalente al rettangolo di AB e della proiezione AE di AF su AB (n. 362), cioè al rettangolo dato.

384. Nota. — Invertendo la costruzione precedente si ha un modo diretto di *trasformare un quadrato dato in un rettangolo di data base.*

Confronto di poligoni.

385 Def. — Se un poligono A è equivalente alla somma di un poligono B e di un altro poligono, A si dice *prevalente* a B, e B *suvvalente* ad A.

Ciò si potrà scrivere

$$A > B \text{ o } B < A.$$

386. Il postulato dell'equivalenza (n.359) e il teor. del n. 355 permettono di dimostrare che dati due poligoni A e B, i seguenti tre casi:

a) A è prevalente a B;

b) A è equivalente a B;

c) A è suvvalente a B;

si escludono a vicenda.

Supponiamo dapprima A prevalente a B. Ciò vuol dire che esiste un poligono C tale che sia

(1) $$A \text{ equiv. } B + C.$$

Allora non può essere simultaneamente

$$A \text{ equiv. } B,$$

perchè in tal caso B e B + C, come equivalenti ad A, dovrebbero essere equivalenti fra loro (n. 355) il che è assurdo (n. 359).

Nè può essere A suvvalente a B, giacchè in tal caso esisterebbe un poligono D per cui sarebbe

(2) $$A + D \text{ equiv. } B,$$

mentre d'altra parte dalla (1) risulta (n. 349)

(3) $$A + D \text{ equiv. } B + C + D,$$

e allora dovremmo avere per le (2) (3), che B è equi-

valente a B + C + D (n. 355), il che è ancora assurdo.

Similmente l'ipotesi che A sia suvvalente a B, ossia che B sia prevalente ad A, esclude che possa essere o A equivalente a B o A prevalente a B.

Infine se si suppone A equivalente a B, si dimostra in modo analogo che non può essere uno dei due poligoni prevalente all'altro.

Abbiamo dunque il seguente

Teor. — *Dati due poligoni* A *e* B, *se si verifica uno dei seguenti tre casi: che* A *sia prevalente o equivalente o suvvalente a* B, *non può verificarsi alcuno degli altri due.*

387. Giova avvertire che dal teor. prec. non discende affatto che, dati due poligoni A e B qualsiansi, debba necessariamente essere o A prevalente a B, o A equivalente a B, o A suvvalente a B.

Ma così è veramente; e per dimostrarlo premettiamo il seguente

Teor. — *Se i poligoni* A *e* B *sono equivalenti rispettivamente ad* A′ *e* B′; *ed è* A *prevalente a* B, *sarà anche* A′ *prevalente a* B′.

Infatti per ipotesi abbiamo

(1) A equiv. A′, (2) B equiv. B′

e, per un certo poligono C,

(3) A equiv. B + C.

Risulta dalle (1) (3) (n. 355)

A′ equiv. B + C

e dalla (2) pel n. 349

B + C equiv. B′ + C

onde concludiamo pel n. 355

A′ equiv. B′ + C;

ed abbiamo veramente che A′ è prevalente a B′.

388. Ciò premesso dimostriamo il seguente teor. fondamentale.

Teor. — *Dati due poligoni* A *e* B, *il poligono* A *sarà necessariamente o prevalente o equivalente o suvvalente a* B.

Si trasformino infatti i due poligoni A, B in due rettangoli di ugual base

$$r(u, a),\ r(u, b)$$

rispettivamente. Se le due altezze a, b risultano uguali, i due rettangoli saranno essi stessi uguali, e i due poligoni A e B, come equivalenti a rettangoli uguali, saranno essi stessi equivalenti (n. 355).

Se invece le altezze sono disuguali ed è p. es.

$$a > b,$$

il rettangolo $r(u, a)$ sarà prevalente al rettangolo $r(u, b)$ (n. 350) e allora, in quanto è

A equiv. $r(u, b)$, B equiv. $r(u, b)$,

concludiamo pel n. prec. che A è prevalente a B.

Analogamente se $a < b$ si dimostra che A è suvvalente a B.

E i tre casi si escludono a vicenda pel teor. del n. 386.

389. Il teor. prec. si può anche ennunciare come segue:

Due poligoni, tali che l'uno non sia nè prevalente nè suvvalente all'altro, sono equivalenti (cioè decomponibili in parti ordinatamente uguali).

Sotto questa forma il teor. prec. dà un importante *criterio per riconoscere l'equivalenza di due poligoni*, differente da quello contenuto nella definizione di equivalenza (n. 346).

390. Notiamo ancora che il teor. prec. stabilisce

la possibilità di confrontare in ogni caso due poligoni A e B.

Per confrontarli effettivamente basterà trasformarli, come s'è fatto al n. 388, in due rettangoli di ugual base e confrontarne le altezze.

391. Abbiamo già visto che la trasformazione dei poligoni in rettangoli di data base permette di costruire la somma di quanti si vogliono poligoni, e in particolare i multipli di un dato poligono.

Qui mostriamo come dato un poligono A si possa determinarne la m^{ma} parte aliquota o m^{mo} summultiplo, cioè un poligono il cui multiplo m^{mo} sia equivalente ad A.

A tale scopo si trasformi il dato poligono A in un rettangolo R, e se a e b sono i lati di R, si consideri il rettangolo R′ che ha la base a e l'altezza $\frac{b}{m}$.

Ora il multiplo m^{mo} di R′ è equivalente ad R e quindi ad A (n. 355). D'altra parte ogni poligono A′, il cui multiplo m^{mo} sia equivalente ad A, non può essere nè prevalente nè suvvalente ad R′, perchè, se così fosse, sarebbe anche, contro l'ipotesi, mA′, ossia A, prevalente o suvvalente ad mR, cioè ad A medesimo. Si conclude, in base al teor. prec., che A′ è equivalente ad R′; e possiamo quindi affermare che *il rettangolo* R′ *è l'*m^{mo} *summultiplo del dato poligono* A.

392. Infine, ricorrendo sempre alla trasformazione dei poligoni in rettangoli di data base, si dimostra la seguente proposizione che estende alle superficie poligonali il postulato di Archimede.

Teor. — *Dati due poligoni* A *ed* A′, *tali che* A *sia prevalente ad* A′, *si può trovare un numero* (intero) m *così grande, che l'*m^{mo} *multiplo di* A′ *sia prevalente ad* A.

I dati poligoni A, A′ si trasformino in due rettangoli R, R′ di ugual base. Poichè A è prevalente ad A′, sarà anche R prevalente ad R′ (n. 387) e, indicando con h, h' le altezze di R, R′ rispettivamente, avremo $h > h'$ (n. 360).

Possiamo allora trovare un numero m così grande che l'm^{mo} multiplo di h' sia maggiore di h (n. 37). Si avrà di conseguenza che il rettangolo avente la stessa base di R e l'altezza mh' è prevalente a R′. Ma codesto nuovo rettangolo è il multiplo m^{mo} di R′; onde si conclude che l'm^{mo} multiplo di R′ è prevalente ad R e quindi ancora che l'm^{mo} multiplo di A′ è prevalente ad A (n. 387).

Differenze di poligoni equivalenti.

Abbiamo già notato che il teor. del n. 389 ci fornisce un criterio per riconoscere l'equivalenza di due poligoni.

Ma esso ci permette ancora di stabilire un altro criterio d'equivalenza fra poligoni, che è molto utile nelle applicazioni.

Premettiamo perciò una definizione e un teorema.

393. Def. — Se un poligono A è somma di due poligoni B e C, il poligono B si dice *differenza* dei poligoni A e C.

394. Teor. — *Se il poligono* A *è equivalente o prevalente al poligono* A′ *e il poligono* B *è prevalente al poligono* B′, *la somma di* A *e* B *è prevalente alla somma di* A′ *e* B′.

Infatti dalle ipotesi

$$A \text{ equiv. } A',\ B \text{ equiv. } B' + B''$$

risulta pel n. 349

$$A + B \text{ equiv. } A' + B' + B''$$

e quindi A + B è prevalente ad A′ + B′.

Alla stessa conclusione si giunge supponendo

$$A \text{ equiv. } A' + A''.$$

395. Ciò premesso dimostriamo il teorema preannunciato.

Teor. — *Differenze di poligoni equivalenti sono equivalenti.*

I poligoni A, B siano equivalenti ai poligoni A', B' rispettivamente, e il poligono A sia prevalente a B. Anzitutto avremo che anche A' è prevalente a B' (n. 387). Se allora C è la differenza di A e B e C' è la differenza di A' e B', dei due poligoni C e C' l'uno non può essere prevalente all'altro. Se invero fosse, p. es., C' prevalente a C', la somma di B e C cioè A, sarebbe prevalente alla somma di B' e C' (n. prec.), cioè al poligono A' il che è contro l'ipotesi.

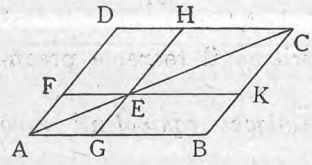
396. Nota. — In base a questo teor., *per determinare la differenza di due poligoni non equivalenti* A, B *basta trasformarli in due rettangoli di ugual base* (n. 380) *e considerare il rettangolo che ha la stessa base e l'altezza uguale alla differenza delle altezze dei rettangoli ottenuti.*

La differenza di due poligoni A, B si indicherà con A — B.

397. Il criterio di equivalenza fornito dal teor. del n. 395 torna spesso utile nelle applicazioni.

Se sono dati due poligoni, che sieno uguali od equivalenti, togliendo da essi due parti poligonali uguali od equivalenti fra loro, si ottengono due nuove figure fra loro equivalenti, *cioè tali che per esse sappiamo a priori possibile la decomposizione in parti rispettivamente uguali.*

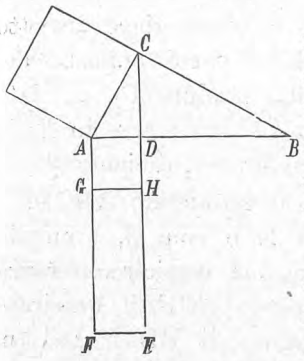
Così, p. es., un parallelogramma ABCD è diviso da una sua diagonale AC in due triangoli ACB, CAD uguali (n. 279); e se per un punto E di AC si conducono le parallele FK, GH ai lati, i triangoli AEF, ECH risultano uguali rispettivamente ad EAG,



CEK. Sottraendo quindi da ACB, CAD i triangoli rispettivamente uguali EAG, AEF e CEK, EHC, otteniamo i due parallelogrammi EGBK, EFDH, dei quali si può senz'altro asserire (n. 395) che sono equivalenti, cioè decomponibili in parti a due a due uguali.

Altre applicazioni più importanti del criterio prec. sono indicate nei due paragrafi seguenti, ed altre ancora troveranno luogo negli esercizi alla fine del capitolo e in particolare negli es. 41 e segg. (pag. 216 e segg.).

Secondo modo di trasformare un rettangolo in un quadrato.



Servendoci del criterio del n. 395, dimostreremo un teor. sul triangolo rettangolo, che va ravvicinato a quello del n. 362, e che fornisce un nuovo modo di trasformare un rettangolo dato in un quadrato.

398. Teor. *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza (relativa all'ipotenusa) è equivalente al rettangolo dei due segmenti in cui l'ipotenusa è divisa dal piede di codesta altezza.*

Nel triangolo ABC, rettangolo in C, si abbassi l'altezza CD. Preso sul prolungamento di CD il segmento DE uguale a BA, si costruisca il rettangolo DEFA dei segmenti AB, AD, e preso su DE il segmento DH uguale a DA, onde risulterà HE = DB, si conduca per H la parallela a DA fino a incontrare

in G la AF, cosicchè ADHG sarà il quadrato di AD. Ora sappiamo (n. 362) che

ADEF equiv. q (AC);

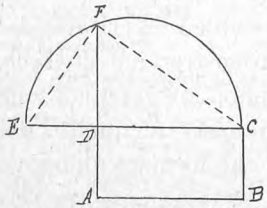
ma questo quadrato è equivalente alla somma dei quadrati di AD e CD (n. 363), onde sarà

ADEF equiv. q (AD) $+$ q (CD).

Allora sottraendo dal rettangolo ADEF il quadrato ADHC di AC, risulta che il quadrato di CD è equivalente al rettangolo GHEF di AD, DB.

399. Probl. — *Trasformare un rettangolo in un quadrato.*

Dato il rettangolo ABCD, sul prolungamento di CD si prenda il segmento DE uguale ad AD, e si descriva la semicirconferenza di diametro EC, che giace rispetto a EC dalla parte opposta del rettangolo. Prolungato il lato AD, fino ad incontrare in F la semicirconferenza, diciamo che il quadrato di DF è equivalente al rettangolo ABCD.



Congiunto, infatti, F con E e con C, l'angolo EFC è retto perchè iscritto in una semicirconferenza (n. 317), e nel triangolo rettangolo ECF il quadrato di FD è equivalente al rettangolo di ED e DC (n. prec.), cioè al rettangolo dato ABCD.

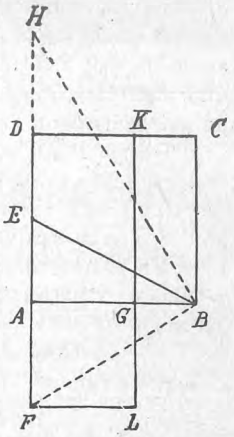
Sezione aurea e pentagono regolare.

400. Probl. — *Dividere un segmento dato in due parti tali che il rettangolo dell'intero segmento e di una parte sia equivalente al quadrato dell'altra parte.*

Dato il segmento AB, si costruisca su di esso il quadrato ABCD, e, congiunto il punto medio E di AD con B, si porti

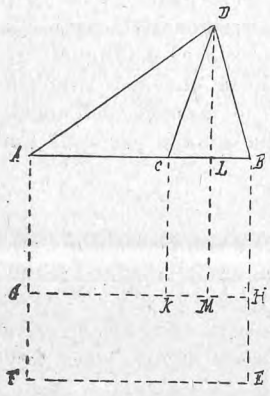
sulla semiretta EA, a partire da E, il segmento EF uguale a EB. Preso infine entro AB il punto G tale che AG sia uguale ad AF, diciamo che il quadrato di AG è equivalente al rettangolo di AB e BG.

Infatti si costruisca su AG il quadrato AGLF; si prolunghi LG fino ad incontrare DC in K, e sul prolungamento di AD si prenda DH $=$ AF.



Avremo allora che i due segmenti EH, EF, sono uguali come somme di segmenti uguali; e poichè EB $=$ EH $=$ EF, la circonferenza di centro E e raggio EH passa per H, B, F, onde l'angolo $\widehat{HBF}$, iscritto in una semicirconferenza, è retto (n. 317). Di qui discende che il rettangolo di AF e AH, uguale a DFLK, è equivalente al quadrato di AB, cioè ad ABCD (n. 398). Togliendo dal rettangolo e dal quadrato equivalente il rettangolo comune DAGK, otteniamo (n. 395) che il quadrato AFLG di AG è equivalente al rettangolo GBCK di AB e GB, come appunto volevamo dimostrare.

401. Def. — Dato il segmento AB, la parte AG di esso, tale che il quadrato di AG sia equivalente al rettangolo di AB e GB, dicesi *segmento aureo* o *sezione aurea* del segmento dato.



402. Probl. — *Costruire l'angolo uguale alla quinta parte di due retti.*

Scelta ad arbitrio una semiretta AB che debba essere uno dei lati dell'angolo cercato, e preso su di essa un qualsivoglia segmento AB, se ne determini la sezione aurea AC; quindi sul segmento CB come base si costruisca il triangolo isoscele CBD avente i due lati CD, BD uguali ad AC e si congiunga A con D. Diciamo che l'angolo $\widehat{BAD}$ è la quinta parte di due retti.

Infatti, costruito sul lato BA, dalla parte opposta di D, il quadrato

ABEF, si prenda su AF il segmento AG uguale ad AC, e da G si conduca la GH parallela alla AB. Poi da C si tiri la parallela alla AF, fino ad incontrare la GH in K, e da D si tiri la parallela alla AG fino ad incontrare la AB in L e la GH in M. Il punto L, piede dell'altezza del triangolo isoscele BCD, dividerà per metà la base CB (n. 115).

Il quadrangolo ACKG è il quadrato costruito sul segmento aureo di AB, e il quadrilatero FEHG è il rettangolo contenuto dall'intero segmento AB e dall'altra parte CB. Essi sono quindi equivalenti (n. prec.).

Giachè $\widehat{BCD}$, come angolo alla base di un triangolo isoscele, è acuto (n. 267), il supplementare $\widehat{DCA}$ è ottuso: onde nel triangolo ottusangolo ACD avremo che (n. 365)

$$q\,(AD) \text{ equiv. } q\,(AC) + q\,(CD) + 2r\,(AC, CL).$$

Ma codesto doppio rettangolo è dato evidentemente dal rettangolo CBHK; il quadrato di CD = AC è equivalente al rettangolo FEHG. Ne risulta che

$$q\,(AD) \text{ equiv. } ACKG + FEHG + CBHK$$

cioè precisamente

$$q\,(AD) \text{ equiv. } q\,(AB).$$

Ma due quadrati equivalenti sono uguali (n. 361) ed hanno i lati uguali, cioè i segmenti AD, AB sono uguali.

Allora il triangolo isoscele ABD avente un angolo alla base comune col triangolo isoscele CBD avrà l'angolo al vertice $\widehat{BAD}$ uguale all'angolo al vertice del secondo, cioè a $\widehat{CDB}$ (n. 269). D'altro canto, essendo per costruzione AC uguale a CD, il triangolo ACD è anche esso isoscele ed ha uguali gli angoli alla base $\widehat{CAD}$, $\widehat{ADC}$; onde risulta che nel triangolo isoscele ABD l'angolo al vertice $\widehat{BAD}$ è la metà dell'angolo alla base $\widehat{ADB}$ ed è quindi uguale alla quinta parte di due retti (n. 267).

Il precedente problema ci conduce a risolvere anche i problemi seguenti, che fanno seguito a quelli risoluti ai numeri 341-345.

403. Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un decagono regolare*, ossia: *Dividere una circonferenza data in dieci parti uguali.*

Data la circonferenza O, assegniamo su di essa ad arbitrio un punto A, che debba esser vertice del decagono, e per O conduciamo i raggi OA_1, OA_2, OA_3, ... OA_{10}, tali che ciascuno di essi formi col precedente un angolo uguale alla quinta parte di due retti (n. prec.).

Sarà allora uguale alla quinta parte di due retti anche l'angolo $\widehat{A_{10}OA_1}$ e, condotti i segmenti $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{10}A_1$, il poligono $A_1A_2 \ldots A_{10}$ è (n. 336) un decagono regolare.

404. Dal numero precedente e dal numero 402 discende il seguente

Cor. — *Il lato del decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio.*

405. Iscritto nella circonferenza O un decagono rogolare $A_1A_2 \ldots A_{10}$, consideriamo gli angoli al centro $\widehat{A_1OA_3}$, $\widehat{A_3OA_5}$, ..., $\widehat{A_9OA_1}$, doppi dell'angolo al centro corrispondente al lato del decagono. Così la circonferenza rimane divisa in cinque parti uguali e otteniamo (n. 336) il pentagono regolare $A_1A_3A_5A_7A_9$: possiamo quindi risolvere il seguente

Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un pentagono regolare*, ossia: *Dividere una circonferenza data in cinque parti uguali.*

406. Divisa la circonferenza in cinque parti uguali, dimezzando successivamente le parti, otteniamo i poligoni regolari iscritti di

$$10,\ 20,\ 40 \ldots\ 5.2^n,\ \ldots \text{ lati.}$$

Siccome poi $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{15}$,

se a partire da un medesimo punto A dividiamo una circonferenza in dieci e in sei parti uguali, e AB, AC sono rispettivamente la decima e la sesta parte della circonferenza, l'arco BC è la quindicesima parte della circonferenza stessa, e quindi la corda corrispondente è (n. 336) il *lato del pentadecagono* regolare iscritto.



Dimezzando successivamente gli archi otteniamo i poligoni regolari di

$$30,\ 60,\ \ldots,\ 15.2^n,\ \ldots \text{ lati.}$$

407. I poligoni regolari di cui abbiamo parlato ai nn. 345, 406 possono iscriversi nel cerchio mediante le costruzioni accennate, effettuabili colla riga e col compasso; essi diconsi perciò *iscrittibili*.

Una discussione, compiuta con mezzi superiori alle Matematiche elementari, permette di decidere per ogni numero assegnato, se il poligono regolare che ha codesto numero di lati sia iscrittibile nel cerchio, *cioè si possa costruire col solo uso della riga e del compasso*. In particolare essa conduce al resultato che il problema dell'iscrizione (relativamente agli strumenti suddetti) è possibile per tutti i numeri primi della forma

$$p = 2^n + 1,$$

ma non per altri numeri primi.

Così si riesce ad iscrivere nel cerchio, dopo il triangolo equilatero e il pentagono (nn. 329, 377), i poligoni regolari di 17, 257, 65537, ... lati: mentre non sono iscrittibili (*senza ricorrere a strumenti più elevati*) i poligoni regolari di 7, 11, 13, 19, ... lati [1]

Equivalenza di poligoni a lati circolari.

408. Un poligono a lati circolari (cfr. n. 239 e segg.) si può immaginare *diviso* in *parti*, mediante segmenti e archi di circonferenza, in modo da risultare ottenuto come somma di più poligoni a lati circolari, non ricoprentisi.

409. Def. — Due poligoni a lati circolari si diranno *equivalenti* se, per mezzo di segmenti e di archi di circonferenza, possono essere divisi in parti a due a due ordinatamente uguali.

Questa definizione si estende anche al caso in cui si confrontino somme di poligoni a lati circolari non adiacenti (cfr. n. 347).

[1] Cfr. per maggiori notizie l'art. di F. Enriques: *Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari:* nei « Collectanea » di F. Enriques.

410. Discende di qui come al n. 355 il

Teor. — *Poligoni a lati circolari equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.*

411. Un'osservazione analoga a quella del n. 358 ci conduce ad enunciare il

Postulato (dell'equivalenza generalizzato). — *Diviso in parti un poligono a lati circolari per mezzo di segmenti e archi di circonferenze, la somma di codeste parti all'infuori di una non è equivalente al poligono primitivo.*

412. Osservazione. — La nuova definizione di equivalenza data al n. 409 si può applicare in particolare ai poligoni rettilinei, in quanto anche i poligoni rettilinei si possono dividere, mediante segmenti e archi di circonferenza, in poligoni curvilinei.

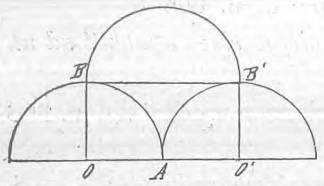
Ora, se due poligoni (rettilinei) A e B sono somme di poligoni a lati circolari, uguali ciascuno a ciascuno, (si potrebbe dire *equivalenti per divisione mediante rette e circonferenze*) l'osservazione stessa che ci ha suggerito il postulato precedente c'insegna (come al n. 358) che non è possibile risulti, per una divisione in parti rettilinee, che uno dei due poligoni A, B sia prevalente all'altro.

Si deduce quindi (in forza del n. 389) che i due poligoni A e B sono *equivalenti per divisioni rettilinee* (ossia equivalenti, secondo il n. 346); cioè si potrà dividerli in parti uguali ciascuna a ciascuna, *mediante soli segmenti rettilinei.*

413. Come esempio relativo alla definizione generale del n. 409 mostriamo un semplice caso in cui un triangolo a lati circolari risulta equivalente ad un rettangolo.

Tale equivalenza è messa in luce da una divisione di due poligoni in parti per mezzo di rette e di circonferenze. Notiamo incidentalmente che sarebbe impossibile decomporre i poligoni stessi in parti uguali, adoperando all'uopo soltanto segmenti di retta.

Consideriamo due circonferenze O ed O', uguali e tangenti nel punto A, e conduciamo da una stessa banda rispetto



alla OO' i raggi OB, O'B' perpendicolari alla OO'. Descritta sul segmento BB' come diametro la semicirconferenza, che cade da banda opposta di A rispetto alla BB', si riconosce manifestamente che il triangolo a lati circolari ABB' (caso particolare di una figura più generale [*drepanoide*] che considereremo negli eserc., pag. 219) e il rettangolo OO' B'B sono somme di parti ordinatamente uguali. Si dirà perciò che il triangolo e il rettangolo sono equivalenti.

Confronto di poligoni a lati circolari.

414. Si estende ai poligoni a lati circolari la def. del n. 385, chiamando *prevalente* ad un poligono B ogni poligono A equivalente alla somma di B e di un altro poligono.

In tal caso si dirà pure che B è *suvvalente* ad A; e se è

$$A \text{ equiv. } B + C,$$

C si dirà *differenza di* A *e* B, e così pure B *differenza di* A *e* C.

415. Lo stesso ragionamento del n. 386 permette di dimostrare che anche pei poligoni a lati circolari e in base alle def. estese dei nn. 409, 414 sussiste un teor. analogo, cioè: *Dati due poligoni a lati circolari* A *e* B, *i tre casi che* A *sia prevalente o equivalente o suvvalente a* B *si escludono a vicenda.*

Ma qui si presenta un fatto che non ha riscontro nel caso dei poligoni a lati rettilinei. Mentre per questi ultimi noi abbiamo potuto dimostrare, con ulteriori considerazioni, che presi due poligoni A e B qualsiansi, A sarà necessariamente o prevalente o equivalente o suvvalente a B, *fra i poligoni a lati circolari vi sono coppie di poligoni* A *e* B *tali che* A *non è nè prevalente nè equivalente nè suvvalente a* B.

Noi ora ci proponiamo appunto di precisare codesto fatto e di rendere possibile anche nel caso accennato il confronto di A e B.

416. Osservazioni. — Due poligoni equivalenti A, B (siano essi a lati rettilinei o circolari) hanno qualcosa di comune che nel linguaggio ordinario si designa come « estensione » o « superficie », talchè si dice che essi « hanno uguale estensione o superficie ».

Ora fra i poligoni a lati circolari si presenta il caso di poligoni, che, nello stesso senso intuitivo, giudichiamo « *avere ugual superficie* », sebbene essi non siano equivalenti, cioè decomponibili in parti ordinatamente uguali (sovrapponibili).

Per esempio un *cerchio* e un *triangolo* (o un altro poligono qualsiasi) non possono mai essere decomposti in parti ordinatamente uguali [1] mentre è chiaro che si possono determinare un cerchio e un triangolo *di ugual superficie*, p. es. ritagliandoli da una lamina (omogenea e di spessore costante) in modo che essi abbiano ugual peso.

D'altra parte l'intuizione ci dice che se due poligoni qualsiansi non hanno ugual superficie, uno di essi

---

[1] Come caso particolare di un teorema dimostrato dal RETHY (Matth. Ann. Bd. 38, 1891) si ha che: *Condizione necessaria affinchè un poligono a lati circolari* A *sia equivalente a un poligono a lati rettilinei* B, *si è che il contorno di* A *sia decomponibile in un certo numero di coppie di archi di circonferenza, tali che gli archi di ciascuna coppia siano uguali e volgano all'interno di* A *l'uno la convessità, l'altro la concavità.*

A codesta condizione soddisfa manifestamente il drepanoide della pagina prec.

Per una dimostrazione della impossibilità di decomporre in parti uguali (mediante segmenti di retta e archi di circonferenza) un cerchio e un poligono a lati rettilinei si veda l'art. di U. AMALDI: « *Sulla teoria della equivalenza* » nei *Colletanea* di F. ENRIQUES.

è prevalente all'altro. Ad esempio, se si ritagliano due poligoni a lati curvilinei A, B da una lamina (omogenea e di spessore costante), il caso della « uguaglianza di superficie » corrisponde all'uguaglianza di peso; e nel caso opposto uno di essi pesa più dell'altro, p. es. A più di B. E allora è intuitivo che si potranno ritagliare A e B in tanti pezzetti, in guisa che ogni pezzetto di B abbia il suo uguale fra quelli di A, e che, oltre a codesti, in A ne siano contenuti altri.

Conformemente alle precedenti osservazioni siamo condotti a porre la seguente definizione.

417. Def. — Due poligoni qualsivogliano A e B si dicono *di ugual superficie* o *equisuperficiali* se A non è nè prevalente nè suvvalente a B.

Scriveremo (cfr. n. 76)

$$A \text{ } \textit{equisuperficiale} \text{ a } B \text{ o } A = B.$$

418. Se i poligoni A e B sono equivalenti, essi sono anche equisuperficiali (n. 386); ma in generale non è vera la proposizione inversa.

Risulta tuttavia dal n. 389 che: *Poligoni a lati rettilinei equisuperficiali sono equivalenti* (cioè decomponibili in parti ordinatamente uguali).

419. È implicito nella def. del n. 417 che: *Dati due poligoni qualsiansi* A *e* B, *sarà necessariamente*

$$\text{o } A > B,$$
$$\text{o } A = B,$$
$$\text{o } A < B.$$

420. A precisare il concetto di *uguaglianza di superficie* dato al n. 417 è necessario ricorrere ancora alla intuizione.

Ad evitare considerazioni un po' prolisse noi ammetteremo senz'altro come postulati le tre seguenti pro-

posizioni, che potrebbero ridursi ad una sola, ma sono tutte evidenti all'intuizione, come risulta da osservazioni analoghe a quelle del n. 416.

421. Postulato. — *Poligoni aventi superficie uguale ad un terzo hanno superficie uguale fra loro*; cioè da

$$A = C \text{ , } B = C$$

consegue

$$A = B$$

422. Postulato. — *Somme di poligoni equisuperficiali sono equisuperficiali;* cioè da

$$A = A', \text{ } B = B'$$

consegue

$$A + B = A' + B'.$$

423. Postulato. — *Se i poligoni* A *ed* A′ *hanno ugual superficie e* B *è prevalente a* B′, *allora* $A + B$ *è prevalente ad* $A' + B'$.

424. Cor. — *Differenze di poligoni equisuperficiali sono equisuperficiali.*

Si deduce per assurdo dal n. 421 e dal n. prec.

425. Più in generale in base alla def. del n. 417 e ai postulati precedenti si dimostra che, nel confronto di due poligoni a lati qualsiansi, sussistono tutte le relazioni per cui i poligoni stessi possono riguardarsi come *grandezze* (cfr. Cap. VI).

426. Nota. — Qui da ultimo, in vista di alcune applicazioni che dovremo fare nel seguito, notiamo che dati due poligoni qualsivogliano, non aventi ugual superficie, nella loro differenza si può sempre costruire un poligono a contorno rettilineo tutto interno ad essa (n. 242); concludiamo perciò che *dati due poligoni aventi superficie disuguali, si può sempre assegnare un poligono a contorno rettilineo suvvalente alla differenza dei poligoni dati.*

ESERCIZI

I primi gruppi di esercizi qui proposti procedono, salvo la nota dell'es. 6, parallelamente agli sviluppi del testo. Tuttavia alcuni esercizi si risolvono più semplicemente, usando fin da principio del criterio di equivalenza per differenza (n. 395).

1. Se un segmento è diviso in qualsivoglia modo in tre parti, il quadrato costruito sull'intero segmento è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle tre parti e del doppio dei tre rettangoli contenuti da codeste tre parti prese a due a due nei tre modi possibili, cioè $q(a+b+c)$ equiv. $q(a)+q(b)+q(c)+2r(a,b)+2r(a,c)+2r(b,c)$.

2. Il gnomone (esagono concavo) differenza di due quadrati è equivalente al rettangolo contenuto dalla somma e dalla differenza dei lati dei quadrati, cioè

$$q(a) - q(b) \text{ equiv. } r(a-b,\ a+b).$$

3. Se un segmento è diviso in parti uguali e disuguali, il quadrato della metà del segmento è equivalente alla somma del rettangolo delle parti disuguali e del quadrato del segmento compreso fra i punti di divisione, cioè se $a > b$, $q\left(\frac{a+b}{2}\right)$ equiv. $r(a,b)+q\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

4. Se un segmento è diviso in parti uguali e disuguali, la somma dei quadrati delle parti disuguali è equivalente al doppio della somma dei quadrati della metà del segmento dato e del segmento compreso fra i punti di divisione, cioè se $a > b$, $q(a)+q(b)$ equiv. $2q\left(\frac{a+b}{2}\right)+2q\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

5. Il dodecagono regolare è equivalente al triplo del quadrato del raggio. (Se A, B, C, D sono quattro vertici consecutivi del dodecagono regolare di centro O, si completi il quadrato AODE del raggio. Basta allora dimostrare che il triangolo OBC è equivalente al pentagono concavo ABCDE. Si prenda il simmetrico E′ di E rispetto a BC e si congiungano E ed E′ con B e C, ecc.).

6. Condotti dai vertici del triangolo ABC i segmenti AA_1, BB_1, CC_1 uguali, paralleli e diretti nello stesso verso, se la CC_1 è interna alla striscia AA_1, BB_1, il parallelogramma ABB_1A_1 è equivalente alla somma dei parallelogrammi ACC_1A_1, BB_1C_1C.

Nota. — La proposizione precedente si può enunciare dicendo che il segmento AA_1, movendosi parallelamente a sè stesso coll'estremo A lungo i lati AC, BC descrive due parallelogrammi, la cui somma è equivalente al parallelogramma che esso descrive movendosi parallelamente a sè stesso coll'estremo A lungo il terzo lato AC.

Se CC_1 non fosse interno alla striscia AA_1, BB_1, bisognerebbe considerare anzichè la somma dei due parallelogrammi ACC_1A_1 CBB_1C_1, la loro differenza.

Introducendo opportune convenzioni circa il modo secondo cui i vari parallelogrammi debbono essere sommati o sottratti la seconda del senso in cui si muove il segmento considerato, a proposizione precedente si estende al caso di un segmento che si muova parallelamente a sè stesso, mantenendo un suo estremo sul perimetro di un qualsiasi poligono (convesso o concavo).

7. Teorema di Pappo. — Un parallelogramma ACDE costruito su di un lato AC di un triangolo ABC, il cui vertice C sia interno alla striscia AE, BD, è equivalente alla somma di due parallelogrammi qualsiansi, costruiti sui lati AC, BC e i cui lati opposti passino rispettivamente per E, D. [Si prolunghino codesti lati opposti ad AC, BC fino ad incontrarsi in F, e congiunto C con F, ecc.].

Nota. — Se l'angolo $\widehat{ACB}$ è retto e i tre parallelogrammi sono quadrati, si ha una dimostrazione del teorema di Pitagora, non molto diversa dalla seconda dimostrazione data da noi al n. 363.

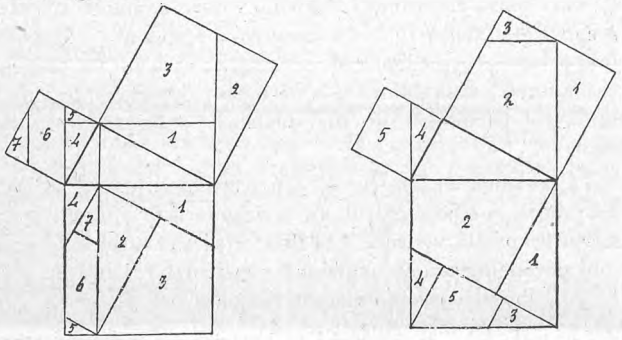
8. In un qualsiasi triangolo ABC, il rettangolo di un lato AB e della proiezione di un altro lato AC su AB è equivalente al rettangolo di AC e della proiezione di AB su AC. [Se BB_1, CC_1 sono le altezze abbassate da B, C sui lati opposti, si prolunghino BB_1, CC_1 rispettivamente di $B_1M = AC$, $C_1N = AB$ e si completino i rettangoli AB_1MH, AC_1NK. Condotta da H la parallela alla AB fino ad incontrare la BM in P e da K la parellela ad AC fino ad incontrare la CN in Q si confrontino i due rettangoli coi parallelogrammi ABPH, ACQK, ecc.].

9. Dedurre dal teorema precedente i teoremi dei nn. 365 e 366.

10. Trasformare un parallelogramma in un altro di cui sono dati i due lati. Discussione. [Fra i parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza del dato si consideri quello che ha uno dei lati prefissati, e poi ecc.].

11. Trasformare un parallelogramma dato in una losanga di dato lato. Discussione. [Cfr. es. prec.].

12. Verificare sperimentalmente colla carta le due dimostrazioni del teorema di PITAGORA che sono suggerite dalle annesse figure:



13. Se le diagonali di un quadrangolo si incontrano perpendicolarmente, la somma dei quadrati di due lati opposti è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due [n. 363].

14. Costruire un quadrato equivalente alla somma di più quadrati dati [n. 363].

15. Costruire un quadrato equivalente alla metà di un altro [n. 363].

16. Dividere un segmento dato in tre parti, tali che le due estreme siano uguali e che la somma dei quadrati di queste sia equivalente al quadrato della parte di mezzo. [In virtù dell'inverso del teorema di PITAGORA si può enunciare il problema: costruire un triangolo rettangolo isoscele di dato perimetro. Si immagini per ciò risoluto il problema; e prolungata l'ipotenusa da una parte e dall'altra di un segmento uguale al cateto, si congiungano gli estremi di questi segmenti col vertice dell'angolo retto. Nel triangolo isoscele che così si ottiene quanto valgono gli angoli alla base?].

17. Congiungendo un qualsiasi punto interno ad un parallelogramma coi vertici, si ottengono quattro triangoli tali che la somma di due fra essi non adiacenti è equivalente alla somma degli altri due [Si conducano pel punto le parallele ai lati ecc.].

18. Congiungendo un punto interno ad un trapezio ed equidistante dai lati paralleli coi vertici del trapezio si ottengono quattro triangoli tali che le somme delle due coppie di triangoli opposti sono equivalenti. (Si ricordi che la congiungente i punti medi dei due lati non paralleli è uguale alla semisomma ecc.; [es. 41 pag. 160]).

Si noti il caso in cui il punto appartiene ad un lato del trapezio.

19. Il parallelogramma che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrangolo è equivalente alla metà del quadrangolo. [Si congiungano due vertici opposti del quadrangolo e si confronti ciascuno dei triangoli, in cui il quadrangolo resta diviso, colla parte di parallelogramma da esso contenuta ecc.].

20. In un trapezio i due triangoli che hanno ciascuno per base uno dei due lati non paralleli e per vertici il punto medio del lato opposto sono equivalenti. [Si congiungano i punti medi dei due lati non paralleli].

21. Dato un esagono regolare, i cinque segmenti, che congiungono un vertice determinato di esso cogli altri vertici e coi punti medi dei due lati, che formano il vertice opposto al prefissato, dividono l'esagono in sei parti equivalenti. [Se

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ è l'esagono ed A_1 è il vertice prefissato si osservi che il lato A_2A_3 è parallelo alla diagonale A_1A_4 ed uguale alla metà di essa].

22. La somma di più triangoli aventi la stessa base è equivalente al triangolo che ha la medesima base e l'altezza uguale alla somma delle altezze dei triangoli dati.

23. La somma delle distanze di un punto interno ad un poligono equilatero dai suoi lati è costante. [Congiunto il punto coi vertici del poligono, questo rimane decomposto in tanti triangoli di ugual base, la cui somma è equivalente per una parte al poligono e per l'altra (es. prec.) ad un triangolo che ha per base il lato del poligono, ecc.] Si esamini quel che accade per un punto esterno.

24. Pel punto medio di ciascuna delle diagonali di un quadrangolo qualsiasi si conduca la parallela all'altra diagonale e si congiunga il punto d'incontro di codeste due parallele con due vertici opposti. I due segmenti che così si ottengono dividono il quadrangolo dato in due quadrangoli equivalenti.

25. Trasformare un triangolo in un altro, che abbia la medesima base e l'angolo opposto uguale ad un angolo dato [nn. 323, 363].

26. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele di cui è data l'altezza o la base.

27. Trasformare un triangolo dato in un triangolo di cui è dato un lato ad uno degli angoli adiacenti [n. 378].

28. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele di cui i lati uguali siano uguali ad un segmento dato.

29. Trasformare un triangolo dato in un triangolo che abbia un vertice comune col primitivo e un lato sopra una retta data.

30. Trasformare un triangolo in un rombo di lato dato.

31. Trasformare un parallelogramma in un altro equivalente, avente due lati consecutivi uguali rispettivamente a due segmenti dati.

32. Fra i triangoli o i parallelogrammi, che hanno due lati (consecutivi) uguali a due segmenti dati è *massimo* (cioè

prevalente a tutti gli altri) quello in cui codesti due lati sono perpendicolari.

33. Fra i triangoli che hanno una data base e un dato angolo opposto è massimo l'isoscele.

34. Fra i triangoli aventi una stessa base ed equivalenti ad un triangolo dato, l'isoscele ha il perimetro minimo.

35. Fra i triangoli aventi una medesima base e in cui la somma degli altri due lati è data, è massimo il triangolo isoscele. [Si confronti il perimetro di codesto triangolo con quelli dei triangoli, che hanno la medesima base e la medesima altezza].

36. Fra tutti i triangoli di dato perimetro l'equilatero è massimo.

37. Fra i triangoli aventi un angolo dato, compreso fra due lati di cui è data la somma, il triangolo isoscele è massimo: la relativa base è minima.

38. Fra i triangoli aventi un angolo e il perimetro dati, il triangolo isoscele è massimo e la base è minima.

[Si osservi che, se $\widehat{A}$ è l'angolo dato, i lati dei triangoli aventi il dato perimetro sono tangenti alla circonferenza che tocca i due lati di $\widehat{A}$ ad una distanza dal vertice uguale alla metà del perimetro. Si confronti poi il triangolo isoscele con uno qualsiasi dei triangoli isoperimetri].

39. Fra i poligoni ad n lati aventi un dato perimetro, quello regolare è massimo. [Si dimostra prima che due lati consecutivi qualsiansi sono uguali (es. 35) e poi si prova per assurdo che ogni retta, che divida in due parti uguali il perimetro, divide anche la superficie in due parti equivalenti. Se poi si tratta di un poligono di un numero pari di lati, la diagonale congiungente due vertici opposti deve essere diametro di una circonferenza su cui deve trovarsi ogni altro vertice (es. 32 e n. 323). Nel caso invece di un poligono di un numero dispari di lati si costruiscano un poligono regolare ad n lati, di ugual perimetro e il poligono regolare a $2n$ lati, iscritto nello stesso cerchio, e si aggiunga la differenza di questi due poligoni al poligono primitivo].

40. Di due poligoni regolari aventi ugual perimetro è prevalente quello che ha il maggior numero di lati.

41. Applicando il criterio dell'equivalenza per differenza si dimostri il teorema dell'equivalenza di due parallelogrammi di ugual base e di uguale altezza (n. 357) evitando di far uso del postulato di ARCHIMEDE.

42. Le mediane di un triangolo lo dividono in sei triangoli equivalenti. [Si considerino le coppie di triangoli che hanno come base comune un lato del triangolo e come vertici i punti medi degli altri due].

43. Il quadrato dell'altezza del triangolo equilatero è triplo del quadrato della metà del lato. [Si applichi il teorema di Pitagora].

44. La somma dei quadrati di due lati di un triangolo è equivalente al doppio della somma del quadrato della metà del terzo lato e del quadrato della mediana ad esso corrispondente [nn. 365, 366].

45. Determinare il luogo dei punti A, per cui la somma dei quadrati delle distanze da due punti fissi B e C è equivalente ad un quadrato dato [Cfr. es. prec.].

46. Costruire un triangolo dati un lato, l'altezza corrispondente e la somma dei quadrati degli altri due lati. [Cfr. es. prec.].

47. La somma dei quadrati dei lati di un triangolo è equivalente al triplo della somma dei quadrati dei segmenti che congiungono i vertici col baricentro del triangolo.

48. La differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è equivalente al doppio del rettangolo del terzo lato e della proiezione della corrispondente mediana su di esso.

49. Il luogo geometrico dei punti, per cui la differenza dei quadrati delle distanze da due punti fissi è equivalente a un quadrato dato, è una retta perpendicolare alla retta che congiunge i due punti fissi. [Cfr. es. prec.]

50. Costruire un triangolo dati un lato, l'angolo opposto e la differenza dei quadrati degli altri lati. [Cfr. es. prec.].

51. Dati due punti A, B determinare il luogo dei punti P tali che la somma di m volte il quadrato di PA e di n volte il quadrato di PB sia equivalente ad un quadrato dato. [Il luogo è una circonferenza che ha per centro il punto D del segmento AB per cui è $n\mathrm{AD} = m\mathrm{DB}$].

Nota. — Questo risultato si estende al caso di più punti,

passando da due a tre, da tre a quattro, ecc. e dati più punti A_1, A_2, A_3, ... e altrettanti numeri m_1, m_2, m_3, ... si determina il luogo dei punti P per cui la somma di m_1 volte il quadrato di A_1P, di m_2 volte il quadrato di AP, di m_3 volte il quadrato di A_3P, ... è equivalente ad un quadrato dato.

52. In ogni quadrangolo la somma dei quadrati dei lati è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali, aumentata di quattro volte il quadrato della congiungente i punti medi delle diagonali.

Si noti il caso particolare dei parallelogrammi.

53. Se la somma dei quadrati dei lati di un trapezio è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali, il trapezio è un parallelogramma.

54. In un trapezio (convesso) la somma dei quadrati delle diagonali è equivalente alla somma dei quadrati dei lati non paralleli, aumentata del doppio rettangolo delle basi, e reciprocamente.

55. (Teorema di VARIGNON). — Se P è un punto del piano del parallelogramma ABCD, il triangolo PBD è equivalente alla somma o alla differenza dei triangoli PAB, PBC. Distinguere i due casi.

56. Dividere in n parti equivalenti un parallelogramma per mezzo di rette parallele ad un lato, e un triangolo per mezzo di rette uscenti da un vertice.

57. Dividere un poligono in due parti equivalenti per mezzo di una spezzata avente un estremo in un vertice prefissato. [Se AB .... H è il poligono ed A è il vertice prefissato, si conduca la diagonale BH e da ciascuno degli altri vertici si conduca la parallela a BH fino ad incontrare il contorno: si divida per metà il triangolo ABH e ciascuno dei trapezi ecc.].

58. Dividere un trapezio in n trapezi equivalenti fra loro e aventi la medesima altezza del dato.

59. Dividere un triangolo in n parti fra loro equivalenti per mezzo di rette uscenti da un punto di un lato. [Se ABC è il triangolo e P è il punto prefissato su BC, si divida BC in n parti uguali, p. es. in tre BL, LK, KC, e congiunto P con A si conducano da L, K le parallele a PA fino ad incon-

trare il perimetro del triangolo in X, Y rispettivamente. Le PX, PY dividono il triangolo in tre parti equivalenti. Si considerino invero i triangoli ABL, ALK, AKC]. Si eseguisca effettivamente la divisione nel caso di $n=4$ e di $n=5$.

60. Preso un punto P dentro un triangolo ABC e congiuntolo con un vertice, p. es. C, condurre per P un segmento che insieme con PC divida il triangolo in due parti equivalenti. [Se C_1 è il punto medio di AB, si conduca per C la parallela alla PC_1 fino ad incontrare in X la AB e si conduca la PX].

61. Congiunto un punto P interno ad un triangolo ABC con un punto Q di un lato, p. es. di AB, si conduca per P un altro segmento che vada al contorno, il quale, insieme con PQ, divida il triangolo in due parti equivalenti. [Se C_1 è il punto medio di AB, ed S è il punto d'incontro di CC_1 colla parallela per Q alla C_1P, si conduca per S la parallela alla PC fino ad incontrare in X il contorno del triangolo. Il segmento PX è il segmento cercato].

62. Dividere un quadrangolo (o un pentagono) in due parti equivalenti per mezzo di una retta uscente da un vertice dato.

63. Dividere un quadrangolo (o pentagono) in due parti equivalenti per mezzo di una retta uscente da un punto dato di un lato.

64. Se in un triangolo il quadrato dell'altezza abbassata su di un lato è equivalente al rettangolo dei due segmenti in cui codesto lato è diviso dal piede dell'altezza, il triangolo è rettangolo (ed ha come angolo retto quello dal cui vertice si è abbassata l'altezza).

65. Condotte ad un cerchio le tangenti agli estremi di un diametro, il segmento di ogni altra tangente, compreso fra le due prime, è diviso dal punto di contatto in due parti tali che il loro rettangolo è equivalente al quadrato del raggio.

66. Dividere un segmento dato in due parti, il cui rettangolo sia equivalente ad un quadrato dato. Discussione.

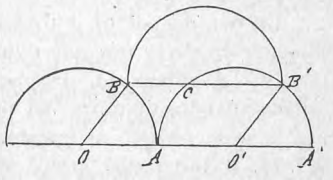
67. Trasformare un triangolo in un triangolo rettangolo isoscele. [Che figura costituisce un triangolo rettangolo insieme col suo simmetrico rispetto alla base?].

68. Sopra una retta determinare un punto tale che la differenza dei quadrati delle distanze di esso da due punti dati della retta sia equivalente ad un quadrato assegnato. [Se A e B sono i due punti dati e, supposto risoluto il problema, indichiamo con X il punto cercato e con B′ il simmetrico di B rispetto ad X, avremo, ricordando l'es. 2, che il rettangolo di AB e AB′ deve essere equivalente al quadrato assegnato. Quindi ecc.].

69. Se sopra un segmento dato preso come ipotenusa, si costruisce un triangolo rettangolo in modo che la proiezione di un cateto sia la parte aurea dell'ipotenusa, l'altro cateto è uguale a codesta parte.

70. Quando di un segmento è determinata la sezione aurea, la parte minore è la sezione aurea della parte maggiore.

71. Date due circonferenze uguali O, O′, tangenti (esternamente) in A, si conducano in esse due raggi OB, O′B′, fra loro paralleli, e da una stessa banda rispetto alla retta dei centri; e sul segmento BB′ come diametro si descriva la semicirconferenza che cade rispetto alla BB′ da banda opposta di A. Dicesi *drepanoide* il triangolo a lati circolari AB′B.



Dimostrare che la superficie del drepanoide è uguale a quella del parallelogramma OO′B′B (cfr. n. 413).

72. Se due corde di un cerchio si segano, il rettangolo contenuto dai due segmenti in cui è divisa l'una è equivalente al rettangolo delle due parti dell'altra. [Abbassare dal centro le perpendicolari sulle due corde, si applichi a ciascuna di queste l'esercizio n. 3, ecc.].

73. Se i due triangoli ABC, A′B′C′ hanno gli angoli ordinatamente uguali, il rettangolo di AB, B′C′ è equivalente al

rettangolo di A'B', BC. Così i rettangoli di AB, C'A', e di BC, C'A' sono rispettivamente equivalenti ai rettangoli di A'B', CA e di B'C', CA. [Sul prolungamento di AB, CB si prendano i segmenti BC_1, BA_1 uguali rispettivamente a B'C', A'B'. I punti A, C, A_1, C_1 sono su di una circonferenza (n. 323). Si ricordi quindi l'es. prec.].

74. Se da un punto esterno ad un cerchio si conducono ad esso due secanti, il rettangolo di una secante e della sua parte esterna è equivalente al rettangolo dell'altra secante e della sua parte esterna [Vedi es. prec.].

75. Se da un punto esterno ad un cerchio si conducono una tangente ed una secante, il rettangolo di questa e della sua parte esterna è equivalente al quadrato della tangente.

Def. Dato un cerchio e un punto A, si conduca per A una retta che intersechi la circonferenza in due punti B e C (corde o secanti secondo che A è interno o esterno). Dicesi *potenza* di A rispetto al cerchio la superficie del rettangolo di AB, AC la quale non varia al variare della corda o secante BC.

Per non introdurre restrizioni conviene di considerare la potenza di un qualsiasi punto della circonferenza come una *superficie nulla.*

La potenza di un punto esterno alla circonferenza è data. dal quadrato della tangente condotta da esso alla circonferenza

76. La potenza di un punto è uguale alla differenza fra i quadrati della distanza del punto considerato dal centro del cerchio e del raggio di questo.

77. Il luogo dei punti che hanno una stessa potenza rispetto a due circonferenze date, e che sono insieme esterni od interni rispetto ad entrambe (o comuni ad esse), è una retta perpendicolare alla retta dei centri.

Considerare in modo speciale il caso di due circonferenze che si segano e quello di due circonferenze che si toccano.

Def. — La retta or ora accennata si dice *asse radicale* delle due circonferenze date.

78. Costruzione della circonferenza che passa per un punto dato ed ha con una circonferenza data un dato asse radicale.

Def. — L'insieme di una circonferenza data e di tutte le circonferenze che hanno con essa un medesimo asse radicale dicesi *fascio* di circonferenze.

Per ogni punto del piano passa una circonferenza ed una sola di un fascio.

Tutte le circonferenze passanti per due punti costituiscono un fascio (ma non reciprocamente).

79. Date tre circonferenze, i cui centri non siano in linea retta, esiste un punto, che ha rispetto ad esse la medesina potenza ed è ugualmente esterno od interno (oppure è comune alle tre circonferenze)

Def. — Codesto punto si dice *centro radicale* delle tre circonferenze.

80. Costruzione della circonferenza, che passa per due punti dati e ha con due date circonferenze un centro radicale dato.

Def. — L'insieme di due circonferenze e di tutte le circonferenze che hanno con le date un centro radicale dato dicesi *rete* di circonferenze.

Per ogni coppia di punti passa una circonferenza ed una sola della rete.

81. Costruzione della circonferenza comune a un fascio e a una rete; cioè, costruzione della circonferenza che ha con una circonferenza data un asse radicale dato e con altre due circonferenze date un centro radicale dato.

82. Condizione necessaria e sufficiente, affinchè due circonferenze si taglino ortogonalmente, si è che la potenza del centro dell'una rispetto all'altra sia uguale alla superficie del quadrato del raggio della prima.

83. Il luogo dei centri delle circonferenze che tagliano ortogonalmente due circonferenze date è la parte dell'asse radicale esterna alle due circonferenze, se queste si segano, ed è l'intero asse radicale se le due circonferenze sono esterne l'una all'altra.

84. Se sopra due semirette uscenti da un punto P si prendono rispettivamente due coppie di segmenti PA, PB e PC, PD, per modo che il rettangolo di PA, PB sia equivalente al rettangolo di PC, PD, i quattro punti A, B, C, D appartengono ad una circonferenza. [Per assurdo dagli es. 74, 76].

85. Se si hanno due terne di segmenti a, b, c e a', b', c' tali che siano equivalenti i rettangoli di a, b e a', b'; e di a, c e a', c', saranno equivalenti anche i rettangoli di b, c e b', c'. [Sopra due semirette uscenti da un punto P si stacchino i segmenti $PA = a$, $PB = b$, $PB = c$, e rispettivamente $P'A' = a'$, $PB' = b'$, $PC' = c'$. Tenendo conto dell'enunciato precedente si confrontino gli angoli $P\widehat{BB'}$, $A\widehat{CC'}$, paragonandoli all'angolo $A\widehat{A'B'}$. Si stacchino quindi sopra le due semirette nominate i segmenti $PB'_1 = PB'$, $PB_1 = PB$, e dal confronto degli angoli $P\widehat{B_1B_1'}$, $P\widehat{BB'}$ si deduca che i punti B_1, B', C, C', stanno sopra una circonferenza].

86. Se due raggi uscenti da un punto P sono incontrati da due rette parallele rispettivamente nei punti A, C e B, D (distinti da P), i rettangoli dei segmenti PA, PD e PC, PB sono equivalenti. [Presi rispettivamente sopra le due semirette i segmenti $PD' = PD$ e $PB' = PB$, si provi che il quadrangolo ACB'D' ha gli angoli opposti supplementari e perciò è iscrittibile in un cerchio].

87. Si estenda la proposizione precedente al caso in cui due rette passanti per un punto B vengano segate con due parallele da parti opposte di P.

88. Si enunci e si dimostri il teorema che inverte le due proposizioni precedenti.

89. Se due triangoli hanno i lati ordinatamente paralleli, le rette congiungenti i vertici opposti passano per uno stesso punto o sono parallele. (Teorema dei *triangoli omotetici*).

90. Se due triangoli ABC, A'B'C' sono tali che le rette AA', BB', CC' passino per un medesimo punto, e i lati AB, BC sono paralleli rispettivamente ad A'B', B'C' anche i terzi lati AC, A'C' sono paralleli. (Per assurdo).

Nota. — Le proposizioni contenute nei precedenti esercizi permettono di stabilire direttamente tutti i teoremi della teoria dell'equivalenza, a cui si giunge coll'uso delle proporzioni fra segmenti (cfr. Cap. VI). Questo procedimento è stato ideato da G. Vailati [1].

---

[1] *Di un modo di riattaccare la teoria delle proporzioni fra segmenti a quella dell'equivalenza.* — Comunicazioni al II Congresso di *Mathesis* Livorno, 1901; Scritti, pagg. 399-405.

VI.

TEORIA DELLE PROPORZIONI

Grandezze geometriche.

427. Pei *segmenti*, per gli *angoli*, per gli *archi di una stessa circonferenza*, e per *i poligoni* (a lati rettilinei e circolari) abbiamo posto i concetti di *uguaglianza* e *disuguaglianza* e abbiamo definito la *somma*, in modo ha riconoscere in ciascuna di codeste classi di figure le proprietà che definiscono l'ordinario concetto della **grandezza.**

Perciò appunto i segmenti, gli angoli, gli archi di una circonferenza, i poligoni si dicono costituire altrettante *classi di grandezze* (*geometriche*).

Le grandezze di una medesima classe si dicono fra loro *omogenee*: il confronto di uguaglianza o disuguaglianza non è possibile se non fra grandezze omogenee, e perciò parlando di grandezze che si confrontano, spesso si sottintende la parola « omogenee ».

Le grandezze di cui non sia designata la specie verranno denotate genericamente con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino; continueremo invece ad usare le lettere minuscole grassette (***a***, ***b***, . . .) quando ci si riferisca in modo particolare ai segmenti.

Se la grandezza A è maggiore o uguale o minore della grandezza B, scriveremo rispettivamente

$$A > B \text{ o } A = B \text{ o } A > B.$$

La somma delle grandezze A, B, ..., K si indicherà con

$$A + B + ... + K,$$

e il multiplo o il summultiplo di A secondo m con mA o $\frac{A}{m}$ rispettivamente: infine la differenza delle due grandezze A e B, di cui la prima sia maggiore, si designerà con $A - B$.

428. Per ciascuna delle classi di grandezze suindicate, i concetti di somma, di uguaglianza e di disuguaglianza assumono un significato geometrico particolare.

Ricordando per ciascuna classe il significato fissato, si verificano evidentemente in ogni caso le proprietà seguenti che si possono considerare come attributi delle grandezze in genere.

1) Di due grandezze omogenee A, B,
$$\text{o } A > B, \text{ o } A = B, \text{ o } A < B.$$
2) Se $A > B$, $B < A$ e viceversa.
3) Se $A = B$ e $B = C$ è anche $A = C$.
4) Se $A > B$ e $B > C$, è $A > C$.
5) $A + B > A$.
6) Se $C > A$ vi è una grandezza B (che si indica con $C - A$) tale che $C = A + B$.
7) Se $A = A'$, $B = B'$
$$A + B = A' + B',$$
e se $A > B$ è anche $A' > B'$ e
$$A - B = A' - B'.$$
8) $A + B = B + A$.

9) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

Segue di qui, per qualsiasi intero m:

$$mA + mB = m(A + B)$$
$$mA - mB = m(A - B), \text{ supposto } A > B.$$

Inoltre: se $A > B$, è, per qualsiasi intero m, $mA > mB$; e, se per un particolare numero intero m è $mA > mB$, si ha anche $A > B$.

10) Se A e B sono due grandezze omogenee, esiste sempre un intero m così grande che sia
$$mA > B.$$

Questa ultima proposizione (nota sotto il nome di proposizione di ARCHIMEDE) è stata ammessa come postulato pei segmenti (n. 37) e dimostrata pei poligoni a lati rettilinei (n. 392), onde segue che essa sussiste pure pei poligoni curvilinei (n. 425): così pure è stata ammessa per gli angoli (nn. 66, 67) e dedotta per gli archi n. 170.

429. Considereremo nel seguito le grandezze geometriche dette innanzi, cosicchè, parlando di grandezze, intenderemo sempre si tratti di figure di una delle classi precedenti.

Rapporto di due grandezze.

430. Date due grandezze omogenee A e B, supponiamo che esse ammettano una *multipla comune*, cioè che esistano due numeri p e q, tali che sia
$$qA = pB.$$

Diremo allora che il *rapporto* di A a B è $\frac{p}{q}$ e, parimente, che il *rapporto* di B ad A è $\frac{q}{p}$.

Se A, B hanno una coppia di multipli uguali, ne hanno infinite altre; ma qualunque coppia si consideri, si arriva sempre al medesimo rapporto. Infatti se

$$qA = pB$$
$$sA = rB$$

abbiamo anche

$$rqA = rpB$$
$$psA = prB$$

e quindi

$$rqA = psA.$$

Di qui risulta l'uguaglianza fra numeri

$$rq = ps$$

ossia

$$\frac{r}{s} = \frac{p}{q}.$$

431. Le grandezze A, B abbiano una multipla comune

$$qA = pB.$$

Supposto che B si sappia dividere in q parti uguali, risulta senz'altro che si saprà dividere in q parti uguali anche pB e avremo

$$(1) \qquad A = \frac{pB}{q} = p\frac{B}{q};$$

il che si scriverà anche

$$A = \frac{p}{q}B,$$

leggendo: « A uguale ai p q^{mi} di B ».

Dalla (1) segue

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q}$$

e quindi esiste una *summultipla comune* di A e B, della quale A e B sono multiple rispettivamente secondo p e q.

Viceversa, se esiste una summultipla comune C di A e B per modo che sia

$$A = pC, \quad B = qC,$$

si deduce di qui l'esistenza di una multipla comune

$$qA = pB$$

e si ha che il rapporto di A a B è $\frac{p}{q}$.

432. Nota. — La possibilità di dividere in un numero qualsiasi di parti uguali una grandezza geometrica, risulta pei segmenti e pei poligoni dalle costruzioni dei nn. 303, 391. Per gli angoli, gli archi, i settori circolari, abbiamo appreso al num. 165 a dividerli in 2, 4, 8, . . . , 2^n, . . . parti uguali. Quanto alla loro divisibilità in generale si veda, più avanti il Cap. VII.

433. La def. di rapporto di due grandezze, data al n. 430, implica una relazione di fatto fra le due grandezze date, cioè la esistenza di una loro multipla comune.

Ora esistono coppie di grandezze A e B, che non ammettono nessuna multipla comune.

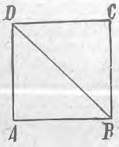
Ad esse non si potrà quindi applicare la definizione del n. 430.

Due grandezze si dicono *commensurabili* o *incommensurabili* secondo che ammettono o no una multipla comune.

434. Su questo argomento avremo occasione di tornare più avanti (Cap. VIII), ma converrà mostrare sin d'ora con un esempio l'esistenza di coppie di grandezze incommensurabili, cioè tali che non ammettono un multiplo comune.

Dato uu quadrato ABCD e condottane una diagonale, p. es. la BD, diciamo che i segmenti AB e BD non possono ammettere un multiplo comune.

Esistano infatti, se è possibile, due numeri m e n tali che sia



$$nAB = mBD;$$

si avrà allora che

$$\frac{AB}{m} = \frac{BD}{n};$$

cioè, diviso AB in m parti uguali e BD in n parti uguali, le parti di AB risulteranno uguali alle parti di BD.

Condotte nel quadrato di AB le parallele ai lati per i punti di divisione in m parti uguali di due lati consecutivi, otterremo una decomposizione del q (AB) in m^2 quadrati uguali.

Analogamente si otterrà una decomposizione del q (BD) in n^2 quadrati, uguali fra loro e a quelli in cui è decomposto il q (AB). Ma poichè il triangolo ABD è rettangolo ed isoscele, il q (BD) è equivalente (n. 363) al doppio del q (AB), ed essendo il q (BD) e il q (AB) decomposti rispettivamente in n^2, m^2 quadrati tutti uguali fra loro, concludiamo che deve sussistere l'identità aritmetica,

$$n^2 = 2m^2,$$

la quale è manifestamente assurda, perchè, mentre il secondo membro contiene il fattore primo 2 una volta o un numero dispari di volte, il primo membro non lo può contenere che un numero pari o nullo di volte.

435. Date due grandezze A e B tali che il rapporto della prima alla seconda sia $\frac{p}{q}$, in modo che sia

$$qA = pB,$$

consideriamo altre due multiple quali si vogliono di esse nA ed mB.

Se è

$$nA > mB$$

avremo ancora, prendendo i p^{mi} multipli di nA ed mB (*n.* 428,9)

$$(1) \qquad pnA > pmB;$$

e, analogamente, in virtù della uguaglianza di qA e pB,

$$(2) \qquad qmA = pmB.$$

Dalle relazioni (1), (2) risulta

$$pnA > qmA;$$

onde si ricava la disuguaglianza fra numeri

$$pn > qm,$$

ossia

$$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}.$$

Similmente si trova che se fosse

$$nA < mB,$$

si avrebbe

$$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}.$$

Cosicchè possiamo enunciare il

Teor. — *Se le grandezze* A, B *sono commensurabili, il rapporto di* A *a* B (n. 430) *è maggiore, uguale o minore del numero (intero* o *frazionario)* $\frac{m}{n}$ *secondo che è*

$$nA > mB,$$

o

$$nA = mB,$$

o

$$nA < mB,$$

e inversamente.

436. Se A e B invece sono incommensurabili, non esiste un numero (intero o frazionario) che esprima il rapporto dell'una all'altra.

Si possono tuttavia confrontare le multiple di A colle multiple di B, e, in accordo col teor. del numero prec., *conveniamo di dire che il rapporto di* A *a* B *è maggiore o minore di un numero qualsiasi* $\frac{m}{n}$ *secondo*

che è

$$nA > mB$$

o

$$nA < mB.$$

Così in particolare si dirà che il rapporto di A a B è maggiore o minore di 1 secondo che è $A > B$ o $A < B$.

Nota. — Si avverta, per la legittimità della definizione precedente, che se

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'},$$

la disuguaglianza

$$nA > mB$$

porta di conseguenza

$$n'A > m'B,$$

Infatti dalla relazione $n\,A > m\,B$ si deduce $n'nA > n'mB$; e siccome è $n'm = nm'$, avremo $n'nA > m'nB$ e quindi $n'A > m'B$.

Coppie di grandezze proporzianali.

437. Le considerazioni relative al rapporto di due grandezze conducono a due ordini di problemi: 1) confronto dei rapporti di coppie di grandezze (proporzionalità); 2) determinazione effettiva del rapporto di due grandezze (teoria della misura).

Cominciamo ad occuparci qui della teoria delle proporzioni.

438. Siano A e B due grandezze omogenee e commensurabili, e sia $\frac{p}{q}$ il rapporto della prima alla seconda talchè si abbia

$$qA = pB.$$

Se C, D sono altre due grandezze omogenee fra loro (ma non necessariamente alle A, B) ed aventi il medesimo rapporto $\frac{p}{q}$, cosicchè sia anche

$$qC = pD,$$

si dirà che « le grandezze A, B, C, D sono in *proporzione* » od ancora che « le due coppie A, B e C, D sono *proporzionali* ».

Nota. — Se le coppie di grandezze commensurabili A, B e C, D sono in proporzione, ogni numero (intero o frazionario) $\frac{m}{n}$ sarà simultaneamente maggiore o uguale o minore tanto del rapporto di A a B quanto del rapporto di C a D. Avremo quindi, pel teor. del n. 435,

$$\begin{array}{lll} mC > nD & \text{se} & mA > nB, \\ mC = nD & \text{se} & mA = nB, \\ mC < nD & \text{se} & mC < nB, \end{array}$$

qualunque sia la coppia m, n di numeri interi.

439. Quando invece si tratta di coppie di grandezze incommensurabili, il confronto non si può più ridurre alla semplice constatazione dell'uguaglianza (o disuguaglianza) aritmetica dei loro rapporti, perchè in tal caso non sappiamo più esprimere il rapporto di ciascuna coppia mediante un numero (intero o frazionario).

Sappiamo per altro, in base al n. 436, decidere per ogni coppia di grandezze incommensurabili se il loro rapporto sia maggiore o minore di un qualsiasi numero (intero o frazionario); ed è naturale

di chiamare uguali i rapporti di due coppie A, B e C, D, quando per ogni possibile numero (intero o frazionario) $\frac{m}{n}$, accada sempre che quei due rapporti siano entrambi maggiori o entrambi minori di $\frac{m}{n}$.

Si è così condotti alla def. del n. seg., che è applicabile anche alle coppie di grandezze incommensurabili, mentre nel caso delle grandezze commensurabili è in accordo colla def. del n. 438 (cfr. la Nota di quel n.).

Per brevità di linguaggio, diremo *equimultiple* (o *equisummultiple*) secondo m di più grandezze A, B, ... le multiple mA, mB.... (o le summultiple $\frac{A}{m}, \frac{B}{m}$,....) di quelle grandezze secondo il medesimo numero m.

440. Def. — Date in un certo ordine quattro grandezze, di cui la prima e la terza siano omogenee rispettivamente alla seconda e alla quarta, si dice che esse *sono in proporzione* o che le due *coppie* date sono *proporzionali* quando, prese due equimultiple SECONDO UN QUALSIASI NUMERO della prima e della terza, e due altre equimultiple, pure SECONDO UN QUALSIASI NUMERO della seconda e della quarta, si ha sempre che la multipla della terza è maggiore, uguale o minore della multipla della quarta, secondochè l'equimultipla della prima è rispettivamente maggiore, uguale o minore dell'equimultipla della seconda.

Se si indicano con A, B e C, D le due coppie considerate di grandezze omogenee, la definizione dice che per ogni possibile coppia di numeri interi e positivi m, n, deve essere

$$mC > nB \text{ se } mA > nD$$
$$mC = nD \text{ se } mA = nB$$
$$mC < nD \text{ se } mA < nB.$$

441. Per indicare che le quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione, si scrive

$$A : B :: C : D \quad \text{o} \quad A : B = C : D$$

e si legge « A sta a B come C sta a D ».

Nella proporzione

$$A : B = C : D$$

le quattro grandezze A,B,C,D si dicono *termini;* A e C si dicono gli *antecedenti*, B e D i *conseguenti*, e talvolta A e C si chiamano *omologhi* di B e D rispettivamente; infine A e D, B e C diconsi rispettivamente *estremi* e *medi.*

Se $A : B = C : D$,

D si dice *quarta proporzionale* dopo A, B, C.

La proporzione

$$A : B = B : C,$$

in cui i medi sono uguali (per il che si richiede che le tre grandezze A, B, C siano omogenee) si dice *proporzione continua.* In tal caso C si dice *terza proporzionale* dopo A, B, C, e B si dice *media proporzionale* fra A e C.

442. Risulta in particolare dalla definizione di proporzione che se A, B, C, D sono quattro grandezze proporzionali, secondochè A è maggiore, uguale o minore di B, è anche C maggiore, uguale o minore di D.

Se A e B sono commensurabili, ed è precisamente, per certi due determinati numeri p e q,

$$qA = pB,$$

si può senz'altro concludere che è anche

$$qC = pD.$$

Se invece A e B sono incommensurabili, sono tali anche C e D.

443. Così, in base alla definizione, si ha senza altro, che, date due grandezze omogenee qualsiansi A e B, si ha, per ogni coppia di numeri interi p e q,

$$A : B = \frac{p}{q}A : \frac{p}{q}B.$$

E se A, B sono due grandezze qualsiansi, anche non omogenee, e p, q sono due numeri dati, si ha

$$A : \frac{p}{q}A = B : \frac{p}{q}B.$$

Proporzioni dedotte da una data.

444. Mostreremo ora come, insieme con ogni proporzione, ne sussistano altre, che si diranno *dedotte* dalla data.

Anzitutto, come immediata conseguenza della definizione, abbiamo che se

$$A : B = C : D$$

si ha anche per qualsiasi coppia di numeri interi p e q,

$$pA : pB = qC : qD.$$
$$pA : qB = pC : qD.$$

Di altre proporzioni che si possono dedurre da una data trattano i teoremi dei num. 445, 446, 447.

445. Teor. — *Se*

$$A : B = C : D,$$

si ha anche

1) $$C : D = A : B$$
2) $$B : A = D : C.$$

La proporzione 2) si dirà dedotta dalla data « invertendo »

Per dimostrare le 1), 2), si ricordi che l'affermare che

$$A : B = C : D$$

equivale a dire che per qualunque coppia di numeri interi m, n deve essere

$mC >, =, < nD$, secondo che $mA >, =, < nB$.

Poichè le tre relazioni di $>, =, <$ si escludono a vicenda, avremo di conseguenza, per ogni valore di m, n,

$mA >, =, < nB$ secondo che $mC >, =, < nD$,

cioè sarà

$$C : D = A : B.$$

Così pure sarà, per ogni coppia di numeri m, n, $mD >, = < nC$, secondo che $m\,B >, =, < nA$, cioè

$$B : A = D : C.$$

446. Teor. — *Se*

$$A : B = C : D$$

e codeste quattro grandezze sono omogenee, si ha anche che

$$A : C = B : D,$$
$$D : B = C : A;$$

cioè sussistono le proporzioni dedotte dalla data « *invertendo i medii* e, rispettivamente, *gli estremi* ».

Ciò si dimostra in modo diretto nel caso, in cui tanto le A, B, quanto le A, C abbiano una multipla comune, cioè siano commensurabili.

Sia invero, per certi numeri interi p, q ed r, s,

(1) $$qA = pB,\ sA = r\,C.$$

Avremo, per la ammessa proporzionalità di A, B, C, D (n. 440),

(2) $$qC = pD.$$

Ma dalle (1) risulta

$$qsA = psB,\ qsA = qrC$$

e quindi

$$psB = qrC.$$

Onde, avendosi per la (2)

$$qrC = prD,$$

risulta

$$psB = prD,$$

quindi

$$sB = rD,$$

e questa uguaglianza, insieme colla seconda delle (1) ci dice appunto (n. 440) che

$$A : C = B : D.$$

Analogamente si dimostra che

$$D : B = C : A.$$

La dimostrazione della permutabilità dei medi e degli estremi riesce più laboriosa nel caso della incommensurabilità.

Per diminuire la difficoltà, spezzeremo la dimostrazione in tre parti, premettendo due Lemmi.

a) **Lemma** I. — *Se* A, B, C *sono grandezze omogenee ed è* A > C, *si possono trovare due interi* p e q *tali che sia*

$$q\ A > p\ B > q\ C.$$

Posto H = A − C, talchè sarà

(1) $$A = C + H,$$

si determini una multipla di H maggiore della B (n. 428). Se è

(2) $$qH > B,$$

si prenda la prima multipla di B che supera qC. Avremo per un certo intero p (uguale almeno ad 1)

(3) $$pB > qC$$

e

(4) $$qC \geq (p-1)B.$$

Sommando membro a membro le (2) e (4) troviamo

$$q(C + H) > pB$$

ossia, per la (1),

$$qA > pB$$

e, tenendo conto della (3),

$$qA > pB > qC.$$

b) Lemma II. — *In una proporzione fra quattro grandezze omogenee, secondo che il primo termine è maggiore, uguale o minore del terzo, anche il secondo è rispettivamente maggiore o uguale o minore del quarto.*

Sia la proporzione fra grandezze omogenee

$$A : B = C : D.$$

Diciamo che secondo che è A > C o A = C o A < C è rispettivamente B > D o B = D o B < D.

Supponiamo in primo luogo A > C. Per dimostrare che è anche B > D determiniamo, in base al Lemma precedente, due numeri p e q tali che sia

(1) $$qA > pB > qC$$

Per la supposta proporzionalità di A, B, C, D, avremo insieme con la

$$qA > pB$$

la disuguaglianza

$$qC > pD$$

e questa, insieme con le (1), dà

$$pB > pD$$

e quindi

$$B > D.$$

Supponendo in secondo luogo A < C, si ricordi che insieme colla proporzione data sussiste anche (n. prec.) la

$$C : D = A : B;$$

e allora per la dimostrazione precedente dall'ipotesi C > A discende D > B ossia B < D.

Infine dall'ipotesi A = C si argomenta che è anche B = D per esclusione, giacchè se fosse B > D o B < D si avrebbe, in base alla proporzione (n. 445)

$$B : A = D : C$$

e alla dimostrazione precedente, A > C o A < C.

c) Premessi codesti Lemmi, dimostriamo la commutabilità dei medi e degli estremi.

Perciò notiamo che se m, n sono due numeri interi *qualsiansi*, insieme colla proporzione data

$$A : B = C : D$$

sussiste anche la (n. 444)

$$mA : mB = nC : nD ;$$

cosicchè, in base al Lemma precedente avremo che secondo che mA è maggiore, uguale o minore di nC, è rispettivamente mB maggiore, uguale o minore di nD.

Poichè questo vale per qualsiasi coppia di numeri m, n si conclude che veramente

$$A : C = B : D$$

Così invertendo (n. 445) avremo

$$C : A = D : B$$

e scambiando i due rapporti

$$D : B = C : A$$

447. Teor. — *Data una proporzione fra grandezze qualsiansi*

$$A : B = C : D$$

sussistono anche le proporzioni che si deducono dalla data, componendo *e* dividendo cioè

$$A + B : B = C + D : D,$$

e, se $A > B$, *e quindi* $C > D$,

$$A - B : B = C - D : D.$$

Dimostreremo la prima parte, giacchè la seconda si stabilisce in modo perfettamente analogo.

La dimostrazione è immediata quando A e B (e quindi anche C e D) sono commensurabili.

Se invero si ha

$$nA = mB,\ nC = mD,$$

ne risulta che è anche

$$nA + nB = mB + nB,\ nC + nD = mD + nD$$

ossia

$$n(A + B) = (m + n)\ B,\ n(C + D) = (m + n)\ D.$$

e queste due uguaglianze ci dicono appunto che

$$A + B : B = C + D : D.$$

Per dimostrare il teorema in generale, si prendano ad arbitrio gli equimultipli $m(A + B)$, $m(C + D)$ di $A + B$, $C + D$, e gli equimultipli nB, nD di B, D. Dobbiamo far vedere che $m(C + D)$ è maggiore, uguale o minore di nD, secondochè $m(A + B)$ è maggiore, uguale o minore di nB.

Se $m \geq n$, sarà insieme

$$mB \geq nB \text{ ed } mD \geq nD ;$$

onde risulta

$$mA + mB > nB \text{ ed } mC + mD > nD.$$

Consideriamo in secondo luogo il caso di

$$m < n.$$

Potrà essere

$$\text{o } mA + mB > nB ;\ \text{o } mA + mB = nB ;$$

$$\text{o } mA + mB < nB ;$$

supponiamo per fissare le idee che sia

$$mA + mB > nB$$

ossia

$$mA > (n - m)\ B.$$

Allora per la proporzionalità ammessa di A, B, C, D è anche

$$mC > (n - m)\ D$$

e quindi anche

$$mC + mD > nD.$$

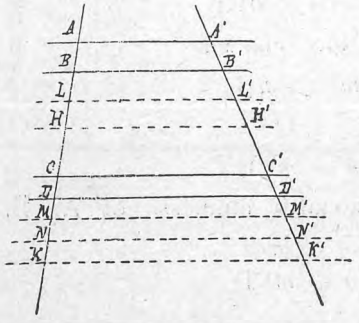
Analogamente si dimostra che se $mA < mB = nB$, è anche $mC + mD = nD$, e se $mA + mB < nB$ è pure $mC + mD < nD$.

Proporzioni di segmenti, poligoni, ecc.

I seguenti teoremi, a ciascuno dei quali facciamo seguire da vicino le conseguenze che ne dipendono, danno altrettanti esempi di proporzionalità, che si dimostrano applicando direttamente la definizione. Cominciamo collo stabilire un caso di proporzionalità fra segmenti, il quale ci condurrà ad un gruppo di interessanti applicazioni.

448. Teor. (di TALETE). — *Se più parallele sono segate da due trasversali, due segmenti quali si vogliano dell'una sono proporzionali ai due segmenti corrispondenti dell'altra.*

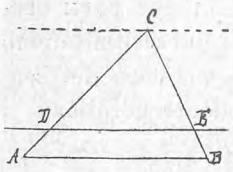
Date le parallele AA′, BB′, CC′, DD′, e le trasversali AD, A′D′, diciamo anzitutto che le coppie di segmenti AB, CD e A′B′, C′D′ sono proporzionali.



Infatti, sulla AB a partire da B da banda opposta di A, si portino quanti si vogliono segmenti consecutivi (BL, BH....) uguali ad AB, e a partire da D, da banda opposta di C, si portino quanti si vogliono segmenti consecutivi (DM, MN, NK...), uguali a CD. Abbiamo così due segmenti AH, CK multipli rispettivamente di AB, CD. Condotte per L, H, M, N, K le rette LL′, HH′, MM′, NN′, KK′ parallele alla AA′, otteniamo sulla trasversale A′B′ gli equimultipli A′H′, C′K′, di A′B′, C′D′ rispettivamente (n. 301).

Ma considerando il gruppo di parallele AA′, HH′, CC′, KK′, abbiamo che A′H′ è maggiore, uguale o minore di C′K′, secondo che AH è maggiore uguale o minore di CK (n. 300). Poichè ciò vale per ogni qualsiasi coppia AH, CK di multipli di AB, CD rispettivamente, se ne conclude che AB, CD, A′B′, C′D′ sono segmenti proporzionali.

449. Come caso particolare del teorema precedente abbiamo che *in un triangolo una parallela ad un lato, che incontri gli altri due, li divide in segmenti proporzionali.*

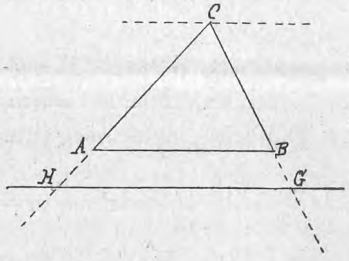


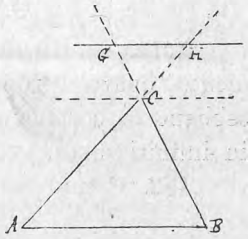
Dato il triangolo ABC e la parallela DE ad AB, la quale intersechi il lato AC in un punto D, e quindi il lato BC in un altro E (n. 261), si consideri il gruppo di parallele formato dalle rette AB, DE e dalla parallela ad esse per C, intersecate dalle AC, BC. Si ha allora (numero prec.) che i segmenti AD, DC, BE, EC sono proporzionali.

Sono per la stessa ragione proporzionali i segmenti AC, DC, BC, EC.

Proporzioni analoghe si ottengono da una retta parallela ad un lato d'un triangolo che seghi i prolungamenti degli altri due.

Così p. es. una retta parallela al lato AB del triangolo ABC interseca rispettivamente in H, G i





prolungamenti degli altri due lati AC, BC, avremo che

$$AH : AC = BG : BC$$

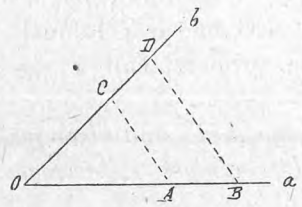
e

$$AH : CH = BG : CG.$$

450. Osservazioni che qui non svolgeremo, permettono di dimostrare che esiste sempre una grandezza quarta proporzionale dopo tre grandezze assegnate, e che una grandezza di una qualsiasi delle specie considerate può essere divisa in due parti proporzionali a due grandezze date. Noi qui ci limiteremo a dimostrare le possibilità enunciate pel caso dei segmenti, risolvendo, in base al precedente corollario, i due seguenti problemi.

451. Probl. — *Dati tre segmenti, costruire un segmento che sia quarto proporzionale dopo i segmenti dati.*

Prese per un punto O due semirette distinte *a, b*, i segmenti OA, AB, OC siano rispettivamente uguali ai segmenti dati nell'ordine dato. Congiunto A con C, si conduca da B la parallela alla AC fino ad incontrare la *b* in D.



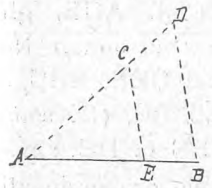
Il segmento CD è il quarto proporzionale in ordine ad OA, AB, OC, perchè pel Teorema di Talete,

$$OA : AB = OC : CD.$$

Nota. — Risulterà più avanti (n. 472) che il segmento quarto proporzionale dopo tre dati, è *unico*, sebbene la costruzione dianzi indicata possa eseguirsi in infiniti modi.

452. Come caso particolare della costruzione precedente, se AB = OC, si ha la *costruzione di un segmento che sia terzo proporzionale dopo due segmenti dati.*

453. Probl. — *Dividere un segmento dato in parti proporzionali a due segmenti dati.*



Sia da dividere il segmento AB in due parti proporzionali a due segmenti dati ***a*** e ***b***.

Condotta per A una semiretta distinta da AB e dalla sua opposta, si prendano su di essa due segmenti consecutivi AC, CD uguali rispettivamente ai due segmenti ***a*** e ***b***.

Congiunto D con B, la parallela per C alla DB incontrerà il segmento AB in un punto interno E tale che pel teorema di Talete

$$AE : EB = AC : CD$$

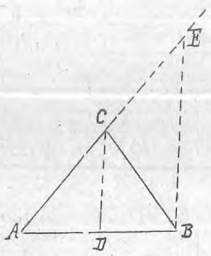
ossia

$$AE : EB = a : b.$$

454. Teor. — *La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti, che sono proporzionali agli altri due lati.*

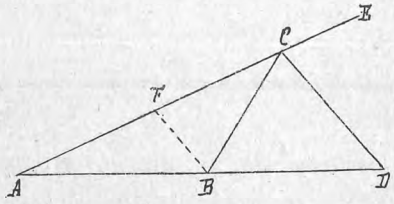
Nel triangolo ABC sia CD la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$. Diciamo che i quattro segmenti AD, DB, AC, CB sono in proporzione.

Condotta infatti da B la parallela alla DC fino ad incontrare in E il prolungamento di AC, saranno



uguali gli angoli $\widehat{ACD}$, $\widehat{CEB}$ come corrispondenti rispetto alle parallele DC, BE e alla trasversale CE, e gli angoli $\widehat{DCB}$, $\widehat{EBC}$ come alterni rispetto alle stesse parallele ed alla trasversale CB (n. 263). Ma poichè CD è la bisettrice di $\widehat{ACB}$, gli angoli $\widehat{ACD}$, $\widehat{DCB}$ sono uguali. Ne risulta che sono uguali anche gli angoli $\widehat{CEB}$, $\widehat{EBC}$, e quindi che nel triangolo CBE i lati BC, CE sono uguali (n. 86). Ma nel triangolo ABE la DC è parallela al lato BE, e perciò (n. 449) sono proporzionali i segmenti AD, DB, AC, CE; sono quindi proporzionali anche i segmenti AD, DB, AC, CB.

455. Teor. *Se in un triangolo la bisettrice di un angolo esterno incontra il prolungamento del lato opposto, le distanze di codesta intersezione dagli estremi di quel lato sono proporzionali agli altri due lati.*

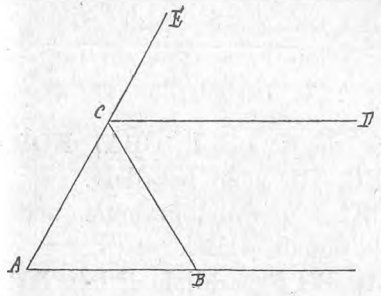


Nel triangolo ABC, prolungato AC in CE, sia CD la bisettrice dell'angolo esterno $\widehat{BCE}$.

Se essa incontra in D il prolungamento di AB, diciamo che i segmenti AD, BD sono proporzionali ad AC, BC.

Infatti, condotta da B la parallela alla DC, fino ad incontrare la AC in F, avremo che sono uguali gli angoli $\widehat{CBF}$, $\widehat{BCD}$, come alterni interni, e anche gli angoli $\widehat{BFC}$, $\widehat{DCE}$, come corrispondenti, rispetto alle parallele DC, BF ed alle trasversali BC, FE rispettivamente. Ma per ipotesi $\widehat{DCE} = \widehat{BCD}$: onde concludiamo che sono uguali anche gli angoli $\widehat{CBF}$, $\widehat{BFC}$ e quindi che nel triangolo BCF sono uguali i lati BC, FC.

Ora nel triangolo ADC la BF è parallela al lato CD, onde risulta (n. 449) che i segmenti AD, BD, AC, FC sono proporzionali. Saranno allora proporzionali anche i segmenti AD, BD, AC, BC.



456. Nota. Il solo caso in cui la bisettrice CD dell'angolo esterno non incontra il prolungamento del lato opposto AB è quello in cui il triangolo sia isoscele sulla base AB (n. 266).

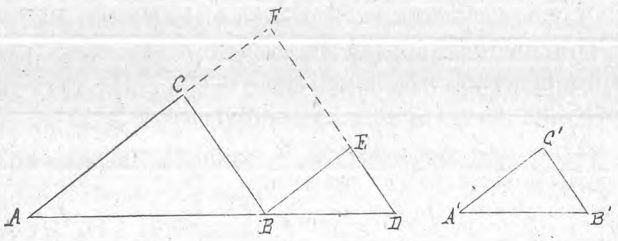
457. Teor. — *Se due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali, i lati che comprendono angoli uguali sono proporzionali* (*essendo omologhi i lati opposti ad angoli uguali*).

Siano i due triangoli ABC, A'B'C' tali che gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, siano ordinatamente uguali ad $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$. Diciamo che sono proporzionali i lati che comprendono angoli uguali, come, per esempio, AB, A'B', AC, A'C'.

Infatti sul prolungamento del lato AB si prenda, a partire da B, il segmento BD uguale ad A'B', e sopra BD, dalla stessa parte di C rispetto alla AB, si costruisca il triangolo BDE uguale ad A'B'C' (n. 80).

Dall'uguaglianza degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DBE}$ con

cludiamo che le AC, BE sono parallele (n. 254) e quindi che le rette AC, DE si incontrano in un punto



F. Così dall'uguaglianza degli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{EDB}$, deduciamo che le rette BC, DF sono parallele.

Il quadrangolo BEFC è parallelogramma, onde risulta (n. 278) che CF è uguale a BE.

Nel triangolo ADF la BC è parallela al lato DF, e perciò (n. 449)

$$AB : BD = AC : CF.$$

Sussisterà quindi anche la proporzione

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

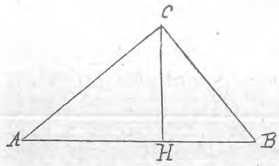
Analogamente si dimostra che

$$AC : A'C' = BC : B'C',$$
$$BC : B'C' = AB : A'B'.$$

458. Cor. — *In due triangoli aventi gli angoli uguali le altezze corrispondenti sono proporzionali.*

Nota. In particolare si ha che *due triangoli isosceli, aventi gli angoli alla base uguali, hanno le basi, i lati e le altezze proporzionali.*

459. Teor. *In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa; e l'altezza (abbassata dal vertice dell'angolo retto) è media proporzionale fra i due segmenti in cui essa divide l'ipotenusa.*



Dato il triangolo ABC rettangolo in C e abbassata l'altezza CH relativa all'ipotenusa, i due triangoli ABC, ACH, rettangoli rispettivamente in C, H hanno l'angolo acuto $\widehat{A}$ comune, e quindi hanno tutti gli angoli uguali (n. 269). Risulta di qui (n. 457) la proporzione

$$AH : AC = AC : AB.$$

Similmente si dimostra che hanno angoli ordinatamente uguali i triangoli ABC, CBH, onde si ha che

$$BH : BC = BC : BA.$$

Infine, poichè il triangolo ABC ha gli angoli ordinatamente uguali tanto a quelli del triangolo ACH come a quelli di CBH, si conclude che i due triangoli ACH, CBH hanno gli angoli ordinatamente uguali, e quindi (n. prec.), si ha che

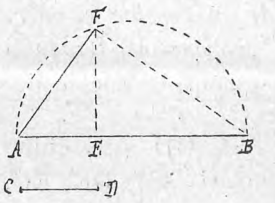
$$AH : CH = CH : HB.$$

460. Il teorema precedente ci permette di risolvere il

Probl. — *Costruire un segmento che sia medio proporzionale fra altri due.*

In relazione alle due parti del teorema precedente abbiamo due costruzioni.

a) Si può supporre che i due segmenti dati AB, CD siano disuguali, perchè, se fossero uguali il segmento AB stesso sarebbe medio proporzionale fra AB e CD.



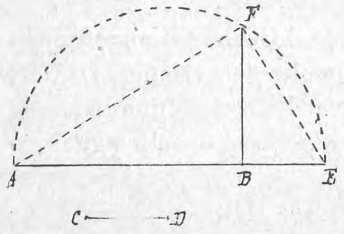
Allora sul maggiore dei due segmenti (sia, per esempio, AB), preso come diametro, si costruisca una semicirconferenza, e sul segmento stesso, a partire

da uno dei suoi estremi A, si porti il segmento AE, uguale a CD.

La perpendicolare alla AB in E incontri in F la semicirconferenza dianzi costruita. Il segmento AF è medio proporzionale fra CD e AB.

Infatti, congiunto F con B, il triangolo ABF è rettangolo in F (n. 317), onde risulta (n. prec.) che il cateto AF è medio proporzionale fra la sua proiezione AE e l'ipotenusa AB, cioè fra AB e CD.

b) Sul prolungamento di AB si prenda il segmento BE uguale a CD. Descritta su AE come diametro una semicirconferenza, dal punto B si innalzi la perpendicolare, la quale intersechi la semicirconferenza nel punto F.



Diciamo che BF è medio proporzionale fra AB, BE, cioè fra AB, CD.

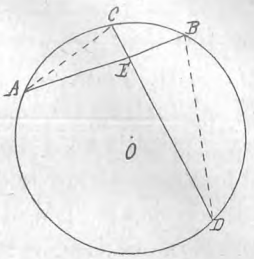
Congiunto, invero, F con A ed E, il triangolo AEF è rettangolo in F, onde risulta (teor. prec.) che l'altezza BF è media proporzionale fra i due segmenti AB, BE dell'ipotenusa.

Nota. — Risulterà più tardi (n. 487) l'unicità del segmento medio proporzionale fra altri due, che in due modi abbiamo dianzi costruito.

461. Teor. — *Se due corde di un cerchio si intersecano, i loro segmenti sono in proporzione* (essendo estremi e medi rispettivamente i segmenti di una medesima corda).

Nel cerchio O le due corde AB, CD si seghino nel punto E: diciamo che i segmenti AE, DE, EC, EB sono proporzionali.

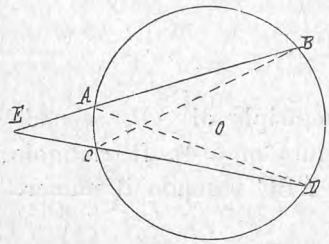
Congiunto infatti A con C e B con D, otteniamo



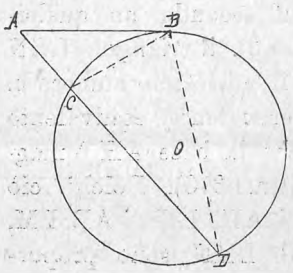
i due triangoli AEC, DEB in cui sono uguali gli angoli $\widehat{CEA}$, $\widehat{DEB}$ come opposti al vertice, e gli angoli $\widehat{ACE}$, $\widehat{EBD}$ perchè iscritti nel medesimo arco DBA (n. 315). Nei due triangoli AEC, DEB aventi gli angoli ordinatamente uguali (n. 269), i lati intorno agli angoli uguali sono proporzionali (n. 457), onde avremo che i segmenti AE, DE, EC, EB sono in proporzione.

462. Analoghe dimostrazioni valgono per i due seguenti teoremi, che proponiamo come esercizi.

Teor. — *Date per uno stesso punto due secanti una circonferenza, i segmenti di esse compresi fra codesto punto e le intersezioni con la circonferenza sono in proporzione* (essendo rispettivamente estremi e medi due segmenti appartenenti ad una stessa secante).



463. Teor. — *Condotte da un punto esterno ad un cerchio una tangente e una secante, il segmento di tangente compreso fra codesto punto e il punto di contatto è medio proporzionale fra i due segmenti di secante compresi fra quel punto e le due intersezioni con la circonferenza*, ossia, come si suol dire brevemente, *la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la parte esterna.*



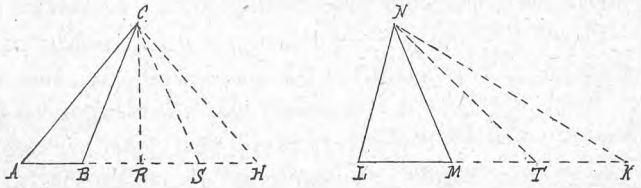
Passiamo a stabilire, in base alla definizione del n. 440, una proporzionalità fra segmenti e superficie.

464. Teor. — *Due triangoli o due parallelogrammi di uguale altezza sono proporzionali alle basi.*

Prendiamo a considerare il caso dei triangoli.

Siano i due triangoli ABC, LMN, aventi rispetto alle basi AB, LM altezze uguali. Diciamo che essi sono proporzionali ad AB, LM.

Sul prolungamento di AB, a partire da B e da parte opposta di A si portino successivamente quanti si vogliono segmenti BR, RS, SH. .. uguali ad AB. Si ot-



terrà così un segmento AH multiplo di AB, secondo un certo numero m, (nella figura $m = 4$). Il triangolo AHC sarà allora multiplo di ABC secondo il numero m (n. 370).

Così, costruito sulla retta LM a partire da L, e dalla stessa banda di M rispetto ad L, il segmento LK, il quale sia multiplo di LM secondo un qualsivoglia numero n (nella figura $n = 3$), il triangolo LKN sarà multiplo di LMN secondo il medesimo numero n.

Ora sappiamo che AHC è prevalente, equivalente o suvvalente a LKN, secondo che la base AH è maggiore, uguale o minore di LK (n. 370). Poichè ciò vale per ogni coppia di multipli AH, LK di AB, LM, si conclude che i triangoli ABC, LMN sono proporzionali alle basi AB, LM (n. 440).

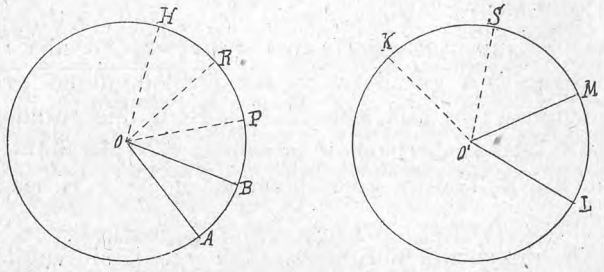
Analogamente si tratta il caso dei parallelogrammi.

Un'ultima applicazione diretta della definizione ci conduce a stabilire la proporzionalità fra archi ed angoli o settori nel cerchio.

465. Teor. — *In cerchi uguali o nello stesso cerchio due archi sono proporzionali ai due angoli al centro corrispondenti.*

Diciamo che se AB, LM sono due archi delle circonferenze uguali O, O′, codesti due archi sono proporzionali ai corrispondenti angoli al centro $\widehat{AOB}$, $\widehat{LO'M}$.

Intorno ad O, a partire dal raggio OB, da banda opposta di OA, si prendano quanti si vogliono angoli consecutivi $\widehat{BOP}$, $\widehat{POR}$, $\widehat{ROH}$ . . . . uguali ad AOB, e intorno ad O′ a partire dal raggio O′M, da banda



opposta di O′L, si prendano quanti si vogliono angoli consecutivi $\widehat{MO'S}$, $\widehat{SO'K}$..., uguali ad $\widehat{LO'M}$. Allora gli archi AB, BP, PR, RH.... sono uguali fra loro, e gli archi LM, MS, SK,... sono pur essi uguali fra loro (n. 164): cosicchè agli angoli al centro $\widehat{AOH}$, $\widehat{LO'K}$ multipli secondo certi due numeri, quali si vogliono,

di $\widehat{AOB}$, $\widehat{LO'M}$ rispettivamente, corrispondono gli archi AH, LK equimultipli degli archi AB, LM rispettivamente. Ora sappiamo che l'arco AH è maggiore, uguale o minore di LK secondo che l'angolo $\widehat{AOH}$ è maggiore, uguale a minore di $\widehat{LO'K}$ (n. 169).

Poichè ciò vale per ogni coppia di angoli $\widehat{AOH}$, $\widehat{LO'K}$ multipli rispettivi di $\widehat{AOB}$, $\widehat{LO'M}$, si conclude che gli archi AB, LM sono proporzionali agli angoli al centro corrispondenti $\widehat{AOB}$, $\widehat{LO'M}$ (n. 440).

466. Nello stesso modo si dimostra il seguente:

Teor. — *In cerchi uguali o nello stesso cerchio due settori quali si vogliano sono proporzionali agli angoli al centro corrispondenti.*

467. Nota. Il fondamento comune delle dimostrazioni dei teoremi dei nn. 448, 464, 465 è il seguente:

Si hanno due classi di grandezze A, B, C...: e A', B', C'.... in ognuna delle quali è possibile la *somma* e si verificano le proprietà del n. 428, e le due classi sono *riferite* fra loro in modo, che: 1) ad ogni grandezza dell'una *corrisponde* una grandezza ed una sola dell'altra; 2) a grandezze uguali corrispondono grandezze uguali; 3) alla somma $A + B$ di due grandezze dell'una classe corrisponde la somma $A' + B'$ delle due grandezze dell'altra, corrispondenti ad A e B rispettivamente.

Di qui risulta che, prese due quali si vogliano grandezze A e B della prima classe e le corrispondenti A' e B' della seconda, sarà A maggiore o uguale o minore di B secondo che rispettivamente è A' maggiore o uguale o minore di B'; e ad un multiplo qualsiasi di una grandezza della prima classe corrisponde nella seconda l'equimultiplo della corrispondente.

Ciò basta perchè si possa dedurre che se A e B sono due quali si vogliano grandezze dell'una classe e A', B' le corrispondenti dell'altra, le quattro grandezze A, B, A', B' sono proporzionali.

468. Def. — Due classi di grandezze si dicono *proporzionali* se si possono far corrispondere le loro grandezze in modo che:

1) ad ogni grandezza dell'una corrisponda una grandezza ed una sola dell'altra;

2) due grandezze *quali si vogliano* dell'una classe e le grandezze corrispondenti dell'altra siano proporzionali.

Potremo dunque dire che sono classi di grandezze proporzionali:

1) le due classi di segmenti intersecati su due trasversali dal sistema di tutte le parallele ad una retta data;

2) la classe dei triangoli o dei parallelogrammi aventi una data altezza, e la classe delle rispettive basi [che i triangoli o i parallelogrammi aventi una data altezza formino da sè soli una classe di grandezze contenuta in quella dei poligoni, si verifica immediatamente, osservando che si trovano vere per essi quelle proposizioni che caratterizzano le classi di grandezze (nn. 427, 428)];

3) la classe degli archi di una data circonferenza e la classe degli angoli al centro corrispondenti o dei settori circolari corrispondenti.

Inversione dei teoremi precedenti.

Arriveremo ora a invertire i teoremi del paragrafo precedente in base ad alcune proprietà generali inerenti al confronto di due proporzioni.

469. Teor. — *Se due proporzioni hanno uguali le prime coppie, le altre due coppie sono in proporzione,* cioè se

$$A : B = C : D \text{ e } A : B = E : F,$$

si ha che

$$C : D = E : F.$$

Presi ad arbitrio gli equimultipli mA, mC, mE di A, C, E rispettivamente, e gli equimultipli nB, nD, nF di B, D, F abbiamo per definizione che secondo che è

$$mA > nB \text{ o } mA = nB \text{ o } mA < nB$$

è, per la prima proporzione,

$$mC > nD \text{ o } mC = nD \text{ o } mC < nD$$

e, per la seconda proporzione, rispettivamente,

$$mE > nF \text{ o } mE = nF \text{ o } mE < nF.$$

Concludiamo che secondo che è

$$mC > nD \text{ o } mC = nD \text{ o } mC < nD$$

è anche

$$mE > nF \text{ o } mE = nF \text{ o } mE < nF,$$

cioè che C, D, E, F sono in proporzione.

470. Nota. — Il teor. prec. si può enunciare dicendo che *se due coppie di grandezze sono proporzionali ad una terza, sono anche proporzionali fra loro.* Esso in sostanza, nel caso di coppie di grandezze commensurabili, si riduce alla constatazione che rapporti uguali ad un terzo sono uguali fra loro (proprietà *transitiva* della uguaglianza aritmentica). Nel caso di coppie incommensurabili essa permette, come vedremo al Cap. VIII, di riguardare la proporzionalità di tali coppie come una uguaglianza (uguaglianza di numeri *irrazionali*).

471. In forza del teorema ora stabilito, se più coppie di grandezze A, A′; B, B′; C, C′; . . . . sono proporzionali ad una medesima coppia codeste coppie sono anche proporzionali, prese a due a due in tutti i modi possibili.

Similmente, se più coppie di grandezze A, A′; B, B′; C, C′; . . . sono ciascuna proprorzionale alla consecutiva, esse sono pure proporzionali, prese a due a due in tutti i modi possibili.

Si denoterà questo fatto, scrivendo

$$A : A' = B : B' = C : C' = \ldots .$$

472. Teor. — *Se i primi tre termini di una proporzione sono uguali ai corrispondenti di un'altra, anche i quarti termini sono uguali,* cioè se

$$A : B = C : D, \; A : B = C : D'$$

è

$$D = D'.$$

Infatti dalle due proporzioni precedenti si deduce (n. 469)

$$C : D = C : D'$$

e di qui, permutando i medi, $C : C = D : D'$, cosicchè si conclude (n. 442)

$$D' = D.$$

Nota. — Il teor. prec. dimostra l'*unicità della quarta proporzionale dopo tre grandezze,* come pure *della terza continua proporzionale dopo due grandezze date.*

473. Cor. — *Se due proporzioni hanno comuni tre termini corrispondenti qualsiansi, hanno uguale anche il rimanente.*

Sia, per esempio,

$$A : B = C : D, \; A : B = C' : D,$$

diciamo che è

$$C = C'.$$

Infatti, dalle ammesse proporzioni risulta invertendo

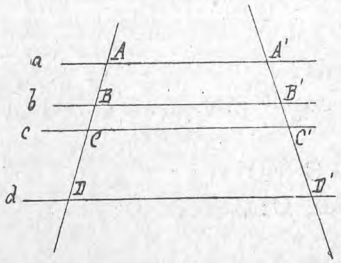
$$B : A = D : C, \quad B : A = D : C',$$

onde, pel teorema precedente.

$$C = C'.$$

Vediamo ora come si possano invertire i teoremi dei nn. 448-466.

474. Il teorema di TALETE, relativo a quattro parallele, esprime la proporzionalità dei segmenti segati da quattro parallele sopra due trasversali. Si può invertire questo teorema, considerando quattro rette *a, b, c, d* secanti su due trasversali due coppie di segmenti AB, CD e A′B′, C′D′ in proporzione e delle quali si sappia che le prime tre sono parallele.



Nel caso in cui D, D′ cadano dalla medesima parte rispetto alla retta *c* (cioè quando i segmenti AB, CD e A′B′ e C′D′ siano *ugualmente disposti* rispetto alle rette *a, b, c, d,*) si dimostra che la *d* è parallela alle altre tre. Ciò si esprime in parole enunciando il seguente

475. Teor. — *Se due coppie di rette segano sopra due trasversali coppie di segmenti ugualmente disposti e proporzionali, quando delle quattro rette tre siano parallele, anche la quarta è parallela ad esse.*

Le tre rette a, b, c, fra loro parallele, e la quarta *d* seghino su due trasversali le due coppie di segmenti ugualmente disposti AB, CD e A′B, C′D′, tali che

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Diciamo che la retta *d* è parallela alle altre tre.

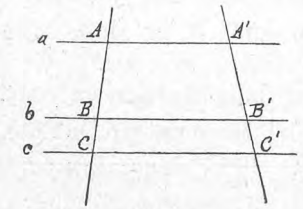
Infatti la parallela per D alle *a, b, c,* interseca la A′B′ in un punto D_1' tale che (n. 448)

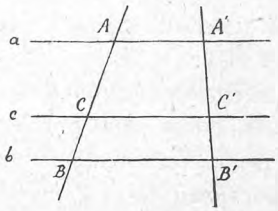
$$AB : CD = A'B' : C'D_1'.$$

Da questa proporzione e dalla supposta risulta, (per la unicità della quarta proporzionale, n. 472), che $C'D' = C'D_1'$ e, poichè D′ cade rispetto alla *c* dalla stessa parte di D e quindi di D_1', se ne conclude che D_1' coincide con D′, ossia che la *d* è parallela alla *a, b, c.*

476. Col medesimo ragionamento si stabilisce la seguente proposizione, che inverte il teorema di TALETE relativo a tre parallele:

Teor. — *Se tre rette* a, b, c *segano sopra due trasversali segmenti ugualmente disposti e proporzionali,*





AB e A′B′, BC e B′C′, *e due delle rette date sono parallele, anche la terza è parallela ad esse.*

477. Immaginando che A coincida con A′ otteniamo, come caso particolare del precedente teorema, la seguente proposizione:

Dato un triangolo ABB′, *se una retta ne interseca i lati* AB, AB′ *o i loro prolungamenti in due punti* C, C′ *tali che*

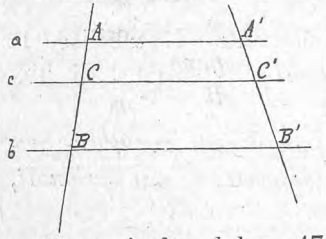
$$AB : BC = AB' : B'C',$$

la retta CC′ *è parallela al lato* BB′.

478. Il teorema di TALETE relativo al caso di tre parallele si può anche invertire nel modo seguente che offre un interesse maggiore di quello del n. 476.

Teor. — *Se i segmenti intercetti da due rette parallele sopra due trasversali sono divisi in parti proporzionali da una terza retta, questa è parallela alle prime due.*

I segmenti AB, A'B' intersecati dalle due parallele a, b su due trasversali siano divisi da una terza retta c in modo che



$$AC : CB = A'C' : C'B'.$$

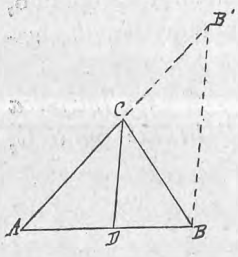
Diciamo che la c è parallela alle a, b. Infatti, dalla proporzione precedente otteniamo, componendo,

$$AB : CB = A'B' : CB'$$

e allora risulta dal n. 476 che CC' è parallela alle AA', BB'.

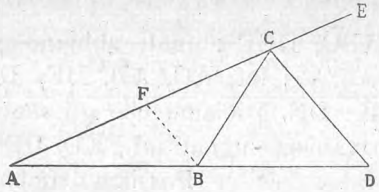
479. Immaginando che A coincida con A', abbiamo, come caso particolare del teorema precedente, che *se in un triangolo una retta divide due lati in parti proporzionali essa è parallela al terzo lato.*

L'inverso del teorema di Talete ci permette di invertire ordinatamente i teoremi che dal teorema di Talete abbiamo dedotto. Pei due primi ci limitiamo a notare gli enunciati, lasciando allo studioso la cura di svolgere sulle annesse figure le dimostrazioni.



480. Teor. — *Se un lato di un triangolo è diviso in due parti, le quali siano proporzionali agli altri due lati, la retta, che passa pel punto di divisione del lato e per il vertice dell'angolo opposto, biseca quest'angolo.*

481. Teor. — *Dato un triangolo e sul prolungamento di uno dei lati un punto, le cui distanze dai due vertici che si trovano su di esso siano proporzionali agli altri due lati, la retta che congiunge codesto punto col vertice opposto, biseca il relativo angolo esterno.*



482. Segue dai teor. dei nn. 454, 455 che dato un triangolo non isoscele ABC, le bisettrici dell'angolo interno ed esterno in C intersecano la retta AB in due punti D, D' (l'uno interno, l'altro esterno al segmento AB) tali che

$$AD : BD = AD' : BD'.$$

Ciò si suole esprimere brevemente dicendo che « i punti D, D' dividono il segmento AB internamente ed esternamente nello stesso rapporto »; e in tal caso si dice che D, D' *dividono armonicamente il segmento* AB, od anche che *i punti* A, B, D, D' *formano un gruppo armonico.*

483. Proponiamo qui come esercizio il seguente

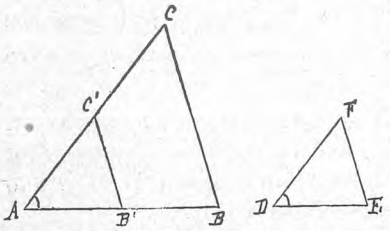
Probl. — *Determinare due punti, che dividano internamente ed esternamente un dato segmento* AB *in parti proporzionali a due segmenti disuguali dati* a *e* b. [Condotto per A, fuori della AB, un segmento $AC = a$, si prendano sulla parallela ad AC per B, da una parte e dall'altra di B, i segmenti BD, BD' uguali a b; si congiunga C con D e D', ecc.].

Per altre notevoli proprietà inerenti alla divisione armonica di un segmento si vedano gli eserc. 8-15 alla fine di questo Capitolo.

484. Il teorema del n. 457 si può invertire in due modi, che noi enunciamo in questo numero e in quello seguente.

Teor. — *Se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo, e un lato del primo angolo sta ad un lato del secondo come l'altro lato del primo sta all'altro lato del secondo, i due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali.*

Siano i triangoli ABC, DEF i quali abbiano gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{EDF}$ uguali, e i lati AC, AB, DF, DE tali che AC : DF = AB : DE. Diciamo che gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ sono rispettivamente uguali ad $\widehat{FED}$, $\widehat{DFE}$.



Possiamo supporre che i lati in proporzione siano disuguali, perchè se fosse AC = DF, e quindi, per il n. 442, AB = DE, i due triangoli sarebbero uguali e il teorema sarebbe dimostrato. Supponiamo AC > DF e quindi (n. ora citato) AB > DE.

Si prenda allora su AC il segmento AC′ uguale a DF e su AB il segmento AB′ uguale a DE. I triangoli AB′C′ e DEF, avendo uguali ordinatamente due lati e l'angolo compreso, sono uguali (n. 79).

D'altra parte risulta dall'ipotesi che

$$AC : AC' = AB : AB'.$$

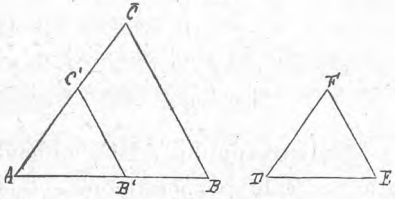
Ne discende che la B′C′ è parallela alla BC (n. 476), onde concludiamo che gli angoli $C\widehat{B'}A$, $A\widehat{C'}B'$ sono rispettivamente uguali agli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, e quindi che i due triangoli ABC, DEF, hanno gli angoli ordinatamente uguali.

485. Teor. — *Se in due triangoli ad ogni lato dell'uno si può far corrispondere un lato dell'altro, in modo che le coppie di lati corrispondenti siano proporzionali, i due triangoli hanno uguali ordinatamente gli angoli* (essendo uguali gli angoli opposti ai lati corrispondenti).

Dati i due triangoli ABC, DEF, supponiamo che sussistano le proporzioni

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD.$$

Diciamo che gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sono rispettivamente uguali agli angoli $\widehat{D}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$.



Se è AB = DE ne risulta (n. 442) BC = EF, CA = FD onde i due triangoli sono uguali (n. 90) e hanno quindi gli angoli ordinatamente uguali.

Supponiamo in secondo luogo AB > DE; sarà allora (n. 442) AC > DF. Si prendano allora su AB il segmento AB′ uguale a DE e su AC il segmento AC′ uguale a DF. Congiunto B′ con C′, la retta B′C′ determina sui lati del triangolo ABC i segmenti AB′, AC′, tali che

$$AB : AB' = AC : AC'.$$

Risulta di qui (n. 476) che la B′C′ è parallela alla BC, e quindi (n. 263) che gli angoli $C\widehat{B'}A$, $A\widehat{C'}B'$ sono uguali rispettivamente a $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$. Allora i due triangoli ABC, AB′C′, avendo gli angoli uguali, hanno i lati proporzionali (n. 457) e in particolare

$$AB : AB' = BC : B'C'.$$

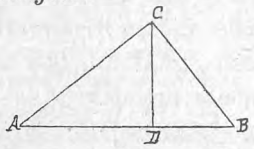
Ma per ipotesi

$$AB : DE = BC : EF.$$

Poichè AB′ è uguale per costruzione a DE, ricaviamo dalle due ultime proporzioni che B′C′ è uguale

ad EF (n. 472) e quindi che i due triangoli AB'C', DEF, avendo i lati ordinatamente uguali, sono uguali. Concludiamo di qui che i due triangoli ABC, DEF hanno gli angoli ordinatamente uguali.

486. Teor. — *Se in un triangolo la proiezione di un lato su di un altro è interna a questo e il primo lato è medio proporzionale fra codesta proiezione e il lato cui questa appartiene, il triangolo è rettangolo: e parimenti, se una delle altezze di un triangolo divide internamente il lato corrispondente in due parti, fra le quali esso sia medio proporzionale, il triangolo è rettangolo.*



Nel triangolo ABC, abbassata da C la perpendicolare CD su AB, sia D interno ad AB e dapprima

$$AB : AC = AC : AD.$$

Allora i due triangoli ABC, ACD, di cui il secondo è per costruzione rettangolo in D, hanno l'angolo A comune e i lati intorno ad esso proporzionali. Se ne deduce (n. 484) che i due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali, e quindi che l'angolo ACB è retto.

Sia, in secondo luogo,

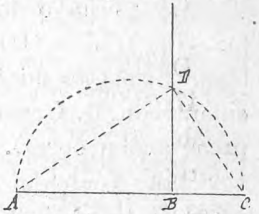
$$AD : CD = CD : DB.$$

Allora i due triangoli ADC, CDB hanno, per costruzione, gli angoli $\widehat{ADC}$, $\widehat{CDB}$ uguali perchè retti e, per ipotesi, i lati intorno ad essi in proporzione. Se ne deduce (n. 484) che i due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali, e quindi che l'angolo $\widehat{BCD}$ è uguale a $\widehat{DAC}$. Ma $\widehat{DCA}$ è il complemento di $\widehat{DAC}$ (n. 268) e quindi anche di $\widehat{BCD}$. Di qui si

conclude che l'angolo $\widehat{BCA}$, somma di $\widehat{BCD}$ e $\widehat{DCA}$, è retto.

487. In base al precedente teorema possiamo riconoscere che, sebbene si possano assegnare differenti modi di costruire un segmento che sia *medio proporzionale fra due segmenti* dati (cfr. n. 460), tuttavia tale segmento *è unico.*

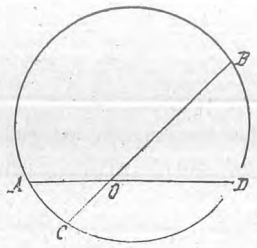
Invero siano AB, BC i due segmenti dati. Condotta per B da una parte rispetto ad AC la semiretta perpendicolare, e preso su di essa il segmento BD uguale ad un segmento, che in qualsiasi modo, siasi trovato medio proporzionale fra AB e BC, il segmento AC, pel teorema precedente, è visto da D sotto un angolo retto. Ma il luogo dei punti che giacciono rispetto alla AC dalla stessa parte di D e da cui il segmento AC è visto sotto un angolo retto, è la semicirconferenza di diametro AC (n. 323), la quale non può intersecare la semiretta perpendicolare se non nell'unico punto D. Ne risulta che ogni segmento il quale sia medio proporzionale fra AB e BC è uguale a BD.



488. Teor. — *Su di una retta a partire da un suo punto* O *e da bande opposte rispetto ad esso si prendedano due segmenti* OA, OD *e su di un'altra retta per* O *e sempre da bande opposte rispetto ad* O *si prendano i due segmenti* OB, OC. *Se*

$$OA : OB = OC : OD$$

i quattro punti A, B, C, D *appartengono ad una circonferenza.*

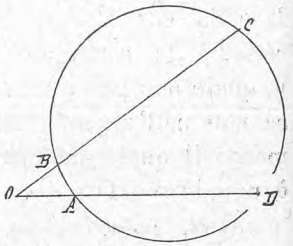


Infatti la circonferenza passante pei tre punti non in linea retta A, B, C rispetto alla quale il punto O è interno (n. 171) intersecherà la retta AO in un punto D′, che cadrà rispetto ad O da banda opposta di A, e pel teorema del n. 461 sarà

$$OA : OB = OC : OD'.$$

Da questa e dalla proporzione supposta, risulta (n. 472) $OD' = OD$ e, poichè D′ e D cadono entrambi rispetto ad O da banda opposta di A, D′ coinciderà con D. Concludiamo che la circonferenza ABC passa anche per D.

489. Analoghe dimostrazioni valgono per i due seguenti teoremi che proponiamo come esercizi.

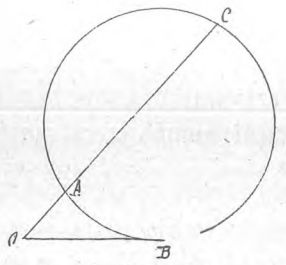


a) **Teor.** — *Su di una retta, a partire da un suo punto* O *e dalla medesima banda rispetto ad esso, si prendano due segmenti* OA, OD *e su di un'altra retta per* O *e ancora della medesima banda rispetto ad* O *si prendano due segmenti* OB, OC; *se*

$$OA : OB = OC : OD,$$

i quattro punti A, B, C, D *appartengono ad una medesima circonferenza.*

b) **Teor.** — *Presi su di una retta, a partire da un suo punto* O *e dalla medesima parte di esso, due segmenti*



OA, OC *e su di un'altra retta per* O *il segmento* OB, *medio proporzionale fra* OA *e* OC, *la circonferenza passante per* A, B, C *è tangente in* B *alla* OB.

490. L'unicità della quarta proporzionale (n. 472) ci permette anche di invertire il teorema relativo alla proporzionalità dei triangoli o parallelogrammi di uguale altezza alle rispettive basi. Si ha cioè il

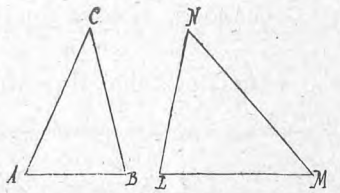
Teor. — *Se due triangoli o due parallelogrammi sono proporzionali alle basi essi hanno altezze uguali.*

Dimostriamo il teorema pei triangoli.

Siano dunque i due triangoli ABC, LMN, tali che

(1) $$ABC : LMN = AB : LM.$$

Diciamo che l'altezza di ABC (sulla base AB) è uguale a quella di LMN (sulla base LM).



Sia invero PQR un qualsiasi triangolo equivalente ad LMN e avente sulla base PQ altezza uguale a quella di ABC su AB. Sarà (n. 464)

$$ABC : PQR = AB : PQ$$

ossia, poichè PQR è equivalente ad LMN

$$ABC : LMN = AB : PQ.$$

Da questa e dalla proporzione (1) ammessa per ipotesi risulta, per la unicità della quarta proporzionale (n. 472), che PQ è uguale ad LM e quindi che, come PQR, anche LMN (n. 373) ha altezza uguale ad ABC.

Analogamente si dimostra il teorema nel caso dei parallelogrammi.

Segmenti proporzionali e parallelogrammi equivalenti.

Ci proponiamo ora di mettere in relazione la teoria delle proporzioni fra segmenti colla teoria della equivalenza fra poligoni. Il fondamento di codesta relazione è data dal seguente

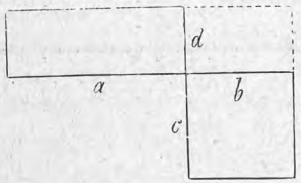
491. Teor. — *Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo degli estremi è equivalente a quello dei medi.*

Viceversa, se quattro segmenti in un certo ordine sono tali che il rettangolo del primo e del quarto sia equivalente a quello del secondo e del terzo, i quattro segmenti formano una proporzione.

Siano a, b, c, d quattro segmenti tali che

$$a : b = c : d.$$

Diciamo che il rettangolo $r(a, d)$ di a e d è equivalente al rettangolo $r(b, c)$ di b e c.



Costruito il rettangolo dei due segmenti a e d, si costruisca entro l'angolo opposto al vertice ad uno degli angoli del rettangolo $r(a, d)$ il rettangolo dei segmenti b, c e precisamente il segmento b sia sul prolungamento di a. Completato il rettangolo $r(b, d)$ dei due segmenti b e d avremo (n. 464)

$$r(a, d) : r(b, d) = a : b$$
$$r(b, c) : r(b, d) = c : d.$$

Di qui e dalla proporzionalità di a, b e c, d risulta

$$r(a, d) : r(b, d) = r(b, c) : r(b, d):$$

onde si conclude che i due rettangoli $r(a, d)$, $r(b, c)$ hanno ugual superficie (nn. 446, 442) e quindi i due rettangoli sono equivalenti (n. 418).

Reciprocamente supponiamo che, dati i quattro segmenti a, b, c, d i due rettangoli $r(a, d)$, $r(b, c)$ siano equivalenti. Diciamo che i quattro segmenti a, b, c, d sono in proporzione.

Riferiamoci invero alla figura di poc'anzi.

Avremo (n. 464)

$$r(a, d) : r(b, d) = a : b.$$
$$r(b, c) : r(b, d) = c : d.$$

Ma per ipotesi $r(a, d)$, $r(b, c)$ hanno ugual superficie, onde sarà

$$r(a, d,) : r(b, d) = r(b, c) : r(b, d).$$

Di qui e dalle due proporzioni precedenti si conclude appunto che (n. 469)

$$a : b = c , d.$$

492 Nota. — Se due classi di grandezze sono riferite fra loro in modo, che:

1) ad ogni grandezza dell'una corrisponda una grandezza ed una sola dell'altra;

2) prese due grandezze *quali si vogliano* A, B della prima classe e le corrispondenti A′, B′ della seconda, si abbia sempre

$$A : B = B' : A',$$

si dice che le due classi di grandezze considerate sono *inversamente proporzionali* (cfr. n. 468).

Ciò posto, possiamo dire, in base al n. prec., che: *Se si considerano tutti i rettangoli equivalenti ad un dato, le basi di essi sono inversamente proporzionali alle corrispondenti altezze.*

493. Si ha come caso particolare del teorema del n. 491 che *se un segmento è medio proporzionale fra*

altri due, il quadrato del primo è equivalente al rettangolo dei due altri. Viceversa, se tre segmenti sono tali che il quadrato del primo sia equivalente al rettangolo degli altri due, il primo è medio proporzionale fra questi ultimi.

494. Si ha di qui che il teor. del n. 459 si riduce ai teor. dei nn. 362, 398.

Così in base al teor. del n. prec. il teor. del n. 462 si può enunciare dicendo, che *condotte da un punto esterno ad un cerchio due secanti, sono equivalenti i due rettangoli contenuti ciascuno da una delle due secanti, e dalla rispettiva parte esterna.*

Lasciamo enunciare al lettore i teoremi che in modo analogo si deducono dai nn. 461, 463.

495. Con dimostrazione analoga a quella del n. 490 si stabilisce più in generale il

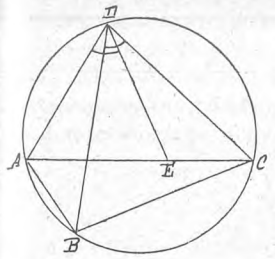
Teor. — *Se due parallelogrammi (o triangoli) sono equivalenti ed hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati che comprendono gli angoli uguali formano una proporzione, di cui sono estremi (e medi) due lati di uno stesso parallelogramma (o triangolo); e reciprocamente, se due parallelogrammi (o triangoli) hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati che comprendono gli angoli uguali formano una proporzione, di cui sono estremi (e medi) due lati di uno stesso parallelogramma (o triangolo), i due parallelogrammi (o triangoli) sono equivalenti.*

Daremo ora esempio di un importante teorema della teoria della equivalenza fra poligoni, che si dimostra in forza della relazione stabilita dianzi fra codesta teoria e quella delle proporzioni fra segmenti.

496. Teor. (di Tolomeo). — *Se un quadrangolo è iscritto in un cerchio, il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli dei lati opposti.*

Dato il quadrangolo ABCD iscritto in un cerchio e condottene le diagonali AC, BD, diciamo che il rettangolo di AC e BD è equivalente alla somma dei rettangoli contenuti da AB e CD e da BC e DA.

Poichè l'angolo $\widehat{BDC}$ è minore di $\widehat{ADC}$, possiamo condurre per D, entro l'angolo $\widehat{ADC}$ una semiretta che formi colla DA un angolo uguale a $\widehat{BDC}$. Codesta semiretta incontrerà il segmento AC in un punto interno che designamo con E.



Allora i triangoli AED, BCD avendo uguali gli angoli $\widehat{ADE}$, $\widehat{BDC}$ per costruzione e gli angoli $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$, perchè iscritti nel medesimo arco di circonferenza (n. 315), hanno gli angoli ordinatamente uguali (n. 269). Ne discende, pel n. 457, che sono proporzionali i segmenti AD, AE, BD, BC, ossia che i rettangoli contenuti da AD, BC, e da AE, BD sono equivalenti (n. 491), cioè

$$r\ (AD, BC) \text{ equiv. } r\ (AE, BD).$$

In secondo luogo, se agli angoli uguali $\widehat{ADE}$, $\widehat{BDC}$ togliamo (od aggiungiamo) l'angolo $\widehat{BDE}$, troviamo che sono uguali gli angoli $\widehat{ADB}$, $\widehat{EDC}$; e poichè gli angoli $\widehat{DBA}$, $\widehat{DCA}$, perchè iscritti in un medesimo arco di circonferenza, sono uguali, i due triangoli ADB, EDC hanno (n. 269) gli angoli ordinatamente uguali. Di qui risulta (n. 457) che i segmenti CD, EC, BD, AB sono proporzionali, ossia che sono equivalenti i rettangoli contenuti da AB, CD e da EC, BD,

$$r\ (AB, CD) \text{ equiv. } r\ (EC, BD).$$

Da quanto precede concludiamo (n. 349) che

$r\ (AD, BC) + r\ (AB, CD)$ equiv. $r\ (AE, BD) + r\ (EC, BD)$

cioè pel n. 350, essendo $AE + EC = AC$,

$$r\ (AD, BC) + r\ (AB, CD) \text{ equiv. } r\ (AC, BD).$$

497. La proposizione del n. 491 fornisce una condizione necessaria e sufficiente, affinchè quattro segmenti siano in proporzione, e quindi dà un modo

semplice di verificare la proporzionalità fra coppie di segmenti. Precisamente essa stabilisce: dire che fra quattro segmenti a, b, c, d sussiste la proporzione

$$a : b = c : d,$$

equivale ad affermare che il rettangolo di a e d è equivalente al rettangolo di b e c.

Se a definire la proporzionalità di quattro segmenti si assume la proprietà or ora indicata, si dimostrano assai agevolmente le proprietà generali delle proporzioni segmentarie, proprietà che poi, con un procedimento uniforme, si estendono alle proporzioni fra poligoni.

Per es., se

$$a : b = c : d$$

e quindi il rettangolo di a e d è equivalente a quello di b e c (n. 491), basta notare che il rettangolo di b e c è uguale a quello di c e d per concludere che insieme colla data proporzione sussiste la

$$a : c = b : d,$$

ottenuta da quella *permutando i medi.*

Analogamente si dimostra che vale ancora la proporzione

$$d : b = c : a,$$

ottenuta dalla data *permutando gli estremi.*

Si ha così pei segmenti la dimostrazione del teorema del n. 446. È allora assai facile estenderlo anche ai poligoni.

Siano dati quattro poligoni A, B, C, D in proporzione, cioè tali che

$$A : B = C : D.$$

Immaginando trasformati i quattro poligoni in quattro rettangoli aventi una medesima altezza h, indichiamone rispettivamente con a, b, c, d le basi.

Poichè rettangoli di uguale altezza stanno fra loro come le basi (n. 464), avremo

$$A : B = a : b$$
$$C : D = c : d,$$

e quindi, per la proporzionalità di A, B, C, D (n. 471)

$$a : b = c : d.$$

Ma con questa proporzione sussistono anche le

$$a : c = b : d,\ d : b = c : a$$

e, poichè (n. 464)

$$a : c = A : C$$
$$b : d = B : D,$$

se ne conclude che

$$A : C = B : D \text{ e } D : B = C : A.$$

Dunque *se quattro segmenti o poligoni sono in proporzione, sussistono anche le proporzioni, che si deducono dalla data, permutando i medi o gli estremi.*

Nota. — In modo analogo si ridimostrerebbe che sussistono con una data proporzione fra segmenti o poligoni anche quelle dedottene *componendo* e *dividendo* (cfr. n. 447).

Poligoni simili.

Alcuni dei teoremi trovati innanzi (nel primo e nel secondo gruppo) relativamente ai triangoli aventi i lati proporzionali, si possono estendere ai poligoni e danno luogo ad una teoria della *similitudine*, di cui qui raccogliamo i principi.

498. Def. — Due poligoni aventi ordinatamente uguali gli angoli e proporzionali i lati compresi fra angoli uguali, si dicono *simili.*

Cioè due poligoni ABCDE, A′B′C′D′E′ si dicono simili se si ha

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \ldots\ldots, \widehat{E} = \widehat{E'};$$
$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \ldots\ldots = EA : E'A'.$$

Diconsi *corrispondenti* i vertici di angoli uguali e i lati e le diagonali che congiungono vertici corrispondenti.

499. Si ha similitudine *diretta* o *inversa* secondo che gli angoli corrispondenti (uguali) hanno o no lo stesso verso.

500. Per avere due poligoni simili basta considerare due quadrati quali si vogliano o, più in generale, due poligoni regolari di ugual numero di lati.

Di più noi abbiamo considerato triangoli simili ai nn. 457, 484, 485.

Si è veduto in quei numeri che affinchè si possa concludere che due triangoli sono simili basta aver verificato:

a) o che hanno i lati ordinatamente proporzionali;

b) o che hanno un angolo uguale ad un angolo e i lati intorno agli angoli uguali in proporzione;

c) o che hanno gli angoli ordinatamente uguali.

Si arguisce di qui, come per concludere che due poligoni siano simili, non sia necessario verificare l'uguaglianza di tutti gli angoli e la proporzionalità di tutti i lati corrispondenti. Ed effettivamente si ha il seguente teorema, che comprende come casi particolari quelli or ora ricordati, e di cui proponiamo come esercizio la dimostrazione.

Teor. — *Di due poligoni di ugual numero di lati si può concludere che sono simili se si sa che hanno ordinatamente uguali gli angoli e proporzionali i lati intorno agli angoli uguali, eccettuati:*

1. *o tre angoli consecutivi;*
2. *o due angoli consecutivi e il lato comune ad essi;*
3. *o due lati consecutivi e l'angolo compreso;*

sui quali lati ed angoli non si fa alcuna ipotesi.

501. Teor. — *Poligoni simili ad un terzo sono simili fra di loro.*

502. Teor. – *Se due poligoni sono simili e hanno due lati corrispondenti uguali sono uguali.*

Infatti, poichè i lati corrispondenti sono proporzionali e uno dei lati dell'un poligono è uguale al corrispondente dell'altro poligono, i lati sono uguali (n. 442); e i due poligoni, avendo uguali ordinatamente gli angoli e i lati, sono uguali.

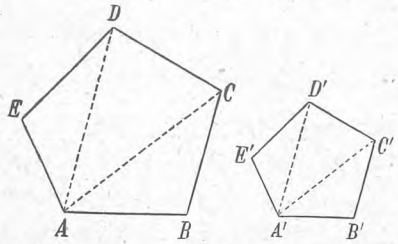
503. Teor. — *Se in due poligoni simili da due vertici corrispondenti si conducono tutte le possibili diagonali, i poligoni rimangono divisi nello stesso numero di triangoli ordinatamente simili.*

Siano ABCDE, A′B′C′D′E′ due poligoni simili; sarà allora

$$\widehat{A}=\widehat{A'},\ \widehat{B}=\widehat{B'},\ \widehat{C}=\widehat{C'},\ \widehat{D}=\widehat{D'},\ \widehat{E}=\widehat{E'};$$

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'.$$

Congiunti A con C e D e A′ con C′ e D′, diciamo che i triangoli ABC, ACD, ADE sono simili rispettivamente ad A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′.



I triangoli ABC, A′B′C′ sono simili perchè hanno gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$ uguali e i lati intorno ad essi in proporzione (n. 484). Ne discende che gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ sono uguali rispettivamente ad $\widehat{A'C'B'}$, $\widehat{B'A'C'}$ e che AC, A′C′ sono proporzionali ad AB, A′B′ e quindi anche a CD, C′D′. Ma allora nei triangoli ACD, A′C′D′ gli angoli

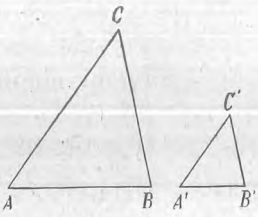
$$\widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA},$$

$$\widehat{A'C'D'} = \widehat{B'C'D'} - \widehat{B'C'A'}$$

sono uguali come differenze di angoli uguali: e i due triangoli avendo due angoli uguali e i lati intorno ad essi in proporzione sono simili (n. 484).

Analogamente si dimostra che sono simili anche i triangoli ADE, A′D′E′.

504. Dati un triangolo ABC e un segmento qualsiasi A′B′ si può costruire su A′B′ un triangolo simile ad ABC. Basta condurre per A′, B′, da una stessa banda rispetto ad A′B′ due semirette che formino colla trasversale A′B′ due angoli

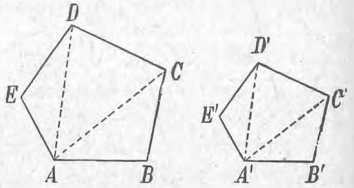


coniugati interni uguali ad $\widehat{A}, \widehat{B}$ rispettivamente. Siccome la somma di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ è minore di due retti (n. 267), le due semirette si incontrano in un punto C' (n. 265), e il triangolo A'B'C', che ha gli angoli ordinatamente uguali ad ABC sarà simile ad esso (n. 457).

505. Ciò premesso, possiamo risolvere in generale il seguente

Probl. — *Sopra un lato dato costruire un poligono simile ad un poligono dato.*

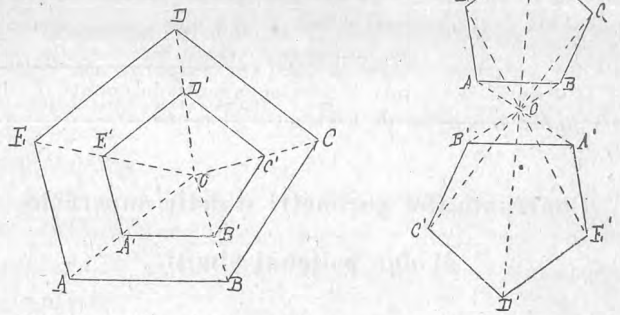
Sia ABCDE il poligono e sia A'B' il lato prefissato. Decomposto il poligono in triangoli conducendo per C tutte le diagonali, si costruisca su A'B' il triangolo A'B'C' simile ad ABC; su A'C', dalla parte opposta di C'A'B' si costruisca il triangolo A'C'D' simile ad ACD; e su A'D' da parte opposta di A'C'D' il triangolo A'D'E' simile ad ADE.



Il poligono A'B'C'D'E' è simile al dato perchè per costruzione le coppie di segmenti AB, A'B'; BC, B'C'; CD, C'D'; DE, D'E'; EA, E'A' sono proporzionali e gli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$, sono uguali rispettivamente ad $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{C'}, \widehat{D'}, \widehat{E'}$, come somme di angoli uguali.

506. Vi è un caso particolare in cui la costruzione precedente si può semplificare in modo notevole.

Il segmento A'B' sia parallelo ad AB e le due rette AA', BB' si intersechino in un punto O. Congiunto allora il punto O coi punti C, D, E, si conduca da B' la parallela a BC fino ad intersecare la OC in C', da C' la parallela alla CD fino ad intersecare la OD in D' e, infine, da D' la parallela alla DE ad intersecare la OE in E'. Si congiunga da ultimo E' con A'.



I triangoli A'B'O, B'C'O,.., sono simili rispettivamente ai triangoli ABO, BCO..., (nn. 263, 500); onde risulta immediatamente che gli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ e $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{C'}, \widehat{D'}, \widehat{E'}$ di ABCDE e di A'B'C'D'E' sono rispettivamente uguali come somme o differenze di angoli uguali e che i lati A'B', B'C', C'D', D'E' sono proporzionali ad AB, BC, CD, DE.

Se ne conclude che i due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' sono simili (n. 498).

507. Risulta dalla costruzione precedente che se due poligoni ABC..., A'B'C'..., aventi i lati ordinatamente paralleli, sono tali che le rette congiungenti i vertici AA', BB', CC'..., passino per uno stesso punto O, i due poligoni sono simili.

Due poligoni siffatti si dicono *omotetici* e in essi chiamansi omologhi o corrispondenti i vertici allineati col punto O: questo punto dicesi *centro di omotetia.*

508. Nota. La costruzione che al n. 506 abbiamo applicato al poligono ABCDE, partendo dal centro O e dal punto A', prefissato come corrispondente al punto A, si può applicare ad

una qualsiasi figura F. Prefissato il centro O e preso sulla retta OA, congiungente O con un punto A di F, un punto A', che debba essere corrispondente di A, si faccia corrispondere ad un qualsiasi punto P di F il punto P', che appartiene alla semiretta OP o all'opposta secondo che A' appartiene alla semiretta AO o all'opposta, e tale di più che

$$OP' : OP = OA' : OA.$$

L'insieme dei punti P' corrispondenti dei punti P di F dicesi *figura omotetica di* F rispetto al *centro* O.

Confronto dei perimetri e delle superficie di due poligoni simili.

Prima di considerare le relazioni che intercedono fra i perimetri e fra le superficie di due poligoni simili, dimostreremo, come Lemma, un teorema generale che, del resto, ci tornerà utile nel seguito anche in altre considerazioni.

509. Teor. — *Se più coppie di grandezze tutte omogenee sono proporzionali, la coppia costituita dalla somma delle antecedenti e da quella delle conseguenti è anch'essa proporzionale alle coppie date*; cioè se

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = ... = A_n : B_n$$

si ha anche

$$A_1 + A_2 + ... + A_n : B_1 + B_2 + ... + B_n = A_n : B_n$$

Per semplicità, dimostriamo il teorema nel caso di tre sole coppie: cioè, supposto che sia

$$(1) \qquad A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3$$

proponiamoci di dimostrare che

$$A_1 + A_2 + A_3 : B_1 + B_2 + B_3 = A_3 : B_3.$$

Infatti dalla proporzione

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2,$$

permutando i medi e poi componendo (n. 446), otteniamo successivamente

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2$$
$$A_1 + A_2 : A_2 = B_1 + B_2 : B_2.$$

Permutando ancora i medi avremo

$$A_1 + A_2 : B_1 + B_2 = A_2 : B_2$$

e tenendo conto della

$$A_2 : B_2 = A_3 : B_3$$

concludiamo

$$A_1 + A_2 : B_1 + B_2 = A_3 : B_3.$$

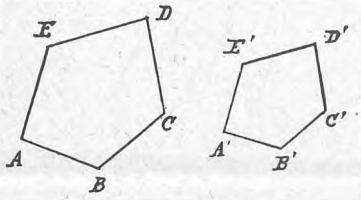
Allora permutiamo ancora i medi, componiamo e torniamo a permutare i medi. Otterremo così successivamente

$$A_1 + A_2 : A_3 = B_1 + B_2 : B_3,$$
$$A_1 + A_2 + A_3 : A_3 = B_1 + B_2 + B_3 : B_3,$$
$$A_1 + A_2 + A_3 : B_1 + B_2 + B_3 = A_3 : B_3;$$

come appunto volevasi dimostrare

Ciò premesso passiamo a dimostrare i preannunciati teoremi sulle relazioni che intercedono fra i perimetri e fra le superficie di due poligoni simili.

510. Teor. — *I perimetri di due poligoni simili stanno fra loro come due lati corrispondenti qualsiansi.*



Dati i due poligoni simili ABCDE, A'B'C'D'E', diciamo che i loro perimetri stanno fra loro come due lati corrispondenti quali si vogliano, p. es. come AB sta ad A'B'.

Infatti, poichè i lati sono proporzionali abbiamo che

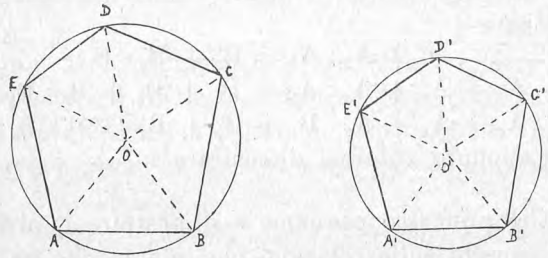
$$AB : A'B' = BC : B'C' = ... = EA : E'A'.$$

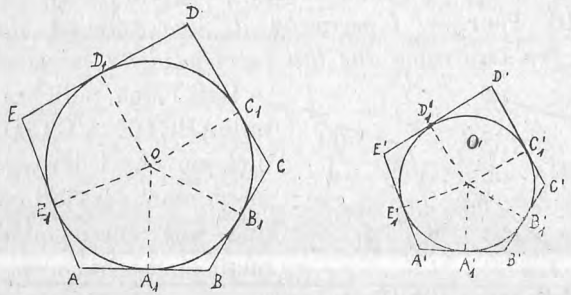
Discende di qui appunto, in virtù del teorema precedente, che

$$AB + BC + ... + EA : A'B' + B'C' + + ... + E'A' = AB : A'B'.$$

511. Dato un poligono ABCDE iscritto in un cerchio O, si può sempre iscrivere in un altro cerchio O′ un poligono simile al dato, e che abbia un dato punto A′ della circonferenza O′ come vertice omologo di un vertice prefissato A di ABCDE.

Congiunto O con A, B, C, D, E e O′ con A′, si conducano nel cerchio O′ i raggi O′B′, O′C′, O′D′,





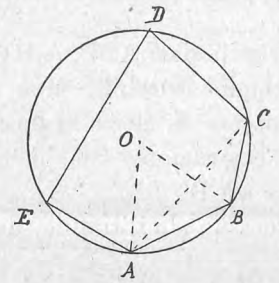
O′E′ tali che gli angoli $A'\widehat{O'}B'$, $B'\widehat{O'}C'$, $C'\widehat{O'}D'$, $D'\widehat{O'}E'$ siano uguali rispettivamente ad $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$, $C\widehat{O}D$, $D\widehat{O}E$. Risulterà anche $E'\widehat{O'}A' = E\widehat{O}A$, e i triangoli

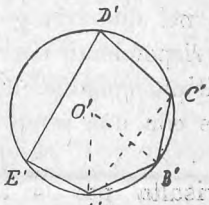
A′O′B′, B′O′C′, C′O′D′, D′O′E′, E′O′A′ saranno simili ad AOB, BOC, COD, DOE, EOA rispettivamente. Di qui risulta subito che il poligono ABCDE ha i lati proporzionali al poligono A′B′C′D′E′ e gli angoli ordinatamente uguali; cioè i due poligoni sono simili.

Analogamente, dato un poligono ABCDE, circoscritto ad un cerchio O, si può circoscrivere ad un altro cerchio qualsiasi O′ un poligono simile e che abbia come lato corrispondente ad un lato prefissato AB del primo la tangente ad O′ in un punto A'_1 dato. Basta infatti congiungere O coi punti di contatto A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 dei lati AB, BC, CD, DE, EA rispettivamente e, unito O′ con A′, condurre in O′ i raggi $O'B'_1$, $O'C'_1$, $O'D'_1$, $O'E'_1$ tali che gli angoli $A'_1\widehat{O'}B'_1$, $B'_1\widehat{O'}C'_1$, $C'_1\widehat{O'}D_1$, $D'_1\widehat{O'}E'_1$ risultino uguali ad $A_1\widehat{O}B_1$, $B_1\widehat{O}C_1$, $C_1\widehat{O}D_1$, $D_1\widehat{O}E_1$ rispettivamente. Allora l'angolo $E'_1\widehat{O'}A'_1$ sarà uguale ad $E_1\widehat{O}A_1$ e il poligono A′B′C′D′E′ circoscritto ad O′ nei punti A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, E'_1, sarà simile ad ABCDE.

512. Ciò premesso, dimostriamo il seguente

Teor. — *I perimetri di due poligoni simili iscritti*





o circoscritti a due cerchi stanno fra loro come i raggi dei due cerchi.

Notiamo anzitutto che i perimetri di due poligoni simili ABCDE, A′B′C′D′E′ iscritti in due cerchi O, O′ stanno fra loro come due lati corrispondenti, p. es. come AB e A′B′ (n. prec.).

Congiunti allora A con C e A′ con C′, i due triangoli ABC, A′B′C′ sono simili, perchè hanno gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$ uguali e i lati intorno ad essi in proporzione (n. 484). Di qui risulta che sono uguali gli angoli $B\widehat{C}A$, $B'\widehat{C'}A'$ e quindi anche i rispettivi angoli al centro $B\widehat{O}A$, $B'\widehat{O'}A'$ (n. 314).

Allora i due triangoli isosceli ABO, A′B′O′, aventi uguali gli angoli al vertice, hanno uguali tutti gli angoli e quindi sono simili. Di qui risulta che come AB sta ad A′B′ così AO sta ad A′O′. Si conclude (n. 469) che il perimetro di ABCDE sta a quello di A′B′C′D′E come AO sta ad A′O′.

Analogamente si dimostra il teorema per due poligoni simili circoscritti a due cerchi.

513. Teor. — *Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.*

1.° Consideriamo dapprima il caso dei triangoli.

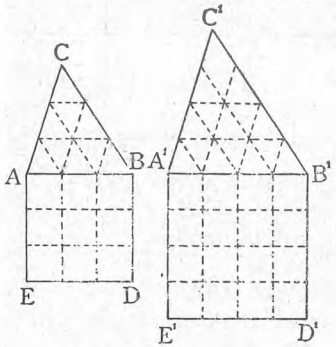
Se nei due triangoli simili dati ABC, A′B′C′, due lati corrispondenti sono commensurabili, cioè hanno un multiplo comune, il teorema si mette in luce direttamente con una semplice costruzione. Sia, p. es.,

$$4AB = 3A'B',$$

onde risulta per la ammessa similitudine dei due triangoli,

$$4BC = 3B'C',\ 4CA = 3C'A'.$$

Avremo allora che se si divide AB in 3 parti uguali e A′B′ in 4 parti uguali, le parti di AB risulteranno uguali a quelle di A′B′: e analogamente, divisi AC e BC in 3 parti uguali e A′C′ e B′C′ in 4 parti uguali, saranno uguali le parti di AB e A′B′ e quelle di BC e B′C′. Congiunti in ciascuno dei due triangoli i punti di divisione corrispondenti dei lati e costruiti i quadrati di AB e A′B′, vediamo per una parte che



ABC e A′B′C′, sono rispettivamente somme di 9 e 16 triangoli, tutti uguali fra loro e d'altra parte, che anche i quadrati ABDE, A′B′D′E′ si ottengono rispettivamente come somme di 9, 16 quadrati, tutti uguali fra loro. Abbiamo quindi

$$\frac{ABC}{9} = \frac{A'B'C'}{16} \qquad \frac{ABDE}{9} = \frac{A'B'D'E'}{16}$$

ossia

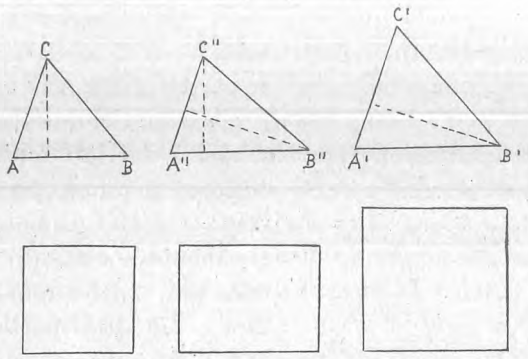
$$16\ ABC = 9\ A'B'C',\ 16\ ABDE = 9\ A'B'D'E'$$

onde risulta che veramente

$$ABC : A'B'C' = ABDE : A'B'D'E'.$$

Analogamente si ragiona in ogni altro caso, in cui i lati corrispondenti dei due triangoli siano commensurabili.

Nel caso generale si costruisca il triangolo A″B″C″ di cui l'angolo $\widehat{A''}$ sia uguale ad $\widehat{A}$ (e ad $\widehat{A'}$) e i lati A″B″, A″C″ che comprendono $\widehat{A''}$ siano uguali rispettivamente ai due lati A′B′, AC (non corrispondenti) dei due triangoli dati. È allora manifesto che i due triangoli ABC, A′B″C″ hanno uguale altezza rispetto alle basi AB, A″B″ e i triangoli A′B′C′, A″B″C hanno uguale altezza rispetto alle basi A′C′, A″C″.



Risulta di qui che (n. 464)

$$ABC : A''B''C'' = AB : A''B''$$
$$A''B''C'' : A'B'C' = A''C'' : A'C'$$

ossia, essendo $A''B'' = A'B'$, $A''C'' = AC$,

$$ABC : A''B''C'' = AB : A'B'$$
$$A''B''C'' : A'B'C' = AC : A'C';$$

e poichè

$$AC : A'C' = AB : A'B',$$

all' ultima proporzione si potrà sostituire l' altra

$$A''B''C'' : A'B'C' = AB : A'B'.$$

Ma considerati i quadrati di AB e A'B' e il rettangolo di AB e A'B' abbiamo (n. 464) che

$$q\ (AB) : r\ (AB, A'B') = AB : A'B'$$
$$r\ (AB, A'B') : q\ (A'B') = AB : A'B';$$

e da queste due proporzioni e dalle precedenti risulta che

$$ABC : A''B''C'' = q\ (AB) : r\ (AB, A'B')$$
$$A''B''C'' : A'B'C' = r\ (AB, A'B') : q\ (A'B'),$$

e, permutando i medi,

$$ABC : q\ (AB) = A''B''C'' : r\ (AB, A'B') = A'B'C' : q\ (A'B').$$

Si conclude di qui che

$$ABC : q\ (AB) = A'B'C' : q\ (A'B'),$$

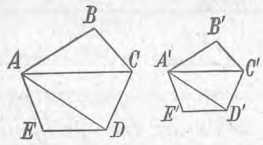
e quindi (n. 446)

$$ABC : A'B'C' = q\ (AB) : q\ (A'B');$$

cioè i due triangoli ABC, A'B'C' stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi AB, A'B'.

2.° Ciò premesso, consideriamo due poligoni simili a quanti lati si vogliano ABCDE, A'B'C'D'E'.

Diciamo che le superficie dei due poligoni stanno tra di loro come le superficie $q(AB)$, $q(A'B')$ dei quadrati di due lati corrispondenti AB, A'B'.



Nei due poligoni si conducano da A, A' tutte le possibili diagonali : i due poligoni restano così decomposti nella somma di un certo numero di triangoli a due a due simili (n. 503).

Avremo per quanto si è visto nella prima parte di questa dimostrazione

$$ABC : A'B'C' = q\ (AC) : q\ (A'C'),$$
$$ACD : A'C'D' = q\ (AC) : q\ (A'C');$$

e di qui, in base al n. 469 si deduce

$$(1) \qquad ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D'.$$

Analogamente si dimostra che

$$(2) \qquad ACD : A'C'D' = ADE : A'D'E';$$

e allora, tenendo conto delle (1) (2) e del teor. del n. 509 avremo che

$$ABC + ACD + ADE : A'B'C' + A'C'D' + A'D'E' = ABC : A'B'C';$$

ossia

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = ABC : A'B'C'.$$

Poichè ABC, A'B'C' stanno fra loro come $q\ (AB)$, $q\ (A'B')$, concludiamo che

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = q\ (AB) : q\ (A'B').$$

514. Nota. Se due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' sono simili abbiamo pel teor. prec. che le loro superficie sono proporzionali ai quadrati di due lati omologhi qualsiansi : avremo quindi (n. 471)

$$q\ (AB) : q\ A'B') = q\ (BC) : q\ (B'C') = \ldots$$
$$= q\ (DE) : q\ (D'E') = q\ (EA) : (E'A').$$

Ora, se sono date più coppie di segmenti proporzionali, queste si possono sempre riguardare come coppie di lati omologhi di due poligoni simili.

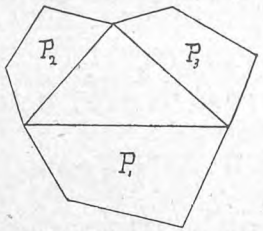
Abbiamo così indirettamente il seguente teorema, che sarebbe facile dimostrare anche direttamente: *Se più coppie di segmenti sono proporzionali,*

$$a : a' = b : b' = \ldots = h : h'$$

anche i loro quadrati sono proporzionali, cioè

$$q(a) : q(a') = q(b) = q(b') \ldots = q(h) : (h').$$

515. Cor. — *Se sui tre lati di un triangolo rettangolo, come lati corrispondenti, sono costruiti tre poligoni simili, il poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui due cateti.*



Se P_1 è il poligono costruito sulla ipotenusa e P_2, P_3 sono i poligoni costruiti sui cateti, e Q_1, Q_2, Q_3 sono i quadrati costruiti rispettivamente sui medesimi lati abbiamo (n. 513)

$$P_2 : P_3 = Q_2 ; Q_3.$$

Di qui componendo e ricordando (n. 363) che la somma di Q_2 e Q_3 è equivalente a Q_1, otteniamo

$$P_2 + P_3 : P_3 = Q_1 : Q_3.$$

Ma abbiamo ancora

$$P_1 : P_3 = Q_1 : Q_3,$$

onde risulta (n. 473) che P_1 equivalente alla somma di P_1 e P_3, ossia il poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui cateti.

ESERCIZI

I seguenti esercizi procedono parallelamente agli sviluppi del testo, salvochè ravviciniamo in essi i teoremi del gruppo che prende nome dalla proposizione di TALETE ai loro inversi, usufruendo fin da principio delle proprietà inerenti al confronto di due proposizioni.

1. Se tre rette passanti per un medesimo punto vengono segate con due parallele, si ottengono su queste due coppie di segmenti adiacenti che sono in proporzione.

2. Si notino altre due coppie di segmenti in proporzione cui si dà origine colla costruzione dell'eserc. prec.

3. Una mediana di un triangolo è il luogo dei punti medi dei segmenti paralleli al lato su cui cade la mediana, intercetti dagli altri due lati.

4. I punti di mezzo delle basi di un trapezio, il punto di incontro delle diagonali e quello dei lati non paralleli sono in linea retta.

5. Se sopra due rette parallele si hanno due terne di punti susseguentisi A, B, C e A′, B′, C′, tali che

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

le tre rette AA′, BB′, CC′ passano per un medesimo punto o sono parallele.

6. Si inverta analogamente l'esercizio 2.

7. Se in due triangoli ABC, A′B′C′ gli angoli $\widehat{B}, \widehat{B'}$ sono uguali e gli angoli $\widehat{C}, \widehat{C'}$ sono supplementari si ha

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

[Portato il triangolo A′B′C′ ad avere il vertice B′ sul vertice B di ABC e i lati B′A′, B′C′ su BA, BC rispettivamente'

si conduca da A la parallela ad A'C' fino ad incontrare in H la BC, ecc.].

8. Dato un segmento AB e preso sulla sua retta un punto C distinto da A, B e dal punto medio di AB, determinare un punto D che insieme con D divida armonicamente il segmento AB. (Costruzione del *quarto armonico* dopo tre punti dati). [Cfr. n. 483].

9. Dimostrare che vi è un solo punto D, soddisfacente al probl. prec.

10. Se C, D dividono armonicamente il segmento AB, da un punto M qualsiasi le cui distanze da A, B, siano proporzionali ad AB, BC, si vede CD sotto un angolo retto [Congiunto M con A, B, C, D si ricordino i nn. 480, 481].

11. Luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono proporzionali a due segmenti dati (disuguali fra loro). [Es. prec.].

12. Costruire un triangolo, data la base, la mediana relativa a questa e due segmenti proporzionali ai rimanenti lati. [Es. prec.].

13. Costruire un triangolo equivalente ad un triangolo assegnato, data la base e il punto di incontro di questa colla bisettrice dell'angolo opposto [Cfr. n. 454 ed es. 11].

14. Costruire un triangolo data la base e l'angolo opposto, sapendo che i due lati intorno a questo debbono essere l'uno doppio dell'altro [es. 11].

15. Nel piano di un triangolo costruire i punti le cui distanze dai tre vertici siano proporzionali a tre segmenti assegnati [es. 11].

16. Luogo dei punti le cui distanze da due cerchi dati sono proporzionali ai raggi dei due cerchi. [Si considerino le distanze di un punto del luogo dai due centri e si ricordi l'es. 11].

17. Luogo dei punti da cui si vedono due cerchi dati sotto un medesimo angolo. [L'angolo sotto cui è veduto un cerchio da un punto esterno è quello delle due tangenti condotte da esso al cerchio. Si consideri per ciascun cerchio il triangolo che ha per vertici un punto M del luogo in questione, il punto di contatto di una tangente per esso e il centro. Le distanze del punto M dai due centri sono proporzionali ecc. (es. 11)].

18. Se $A : B = B' : C'$ e $B : C = A' : B'$ (cioè se A, B, C sono, secondo la nomenclatura euclidea, proporzionali ad A, B, C, in ordine *perturbato*) secondochè A è maggiore, uguale o minore di C, è anche A' maggiore, uguale o minore di C'. [Se $A > C$ si prenda n in modo che $n(A - C) > B$; allora esiste (almeno) un multiplo pB di B compreso fra nA ed nC, e dalle $nA > pB > nC$ e dalle date proporzioni risulta ecc.].

19. Se $A : B = B' : C'$ e $B : C = A' : B'$ si ha anche $A : C = A' : C'$. [Presi due numeri qualsiansi m, n, si applichi l'es. prec. alle proporzioni $mA : mB = nB' : nC'$, $mB : nC = mA' : nB'$].

20. Teorema di Pappo. — Se su due rette sono date due terne di punti A, B, C e A', B, C' e le rette AB' e CB' sono parallele rispettivamenle alle A'B, C'B, anche le AC', A'C sono parallele. [Si tenga conto del teor. di TALETE e del n. prec.].

21. Se in un triangolo rettangolo è iscritto un quadrato (con un lato sull'ipotenusa) l'ipotenusa rimane divisa in tre parti, che formano una proporzione continua.

22. Costruire un triangolo conoscendone due angoli e una altezza. [Si cominci col costruire un triangolo simile al cercato].

23. In triangoli aventi gli angoli ordinatamente uguali (*simili*) le mediane, le altezze, le bisettrici corrispondenti sono proporzionali ai lati omologhi.

24. Due triangoli che abbiano le mediane proporzionali sono simili.

25. Due triangoli che abbiano le altezze proporzionali sono simili.

26. Se quattro segmenti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ sono tali che

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} \text{ e } \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}$$

e i tre primi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sono lati di un triangolo, anche $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ sono lati di un triangolo e i due triangoli che così si ottengono hanno cinque elementi (lati ed angoli) uguali senza essere uguali [1].

27. Se due triangoli disuguali ABC, A'B'C' sono tali che i lati AB, BC, CA del primo siano ordinatamente paralleli ai lati A'B', B'C', C'A' del secondo, le congiungenti AA', BB',

[1] I. AMALDI — *Appunti di Geometria* - Pitagora, Anno II, n. 1, 1895-96.

CC′ dei vertici omologhi passano per un medesimo punto. [Si confronti la semplice dimostrazione diretta che qui si ottiene con quella data all'es. 89 pag. 222].

28. Se due triangoli disuguali ABC, A′B′C′ sono tali che le congiungenti AA′, BB′, CC′, dei vertici omologhi passino per un punto e i due lati AB, BC del primo siano paralleli ai due lati A′B′, B′C′ del secondo, anche il lato CA è parallelo al lato C′A′. [Per assurdo e tenendo conto dell'eserc. prec.].

Colla sola riga e applicando i due es. prec.

29. Condurre per un punto dato la parallela a due rette date, parallele fra loro.

30. Dato nel piano un parallelogramma, condurre per un punto la parallela ad una retta qualsiasi assegnata.

31. Costruire una circonferenza la quale passi per due punti dati A, B e sia tangente ad una retta c [Se la AB interseca la c in S, ed X è il punto di contatto della circonferenza cercata con c, il segmento SX rispetto ad AS, SB è ecc.].

32. Costruire una circonferenza, la quale passi per un punto dato C e sia tangente a due rette date a, b [Se c è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ab}$ (o della striscia ab) e C_1 è il simmetrico di C rispetto a c, la circonferenza passa anche per C_1, onde riferendosi all'esercizio prec. ecc.].

33. Se tre circonferenze a due a due si segano o si toccano, i loro assi radicali, supposti distinti, passano per un medesimo punto o sono paralleli. [Si confronti la dimostrazione che qui si ottiene con quella dell'eserc. 79 a pag. 221].

34. Costruire una circonferenza passante per due punti dati A e B e tangente a un cerchio dato C [Si conduca per A, B una circonferenza che seghi la C e pel punto di incontro dell'asse radicale di codeste due circonferenze colla retta AB si mandi una tangente a C].

35. Sopra una retta, dati quattro punti A, B, A′, B′, determinare un punto O, le cui distanze da A, A′ siano proporzionali a quelle da B, B′. [Si mandino per A, B′ e rispettivamente per A′, B due circonferenze secantisi e si consideri il punto di incontro della retta data coll'asse radicale].

36. Se le quattro circonferenze C, K, L, M sono a due a due secantisi le corde comuni di C, K e di L, M, appartengono ad una medesima retta, gli assi radicali dei cerchi C, L e K, M e di C, M e K, L si incontrano in un medesimo punto della retta suddetta. [Si dimostra stabilendo l'unicità del punto che risolve il problema proposto nel prec. es.].

37. Il rettangolo contenuto da due segmenti è medio proporzionale fra i quadrati di questi.

38. Costruire il segmento che è quarto proporzionale dopo due triangoli e un segmento assegnati.

39. Se quattro segmenti sono in proporzione anche i loro quadrati sono proporzionali.

40. Costruire un quadrato che sia quarto proporzionale dopo tre quadrati dati.

41. Dimostrare il caso particolare del teoroma di TALETE enunciato al n. 449, appoggiandosi alla proporzionalità dei triangoli di data altezza alle basi e all'uguaglianza di rapporto (n. 469). [Dimostrazione di EUCLIDE].

42. Il lato di un quadrato è medio proporzionale fra l'altezza e la metà del lato di un triangolo equilatero equivalente. [Si confronti il quadrato col rettangolo avente per altezza l'altezza del triangolo equilatero e per base la metà della base di questo].

43. In un triangolo i rettangoli dei segmenti, in cui le altezze sono divise dal loro punto di incontro sono equivalenti. [Si consideri il cerchio circoscritto].

44. Dividere un segmento dato in due parti il cui rettangolo sia equivalente ad un altro rettangolo assegnato. [Si risolva in base al n. 491. Cfr. es. 68, pag. 219].

45. Iscrivere in un quadrato un rettangolo equivalente ad un rettangolo assegnato. [Si divida il lato del quadrato in due parti....].

46. Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al rettangolo dell'altezza corrispondente al terzo lato e del diametro del cerchio circoscritto. [Abbassata dal vertice A di ABC l'altezza AH e condotto il diametro AD del cerchio circoscritto, si confrontino i due triangoli AHC, ABD, ecc.].

47. Dividere un segmento dato in due parti in modo che una di esse sia media proporzionale fra l'intero segmento e l'altra parte, ottenendo così una nuova costruzione della *sezione aurea* (cfr. n. 400.). [Innalzato in un estremo del segmento dato AB il segmento perpendicolare $BC = \frac{AB}{2}$ sia D il punto in cui il segmento AC è segato dalla circonferenza di centro C e raggio BC. Il segmento AD è il segmento cercato, perchè ecc.].

48. Costruire un parallelogramma simile ad un parallelogramma dato e avente una diagonale data.

49. Costruire un triangolo, di cui siano dati due angoli e

a) un'altezza; oppure

b) una bisettrice; oppure

c) la proiezione di un lato su di un altro; oppure

d) il perimetro.

[Si risolve il problema col cosidetto *Metodo di similitudine* (1). Tralasciando la condizione *a*) o *b*) *c*) o *d*), si costruisca un qualsiasi triangolo simile a quello cercato e fra i triangoli simili a questo se ne determini uno soddisfacente alla ulteriore condizione, di cui non si è tenuto conto].

50. Costruire un triangolo, dato l'angolo al vertice, due segmenti proporzionali ai lati che lo comprendono e la bisettrice relativa all'angolo stesso. [Metodo di similitudine: si tralascia la terza condizione. Si ricordi poi l'es. 11].

51. Circoscrivere ad un cerchio dato una losanga simile ad una losanga data. [Si consideri la circonferenza iscritta nella losanga data; si ottiene così una figura simile a quella che si vuole determinare. (*Metodo del problema contrario*)].

52. Circoscrivere a un quadrilatero dato ABCD un quadrilatero EFGH simile a un quadrilatero MNPQ. [Supposto che i lati EF, FG, GH HE passino rispettivamente pei vertici B, C, D, A, gli angoli $\widehat{BFC}$, $\widehat{DHA}$ sono uguali agli angoli $\widehat{N}$, $\widehat{Q}$; onde si possono costruire i cerchi circoscritti ai triangoli BFC, DHA. Siano R, S i punti in cui la diagonale FH incontra codeste due circonferenze: gli angoli $\widehat{EFH}$, $\widehat{EHF}$ sono uguali rispettivamente agli angoli $\widehat{MNQ}$, $\widehat{MQN}$; onde si conoscono gli archi BR, AS, ecc.].

(1) Chi voglia più ampie indicazioni intorno ai metodi cui qui accenniamo, per la risoluzione dei problemi, e intorno alla letteratura che ad essi si riferisce legga l'art. di E. Baroni nei *Collectanea* di F. Enriques (op. cit.).

53. Iscrivere in un quadrilatero dato MNPQ un quadrilatero M'N'P'Q' simile a un quadrilatero dato ABCD. [Si adopera il metodo del problema contrario. Circoscritto ad M' N'P'Q' un quadrilatero A'B'C'D' simile ad MNPQ (es. prec.) si ottiene una figura simile alla cercata ccc.].

54. Costruire un triangolo equilatero i cui vertici appartengano a tre circonferenze concentriche date. [Costruito un qualsiasi triangolo equilatero si determini un punto, le cui distanze dai vertici di esso siano proporzionali ai raggi dei cerchi dati, (es. 15), ecc.].

55. Costruire un triangolo simile a un triangolo dato che abbia un vertice in un punto dato e gli altri due su due rette date. [Supposte le due rette date non parallele, sia $\widehat{PQR}$ l'angolo da esse formato entro cui cade il punto dato O: se è ABC il triangolo dato e al vertice A deve corrispondere nel triangolo cercato il vertice O, si determini il punto D, da cui i segmenti AB, CA si vedono sotto angoli uguali rispettivamente a $\widehat{PQO}$, $\widehat{RQO}$, ecc.].

56. Iscrivere in un triangolo dato un altro triangolo i cui lati siano ordinatamente paralleli a tre rette assegnate. [Si adoperi il *metodo d'omotetia*, rientrante nel metodo di similitudine. Costruito un qualsiasi triangolo che abbia i lati paralleli alle rette assegnate, supposte non parallele fra loro, pei vertici di questo si mandino tre rette parallele ai lati del triangolo dato, quindi si trasformi per omotetia, ricordando l'es. 27].

57. La figura omotetica di una circonferenza è una circonferenza. Date due circonferenze si può considerare una di esse come figura omotetica dell'altra?

58. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo che abbia i lati ordinatamente paralleli a tre rette assegnate.

59. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo simile ad un triangolo dato, e di cui un lato passi per un punto fissato. [Si riduce al precedente es. con una rotazione].

60. Iscrivere un quadrato in un triangolo dato. [Il quadrato dicesi *iscritto* se ha un lato sopra un lato del triangolo, e gli altri due vertici sopra i lati rimanenti. Si costruisca un quadrato che abbia un lato sulla base del triangolo ed un vertice sopra uno degli altri due lati, quindi ecc.].

61. Per un punto interno ad un cerchio condurre una corda, che sia divisa dal punto dato in parti proporzionali a due segmenti. [Se M è il centro del cerchio dato ed S è il punto, si prenda sul prolungamento di MS il punto M_1 tale che M_1S, SM siano proporzionali ai due segmenti dati e si costruisca la circonferenza di centro M_1 omotetica di M rispetto al centro S, ecc.].

62. I perimetri di due poligoni regolari di ugual numero di lati sono proporzionali ai lati, ai raggi, agli apotemi rispettivi; e i poligoni stessi sono proporzionali ai quadrati dei lati, dei raggi, degli apotemi.

63. Se, dati due triangoli, i lati dell'uno sono ordinatamente doppi dei corrispondenti dell'altro, il primo triangolo è equivalente al quadruplo del secondo.

64. Se quattro segmenti sono in proporzione e i due primi sono lati omologhi di due poligoni simili, e i due ultimi sono lati omologhi di due altri poligoni simili, i quattro poligoni sono in proporzione.

65. Costruire un poligono che sia simile ad un poligono dato ed equivalente ad un altro poligono dato. [Si voglia un poligono simile al poligono A ed equivalente al poligono B. Se A', B' sono i quadrati equivalenti rispettivamente ad A e B, indichiamone con a' e b' i lati. Determinato il segmento x quarto proporzionale dopo a', b' ed un lato qualsiasi a di A, si costruisca il poligono X simile ad A, ed avente x per lato omologo di a. Il poligono X è il poligono cercato].

66. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele avente un dato angolo al vertice.

67. Trasformare un triangolo (o un poligono) dato in un triangolo equilatero.

68. Trasformare un triangolo dato in un triangolo rettangolo che abbia un dato angolo acuto.

69. Dividere un triangolo dato in due parti equivalenti per mezzo di una perpendicolare ad un lato prefissato. [Supposto che gli altri due lati del triangolo dato non siano uguali, nel qual caso la risoluzione sarebbe immediata, si noti che una delle due parti in cui resta diviso il triangolo dato è un triangolo rettangolo che ha un angolo acuto comune col primitivo. Ma questo triangolo rettangolo deve essere metà del dato. Quindi ricordando l'eserc. preced. ecc.].

70. Costruire un poligono equivalente al doppio di un poligono dato e ad esso omotetico.

71. Costruire un triangolo equilatero equivalente alla somma di due triangoli equilateri assegnati.

72. Costruire un esagono regolare equivalente ad un triangolo equilatero assegnato. [Esso deve essere equivalente alla sesta parte dell'esagono, ecc.].

73. Costruire un pentagono regolare equivalente alla differenza di due pentagoni regolari assegnati (Cfr. n. 515).

74. Determinare il perimetro di un poligono che sia equivalente al doppio di un poligono simile assegnato. [Si risolva il problema senza costruire il poligono incognito].

75. Se sopra i lati e sopra le diagonali di un parallelogramma si costruiscono sei poligoni simili, la somma dei poligoni costruiti sulle diagonali è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui lati [Cfr. es. 54 a pag. 217].

76. Se dal vertice di un triangolo si tirano alla base due rette formanti con essa angoli uguali a quello al vertice, si hanno due triangoli simili fra loro e al dato: sui tre lati del triangolo primitivo presi come lati corrispondenti si costruiscano tre poligoni simili. Il poligono costruito sulla base sta alla somma degli altri due come la base sta alla somma dei due lati dei due nuovi triangoli che giacciono su di essa. [Si confronti questo teorema con quello del numero 515] (1).

(1) Cfr. I. Amaldi: *Periodico di Matematica;* Anno VII, fasc. III, 1892.

Enunciamo qui alcune definizioni e proponiamo come esercizi una serie di proposizioni, che desumiamo direttamente di EUCLIDE, allo scopo di riprodurre completamente la parte sostanziale della teoria euclidea delle proporzioni.

Anzitutto la proporzionalità di due coppie di grandezze A, B e C, D si esprime anche dicendo che la *ragione* (rapporto) di A a B è uguale a quella di C a D.

Allora il teorema del n. 469 si può esprimere dicendo che *ragioni uguali ad una terza sono uguali fra loro.*

Ciò premesso, stabiliamo la seguente

Def. — Se si hanno tre grandezze A, B, C si dice che A sta a C nella *ragione composta* di A a B e di B a C.

Più in generale si dice che A sta a B nella *ragione composta* di A a B e di F a G se

$$B : C = F : G:$$

e ancora più generalmente si dice che A sta a C nella *ragione composta* di D ad E e di F a G, se esiste una grandezza B tale che

$$A : B = D : E,$$
$$B : C = F : G;$$

In particolare se A sta a C nella ragione composta di D ad E e di F a G e le ragioni di D a E e di F a G sono uguali; cioè se

$$D : E = F : G,$$

si dice che A sta a C nella *ragione duplicata* di D ad E.

Così si dice che A sta a C nella ragione duplicata di A a B se

$$A : B = B : C,$$

cioè se C è la terza proporzionale dopo A e B.

In base alle prec. def. si dimostrino le seguenti proposizioni:

77. Se A sta a C nella ragione composta di D ad E e di F a G ed è

$$nD = mE,\ qF = pG$$

anche A e C sono commensurabili ed è

$$nqA = mpC.$$

78. Ragioni composte di ragioni uguali sono uguali. [Anzitutto si noti che il teorema vale senz'altro nel caso in cui

le due ragioni sono composte di ragioni uguali e prese nello stesso ordine, cioè: Se

$$A : B = A' : B' \qquad B : C = B' : C'$$

si ha che (cfr. per grandezze omogenee il n. 446)

$$A : C = A' : C'.$$

Poi si dimostri nel caso in cui le ragioni componenti non sono considerate nello stesso ordine, cioè: Se

$$A : B = B' : C' \qquad B : C = A' : B'$$

si ha ancora che

$$A : C = A' : C'.$$

Perciò si ricordi l'es. 19].

Nota. — Si può estendere la **Def.** data prima dell'es. 76, considerando ragioni composte di quante si vogliano ragioni. Il teorema or ora proposto sussiste sempre, *indipendentemente* dall'ordine in cui si considerano le ragioni componenti.

79. Se una ragione composta di due (o più) ragioni è uguale ad una ragione composta di altrettante ragioni; e una ragione delle prime (o una ragione composta di alcune delle prime) è uguale ad una ragione delle altre (o ad una ragione composta di alcune delle altre) sarà anche la rimanente ragione delle prime (o la ragione composta delle rimanenti delle prime) uguale alla rimanente ragione della altre (o alla ragione composta delle rimanenti delle altre). [Cioè, nel caso più semplice di due sole ragioni componenti, se $A : C = A' : C'$ e $A : B = A' : B'$, si ha anche $B : C = B' : C'$].

80. Due parallelogrammi o due triangoli, aventi un angolo uguale, stanno fra loro nella ragione composta delle ragioni dei lati intorno agli angoli uguali. [Si confrontino i due parallelogrammi con un parallelogramma avente gli angoli uguali ad essi e un lato uguale ad un lato di ciascuno di essi].

81. Due poligoni simili stanno fra loro nella ragione duplicata della ragione dei lati omologhi. [Pei triangoli è incluso nella proposizione prec. Pei poligoni a più di tre lati si deduce mediante le decomposizione in triangoli (cfr. n. 513)].

Si deduca di qui il teor. del n. 513.

La teoria euclidea delle proporzioni, che noi abbiamo riprodotto, si appoggia essenzialmente sul postulato di ARCHIMEDE (n. 37). Ora HILBERT ha dimostrato come alla teoria della proporzioni fra segmenti si possa dare un assetto tale che essa risulti indipendente da quel postulato. Naturalmente a definire la proporzionalità di quattro segmenti bisognerà scegliere un criterio geometrico diverso da quello del n. 440, fondato sul confronto di multipli di segmenti dati.

Noi qui riproduciamo la semplice ed elegante esposizione che per una tale teoria fu ideata dal prof. BEPPO LEVI [1], limitandoci, naturalmente, a dare soltanto gli enunciati nel loro ordine di deducibilità e lasciandone le dimostrazioni come esercizio.

Def. — Si dirà che quattro segmenti a, b, c, d sono proporzionali e si scriverà

$$a : b = c : d,$$

se i due triangoli rettangoli che hanno per cateti a e c, d e b sono tali che l'angolo opposto ad a è uguale a quello opposto a b e quindi l'angolo opposto a c è uguale e quello opposto a b.

In altre parole, presi su di un lato OX di un angolo retto O, i segmenti $OA = a$, $OB = b$ e sull'altro lato OY i segmenti $OC = c$, $OD = d$, le rette AC, BD debbono essere parallele (n. 477).

Ciò premesso, si dimostrino le seguenti proposizioni.

82. Cor. — Il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati è unico. Si ricordi la seconda forma della prec. def. e la unicità della parallela per un punto ad una retta data (n. 258)].

83. Cor. — Se $a : b = c : d$ si ha anche che

$$c : d = a : b \text{ e } b : a = d : c.$$

84. Cor. — Se $a : b = c : d$ e $a : e = c : f$, si ha anche $b : e = d : f$. [Si ricordi ancora la seconda forma della def. e il n. 254].

85. Teor. — Se $a : b = c : d$ si ha anche che $a + b : a = c + d : c$, cioè sussiste la proporzione dedotta dalla data *componendo*, e se $a > b$ è anche $c > d$ e $a - b : a = c - d : c$. [Preso l'angolo retto $\widehat{XOY}$, e presi su OX i segmenti $OA = a$, $OB = AE = b$, e su OY i segmenti $OC = c$, $OD = d$, si conduca da E la parallela alla AC fino a incontrare la OY in F e da A la parallela alla OY fino a incontrare la EF in F'; allora i triangoli AEF', OBD sono uguali: quindi il segmento AF', è uguale a OD e il segmento CF, ecc.]

86. Teor. Dato un angolo retto $\widehat{XOY}$, se una circonferenza sega il lato XO nei punti M, N e il lato OY nei punti P, Q si ha che

$$OM : OP = OQ : ON; \quad OM : OQ = OP : ON.$$

[Supposto che il punto O sia esterno alla circonferenza e che i punti O, M, N e O, P, Q si susseguano sui due lati nell'ordine scritto, si considerino prima i due triangoli OMQ, OPN, e poi i due triangoli ONQ, OPM,...]

87. Teor. — Se sui lati OX e OY di un angolo retto si hanno i segmenti OM, ON e OP, OQ tali che $OM : OP = OQ : ON$, i punti M, N, P, Q appartengono ad una circonferenza [esercizio precedente ed es. 82].

88. Teor. — In una proporzione si possono commutare i medi. [Si applichi il teor. prec. e la seconda parte dell' es. 86].

89. Cor. — Se $a : b = c : d$ e $a : b = e : f$ si ha ancora che $c : d = e : f$ [es. prec. ed es. 83].

Nota. — A questo punto è già completa la parte astratta della teoria. Ma seguiamo ulteriormente il LEVI nella deduzione del teorema di TALETE.

90. Lemma. — Se $a : a' = h : k$ e $b : b' = h : k$ sarà anche

$$a \pm a' : b \pm b' = h : k.$$

[Dalle date proporzioni discende $a : h = a' : k$, $b : h = b' : k$ e quindi (es. 83, 84) $a : a' = b : b'$ ed (es. 85 $a \pm a' : a = b \pm b' : b'$, e, poichè (es. 82) $h : a = k : a'$, $a \pm a' : h = b \pm b' : h$ e infine $a \pm a' : b \pm b' = h : k$].

91. Cor. — In due triangoli aventi gli angoli ordinatamente uguali, due lati opposti ad angoli uguali e le altezze corrispondenti sono in proporzione. [Si applichino la def. e il lemma prec.].

92. Teor. di TALETE. — Se due parallele segano i lati

[1] B. LEVI. *Teoria geometrica delle proporzioni fra segmenti, indipendente dal postulato di Archimede.* Supplemento al *Periodico di Matematica* Giugno, 1903.

OX, OY di un angolo qualsiasi $\widehat{O}$ rispettivamente in A e B, C e D, si ha che

$$OA : OC = OB : OD.$$

[I triangoli OAB, OCD hanno gli angoli uguali; onde, abbassando da A, C le perpendicolari AE, CF su OY, sarà (es. prec.)

$$OB : OD = AE : CF.$$

Portati allora sulla semiretta opposta di OY i segmenti $OA' = OA$, $OC' = OC$, anche i triangoli isosceli OAA', OCC' hanno gli angoli uguali e quindi $OA : OC = AE : CF$, cioè $OA : OC = AE : CF$. Dalle due proporzioni stabilite discende (es. 83) che

$$OB : AE = OD : CF, \quad OA : AE = OC : CF$$

e quindi (es. 83-84)

$$OA : OC = OB : OD].$$

Nota. — L'unicità della quarta proporzionale permette anche qui di invertire il teorema di TALETE come al n. 475.

Senza far uso della riga, col solo compasso si risolvano i seguenti problemi:

93. Condurre da un punto A la parallela alla retta che congiunge due punti B, C. [Si noti che il punto D tale che ABCD sia parallelogramma è tale che $CD = AB$, $AD = BC$].

94. Costruire il doppio di un segmento dato. [Se OA è il segmento, si consideri l'esagono regolare iscritto nella circonferenza di raggio OA e avente uno dei vertici nel punto A]. Ripetendo un numero sufficiente di volte la medesima costruzione si può costruire un multiplo qualsiasi di un segmento dato.

95. Costruire il simmetrico di un punto rispetto ad una retta (data per mezzo di due punti).

96. Bisecare un dato arco di circonferenza. [Dato l'arco AB di centro O si costruiscano i punti C, D tali che i quadrilateri ABOC, ABDO siano parallelogrammi (uguali): con centro C e D e raggio uguale a $CB = DA$ si descrivano due circonferenze, di cui E sia un punto di intersezione. Allora le due circonferenze, di centri C, D e di raggio OE si incontreranno in due punti, che appartengono alla circonferenza data e bisecano ciascuno uno degli archi AB. Per la dimostrazione si ricorra al teorema di PITAGORA e alle sue conseguenze (nn. 364, 365, 366)].

97. Costruire il quarto proporzionale dopo tre segmenti dati a, b, c. [Descritte due circonferenze concentriche in O e di raggi a, b si prendano due punti A, B della prima tali che la corda AB sia uguale a c e fatto centro in A e B con un medesimo raggio arbitrario si taglino sulla seconda circonferenza due punti A', B'. Il segmento A'B' è il segmento cercato.

Per la dimostrazione si confrontino i due triangoli AOB, A'O'B', che sono simili.

Se è $c > 2a$, la costruzione non è più possibile: ma basta scegliere un numero intero k tale che sia $c > 2ka$ e notare che il quarto proporzionale dopo a, b, c è anche quarto proporzionale dopo ka, kb, c].

98. Determinare i punti comuni ad una circonferenza e ad una retta non passante pel centro (data per mezzo di due suoi punti). [Se O è il centro del cerchio dato e P è il simmetrico di O rispetto alla retta data AB, si supponga che esistano le due intersezioni C, D di AB colla circonferenza O, e si consideri il quadrilatero OCPD].

99. Determinare i punti comuni ad una circonferenza e ad una retta pel suo centro. [Se O è la circonferenza data ed A è un punto della retta data pel centro, si tagli la O con una circonferenza qualsiasi di centro A, ecc.].

100. Dividere per metà un segmento dato AB. [Se C è il punto del prolungamento di AB per cui AC è doppio di AB, si prenda il terzo proporzionale dopo AC e AB, ecc.].

101. Determinare il piede della perpendicolare abbassata da un punto su di una retta (data per mezzo di due suoi punti). [Si consideri il simmetrico del punto dato rispetto alla retta data, ecc.].

102. Determinare il punto comune a due rette (date ciascuna per mezzo di due suoi punti). [Escluso il caso delle rette perpendicolari (es. prec.), siano AB, CD le due rette date. Se C', D' sono i simmetrici di C, D rispetto ad AB, il punto H cercato è comune anche a C'D'. Se E è il punto per cui il quadrilatero C'D'DE è un parallelogramma, si consideri che nel triangolo CDE, in cui HC' è parallela a DE, il segmento $CH = C'H$ è.....].

Nota. — Negli esercizi precedenti si dimostra che le costruzioni fondamentali effettuabili mediante la riga e il compasso si possono compiere coll' uso del compasso soltanto.

Pertanto tutti *i problemi risolubili colla riga e col compasso si possono risolvere col solo compasso.*

Questo resultato appartiene al MASCHERONI.

Noi rimandiamo all' art. di E. DANIELE nei *Collectanea* di F. ENRIQUES (op. c.) per la storia della questione e per ulteriori sviluppi che all' argomento si riferiscono.

Terminiamo questo cap. proponendo alcuni esercizi per gli alunni più provetti, senza alcuna traccia del metodo da seguire. Tra questi esercizi se ne trovano alcuni notevolmente difficili.

103. Iscrivere in un cerchio un triangolo isoscele, essendo data la somma della base e dell' altezza. Discussione.

104. Costruire un triangolo date le tre mediane.

105. In un triangolo l' ortocentro e il baricentro sono centri di due omotetie in cui si corrispondono il cerchio circoscritto e il cerchio dei nove punti (cfr. es. 92-96 a pag. 167).

106. Luogo dei centri dei cerchi che sono visti da due punti dati sotto angoli dati.

107. Costruire un cerchio che sia veduto da tre punti dati sotto angoli dati.

108. Costruire un cerchio tangente a tre cerchi dati. Discussione.

109. Dati tre cerchi disuguali e costruita per ciascuna coppia di essi le tangenti comuni intersecantisi in un punto fuori del segmento che ne congiunge i centri, si ottengono tre punti di intersezione che sono in linea retta.

110. Iscrivere in un triangolo dato un triangolo avente due lati paralleli a due rette assegnate e di cui il terzo lato passi per un punto fissato.

111. Iscrivere in un triangolo dato un triangolo avente un lato parallelo ad una retta data, e di cui gli altri due lati passino per due punti fissati.

112. Iscrivere in un triangolo dato un triangolo i cui lati passino ordinatamente per tre punti assegnati.

113. Iscrivere in un cerchio un triangolo i cui lati passino ordinatamente per tre punti.

114. Dato un triangolo ABC, si dividano i lati AB, BC, CD in parti proporzionali rispettivamente ai segmenti a, b; $b, c : c, a$. I segmenti congiungenti i punti di divisione coi vertici opposti passano per un medesimo punto, nel quale il segmento che passa per A resta diviso come $b + c : a$ ecc.

115. Dati quattro punti, A, B, C, D, si dividano i segmenti AB, AC.... che li congiungono a due a due in parti proporzionali rispettivamente ad a, b; a, c;... Le tre rette che uniscono i punti di divisione appartenenti a segmenti che non hanno un vertice comune, passano per un medesimo punto.

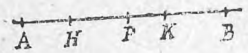
VII.

RETTIFICAZIONE DELLA CIRCONFERENZA E QUADRATURA DEL CERCHIO

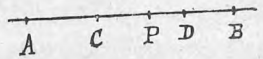
Continuità della retta.

Nel prec. Capitolo abbiamo considerato proporzioni fra segmenti e poligoni, fra archi ed angoli. Procedendo ora alla *rettificazione* di una circonferenza o di un arco, e alla *quadratura* di un cerchio o di un settore, giungeremo a stabilire nuove proporzioni fra segmenti e circonferenze od archi, fra poligoni e cerchi o settori.

516. Osservazioni. — Se immaginiamo, che due punti H e K si muovano, p. es. con moto uniforme, sopra un segmento AB, procedendo in verso opposto l'uno a partire da A, l'altro da B, vediamo che essi s'incontrano in un punto P del segmento e prima dell'incontro il punto H è sempre a sinistra di P, il punto K è sempre a destra di P.



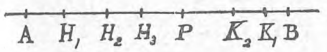
Se, modificando l'ipotesi precedente, si suppone che i punti mobili H e K vadano rallentando il loro movimento in guisa da non oltrepassare i punti C, D rispettivamente, è chiaro che ogni



punto P tra C e D lascia sempre a sinistra il punto H e sempre a destra il punto K.

In ambedue i casi si trova dunque *almeno un* punto P (*di separazione*) il quale divide il segmento AB in due parti, AP e BP tali che tutte le successive posizioni di A sono interne ad AP, tutte le successive posizioni di K sono interne a BP.

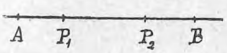
E l'osservazione ci conduce al medesimo risultato, anche quando i due punti mobili H e K procedono l'uno verso l'altro a salti, purchè ancora *ogni* posizione assunta da H sia a sinistra di *ogni* posizione assunta da K (ossia i due mobili non si oltrepassino).



Dando forma esatta alle precedenti osservazioni (basate sulla *intuizione della continuità* della retta) enunceremo il seguente

517. Postulato. *Se in un segmento sono dati due gruppi di punti e, designando con* H *un punto qualsiasi del primo gruppo, con* K *un punto qualsiasi del secondo, ogni punto* H *lascia da una stessa parte ogni punto* K, *allora esiste nel segmento* almeno *un punto di separazione* P, *il quale divide il segmento dato in due parti (adiacenti), tali che ad una di esse appartengono tutti i punti* H *e all'altra tutti i punti* K.

518. Se vi sono due punti P_1, P_2 del segmento che separino i gruppi nel modo anzidetto (cioè in modo che tutti i punti H siano p. es., a sinistra tanto di P_1, che di P_2 e tutti i punti K siano a destra tanto di P_1 che di P_2) è chiaro che internamente al segmento P_1P_2 non cade alcun punto H nè alcun punto K, e quindi



che la distanza di un qualsiasi punto H da un qualsiasi punto K è maggiore o uguale a P_1P_2.

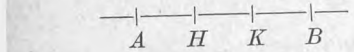
Perciò potremo affermare che esiste un solo punto P di separazione quando si riconosca che:

α) ogni punto del segmento AB appartiene ad uno dei gruppi di punti H, K (giacchè allora non può esistere un segmento P_1P_2 che non contenga nel suo interno alcun punto H nè alcun punto K);

oppure che:

β) dato ad arbitrio un segmento, piccolo quanto si vuole, ε, si possono trovare due punti H e K la cui distanza sia minore di ε (giacchè se si hanno due punti di separazione P_1, P_2, la distanza HK è sempre maggiore di qualsiasi segmento $\varepsilon < P_1P_2$).

519. Indichiamo ora qualche esempio che valga a dilucidare l'applicazione del postulato del n. 517, e delle precedenti considerazioni relative all'unicità del punto di separazione dei gruppi di punti H, K.



1° esempio: Nel segmento AB si considerino tutti i punti H per cui è

$$n\mathrm{AH} \leq \mathrm{AB},$$

(n essendo un qualsiasi numero intero assegnato) e d'altra parte tutti i punti K per cui

$$n\mathrm{AK} \geq \mathrm{AB}$$

È chiaro che presi ad arbitrio un punto H e un punto K, è sempre

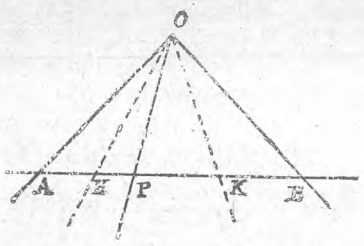
$$\mathrm{AH} \leq \mathrm{AK},$$

e quindi ogni punto H lascia tutti i punti K della medesima parte (destra).

Esiste dunque almeno un punto di separazione P.

Siccome poi *ogni* punto del segmento AB insieme ad A dà luogo ad un segmento il cui $n$plo è $\leq$ AB o $\geq$ AB, così *ogni* punto di AB appartiene ad uno dei due gruppi di punti H, K; ne segue che il punto di separazione P è unico (n. prec., criterio α).

D'altronde nel caso concreto si vede subito che il punto di separazione P è il punto comune ai due gruppi degli H e dei K, cioè l'estremo del segmento AP, n^{ma} parte di AB di cui abbiamo dato la costruzione al n. 303.



2° *esempio*: Siano dati un segmento AB e un punto O (esterno alla retta AB).

Quindi si considerino in AB il gruppo dei punti H per cui

$$n\,\widehat{\mathrm{AOH}} \leq \widehat{\mathrm{AOB}}$$

e il gruppo dei punti K per cui

$$n\,\widehat{\mathrm{AOK}} \geq \widehat{\mathrm{AOB}}.$$

È chiaro che ogni punto H lascia dalla medesima parte (destra) tutti i punti K, e che *ogni* punto del segmento appartiene ad uno dei gruppi.

Si conclude come nel 1° esempio (n. prec., α) che esiste un punto di separazione unico P; e si riconosce facilmente che questo punto P dà luogo ad un *angolo* $\widehat{\mathrm{AOP}}$ *che è la* n^{ma} *parte di* $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

Nota. — Abbiamo imparato a costruire un tale angolo per $n = 2, 4, 8....$ (n. 82).

Ma il relativo problema di costruzione diventa già molto difficile pel caso di $n = 3$ (*trisezione dell'angolo*). I tentativi per trisecare un angolo cogli istrumenti elementari (riga, compasso...) sono riusciti infruttuosi, tranne in qualche caso particolare (ad es. nel caso della trisezione dell'angolo retto; cfr. es. 36, pag. 116).

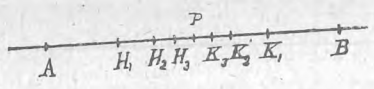
L'insuccesso dipende da un'effettiva *impossibilità* di trovare una costruzione *eseguibile con riga e compasso* [1].

Le osservazioni precedenti basate sull'intuizione della continuità della retta permettono tuttavia di risolvere il problema della divisione dell'angolo *in via approssimata*, nello stesso tempo che ci indicano l'esistenza della soluzione *esatta*.

Questa soluzione esatta si può (teoricamente) raggiungere

[1] Cfr. l'articolo di A. Conti nei « *Collectanea* » di F. Enriques (op. cit).

per mezzo di istrumenti più elevati; ad es. la trisezione dell'angolo si ottiene mediante il *compasso iperbolico* o *parabolico*, ecc. (1).



3° *esempio*: Si considerino nel segmento AB i punti H_1, H_2, H_3... procedenti verso destra tali che sia

$$AH_1 = \frac{1}{4}\,AB\ ;\ H_1H_2 = \frac{1}{2}\,AH_1 : H_2H_3 = \frac{1}{2}\,H_1H_2 \ldots;$$

similmente si considerino i punti K_1, K_2, K_3 . . . procedenti verso sinistra, tali che sia

$$BK_1 = \frac{1}{4}\,AB\ ;\ K_1K_2 = \frac{1}{2}\,BK_1 : K_2K_3 = \frac{1}{2}\,K_1K_2\ ;\ \ldots$$

È chiaro che ogni punto H lascia alla sua destra tutti i punti K ; quindi esiste un punto di separazione P (n. 517).

Consideriamo poi la distanza dei punti H_n , K_n ; si ha

$$H_1K_1 = \frac{1}{2}\,AB;$$

$$H_2K_2 = \frac{1}{2}\,H_1K_1 = \frac{1}{4}\,AB,$$

. . . . . .

$$H_nK_n = \frac{1}{2^n}\,AB.$$

Ora fissato ad arbitrio un segmento ε si può sempre trovare un intero n tale che sia (n. 38)

$$2^n\varepsilon > AB$$

e quindi

$$H_nK_n < \varepsilon.$$

Ne consegue che il punto P separante i due gruppi di punti H e K è *unico* (n. prec., criterio β).

(1) Segue dalle osservazioni precedenti che esistono, per n qualsivoglia, *poligoni regolari ad* n *lati*, giacchè questi si possono costruire appena sia diviso in n parti uguali l'angolo di 4 retti (n. 336).

Si riconosce subito che il suddetto punto è il punto medio del segmento AB.

Rettificazione della circonferenza.

Dopo ciò applichiamo le considerazioni precedenti al problema che prende il nome di *rettificazione della circonferenza.*

520. Si abbia un cerchio O, e si considerino tutti i poligoni iscritti in esso, e tutti i poligoni circoscritti.

Poichè un qualsivoglia poligono iscritto in O è contenuto in un poligono circoscritto si ha (n. 133) che il perimetro di uno qualsiasi dei primi è minore del perimetro di uno qualsiasi dei secondi.

Si prenda ora un segmento AB uguale al perimetro di uno qualsiasi dei poligoni circoscritti, per esempio uguale a quattro volte il diametro (perimetro del quadrato circoscritto).

Vi saranno in AB dei segmenti AH uguali ai perimetri dei poligoni iscritti in O, e dei segmenti AK uguali ai perimetri di quei poligoni circoscritti che non superano quattro diametri. E poichè $AH < AK$, ogni punto H, estremo di uno dei primi segmenti, lascierà tutti da una parte (a destra) i punti K, estremi dei secondi.

Si conclude, in base al postulato del n. 517, che esiste almeno un punto di separazione P tale che il *segmento* AP *risulta maggiore dei perimetri dei poligoni iscritti e minore di quelli dei poligoni circoscritti ad* O, ossia, come si suol dire, *compreso* fra gli uni e gli altri.

Nota — Il segmento AP è certamente *maggiore* (e non mai *uguale*) al perimetro di ogni poligono iscritto in O,

poichè se si avesse un poligono iscritto in O il cui perimetro forse uguale ad AP, si potrebbe costruire (ed es. bisecando gli angoli del centro del primo poligono) un altro poligono iscritto avente il perimetro maggiore di AP, e quindi un punto H a destra di P.

Similmente il segmento AP è *minore* (e non mai *uguale*) del perimetro di ogni poligono circoscritto a O.

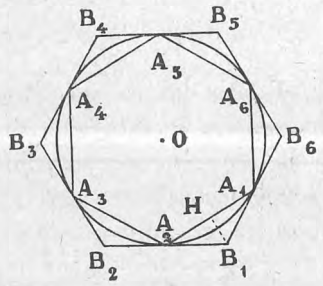
521. Ora dimostreremo che il *punto* P *considerato innanzi è* UNICO (e quindi che il segmento AP è ben determinato). Perciò basta far vedere (n. 518, criterio β) che, assegnato ad arbitrio un segmento ε (piccolo quanto si vuole), si possono trovare due poligoni, l'uno iscritto e l'altro circoscritto a O, tali che la differenza tra i loro perimetri

$$AK - AH = HK,$$

sia minore di ε.

Noi giungeremo appunto a questo risultato premettendo le proposizioni dei nn. 522, 523.

522. Teor. — *La differenza fra i perimetri dei poligoni regolari di* n *lati, iscritto e circoscritto ad una circonferenza, è minore del doppio dell'altezza del triangolo isoscele avente per base il perimetro del poligono iscritto e gli angoli alla base uguali all'* n^ma *parte di due retti.*



Siano i poligoni regolari $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$, iscritto e circoscritto al cerchio O. I triangoli $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ... sono uguali, in quanto hanno ordinatamente uguali i lati (n. 90). Abbassata da B_1 l'altezza B_1H su A_1A_2 avremo

$$A_1B_1 < A_1H + B_1H, \quad A_2B_1 < A_2H + B_1H$$

e quindi

$$A_1B_1 + A_2B_1 < A_1A_2 + 2B_1H$$

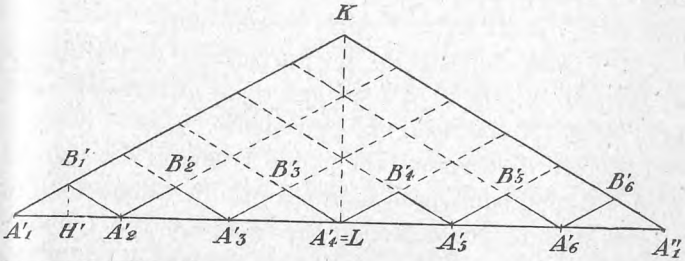
ossia

$$A_1B_1 + A_2B_1 - A_1A_2 < 2B_1H.$$

Si sommino allora membro a membro alla disuguaglianza precedente le altre n-1 disuguaglianze analoghe, corrispondenti agli altri n-1 triangoli; se ne conclude che la differenza dei perimetri dei due poligoni è minore di $2n$ volte B_1H.

Ora l'angolo $A_2\widehat{B_1}A_1$, come angolo interno di un poligono regolare di n lati, è uguale agli $\frac{n-2}{n}$ di due retti (n. 274), onde risulta che l'angolo $B_1\widehat{A_1}A_2$ è uguale alla n^{ma} parte di due retti (n. 267).

Costruito allora sopra il segmento $A'_1A''_1$ uguale al perimetro di $A_1A_2 \ldots A_n$ il triangolo isoscele $A'_1A''_1K$ avente gli angoli alla base uguali alla n^{ma} parte di due retti, si abbassi da K l'altezza KL sulla base,



la quale sarà dal punto L divisa per metà (n. 115). Codesto triangolo $A'_1A''_1K$ è simile ai triangoli $A_1A_2B_1, \ldots$, $A_nA_1B_n$ e si può immaginare ottenuto, distendendo la figura poligonale costituita appunto da codesti n triangoli $A_1A_2B_1, \ldots$, $A_nA_1B_n$, in modo che il perimetro del

poligono iscritto si disponga sul segmento $A'_1A''_1$, e poi prolungando i lati $A'_1B'_1$, $A''_1B'_n$ dei triangoli estremi fino ad incontrarsi in K. Ora i triangoli rettangoli simili A'_1LK, $A'_1H'B'_1$ danno la proporzione

$$KL : B'_1H' = A'_1L : A'_1H';$$

e poichè è

$$A'_1L = nA'_1H'$$

sarà anche (n. 442)

$$KL = nB'_1H';$$

il che del resto, nel caso concreto della figura, si vede anche direttamente. Essendo $B_1'H' = B_1H$ e quindi $2nB_1H = 2KL$, resta così appunto dimostrato che la differenza dei perimetri dei due dati poligoni è minore del doppio della altezza KL del triangolo isoscele $A'_1A''_1K$ che ha per base il perimetro del poligono iscritto e per angolo alla base la n^{ma} parte di due retti.

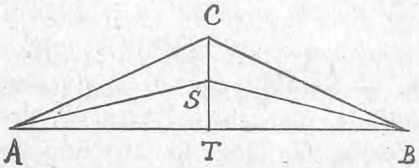
523. Cor. — *La differenza dei perimetri dei poligoni regolari di* n *lati, iscritto e circoscritto ad una circonferenza, è minore del doppio dell'altezza del triangolo isoscele avente per base quattro diametri e gli angoli alla base uguali all'* n^{ma} *parte di due retti.*

Ciò sarà dimostrato, se proveremo che l'altezza di codesto triangolo Δ è maggiore di quella del triangolo $A'_1A''_1K$ del teorema precedente.

Perciò osserviamo che i due triangoli isosceli Δ e $A'_1A''_1K$ sono equiangoli e quindi simili, talchè le loro altezze saranno proporzionali alle basi rispettive (n. 458). Ma la base di Δ è maggiore di quella di $A'_1A''_1K$, perchè il segmento uguale a quattro diametri (perimetro del quadrato circoscritto) è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto. Ne risulta (n. 442) che anche l'altezza di Δ è maggiore dell'altezza del triangolo $A'_1A''_1K$.

524. Stabilito il prec. Cor., possiamo agevolmente completare le considerazioni dei nn. 520-521. Si tratta di mostrare *come, fissato un segmento* ε *piccolo a piacere, si possano trovare due poligoni, l'uno iscritto, l'altro circoscritto al dato cerchio O, tali che la differenza tra i loro perimetri sia minore di* ε.

Costruiamo perciò sulla base AB, uguale a quattro diametri del cerchio O, un triangolo isoscele ABC di



altezza $CT = \frac{\varepsilon}{2}$ e prendiamo poi n così grande che sia $n\,\widehat{CAB} > 2$ retti (n. 67), e quindi la n^{ma} parte di due retti risulti miminore di $\widehat{CAB}$.

Condotta allora da A, dalla stessa parte di C rispetto ad AB, la semiretta che forma con AB l'angolo uguale alla n^{ma} parte di due retti, esso incontrerà il segmento TC in un punto S interno. Congiunto S con A e con B, avremo, pel corollario precedente, che *la differenza dei perimetri dei poligoni regolari di* n *lati, iscritto e circoscritto al cerchio* O, *è minore* del doppio dell'altezza ST del triangolo ABS e quindi, a maggior ragione *del doppio di* CT, *ossia di* ε.

Riassumendo le precedenti considerazioni, noi abbiamo che se si portano su di una retta AB, a partire da A e da una parte di esso, tutti i segmenti AH, uguali ai perimetri dei poligoni iscritti al dato cerchio O e tutti i segmenti AK, uguali ai perimetri dei poligoni circoscritti al medesimo cerchio, ogni punto H lascia da una stessa parte (a destra) tutti i punti K; e, preso un segmento ε piccolo a piacere, si possono

trovare due poligoni, l'uno iscritto e l'altro circoscritto tali che pei due punti H, K corrispondenti si abbia

$$HK < \varepsilon.$$

Si conclude di qui (n. 518, β) che vi è un unico punto P che separa i punti H dai punti K.

Possiamo dunque enunciare il

Teor. — *Dato un cerchio, esiste un segmento ed uno solo, il quale è compreso fra i perimetri dei poligoni iscritti e quelli dei poligoni circoscritti al cerchio dato.*

525. Osservazione. — Se abbiamo sul foglio un filo flessibile e inestendibile, disposto a forma di circonferenza, e, dopo averlo tagliato, lo distendiamo sopra una retta, l'osservazione ci assicura che codesto filo è più lungo del perimetro di ogni poligono iscritto, più corto del perimetro di ogni poligono circoscritto.

Resta così giustificata la seguente

526. Def. — Data una circonferenza, il segmento maggiore dei perimetri dei poligoni iscritti e minore dei perimetri dei poligoni circoscritti, dicesi *circonferenza rettificata.*

527. Teor. — *Date due circonferenze, le rispettive circonferenze rettificate sono proporzionali ai loro diametri e ai loro raggi.*

Date due circonferenze O, O′, siano c, c' le loro circonferenze rettificate ed r, r' i rispettivi raggi. Diciamo che

$$c : c' := r : r'.$$

Si indichi infatti con d il segmento quarto proporzionale dopo r, r' e c, avremo

(1) $$r : r' = c : d.$$

Iscritti allora nella circonferenza O′ un poligono qualsiasi, di perimetro p', e nell'altra circonferenza il poligono simile (n. 511), sia p il perimetro di quest'ultimo; avremo (n. 512)

$$p : p' = r : r'$$

e quindi anche per la (1) (n. 469)

$$c : d = p : p'$$

ossia (n. 446)

$$c : p = d : p'.$$

Ma la lunghezza c della prima circonferenza è maggiore del perimetro p del poligono iscritto; sarà quindi anche d maggiore di p' (n. 442).

Abbiamo dunque che d è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto nella circonferenza O′. Nello stesso modo si dimostra che è minore del perimetro di ogni poligono circoscritto, onde concludiamo (n. prec.)

$$d = c'$$

e quindi che

$$c : c' = r : r'$$

ed anche (n. 444)

$$c : c' = 2r : 2r'.$$

528. Considerazioni analoghe a quelle dei nn. 520-526 conducono alla *rettificazione dell'arco* di circonferenza.

Dato un arco AB di centro O si considerino tutte le poligonali *iscritte* in esso, cioè aventi gli estremi A e B e gli altri vertici sull'arco, e le poligonali *circoscritte* all'arco, cioè aventi gli estremi sui prolungamenti dei raggi OA, OB e i lati tangenti all'arco. Con un procedimento analogo a quello dei nn. 520-524 si dimostra in base al postulato del n. 483 e poi applicando il criterio β del n. 518, il seguente

Teor. — *Dato un arco di circonferenza, esiste un segmento ed uno solo, il quale è compreso fra i perimetri delle poligonali inscritte e i perimetri delle poligonali circoscritte all'arco.*

529. Un'osservazione analoga a quella del numero 525 conduce in modo naturale alla seguente

Def. — Dato un arco di circonferenza, il segmento compreso fra i perimetri delle poligonali (convesse) iscritte e circoscritte all'arco dicesi *arco rettificato.*

530. Due archi appartenenti a circonferenze disuguali non si possono riguardare come *grandezze omogenee*; ma sono grandezze omogenee i rispettivi archi rettificati, in quanto sono segmenti.

Perchè nella pratica si possano vantaggiosamente sostituire agli archi i rispettivi archi rettificati è necessario dimostrare due proposizioni fondamentali.

531. In primo luogo si ha il seguente teorema, che comprende come caso particolare quello del n. 527 e si dimostra in modo perfettamente analogo.

Teor. — *Rettificando archi appartenenti a circonferenze diverse e compresi da angoli al centro uguali si ottengono segmenti proporzionali ai raggi rispettivi.*

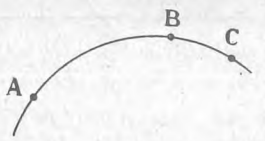
532. In secondo luogo dimostreremo il seguente

Teor. — *Gli archi di una medesima circonferenza sono proporzionali ai rispettivi archi rettificati.*

Ad ogni arco di una circonferenza di dato raggio corrisponde, come arco rettificato, un certo segmento ben determinato.

Per dimostrare che gli archi della data circonferenza e i rispettivi archi rettificati costituiscono *due classi di grandezze proporzionali*, basterà mostrare

(n. 467) che in primo luogo archi uguali hanno archi rettificati uguali, e in secondo luogo rettificando la somma AC di due archi AB, BC di una stessa circonferenza si ottiene un segmento uguale alla somma degli archi AB e BC rettificati.



La prima parte risulta senza altro chiaro dalla definizione del n. 529. Quanto alla seconda, indichiamo con a, b i segmenti uguali agli archi AB, BC rettificati, e consideriamo il segmento $a+b$; diciamo che questo segmento è uguale all'arco AC rettificato.

Prendiamo infatti una qualsiasi poligonale P, iscritta nell'arco AC, e indichiamone con p il perimetro. Se la poligonale P ha uno dei suoi vertici in B, essa può decomporsi in due poligonali, iscritte nell'arco AB e l'altra in BC e perciò aventi perimetri minori rispettivamente di a, b; talchè sarà senz'altro,

$$p < a+b.$$

Se poi la poligonale P non ha alcun vertice in B, basta congiungere B coi due vertici consecutivi di P fra cui cade B, per ottenere una nuova poligonale iscritta in AC, la quale avrà un perimetro manifestamente maggiore di p e, per quanto si è detto or ora, minore di $a+b$, cosichè sarà ancora

$$p < a+b.$$

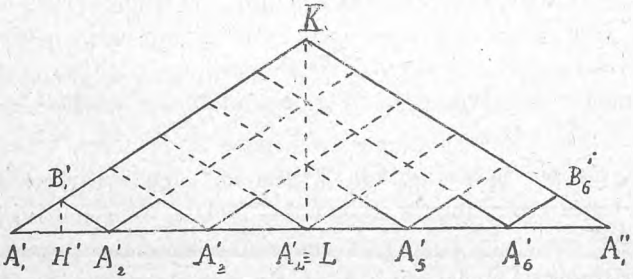
Analogamente si dimostra che $a+b$ è minore del perimetro di ogni poligonale circoscritta all'arco AC; talchè codesta somma, in quanto è compresa tra i perimetri delle poligonali iscritte e circoscritte all'arco AC, è veramente uguale all'arco AC rettificato (n. 529).

Quadratura del cerchio.

Esaurite così le considerazioni relative alla rettificazione della circonferenza, passiamo a trattare della *quadratura del cerchio*. È perciò necessario premettere come lemmi le proposizioni dei nn. 533-535.

533. Teor. *La differenza dei poligoni regolari di* n *lati, iscritto e circoscritto ad una circonferenza, è suvvalente al triangolo isoscele, avente per base il perimetro del poligono iscritto e gli angoli alla base uguali all'* n^{ma} *parte di due retti.*

Riferiamoci invero alla figura del teorema del n. 522, che per maggiore chiarezza qui ripetiamo. La differenza dei due poligoni regolari iscritto e circoscritto



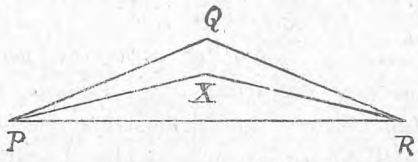
è data dalla somma dei triangoli $A'_1B'_1A'_2$, $A'_2B_2'A'_3$..., $A'_nB'_nA''_1$ ed è quindi suvvalente al del triangolo isoscele $A'_1A''_1K$, avente per base il perimetro del poligono iscritto considerato e gli angoli alla base uguali alla n^{ma} parte di due retti.

534. Poichè la circonferenza rettificata è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto, deduciamo immediatamente il seguente

Cor. — *La differenza dei nominati poligoni iscritti e circoscritti è suvvalente al triangolo isoscele, la cui base sia uguale alla circonferenza rettificata ed i cui angoli alla base siano la* n^{ma} *parte di due retti.*

535. Teor. *Dato un cerchio e assegnato un poligono piccolo quanto si vuole, si possono determinare due poligoni regolari di ugual numero* n *di lati, l'uno iscritto, l'altro circoscritto al cerchio e tali che la loro differenza sia suvvalente al poligono assegnato.*

Se H è il piccolo poligono prefissato, si trasformi H nel triangolo isoscele PQR, la cui base PR sia uguale alla circonferenza rettificata del cerchio dato (n. 378) e si prenda un numero intero n tanto grande che la n^{ma} parte di due retti risulti minore dell'angolo $Q\widehat{P}R$ alla base del triangolo isoscele PQR. Costruito allora sulla base PR il triangolo isoscele PRX, avente gli angoli alla base uguali alla n^{ma} parte di due retti, avremo



$$PRX < PQR$$

ossia, essendo PQR = H,

$$PRX < H.$$

Ciò posto, ricordando che pel n. prec. la differenza dei poligoni regolari di n lati, iscritto e circoscritto al cerchio dato è suvvalente a PRX, concludiamo che codesta differenza è, a maggior ragione, suvvalente ad H.

536. A più forte ragione, sussiste il seguente

Cor. — *Dato un cerchio qualsiasi, si può sempre iscrivere (o circoscrivere) ad esso un poligono regolare tale che la differenza del cerchio e del poligono sia suvvalente ad un poligono prefissato, piccolo quanto si vuole.*

537. Premessi i lemmi precedenti, consideriamo

un triangolo T avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio di essa. Codesto triangolo è suvvalente ad ogni poligono circoscritto, perchè questo è somma di un certo numero di triangoli aventi per altezza il raggio e la cui somma delle basi (il perimetro del poligono) è maggiore della circonferenza rettificata; e analogamente T è prevalente ad ogni poligono iscritto, in quanto questo è la somma di un certo numero di triangoli di altezze tutte minori del raggio e le cui basi hanno una somma (perimetro del poligono) minore della circonferenza rettificata. Ora diciamo che codesto triangolo ha precisamente superficie uguale al cerchio.

Cioè sussiste il seguente

Teor. — *Un cerchio ha superficie uguale ad un triangolo avente per altezza il raggio del cerchio e per base la circonferenza di esso rettificata.*

Indicando con O il cerchio, per dimostrare che O ha superficie uguale a T basta far vedere che il cerchio non è nè prevalente nè suvvalente al triangolo T (n. 417).

Supponiamo, per esempio che O sia prevalente a T; allora nella differenza O — T del cerchio e del triangolo potremo costruire un poligono a lati rettilinei P, tutto interno, e sarà

$$P < O - T \tag{1}$$

Ma pel Cor. del n. prec. si può iscrivere al cerchio un poligono regolare P_n tale che la sua differenza da O sia suvvalente a P, ossia

$$O - P_n < P \tag{2}$$

e allora dalle (1) e (2) risulterà

$$O - P_n < O - T$$

e quindi aggiungendo alle due differenze la somma $P_n + T$ (n. 423)

$$O + T < O + P_n$$

o infine, sottraendo O dalle due somme

$$T < P_n,$$

il che è assurdo, perchè, come si è notato pocanzi, T è prevalente ad ogni poligono iscritto nel cerchio.

Con ciò è dimostrata l'assurdità dell'ipotesi che sia

$$O > T.$$

Analogamente si proverebbe che non può essere

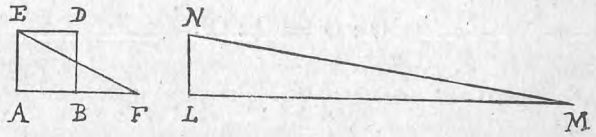
$$O < T,$$

onde risulta che è veramente

$$O = T.$$

538. Teor. — *Un cerchio sta al quadrato del raggio, come la circonferenza rettificata sta al diametro.*

Dato un cerchio O, indichiamo con r il raggio e con c la rispettiva circonferenza rettificata. Costruito sul raggio del cerchio il quadrato ABDE diciamo che



O sta a ABCE come c sta a $2r$.

Prolungato AB del segmento BF uguale ad AB, si congiunga E con F. Il triangolo AEF è equivalente ad ABDE (n. 369) onde risulta

$$AEF = ABDE.$$

In secondo luogo, se LM è uguale a c, un triangolo LMN costruito sulla base LM e avente l'altezza uguale ad AB ha superficie uguale al cerchio (n. prec.).

Ma i due triangoli AFE, LMN hanno altezze

uguali; onde risulta che essi stanno fra loro come le basi (n. 464). Avremo quindi

$$O : ABDE = c : 2r;$$

cioè appunto il cerchio sta al quadrato del raggio come la circonferenza rettificata sta al diametro.

539. Cor. — *Due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi.*

Indichiamo con O, O′ due cerchi, con c, c' le rispettive circonferenze rettificate, con r, r' i raggi e Q, Q′ i quadrati rispettivi.

Avremo (n. prec.)

$$O : Q = c : 2r,$$
$$O' : Q' = c' : 2r'.$$

Ma (n. 528)

$$c : 2r = c' : 2r';$$

quindi anche (n. 469)

$$O : Q = O' : Q'$$

ossia (n. 446)

$$O : O' = Q : Q'.$$

540. Cor. — *Dato un triangolo rettangolo, la somma dei cerchi descritti sui due cateti ha superficie uguale al cerchio descritto sull' ipotenusa.*

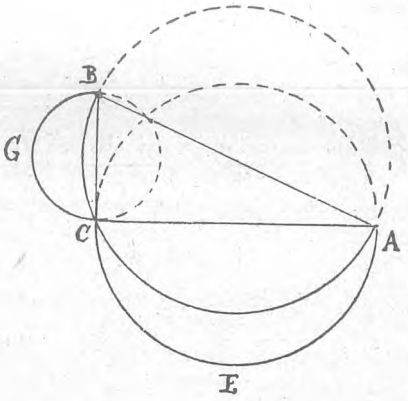
Dato il triangolo ABC rettangolo in C, indichiamo con O_1, O_2, O_3 i cerchi descritti rispettivamente su AB, BC, CA, come diametri, e con Q_1, Q_2, Q_3 i corrispondenti quadrati. Avremo

$$O_2 : O_3 = Q_2 : Q_3,$$

e, componendo,

$$O_2 + O_3 : O_3 = Q_2 + Q_3 : Q_3.$$

Ma la somma di Q_2 e Q_3 è equivalente a Q_1 (n. 363): onde abbiamo



$$O_2 + O_3 : O_3 = Q_1 : Q_3.$$

D' altra parte

$$O_1 : O_3 = Q_1 : Q_3.$$

Di qui si conclude (n. 473), che O_1 ha superficie uguale alla somma di O_2 e O_3.

541. Come caso particolare del teorema precedente abbiamo che *il cerchio che ha per diametro l' ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele ha superficie doppia del cerchio che ha per diametro uno dei cateti.*

542. Risulta dal n. 540 che la somma dei due semicerchi ACE, BGE avrà superficie uguale al semicerchio ABC (vedi fig. del n. 540). Togliendo da una parte e dall' altra i due segmenti determinati nel semicerchio ABC delle corde AC, BC, troviamo che la somma delle due lunule (d' *Ippocrate*) ACE, BCG ha superficie uguale al triangolo rettangolo ABC.

543. Una serie di considerazioni perfettamente analoghe a quelle dei nn. 533-537 conducono *alla quadratura del settore circolare.* Si ha così il seguente

Teor. — *Un settore circolare ha superficie uguale a un triangolo, avente per altezza il raggio del settore e per base il corrispondente arco rettificato.*

544. Cor. — *Due settori appartenenti ad uno stesso cerchio sono proporzionali ai rispettivi archi rettificati* (n. 532).

545. Cor. — *Settori appartenenti a cerchi diversi, ma compresi da angoli al centro uguali, sono proporzionali ai quadrati dei raggi rispettivi.*

Siano S, S′ due settori di raggi diversi r, r', compresi da angoli al centro uguali: se a, a' sono i rispettivi archi rettificati avremo che i due settori hanno superficie uguale rispettivamente ai due triangoli rettangoli T, T′ aventi per cateti rispettivamente a ed r, a' ed r'.

Ma (n. 531) abbiamo che

$$a : a' = r : r',$$

cosicchè i due triangoli T, T′ sono simili (n. 484) e varrà la proporzione

$$T : T' = q(r) : q(r').$$

Poichè S, S′ hanno superficie uguale rispettivamente a T, T′, concludiamo che veramente

$$S : S' = q(r) : q(r').$$

ESERCIZI

1. Dati su di una retta tre punti consecutivi A, B, C, la circonferenza rettificata di diametro AC è uguale alla somma delle circonferenze rettificate di diametro AB e BC. Il teor. vale per quanti si vogliano segmenti consecutivi.

2. Sul diametro AB di una circonferenza si prendano due punti C, D e su AC, AD, BC, BD come diametri si descrivano quattro semicirconferenze, le prime due giacenti da una banda della retta AB, le altre due da banda opposta; si ottiene così un quadrilatero curvilineo (*pelecoide*) il cui perimetro è uguale alla circonferenza rettificata.

3. Se sopra i lati d'un poligono, come corde, si costruiscono altrettanti archi di circonferenza capaci di un angolo uguale a $\frac{2}{3}$ di retto, la somma dei rispettivi archi rettificati è doppia del segmento che si ottiene rettificando la circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero, il cui perimetro sia uguale a quello del dato poligono. (Si ricordi il n. 531).

4. Quale proposizione più generale suggeriscono gli esercizi 1-3? Si enunci e si dimostri.

5. Si abbiano due circonferenze i cui diametri siano l'uno la metà dell'altro, la prima delle quali si muova conservandosi tangente internamente alla seconda. Allora un punto della circonferenza mobile descrive un diametro dell'altra.

6. Un cerchio è prevalente ad un qualsiasi poligono di ugual perimetro. (Si confronti col poligono regolare di ugual numero di lati; cfr. es. 39, a pag. 215, Cap. V).

7. Il cerchio circoscritto ad un poligono regolare e iscritto in un altro, è medio proporzionale fra le superficie

dei cerchi rispettivamente iscritto nel primo e circoscritto al secondo.

8. Il pelecoide costruito prendendo sul diametro AB di un cerchio due punti C, D (es. 3) sta al cerchio come CD sta a AB.

9. Costruire un cerchio avente superficie doppia o tripla di un altro cerchio assegnato.

10. Costruire un cerchio avente superficie uguale a una data corona circolare.

11. Se sui lati di un quadrato iscritto in un cerchio, presi come diametri, si costruiscono esternamente quattro semicerchi, la somma delle lunule ha superficie uguale al quadrato (n. 540).

12. Se si effettua la costruzione precedentemente indicata sui lati di un triangolo equilatero, la somma delle tre lunule ha superficie uguale alla somma del triangolo di un ottavo del cerchio circoscritto.

13. Eseguita la medesima costruzione dell'es. prec. sui lati di un esagono regolare, si costruisca un cerchio la cui superficie sia uguale alla differenza tra l'esagono e la somma delle sei lunule.

14. Presi due vertici opposti di un quadrato come centri, si descrivano due circonferenze passanti per gli altri due vertici. Si costruisca un segmento circolare avente superficie uguale al fuso circolare limitato dalle due circonferenze.

15. Si costruisca un segmento circolare avente superficie uguale la differenza tra un cerchio dato e un poligono regolare iscritto di 3 o di 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lati.

16. Tre circonferenze uguali si toccano a due a due esternamente. Costruire un quadrato ed un cerchio di cui il triangolo curvilineo così determinato sia la differenza.

VIII.

TEORIA DELLA MISURA

Ricerca della massima summultipla comune di due grandezze.

Come accennammo al n. 437, ci restano ora da sviluppare i procedimenti che permettono di riconoscere se e come possa determinarsi il *rapporto* di due grandezze geometriche.

Questi procedimenti costituiscono la *teoria della misura.*

Mostreremo anzitutto che, quando siano date due grandezze commensurabili A e B, si può determinare con successive operazioni di sottrazione una loro summultipla comune, dopo di che si potrà subito assegnare il rapporto delle due grandezze (n. 430).

Il medesimo procedimento ci permetterà di riconoscere se due grandezze siano commensurabili.

È utile premettere alcune definizioni.

546. Date due grandezze omogenee A e B e, supposto $A > B$, si può sottrarre B da A successivamente una, due, tre, ..., m volte, finchè non si arriva o ad esaurire la grandezza A, o ad ottenere una ultima differenza R, minore di B.

Nel primo caso esiste un numero m tale che

$$mB = A$$

e allora B è summultiplo comune di A e B, e il rapporto di A a B è m (n. 430).

Nel secondo caso invece esiste un numero m tale che è

$$A - mB < B,$$

ossia

$$mB < A < (m+1)\,B.$$

L'operazione dianzi indicata, che conduce a determinare il numero m che indica quante volte B è contenuto in A, si dice *divisione* di A per B. Le grandezze A e B diconsi rispettivamente *dividendo* e *divisore*. Il numero m si chiama *quoziente*, e, precisamente, se $mB = A$ esso dicesi *quoziente esatto*; se invece mB è minore di A, si dice *quoziente per difetto*. In quest'ultimo caso la differenza R di mB e di A si chiama *resto* della divisione di A per B. Abbiamo dunque per definizione che il resto R è minore del divisore, e si ha

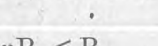
$$A = mB + R.$$

Viceversa se fra le grandezze omogenee A, B, R sussiste la relazione precedente, ed è $R < B$, la grandezza A divisa per B dà per quoziente m e per resto R.

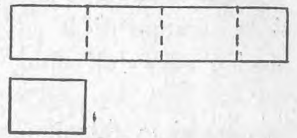
Nel caso in cui la divisione di A per B dà luogo ad un quoziente esatto, si dice che « B *divide esattamente* A » od anche, ove non siavi luogo ad equivoco, che « B *divide* A ». In questo caso il quoziente (esatto) di A per B non è altro che il rapporto (intero) di A a B.

Notiamo che se $A = B$, il quoziente di A per A è uguale ed 1. Se poi A è minore di B, il quoziente di A per B si dovrà riguardare uguale allo *zero*, e A si dovrà considerare come il resto della divisione di A per B.

547. Le cose dette innanzi si rendono più chiare considerando qualche esempio concreto. Se, p. es., si vogliono dividere due segmenti ***a*** e ***b***, si riporta il divisore ***b*** sul dividendo ***a***, a partire da uno dei suoi estremi, consecutivamente tante volte quante è possibile. Così nell'annessa figura si trova che il quoziente (per difetto) di ***a*** per ***b*** è uguale a 3, e si ha un certo resto.



Se si hanno invece da misurare due poligoni, si può procedere speditamente trasformando dapprima i due poligoni dati in due rettangoli A e B di uguale altezza. Allora è manifesto che il divisore è contenuto nel dividendo tante volte quante la base del primo in quella del secondo: cioè il quoziente dei due rettangoli è uguale a quello delle loro basi.



Di più il resto di A per B è dato dal rettangolo che ha la medesima altezza ed ha per base il resto della divisione della base di A per quella di B.

548. In base alle precedenti definizioni, dimostriamo, come lemma, il seguente

Teor. — *Se la grandezza* A, *divisa per la grandezza* B, *dà un resto* R, *ogni grandezza* C, *che divida (esattamente)* A *e* B, *divide (esattamente) anche* R; *e reciprocamente, ogni grandezza* C, *che divida (esattamente)* B *ed* R, *divide (esattamente) anche* A.

Il dividendo, il divisore e il resto sono legati dalla relazione

(1) $$A = mB + R,$$

dove m indica il quoziente di A per B. Se supponiamo che A e B ammettano una summultipla comune C, cioè che esistano due numeri p e q tali che

$$A = pC,\ B = qC,$$

la (1), in quanto si può anche scrivere

$$R = A - mB,$$

ci dà

$$R = pC - mqC,$$

ossia

$$R = (p - mq)\,C;$$

onde concludiamo che R ammette la summultipla C.

Inversamente, se supponiamo che C sia summultipla comune di B ed R, ossia che esistano due numeri q ed r tali che

$$B = qC,\ R = rC,$$

la medesima relazione (1) ci dà

$$A = mqC + rC$$

ossia

$$A = (mq + r)\,C,$$

onde risulta che C è anche summultipla di A.

549. Premesso codesto teorema, indichiamo con R_1 il resto della divisione di A per B, con R_2 il resto di B per R_1, con R_3 il resto della divisione di R_1 per R_2, e così via. Otteniamo in tal modo la successione di grandezze

$$A,\ B,\ R_1,\ R_2,\ \ldots,$$

che chiameremo « *serie dei resti* ». In essa *tre grandezze consecutive quali si vogliono sono tali che dividendo la prima per la seconda si ottiene la terza come resto*; di qui risulta, in particolare, che ciascuna è minore della precedente.

Supponiamo che il q^{mo} resto R_q divida esattamente il precedente R_{q-1}. Allora, poichè R_q è il resto della divisione di R_{q-2} per R_{q-1}, avremo pel teorema precedente, che R_q dividerà anche R_{q-2}. Ma R_{q-1} è il resto di R_{q-3} per R_{q-2}: onde per la stessa ragione avremo ancora che R_q, la quale divide R_{q-1} ed R_{q-2}, dividerà anche R_{q-3}. Così continuando, concludiamo che R_q dividerà esattamente anche A e B, cioè sarà una *summultipla comune* di A e B.

Concludiamo, dunque, che *se la serie dei resti, a cui si dà luogo col suindicato* « procedimento delle divisioni successive » *a partire da* A *e* B, *ha un termine, l'ultimo resto* R_q *è una summultipla comune di* A *e* B, *onde risulta che le due grandezze* A *e* B *sono commensurabili* (nn. 431, 433).

550. Determinata la summultipla comune R_q di A e B, osserviamo che esistono certamente infinite altre summultiple comuni delle due date grandezze; tali sono p. es., la metà, il quarto, l'ottavo, ecc. di R_q (nn. 82, 88, 227, ecc.).

Diciamo che ogni summultipla comune di A e B, diversa da R_q, è summultipla di R_q e quindi minore di essa.

Invero, considerata una qualsiasi summultipla X di A e B, essa, pel teor. del n. 548, deve dividere anche R_1 e quindi R_2, R_3,.... R_q. Se ne conclude che la X o sarà summultipla di R_q o coinciderà con essa.

Perciò noi diremo che R_q è la *massima summultipla comune* di A e B.

551. Abbiamo visto al n. 549 che *se la serie dei resti, a cui danno luogo le grandezze* A *e* B, *ha un termine, le due grandezze* A *e* B *hanno summultiple comuni,* e perciò sono *commensurabili* (nn. 431, 433).

Ora invertiremo questo risultato, dimostrando che *se due grandezze sono commensurabili, la serie dei resti cui esse danno luogo, ha un termine.*

Siano le grandezze commensurabili A e B aventi il rapporto $\frac{m}{n}$, cioè tali che

(1) $$nA = mB.$$

Supposto, per fissare le idee, $A > B$, avremo (essendo $nA > nB$ e quindi, per la (1), $mB > nB$)

$$m > n.$$

Applichiamo allora il procedimento delle divisioni successive ai numeri m ed n, cioè dividiamo m per n; se r_1 è il resto, dividiamo n per r_1; se r_2 è il nuovo resto, dividiamo r_1 per r_2 e così via.

La serie dei resti numerici $r_1, r_2, \ldots$, i quali sono numeri interi positivi decrescenti, ha certo un termine; si giunge da ultimo ad un resto r_s che divide esattamente il resto precedente r_{s-1}; con lo stesso ragionamento dei nn. 548-550, che ci riporta in sostanza agli sviluppi della teoria aritmetica del massimo comune divisore, si vede che r_s è il M. C. D. di m ed n; ed è perciò uguale ad 1 se m ed n sono primi fra loro.

Ora, confrontando la serie dei resti numerici

$$m,\ n,\ r_1,\ r_2, \ldots,\ r_s,$$

con la serie dei resti cui dà luogo il procedimento euclideo applicato alle grandezze A, B, R_1, R_2,..... faremo vedere che quest'ultima serie ha termine anch'essa e precisamente con l's^{mo} resto R_s.

Indicando con C la summultipla comune

$$\frac{A}{m}\left(=\frac{B}{n}\right)$$

di A e B, avremo

(2) $$A = mC,\ B = nC.$$

Se allora indichiamo con q_1 il quoziente (intero per difetto) di m per n, avremo l'identità numerica

$$m = q_1 n + r_1$$

e quindi

$$mC = q_1 nC + r_1 C.$$

ossia, tenendo conto delle (2),

(3) $$A = q_1 B + r_1 C.$$

Siccome nella divisione di m per n il resto r_1 è minore del divisore n, avremo,

$$r_1 C < nC$$

ossia, per la seconda delle (2),

$$r_1 C < B;$$

talchè ricaviamo dalla (3) che (n. 546) q_1 è il quoziente della divisione della grandezza A per B, ed $r_1 C$ è il resto; cioè, ricordando che abbiamo indicato con R_1 il resto della divisione di A per B, concludiamo

$$R_1 = r_1 C.$$

Similmente avremo

$$R_2 = r_2 C,\ R_3 = r_3 C, \ldots,$$

e in particolare

$$R_{s-1} = r_{s-1} C,\ R_s = r_s C.$$

Ma r_{s-1} è divisibile per r_s; talchè, posto

$$r_{s-1} = p r_s,$$

avremo successivamente

$$R_{s-1} = p r_s C$$

ed

$$R_{s-1} = p R_s;$$

cioè la R_s è summultipla della R_{s-1} e con essa la serie dei resti di A e B finisce.

552. Abbiamo visto al n. prec. e al n. 549 che se due grandezze A e B sono commensurabili, la rispettiva serie dei resti ha termine e, viceversa, se

la serie dei resti ha termine, le due grandezze sono commensurabili.

Risulta di qui che se la serie dei resti, a cui danno luogo A e B, non ha termine, le due grandezze sono incommensurabili; e, reciprocamente, se A e B sono incommensurabili, la loro serie dei resti non può aver termine.

Si ha così un criterio per riconoscere se due grandezze siano o no commensurabili: basterà cercare se la serie dei resti abbia o no termine. Noi applicheremo fra poco questo criterio a due esempi. Qui intanto raccogliamo i risultati delle precedenti considerazioni nel seguente teorema.

553. Teor. (di EUCLIDE). — *Date due grandezze omogenee, per decidere se esse siano commensurabili e per determinarne, in caso affermativo, la massima summultipla comune, si applichi ad esse il procedimento delle divisioni successive.*

Se la serie dei resti ha un termine, le due grandezze sono commensurabili e l'ultimo resto è la massima summultipla comune delle due date grandezze.

Se la serie dei resti non ha termine le due grandezze sono incommensurabili.

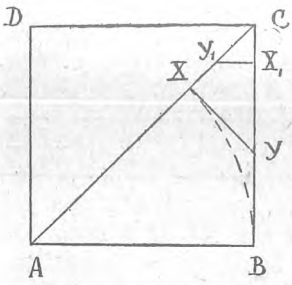
Nota. — Giova avvertire che per determinare, quando esiste, la massima summultipla comune di due grandezze, non occorre saper dividere in parti uguali le grandezze date.

554. Qui da ultimo vogliamo assegnare due esempi concreti di coppie di segmenti, per cui la serie dei resti, nel procedimento delle divisioni successive, non ha termine.

Ridimostreremo così la incommensurabilità della diagonale di un qualsiasi quadrato col suo lato (cfr. n. 434) e proveremo inoltre che un segmento qualsiasi è incommensurabile colla sua sezione aurea.

1.° Nel quadrato ABCD si conduca la diagonale AC.

Poichè AC è maggiore di AB (n. 434) ed è minore di AB (n. 290), avremo che, portato su AC il segmento AX uguale



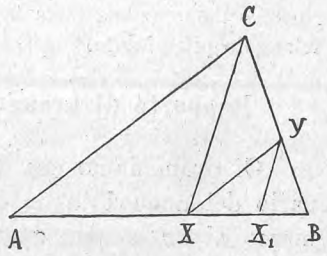
ad AB, il resto della divisione di AC per AB è dato da XC. Ma condotta in X la perpendicolare alla AC, fino ad incontrare in Y la BC, il triangolo rettangolo XYC, avendo gli angoli acuti uguali è isoscele: e quindi il segmento XY è uguale al resto XC della divisione di AC per AB. Così sono uguali i segmenti XY, YB, come tangenti condotte da Y al centro di cerchio A e raggio AB (n. 238).

In secondo luogo dobbiamo dividere AB, ossia BC, per XC. Ma XC è uguale a BY, onde risulta che il resto della divisione di BC per XC è uguale al resto della divisione di YC per XC ossia per YX.

Ora YC si può riguardare come la diagonale del quadrato di lato YX. Applicando a questo lo stesso procedimento applicato dianzi al quadrato primitivo ABCD, riportiamo su YC il segmento YX_1 uguale ad YX, e innalzata in X_1 la perpendicolare alla YC fino ad incontrare in Y_1 la AC, troviamo che il nuovo resto X_1C è uguale ed X_1Y_1, e ad XY_1; il resto della divisione di XC per X_1C sarà allora uguale al resto della divisione di Y_1C per X_1Y_1: siamo così condotti a considerare il triangolo Y_1X_1C, che è la metà del quadrato costruito su Y_1X_1.

Vediamo così che ciascuna delle successive divisioni che dobbiamo compiere è la divisione della diagonale di un quadrato pel suo lato: quindi nessuna divisione può compiersi in modo esatto e la serie dei resti è illimitata. Se ne conclude che AC e AB sono incommensurabili.

2.° Dato il segmento AB, sia AX la sezione aurea di esso. Diciamo che il procedimento delle divisioni successive applicato ai segmenti AB, AX non ha termine.



Sulla base XB costruiamo il triangolo isoscele XBC, avente i lati XC, BC uguali ad

AX. Congiunto A con C, il triangolo BCA è isoscele sulla base BC, ha l'angolo al vertice uguale alla metà di ciascuno degli angoli alla base ed è simile al triangolo XBC (n. 401). Di qui risulta che l'angolo $\widehat{XCB}$ è la metà di $\widehat{CBA}$ ossia di $\widehat{ACB}$: cioè la CX è la bisettrice di $\widehat{ACB}$. Inoltre nel triangolo AXC, isoscele sulla base AC, la base AC uguale ad AB è minore della somma di AX, XC, cioè del doppio di AX: in altre parole AX è maggiore della metà di AB, ossia XB è minore di AX. Abbiamo dunque che XB è il resto della divisione di AB per AX, ossia per BC.

Le considerazioni precedenti ci permettono di concludere che dato un triangolo isoscele ABC, in cui l'angolo al vertice sia metà dell'angolo alla base, si ottiene il resto della divisione del lato per la base (sezione aurea del lato) conducendo la bisettrice di uno degli angoli alla base fino ad incontrare il lato opposto, e considerando il segmento di questo che è adiacente alla base.

Ottenuto dunque il resto XB di AB per BC, per avere il resto della divisione di BC per XB, ricordando che il triangolo XBC è simile ad ABC, conduciamo la bisettrice XY di $\widehat{BXC}$ e il resto cercato è BY. L'angolo $\widehat{BXY}$, metà di $\widehat{BXC}$, e quindi uguale alla metà di $\widehat{CBA}$, è uguale a $\widehat{BAC}$; ne risulta che i triangoli ABC, XBY, aventi gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{BXY}$ uguali e l'angolo $\widehat{CBA}$ comune, sono simili. Allora per avere il resto della divisione di XB per BY, condurremo la bisettrice YX_1 dell'angolo $\widehat{XYB}$, e il resto cercato sarà X_1B.

Così continuando, otterremo con successive divisioni la serie di segmenti

$$AB,\ BC = AX,\ XB,\ BY,\ X_1B,\ldots.$$

la quale non può aver termine, perchè ci troviamo sempre a ripetere l'operazione fatta la prima volta, salvo che sopra un triangolo più piccolo.

Rapporto di grandezze incommensurabili.

Ci proponiamo ora di estendere il concetto ordinario dei numeri in modo da potere esprimere per mezzo di un *numero* anche il rapporto di due grandezze incommensurabili. Cominciamo perciò con lo svolgere alcune ovvie osservazioni relative al caso di due grandezze commensurabili (cfr. nn. 430-436).

555. Consideriamo due grandezze commensurabili A, B, aventi il rapporto $\frac{p}{q}$; onde sarà

$$qA = pB.$$

Presi due multipli arbitrari di A e B

$$nA,\ mB,$$

i quali non siano equimultipli di qA, pB, avremo

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \text{ o } \frac{m}{n} > \frac{p}{q}$$

secondo che (n. 435)

$$nA > mB \text{ o } nA < mB.$$

Pertanto la coppia di grandezze A, B dà luogo ad una partizione dei numeri interi e fratti diversi da $\frac{p}{q}$, in due classi **H** e **K**. Appartengono alla classe **H** tutti i numeri $\frac{m}{n}$ minori del rapporto di A a B, alla classe **K** tutti i numeri maggiori di codesto rapporto.

Questa partizione gode manifestamente delle seguenti proprietà;

a) *Ogni numero intero o fratto diverso da* $\frac{p}{q}$ *appartiene ad una e ad una sola delle due classi* **H** *e* **K**.

b) *Ogni numero della classe* **H** *è minore di ogni numero della classe* **K**.

Inoltre è chiaro che *la classe* **H** *non può contenere un* ***massimo*** (cioè un numero maggiore di tutti gli

altri numeri della classe) *e che la classe* **K** *non può contenere un* ***minimo.***

Infatti, preso un qualsiasi numero $\frac{m}{n}$ della classe **H**, cioè un numero minore di $\frac{p}{q}$, vi sono sempre infiniti numeri maggiori di $\frac{m}{n}$ e minori di $\frac{p}{q}$, e quindi appartenenti ancora ad **H**.

Similmente si dimostra che **K** non può ammettere un *minimo.*

La suindicata partizione di tutti i numeri (eccettuato $\frac{p}{q}$) nelle due classi **H, K** si chiamerà « la *sezione* determinata nell'insieme dei numeri dal numero $\frac{p}{q}$ (*elemento di separazione* delle due classi) ». Il numero $\frac{p}{q}$ si potrà quindi considerare come corrispondente a codesta sezione.

556. Ciò premesso, consideriamo due grandezze incommensurabili fra loro A, B. Anche in questo caso la coppia A, B dà luogo ad una partizione dell'insieme dei numeri, analoga a quella del n. prec.

Preso infatti un qualsiasi numero $\frac{m}{n}$ (dove m ed n sono due interi qualsiansi), avremo o

$$nA > mB$$

o

$$nA < mB,$$

secondo il valore di $\frac{m}{n}$ (cfr. anche il n. 430).

Noi abbiamo già convenuto (n. 436) di dire che nel primo caso il *rapporto* di A a B *è maggiore* di $\frac{m}{n}$; nel secondo che esso è *minore* di $\frac{m}{n}$.

In base a queste convenzioni, dividiamo tutti i numeri interi e frazionari in due classi, mettendo in una classe **H** tutti i numeri $\frac{m}{n}$, per cui

$$nA > mB,$$

cioè i numeri che noi diciamo *minori del rapporto* di A a B; e in una classe **K** tutti i numeri $\frac{m}{n}$ per cui

$$nA < mB.$$

cioè i numeri che diciamo *maggiori del rapporto* di A a B.

Codesta partizione dei numeri interi e frazionari in due classi **H** e **K** soddisfa alle due condizioni seguenti:

a) *Ogni numero intero o fratto appartiene ad una sola delle due classi* **H** *e* **K**.

b) *Ogni numero di* **H** *è minore di ogni numero di* **K**.

Inoltre *la classe* **H** *non ammette* ***massimo*** *e la* **K** *non ammette* ***minimo.***

Invero preso un numero $\frac{m}{n}$ qualsiasi della classe **H**, avremo

$$nA > mB;$$

e potremo sempre trovare un multiplo della grandezza $nA - mB$, che sia maggiore di B. Se è p. es. per un certo intero h

$$h\ (nA - mB) > B,$$

avremo anche

$$hn\mathrm{A} - hm\mathrm{B} > \mathrm{B}$$

e quindi

$$hn\mathrm{A} > (hm+1)\ \mathrm{B};$$

onde risulta che appartiene ad **H** anche il numero

$$\frac{hm+1}{hn} \text{ ossia } \frac{m}{n} + \frac{1}{hn},$$

il quale è maggiore di $\frac{m}{n}$.

La classe **H**, contenendo, con ogni suo numero, qualche numero maggiore, non può ammettere un *massimo*. E similmente si dimostra che la **K** non ammette un *minimo*.

Le proprietà dianzi enumerate per la partizione di tutti i numeri interi e frazionari nelle due classi **H** e **K** sono analoghe a quelle notate nel n. prec. per le due classi della sezione corrispondente al numero $\frac{p}{q}$.

La sola differenza sta nel fatto che, contrariamente a quanto accadeva nel caso di A, B commensurabili, le classi **H** e **K** qui non ammettono un elemento di separazione, cioè un numero maggiore di tutti i numeri di **H** e minore di tutti i numeri di **K**, giacchè ogni numero intero o frazionario appartiene *o* ad **H** *o* a **K**.

La partizione così effettuata dell'insieme dei numeri nelle due classi **H**, **K** si chiamerà ancora una *sezione*; e si dirà che *ad essa corrisponde, come elemento di separazione, un numero* μ *di una specie nuova, il quale esprime il rapporto delle due grandezze incommensurabili* A, B; e si scriverà

$$\mathrm{A} = \mu\mathrm{B}.$$

I nuovi numeri così definiti si diranno *irrazionali*, per distinguerli dai numeri interi e fratti *(razionali)* considerati fin qui.

Raccogliendo in un solo enunciato la definizione del n. 430 e la definizione precedente possiamo concludere che *il rapporto di due grandezze è un numero razionale o irrazionale secondo che esse sono commensurabili o no.*

557. Nota. — Tutte le volte che si afferma l'esistenza di un numero irrazionale μ, si afferma l'esistenza di una *sezione* (**H**, **K**), *che non ammette come elemento di separazione un numero razionale*, e viceversa; perciò si scrive

$$\mu = (\mathbf{H},\ \mathbf{K}).$$

558. In accordo con la definizione, diremo che il numero irrazionale $\mu = (\mathbf{H},\ \mathbf{K})$ è *maggiore* di tutti i numeri (razionali) della classe **H** e *minore* di tutti i numeri (razionali) della classe **K**; e in tal guisa tutti i numeri, razionali e irrazionali, potranno essere *ordinati in modo*, che ciascuno sia maggiore di tutti i precedenti e minore di tutti i seguenti.

Così p. es., se i due numeri irrazionali α e β non sono *uguali*, cioè se le rispettive sezioni (**L**, **M**), (**N**, **P**) non sono identiche, avremo necessariamente o che qualche numero di **L** appartiene a **P**, oppure che qualche numero di **M** appartiene ad **N**. Se vi è un numero $\frac{m}{n}$ appartenente ad **L** e a **P**, avremo

$$\alpha > \frac{m}{n}\ ,\ \frac{m}{n} > \beta$$

e quindi

$$\alpha > \beta.$$

Se invece vi è un numero $\frac{m}{n}$ appartenente ad **M** ed **N**, sarà

$$\alpha < \frac{m}{n} , \frac{m}{n} < \beta$$

e quindi

$$\alpha < \beta.$$

559. Tenendo presente la definizione data dianzi del numero irrazionale, vediamo che se in luogo delle grandezze A, B consideriamo le due grandezze proporzionali C, D, si determina nell'insieme dei numeri la medesima sezione (**H**, **K**), e quindi C e D hanno il medesimo rapporto irrazionale di A a B (nn. 439, 440).

Viceversa, se le coppie di grandezze incommensurabili A, B e C, D danno luogo alla medesima sezione, ciò significa che ogni numero razionale $\frac{m}{n}$ è simultaneamente maggiore o minore tanto del rapporto di A a B quanto del rapporto di C a D: perciò (n. 440)

$$A : B = C : D.$$

Vediamo così che *la proporzione fra coppie di grandezze* si può considerare come *l'uguaglianza dei loro rapporti*, non solo nel caso di grandezze commensurabili (n. 438), ma anche in quello di grandezze incommensurabili.

Perciò d'or innanzi noi designeremo con A : B il rapporto μ (razionale o irrazionale) di due qualsiansi grandezze A e B.

Intanto riassumiamo le considerazioni precedenti nel

Teor. — *Se due coppie di grandezze sono proporzionali, i loro rapporti sono uguali; e se due coppie di grandezze hanno rapporti uguali, esse sono proporzionali.*

560. Possiamo invertire, in un certo senso, la conclusione del n. 556, dimostrando il seguente

Teor. — *Dati una grandezza* B *e un numero razionale o irrazionale, esiste una grandezza* A *che ammette rispetto a* B *il rapporto dato.*

Riferiamoci, per semplicità, ai segmenti.

Sia $\boldsymbol{b}$ il segmento dato. Se il rapporto prefissato è un numero razionale $\frac{p}{q}$, per determinare un segmento avente a $\boldsymbol{b}$ il rapporto $\frac{p}{q}$ basta prendere il p^{mo} multiplo del q^{mo} summultiplo di $\boldsymbol{b}$ (nn. 430, 431).

E notiamo, poichè ciò tornerà utile fra poco, che se $\frac{p'}{q'} > \frac{p}{q}$, sarà anche $\frac{p'}{q'}\,\boldsymbol{b} > \frac{p}{q}\,\boldsymbol{b}$.

Se il rapporto prefissato è il numero irrazionale $\mu = (\mathbf{H},\mathbf{K})$, consideriamo una semiretta di origine O e portiamo su di essa, a partire da O, tutti i segmenti

O H P K

commensurabili con $\boldsymbol{b}$ e aventi come rapporto a $\boldsymbol{b}$ un numero della classe **H** cioè minore di μ: e chiamiamo, per semplicità, punti H i loro estremi fuori di O. Portiamo del pari sulla semiretta data, a partire da O, i segmenti commensurabili con $\boldsymbol{b}$ e aventi a $\boldsymbol{b}$ un rapporto appartenente a **K** cioè maggiore di μ; e chiamiamo punti K gli estremi, diversi da O, di siffatti segmenti.

Abbiamo così, sulla semiretta data, due gruppi di punti: i punti H e i punti K.

Poichè ogni numero di **H** è minore di ogni numero di **K**, avremo che ogni punto H cadrà a sinistra di ogni punto K, onde risulta, pel postulato del n. 517, che esiste (almeno) un punto P di separazione tale che ogni punto H cade a sinistra di esso e ogni punto K a destra.

Il segmento $a = OP$ è dunque maggiore di tutti i segmenti commensurabili con b e aventi a b un rapporto minore di μ, ed è minore di tutti i segmenti commensurabili con b e aventi a b un rapporto maggiore di μ.

Perciò il rapporto di a a b è, per definizione, il numero μ (n. 556).

D'altra parte tutti i segmenti aventi a b il rapporto μ sono uguali, perchè se a' è un altro segmento avente a b il rapporto μ, si ha pel teor. del n. 559

$$a : b = a' : b,$$

e dal n. 473 (in quanto $a : b = a : b$) risulta

$$a' = a.$$

Con analogo procedimento si stabilisce la stessa proposizione per gli angoli e gli archi (cfr. per la divisibilità in parti uguali il n. 519).

Quanto ai poligoni, si trasformi il dato poligono B in un rettangolo R, e che b è la base di R, si consideri il rettangolo R′ di altezza uguale a quella di R e di base uguale ad $a = \mu b$. Il rettangolo R′ ha ad R il rapporto μ (nn. 464, 559) ed ogni poligono A avente a B il rapporto μ è equivalente ad R′ (nn. 559, 464).

561. Nota. — Risulta dalle considerazioni precedenti che, se μ, μ' sono due numeri quali si vogliano (razionali o irrazionali) si ha

$$\mu B > \mu' B \text{ o } \mu B = \mu' B \text{ o } \mu B < \mu' B$$

secondo che è

$$\mu > \mu' \text{ o } \mu = \mu' \text{ o } \mu < \mu'.$$

Invero se è, p. es.,

$$\mu > \mu',$$

avremo un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che (n. 558)

$$\mu > \frac{m}{n} > \mu',$$

e allora dal n. prec. risulta

$$\mu B > \frac{m}{n} B > \mu' B.$$

562. Il rapporto dei segmenti a e b sia uguale al numero irrazionale $\mu = (\mathbf{H}, \mathbf{K})$. Osserviamo che *si possono trovare due numeri razionali, appartenenti l'uno alla classe* **H** *e l'altro a* **K**, *che differiscano per una frazione* $\frac{1}{n}$, *piccola quanto si vuole.*

Invero fra i successivi multipli di $\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots .$$

se ne trovano certamente due consecutivi

$$\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}$$

appartenenti il primo ad **H** il secondo a **K**.

Avremo allora

$$\frac{m}{n} b < a < \frac{m+1}{n} b,$$

e il segmento $\frac{m}{n} b$ differirà da a per meno di $\frac{b}{n}$; cosicchè se n è molto grande, la differenza fra a ed

$\frac{m}{n}b$ è praticamente trascurabile, cioè il segmento $\frac{m}{n}b$ coincide *sensibilmente* con a.

Perciò si dice che $\frac{m}{n}$ è « un *valore approssimato per difetto* del numero irrazionale μ a meno di $\frac{1}{n}$ ».

Invece $\frac{m+1}{n}$ si dice « *valore approssimato per eccesso di* μ a meno di $\frac{1}{n}$ ».

Queste definizioni si estendono senz'altro al caso di due grandezze incommensurabili qualsivogliano.

Operazioni sui numeri irrazionali.

Affinchè il concetto più esteso di *numero*, che abbiamo ottenuto con la introduzione dei *numeri irrazionali*, sia suscettibile d'essere adoperato con pieno profitto, occorre far vedere che nel nuovo campo di numeri, il quale contiene insieme razionali e irrazionali (numeri reali), si possono definire le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, *addizione* e *moltiplicazione*, e quindi le loro inverse, in modo che siano conservate per le operazioni così definite le proprietà fondamentali (*leggi formali*) che valgono per esse nel campo dei numeri razionali.

Quando noi avremo fatto questo, resteranno senz'altro stabilite anche pei numeri irrazionali tutte le conseguenze che nell'Aritmetica si deducono pei numeri razionali dalle accennate proprietà delle operazioni fondamentali.

È su questo argomento che noi intendiamo qui trattenerci brevemente.

563. Per definire la *somma* di due numeri di cui uno almeno sia irrazionale, premettiamo un'osservazione sui numeri razionali. Se $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sono due numeri razionali qualsiansi, ed u è un segmento *scelto ad arbitrio*, si costruiscano i due segmenti (n. 560)

$$a = \frac{p}{q}u,\ a' = \frac{p'}{q'}u,$$

pei quali è

$$a : u = \frac{p}{q},\ a' : u = \frac{p'}{q'}.$$

Allora la somma

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}$$

dà il rapporto $(a + a') : u$, perchè dalle uguaglianze, valide per costruzione,

$$qa = pu,\ q'a' = p'u$$

risulta

$$qq'a = pq'u,\ qq'a' = qp'u$$

e quindi

$$qq'(a + a') = (q'p + qp')u,$$

onde si conclude veramente

$$(a + a') : u = \frac{pq' + qp'}{qq'} = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}.$$

Ora questa proprietà della somma dei numeri razionali si assumerà a definizione della somma dei numeri irrazionali. Consideriamo precisamente due numeri μ, μ', di cui uno almeno sia irrazionale. Scelto

ancora ad arbitrio un segmento u, costruiamo i segmenti (n. 560)

$$a = \mu u, \quad a' = \mu' u.$$

Definiremo la *somma* $\mu + \mu'$ *dei due numeri* μ, μ' (addendi) *come il rapporto* $(a + a') : u$ *dei segmenti* $a + a'$ *ed* u.

Nota. — Importa notare che la somma dei due numeri μ, μ' definita nel modo geometrico dianzi indicato, è indipendente dal segmento ausiliare u.

Si scelga invero un altro segmento ausiliare v, e si prendano

$$b = \mu v, \quad b' = \mu' v.$$

Avremo allora

$$a : u = b : v = \mu.$$
$$a' : u = b' : v = \mu',$$

e i tre segmenti a, a', u saranno proporzionali ordinatamente a b, b', v (nn. 446, 471); onde sarà

$$a : a' = b : b'.$$

Di qui componendo, si ricava

$$a + a' : a = b + b' : b$$

e perciò, in base ai già citati nn. 446, 471, sarà

$$a + a' : u = b + b' : v,$$

il che dimostra appunto che, anche partendo dal segmento ausiliare v, si giunge alla stessa somma, che abbiamo ottenuta valendoci del segmento u.

564. Se $\mu = (\mathsf{H}, \mathsf{K})$, $\mu' = (\mathsf{H}', \mathsf{K}')$, è facile vedere che la somma $\mu + \mu'$ corrisponde alla *sezione* che si ottiene sommando da una parte ciascun numero di H con ciascun numero di H', dall'altra ciascun numero di K con ciascun numero di K', cioè alla sezione che si suole indicare con $(\mathsf{H} + \mathsf{H}', \mathsf{K} + \mathsf{K}')$.

Questa è la definizione generale che si dà della somma nella teoria aritmetica dei numeri irrazionali.

565. Nota. — Dalle proprietà della somma, dei segmenti (nn. 20-31) risultano estese anche al caso degli irrazionali la

proprietà commutativa ed *associativa* della somma di numeri razionali.

Queste stesse proprietà si possono anche riconoscere in base alla definizione aritmetica della somma (n. prec.).

566. Seguendo un cammino analogo a quello tenuto dianzi, definiamo in generale il *prodotto* di due numeri, di cui uno almeno sia irrazionale.

Premettiamo a questo scopo un' osservazione relativa al prodotto di due numeri razionali.

Se $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ sono due numeri razionali qualsiansi, e costruiamo, partendo da un segmento ausiliare u, i due segmenti

$$b = \frac{r}{s}\, u, \quad a = \frac{p}{q}\, b$$

talchè sarà

$$a : b = \frac{p}{q}, \quad b : u = \frac{r}{s},$$

il prodotto

$$\frac{p}{q}\ \frac{r}{s}$$

dà il rapporto $a : u$.

Infatti da

$$qa = pb, \quad sb = ru$$

ricaviamo

$$qsa = psb = pru$$

e quindi

$$a : u = \frac{p}{q}\ \frac{r}{s}$$

Questa proprietà del prodotto di due numeri razionali si assumerà a definire il prodotto di due nu-

meri μ, μ', di cui uno almeno sia irrazionale. Scelto un qualsiasi segmento ausiliare u, costruiremo i segmenti

$$b = \mu' u, \quad a = \mu b,$$

pei quali

$$a : b = \mu, \quad a : u = \mu'$$

e *definiremo il prodotto* $\mu\mu'$ *di* μ *per* μ' *come il rapporto* $a : u$.

Anche qui è essenziale notare che il prodotto così definito di μ per μ' è sempre lo stesso, qualunque sia il segmento ausiliare u da cui si parte.

Se invero partiamo da un segmento u' e prendiamo

$$b' = \mu' u', \quad a' = \mu b',$$

dalle due proporzioni

$$\mu = a : b = a' : b'$$
$$\mu' = b : u = b' : u',$$

risulta, permutando (n. 446)

$$a : a' = b : b' = u : u'$$

e quindi

$$a : a' = u : u'$$

onde risulta veramente

$$a : u = a' : u'.$$

567. Se $\mu = (\mathsf{H}, \mathsf{K})$, $\mu' = (\mathsf{H}', \mathsf{K}')$ è agevole constatare che il prodotto $\mu\mu'$ corrisponde alla *sezione* che si ottiene moltiplicando da una parte ciascun numero di H per ciascun numero di H', e dall'altra ciascun numero di K per ciascun numero di K', cioè alla sezione che si suole indicare con $(\mathsf{HH}', \mathsf{KK}')$. Si ricade così nella definizione aritmetica del prodotto di due numeri irrazionali.

568. Il prodotto, definito qui in modo generale per numeri razionali e irrazionali, gode delle *proprietà commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma*. Ciò si può dimostrare sia in base alla definizione geometrica (n. 566), sia in base alla definizione aritmetica (n. prec.). [Si vedano, in ispecie per la dimostrazione geometrica della proprietà commutativa, gli esercizi sulla *ragione perturbata* a pag. 287)].

569. In modo perfettamente analogo a quello del n. 563, si definisce la *differenza* di due numeri, determinando così la *sottrazione* come operazione inversa dell'addizione.

Similmente, si giunge, in modo analogo a quello del n. 566, a porre la seguente definizione generale: Dati due numeri μ e ν e costruiti, partendo da un qualsiasi segmento u, i segmenti

$$a = \mu u, \quad b = \nu u,$$

dicesi *quoziente* $\frac{\mu}{\nu}$ di μ per ν il rapporto $a : b$.

Misura dei segmenti.

570. Le considerazioni svolte in questo capitolo ci permettono oramai di *misurare* le grandezze, cioè di rappresentarle per mezzo di numeri.

A tale scopo basta fissare per ogni classe di grandezze una grandezza di paragone U, che si chiama *unità di misura*, e considerare i rapporti di tutte le altre grandezze alla grandezza U. Cominciamo p. es., dai segmenti.

571. Si scelga ad arbitrio un certo segmento u che chiameremo *unità* di misura (lineare o delle lunghezze) e che rappresenteremo col numero 1.

Preso un altro segmento qualsiasi a, il numero $a : u$ si dirà *misura* di a rispetto all'unità u. Questa misura sarà razionale o irrazionale secondo che a è commensurabile o incommensurabile con l'unità. I risul-

tati dei nn. prec. ci permettono senz'altro di enunciare le seguenti proposizioni:

Scelto arbitrariamente un segmento come unità, ogni altro segmento è misurato da un numero ben determinato e, viceversa, per ogni numero vi è un segmento che lo ammette come misura (o rapporto all'unità).

Segmenti uguali hanno misure uguali (n. 560).

Le misure di segmenti disuguali sono disuguali nello stesso senso e viceversa (n. 561).

La somma di due segmenti ha per misura la somma delle misure rispettive (n. 563).

Talvolta si dà alla misura di un segmento il nome di *lunghezza*. E dove vengano considerate sistematicamente le misure dei segmenti, ai quali si riferisce una serie di deduzioni, « il segmento che ha per misura il numero a » viene designato per brevità come « segmento a ».

572. Il segmento che si può assumere come unità di misura delle lunghezze è arbitrario; ma è ben noto che nella pratica si usa come unità di misura delle lunghezze il *metro*, il cui campione è segnato sullo spigolo di un regolo di platino, che si conserva dal 1790 negli Archivi dello Stato Francese ed è la 40 000 000ma parte del meridiano terrestre, secondo le determinazioni della Commissione geodetica francese nominata dall'Assemblea Nazionale nel 1790. Ma determinazioni più recenti e più esatte hanno messo in luce la ineguaglianza dei diversi meridiani terrestri, che rende inesatta la *definizione naturale* del metro per circa $\frac{1}{5000}$ del suo valore.

Il metro si suddivide in 10, 100, 1000, 10000, ... parti uguali, che si dicono rispettivamente *decimetri, centimetri, millimetri, decimillimetri* . . .: e un segmento si misura cercando, col solito procedimento delle successive divisioni, quanti metri, quanti decimetri, quanti millimetri . . . esso contiene.

È anche noto come ad abbreviare la rappresentazione di grandi numeri di metri si siano introdotti dei nomi speciali per indicare i multipli del metro secondo potenze di 10 *(decametro, ettometro, chilometro, miriametro)*.

573. Dati due segmenti $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, le cui misure, rispetto all'unità $\boldsymbol{u}$, siano rispettivamente μ e ν, abbiamo

$$\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{b} = \nu\boldsymbol{u}$$

e quindi (n. 569)

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \frac{\mu}{\nu};$$

cioè *il rapporto di due segmenti qualsiansi è uguale al quoziente delle misure dei due segmenti, considerati rispetto ad una qualsiasi unità.*

574. In base al n. prec. e al n. 559, possiamo enunciare senz'altro il seguente teorema fondamentale:

Teor. — *Se quattro segmenti sono in proporzione e si misurano rispetto ad una qualsiasi unità di misura, il quoziente delle misure del primo e del secondo è uguale al quoziente delle misure del terzo e del quarto, e viceversa.*

Nota. — Chiamando, secondo la consuetudine, *proporzionali* quattro numeri (sia irrazionali che razionali) quando il quoziente del primo e del secondo è uguale al quoziente del terzo e del quarto, il teorema precedente si potrà enunciare sotto la forma seguente:

Se quattro segmenti sono in proporzione, anche le loro misure rispetto ad una qualsiasi unità sono proporzionali; e, viceversa, se le misure di quattro segmenti, rispetto ad una unità determinata qualsiasi, sono proporzionali, anche i quattro segmenti sono in proporzione.

575. Osserviamo da ultimo come occorra talvolta, specialmente nelle applicazioni, di dover cambiare l'unità di misura. Siamo così condotti a cercare la relazione che passa fra le misure di un medesimo

segmento rispetto a due diverse unità di cui sia noto il rapporto.

Se μ è la misura del segmento a rispetto alla unità u, e si considera una nuova unità di misura u' tale che sia

$$u : u' = \nu$$

si ricava da

$$a = \mu u, \quad u = \nu u'$$

che il rapporto $a : u$ è uguale a $\mu\nu$ (n. 566), cioè *la misura di* a *rispetto all'unità* u' *si ottiene moltiplicando la misura* a *rispetto ad* u *pel rapporto* $u : u'$ *delle due unità.*

Misura degli angoli.

576. Il procedimento che abbiamo indicato per la misura dei segmenti si estende alle altre classi di grandezze.

Per *misurare* gli angoli occorrerà fissare come unità un certo angolo determinato, che del resto si potrà scegliere ad arbitrio. Ad esso si farà corrispondere come misura il numero 1; e come misura di un altro angolo qualsivoglia si assumerà il *rapporto* dell'angolo considerato all'angolo-unità.

Nella pratica si adotta solitamente come unità fondamentale degli angoli la 90^a parte aliquota dell'angolo retto, che si dice *grado* e si scrive « 1° »; e si assumono come unità ausiliari il *minuto* che è la 60^a parte aliquota del grado, e il *secondo* che è la 60^a parte aliquota del minuto, e i summultipli decimali del secondo. Un minuto si scrive «1′» e un secondo «1″».

Ma noi per ogni arco di circonferenza abbiamo definito l'arco rettificato; e gli archi rettificati, essendo segmenti, sono grandezze omogenee.

Siccome gli archi sono proporzionali ai relativi archi rettificati, si potrà assumere come *misura di un arco* la *misura del corrispondente arco rettificato,* la quale è determinata quando sia fissato l'unità di misura delle lunghezze. Codesta misura di dirà « *lunghezza dell'arco* ».

609. E facile trovare la lunghezza di un arco pel quale si conoscano la lunghezza del raggio e l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.

Infatti, se l è la lunghezza dell'arco, r la lunghezza del raggio e α l'ampiezza dell'angolo al centro, espressa in gradi (ed, eventualmente, in frazioni decimali di grado) avremo, per la proporzionalità degli archi ai rispettivi angoli al centro (n. 532, 465) che

$$l : \alpha = 2\pi r : 360$$

e quindi

$$l = \frac{\pi \alpha r}{180} \ (^1).$$

Area del cerchio e del settore circolare.

610. Quanto alla superficie del cerchio, abbiamo dimostrato che essa è uguale a quella del triangolo che ha per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio. Ricordando i risultati dei numeri 537, 594, 599, abbiamo senz'altro che l'area S del cerchio, il cui raggio abbia la lunghezza r, è data da

(1) Se α è data in minuti o in secondi, si ha manifestamente una formula analoga, dove per altro il divisore, anzichè 180, è 10800 o 648000 rispettivamente.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$$

ossia da

$$S = \pi r^2.$$

Praticamente vale la

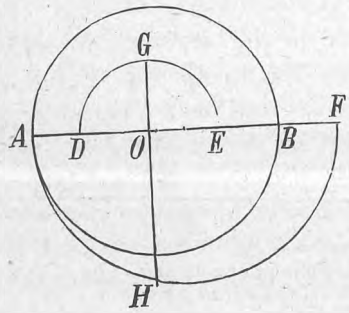
Regola. — *L'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per il numero fisso* 3,14 *o* 3,1416.

611. Il problema della *quadratura del cerchio*, cioè il problema di costruire un poligono avente superficie uguale ad un cerchio dato, è *impossibile* nello stesso senso, in cui è impossibile la rettificazione della circonferenza (n. 603), vale a dire nel senso che un tal poligono non è costruibile MEDIANTE GLI STRUMENTI ELEMENTARI (riga, compasso, ecc.).

Abbiamo dato già esempio di una rettificazione *approssimata* della circonferenza, eseguibile con la riga e il compasso; ed è chiaro che codesta costruzione permette di determinare un triangolo, la cui superficie differisce pochissimo da quella del cerchio. Ma si possono anche assegnare delle costruzioni (eseguibili con riga e compasso) che diano direttamente la *quadratura approssimata del cerchio*, e dalle quali si deducano reciprocamente altrettanti rettificazioni approssimate della circonferenza.

Daremo qui un esempio di siffatte quadrature approssimate.

Sul diametro AB = $2r$ del cerchio dato, si portino, a partire da O e da bande opposte di esso, i segmenti OD = $\frac{3}{5}r$, OF = $\frac{3}{2}r$, e dimezzato in E il raggio OB (al cui prolungamento appartiene F), si descrivano da banda opposta rispetto alla AB, le semicirconferenze di diametri DE, AF. Se la perpendicolare in O alla AB interseca in G, H rispettivamente codeste due semicirconferenze, il quadrato di lato GH ha approssimatamente superficie uguale al cerchio dato.



Si ha invero,

$$AO = r,\ OF = \frac{3}{2}r,$$

$$OD = \frac{3}{5}r,\ OE = \frac{1}{2}r$$

e (n. 459)

$$OA : OH = OH : OF$$
$$OD : OG = OG : OE$$

e quindi

$$(OH)^2 = \frac{3}{2}r^2,\ (OG)^2 = \frac{3}{10}r^2$$

e quindi

$$(GH) = (OH) + (OG) = \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10}r = r.\ 1{,}77246\ldots$$

Poichè

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77246\ \ldots,$$

GH differisce per eccesso dal lato del quadrato che ha la stessa superficie del cerchio, per meno di $\frac{1}{100000}$ del raggio [1].

612. Il settore di cerchio ha (n. 507) superficie uguale a quella del triangolo che ha per base l'arco rettificato e per altezza il raggio. Vale perciò pel n. 594 la

Regola. — *L'area di un settore circolare è dato dal semiprodotto delle lunghezze dell'arco e del raggio.*

613. Se l'arco corrispondente al settore è dato per mezzo della sua ampiezza α (data in gradi ed, eventualmente, in frazioni di grado) si ricordi che i settori

[1] Per le questioni relative alla rettificazione della circonferenza e alla quadratura del cerchio vedi CALÒ: « *Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del circolo* » nei *Collectanea* di F. ENRIQUES (op. cit.),

sono proporzionali agli archi rispettivi (nn. 465, 466); onde confrontando l'area A del settore con quella del cerchio, e indicando con r il raggio di questo, avremo che

$$A : \pi r^2 = \theta^0 : 360^0;$$

onde risulta

$$A = \pi r^2 \frac{\theta}{360.}$$

Applicazioni della teoria della misura.

614. La possibilità di rappresentare le grandezze geometriche per mezzo di numeri, loro misure, permette di tradurre le relazioni geometriche in uguaglianze (o disuguaglianze) algebriche. Così la dimostrazione di un teorema esprimente una relazione metrica fra grandezze, si riduce alla verifica di una o più uguaglianze fra i numeri loro misure: e la risoluzione di un problema si può ricondurre alla risoluzione di una o più equazioni, che leghino le misure note dei dati colle misure incognite delle grandezze che si cercano.

Quanto alla possibilità di esprimere teoremi geometrici per mezzo di identità algebriche, ci basterà ricordare in via d'esempio i teoremi dei nn. 350-354, i quali, ove si indichino le misure dei segmenti, che vi sono considerati, colle lettere stesse che li rappresentano, si traducono rispettivamente nelle seguenti identità:

$$(a + b)c = ac + bc$$
$$(a + b + c + \dots + h)k = ak + bk + ck + \dots + hk$$
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Ma assai più interessante è *l'applicazione dell'Algebra alla risoluzione dei problemi geometrici.*

Quando si vuol risolvere un problema geometrico col sussidio dell'Algebra, conviene anzitutto sciegliere opportunamente le grandezze che si assumono come incognite; e in codesta scelta non si può essere guidati da criteri generali; ma piuttosto da un certo intuito speciale, che viene educato soltanto da un lungo e paziente enercizio. Indi si traducono le

relazioni, stabilite dal problema fra le grandezze date e quelle da determinarsi, in una o più equazioni (*si intavola il problema*).

Dopo ciò *si risolve l'equazione* o *il sistema di equazioni* dianzi formato, e fra le soluzioni così ottenute *si cercano* i valori che misurano le grandezze richieste.

Abbiamo detto « si cercano » perchè se l'equazione o il sistema di equazioni ammette più soluzioni, in generale non a ciascuna di esse corrisponde una soluzione del problema geometrico proposto. Alcune soluzioni vanno escluse (o perchè sono negative, contro le condizioni implicitamente imposte alle grandezze incognite della loro natura, o perchè esorbitano da certi limiti, entro cui debbono essere contenute codeste grandezze, o per altre ragioni). Le soluzioni algebriche che debbono così escludersi, rispondono talvolta ad una forma leggermente modificata del problema proposto, o ad un problema in qualche modo connesso col primitivo. Di più, se i dati del problema non sono numericamente fissati, ma sono rappresentati da lettere, e suscettibili quindi di assumere infiniti valori diversi, può accadere che quando codesti dati oltreppassino certi determinati limiti, qualche soluzione algebrica che dianzi dava luogo ad una soluzione del problema geometrico proposto, venga meno a qualcuna delle condizioni (di segno o di valore assoluto, ecc.) che sono a ciò necessarie. Così può dirsi che, per certi valori speciali dei dati, soluzioni algebriche generalmente distinte vadano a coincidere, o soluzioni che dianzi esistevano vengano a mancare (diventino immaginarie) e così via.

È oggetto della cosidetta *discussione* l'esame ordinato e preciso di tutte codeste eventualità, e la determinazione delle condizioni (di uguaglianza o disuguaglianza), cui devono soddisfare i dati, perchè ciascuna di esse abbia luogo.

Discusse le formule di risoluzione delle equazioni del problema, codeste formule permettono oramai di ottenere, per via di calcoli ben determinati sui valori numerici dei dati, i valori numerici che misurano le grandezze richieste dal problema; e, dal punto di vista metrico, la risoluzione è compiuta.

Ma si tenta in generale di fare un passo ulteriore; e si può anzi dire che sia qui lo scopo ultimo dell'applicazione dell'Algebra alla risoluzione dei problemi geometrici.

Le formule di risoluzione ottenute danno una serie ben definita di calcoli, che eseguiti sulle misure delle grandezze date conducono a determinare le misure delle grandezze incognite. Ora si cerca di *interpretare* geometricamente codeste operazioni algebriche in modo da ottenere, in fine, una serie di costruzioni geometriche, che permettano di dedurre dalle grandezze geometriche date le grandezze geometriche incognite.

615. Noi qui ci limiteremo a dare l'interpretazione geometrica di alcuni tipi di formule che più frequentemente si presentano nella risoluzione dei problemi geometrici. Colle lettere minuscole dell'alfabeto latino indicheremo qui promiscuamente i segmenti e le loro misure, e, considereremo, come è naturale, solo quelle formule che danno luogo a costruzioni eseguibili colla riga e col compasso.

a) La somma e la differenza di due segmenti

$$a + b,\ a - b$$

si costruiscono immediatamente.

b) L'espressione

$$x = \frac{ab}{c},$$

poichè si può scrivere

$$c : b = a : x$$

rappresenta il segmento quarto proporzionale in ordine a c, b, a (vedi costruzione al n. 451). Poichè la medesima relazione si può scrivere

$$cx = ab,$$

abbiamo che x è l'altezza del rettangolo di base c, equivalente al rettangolo di base a ed altezza b.

Analogamente si costruisce ogni segmento rappresentato da una espressione della forma

$$x = a\,\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{c_1 c_2 \ldots c_n};$$

basta invero costruire successivamente le n quarte proporzionali

$$x_1 = \frac{ab_1}{c_1},\ x_2 = \frac{x_1 b_2}{c_2},\ \ldots\ x_{n-1} = \frac{x_{n-2} b_{n-1}}{c_{n-1}},\ x = \frac{x_{n-1} b_n}{c_n}.$$

Nota. — Costruite, come si è detto, le espressioni nominate del tipo

$$x = a\,\frac{b_1}{c_1}\,\frac{b_2}{c_2}\ldots\frac{b_n}{c_n},$$

si potranno anche costruire (per somma e sottrazione) tutte le espressioni *razionali omogenee di 1° grado* rispetto alle misure dei segmenti dati a, b_1, b_2, ... c_1, c_2 .... Ed in queste costruzioni non interviene la conoscenza dell'unità di misura.

Ogni espressione monomia che non sia di 1° grado (e quindi ogni espressione razionale, omogenea o non omogenea, in cui entrino termini di grado diverso dal primo) può essere costruita dopo averla ridotta di 1° grado, adoperando l'unità di misura $u = 1$. Così l'espressione

$$x = \frac{b}{c},$$

posta sotto la forma $x = \frac{bu}{c}$, si costruisce prendendo il quarto proporzionale dopo i segmenti c, b ed u.

Similmente l'espressione $x = ab$ può scriversi

$$x = \frac{ab}{u},$$

onde risulta che x è il quarto proporzionale dopo u, a e b.

c) All'estrazione di radice

$$x = \sqrt{ab},$$

poichè si ha

$$x^2 = ab$$

e quindi

$$a : x = x : b,$$

corrisponde la ricerca del segmento medio proporzionale fra i due segmenti a e b (n. 460); e l'equazione cui soddisfa x mette in evidenza che si risolve in tal modo il problema di determinare il lato del quadrato equivalente al rettangolo di base a ed altezza b.

Ricordando la costruzione *a*) si costruisce con quarte e medie proporzionali ogni espressione della forma

$$\frac{b_1 b_2}{c_1 c_2}\sqrt{ab}.$$

d) Si riconduce al caso precedente la costruzione dell'espressione

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a - b)\,(a + b)}.$$

Ma poichè

$$x^2 = a^2 - b^2$$

si può anche costruire la medesima espressione ricorrendo al teorema di PITAGORA, assumendo a come ipotenusa di un triangolo rettangolo e b come cateto; x è l'altro cateto.

Il medesimo teorema permette di costruire l'espressione

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nello stesso modo si costruiscono anche espressioni più complicate. Così per costruire

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$$

si costruisce dapprima

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

poi

$$x_2 = \sqrt{x_1^2 - c^2}$$

e infine

$$x = \sqrt{x_2^2 + d^2}.$$

Nota. — Vale anche qui un osservazione analoga a quella della nota precedente. Le equazioni in x di cui dianzi abbiamo interpretato le formule risolutrici, sono omogenee (di 2° grado). Per costruire la radice di un'espressione di 2° grado basterà rendere l'espressione stessa (se tale non è) omogenea, aggiungendo nei suoi termini dei fattori $u = 1$.

Così l'espressione

$$x = \sqrt{a^2 + b}$$

si può interpretare come la costruzione di un segmento, scrivendola

$$x = \sqrt{a^2 + bu}.$$

e) Diamo qui infine la costruzione delle radici delle due equazioni 2° grado (omogenee rispetto all'insieme delle loro lettere)

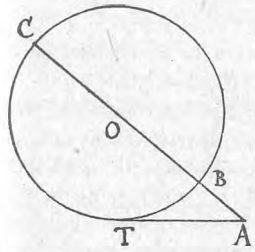
$$\alpha) \quad x^2 + ax - b^2 = o$$
$$\beta) \quad x^2 - ax + b^2 = o$$

La α) scritta sotto la forma

$$x\,(a + x) = b^2,$$

ci dice che si tratta di costruire un rettangolo equivalente al quadrato di lato b e in cui la differenza fra il lato maggiore e il minore è a.

Perciò descritta la circonferenza di diametro a, su di una tangente, a partire dal punto di contatto, si prenda il segmento $TA = b$. Siano B, C i punti in cui la congiungente di A col centro incontra la circonferenza.



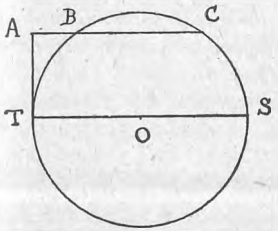
I due segmenti AC, AB, la cui differenza BC è uguale ad a e il cui rettangolo è equivalente al quadrato di $AT = b$ (n. 491, 463), rappresentano in valore assoluto le radici della α).

Si sa dall'Algebra che la equazione α) ammette sempre due radici distinte: ciò corrisponde perfettamente al fatto che la costruzione indicata dà sempre luogo a due segmenti distinti AB, AC.

L'equazione β) si può scrivere

$$x\,(a - x) = b^2$$

onde si vede che si vuol costruire un rettangolo equivalente al quadrato di area b^2 e avente per semiperimetro il segmento a.



Preso come dianzi su di una tangente alla circonferenza di diametro a il segmento $AT = b$, da A si conduca la parallela al diametro passante per T. Se codesta parallela incontra la circonferenza nei punti B, C i segmenti AB, AC la cui somma è uguale a $TS = a$, e il cui rettangolo è equivalente al quadrato di $AT = b$, rappresentano le due radici di β).

L'Algebra insegna che l'equazione β) ha due radici distinte o una sola o nessuna, secondo che è

$$b^2 < \frac{a^2}{4}, \text{ o } b^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ o } b^2 > \frac{a^2}{4},$$

ossia, poichè a e b si considerano essenzialmente positivi, secondo che è

$$b < \frac{a}{2}, \text{ o } b = \frac{a}{2}, \text{ o } b > \frac{a}{2}.$$

Ora si riconosce subito dalla costruzione dianzi indicata che appunto secondo che è

$$\text{TA} < \frac{\text{TS}}{2}, \text{ o TA} = \frac{\text{TS}}{2}, \text{ o TA} > \frac{\text{TS}}{2}$$

la parallela per A al diametro TS incontra la circonferenza in due punti, o in uno o in nessuno (nn. 183, 186, 194).

616. Accenneremo qui da ultimo, incidentalmente, ad una altra importantissima applicazione della teoria della misura fondata pur essa sulla corrispondenza fra operazioni algebriche e costruzioni geometriche, e che può dirsi inversa di quella indicata nel n. prec. in quanto consiste nella determinazione di numeri per mezzo di grandezze geometriche.

Nella Meccanica applicata, e specialmente nella Statica, si tratta spesso di determinare numericamente certe grandezze, che sono rappresentabili mediante segmenti, angoli, superficie. Perciò ai calcoli algebrici, che si richiederebbero a determinare siffatte grandezze, si sostituiscono opportune costruzioni grafiche, i cui primi elementi sono dati appunto dalle considerazioni del n. prec. Lo studio di codeste costruzioni grafiche costituisce già un intero ramo di scienza, la cosidetta *Statica grafica*, che, sebbene sia di origine relativamente recente (Culmann 1864, Cremona 1866) ha ormai una parte essenziale nella coltura dell'ingegnere, e tende ancora ad abbracciare altri campi più lontani (p. es. la Meccanica dello scheletro umano).

ESERCIZI

1. L'area di un triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto dei due cateti.

2. L'area di un rombo è uguale al semiprodotto delle due diagonali.

3. L'area di un quadrilatero è uguale al semiprodotto di una diagonale per la somma delle distanze da questa degli altri due vertici.

4. Gli agrimensori romani assumevano come area del tiangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}\ a^2$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo Erone come area di siffatto triangolo il numero

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right) a^2 ?\ (1)$$

5. Se l'area di un cerchio è uguale a quella di un poligono regolare, il raggio del cerchio è maggiore dell'apotema e minore del raggio del poligono [Si confronti l'area del cerchio con quelle dei cerchi iscritto e circoscritto al poligono.].

6. Se la lunghezza di una circonferenza è uguale a quella del perimetro di un poligono regolare, il raggio della circonferenza è maggiore dell'apotema del poligono e minore del raggio di esso. [Si confronti la lunghezza della circonferenza con le lunghezze delle circonferenze iscritte e circoscritte al poligono].

7. Se, come si suole, si assume come raggio dell'equatore terrestre 860 miglia geografiche e come lunghezza del-

(1) Questo esercizio e parecchi altri fra i seguenti furono tolti dal *Lehrbuch der Elementar Geometrie* di J. Henrici und. P. Treutlein (Leipzig, 1897-1901).

l'equatore stesso 2400 miglia geografiche, vi è accordo fra le cifre?

8. Qual'è il diametro della circonferenza, di cui l'arco di 1′ ha la lunghezza di 1 mm.?

9. La lunghezza della semicirconferenza è data approssimativamente dalla somma dei lati del quadrato e del triangolo equilatero iscritti nel cerchio. Di che ordine è l'approssimazione?

10. Dato un cerchio, se ne divida il diametro AB in cinque parti uguali, si prolunghi AB di un segmento AC uguale ad una di queste quinte parti, e sulla tangente in A si prenda il segmento AD uguale a tre di codeste parti. Il perimetro del triangolo ACD è approssimativamente uguale alla lunghezza della circonferenza. Qual'è il valore approssimato di π che si ricava dalla precedente costruzione?

11. Nicolò da Cusa (1464) per costruire un triangolo equilatero che ha perimetro uguale ad un dato cerchio, iscrive un quadrato nel cerchio e considera il triangolo equilatero iscritto nel cerchio che ha per diametro la somma del lato del quadrato or ora indicato e del raggio del cerchio dato. Che valore oppossimato di π si ricava di qui?

12. Per trasformare un dato quadrato in un cerchio di ugual superficie, i matematici indiani prendevano a partire dal centro del quadrato, sulla parallela a un lato, un segmento uguale alla metà della diagonale, dividevano la parte di questo segmento esterno al quadrato in tre parti uguali e consideravano il cerchio di centro nel centro del quadrato e passante per il primo dei due punti di divisione or ora accennati. Quale valore approssimato di π si ricava di qui?

13. Secondo il celebre pittore e geometra Albrecht Dürer (1525) il problema precedente si risolve prendendo come diametro gli $\frac{8}{10}$ della diagonale del quadrato. Si ha così per π il valore approssimato $3 + \frac{1}{8}$, che compare già in Vitruvio.

14. Dimostrare algebricamente i teoremi enunciati negli esercizi 1, 2, 3, 4 dopo il Cap. V (pag. 210).

15. Se i punti A, B, C, D formano un gruppo armonico i segmenti (AC), (AB), (AD) sono in progressione *armonica*, cioè le loro inverse sono in progressione aritmetica.

16. Se i punti A, B, C, D formano un gruppo armonico ed O è il punto medio di AB, si ha $(OC)^2 = (OB)\,(OD)$.

17. Dati più segmenti, le cui misure siano designate con a, b, c, d, e, f.... costruire i segmenti (la cui misura sia):

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2 + d^2} \quad \left(= \frac{a^2}{\frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{a}} + \frac{b^2}{\frac{c^2}{b} + \frac{d^2}{b}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{a\,b\,c}{d}}, \quad \sqrt{5\,\frac{a\,b\,c\,d}{e\,f}},$$

$$\sqrt{5\,a^2 + 2\,b^2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\sqrt{a^2 b + c^3}, \quad \sqrt{3\,\frac{a\,b\,e}{d} + e^2}, \quad \frac{c\,\sqrt{a^2 + b^2}}{d},$$

$$\sqrt{a\,b - c^2} \quad \left(a\,b > c^2 \right)$$

$$\sqrt{\frac{a^3 + b^2\,c}{d}} + \sqrt{\frac{e^3 - f^3}{g}} \quad \left(e > f \right)$$

$$\sqrt{g\,\sqrt{a^2 + b^2} + h\,\sqrt{e^2 + f^2}}$$

$$\sqrt[4]{a^4 + b^4} \quad \left(= \sqrt{a\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{a^2}}} \right)$$

$$\sqrt{\sqrt{a^2 + 2b^2}\,\sqrt{e^2 + 3\,f^2}}.$$

18. Dati più segmenti le cui misure siano a, b, c, d.... e dato il segmento unità di misura ($u = 1$), costruire i segmenti

$$abc, \quad \left(= \frac{abc}{u^2} \right)$$

$$ab + \frac{3}{7} - c^2$$

$$\sqrt{a^2 + b} \quad \left(= \sqrt{a^2 + bu} \right)$$

$$\sqrt{a + b^2 + c^3}$$

$$\sqrt{5\,a^2 + b}$$

$$\frac{a + \sqrt{b^2 + 4cd}}{2\,e}$$

$$\frac{3\,d + \sqrt{a^2 - bc}}{5\,e} \quad \left(a^2 > bc \right)$$

$$\sqrt{3\,d + \sqrt{a - b^2 - c}} \quad \left(a > b^2 + c \right)$$

$$\sqrt{2\,a + \sqrt{3\,b + \sqrt{c + d^2}}}$$

$$\sqrt{\sqrt{a^3 - \frac{b^2}{cd}}\ \sqrt{a^2 + 5\,b}} \quad \left(a^3 > \frac{b^2}{cd} \right)$$

In tutti questi casi le formule debbono essere rese omogenee di 1° grado con un artifizio conveniente.

19. Costruire due segmenti data la loro somma ed il rettangolo da loro contenuto.

20. Risolvere algebricamente il problema della sezione aurea di un segmento (n. 401), ed effettuare la costruzione a cui conduce la formula di risoluzione.

21. Calcolare il raggio del poligono regolare di 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lati, dato il raggio o l'apotema.

22. Calcolare l'area del poligono regolare di 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lati, dato

a) il lato,

b) oppure il raggio,

c) o l'apotema.

23. Trasformare un poligono regolare di 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lati, in un altro poligono regolare equivalente, il cui numero di lati (diverso dal precedente) sia ancora uno dei numeri 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15.

24. Le aree di due poligoni regolari di un numero pari di lati, iscritti in un cerchio stanno fra loro come i perimetri dei poligoni regolari, iscritti nel medesimo cerchio, aventi rispettivamente un numero di lati metà del numero dei lati dei due poligoni dati (1).

25. Trasformare un rettangolo dato in un triangolo rettangolo di base assegnata nel quale uno dei cateti sia triplo dell'altro.

26. Costruire un triangolo rettangolo di data base, nel quale sia data la somma o la differenza dei cateti.

27. Costruire un triangolo data la base, il piede della relativa altezza e la somma o la differenza o il rapporto degli altri due lati.

28. Costruire un triangolo data la base, il punto in cui essa è divisa dalla bisettrice dell'angolo al vertice, e la somma o la differenza degli altri due angoli.

29. Costruire un triangolo data la base, l'area e la somma o la differenza degli altri due lati.

30. In ogni triangolo la somma dei quadrati di due lati è equivalente a due volte la somma del quadrato della metà del terzo lato e del quadrato della mediana corrispondente a questo lato.

31. La differenza dei quadrati di due lati è uguale a due volte il rettangolo del terzo lato e della proiezione della corrispondente mediana su di esso.

32. Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al rettangolo dell'altezza corrispondente al terzo lato e del diametro del cerchio circoscritto. [Nel dato triangolo ABC si abbassi l'altezza AD e si conduca il diametro AE del cerchio circoscritto: indi si confrontino i triangoli ABD, AEC].

33. Se R è il raggio del cerchio circoscritto a un triangolo di lati a, b, c di semiperimetro p e di arco S, si ha

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ [eserc. prec.].}$$

(1) I. Amaldi: *Appunti di Geometria:* Pitagora II, n. 1, 1895-96.

34. Se r è il raggio del cerchio iscritto si ha

$$S = pr.$$

35 Se r_1, r_2, r_3 sono i raggi dei cerchi exiscritti compresi negli angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ rispettivamente si ha

$$r_1 = \frac{S}{p-a},\ r_2 = \frac{S}{p-b},\ r_3 = \frac{S}{p-c}.$$

36. Conservando le notazioni precedenti, si dimostrino le formule seguenti:

$$S = \sqrt{r\, r_1\, r_2\, r_3},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a},\quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} = \frac{1}{h_b},\quad \frac{1}{r_3} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r.$$

37. Mediante la *riga a due orli*, usata per effettuare la costruzione fondamentale indicata prima dell'esercizio 76 dopo il Cap. IV (pag. 164), dati i segmenti a, b, c, d.... e l'unità di misura ($u = 1$), si determinino i segmenti

$$ab,\ \frac{ab}{c},\ \frac{abc}{d},$$

$$\sqrt{a^2 + b^2},\ \sqrt{a + 2b^2},\ \sqrt{5 + a^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},\ \sqrt{ab + c + d^3}.$$

Sono date due perpendicolari *(assi)* secantisi in un punto O *(origine)*, e rispetto a queste si considerano le distanze di un punto P variabile nel loro piano e le loro misure x, y *(coordinate)*.

38. Da quale equazione sono legate le coordinate x, y quando il punto P si muove:

α) sopra una retta per O (si supponga di conoscere le coordinate a, b di un punto della retta diverso da O, o almeno il loro rapporto $m = \frac{b}{a}$);

β) sopra una circonferenza di centro O;

γ) sopra una retta secante i due assi in due punti distanti da O rispettivamente di a, b. [Si sostituisca ad uno dei due assi, un altro asse parallelo in guisa da essere ricondotti al caso α);

δ) sopra una circonferenza col centro in un punto di coordinate a, b.

39. Determinare il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano all'equazione:

α) $$ax + by + c = o.$$

β) $$a\left(x^2 + y^2\right) + bx + cy + d = o$$

dove a, b, c, d rappresentano numeri dati.

40. Date le coordinate x_1, y_1 e x_2, y_2 di due punti, determinare la misura della loro distanza.

41. Costruire i punti del piano che appartengono ad una retta data, nota la somma o la differenza delle loro distanze da due punti A, B assegnati. (Si scelgano come assi la retta AB e la perpendicolare ad essa nel punto di mezzo del segmento AB; si scrivano le equazioni tra le coordinate di un punto soddisfacente a ciascuna delle condizioni poste; si risolva il sistema e s'interpretino le formule di risoluzione).

Nota. — I precedenti esercizi danno elementare nozione dei metodi della *Geometria analitica*, che permettono di ridurre sistematicamente in forma algebrica i problemi geometrici.

42. Dato un cerchio di raggio r, abbiamo che:

a) il lato del quadrato iscritto è $r\sqrt{2}$ e quello del circoscritto è $2r$;

b) i lati dei triangoli equilateri iscritto e circoscritto sono rispettivamente $r\sqrt{3}$, e $2r\sqrt{3}$;

c) i lati degli esagoni regolari iscritto e circoscritto sono rispettivamente r e $\frac{2}{3}\, r\sqrt{3}$.

43. Il lato del decagono regolare iscritto al cerchio di raggio r è $r\,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

44. Il lato del pentagono regolare iscritto è

$$r\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

[Considerati tre lati consecutivi AB, BC, CD del decagono regolare iscritto, si applichi il teor. di TOLOMEO (n. 496) al quadrangolo ABCD e si tenga conto dell'es. prec.].

45. Il lato del pentagono regolare iscritto in un cerchio è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti i lati dell'esagono e del decagono regolari iscritti nel cerchio medesimo.

46. Se l, L sono i lati di due poligoni regolari di ugual numero di lati, l'uno iscritto e l'altro circoscritto al cerchio di raggio r, abbiamo

$$L = \frac{2\,rl}{\sqrt{4\,r^2 - l^2}}.$$

47. Si calcolino in base agli esercizi 43, 44, 46 i lati del pentagono e decagono regolare circoscritti.

48. Se indichiamo con p_n, P_n i perimetri dei poligoni regolari di n lati, iscritto e circoscritto a un cerchio, si ha

$$P_{2n} = \frac{2\,P_n\,p_n}{P_n + p_n},\quad p_{2n} = \sqrt{p_n\,P_{2n}}.$$

49. Se si forma una successione, i cui termini siano alternatamente i valori inversi delle lunghezze dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti e iscritti a un dato cerchio, nei quali il numero di lati vada sempre raddoppiandosi, codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternatamente medio aritmetico e medio geometrico rispetto ai due termini immediatamente precedenti (1) [Cfr. es. prec.].

(1) È noto che dati due numeri a, b, si dicono loro medio aritmetico e medio geometrico i due numeri rispettivamente

$$\frac{a+b}{2}\ ,\ \sqrt{ab}\,.$$

50. Se s_n, S_n sono le aree dei poligoni regolari di n lati iscritto e circoscritto al cerchio, abbiamo

$$S_{2n} = \frac{2\,S_n\,s_n}{S_n + s_n}\ ,\ s_{2n} = \sqrt{s_n\,S_n}\,.$$

51. Si formi una successione, i cui termini siano alternatamente i valori inversi delle aree dei poligoni regolari iscritti e circoscritti ad un cerchio dato e tali che il numero dei lati vada sempre raddoppiandosi. Codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternatamente medio geometrico e medio aritmetico, ciascuno rispetto ai due termini immediatamente precedenti [Cfr. es. prec.].

52. Si considerino tutti i poligoni regolari aventi un dato perimetro (isoperimetri). Se r_n, a_n sono il raggio e l'apotema di quello fra codesti poligoni che ha n lati, si ha

$$a_{2n} = \frac{a_n + r_n}{2},\quad r_{2n} = \sqrt{r_{2n}\,a_{2n}}.$$

53. Se si forma una successione, i cui termini siano alternatamente i valori inversi delle lunghezze dell'apotema e del raggio di poligoni regolari isoperimetri, i cui lati vadano sempre raddoppiandosi, codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternatamente medio aritmetico e medio geometrico, ciascuno rispetto ai due termini immediatamente precedenti [Cfr. es. prec].

54. Si considerino tutti i poligoni regolari equivalenti a un poligono dato. Se r_n , a_n indicano il raggio, e l'apotema di quello fra codesti poligoni, che ha n lati, si ha

$$r_{2n} = \sqrt{r_n\,a_n}\ ,\quad a_{2n} = \frac{\sqrt{2a_n\,(a_n + r_n)}}{2}.$$

55. Se si forma una successione, i cui termini sono alternatamente le aree dei quadrati del raggio e del quadrato dell'apotema di poligoni regolari fra loro tutti equivalenti e aventi un numero di lati che si vada sempre raddoppiando, codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternatamente medio geometrico e medio aritmetico, ciascuno rispetto ai due immediatamente precedenti. [Cfr. es. prec.].

Nota. — Le quattro proposizioni dei nn. 49, 51, 53, 55 conducono a quattro metodi, fra loro aritmeticamente identici *per il calcolo numerico di* π.

Per dare un cenno di codesti metodi e metter chiaramente

in luce ciò che essi hanno di comune conviene premettere il seguente *Lemma aritmetico*: *Se nella successione di numeri*

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$$

i due primi sono disuguali e gli altri, a partire dal terzo, sono alternatamente medio aritmetico e medio geometrico dei due immediatamente precedenti

$$a_i = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}\ ,\quad b_i = \sqrt{a_i\, b_{i-1}}\ ,$$

le due successioni

a) $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

b) $b_1\ ,\ b_2\ ,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$

sono convergenti; cioè: 1) i numeri dell'una vanno crescendo e quelli dell'altra vanno decrescendo; 2) preso un numero piccolo a piacere, si possono sempre trovare due numeri a_n, b_n, la cui differenza è minore, in valore assoluto, del numero prefissato.

Infatti supposto, per fissare le idee, $a_1 < b_1$, essendo

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

sarà

$$a_2 > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1$$

e

$$a_2 < \frac{b_1 + b_1}{2} = b_1;$$

e similmente, essendo

$$b_2 = \sqrt{a_2\, b_1}$$

sarà

$$b_2 < \sqrt{b_1\, b_1} = b_1$$

e

$$b_2 > \sqrt{a_2\, a_2} = a_2.$$

Così risulta che la a) è crescente e la b) decrescente.

In secondo luogo dalle

$$b_2 - a_2 = \frac{b_2^2 - a_2^2}{b_2 + a_2} = \frac{a_2 b_1 - a_2^2}{b_2 + a_2} = \frac{a_2}{b_2 + a_2}\,(b_1 - a_1)$$

e dalla

$$\frac{a_2}{b_2 + a_2} < \frac{a_2}{2a_2} = \frac{1}{2},$$

risulta

$$b_2 - a_2 < \frac{1}{2}\,(b_1 - a_2);$$

ed essendo

$$a_2 = \frac{1}{2}\,(a_1 + b_1),$$

e quindi

$$b_1 - a_2 = \frac{1}{2}\,(b_1 - a_1)$$

concludiamo

$$b_2 - a_2 < \frac{1}{4}(b_1 - a_1).$$

Così in generale si dimostra

$$b_i - a_i < \frac{1}{4}\,(b_{i-1} - a_i);$$

e perciò le differenze $b_i - a_i$ saranno da un certo punto in poi minori di qualsiasi numero positivo assegnabile.

Analogamente si ragionerà nell'ipotesi $a_1 < b_1$: solo in tal caso risulta che è decrescente la successione a) e crescente la b).

Ciò premesso possiamo dare un cenno dei metodi pel calcolo di π.

I. — *Metodo dei perimetri.* — Se c è la lunghezza della circonferenza di raggio 1, abbiamo (n. 599)

$$c = 2\pi$$

e quindi

$$\pi = \frac{c}{2}\ :$$

talchè (n. 600) per avere un valore approssimato (per difetto o per eccesso) di π basta calcolare la lunghezza del semiperimetro di un poligono iscritto o circoscritto al cerchio di raggio 1.

D'altra parte per l'es. n. 49 e il lemma aritmetico dimostrato pocanzi, le due successioni

$$\frac{1}{P_n}\ ,\ \frac{1}{P_{2n}}\ ,\ \frac{1}{P_{4n}}\ ,\ \ldots.$$

$$\frac{1}{p_n}\ ,\ \frac{1}{p_{2n}}\ ,\ \frac{1}{p_{4n}}\ ,\ \ldots$$

sono convergenti, qualunque sia il numero n dei lati dei due primi poligoni regolari (iscritto e circoscritto) che si considerano; e in base appunto al n. 49 codeste due successioni si potranno egualmente calcolare non appena si conoscano i due primi termini.

Saranno pure convergenti le due successioni

$$(1) \qquad \frac{2}{P_n}, \frac{2}{P_{2n}}, \frac{2}{P_{4n}}, \ldots .$$

$$(2) \qquad \frac{2}{p_n}, \frac{2}{p_{2n}}, \frac{2}{p_{4n}}, \ldots ,$$

che per quanto si è detto dapprincipio ammettono come limite comune $\frac{1}{\pi}$. Perciò i termini delle (1) (2) daranno altrettanti valori approssimati (rispettivamente per eccesso e per difetto) di $\frac{1}{\pi}$.

Se partiamo dai quadrati circoscritto e iscritto, i primi termini delle (1) (2) sono rispettivamente $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Poichè $\frac{1}{4}$ è medio aritmetico tra 0 e $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ è medio geometrico tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, concludiamo che per avere due successioni convergenti, aventi come limite comune $\frac{1}{\pi}$, basta formare una successione di medie aritmetiche e geometriche, come quella indicata nel Lemma aritmetico, partendo dai numeri 0 e $\frac{1}{2}$.

II. — *Metodo delle aree.* — In base al n. 610 l'area S del cerchio di raggio 1 è data da

$$S = \pi,$$

cosicchè per avere un valore approssimato (per difetto o per eccesso) di π, basta calcolare l'area di un poligono iscritto o circoscritto al cerchio di raggio 1.

D'altra parte discende dall'es. 51 e dal Lemma aritmetico che le due successioni

$$(3) \qquad \frac{1}{s_n}, \frac{1}{s_{2n}}, \frac{1}{s_{4n}}, \ldots$$

$$(4) \qquad \frac{1}{S_n}, \frac{1}{S_{2n}}, \frac{1}{S_{4n}}, \ldots$$

sono convergenti.

Il loro limite comune sarà $\frac{1}{\pi}$, e, calcolando un numero sufficientemente grande di termini di esse, si otterrà un valore approssimato di $\frac{1}{\pi}$ con un errore piccolo a piacer nostro.

Poichè $s_4 = 2$, $S_4 = 4$, partendo dai quadrati iscritto e circoscritto si riottiene la stessa successione di medie aritmetiche e geometriche che abbiamo trovato col I metodo.

III. — *Metodo degli isoperimetri.* — Il raggio r di una circonferenza di lunghezza 2 è dato, per il n. 599 da

$$r = \frac{1}{\pi}.$$

E se un poligono regolare ha il perimetro 2 il suo apotema sarà minore di r, cioè di $\frac{1}{\pi}$, e il suo raggio sarà maggiore di $\frac{1}{\pi}$ (Cfr. es. 6): cosicchè $\frac{1}{\pi}$ sarà il limite comune delle due successioni convergenti (Cfr. l'es. 53 e il Lemma aritmetico):

$$a_n, a_{2n}, a_{4n}, \ldots .$$
$$r_n, r_{2n}, r_{4n}, \ldots ,$$

dove a_i, r_i sono l'apotema e il raggio del poligono regolare ad i lati, il cui perimetro sia uguale a 2.

Partendo dal quadrato $\left(a_4 = \frac{1}{4}, r_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ si riottiene la solita successione numerica, trovata coi due primi metodi.

IV. — *Metodo degli equivalenti.* — Se un cerchio ha l'area uguale ad 1, il suo raggio r è tale che (n. 610)

$$r^2 = \frac{1}{\pi},$$

talchè, se r_i, a_i indicano il raggio e l'apotema di un poligono regolare a i lati, e di area uguale ad 1, avremo

$$a_i^2 < \frac{1}{\pi} < r_i^2,$$

Perciò $\frac{1}{\pi}$ sarà il limite comune delle successioni (convergenti per l'es. 55 e il Lemma aritmetico):

$$r_n^2,\ r_{2n}^2,\ r_{4n}^2,\ \ldots$$

$$a_n^2,\ a_{2n}^2,\ a_{4n}^2,\ \ldots$$

Se partiamo dal quadrato, per il quale è

$$r_4^2 = \frac{1}{2}\ ,\ a_4^2 = \frac{1}{4},$$

riotteniamo la solita successione di medie aritmetiche e geometriche (1).

56. Calcolare l'area della corona circolare compresa fra le circonferenze iscritta e circoscritta ad un poligono regolare di 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lati.

57. Calcolare l'area del triangolo limitato da tre archi di circonferenza convessi, a due a due tangenti esternamente ed uguali fra loro.

58. Calcolare l'area di un quadrilatero a contorno circolare, i cui lati sieno archi uguali, tangenti a coppie nei vertici, di cui sia dato il raggio. Discussione dei casi possibili.

59. Calcolare l'area del quadrilatero a lati circolari convessi, determinato dalle quattro circonferenze coi centri nei vertici di un quadrato, che hanno per raggio il lato di esso.

60. Dati un quadrato ed un cerchio concentrici di ugual perimetro, calcolare la differenza tra le aree di uno dei quattro segmenti circolari e di uno dei triangoli rettangoli a contorno misto così determinati.

Sofismi geometrici.

Abbiamo riserbato per la fine della Geometria piana un gruppo di sofismi (2), nei quali proponiamo come esercizio di scoprire l'errore.

(1) Chi desideri su questi metodi notizie più precise, veda gli *Elementi di Geometria* di Sannia-D'Ovidio.

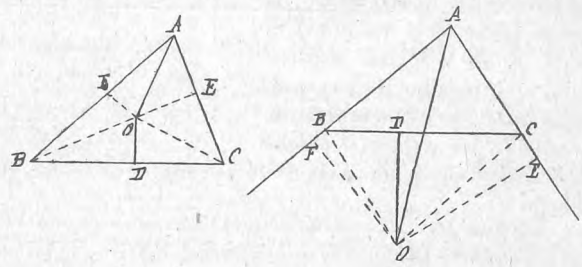
(2) Cfr. W. Rouse Ball: *Recréations et problèmes mathématiques*. Traduite par J. Fitz-Patrick; Paris — Hermann — 1898.

I **Sofisma**. — *Ogni triangolo è isoscele.*

Dato un triangolo ABC qualsivoglia, si innalzi nel punto di mezzo D di BC la perpendicolare, e si conduca la bisettrice dell'angolo opposto $\widehat{A}$.

Se codesta bisettrice e codesta perpendicolare sono parallele il triangolo è isoscele.

Se esse si incontrano in un punto O questo è o interno o esterno al triangolo.



Se O è interno al triangolo, si abbassino da O le perpendicolari OF, OE su AB, AC rispettivamente. Poichè (n. 125),

$$OF = OE,\ \widehat{FAO} = \widehat{EAO},$$

i due triangoli rettangoli AFO, AEO sono uguali ed è

$$(1) \qquad AF = AE.$$

Parimenti è (n. 122)

$$OB = OC$$

e i due triangoli rettangoli OBF, OCE, aventi uguali l'ipotenusa e un cateto sono uguali. Ne risulta

$$(2) \qquad FB = EC$$

e quindi sommando membro a membro le (1) (2)

$$AB = AC,$$

e il triangolo dato è isoscele.

Se poi il punto O è esterno al triangolo, basta ripetere la medesima costruzione. Si dimostra similmente l'uguaglianza dei due triangoli rettangoli AFO, AEO onde risulta

$$AE = AF.$$

Così dall'uguaglianza dei triangoli OBF, OCE si ricava

$$FB = EC$$

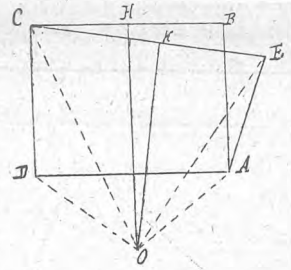
e sottraendo membro a membro.

$$AB = AC;$$

onde si conclude che anche in questo caso il triangolo è isoscele.

II **Sofisma.** — *Un angolo retto è uguale ad un angolo ottuso.*

Sia infatti un rettangolo ABCD, e pel vertice A si conduca una retta esterna al rettangolo e formante con AB un angolo $\widehat{EAB}$ acuto. Preso AE = AB = DC, si congiunga C con E e nei punti di mezzo H, K di CB, CE rispettivamente, si innalzino le perpendicolari, le quali si intersecheranno certamente in un punto O, poichè le CB, CE non sono parallele. Allora congiunto O con A, D, E, C si ha



$$OD = OA, \quad OC = OE.$$

Poichè per ipotesi DC = AE, i due triangoli ODC, OAE aventi i lati ordinatamente uguali sono uguali ed è $\widehat{ODC} = \widehat{OAE}$.

Ma nel triangolo isoscele OAD è

$$\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$$

onde risulta

$$\widehat{ODC} - \widehat{ODA} = \widehat{OAE} - \widehat{OAD},$$

cioè

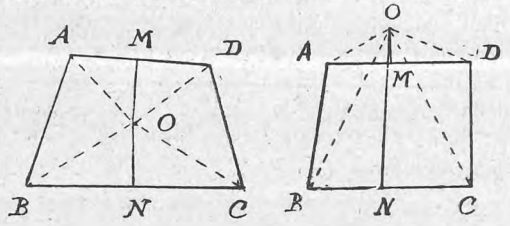
$$\widehat{ADC} = \widehat{DAE}.$$

III **Sofisma.** — *Se due lati opposti di un quadrilatero sono uguali, gli altri due lati sono paralleli.*

Consideriamo un quadrilatero ABCD in cui sia AB = CD.

Innalzate le perpendicolari ad AD, BC nei loro punti medi M, N se codeste due rette sono parallele, tali sono ancora le loro perpendicolari AD, BC.

Se invece esse si incontrano in un punto O, questo punto



sarà o interno o esterno al quadrilatero. Congiungiamo in ogni caso il punto O coi punti A, B, C, D.

Se O è interno al quadrilatero, siccome è AO = OD, OB = OC, AB = DC, i due triangoli ABO, CDO sono uguali ed è quindi

$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC}.$$

Ma è anche

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOD}, \quad \widehat{BON} = \widehat{NOC}$$

e quindi sommando membro a membro

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOM} + \widehat{BON} = \widehat{DOC} + \widehat{MOD} + \widehat{CON}$$

onde risulta

$$\widehat{AOM} + \widehat{AOB} + \widehat{BON} = 2 \text{ retti},$$

Allora, poichè i tre punti M, O, N sono in linea retta, avremo veramente che le rette AD, BC perpendicolari alla medesima retta sono parallele.

Se poi O è esterno al quadrilatero, si ha ancora

$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC}, \quad \widehat{BON} = \widehat{NOC},$$

onde risulta

$$\widehat{AOB} + \widehat{BON} = \widehat{DOC} + \widehat{NOC},$$

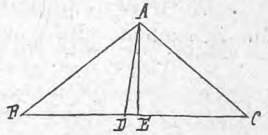
ossia

$$\widehat{AON} = \widehat{NOD}.$$

Allora la ON è la bisettrice di $\widehat{AOD}$ e quindi coincide colla OM e come dianzi si conclude che AB è parallela a DC.

IV. **Sofisma.** — *Un segmento è uguale ad una sua parte.*

Sia ABC un triangolo qualsivoglia, e per fissare le idee supponiamo che $\widehat{B}$ sia acuto e sia $\widehat{A} > \widehat{C}$.



Condotta da A la AD in modo che sia

$$\widehat{BAD} = \widehat{C},$$

avremo che i due triangoli ABC, ABD sono simili e quindi, indicando con (ABC), (ABD) le aree dei triangoli ABC, ABD e con (AC), (AD) le lunghezze dei segmenti AC, AD (n. 513),

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{(AC)^2}{(AD)^2}.$$

Ma i due triangoli ABC, ABD hanno la stessa altezza; onde le loro aree stanno come le lunghezze delle basi, cioè

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{(BC)}{(BD)}.$$

Risulta dalle due uguaglianze precedenti che

$$\frac{(AC)^2}{(AD)^2} = \frac{(BC)}{(BD)}$$

ossia

$$\frac{(AC)^2}{(BC)} = \frac{(AD)^2}{(BD)}.$$

Ma abbassata da A la perpendicolare AE su BC, abbiamo (n. 366)

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2\,(BC)\,(BE)$$
$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 - 2\,(BD)\,(BE);$$

si ha quindi, sostituendo nella uguaglianza dianzi ottenuta

$$\frac{(AB)^2 + (BC)^2 - 2\,(BC)\,(BE)}{(BC)} = \frac{(AB)^2 + (BD)^2 - 2\,(BD)\,(BE)}{(BD)}$$

ossia

$$\frac{(AB)^2}{(BC)} + (BC) - 2\,(BE) = \frac{(AB)^2}{(BD)} + (BD) - 2\,(BE)$$

Di qui, semplificando e trasportando,

$$\frac{(AB)^2}{(BC)} - (BD) = \frac{(AB)^2}{(BD)} - (BC)$$

o infine

$$\frac{(AB)^2 - (BD)\,(BC)}{(BC)} = \frac{(AB)^2 - (BD)\,(BC)}{(BD)}$$

Da questa uguagilanza risulta che $(BC) = (BD)$, cioè che il segmento BC è uguale alla sua parte BD.

IX.

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Nei capitoli precedenti noi abbiamo studiato proprietà di figure, ciascuna delle quali era piana, cioè contenuta tutta in un piano. Notiamo per altro che molte di codeste proprietà riguardano coppie o gruppi di figure, le quali sono piane ciascuna, ma *possono* anche non appartenere tutte al medesimo piano. Così p. es. tutti i casi di uguaglianza di poligoni valgono anche per coppie di poligoni giacenti in due piani diversi.

Nel seguito ci occuperemo in generale di figure non contenute ciascuna in un solo piano, cioè di *figure solide*. La parte della Geometria che studia le proprietà delle figure solide, dicesi *Geometria solida* o *Stereometria*.

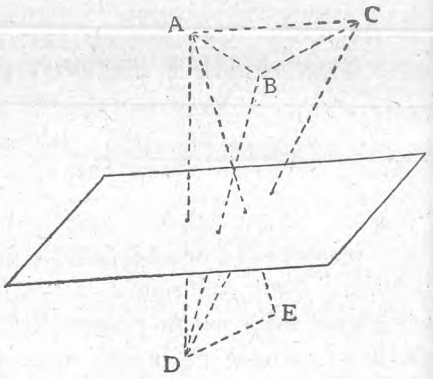
La Geometria solida si può svolgere in modo parallelo alla Geometria piana, come appunto faremo nel seguito.

Parti di spazio e intersezione di due piani.

617. Un' osservazione analoga a quella fatta relativamente alle divisioni in parti del piano per mezzo

di una retta (n. 40) ci permette di enunciare il seguente

Postulato. — *Un piano α divide lo spazio in due parti* (dette anche bande, o regioni, o semispazi) *contenenti ciascuna infiniti punti, per modo che;*



un punto dello spazio fuori di α appartiene all' una o all' altra parte;

due punti di una medesima parte, fuori di α, sono gli estremi di un segmento che non sega il piano;

due punti di parte diversa (opposta) *sono gli estremi di un segmento chsega il piano α e.*

I punti del piano α si considerano come comuni alle due parti opposte di spazio e si dirà anche che il piano *limita* ciascuno dei due semispazi.

Dal postulato precedente discendono i seguenti corollari, che sono del resto evidenti all' intuizione:

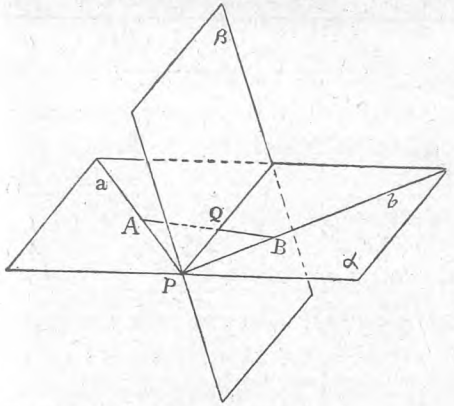
618. Cor. — *Una retta* a, *che abbia un punto comune con un piano che non la contiene, è divisa dal punto d' intersezione* aα *in due parti, ciascuna delle quali appartiene ad una e ad una sola delle due parti in cui lo spazio è diviso da α.*

619. Cor. — *Se una retta* a *non incontra un piano α, la* a *giace tutta da una banda rispetto ad α.*

620. Teor. — *Due piani, aventi in comune un punto, hanno in comune una retta* (passante per esso).

Se P è il punto comune ai due piani α, β, si conducano per esso due rette *a*, *b* giacenti nel piano α (ma non in β) e su queste si scelgano due punti A, B da parti opposte rispetto al piano β (n. 618).

Il segmento AB segherà il detto piano β in un certo punto Q, diverso da P, il quale sarà un nuovo punto comune ai due piani α, β. Quindi la retta PQ giacerà contemporaneamente nei nominati piani (n. 8); cioè questi avranno comune tale retta.



621. La retta comune ai due piani α, β dicesi *intersezione* di essi e si designa con $\alpha\beta$: dei due piani si suol dire che *si segano* secondo la retta $\alpha\beta$.

622. Cor. — *Un piano β che seghi un altro piano α, è diviso dalla retta $\alpha\beta$ in due semipiani ciascuno dei quali appartiene ad uno e ad uno solo dei due semispazi relativi al piano α.*

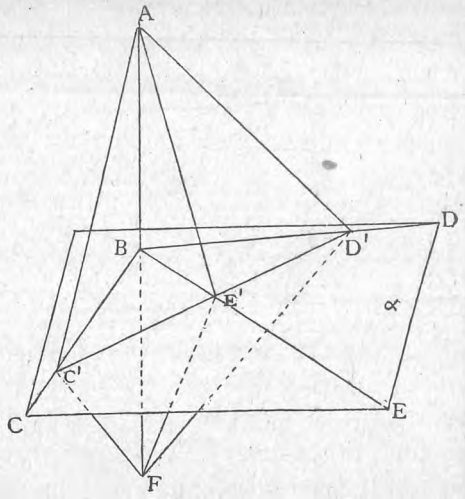
623. Cor. — *Se due piani non si segano, ciascuno di essi è tutto da una stessa banda rispetto all' altro.*

Retta e piano perpendicolari.

624. Teor. — *Se due rette sono perpendicolari ad una terza, sono a questa perpendicolari anche tutte le*

altre rette appartenenti al piano delle due prime e passanti pel loro punto comune.

La retta AB incontri il piano α nel punto B e sia perpendicolare alle due rette BC, BD appartenenti ad α. Condotta su α per B un'altra qualsiasi retta BE, diciamo che AB è perpendicolare anche a BE.

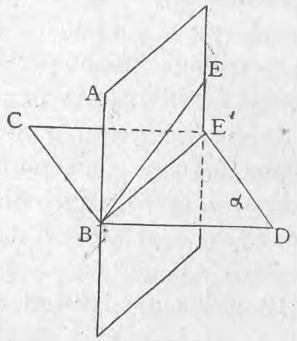


Infatti, preso sulla BC un punto arbitrario C', sia D' un punto della BD che, cada rispetto alla BE da parte opposta di C', e sia E' il punto in cui la C'D' incontra la BE. Presi poi sulla AB da parte opposta rispetto a B i due punti A, F a ugual distanza da B, cioè tali che AB sia uguale ad FB, si congiungano A ed F con C', D', E'.

I due triangoli ABC', FBC', rettangoli in B, sono uguali, perchè hanno i cateti AB, FB uguali per costruzione e il cateto BC' comune (n. 109, *a*): se ne conclude che sono uguali le ipotenuse AC', FC'. Similmente dall'uguaglianza dei triangoli rettangoli ABD', FBD' discende che sono uguali le ipotenuse AD', FD'. Allora i due triangoli AD'C', FD'C' hanno il lato D'C' comune e i lati AC', FC' ed AD', FD' ordinatamente uguali, e perciò sono uguali (n. 90), onde risulta l'uguaglianza degli angoli $D'\widehat{C'}A$, $D'\widehat{C'}F$. Ne discende che i due triangoli AC'E', FC'E', avendo uguali i lati AC', FC' e gli angoli $E'\widehat{C'}A$, $E'\widehat{C'}F$ e comune il lato C'E', sono uguali (n. 79) e hanno uguali i lati AE', FE'. Consideriamo infine i due triangoli ABE', FBE': essi hanno uguali i lati AB, FB, e AE', FE' e comune il lato BE', onde sono uguali (n. 90). Concludiamo che i due angoli adiacenti $A\widehat{B}E'$, $F\widehat{B}E'$ sono uguali, e quindi la retta BE è perpendicolare alla AB.

625. Teor. — *Le perpendicolari ad una retta in un punto giacciono in un medesimo piano.*

Da un punto B di una retta AB si conducano due perpendicolari BC, BD ad essa. Dobbiamo dimostrare che ogni altra perpendicolare per B alla AB giace nel piano α di BC e BD. Basterà far vedere che ogni retta BE per B, esterna al piano α non è perpendicolare ad AB.



A questo scopo si consideri il piano ABE; esso avendo comune con α il punto B, intersecherà α secondo una retta BE', distinta da BE; e la BE' sarà, pel teor. prec., perpendicolare alla AB. Poichè ogni altra retta passante per B e giacente nel piano ABE non è perpendicolare al AB (n. 89), concludiamo che la BE non è perpendicolare alla AB.

626. Def. — Una *retta* ed un *piano*, aventi un

punto comune, si dicono *perpendicolari* se tutte le rette giacenti nel piano e passanti per quel punto sono perpendicolari alla retta.

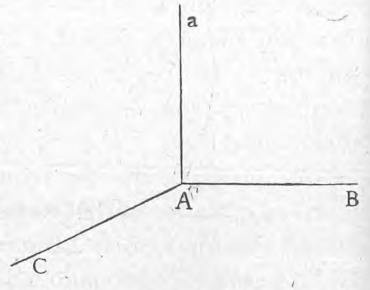
Il piano si dice perpendicolare alla retta e la retta al piano.

Il punto comune alla retta e al piano si dice *piede* della perpendicolare.

Nota. — Secondo quanto è stato dimostrato al n. 624, per verificare che una retta, avente un punto O comune con un piano, è ad esso perpendicolare, basta verificare che essa è perpendicolare a *due* rette del piano, passanti per O.

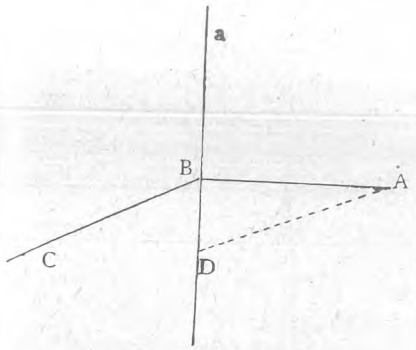
627. Teor. — *Per un punto dato passa un piano ed uno solo, perpendicolare ad una retta data.*

Se il punto dato A appartiene alla retta data a, sappiamo già che *tutte* le perpendicolari alla a in A giacciono in un medesimo piano, il quale è perciò l'unico piano per A perpendicolare alla a.



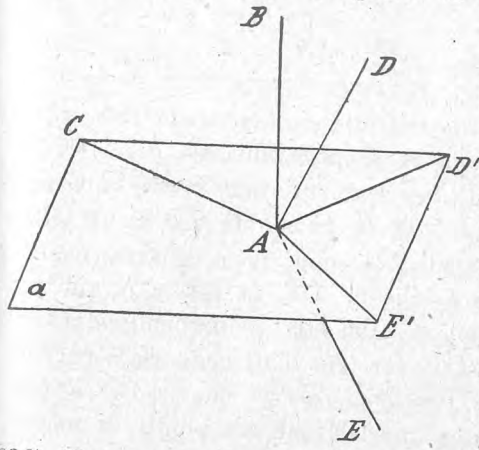
Se invece il punto dato A non giace sulla retta a, (vedi fig. alla pag. seg.), si abbassi da A (nel piano Aa) la perpendicolare AB sulla a, e da B si conduca un'altra retta BC perpendicolare ad a. Il piano ABC è perpendicolare alla a perchè contiene le due rette BA, BC perpendicolari alla a (n. prec.).

Se poi si avessero per A due piani perpendicolari alla a questi non potrebbero incontrare la a in un medesimo punto per quanto si è notato nel primo caso;



e d'altra parte essi non possono incontrare la retta a in due punti distinti B, D, perchè altrimenti per A passerebbero due rette AD, AB perpendicolari entrambe alla stessa retta a (numero 110).

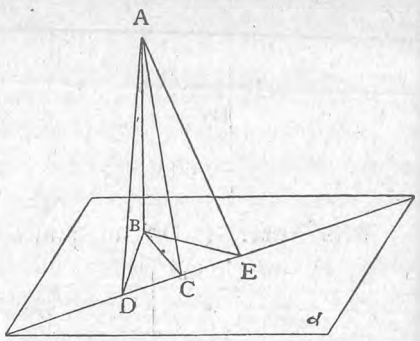
628. Nota. — Da un punto A di un piano α si innalzi da una banda prefissata la semiretta perpendicolare AB, e si considerino poi tutte le semirette uscenti da A. Sappiamo che le semirette AC appartenenti ad α formano con AB un angolo retto (num. 626). Presa per A un'altra semiretta qualsiasi, basta considerare l'intersezione con α del piano determinato da AB e dalla semiretta considerata per convincersi che codesta semiretta forma con AB un angolo acuto o ottuso, secondo che giace rispetto ad α dalla stessa banda di AB o da banda opposta.



629. Teor. — *Se dal piede di una perpendicolare ad un piano si conduce in esso una retta, ogni altra*

retta del piano, la quale sia perpendicolare a quest'ultima, è perpendicolare al piano delle due prime.

La retta AB sia perpendicolare al piano α in B; condotta in α la BC, diciamo che ogni perpendicolare alla BC, appartenente ad α, è perpendicolare al piano ABC.



Se codesta ultima retta passa per B, essa è perpendicolare alle due rette AB e BC e quindi al loro piano (n. 626).

Se invece codesta retta interseca la BC in un punto C, distinto da B, si prendano su di essa, da parti opposte a C, due segmenti uguali, CD, CE e si congiungano i punti D, C, E con B e con un altro punto A arbitrario di AB.

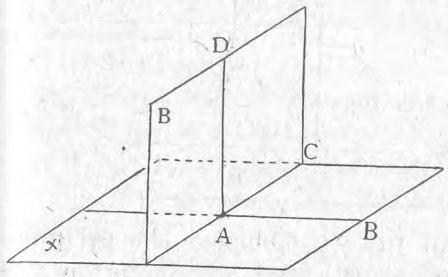
Per dimostrare che la DE, la quale è già per ipotesi perpendicolare alla CB, è perpendicolare al piano ABC, basta provare (n. 626) che essa è perpendicolare alla CA. Perciò si osservi che la BC è perpendicolare al segmento DE nel suo punto di mezzo, onde risulta che i segmenti BD, BE sono uguali (numero 122). Si considerino allora i due triangoli ABD, ABE, rettangoli in B, i quali hanno il cateto AB comune e i cateti BD, BE uguali. Essi sono perciò uguali (n. 109) ed hanno uguali le ipotenuse AD, AE.

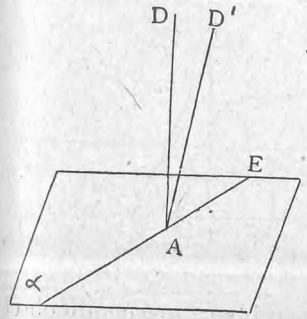
Allora nel piano ADE, la AC, come congiungente il punto medio del segmento DE col punto A, equidistante da D ed E, è perpendicolare alla DE (n. 122), come appunto volevamo dimostrare.

630. Teor. — *Per un punto passa una retta ed una sola perpendicolare ad un piano.*

Distinguiamo anche qui due casi, secondo che il punto appartiene al piano o è esterno ad esso.

1.° Dato un piano α e il punto A giacente in esso, si conduca per A in α la retta AB arbitraria, e in A si costruisca il piano β perpendicolare alla AB (num. 627). I piani α, β, aventi il punto A comune, si intersecheranno secondo una retta AC (numero 620). Nel piano β, per A, si conduca la perpendicolare AD alla AC. Codesta retta AD, come appartenente al piano β perpendicolare alla AB, è perpendicolare essa stessa alla AB, ed essendo perpendicolare anche alla AC è pur perpendicolare al piano α (n. 626).

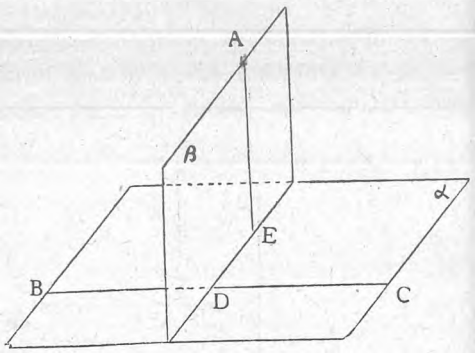




Se poi esistesse per A una seconda perpendicolare AD′ ad α, il piano DAD′ intersecherebbe α secondo una retta AE (n. 620), alla quale, per definizione, le rette AD, AD′, giacenti con la AE in uno stesso piano, sarebbero tutte e due perpendicolari, il che è assurdo (n. 110).

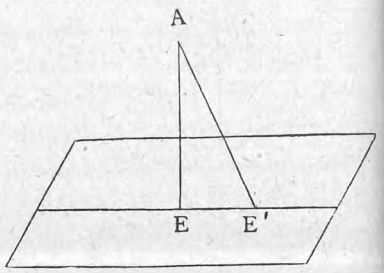
2.° Dato il piano α, sia A un punto esterno ad esso. Per ottenere una perpendicolare ad α, passante

per A, conduciamo nel piano α una retta arbitraria BC e, considerato il piano β passante per A e perpendicolare a BC (n. 627), abbassiamo in esso da A la perpendicolare AE sulla retta intersezione di α e β.



La AE è perpendicolare ad α. Se infatti è D l'intersezione di BC e β, abbiamo che pel piede D della perpendicolare BC a β si è condotta in β la DE, e per il punto E nel medesimo piano la perpendicolare EA alla DE, pel teorema del n. prec. la EA è perpendicolare al piano di DE e BC, cioè al piano α.

Abbiamo poi che per A non può passare una seconda perpendicolare AE′ ad α, perchè se questa esistesse distinta dalla AE, il piano AEE′ intersecherebbe α secondo una retta EE′, alla quale entrambe le rette AE, AE′, giacenti con la EE′ in uno stesso piano, sarebbero perpendicolari (n. 626), il che è assurdo (n. 110).



631. Dato un piano α e un punto A fuori di esso

il segmento della perpendicolare ad α per A compreso tra A e il piede P, si suol designare semplicemente col nome di *perpendicolare* abbassata da A su α.

Ogni segmento AB congiungente A con un punto B di α, distinto da P, si suol chiamare *obliqua* condotta da B ad α: B dicesi *piede* dell'obliqua e il segmento PB si chiama *proiezione* dell'obliqua AB su α (Vedi la fig. del n. seg.).

632. Teor. — *Dati un piano ed un punto fuori di esso, fra gli infiniti segmenti che congiungono il punto dato coi punti del piano:*

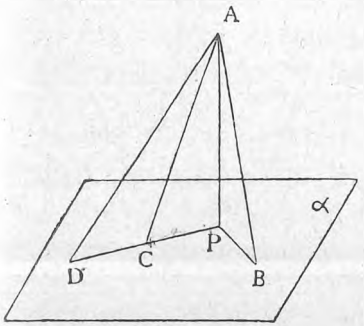
1.° la perpendicolare è minima;

2.° due oblique aventi, sul piano, proiezioni uguali sono uguali;

3.° di due oblique, le cui proiezioni sul piano sono disuguali, quella che ha proiezione maggiore è maggiore.

Dati il piano α e il punto A fuori di esso, sia AP il segmento perpendicolare.

1.° Preso su α un punto B distinto da P, la PB è perpendicolare alla AP (n. 626): allora nel triangolo ABP, rettangolo in P, il cateto AP è minore dell'ipotenusa AB (numero 108).



2.° Siano B e C due punti di α equidistanti da P. I due triangoli APB, APC, rettangoli in P, hanno il cateto AP comune e i cateti PB, PC uguali: essi sono quindi uguali (n. 109) ed hanno uguali le ipotenuse AB, AC.

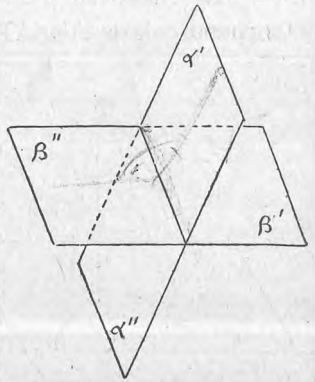
3.° Siano B e D due punti di α, tali che DP sia maggiore di BP. Preso dentro il segmento PD il punto C tale che PC sia uguale a PB, avremo, per quanto si è visto or ora, che AC è uguale ad AB. D'altra parte, nel piano APD, il segmento AD ha sulla retta PD una proiezione maggiore della proiezione di AC. Risulta di qui (n. 112) che AD è maggiore di AC e quindi ancora di AB.

633. Def. — Dato un piano ed un punto fuori di esso, dicesi *distanza* del punto e del piano il segmento perpendicolare abbassato dal punto sul piano.

Diedri e loro sezioni normali.

634. Dal post. del n. 617 segue che due piani α, β, secantisi secondo una retta, dividono lo spazio in quattro parti ciascuna delle quali è comune a due semispazi limitati l'uno da α, l'altro da β.

Codeste quattro parti si dicono *regioni diedriche* o *diedri*.



I due piani α e β sono divisi dalla retta comune $\alpha\beta$ in quattro semipiani α', α'', β', β'', e i quattro diedri suddetti diconsi *limitati* dalle rispettive facce α', β''; β'', α''; α'', β'; β', α'.

La retta $\alpha\beta$ si chiama *costola* o *spigolo* di ciascuno dei quattro diedri.

Il diedro di facce α', β' si designa con $\widehat{\alpha'\beta'}$ o $\widehat{\beta'\alpha'}$.

Se poi A, B sono due punti quali si vogliano delle due facce α', β' (fuori dello spigolo), e lo spigolo si designa con a o con PQ, il diedro si rappresenta anche con $\widehat{AaB}$ o con $\widehat{APQB}$.

Ogni semipiano uscente dalla retta $\alpha\beta$ (cioè limitato da codesta retta) e distinto da α', β', α'', β'', appartiene ad uno dei quattro diedri; se appartiene al diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$, si dice *compreso* fra α' e β' od anche semipiano del diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$, e tutti i suoi punti diconsi *interni* al diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$ (cfr. n. 43).

635. I punti di un diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$, cioè i punti interni ad esso o appartenenti alle sue facce, si ottengono combinando per interferenza il semispazio relativo al piano di α' che contiene β' e il semispazio relativo al piano di β' che contiene α'.

Un diedro si può immaginare generato in due modi: o come insieme dei suoi punti o come insieme dei suoi semipiani. Quando si vuol mettere in luce questa distinzione si dà il nome di *regione diedrica* alla prima figura e di *diedro* alla seconda. Ma noi considereremo indifferentemente l'una o l'altra generazione (cfr. 44).

636. Due semipiani, limitati dalla stessa retta, definiscono un diedro, del quale sono facce. Due piani che si segano determinano quattro diedri $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\beta'\alpha''}$, $\widehat{\alpha''\beta''}$, $\widehat{\beta''\alpha'}$.

Fissato uno di codesti diedri, ciascuno degli altri tre giace col primo da parte opposta rispetto ad uno solo o rispetto a tutti e due i piani α, β. Nel primo caso i due diedri considerati si dicono *adiacenti*: nel secondo si dicono *opposti rispetto allo spigolo* (cfr. n. 45).

637. Dal post. del n. 617 discendono le seguenti proposizioni, che sono d'altra parte senza altro evidenti (cfr. n. 46):

a) *Ogni semipiano passante per lo spigolo di un diedro e per un punto interno al segmento congiungente due punti appartenenti alle due facce, appartiene al diedro: reciprocamente, un semipiano appartenente ad un diedro sega in un punto interno il segmento congiungente due punti delle facce.*

b) *Se due semipiani appartengono ad un diedro, il nuovo diedro definito da essi è contenuto* (costituito da punti interni) *nel diedro primitivo.*

638. Osservazione. — Dato un diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$ e considerato un segmento avente gli estremi sulle due facce, o un angolo avente per lati le intersezioni di α', β' con un medesimo piano (non contenente lo spigolo), si ha che, corrispondentemente ai due ordini del segmento o dell'angolo, esistono nel diedro due *versi* o *ordini* (opposti) nell'uno dei quali α' è il primo elemento e β' è l'ultimo, e nell'altro β' è il primo e α' l'ultimo (cfr. n. 47).

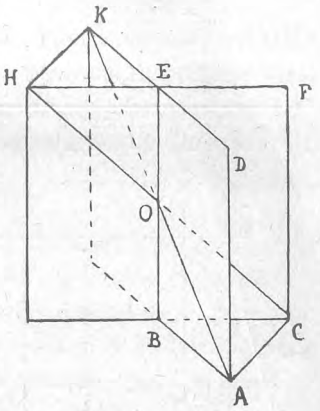
639. Def. — Dato un diedro, dicesi *sezione normale* o *rettilineo* di esso l'angolo delle due semirette, secondo cui le due facce del diedro sono intersecate da un piano perpendicolare allo spigolo.

Per avere una sezione normale di un diedro basta innalzare da un punto dello spigolo in ciascuna faccia la perpendicolare ad esso (n. 565).

640. Teor. — *Tutte le sezioni normali di un diedro sono uguali.*

Siano $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ due sezioni normali di uno stesso diedro: diciamo che esse sono uguali. Presi infatti i due segmenti BA, BC, siano EK, EH i segmenti rispettivamente uguali ad essi, sui prolungamenti di DE, FE. I punti A, K nel piano ABE giacciono

allora da bande opposte rispetto alla retta EB, cosicchè la AK intersecherà la EB in un punto O, tale che i triangoli rettangoli ABO, KEO sono uguali (n. 109 *c*), onde risulta che il punto O è il punto medio del segmento EB.



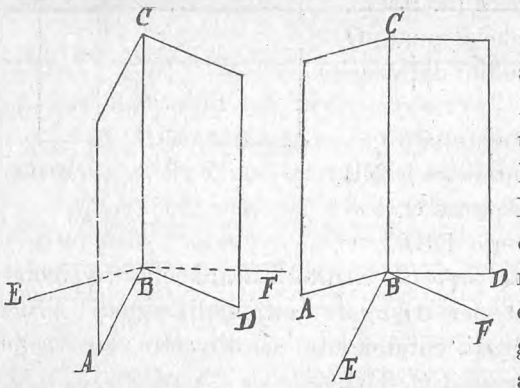
Analogamente si dimostra che CH interseca la EB nel medesimo punto O, medio del segmento EB.

Da quanto precede risulta ancora che le ipotenuse AO, KO dei triangoli rettangoli uguali ABO, KEO sono uguali. Similmente si dimostra che sono uguali i segmenti CO, HO.

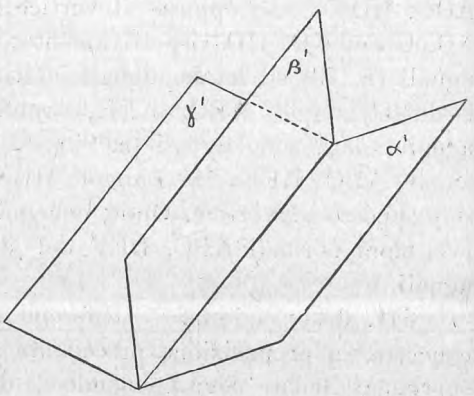
Congiunti allora A con C, ed H con K, i triangoli AOC, HOK hanno uguali ordinatamente gli angoli $\widehat{AOC}$, $\widehat{HOK}$ come opposti al vertice (n. 63) e i lati AO, CO e KO, HO rispettivamente: essi sono quindi uguali (n. 79) ed hanno uguali i lati AC, HK. Allora i due triangoli ABC, KEH, avendo ordinatamente uguali i lati, sono uguali (n. 90), ed hanno uguali gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{HEK}$. Ma l'angolo $\widehat{HEK}$ è uguale a $\widehat{DEF}$ suo opposto al vertice. Onde concludiamo che anche le sezioni normali $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ del diedro dato sono uguali.

641. Osservazione. — Riferendoci ad un modello concreto, la proposizione precedente si può verificare sperimentalmente sovrapponendo i due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ con un movimento (scorrimento del diedro lungo la costola).

642. Nota. — Dato un diedro $A\widehat{BCD}$, di cui sia $A\widehat{BD}$ una sezione normale si innalzi da un punto B dello spigolo la semiretta BE perpendicolare al piano CBD dalla stessa parte dell'altra faccia, e la semiretta BF perpendicolare al piano ABC e dalla stessa parte dell'altra faccia. Poichè gli angoli $E\widehat{BD}$, $A\widehat{BF}$ sono retti, avremo che la somma di $E\widehat{BD}$, $A\widehat{BF}$, ossia la somma di $E\widehat{BF}$ ed $A\widehat{BD}$ è uguale ad un angolo piatto, cioè l'angolo $E\widehat{BF}$ è supplementare di $A\widehat{BD}$.



643. Due diedri $\alpha'\widehat{\beta'}$, $\beta'\widehat{\gamma'}$ aventi comune una faccia (e lo spigolo) si dicono *consecutivi*, quando sono da parti opposte rispetto al piano della faccia comune.



Più diedri $\alpha'\widehat{\beta'}$, $\beta'\widehat{\gamma'}$, $\gamma'\widehat{\delta'}$, ... si dicono consecutivi se il secondo è consecutivo al primo, il terzo al secondo, e così via.

644. Def. — Si dice *somma* di due o più diedri consecutivi l'insieme dei punti (e dei piani) che appartengono ad essi. *Sommare* più diedri vuol dire considerarne la somma.

La somma dei diedri consecutivi $\alpha'\widehat{\beta'}$, $\beta'\widehat{\gamma'}$, $\gamma'\widehat{\delta'}$,... si indica con

$$\alpha'\widehat{\beta'} + \beta'\widehat{\gamma'} + \gamma'\widehat{\delta'} + \ldots.$$

Se un diedro è la somma di altri due, la sua sezione normale è la somma delle sezioni normali dei diedri considerati. Basta, infatti, considerare un piano perpendicolare allo spigolo comune di codesti diedri.

Dalla definizione stessa discende che *la somma di più diedri gode della proprietà associativa.*

645. Nota. — Come per gli angoli (cfr. n. 50) così anche per i diedri si può estenderne il concetto, giungendo, col procedimento della somma, alla considerazione dei diedri *piatti, concavi* ed anche comprendenti uno o più giri. Il rettilineo di un diedro piatto, concavo, ecc. risulta rispettivamente piatto, concavo, ecc.

Noi per altro nel seguito, salvo esplicito avviso in contrario, quando parleremo di diedri, intenderemo riferirci a diedri quali furono definiti da principio, cioè a diedri *convessi.*

Diedri uguali.

646. Def. — Due diedri si dicono *uguali* se hanno uguali le sezioni normali.

Osservazione. — Questa definizione si giustifica osservando che diedri aventi rettilinei uguali sono sovrapponibili col movimento.

Osserviamo ancora che quando si siano sovrap-

posti due diedri uguali, si possano far scorrere l'uno sull'altro senza che essi cessino di coincidere.

647. In base alle proprietà dell'uguaglianza di angoli (n. 51 segg.), dalla definizione precedente si deducono i seguenti corollari, anche senza ricorrere alla osservazione del movimento che li rende evidenti.

Cor. — *Un diedro ordinato in un verso, è uguale al diedro stesso ordinato nel verso opposto.*

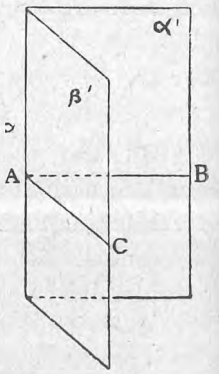
648. Cor. — *Due diedri uguali ad un terzo sono uguali fra di loro.*

649. Cor. — *Somme di diedri consecutivi uguali sono uguali.*

650. Per dedurre un ulteriore corollario relativo alla determinazione di diedri uguali ad un dato, conviene premettere il seguente

Probl. — *Costruire un diedro che abbia una faccia assegnata e come sezione normale un angolo dato.*

Si conduca in un punto A della retta o, che limita il dato semipiano α', il piano perpendicolare alla retta o, il quale intersecherà α', secondo la semiretta AB, perpendicolare ad o; e in codesto piano si costruisca la semiretta AC, tale che l'angolo $\widehat{CAB}$ sia uguale all'angolo dato. La semiretta AC sarà perpendicolare ad o (n. 626). Allora se β' è il semipiano, che contiene la retta o e la semiretta AC, il diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$ ha come sezione normale l'angolo $\widehat{CAB}$, uguale al dato, onde risulta che esso soddisfa al problema proposto.



651. Risoluto il precedente problema, ricaviamo immediatamente della definizione del n. 646 e dalle

proposizioni, relative ad angoli, dei nn. 54, 55 i seguenti due corollari:

Cor. — *Dato un semipiano, per l'origine di questo e da una parte assegnato rispetto ad esso, esiste un semipiano, che forma col dato un diedro uguale ad un diedro dato.*

652. Cor. — *Dato un semipiano, esistono due diedri uguali a un diedro prefissato e aventi come faccia comune il semipiano dato.*

653. Ancora come applicazione diretta della definizione di uguaglianza dei diedri abbiamo le seguenti proposizioni, basate sui nn. 62, 63.

Teor. — *Diedri adiacenti a diedri uguali sono uguali.*

654. Cor. — *Diedri opposti allo spigolo sono uguali.*

655. Osservazione. — Due diedri opposti allo spigolo $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\alpha''\beta''}$ si possono sovrapporre mediante il movimento, sia portando a coincidere la faccia α' con α'' e β' con β'', sia portando a coincidere α' con β'' e β' con α''.

656. Def. — Dato un diedro, ogni diedro uguale ad uno degli adiacenti del dato si dice *supplementare* di esso.

Si ha allora dal n. 65 e dalla definizione di diedri uguali, il seguente

657. Cor. — *Diedri supplementari di diedri uguali sono uguali.*

658. Le proprietà dei diedri enunciate ai numeri prec. sono perfettamente analoghe a quelle degli angoli loro sezioni normali, e questa analogia di proprietà si potrebbe proseguire, considerando la bisezione del

diedro, ecc. Qui ci limiteremo a notare esplicitamente come si estendano ai diedri alcune delle definizioni e delle proposizioni più importanti. Cominciamo coll'estendere il concetto di somma, stabilendo la seguente

Def. — Dati più diedri quali si vogliano, si dirà *somma* di essi la somma di altrettanti diedri consecutivi, uguali ordinatamente ai dati.

659. I diedri che si sommano diconsi *addendi* o *parti della somma.*

Poichè sommando più diedri si sommano anche le sezioni normali corrispondenti, discende dal n. 58 che anche la somma dei diedri gode delle proprietà *associativa* e *commutativa.*

660. Def. — Se un diedro è uguale alla somma di due altri, esso si dice *maggiore* di ciascuno di questi, e ognuno di questi ultimi si dice *minore* del primo.

Discende di qui immediatamente che se un diedro è maggiore di un altro, la sezione normale del primo è maggiore della sezione normale del secondo.

661. Def. — Se un diedro è uguale alla somma di due altri, ciascuno di questi dicesi *differenza* dell'intero diedro e dell'altra parte.

662. In base alle precedenti definizioni si estendono immediatamente ai diedri le proposizioni date pei segmenti al n. 33.

663. Estenderemo da ultimo ai diedri anche le definizioni di *multiplo* e *summultiplo* secondo un qualsiasi numero; allora dalla definizione del n. 660 e della proposizione relativa agli angoli del n. 67 discende il seguente

Cor. — (Proposizione di Archimede). *Dati due diedri si può trovare un numero* m *così grande che l'* m^{mo} *multiplo del minore superi l'altro.*

Piani perpendicolari.

Proseguendo l'analogia col caso degli angoli, passiamo ad occuparci dei diedri retti, cominciando dalla suguente:

664. Def. — Ogni diedro uguale al suo adiacente dicesi *retto,* e due piani formanti un diedro retto diconsi fra loro *perpendicolari.*

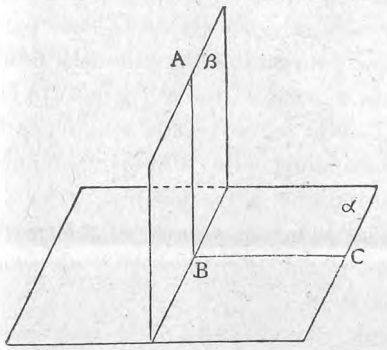
665. Cor. — *La sezione normale di un diedro retto è un angolo retto e viceversa.*

Risulta allora dal n. 650 come possa costruirsi (in un modo determinato) un diedro retto avente un dato spigolo e una data faccia e giacente da una parte assegnata rispetto a questa.

666. Cor. — *I diedri retti sono uguali* (n. 102).

667. Def. — I diedri maggiori di un diedro retto si dicono *ottusi*: i diedri minori di un diedro retto si dicono *acuti.* Le loro sezioni normali sono rispettivamente ottuse o acute.

668. Teor. — *Ogni piano passante per una retta perpendicolare ad un piano è pur esso perpendicolare al piano.*



Dato il piano α e la retta AB perpendicolare ad α in B, sia β un qualsiasi piano passante per AB. Diciamo che β è perpendicolare ad α.

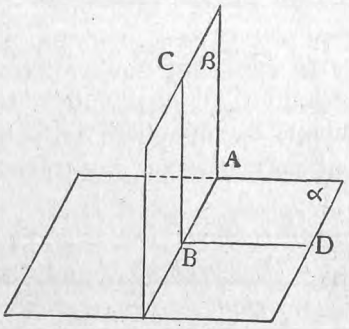
Infatti da B nel piano α si innalzi la perpendi-

colare BC alla intersezione $\alpha\beta$ dei due piani. Poichè la AB è perpendicolare ad α, essa è perpendicolare alla $\alpha\beta$ e alla BD (n. 626): onde risulta che l'angolo $\widehat{ABC}$ è la sezione normale del diedro formato dai due piani; poichè $\widehat{ABC}$ è retto, codesto diedro è retto, ossia i due piani α e β sono perpendicolari.

Il teorema or ora dimostrato si inverte nei due modi seguenti.

669. Teor. — *Se due piani sono perpendicolari, ogni retta giacente in uno di essi e perpendicolare alla comune intersezione, è perpendicolare all'altro piano.*

Se α e β sono fra loro perpendicolari, e la retta BC giace in β ed è perpendicolare alla intersezione AB di α e β, diciamo che BC è perpendicolare ad α.

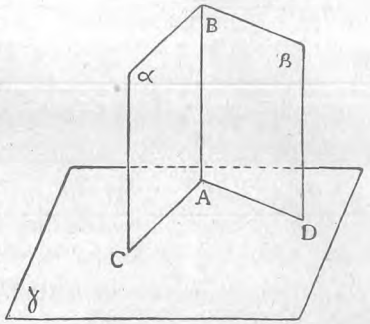


Si conducà infatti su α da B la perpendicolare BD alla AB. Poichè le BD, BC sono perpendicolari alla AB, l'angolo $\widehat{CBD}$ è la sezione normale del diedro $\widehat{CBAD}$, che per ipotesi è retto, ed è perciò retto. Se ne conclude che la BC, perpendicolare alle AB, BD, è perpendicolare anche al loro piano α (n. 626).

670. Teor. — *Se due piani si segano e sono perpendicolari ad uno stesso piano, l'intersezione dei due piani è perpendicolare al terzo.*

Sia AB l'intersezione dei due piani α e β, perpendicolari antrambi al piano γ.

Preso un punto B sulla intersezione di α e β, si noti che α è perpendicolare a γ e che perciò, in virtù del teor. prec., la retta giacente in α, passante per B e perperdicolare alla retta $\alpha\gamma$, intersezione di α e γ, è perpendicolare al piano γ.

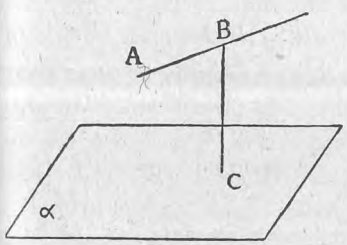


Ma per la stessa ragione anche la retta giacente in β, passante per B e perpendicolare alla $\beta\gamma$ è perpendicolare al piano γ; e poichè per B passa una sola perpendicolare al piano γ (n. 630), si conclude che le due rette per B dianzi considerate coincidono o, in altre parole, i due piani α e β si segano secondo la perpendicolare per B al piano γ.

671. Cor. — *Tutti i piani perpendicolari ad uno stesso piano in uno stesso punto passano per la perpendicolare al piano dato nel punto dato.*

672. Teor. — *Per una retta non perpendicolare ad un piano passa un piano ed uno solo perpendicolare al dato.*

Nel caso in cui la retta data giace nel piano ciò è stato già notato al n. 665. La costruzione che qui diamo in generale è una estensione di quella ivi richiamata.

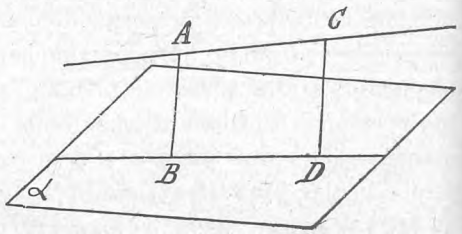


Si abbia un piano α e una qualsiasi retta AB non perpendicolare ad esso. Si abbassi da un punto arbitrario B della

retta la perpendicolare BC su α. Il piano ABC passante per BC è perpendicolare ad α (n. 668). D'altra parte per AB non può passare un secondo piano perpendicolare ad α; perchè se questo esistesse, l'intersezione dei due piani, cioè la retta AB, dovrebbe essere, contro l'ipotesi, perpendicolare ad α (n. 670).

673. Cor. — *Se una retta non è perpendicolare ad un piano, tutte le perpendicolari abbassate dai suoi punti sul piano dato giacciono in un medesimo piano*, cioè nel piano passante per la retta data e perpendicolare al piano dato.

Se infatti le perpendicolari AB, CD abbassate da due punti A e C di AC su α non giacessero nello stesso piano, avremmo per la retta AC due piani CAB, ACD entrambi perpendicolari ad α (n. 668), il che contraddice al teorema precedente.



674. Cor. — *Se una retta non è perpendicolare ad un piano, i piedi delle perpendicolari abbassate dai punti di essa sul piano appartengono ad una medesima retta*, intersezione del piano dato col piano perpendicolare ad esso e passante per la retta data.

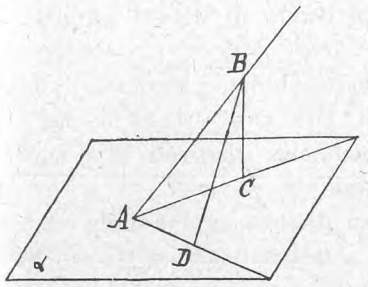
675. Def. — Codesta retta si dice *proiezione* della retta data sul piano dato.

Dato fuori di un piano α una semiretta AC (vedi fig. del n. 673) si dice *proiezione* di essa su α la semiretta BD che ha per origine il piede B della perpendicolare abbassata da A in α, e che contiene i piedi delle perpendicolari abbassate dai punti di AC. Se l'origine della semiretta data appartiene ad a, anche la semiretta proiezione ha la medesima origine.

Si dice poi *proiezione* di un segmento AC su di un piano α che non lo contiene, il segmento BD che ha per estremi i piedi delle perpendicolari abbassate sul piano dagli estremi del segmento. Se poi il segmento ha un estremo sul piano, si dice *proiezione* il segmento compreso fra codesto estremo e il piede della perpendicolare abbassata dall'altro estremo.

676. Teor. — *Se una semiretta ha l'origine su di un piano e non giace in esso, nè gli è perpendicolare, l'angolo che essa forma colla sua proiezione, è minore dell'angolo che forma con ogni altra semiretta giacente nel piano dato e passante per l'origine della semiretta data.*

Data la semiretta AB uscente dal punto A del piano α e non appartenente ad esso, sia AC la proiezione di essa, e sia AD una semiretta in α per A, distinta da AC. Diciamo che $\widehat{BAC}$ è minore di $\widehat{BAD}$.



Se C è il piede della perpendicolare abbassata da B su α, e AD = AC, l'obliqua BD è maggiore della perpendicolare BC (n. 632). Allora i due triangoli BAC, BAD hanno il lato BA comune, i lati AC, AD uguali e i lati BC, BD disuguali. Saranno quindi disuguali gli angoli opposti ai lati disuguali, perchè se fossero uguali, avremmo, pel n. 86, BC = BD; e sarà precisamente

$$\widehat{BAC} < \widehat{BAD},$$

perchè, se sussistesse la disuguaglianza inversa, avremmo pel n. 95, BC > BD.

677. Nota. — L'angolo che AB fa colla sua proiezione su α è uguale all'angolo che il prolungamento di AB fa colla sua proiezione (prolungamento della proiezione di AB).

678. Def. — Se una retta incontra un piano α in un punto A e non è ad esso perpendicolare, dicesi *angolo* della retta col piano α l'angolo che una qualsiasi delle semirette in cui essa è divisa dal punto A, forma colla sua proiezione su α.

Se la semiretta è perpendicolare al piano α, si dice che essa forma con questo un *angolo retto*.

Sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali.

Pel confronto dei diedri abbiamo ricorso a quello delle loro sezioni normali. Ora mostreremo come pel medesimo fine si possa utilmente ricorrere alla considerazione delle altre sezioni dei diedri.

679. Def. — Dato un diedro, ogni angolo avente il vertice sullo spigolo e i lati sulle facce di esso, dicesi *sezione del diedro*.

Due sezioni di due diedri distinti o dello stesso diedro si dicono « a lati ugualmente inclinati sullo spigolo » o più semplicemente « ugualmente inclinate » se gli angoli formati dai lati dell'una con una medesima semiretta dello spigolo sono corrispondentemente uguali agli angoli formati dai lati dell'altra con una medesima semiretta dello spigolo rispettivo.

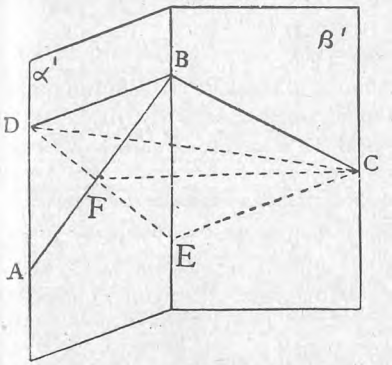
In particolare sono ugualmente inclinate due se-

zioni normali di uno stesso diedro o di diedri distinti.

680. La considerazione delle sezioni ugualmente inclinate in due diedri o nello stesso diedro conduce ad un teorema fondamentale, alla cui dimostrazione premettiamo, come lemma, la seguente considerazione.

Siano $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\alpha'_1\beta'_1}$ due diedri aventi due sezioni ugualmente inclinate ed uguali $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$; talchè si abbia

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'},\ \widehat{ABE} = \widehat{A'B'E'},\ \widehat{CBE} = \widehat{C'B'E'};$$



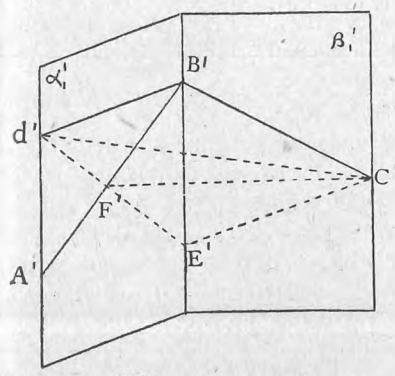
e condotta per B nel semipiano α' una semiretta qualsiasi BD, si consideri la semiretta B'D' che giace in α'_1, passa per B' e forma con B'E' un angolo $\widehat{D'B'E'}$ uguale a $\widehat{DBE}$. Otteniamo così due sezioni ugualmente inclinate $\widehat{DBC}$, $\widehat{D'B'C'}$ aventi un lato comune rispettivamente con le primitive $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$.

Noi diciamo che sotto l'ipotesi

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

è anche

$$\widehat{DBC} = \widehat{D'B'C'}.$$



Per dimostrarlo, prendiamo un punto qualsiasi D sulla semiretta BD e un punto E sullo spigolo di $\widehat{\alpha'\beta'}$ in modo che la semiretta BA sia interna all'angolo $\widehat{DBE}$; e chiamiamo F l'intersezione della semiretta BA col segmento DE.

Siccome è per ipotesi

$$\widehat{D'B'E'} = \widehat{DBE},\ \widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE},$$

se prendiamo

$$B'D' = BD,\ B'E' = BE,$$

la semiretta B'A' sarà interna a $D'\widehat{B'E'}$ e il segmento D'E' segherà la semiretta B'A' in un punto che chiameremo F'.

Allora i due triangoli DBE, D'B'E' avendo uguali due lati e l'angolo compreso, sono uguali e hanno uguali gli angoli in E, E'; talchè abbiamo

(1) $$D'E' = DE$$

e risultano di più uguali i triangoli FBE, F'B'E' come quelli che hanno uguali due angoli e il lato comune. Avremo perciò

(2) $$F'B' = FB$$

(3) $$F'E' = FE.$$

Analogamente, se prendiamo $B'C' = BC$ e congiungiamo C con E, C' con E', risultano uguali i triangoli CBE, C'B'E', in quanto hanno uguali due lati e l'angolo compreso, cosicchè sarà

(4) $$C'E' = CE.$$

Da ultimo congiungiamo C con D, E, F e C' con D',E',F'. I triangoli FBC, F'B'C' saranno uguali perchè in virtù delle ipotesi e della (2) hanno uguali due lati e l'angolo compreso. Sarà quindi

$$F'C' = FC$$

e questa uguaglianza, associata alle (3) (4), ci dice che sono uguali (in quanto hanno ordinatamente uguali i tre lati) i due triangoli FEC, F'E'C', cosicchè avremo

$$\widehat{F'E'C'} = \widehat{FEC}.$$

Tenendo allora conto di questa uguaglianza e delle (1) e (4), rileviamo l'uguaglianza, pel I° criterio, dei triangoli DEC, D'E'C' e quindi l'uguaglianza di segmenti

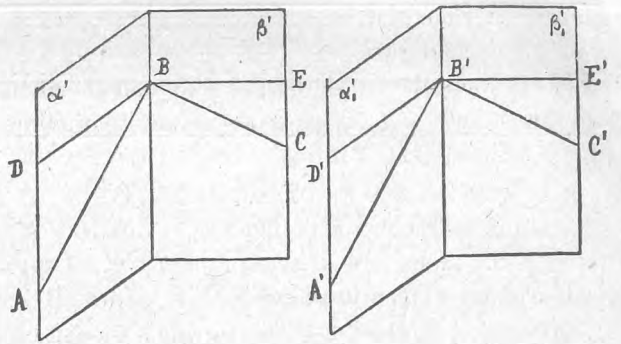
$$D'C' = DC;$$

la quale, insieme colle $B'D' = BD$, $B'C' = BC$, ci permette di concludere che sono uguali, pel III° criterio, i due triangoli DBC, D'B'C' e quindi sono veramente uguali le due sezioni ugualmente inclinate $\widehat{DBC}$, $\widehat{D'B'C'}$.

681. Ciò premesso possiamo dimostrare il seguente teorema fondamentale:

Teor. — *Sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali sono uguali; reciprocamente, due diedri, aventi due sezioni ugualmente inclinate uguali, sono uguali.*

Siano i due diedri $\widehat{\alpha'\beta'}$ e $\widehat{\alpha'_1\beta'_1}$ e siano $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ due



loro sezioni ugualmente inclinate.

Consideriamo accanto a queste le due sezioni normali $\widehat{DBE}$, $\widehat{D'B'E'}$ passanti per B, B' rispettivamente, le quali sono pur esse sezioni ugualmente inclinate dei due diedri.

Ciò premesso, supponiamo che i due diedri siano uguali: avremo

$$\widehat{D'B'E'} = \widehat{DBE}.$$

E allora, considerando le due sezioni $\widehat{ABE}$, $\widehat{A'B'E'}$, aventi rispettivamente un lato comune colle sezioni $\widehat{DBE}$, $\widehat{D'B'E'}$ (ugualmente inclinate ed uguali) abbiamo per il lemma del n. prec.

$$\widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE};$$

e riapplicando il medesimo lemma alle altre due sezioni ugualmente inclinate $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$, aventi alla loro volta un lato comune rispettivamente con $\widehat{ABE}$, $\widehat{A'B'E'}$, concludiamo che è veramente

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

E così è dimostrata la prima parte del teorema.

Reciprocamente supponiamo che siano uguali le due sezioni ugualmente inclinate $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$. Allora, in base al lemma del n. prec., si conclude successivamente

$$\widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE}$$

e

$$\widehat{D'B'E'} = \widehat{DBE}:$$

vale a dire che i due diedri sono uguali.

682. Osservazione. — La prima parte del teorema prec. si può agevolmente verificare ricorrendo al movimento delle figure.

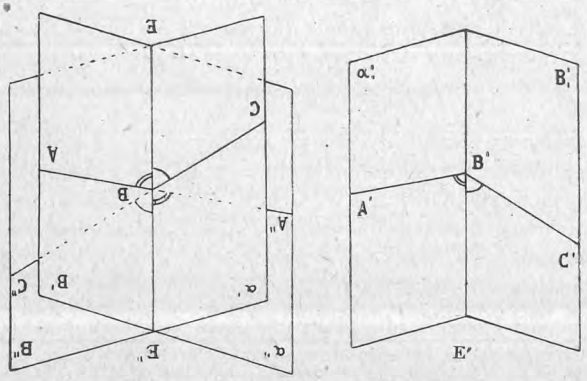
Riferendoci alla fig. della pag. 423, consideriamo in due diedri uguali $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\alpha'_1\beta'_1}$ due sezioni ugualmente inclinate $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$, tali cioè che

$$\widehat{ABE} = \widehat{A'B'E'}, \quad \widehat{EBC} = \widehat{E'B'C'}.$$

Se allora portiamo a coincidere il diedro $\widehat{\alpha'_1\beta'_1}$ col diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$, in modo che i semipiani α'_1, β'_1 si sovrappongano rispettivamente ad α', β' e il punto B' cada in B, gli angoli $\widehat{A'B'E'}$, $\widehat{E'B'C'}$ andranno a coincidere rispettivamente cogli angoli uguali $\widehat{ABE}$, $\widehat{EBC}$; e di qui si conclude che veramente

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

Ma vi è un altro caso in cui la verifica è meno immediata. Consideriamo l'annessa figura, in cui sono



rappresentati due diedri uguali $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\alpha'_1\beta'_1}$ e due loro sezioni $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ ugualmente inclinate, cioè tali che

$$\widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE}, \quad \widehat{E'B'C'} = \widehat{EBC}.$$

Si vuol verificare che

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

Ora è chiaro che se si porta $\widehat{\alpha'_1\beta'_1}$ a coincidere con $\widehat{\alpha'\beta'}$ in modo che B' vada a cadere in B, le sezioni $\widehat{A'B'C'}$, $\widehat{ABC}$ non si sovrappongono (tolto il caso particolare in cui $\widehat{ABE} = \widehat{EBC}$).

Si consideri allora il diedro $\widehat{\alpha''\beta''}$ opposto allo spigolo di $\widehat{\alpha'\beta'}$ e la sua sezione $\widehat{A''BC''}$, opposta al vertice di $\widehat{ABC}$. Avremo

$$\widehat{A''BE''} = \widehat{A'B'E'}, \quad \widehat{E''BC''} = \widehat{E'B'C'},$$

cioè le $\widehat{A''BC''}$, $\widehat{A'B'C'}$ saranno sezioni ugualmente inclinate di $\widehat{\alpha''\beta''}$, $\widehat{\alpha'\beta'}$. E se portiamo $\widehat{\alpha'\beta'}$ a coincidere con $\widehat{\alpha''\beta''}$, in modo che B' cada in B e i semipiani α'_1, β'_1 si sovrappongono ad α'', β'' rispettivamente, la semiretta B'A' andrà a coincidere con BA'' e B'C' con BC''.

Di qui risulta

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{A''BC''};$$

e, poichè gli angoli $\widehat{A''BC''}$, $\widehat{ABC}$ sono uguali come opposti al vertice, si conclude che veramente

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

683. Come caso particolare della prima parte del teor. del n. 681 abbiamo che: *In uno stesso diedro sezioni ugualmente inclinate sono uguali.*

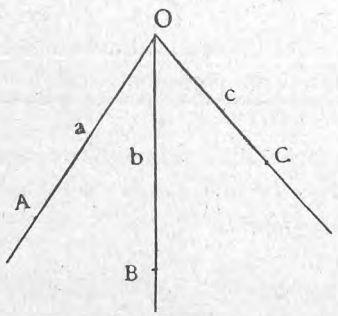
X.

ANGOLOIDI E POLIEDRI

Triedri.

684. Tre semirette OA, OB, OC uscenti da un punto O, ma non giacenti in un piano, definiscono tre angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ e tre diedri $A\widehat{OC}B$, $B\widehat{OA}C$, $C\widehat{OB}A$.

Questi tre triedri sono tali che ogni punto appartenente a due di essi appartiene anche al terzo (cfr. n. 68).



685. Def. — Date tre semirette OA, OB, OC, uscenti da un punto O, ma non giacenti in un piano, dicesi « *triedro* $\widehat{OABC}$ » l'insieme dei punti comuni ai tre diedri così determinati: $A\widehat{OC}B$, $B\widehat{OA}C$, $C\widehat{OB}A$.

Se con a, b, c si rappresentano le tre semirette, il triedro si indica anche con « triedro *abc* ».

Il punto O si dice *vertice* del triedro.

Le semirette a, b, c chiamansi *spigoli* e gli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ *facce* del triedro.

Se a_1, b_1, c_1, sono le semirette opposte di a, b, c, il triedro a, b, c, dicesi *opposto al vertice* al triedro *abc*.

686. Nota. — Un triedro si ottiene anche combinando per interferenza i tre semispazi limitati dalle tre facce e contenenti rispettivamente il terzo spigolo.

Ed è chiaro altresì che dato un triangolo e fissato un punto O fuori del suo piano, l'insieme delle semirette, che da O vanno ai punti del triangolo, costituisce un triedro.

687. L'insieme delle facce del triedro dicesi *superficie del triedro.*

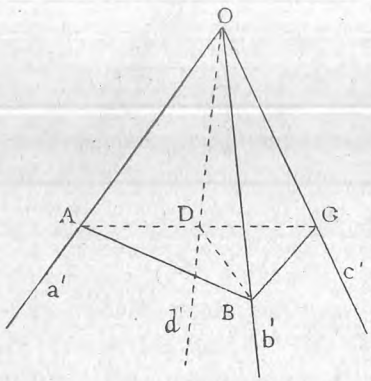
I punti del triedro non appartenenti alla superficie diconsi *interni* al triedro e quelli non appartenenti al triedro diconsi *esterni.*

688. Nota. — La superficie triedrica divide lo spazio in due regioni o parti (una delle quali è il triedro) per modo che, dati due punti dello spazio la cui congiungente non incontri nessuno degli spigoli, se essi giacciono nella medesima regione, il segmento che li congiunge non interseca la superficie o la interseca in due punti: se essi giacciono uno per ciascuna delle due regioni, il detto segmento interseca le superficie in un punto.

689. Teor. — *In un triedro ogni faccia è minore della somma delle altre due, e maggiore della loro differenza.*

Sia $a'b'c'$ un triedro di vertice O. Cominciando dalla prima parte del teor., notiamo anzitutto che una delle facce, la quale non sia maggiore di nessuna delle altre due, è certamente minore della somma di queste ultime. In particolare, il teorema sussiste senz'altro per ogni triedro avente le tre facce uguali.

Escludendo, quindi, codesto caso, possiamo di più restringerci a considerare la faccia maggiore del triedro dato. Supposto che tale sia la $\widehat{c'a'}$, conduciamo da O, en-

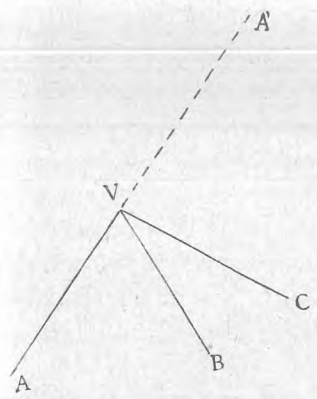


tro l'angolo $\widehat{c'a'}$, la semiretta d' in modo che sia $\widehat{c'd'} = \widehat{c'b'}$; e, presi ad arbitrio su a', c' i punti A, C rispettivamente, e condotto il segmento AC, il quale intersecherà la semiretta d' in un punto D (n. 43, a), prendiamo su b' il punto B tale che sia OB = OD e congiungiamo B con A, D e C.

I triangoli CBO, CDO, aventi il lato OD comune, il lato OB uguale al lato OD, e l'angolo $\widehat{COB}$ uguale all'angolo $\widehat{COD}$, sono uguali (n. 79), cosicchè sarà CB = CD. Allora dal triangolo ABC deduciamo che il lato AB è maggiore della differenza degli altri due AC — CB (n. 97), cioè di AD. E notando che i due triangoli ABO, ADO hanno il lato AO comune e i lati BO, DO uguali, mentre il terzo lato AB del primo triangolo è maggiore del terzo lato AD dell'altro, ricaviamo che non può essere nè $\widehat{AOB} = \widehat{AOD}$ (n. 79), nè $\widehat{AOB} < \widehat{AOD}$ (n. 91), e che quindi è necessariamente $\widehat{AOB} > \widehat{AOD}$. Aggiungendo rispettivamente a codesti due angoli disuguali gli angoli uguali $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, concludiamo che la somma delle facce $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, ossia di $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{b'c'}$ è maggiore della faccia $\widehat{COA}$, ossia di $\widehat{c'a'}$.

Per dedurre la seconda parte del teor. dalla prima, basta ragionare analogamente a quanto facemmo, nel caso dei triangoli, al n. 97.

690. Cor. — *In ogni triedro la somma delle facce è minore di quattro retti.*



Dato il triedro $V\widehat{ABC}$, per dimostrare che la somma delle facce è minore di due angoli piatti, consideriamo la semiretta VA' opposta a VA. Nel triedro $V\widehat{A'BC}$ la faccia $B\widehat{VC}$ è minore della somma delle facce $B\widehat{VA'}$ e $C\widehat{VA'}$ (num. prec.). Avremo allora che la somma delle facce $A\widehat{VB}$, $B\widehat{VC}$, $C\widehat{VA}$ è minore della somma delle facce $A\widehat{VB}$, $B\widehat{VA'}$, $A\widehat{VC}$, $C\widehat{VA'}$, cioè appunto di due angoli piatti, ossia di quattro retti.

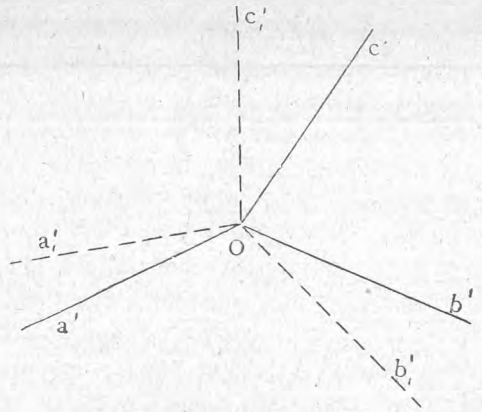
Triedri polari.

691. Def. — Dato un triedro, su ciascuna faccia dal vertice si innalzi la semiretta perpendicolare, da quella stessa parte, da cui cade il terzo spigolo; il triedro che così si ottiene si dice *polare* del dato.

692. Per la costruzione eseguita, ad ogni faccia del triedro dato *corrisponde* nel triedro polare uno spigolo perpendicolare alla faccia considerata, e ad ogni diedro del triedro primitivo *corrisponde* una faccia del triedro polare, i cui lati sono perpendicolari allo spigolo del diedro considerato.

Da ciò risulta che i piani delle tre facce del triedro polare sono perpendicolari agli spigoli del triedro primitivo (n. 626).

Se per esempio, è $a'_1b'_1c'_1$ il triedro polare di $a'b'c'$, al diedro $\widehat{a'}$ di $a'b'c'$ corrisponde la faccia $\widehat{b'_1c'_1}$ del triedro polare, e lo spigolo a' è perpendicolare alla



faccia $\widehat{b'_1c'_1}$. Così gli spigoli b', c' sono perpendicolari rispettivamente alle facce $\widehat{c'_1a'_1}$, $\widehat{a'_1b'_1}$.

Di più, poichè c'_1 cade rispetto al piano $a'\,b'$ dalla stessa banda di c', l'angolo $\widehat{c'_1c'}$ è acuto (numero 628); allora, ricordando che c' è perpendicolare al piano $a'_1b'_1$, avremo che c' cade rispetto ad $a'_1b'_1$ dalla stessa parte di c'_1. Nello stesso modo si prova che a' cade rispetto a $b'_1c'_1$ dalla stessa parte di a'_1; e b' cade rispetto a $c'_1a'_1$ dalla stessa parte di b'_1.

Se ne conclude che $a'b'c'$ è il triedro polare di $a'_1b'_1c'_1$, onde risulta il seguente

Teor. — *La relazione fra un triedro e il suo polare è reciproca, cioè se un triedro è polare di un altro, il secondo è polare del primo.*

Da questo teorema discende il seguente importante

693. Teor. — *Se due triedri sono polari l'uno dell'altro, le facce dell'uno sono supplementari delle sezioni normali dei diedri ordinatamente corrispondenti dell'altro.*

Se il triedro $a'_1b'_1c'_1$ è polare di $a'b'c'$, e la faccia $\widehat{b'_1c'_1}$ del primo corrisponde al diedro $\widehat{a'}$ del secondo, la semiretta b'_1 è perpendicolare alla faccia $\widehat{a'c'}$ del diedro $\widehat{a'}$, e giace rispetto a codesta faccia dalla stessa banda della faccia $\widehat{a'b'}$. Così la semiretta c'_1 è perpendicolare alla faccia $\widehat{a'b'}$ e giace, rispetto a codesta faccia, dalla stessa banda di $\widehat{a'c'}$. Risulta di qui che l'angolo $\widehat{b'_1c'_1}$ è supplementare del rettilineo del diedro $\widehat{a'}$ (n. 642).

694. La considerazione dei triedri polari permette, come si vedrà, di dedurre da ogni teorema concernente i triedri un nuovo teorema (*correlativo* del primitivo), il cui enunciato si ottiene dal primitivo, scambiando le facce coi diedri.

Qui notiamo intanto come, ricorrendo al concetto di triedro polare, si possono dedurre dai due teor. dei numeri 689, 690, relativi alle facce, due teor. notevoli, relativi ai diedri.

a) **Teor.** — *In un triedro, ciascun diedro, aumentato di due retti, supera la somma degli altri due.*

Dato un triedro $a'\,b'\,c'$, si indichino rispettivamente con α, β, γ le sezioni normali dei diedri $\widehat{a'}, \widehat{b'}, \widehat{c'}$.

Vogliamo dimostrare p. es. che

$$\alpha + 2 \text{ retti} > \beta + \gamma.$$

A tal fine ricordiamo che le facce del triedro polare di $a'\,b'\,c'$ sono uguali a (n. prec.)

$$2 \text{ retti} - \alpha,\ 2 \text{ retti} - \beta,\ 2 \text{ retti} - \gamma:$$

ma pel n. 689 si ha

$$(2 \text{ retti} - \beta) + (2 \text{ retti} - \gamma) > 2 \text{ retti} - \alpha;$$

e di qui aggiungendo ad ambo i termini della disuguaglianza $\alpha + \beta + \gamma$ ricaviamo

$$\alpha + 4 \text{ retti} > \beta + \gamma + 2 \text{ retti}$$

e infine

$$\alpha + 2 \text{ retti} > \beta + \gamma.$$

b) **Teor.** — *La somma dei diedri di un triedro è maggiore di due retti e minore di sei retti.*

Considerando le notazioni del n. prec. e considerando le facce del triedro polare di $a'\ b'\ c'$, avremo pel n. 690

$$(2 \text{ retti} - \alpha) + (2 \text{ retti} - \beta) + (2 \text{ retti} - \gamma > 4 \text{ retti}$$

ossia

$$6 \text{ retti} - (\alpha + \beta + \gamma) < 4 \text{ retti},$$

onde

$$6 \text{ retti} < \alpha + \beta + \gamma + 4 \text{ retti}$$

e infine

$$\alpha + \beta + \gamma > 2 \text{ retti}.$$

Così resta dimostrata la prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda, basta notare che ciascuno dei tre diedri, essendo convesso, è minore di due retti, onde la loro somma è minore di sei retti.

Triedri uguali.

695. Def. — Due triedri, presi i loro spigoli in un determinato ordine, si dicono *uguali*, quando le facce e i diedri dell'uno sono ordinatamente uguali alle facce e ai diedri dell'altro.

Così i due triedri $a'b'c'$, $d'e'f'$, si dicono uguali se

$$\widehat{a'b'} = \widehat{d'e'},\ \widehat{b'c'} = \widehat{e'f'},\ \widehat{c'a'} = \widehat{f'd'}$$
$$\widehat{a'} = \widehat{d'},\ \widehat{b'} = \widehat{e'},\ \widehat{c'} = \widehat{f'}.$$

Per designare l'uguaglianza dei triedri $a'b'c'$, $d'e'f'$, si scrive

$$a'b'c' = d'e'f'.$$

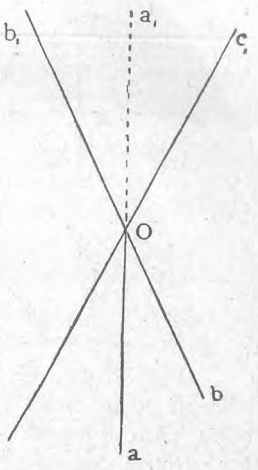
696. Cor. — *Due triedri uguali ad un terzo sono uguali fra loro.*

697. Cor. — *Due triedri opposti al vertice sono uguali* (Vedi fig. alla pag. seg.).

Infatti le facce sono a due a due uguali come opposte al vertice (n. 69), e i diedri sono a due a due uguali come opposti allo spigolo (n. 654).

698. Cor. — *Triedri polari di triedri uguali sono uguali.*

Infatti le facce e i rettilinei dei diedri corrispondenti sono supplementari di angoli uguali (nn. 693, 65).



699. Considerato un triedro *abc*, di cui la faccia *bc* sia orizzontale, supponiamo, per fissare le idee, che la semiretta *a* si trovi nella regione di spazio superiore al piano *bc*. Un osservatore coi piedi nel vertice O del triedro, rivolto col capo secondo la semiretta *a*, vedrà descrivere l'angolo $\widehat{bc}$ (e il diedro $\widehat{abc}$) in un certo verso, ad es. *da destra a sinistra*. Allora anche un osservatore adagiato secondo la semiretta *b*, vedrà descrivere l'angolo $\widehat{ca}$ da destra a sinistra; e così pure un osservatore adagiato lungo la semiretta *c*, vedrà descrivere l'angolo $\widehat{ab}$ da destra a sinistra.

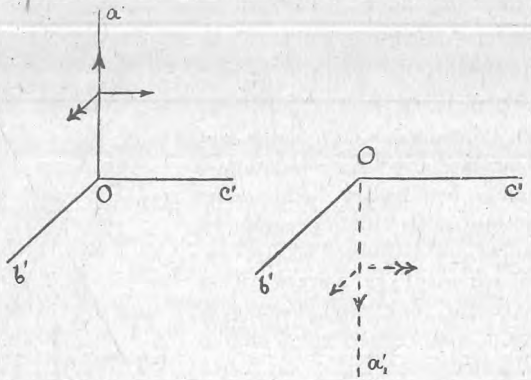
Se poi s'immagina che la semiretta *a* si muova per O, purchè essa resti sempre al di sopra del piano *bc*, l'osservatore legato alla semiretta *a* secondo il medesimo verso vedrà sempre l'angolo $\widehat{bc}$ descritto da destra a sinistra.

Ma se si considera una semiretta a_1 per O, che giaccia nella regione inferiore dello spazio rispetto al piano *bc*, e quindi un osservatore capovolto rispetto alla posizione di esso precedentemente fissata, questi vedrà descrivere il medesimo angolo $\widehat{bc}$ (e il diedro $\widehat{ba_1c}$) *nel verso opposto*, cioè *da sinistra a destra*.

Si è così condotti a dire che i triedri *abc*, *bca*, *cab* (presi i loro vertici nell'ordine scritto) hanno *versi concordi (o lo stesso verso) fra loro*, e *versi (opposti) ai triedri cba, bac, acb*.

Analogamente si possono confrontare i versi di due triedri aventi comune il piano di una faccia, e poi anche i versi

di due triedri qualsiansi. Noi non ci tratterremo su ciò ma ci limiteremo a notare che da codesto confronto risulta che sempre *triedri, i cui versi siano ambedue concordi o ambedue*



discordi ad un terzo, hanno versi concordi; triedri di cui l'uno abbia verso concorde e l'altro verso discorde ad un terzo, hanno versi discordi.

700. Due triedri uguali si dicono *uguali direttamente* o *inversamente*, secondochè i loro versi sono concordi o discordi.

Ed è facile verificare che due triedri uguali direttamente sono sovrapponibili col movimento, mentre due triedri inversamente uguali non si possono portare a coincidere col movimento; ma, siccome un triedro è uguale inversamente al suo opposto al vertice, se due triedri sono inversamente uguali, ciascuno di essi può essere sovrapposto all'opposto al vertice dell'altro, il quale gli è direttamente uguale. Si può anche portare, col movimento, i due triedri ad essere *simmetrici* rispetto ad un piano, per modo che ciascuno si possa considerare come immagine dell'altro riflessa da uno specchio piano.

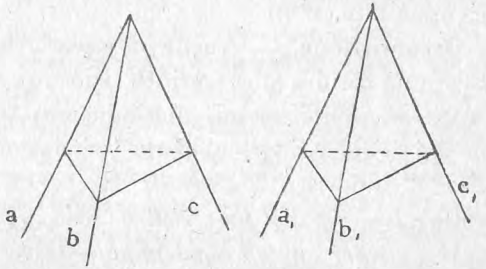
701. Dalla def. del n. 695 discende che per stabilire che due triedri sono uguali, occorrerebbe verificare sei uguaglianze tra angoli e tra diedri. Ma alcune di queste discendono dalle altre. Si hanno invero i

seguenti criterî di uguaglianza, di cui è evidente l'analogia coi criteri di uguaglianza dei triangoli dei nn. 79, 84 e 90.

702. 1° CRITERIO D'UGUAGLIANZA DEI TRIEDRI.

Teor. — *Se due triedri hanno rispettivamente uguali due facce e il diedro compreso, essi sono uguali, cioè hanno rispettivamente uguali anche le terze facce e i diedri opposti alle facce uguali.*

I due diedri $a'b'c'$, $a'_1b'_1c'_1$ abbiano uguali le facce $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{a'_1b'_1}$, $\widehat{b'c'}$ e $\widehat{b'_1c'_1}$ e i diedri $\widehat{b'}, \widehat{b'_1}$.



Le facce $\widehat{a'c'}$, $\widehat{a'_1c'_1}$ sono sezioni dei diedri uguali $\widehat{b'}, \widehat{b'_1}$, aventi i lati ugualmente inclinati sugli spigoli: e perciò sono uguali (n. 681).

In secondo luogo le facce $\widehat{b'c'}$, $\widehat{b'_1c'_1}$ uguali per ipotesi, sono sezioni ugualmente inclinate dei diedri $\widehat{a'}, \widehat{a'_1}$; se ne conclude che codesti due diedri sono uguali (n. 681).

Analogamente si dimostra che sono uguali i diedri $\widehat{c'}, \widehat{c'_1}$, onde risulta l'uguaglianza dei due triedri.

703. Osservazione. — Ricorrendo a modelli concreti (p. es. a due triedri ritagliati nel cartoncino), si può verificare che due triedri, nelle condizioni dell'enunciato, sono sovrapponibili col movimento, ove essi abbiano versi concordi; se hanno versi discordi

ciascuno dei due triedri è sovrapponibile all'opposto al vertice dell'altro.

704. II° CRITERIO D'UGUAGLIANZA DEI TRIEDRI.

Teor. — *Se due triedri hanno rispettivamente uguali due diedri e la faccia comune, essi sono uguali, cioè hanno rispettivamente uguali anche i terzi diedri e le facce opposte ai diedri uguali.*

Infatti i triedri polari dei dati hanno uguali due facce e il diedro compreso e perciò sono uguali (n. prec.); e allora i triedri dati sono uguali, come polari di triedri uguali (n. 698).

705. Osservazione. — Anche in questo caso, come nel prec., si può fornire una verifica sperimentale del teorema, per sovrapposizione, distinguendo parimenti il caso in cui i due triedri abbiano versi concordi o discordi.

706. Cor. — *Se in un triedro sono uguali due facce, anche i diedri opposti sono uguali, e viceversa.*

Si deduce come l'analoga proposizione sul triangolo isoscele (nn. 81, 86).

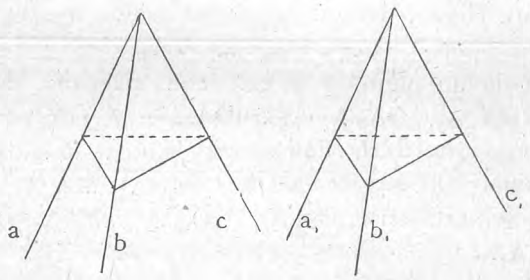
707. III° CRITERIO D'UGUAGLIANZA DEI TRIEDRI.

Teor. — *Se due triedri hanno le facce ordinatamente uguali, essi sono uguali, cioè hanno ordinatamente uguali i diedri opposti alle facce uguali.*

Dati i due triedri $a'b'c'$, $a'_1b'_1c'_1$, il primo abbia le facce $\widehat{b'c'}$, $\widehat{c'a'}$, $\widehat{a'b'}$ ordinatamente uguali alle facce $\widehat{b'_1c'_1}$, $\widehat{c'_1a'_1}$, $\widehat{a'_1b'_1}$ del secondo. Diciamo che i diedri $\widehat{a'}$, $\widehat{b'}$, $\widehat{c'}$ sono uguali ai diedri $\widehat{a'_1}$, $\widehat{b'_1}$, $\widehat{c'_1}$ ordinatamente.

Infatti le $\widehat{b'c'}$, $\widehat{b'_1c'_1}$ si possono considerare come sezioni dei due diedri $\widehat{a'}$, $\widehat{a'_1}$, aventi i lati ugualmente inclinati sugli spigoli di essi. Poichè codeste due sezioni sono uguali, i due diedri sono uguali (n. 681).

Allora i due triedri, avendo uguali ordinatamente due facce e il diedro compreso, sono uguali (n. 702).



708. Nota. — Senza far uso del teor. del n. 681, il prec. teorema si lascia dedurre dai precedenti criteri d'uguaglianza (nn. 702, 704), nello stesso modo come il caso di uguaglianza di due triangoli che hanno i lati uguali (n. 90) si deduce dagli altri due (nn. 79, 84).

Si costruisca infatti un triedro $a'b'c''$ uguale ad $a'_1b'_1c'_1$, il quale abbia comune con $a'b'c'$ la faccia $a'b'$, ed in modo che c' e c'' giacciano da parti opposte di questa faccia. Si vedrà che i triedri $c'a'c''$ e $c'b'c''$ avendo uguali le facce

$$\widehat{c'a'} = \widehat{c''a'} \text{ e } \widehat{c'b'} = \widehat{c''b'},$$

avranno uguali i diedri ad esse opposti, quindi ecc.

Deve essere considerato a parte il caso in cui il diedro b' sia retto.

709. IV° CRITERIO D'UGUAGLIANZA DEI TRIEDRI.

Teor. — *Se due triedri hanno i diedri ordinatamente uguali, essi sono uguali, cioè hanno uguali le facce opposte ai driedri uguali.*

Infatti i triedri polari hanno le facce ordinatamente uguali (n. 693, 65) e quindi sono uguali (n. prec.). Ne risulta che i triedri primitivi, come polari di triedri uguali, sono uguali (n. 698).

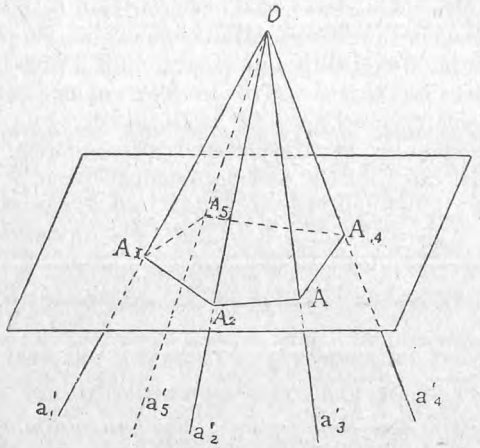
Angoloidi.

710. Siano, date in un certo ordine n semirette

$$OA_1 , OA_2 ,..., O A_n,$$

uscenti da un punto O e tali che ciascuno degli n piani OA_1A_2, OA_2A_3 ,....., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 lasci tutte le semirette da una stessa banda. Restano così determinati n angoli $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$,....., $\widehat{A_{n-1}OA_n}$, $\widehat{A_nOA_1}$ ed n diedri $A_1\widehat{OA_2}A_3$, $A_2\widehat{OA_3}A_4$,..., $A_{n-1}\widehat{OA_n}A_1$, $A_n\widehat{OA_1}A_2$.

Questi n diedri sono tali che ogni punto comune ad n-1 fra di essi appartiene all'n^{mo} (cfr. n. 128).



711. Def. — Date in un certo ordine n semirette

$$OA_1 , OA_2 ,..., OA_n,$$

uscenti da un punto O e tali che ciascuno degli n piani OA_1A_2 , OA_2A_3 ,..., OA_nA_1 lasci tutte le n semirette da una stessa banda, dicesi *angoloide* $\widehat{OA_1A_2...A_n}$ l'insieme dei punti comuni agli n diedri

$A_1\widehat{OA_2}A_3$, $A_2\widehat{OA_3}A_4$,..., $A_{n-1}\widehat{OA_n}A_1$, $A_n\widehat{OA_1}A_2$.

Se le n semirette si indicano con a_1 , a_2 ,..., a_n, l'angoloide si designa con $a_1\, a_2 \, ... \, a_n$.

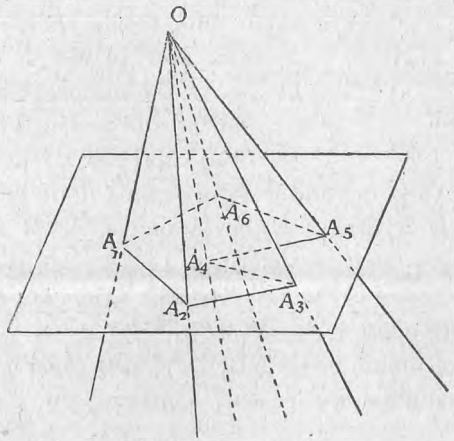
Il punto O dicesi vertice e basta ricordare il n. 685 per comprendere che cosa si intenda per *spigoli*, *facce* e diedri dell'angoloide.

L'angoloide per n = 4, 5, 6, ... dicesi rispettivamente *angoloide tetraedro, pentaedro, esaedro,* ecc.

712. L'angoloide si può anche definire combinando per interferenza gli n semispazi limitati dai piani delle facce e contenenti gli spigoli prefissati.

713. Nota. — Se un piano interseca gli spigoli di un angoloide $a_1\, a_2\, a_3$.... a_n negli n punti A_1, A_2, ... A_n rispettivamente, la figura A_1A_2 ... A_n è un poligono (convesso). Viceversa, se è dato un qualsiasi poligono (convesso) A_1A_2 .... A_n, e si considerano le semirette che congiungono O coi suoi vertici, ciascuno dei piani A_1OA_2, A_2OA_3, ..., $A_n\,OA_1$, lascia tutti da una banda le semirette che esso non contiene: si ottiene dunque un angoloide ad n facce.

714. Si può generalizzare la nozione posta al n. 711 col



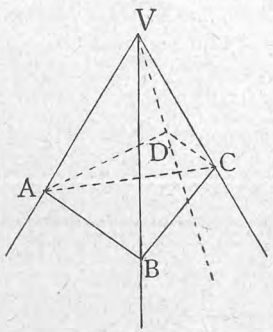
considerare *angoloidi concavi*, i quali si ottengono togliendo dalla definizione del n. 711 la condizione che ogni piano definito da due spigoli consecutivi lasci da una stessa banda tutti gli altri, ma richiedendo che due facce non consecutive non abbiano punti comuni all'infuori del vertice.

Si ottiene un angoloide concavo conducendo da un punto esterno al piano di un poligono concavo tutte le semirette che vanno ai punti di codesto poligono.

Noi nel seguito, salvo esplicito avviso, ci limiteremo a considerare angoloidi *convessi*, cioè soddisfacenti alla definizione del n. 711, e per brevità li indicheremo col solo nome di angoloidi, sottointendendo « convessi ».

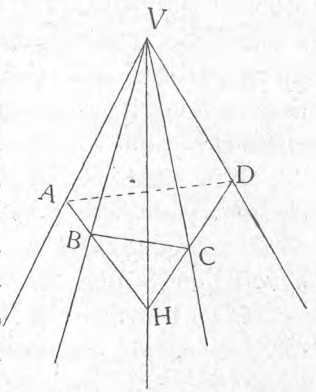
715. Teor. — *In ogni angoloide una faccia è minore della somma delle altre.*

Sia (per fissare le idee) l'angoloide $\widehat{V}ABCD$. Diciamo che la faccia $A\widehat{V}B$ è minore della somma delle altre. Conducendo da uno dei lati della faccia $A\widehat{V}B$, p. es. da VA, i piani che vanno ai rimanenti spigoli dell'angoloide, decomponiamo l'angoloide in un certo numero di triedri $V\widehat{A}BC$, $V\widehat{A}CD$. Nel primo di questi la faccia $A\widehat{V}B$ è minore della somma delle altre due facce $B\widehat{V}C$, $C\widehat{V}A$ (n. 689). Ma nel triedro $\widehat{V}ACD$ la faccia $A\widehat{V}C$ è minore della somma delle facce $C\widehat{V}D$, $D\widehat{V}A$. Si conclude così che la faccia $A\widehat{V}B$ è minore della somma di tutte le altre.



716. Teor. — *In un angoloide la somma delle facce è minore di quattro angoli retti.*

Dato l'angoloide $\widehat{V}ABCD$, e fissatane una faccia $B\widehat{V}C$, prolunghiamo le due contigue fino ad incontrarsi secondo la semiretta VH (n. 620). L'angoloide $\widehat{V}AHD$, che così si ottiene, ha una faccia di meno del primitivo, e in esso la somma delle facce è maggiore della somma delle facce dell'angoloide primitivo, perchè da questa si passa a quella sostituendo alla faccia $B\widehat{V}C$ la somma maggiore delle due facce $B\widehat{V}H$, $H\widehat{V}C$. Ripetendo, se occorre, un numero sufficiente di volte una analoga costruzione, si ottiene da ultimo un triedro in cui la somma delle facce è maggiore che nell'angoloide dato. Ma nel triedro la somma delle facce è minore di quattro angoli retti (n. 690): se ne conclude che la somma delle facce dell'angoloide è minore di quattro angoli retti.



717. Def. — Due angoloidi, presi i loro spigoli in un determinato ordine, si dicono *uguali*, se le facce e i diedri dell'uno sono ordinatamente uguali alle facce e ai diedri dell'altro.

Valgono manifestamente per gli angoloidi uguali le proposizioni analoghe a quelle dei nn. 696, 697.

718. Osservazione. — Anche per gli angoloidi si può stabilire l'uguaglianza e disuguaglianza dei versi, e in base a ciò si può distinguere un'*uguaglianza diretta* e un'*uguaglianza inversa* degli angoloidi (cfr. n. 699). Non ci tratterremo su codesta distinzione, ma ci limiteremo ad asserire, che due angoloidi direttamente uguali sono sovrapponibili col movimento, e che un angoloide è inversamente uguale alla sua immagine riflessa da uno specchio piano.

719. Dati due angoloidi ad n facce, per concludere che le n facce e gli n diedri dell'uno sono uguali ordinatamente alle n facce e agli n diedri dell'altro cioè che i due angoloidi sono uguali, basta conoscere l'uguaglianza di alcune coppie di facce e di alcune coppie di diedri. Si hanno così dei criteri di uguaglianza degli angoloidi, fra i quali noi ci limiteremo a enunciare i due seguenti, che si deducono dai criteri di uguaglianza dei triedri decomponendo gli angoloidi dati in triedri per mezzo dei piani che da due spigoli omologhi vanno in ciascun angoloide agli altri spigoli.

720. Teor. — *Di due angoloidi si può concludere che sono uguali, se, prescindendo da una faccia e dai diedri adiacenti, si è verificato che hanno ordinatamente uguali tutte le altre facce e i diedri da esse compresi.*

721. Teor. — *Di due angoloidi si può concludere che sono uguali, se, prescindendo da un diedro e dalle due facce che lo comprendono, si è verificato che hanno ordinatamente uguali tutti gli altri diedri e le facce che li comprendono.*

Nota. — Il secondo di questi teoremi si può dedurre direttamente dal primo, ricorrendo, analogamente a quanto si è fatto pei triedri, alla considerazione degli *angoloidi polari*.

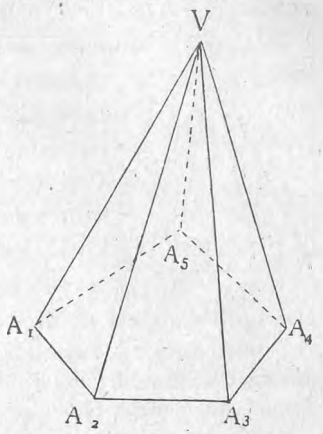
Poliedri.

722. Def. — Dati un poligono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ e un punto V fuori del piano di esso, dicesi *piramide* di *base* $A_1A_2 \ldots A_n$ e di *vertice* V l'insieme dei punti dell'angoloide $\widehat{VA_1A_2 \ldots A_n}$ che giacciono rispetto al piano del poligono dato dalla stessa parte del punto V.

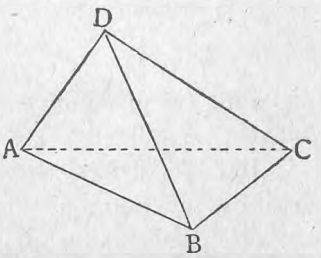
I triangoli VA_1A_2, VA_2A_3 ,..., $VA_{n-1}A_n$ diconsi *facce* laterali della piramide e i lati di essi si dicono *spigoli*. L'angoloide $\widehat{V}$ dicesi *angoloide al vertice*, e i triedri che hanno per vertici i vertici della base si dicono *triedri alla base*.

La distanza del vertice dal piano della base si dice *altezza* della piramide.

L'insieme delle facce laterali dicesi *superficie laterale* della piramide, e l'insieme della superficie laterale e della base si dice *superficie totale*. La piramide si dice a base triangolare, quadrangolare,..... secondo che la base è un triangolo, un quadrangolo,..... In particolare, una piramide a base triangolare si dice *tetraedro*, e si può considerare come piramide a base triangolare in altri tre modi diversi, prendendo come base una qualsiasi delle facce laterali.



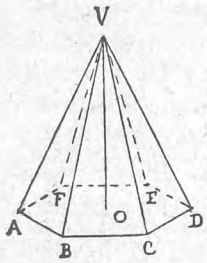
723. La piramide è la parte comune (interferenza) degli $n + 1$ semispazi limitati dai piani delle facce laterali e della base e che contengono la piramide.



I punti della piramide non appartenenti alla superficie della piramide diconsi *interni*, e i punti non appartenenti alla piramide si dicono *esterni*. Si ottengono così *due parti* dello spazio relative alla piramide, che godono di proprietà analoghe a quelle enunciate per i triedri al n. 688.

724. Una piramide, di cui la base sia un poligono regolare e il vertice appartenga alla perpendicolare alla base nel suo centro, dicesi *piramide retta a base regolare*, od anche, semplicemente, *piramide regolare*.

Gli spigoli laterali di una piramide retta a base regolare VABCDEF sono tutti uguali, perchè i loro estremi sul piano della base sono equidistanti dal piede O della perpendicolare abbassata dal vertice (centro del poligono regolare di base) (n. 632). Perciò e pel fatto che i lati della base sono tutti uguali, le facce laterali sono altrettanti triangoli isosceli uguali.



L'altezza di ciascuno di codesti triangoli isosceli si dice *apotema* della piramide.

725. Nota. — Partendo da poligoni concavi (n. 139) si ottengono piramidi che si dicono *concave* per distinguerle da quelle considerate dianzi, le quali si chiamano *convesse*.

Ma noi nel seguito, salvo esplicito avviso in contrario, ci limiteremo a considerare piramidi convesse, cioè soddisfacenti alla definizione del n. 722.

726. Le piramidi sono una specie particolare di *poliedri*.

Def. — Dicesi *superficie poliedrica* ogni figura costituita da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo, che ognuno dei lati sia comune a due di essi, e il piano di ciascuno lasci tutti gli altri da una medesima banda.

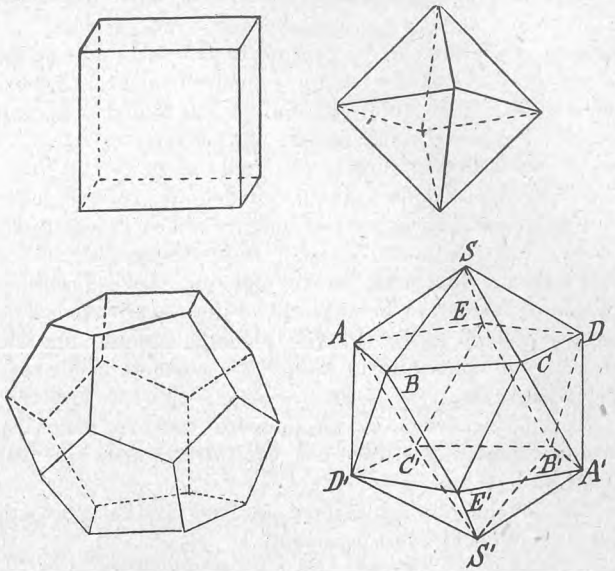
I nominati poligoni diconsi *facce*, e i vertici, i lati e gli angoli rispettivi diconsi *vertici spigoli* ed *angoli* della superficie poliedrica.

I diedri formati dalle coppie di facce aventi comune uno spigolo e gli angoloidi formati dagli spigoli uscenti dai singoli vertici hanno comuni infiniti punti, il cui insieme dicesi *poliedro*.

I diedri e gli angoloidi suaccennati diconsi diedri ed angoloidi del poliedro.

Un poliedro avente quattro facce è un tetraedro.

Diamo nella figura annessa esempio di poliedri a sei, otto, dodici, venti facce (esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro).



727. Il poliedro si può considerare come la parte comune (interferenza) dei semispazi limitati dalle facce e contenenti il poliedro.

I punti del poliedro non appartenenti alla superficie si dicono *interni*. I punti non appartenenti al poliedro si dicono *esterni*.

Si ottengono così due parti dello spazio, relative al poliedro, aventi comune la superficie di esso, dalla quale sono limitate, e godenti delle proprietà indicate pei triedri al n. 688, e che qui per brevità non ripetiamo.

Se A, B,...., H sono i vertici del poliedro, esso si designa con AB....H.

728. Nota. — Come al n. 726 si consideri una figura, costituita da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ognuno dei lati sia comune a due di essi e non più, e si tolga la condizione che ciascuno lasci tutti gli altri da una medesima banda; ma si richieda che codesti poligoni non si seghino a vicenda. Si dà origine in tal modo ad una superficie *poliedrica concava* e ad un poliedro concavo. Esempi di poliedri siffatti sono quelle piramidi a cui abbiamo accennato al n. 725. I poliedri soddisfacenti alla condizione del n. 726, a cui d'ordinario tacitamente ci riferiremo anche in seguito, diconsi, per opposizione a quelli qui definiti, poliedri *convessi*.

Un poliedro concavo si può definire come riunione *(somma)* di più poliedri convessi *(parti)*, *non ricoprentisi*, cioè non aventi a due a due punti interni comuni. Anzi queste parti si possono considerare in un certo ordine, per modo che due consecutive siano *adiacenti*, cioè abbiano comune una faccia o un poligono contenuto in essa, e giacciano da bande opposte rispetto a questa.

Si può anche definire un poliedro concavo, combinando convenientemente *per riunione ed interferenza* i semispazi limitati dalle facce.

Ma noi non ci indugeremo intorno a siffatte questioni, cui è sufficiente di avere accennato.

729. Def. — Due poligoni diconsi *uguali* se hanno ordinatamente uguali gli angoloidi e le facce, cioè gli angoli, i diedri e gli spigoli.

730. Osservazione. — Si potrebbe distinguere anche qui un'*uguaglianza diretta* e un'*uguaglianza inversa*. Il primo caso corrisponde alla sovrapponibilità; del secondo ci offrono esempio due poliedri, ciascuno dei quali sia immagine speculare dell'altro rispetto a uno specchio piano.

731. Per constatare l'uguaglianza di due poliedri, non importa verificare successivamente l'uguaglianza di tutti i loro elementi: ma basta confrontare un certo numero di questi. Si hanno in proposito dei *criteri di uguaglianza* dei poliedri. Qui ci limiteremo a enunciare il seguente teorema, lasciando allo studioso la cura di dimostrarlo.

Teor. — *Di due piramidi si può concludere che sono uguali, se si sa che hanno uguali:*

a) *l'angoloide al vertice e gli spigoli di esso*; *oppure:*

b) *la base e i triedri cui essa appartiene.*

XI.

LA SFERA

Preliminari.

732. Def. — Il luogo dei punti dello spazio che hanno da un punto O distanze uguali ad un segmento dato AB, dicesi *superficie sferica* di centro O e raggio AB.

Sopra ogni retta pel centro O vi sono, da bande opposte, due punti P, Q della superficie sferica e il loro punto medio è il centro O della superficie sferica; onde risulta, come per la circonferenza (n. 157), che la superficie sferica ha un solo centro.

Ogni segmento, che congiunge il centro O con un punto della superficie sferica, dicesi genericamente *raggio*. Per definizione tutti i raggi sono uguali.

Ogni segmento passante pel centro di una superficie sferica e avente gli estremi su questa dicesi *diametro*. Tutti i diametri di una stessa superficie sferica sono uguali, perchè sono tutti doppi del raggio.

Infine ogni piano passante pel centro di una superficie sferica dicesi piano *diametrale* di essa. Due piani diametrali si intersecano secondo la retta di un diametro (n. 620) o, come si suol dire brevemente, secondo un diametro. È poi manifesto dalla definizione

stessa che esiste una sola superficie sferica avente un dato centro e un dato raggio.

733. Teor. — *Ogni piano diametrale di una superficie sferica la interseca secondo una circonferenza di raggio uguale ad essa.*

Data la sfera di centro O e raggio AB, e dato il piano α passante per O, la intersezione della superficie sferica con α è il luogo, nel piano α, dei punti aventi da O distanza uguale ad AB, cioè (n. 157) la circonferenza di centro O e raggio AB.

734. Def. — I punti che hanno dal centro di una superficie sferica distanza minore del raggio si dicono *interni* e i punti che dal centro hanno distanza maggiore del raggio si dicono *esterni* alla superficie sferica.

La figura costituita dai punti di una superficie sferica e dai punti interni ad essa dicesi *sfera*.

Una sfera o la sua superficie si designano indicandone il centro ed il raggio, o, quando non siavi possibilità di equivoco, indicandone soltanto il centro.

735. Def. — Ogni segmento avente gli estremi su di una superficie sferica dicesi *corda* della sfera.

Una corda, salvi gli estremi, è tutta interna alla sfera (n. 112).

736. Teor. — *In una sfera ogni corda* (non passante pel centro) *è minore del diametro.*

La precedente proposizione si riporta alla analoga pel cerchio (n. 172), considerando la circonferenza, secondo cui è segata la sfera dal piano diametrale contenente la corda data.

737. Analogamente si dimostra, in base al n. 202, il seguente

Teor. — *Data una sfera e un punto non appar-*

tenente ad essa (e distinto dal centro), fra i segmenti che vanno dal punto prefissato ai punti della superficie sferica quello che passa pel centro è massimo e il suo prolungamento è minimo.

738. Osservazione. — La sovrapponibilità mediante il movimento di due sfere di ugual raggio giustifica la seguente

739. Def. — Due sfere o superficie sferiche si dicono *uguali* se hanno ugual raggio.

Intersezioni di rette e piani con sfere, e di sfere con sfere.

Vediamo quanti punti una retta può avere comuni con una superficie sferica. Il criterio per decidere tale questione è fornito dal seguente

740. Teor. — *Una superficie sferica ha comune con una retta due punti o uno o nessuno, secondo che la distanza di essa dal centro della sfera è minore o uguale o maggiore del raggio.*

Se la retta passa pel centro si è già notato che essa ha comuni due punti colla superficie sferica (n. 732).

Se la retta data non passa pel centro della sfera, si consideri il piano diametrale passante per la retta data.

Questo piano sega la superficie sferica secondo una circonferenza che ha comune colla retta data due punti o uno o nessuno, secondo che la distanza della retta dal centro, comune alla circonferenza e alla sfera, è maggiore, uguale o minore del raggio (nn. 183-201).

741. Def. — Una retta si dice *secante* o *tangente* od *esterna* ad una superficie sferica, secondo che ha comune con essa due punti o uno o nessuno.

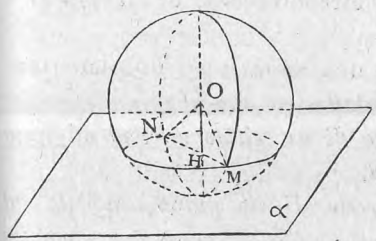
Il punto comune ad una sfera e ad una sua tangente dicesi *punto di contatto.*

742. Cor. — *Ogni retta perpendicolare ad un raggio di una sfera nel suo estremo, è tangente alla sfera; ed ogni retta tangente ad una sfera è perpendicolare al raggio che va al suo punto di contatto* (nn. 189, 199).

743. Nota. — Risulta dai nn. prec. che le *due parti* in cui la superficie sferica divide lo spazio sono tali che, congiungendo due punti fuori della sfera, i quali non si trovino sopra una tangente, se essi appartengono ad una medesima parte, si ha un segmento che *non* sega la superficie sferica o la sega in *due* punti; se appartengono a parti opposte, si ha un segmento che sega la superficie in *un* punto.

744. Teor. — *Un piano ha comune con una superficie sferica una circonferenza, o ha comune con essa un sol punto, o non ha con essa nessun punto comune, secondo che la sua distanza dal centro è minore, uguale o maggiore del raggio.*

Dimostriamo la prima parte; cioè, data una sfera di centro O, e considerato un piano α la cui distanza HO da O sia minore del raggio della sfera, facciamo vedere che il piano ha comune con la superficie sferica una circonferenza.



Condotto per OH un piano arbitrario β, questo sega la superficie sferica secondo una circonferenza di centro O, e il piano α secondo una retta, la cui distanza OH da O è

minore del raggio della sfera e della circonferenza. Perciò codesta retta e codesta circonferenza hanno comuni due punti M, N, distinti (ed equidistanti) da H (n. 194). Codesti due punti appartengono alla superficie sferica, e quindi OM è uguale al raggio della sfera. Se allora nel piano α consideriamo la circonferenza di centro H e raggio HM, tutti i punti di essa hanno da O una distanza uguale ad OM, raggio della sfera (n. 632, 2°), e quindi appartengono alla superficie sferica.

Analogamente si dimostra che, se il piano α dista da O del raggio, esso ha comune colla sfera un solo punto, cioè il piede della perpendicolare abbassata da O su α; e, se la distanza di O da α è maggiore del raggio, il piano non ha nessun punto comune colla sfera.

E poichè i tre fatti che il piano e la superficie sferica abbiano comune una circonferenza o un punto o nessuno si escludono a vicenda, resta senz'altro dimostrato inversamente che in codesti tre casi la distanza del punto dal piano è rispettivamente minore, uguale o maggiore del raggio.

745. Def. — Un piano rispetto a una superficie sferica si dice *secante*, *tangente* o *esterno*, secondo che ha comune con esso una circonferenza, o un punto o nessun punto.

Il punto comune ad una sfera e ad un piano tangente, dicesi *punto di contatto*.

746. Cor. — *Le rette di un piano esterno ad una sfera sono esterne ad essa.*

747. Cor. — *Le rette di un piano tangente ad una sfera, che passano pel punto di contatto, sono ivi tangenti alla sfera: le altre rette del piano sono esterne.*

748. Cor. — *Le tangenti ad una sfera in un medesimo punto* (cioè le perpendicolari in codesto punto al raggio che va ad esso) *appartengono ad un piano che è tangente alla sfera.*

Infatti, il piano cui appartengono tutte codeste perpendicolari (n. 625), è perpendicolare al raggio considerato nel suo estremo (n. 626); onde risulta che ogni altro punto di codesto piano dista dal centro più del raggio (n. 632), e il piano ha un solo punto comune colla sfera, cioè è ad essa tangente.

749. Nota. — La proposizione precedente si può enunciare dicendo che *il piano perpendicolare in un punto di una sfera al raggio che va a codesto punto, è tangente alla sfera.*

750. Cor. — *Se un piano sega una superficie sferica, il raggio della circonferenza sezione è uguale alla proiezione sul piano di un raggio della sfera che passi per uno qualsiasi dei punti della sezione.*

751. Cor. — *Di tutte le circonferenze sezioni piane di una superficie sferica hanno raggio massimo quelle il cui piano passa pel centro* (aventi raggio uguale al raggio della sfera).

Infatti il cerchio sezione della sfera O con un piano α non passante pel centro (vedi fig. al n. 744), ha per raggio un segmento HM che è cateto di un triangolo rettangolo, di cui è ipotenusa il raggio OM della sfera.

752. Per quanto precede le sezioni dei piani diametrali si dicono *circonferenze massime* della superficie sferica; le altre sezioni piane diconsi *circonferenze mi-*

nori. I cerchi corrispondenti diconsi rispettivamente *cerchi massimi* o *cerchi minori* della sfera.

Passiamo ora a considerare la posizione reciproca di due sfere riguardo ai punti che esse possono avere comuni.

Date due sfere, si considerino i piani diametrali comuni, cioè i piani passanti per la retta congiungente i centri di esse. Si dimostrano così i seguenti teoremi.

753. Teor. — *Se la distanza dei centri di due sfere è maggiore della somma dei raggi, le due sfere non hanno nessun punto comune, e una delle sfere è esterna all'altra* (cioè i punti dell'una sono esterni all'altra); *e se la distanza dei centri di due sfere è minore della differenza dei raggi, le due sfere non hanno nessun punto comune, e una di esse è interna all'altra.*

754. Teor. — *Se la distanza dei centri di due sfere è uguale alla somma o alla differenza dei raggi, le due superficie sferiche hanno comune un punto ed uno solo appartenente alla retta dei centri, e nel primo caso le due sfere sono esterne l'una all'altra, nel secondo una delle due sfere è interna all'altra* (salvo il punto comune).

755. Nota. — Considerando il piano perpendicolare alla retta dei centri pel punto comune alle due sfere, si ottiene un piano tangente ad entrambe le sfere (n. 749), onde risulta che due sfere soddisfacenti al teorema prec., hanno nel punto comune il medesimo piano tangente.

756. Def. — Due sfere aventi comune un sol punto si dicono *tangenti* in esso: e si dicono tangenti *esternamente* o *internamente,* secondo che sono ciascuna esterna all'altra o una di esse è interna all'altra. Il punto comune dicesi *punto di contatto* delle due sfere.

757. Teor. — *Se la distanza dei centri di due sfere è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi, le due superficie sferiche hanno comune una circonferenza, il cui piano è perpendicolare alla retta dei centri delle sfere, e il cui centro appartiene a codesta retta.*

758. Riassumendo, se a rappresenta la distanza dei centri delle due sfere ed r, r' sono i due raggi, avremo che le proposizioni precedenti sono espresse dal quadro seguente, dove, per fissare le idee, supponiamo $r > r'$:

Se $a > r + r'$ le due sfere sono l'una esterna all'altra *Se* $a < r - r'$ la sfera di raggio r' è interna all'altra	e *le due superficie sferiche non hanno punti comuni.*
Se $a = r + r'$, le due sfere sono l'una esterna all'altra *Se* $a = r - r'$ la sfera di raggio r' è interna all'altra.	e *le due sfere si toccano.*

Se $r + r' > a > r - r'$, *le due superficie sferiche si segano secondo una circonferenza.*

I tre casi, che si possono presentare circa la posizione relativa di due sfere, si escludono l'un l'altro, onde, verificato l'uno, non può sussistere nessuna delle ipotesi che conducono ad uno dei due casi non verificati. Si invertono così immediatamente le tre proposizioni espresse dal quadro precedente.

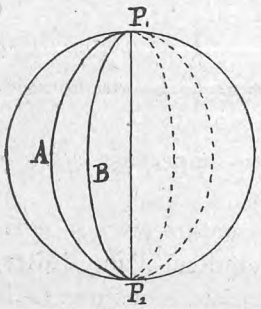
Figure sferiche.

759. Abbiamo visto che su di una superficie sferica esistono infinite circonferenze, sezioni di essa con piani, che distano dal centro meno del raggio (n. 744). Ogni circonferenza di una superficie sferica la divide in *due parti*, che cadono da bande opposte rispetto al piano della circonferenza. Nel caso di una circonferenza massima, codeste due parti si dicono *superficie emisferiche*. La circonferenza si riguarda come comune alle due parti (opposte rispetto ad essa sulla sferà) e si dirà anche che la circonferenza *limita* ciascuna delle due parti.

Per due punti A, B di una superficie sferica di centro O, i quali non siano *opposti* sulla sfera, cioè non siano gli estremi di un medesimo diametro, passa un solo piano diametrale, e quindi una sola circonferenza massima, divisa dai punti A, B in due archi, ciascuno dei quali si dice il *prolungamento* dell'altro.

Due circonferenze massime si segano in due punti opposti sulla sfera, estremi del diametro comune ai due piani diametrali che contengono le date circonferenze massime (n. 732).

760. Su di una superficie sferica consideriamo due semicirconferenze massime P_1AP_2, P_1BP_2 comprese fra i due medesimi punti opposti P_1, P_2.

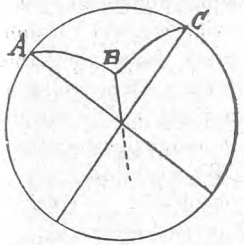


Combinando per interferenza la superficie emisferica limitata dalla circonferenza massima BP_1P_2 e contenente P_1AP_2, e la superficie emisferica limitata da AP_1P_2 e contenente P_1BP_2, otteniamo una parte di sfera che dicesi *fuso sferico* di *vertici* P_1,P_2 e di *lati* P_1AP_2, P_1BP_2.

Combinando per riunione le superficie emisferiche opposte a quelle dianzi considerate, si ottiene la parte di sfera rimanente. Anch'essa si chiama fuso sferico: solo a distinguerlo dal primo questo si può dire *concavo* (in quanto contiene i prolungamenti dei lati).

In ogni caso si dice *angolo* del fuso l'angolo delle due tangenti in P_1 (o in P_2) ai due lati, il quale è manifestamente uguale alla sezione normale del diedro dei due semipiani limitati dalla retta P_1P_2 e contenenti le due semicirconferenze date (nn. 199, 639).

Infine su di una medesima sfera o su sfere uguali, due fusi si dicono *uguali* se hanno angoli uguali, cioè se corrispondono a diedri uguali.



761. Presi su di una superficie sferica tre punti A, B, C non appartenenti ad una medesima circonferenza massima, dicesi triangolo sferico ABC di *vertici* A, B, C la figura che si ottiene combinando per interferenza le tre superficie emisferiche limitate, dalle circonferenze massime degli archi AB, BC, CA e contenenti rispettivamente i vertici, A, B, C.

Combinando invece per riunione le tre superficie emisferiche opposte a quelle considerate dianzi, si ottiene la parte rimanente della sfera e che pur essa si dirà triangolo sferico ABC; solo a distinguerlo pel primo (che si può dire *convesso*) si può designare col nome di *concavo* (in quanto contiene i prolungamenti dei lati).

Del triangolo ABC diconsi *lati* gli archi AB, BC, CA ed *angoli* gli angoli formati in ciascun vertice delle due tangenti ai lati concorrenti in esso.

762. Le tre semirette che proiettano dal centro O della sfera i vertici di un triangolo sferico A, B, C, definiscono un triedro che dicesi *triedro al centro* corrispondente al triangolo. Il triedro polare di questo triedro sega sulla sfera un triangolo che dicesi *polare* del primitivo.

È manifesto che la relazione fra un triangolo sferico e il suo polare è reciproca (n. 692).

763. Chiamansi *uguali* due triangoli sferici appartenenti a sfere uguali o alla medesima sfera e aventi ordinatamente uguali i lati e gli angoli.

Si dimostra facilmente che a triangoli uguali corrispondono triedri al centro uguali e viceversa, onde risulta che ad

ogni criterio di uguaglianza dei triedri corrisponde un criterio di uguaglianza pei triangoli sferici.

764. Analogamente ai triangoli, di cui abbiamo dato un cenno, si possono considerare *poligoni sferici* aventi come lati archi di circonferenza massima, i quali siano segati sulla sfera da angoloidi aventi il vertice nel centro della sfera. Si estendono ad essi in modo naturale il concetto di *poligono polare* e quello di uguaglianza.

765. Nota. — Si avrebbe una estensione delle figure accennate dianzi, considerando poligoni sferici concavi, sezioni colla superficie sferica di angoloidi al centro della medesima specie; e infine si potrebbero considerare sulla sfera poligoni aventi come lati archi di circonferenze minori e che in un certo senso dovrebbero riguardarsi come analoghi, sulla sfera, ai poligoni a lati circolari del piano (n. 239 e segg.).

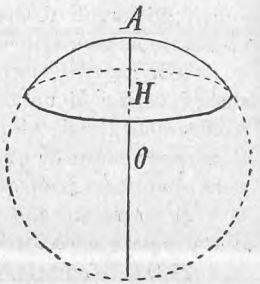
766. Nota. — Si possono ancora considerare poliedri a facce sferiche o a facce in parte piane e in parte sferiche.

Definiamo in via di esempio lo *spicchio sferico* e il *segmento sferico ad una base.*

a) Dicesi *spicchio sferico* la figura che si ottiene combinando per interferenza una sfera con un diedro il cui asse passi pel centro.

La superficie dello spicchio è data dall'insieme del fuso sferico corrispondente al diedro considerato e dei due semicerchi segati dalle facce del diedro sulla sfera.

Diconsi *uguali* due spicchi sferici della stessa sfera o di sfere uguali, compresi da diedri uguali.



b) Data una sfera, e un piano che la seghi, dicesi *segmento sferico ad una base* ciascuna delle due parti in cui la sfera è divisa dal piano.

Se il piano segante passa pel centro, ciascuno dei due segmenti dicesi più precisamente *emisfero*. Chiamasi poi *calotta sferica* ciascuna delle due parti in cui il piano divide la superficie sferica.

Il cerchio sezione della sfera col piano si dice *base* del segmento sferico e, innalzata nel centro H della base la perpendicolare, la distanza HA di H dalla ulteriore intersezione colla calotta, si dice *altezza* del segmento o della calotta.

La superficie di un segmento sferico è data da un cerchio e da una calotta.

Diconsi *uguali* due calotte o due segmenti appartenenti a sfere uguali o alla stessa sfera ed aventi uguali altezze.

In particolare avremo che sono uguali due superficie emisferiche o due emisferi di ugual raggio.

c) In generale, considerato un qualsiasi poliedro a faccie sferiche o a faccie in parte piane e in parte sferiche, si può dimostrare che esso divide lo spazio in *due parti*, caratterizzate dalle proprietà analoghe a quelle enunciate pei poligoni a contorno curvilineo o misto (n. 241), e *limitate* dalla *superficie* del poliedro. Il poliedro si può definire combinando per interferenza o per riunione le parti di spazio relative alle sfere (o ai piani) delle facce, in modo analogo a ciò che abbiamo visto nel piano per la superficie dei poligoni curvilinei (n. 240). Noi non ci tratterremo su di ciò, ma ci limiteremo a notare che preso un punto O interno ad un poliedro a facce sferiche, si può costruire un segmento r che sia minore della distanza di O da un punto qualsiasi della superficie. Ciò si riconosce in base alla proposizione del n. 737. Allora la sfera di centro O e di raggio r è tutta interna al poliedro, e tale, a più forte ragione, è ogni poliedro contenuto nella sfera.

ESERCIZI

1. I quattro piani di un tetraedro dividono lo spazio in otto parti, per modo che congiungendo due punti fuori di essi, appartenenti alla medesima parte, si ha un segmento che non sega alcuno dei quattro piani; invece congiungendo due punti, fuori di essi, appartenenti a parti diverse, si ha un segmento che sega uno almeno dei piani suddetti.

2. Delle otto parti in cui lo spazio è diviso dai piani di un tetraedro, quante al più, possono essere attraversate da una retta?

3. Date due rette sghembe, per un punto fuori di esse passa una retta incidente ad ambedue.

4. Se più rette a due a due s'incontrano e non giacciono in uno stesso piano, esse passano per un medesimo punto e viceversa.

5. Luogo dei punti equidistanti da due punti dati.

6. Luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono disuguali in un certo senso.

7. Luogo dei punti equidistanti da due rette secantisi.

8. Luogo dei punti equidistanti dalle tre rette di un triedro.

9. Luogo dei punti le cui distanze da due rette secantisi, o dai tre spigoli di un triedro, sono disuguali in un senso fissato.

10. Luogo dei punti equidistanti da due piani secantisi.

11. Luogo dei punti equidistanti dai tre piani di un triedro.

12. Luogo dei punti le cui distanze da due piani secantisi, oppure dai tre piani di un triedro, sono disuguali in un senso assegnato.

13. In un tetraedro, i sei piani bisettori dei diedri passano per un punto, interno al tetraedro, che è centro di una sfera (*iscritta*) tangente alle sue faccie.

Alla definizione di punti simmetrici già data relativamente ad un punto o ad una retta (v. pag. 72), e che qui intendiamo estesa allo spazio, aggiungiamo la seguente

Def. — Due punti si dicono *simmetrici* rispetto ad un piano se appartengono ad una medesima perpendicolare a codesto piano e se sono equidistanti da esso. Due figure, i cui punti sieno a coppie simmetrici rispetto ad un piano, diconsi *simmetriche* rispetto a questo.

14. La figura simmetrica di un tetraedro rispetto ad un punto, ad una retta o ad un piano, è un tetraedro uguale al dato.

15. Decidere relativamente alle simmetrie accennate, quando si abbia uguaglianza diretta o inversa.

16. Se due figure F, F'' sono simmetriche di una medesima figura F', rispetto a due piani perpendicolari, esse sono simmetriche l'una dell'altra rispetto alla retta intersezione dei due piani.

17. Si hanno tre piani α, β, γ, a due a due perpendicolari; e di una figura F si costruisce la simmetrica F' rispetto ad α, quindi si costruisce la simmetrica F'' di F' rispetto a β, e la simmetrica F''' di F'' rispetto a γ; le due figure F, F''' risultano simmetriche una dell'altra rispetto al punto comune ai tre piani α, β, γ. [Cfr. es. 20, pag. 74].

18. Dati fuori di un piano α e da una parte di esso due punti P, Q, si determini, sul piano α un punto X, tale che le due semirette XP, XQ formino colla perpendicolare in X al piano, due angoli uguali (*angolo d'incidenza e angolo di riflessione*). [Cfr. es. 21, pag. 72].

19. Dati entro un diedro $\widehat{\alpha\beta}$ due punti P, Q, si determinino su α, β due punti X, Y, per modo che gli angoli di incidenza e di riflessione formati da XP, XY con α siano uguali fra loro e così gli angoli formati da XY, YA con β siano pure uguali fra loro. [Cfr. es. 22 pag. 73].

20. Si risolva il problema analogo al precedente per due punti interni ad un triedro o ad un tetraedro.

21. Dati due punti P, Q fuori di un piano α e da una parte di esso, determinare su α il punto X per cui la somma delle distanze PX + XQ riesca minima. [Cfr. es. 29, pag. 74].

22. Dati due punti P, Q entro un diedro $\widehat{\alpha\beta}$ determinare sui due piani i punti X, Y per modo che la somma dei segmenti PX + XY + XQ riesca minima.

23. Si risolva il problema analogo al precedente per due punti interni ad un triedro o ad un tetraedro.

24. Dati un triedro e un diedro uguale ad uno dei diedri di esso, si può costruire entro codesto diedro e con un determinato raggio della sua costola come spigolo, un tiedro uguale al triedro dato.

25. Dati un triedro e un angolo uguale ad una delle facce di esso, si può costruire sopra codesto angolo come faccia e da una banda prefissata rispetto al piano di essa, un triedro uguale al triedro dato.

26. Se un triedro ha due facce uguali, ha uguali i diedri opposti alle facce uguali, e, se ha due diedri uguali, ha uguali le facce opposte ai diedri uguali.

27. Se due triedri hanno ordinatamente uguali due faccie e il diedro opposto alla prima, e se di più in entrambe il diedro opposto alla seconda è ugualmente acuto, retto o ottuso, essi hanno uguali la rimanente faccia e i rimanenti diedri e sono uguali. [Cfr. es. 17, pag. 72].

28. Costruire un triedro di cui le facce sieno uguali rispettivamente a tre angoli dati, la cui somma sia minore di quattro retti e ciascuno dei quali sia minore della somma degli altri due. [Posti in un piano α tre angoli consecutivi uguali ai dati $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, si taglino i loro lati in A, B, C, D con una circonferenza di centro O. Dai punti A e D si tirino le corde AE, DF perpendicolari rispettivamente ai raggi OB, OC. Si provi che le corde AE, DF si tagliano in un punto G. Condotta infine per G la perpendicolare h al piano α, nel piano determinato da questa e dal punto O, si tagli h colla circonferenza di centro O e raggio OA. Detto H uno dei punti d'intersezione, il triedro $\widehat{O}$ BCH risolve il problema]

29. Costruire un triedro i cui diedri siano uguali rispettivamente a tre diedri dati. — Discussione. — [Si riduca al precedente esercizio, considerando il triedro polare].

30. Data una faccia di un triedro equiangolo, si determini l'angolo che il piano di essa fa collo spigolo opposto. [Si conduca per questo spigolo il piano perpendicolare alla faccia, e sopra i tre spigoli del triedro si stacchino, a partire dal vertice, tre segmenti uguali....]

31. Due tetraedri sono uguali se hanno ordinatamente uguali tre spigoli uscenti da un vertice e gli angoli da essi compresi.

32. Due tetraedri sono uguali se hanno ordinatamente uguali i tre spigoli di una faccia e i tre diedri cui essa appartiene.

33. Due tetraedri, aventi gli spigoli ordinatamente uguali sono uguali.

34. Un tetraedro equispigolo ha uguali tutti gli angoli e i diedri (*è regolare*).

35. Costruire la sfera (*circoscritta*) che passa pei vertici di un tetraedro regolare, e determinare il raggio, dato il lato del tetraedro.

36. Costruire l'angolo sotto cui si vede un lato del tetraedro regolare dal centro della sfera circoscritta (eserc. 30).

37. Se in un tetraedro sono uguali due facce, ed in esse sono uguali gli angoli che hanno i medesimi vertici:

a) lo spigolo comune alle suddette faccie è ortogonale al suo opposto:

b) le altezze corrispondenti alle due facce stesse sono uguali.

38. Teoroma di Eulero. — In un qualunque poliedro, il numero delle facce, aumentato dal numero di vertici, supera di due il numero degli spigoli. [Per fissare l'attenzione pel caso delle piramidi, togliendo successivamente i piani delle due facce].

39. Dato il poligono base di una piramide, l'altezza e il

piede di questa, determinare gli spigoli della piramide e gli angoli del vertice.

40. Coi medesimi dati, determinare i diedri della piramide, costruendo per ciascuno di essi un angolo uguale al rispettivo angolo rettilineo.

41. Un lato di un triangolo sferico è minore della somma degli altri due.

42. Il perimetro di un triangolo sferico è minore di una circonferenza massima.

43. In ogni triangolo sferico la somma degli angoli è maggiore di due retti ed è minore di sei retti (cfr. es. 25).

La differenza fra la somma degli angoli di un triangolo sferico e due retti dicesi *eccesso* del triangolo.

44. Se due lati di un triangolo sferico sono uguali, anche gli angoli opposti sono uguali e viceversa.

45. Due triangoli sferici sono uguali se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso, oppure due angoli e il lato ad essi comune.

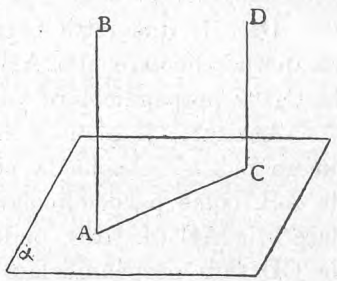
46. Due triangoli sferici sono uguali se hanno ordinatamente uguali i lati oppure gli angoli.

XII.

RETTE E PIANI PARALLELI - PRISMI.

Rette parallele.

767. Ricordiamo che si sono definite come *parallele* due rette appartenenti al medesimo piano e non aventi nessun punto comune (n. 250). E richiamiamo il postulato secondo il quale, dati in un piano un punto e una retta non passante per esso, esiste pel punto nel piano una sola parallela alla retta data (n. 258). Poichè vi è un solo piano che contiene una retta ed un punto fuori di essa (n. 9), possiamo concludere che quel postulato vale anche nello spazio, cioè data una retta ed un punto fuori di essa, esiste una sola parallela pel punto alla retta data.



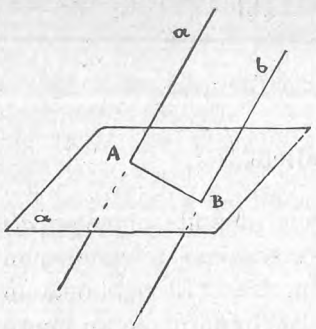
Ed ora passiamo a stabilire nuove proprietà concernenti le rette parallele nello spazio.

768. Teor. — *Due rette perpendicolari ad un piano sono parallele.*

Se le rette AB, CD sono perpendicolari al piano α in A, C rispettivamente, esse giacciono nel piano perpendicolare secondo AC ad α (nn. 668, 672); e

d'altra parte non si incontrano perchè sono perpendicolari alla intersezione AC dei due piani (n. 255).

769. Teor. — *Se un piano interseca una retta interseca anche ogni parallela alla data.*



Date le due rette parallele a, b, se un piano α interseca la a in un punto A, il piano ab, distinto da α e avente comune con esso il punto A, lo segherà secondo una retta (n. 620), che intersecherà anche la b in un punto B (n. 261), il quale sarà comune alla b e ad α.

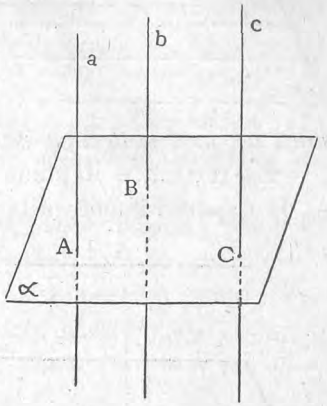
770. Teor. — *Date due rette parallele, ogni piano perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra.*

Date le due rette parallele AB, CD il piano α sia perpendicolare alla AB in A. Diciamo che anche la CD è perpendicolare ad α (vedi fig. alla pag. prec.).

Anzitutto il piano α incontrando la AB, incontrerà in un punto C anche la parallela CD (n. prec.). Ma la AB, come perpendicolare al piano α, è perpendicolare alla AC (n. 626), onde risulta (n. 264) che anche la CD sarà perpendicolare alla AC. Abbiamo allora che la retta CD giacente nel piano BAC, perpendicolare ad α (n. 668), è perpendicolare alla intersezione di codesto piano con α e perciò (n. 669) è anche perpendicolare al piano α.

771. Abbiamo dimostrato al n. 260 che nel piano due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro. Il teorema precedente ci permette di estendere codesta proposizione a tre rette non giacenti in uno stesso piano. Abbiamo cioè in tutta la sua generalità la seguente proposizione:

Cor. — *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.*



Invero, se le rette b e c sono parallele ciascuna alla a, il piano α condotto per un punto qualsiasi A della a perpendicolarmente ad essa, sarà perpendicolare tanto alla b quanto alla c (n. prec.); onde si conclude che queste due ultime rette, come perpendicolari ad uno stesso piano α, sono parallele (n. 768).

Retta e piani paralleli.

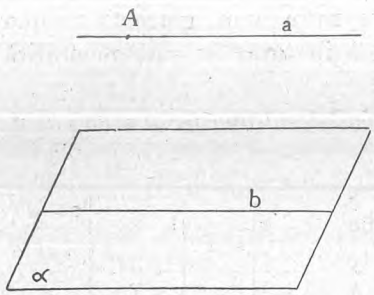
772. Def. — Un piano ed una retta non aventi nessun punto comune si dicono *paralleli* fra loro.

Se una retta è parallela ad un piano, essa giace tutta da una stessa banda rispetto ad esso (n. 617).

773. L'esistenza di rette e piani paralleli è provata dal seguente

Teor. — *Una retta passante per un punto esterno ad un piano e parallela ad una retta di esso è parallela al piano.*

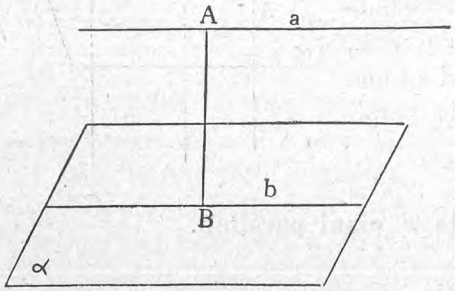
Se la retta a passante pel punto A esterno al piano α, è parallela alla retta b di α, il piano Ab distinto da α e contenente la a, ha comune con α la



retta *b*, la quale non ha con la *a* nessun punto comune; onde risulta che *a* e α non hanno nessun punto comune cioè sono paralleli.

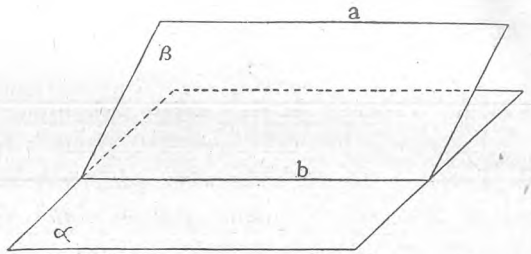
774. Cor. — *Una retta ed un piano perpendicolari in punti distinti ad una medesima retta sono paralleli.*

La retta *a* e il piano α siano perpendicolari in A, B rispettivamente alla retta AB. Il piano B*a* avente comune con α il punto B, lo intersecherà secondo una retta *b*, perpendicolare alla AB (nn. 620, 626) e quindi (n. 255) parallela alla *a*. Se ne conclude (n. prec.) che la *a*, parallela alla retta *b* di α è parallela al piano α (n. prec.).



775. Teor. — *Data una retta parallela ad un piano, l'intersezione di questo con un piano passante per la retta data è parallela ad essa.*

Se infatti la retta *a* è parallela al piano α, e il piano β per *a* interseca α secondo la retta *b*, questa non può avere nessun punto comune con la *a*, altrimenti la *a* incontrerebbe, contro l'ipotesi, il piano α. Se ne conclude che la *b* è parallela alla *a*.

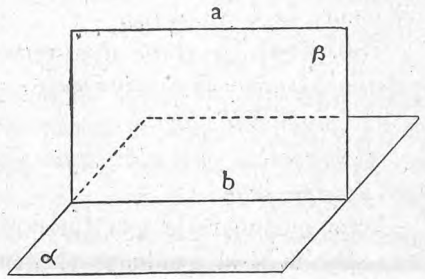


776. Cor. — *Se un piano è parallelo ad una retta, esso contiene la parallela alla retta data, condotta per un qualsiasi suo punto.*

Infatti l'intersezione del piano dato col piano che da quel suo punto va alla retta data è parallela a questa (n. prec.), e d'altra parte per un punto passa una sola parallela ad una retta data (n. 767).

777. Cor. — *I punti di una retta parallela ad un piano sono equidistanti da esso.*

Data infatti la retta *a* parallela al piano α, per abbassare le perpendicolari dai punti di *a* su α, basta (n. 673) condurre per *a* il piano β perpendicolare ad α e quindi abbassare in β da ciascun punto di *a* la perpendicolare alla intersezione *b* di α e β. Ma questa retta *b* è, pel teorema precedente, parallela alla *a*, ed ha quindi tutti i suoi punti equidistanti da *a* (n. 294); onde si conclude che i punti di *a* sono equidistanti da α.



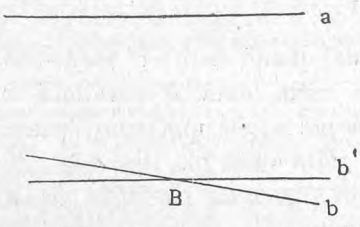
778. Def. — Data una retta parallela ad un piano,

la distanza di un punto qualsiasi della retta dal piano dicesi *distanza* della retta dal piano.

Minima distanza di due rette sghembe.

779. Teor. — *Se due rette sono sghembe* (cioè non giacciono in uno stesso piano) *per ciascuna di esse passa un piano ed uno solo parallelo all'altra.*

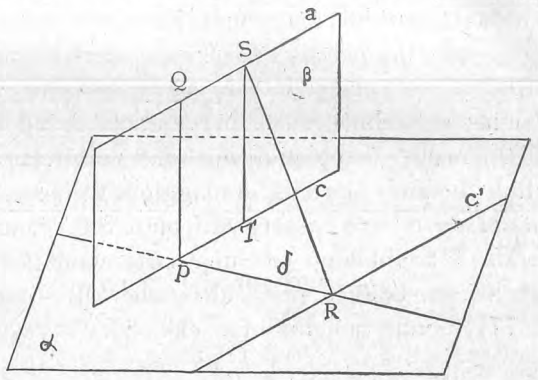
Se a e b sono due rette non giacenti in un piano, si conduca per un qualsiasi punto B di b la parallela b' alla a. Allora il piano determinato dalla b e dalla b' non può contenere la a, perchè altrimenti le rette a, b giacerebbero in un piano; e perciò il piano bb' è parallelo alla a (n. 773). E d'altra parte non può passare per b un altro piano parallelo alla a, perchè un piano per b, il quale sia parallelo ad a, contiene necessariamente la b' (n. 776).



780. Teor. — *Date due rette sghembe, esiste un segmento ed uno solo congiungente un punto dell'una retta con un punto dell'altra e perpendicolare ad entrambe. Esso è minore di ogni altro segmento avente i due estremi sopra le due rette.*

Date le due rette a e d non giacenti in uno stesso piano, per la d si conduca il piano α parallelo alla a (n. prec.), e per la a si conduca il piano β perpendicolare ad α (n. 672). La intersezione c dei piani α e β, parallela alla a (n. 775), intersecherà la d in un punto P, perchè se la d fosse parallela alla c, sarebbe

contro l'ipotesi parallela anche alla a (n. 771). Con-



dotta allora in β da P la retta PQ perpendicolare alla a, diciamo che essa è perpendicolare alla d, e che non esiste altra retta che incontri le rette a e d e sia perpendicolare ad entrambe.

Anzitutto PQ, perpendicolare per costruzione alla a, è anche perpendicolare alla parallela c (n. 264) e, poichè questa è l'intersezione del piano α col piano perpendicolare β, cui appartiene la PQ, ricaviamo che la PQ è perpendicolare al piano α (n. 669) e quindi anche alla retta d (n. 626).

In secondo luogo ogni altra retta congiungente un punto di a con un punto di d non può essere perpendicolare alle a e d. Ciò è senz'altro manifesto, se si tratta di rette passanti per P o per Q, perchè per uno stesso punto non passano due perpendicolari alla stessa retta (n. 110). E se la RS fosse perpendicolare alle a, d, l'intersezione c' del piano RSQ col piano α parallelo alla a sarebbe parallela a codesta retta a (n. 775), e quindi perpendicolare alla SR. Ne risulta che la SR, perpendicolare alla d e alla c', sarebbe

perpendicolare al piano α (n. 626) e quindi che anche il piano RSQ sarebbe perpendicolare ad α (n. 668). Ma ciò è assurdo, perchè se insieme con β anche il piano RSQ fosse perpendicolare ad α, la retta a loro intersezione, dovrebbe essere perpendicolare ad α (numero 670), mentre sappiamo che a è parallela ad α.

Infine diciamo cha SR, è maggiore di QP. Abbassata infatti da S su α la perpendicolare ST, certamente distinta da SR, abbiamo per una parte cha SR è maggiore di ST (n. 632), e per l'altra che ST è uguale a QP (n. 777); onde concludiamo che SR è maggiore di QP.

781. Def. — Date due rette sghembe, dicesi *distanza* di esse il segmento della perpendicolare ad entrambe, compreso fra i due punti di intersezione.

Piani paralleli.

782. Dato un piano α, e condotte per un punto esterno due rette a, b parallele ad esso, il piano ab non può segare α, perchè altrimenti entrambe le rette a, b sarebbero parallele all'intersezione dei due piani ab e α (n. 775).

783. Def. — Due piani non aventi nessun punto comune si dicono *paralleli.*

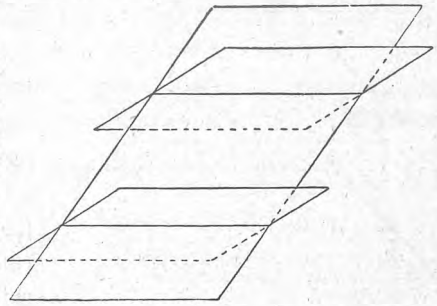
Se due piani α e β sono paralleli, ciascuno di essi giace tutto da una medesima parte rispetto all'altro (n. 617); essi perciò dividono lo spazio in tre parti: la parte rispetto ad α in cui non giace β, la parte rispetto a β, in cui non giace α, e la parte di spazio che giace simultaneamente dalla stessa parte di β rispetto ad α e dalla stessa parte di α rispetto a β,

costituita dai punti che si dicono *compresi* fra α e β.

Quest'ultima parte si dice *strato* limitato dai due piani α,β (*facce*). Esso si designa con « strato $\alpha\beta$ ».

784. Discendono dalla definizione di piani paralleli le seguenti conseguenze:

Cor. *Se due piani sono paralleli, tutte le rette dell'uno sono parallele all'altro.*

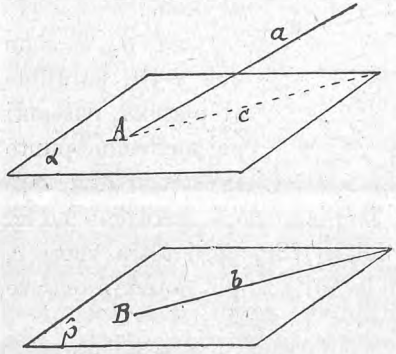


785. Cor. — *Se un piano sega due piani paralleli, le intersezioni sono parallele.*

Infatti codeste due intersezioni appartengono ad un medesimo piano e non hanno nessun punto comune.

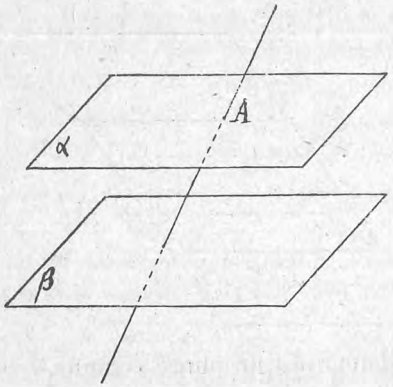
786. Teor. — *Se due piani sono paralleli, ogni retta parallela all'uno è parallela anche all'altro o giace su di esso.*

Dati invero i due piani paralleli α, β, e presa una retta a, parallela a β, questa retta o è parallela anche ad α, oppure incontra questo piano in un punto A almeno. In quest'ultimo caso essa deve giacere su α, perchè se così non fosse, il piano che dalla a va ad un punto arbitrario B di β, interserherebbe il pia-



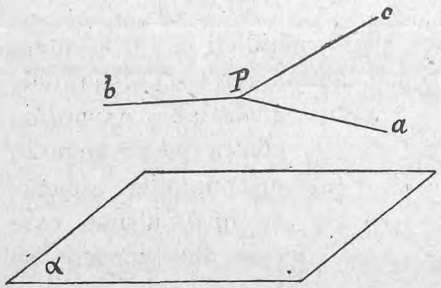
no β secondo una retta b e il piano α secondo una retta c, distinta da a e parallela alla b (n. prec.). Ma anche la a è parallela alla b; onde si avrebbe che pel medesimo punto A passano due diverse parallele alla stessa retta b, il che è assurdo (n. 767).

787. Cor. — *Se una retta interseca un piano, interseca anche ogni piano parallelo al primo.*



Una retta a, intersecante un piano α, incontra certamente ogni piano β parallelo ad α, perchè, pel numero prec. le rette parallele a β o sono parallele anche ad α o giacciono in esso.

788. Teor. — *Tutte le rette parallele ad un piano e passanti per un punto esterno ad esso, giacciono in un medesimo piano, parallelo al dato.*

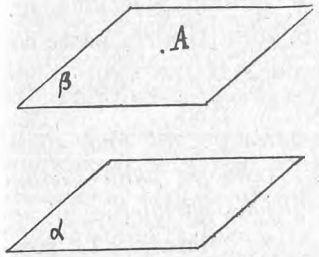


Se a, b sono due rette parallele al piano α, passanti pel medesimo punto P esterno ad α, sappiamo già (n. 782) che il piano ab è parallelo ad α. D'altra parte, in virtù del n. 786, ogni altra retta c, passante per P e parallela ad α, non potendo essere parallela al piano ab giacerà in esso.

789. Abbiamo già visto al n. 782 in qual modo, dati un piano e un punto fuori di esso, si possa mandare pel punto un piano parallelo al piano dato. Ora le proposizioni precedenti ci permettono di dimostrare l'unicità di un tale piano: abbiamo, cioè, il seguente

Teor. — *Per un punto fuori di un piano passa un solo piano parallelo al dato.*

Dati un piano α e un punto A fuori di esso, sappiamo (n. prec.) che tutte le rette parallele ad α passanti per A giacciono in un medesimo punto β parallelo ad α. E non può passare per A un secondo piano γ, pur esso parallelo ad α, perchè, se questo esistesse, tutte le sue rette per A dovrebbero essere parallele ad α, mentre una sola di esse può essere tale, cioè la intersezione di γ e β.



790. Cor. — *Se due piani sono paralleli, ogni piano parallelo all'uno è parallelo anche all'altro.*

Altrimenti per uno stesso punto passerebbero due piani paralleli ad un medesimo piano.

791. Nota. — Si può enunciare la precedente proposizione anche dicendo che *se due piani sono paralleli, ogni piano che seghi l'uno sega anche l'altro.*

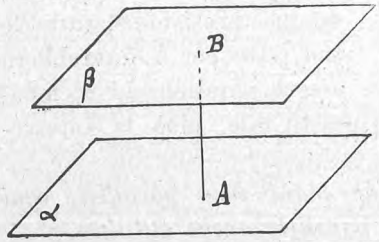
792. Cor. — *Se due piani sono paralleli a due piani secantisi, essi pure si segano e le due intersezioni sono parallele.*

Se α e β sono due piani secantisi e α', β' sono rispettivamente paralleli ad essi, anche α' e β' si segano, perchè se fossero paralleli sarebbero tali pel n. prec. anche α e β contro l'ipotesi.

Inoltre la retta $\alpha'\beta'$ è parallela alla $\alpha\beta$. Infatti ciascuno dei piani α', β' è parallelo alla $\alpha\beta$ (n. 715); onde risulta che la $\alpha'\beta'$ non può essere nè sghemba alla $\alpha\beta$, perchè in tal caso, pel n. 779 non potrebbe passare per essa che un solo piano parallelo alla $\alpha\beta$, nè incidente, giacchè allora per essa non passerebbe nessun piano parallelo alla $\alpha\beta$.

793. Se la retta AB è perpendicolare in A al piano α, sappiamo già che tutte le perpendicolari in B ad AB sono parallele ad α (n. 774), e quindi giacciono nel piano parallelo per B ad α, (n. 788). D'altra parte codesto piano è perpendicolare ad AB (n. 626), onde concludiamo che sussiste il

Teor. — *Due piani perpendicolari ad una stessa retta in punti distinti sono paralleli.*



Nota. — Lo stesso teorema si potrebbe dimostrare per assurdo, ricordando che per un punto fuori di una retta passa un solo piano perpendicolare ad essa (numero 627).

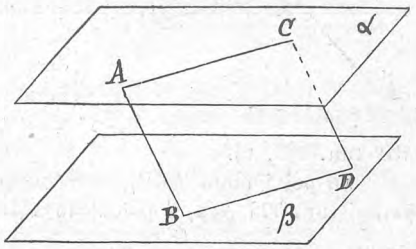
794. Cor. — *Se una retta è perpendicolare ad un piano, è pure perpendicolare ad ogni piano parallelo al primo.*

Se la AB è perpendicolare in A al piano α, incontrerà in un punto B il piano β parallelo ad α (numero 787); e poichè il piano perpendicolare in B ad AB è parallelo ad α (n. prec.), e per un punto passa un solo piano parallelo ad un piano dato (num. 789), concludiamo che il piano β e la retta AB sono perpendicolari.

Distanza di due piani paralleli.

795. Teor. — *Segmenti paralleli compresi fra piani paralleli sono uguali.*

I segmenti paralleli AB, CD siano compresi fra i piani paralleli α, β. Il piano di essi interseca i due piani α, β secondo le due rette AC, BD parallele (numero 785): onde il quadrangolo ABCD che così si ottiene è un parallelogramma ed è (numero 278, 4) AB = CD.



796. Cor. — *Se un piano è parallelo ad un altro, tutti i punti dell'uno hanno uguale distanza dall'altro.*

Infatti le perpendicolari abbassate da α su β sono parallele (n. 768, n. prec.).

797. Ogni perpendicolare al piano β è perpendicolare anche ad α, cosicchè la distanza dei punti di α da β è uguale alla distanza dei punti di β da α.

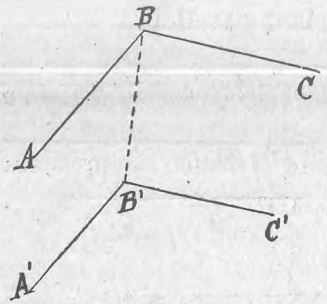
Codesta distanza dicesi *distanza dei due piani* o anche *altezza dello strato.*

Due strati si dicono *uguali* se hanno uguale altezza.

Angoli con lati paralleli.

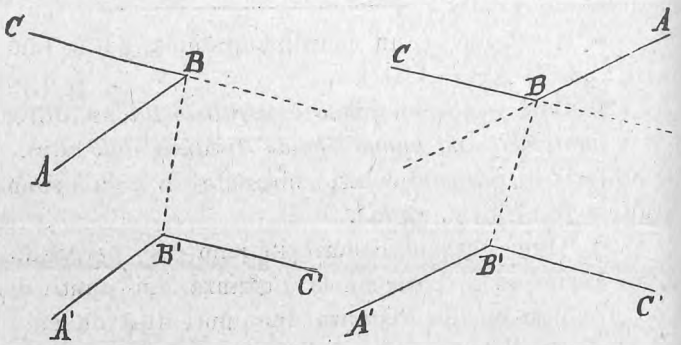
798. Teor. — *Se due angoli hanno i lati paralleli, essi sono uguali o supplementari.*

I due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ abbiano i lati AB, A'B' e BC B'C' paralleli. Diciamo che essi sono uguali o supplementari.



Si congiunga B con B'. Se i piani ABC, A'B'C' coincidono, è manifesto dalle unite figure che l'angolo $\widehat{ABC}$ o il suo opposto al vertice o uno dei suoi due adiacenti è uguale ad $\widehat{A'B'C'}$, perchè è uguale alla somma di due angoli uguali rispettivamente a quelli in cui $\widehat{A'B'C'}$ è diviso dal prolungamento di BB' (nn. 263, 2).

Se poi i piani ABC, A'B'C' sono distinti, essi sono paralleli (nn. 773, 782) e poichè le rette BA, BC giacciono in



uno stesso piano con le B'A', B'C' rispettivamente, abbiamo che i diedri $\widehat{ABB'C}$, $\widehat{A'B'BC'}$ o coincidono o sono opposti allo spigolo o sono supplementari.

Se codesti due diedri coincidono, gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono uguali, come sezioni di uno stesso diedro, ugualmente inclinate sullo spigolo (n. 681).

Se i due diedri $\widehat{ABB'C}$, $\widehat{A'B'BC'}$ sono opposti allo spigolo o supplementari, basta confrontare l'uno di essi coll'opposto allo spigolo o col supplementare dell'altro, per concludere che $\widehat{ABC}$ è rispettivamente uguale o supplementare ad $\widehat{A'B'C'}$.

799. Nota. — È manifesto che i due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ del teorema prec. sono uguali, se le semirette BA e B'A', BC e B'C' cadono insieme (nei rispettivi piani) dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alla retta BB' dei vertici: sono supplementari, se le semirette di una sola di codeste coppie cadono da parti opposte rispetto alla stessa retta.

800. Date due rette sghembe si conducano per un medesimo punto O le parallele ad esse. Dicesi *angolo delle due rette* date l'angolo (non ottuso) formato da codeste due parallele. Il teorema dimostrato dianzi ci assicura che *codesto angolo non cambia quando si cambia il punto* O.

Se la definizione or ora enunciata si applica a due rette aventi un punto comune, riotteniamo l'angolo delle due rette quale fu definito da principio. Se poi le due rette sono parallele, le due rette per O coincidono: perciò si dice che due rette parallele formano fra loro un angolo nullo.

801. Dal teorema del n. 798 si deduce il seguente

Cor. — *Diedri con facce parallele sono uguali o supplementari.*

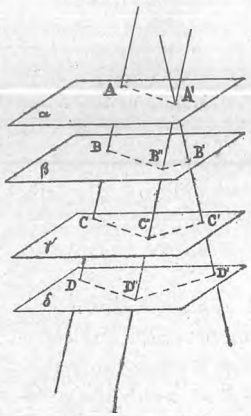
Se $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\gamma'\delta'}$ sono i due diedri, lo spigolo del primo è parallelo allo spigolo del secondo (n. 792). Se allora si conduce un piano perpendicolare allo spigolo di $\widehat{\alpha'\beta'}$, esso sarà perpendicolare anche allo spigolo di $\widehat{\gamma'\delta'}$ (n. 770), ed in codesto piano le sezioni normali dei due diedri hanno i lati paralleli (n. 785) e sono perciò uguali o supplementari (n. 798).

Trasversali a più piani paralleli.

802. Se più piani paralleli sono segati da due (o più) trasversali, diconsi *corrispondenti* due segmenti di queste, i quali siano intercettati dai medesimi due piani. Sussiste allora il

Teor. — *Se più piani paralleli sono segati da due trasversali, a segmenti uguali dell'una corrispondono segmenti uguali dell'altra e a segmenti disuguali corrispondono segmenti disuguali nello stesso senso.*

I piani paralleli α, β, γ, δ siano segati da due trasversali rispettivamente nei punti A, B, C, D e A′, B′, C′, D′ e sia AB = CD. Diciamo che è anche A′B′ = C′D′.



Possiamo supporre che le due trasversali siano sghembe, perchè se giacessero in uno stesso piano, questo segherebbe i piani α, β, γ, δ secondo quattro rette AA′, BB′, CC′, DD′ parallele (n. 785) e si ricadrebbe nel caso considerato al n. 300.

Supposto dunque che le due trasversali siano sghembe, si conduca da A′ la parallela alla AD: codesta nuova trasversale segherà β, γ, δ in certi tre punti B″, C″, D″ rispettivamente e il piano delle due parallele segherà α, β, γ, δ secondo le quattro rette AA′, BB″, CC″, DD″, che saranno fra di loro parallele (n. 785). Così saranno parallele le rette B″B′, C″C′, D″D′, intersezioni di β, γ, δ col piano delle due rette A′D′, A′D″.

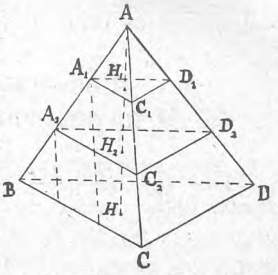
Applicando allora il teorema del n. 300 alle due rette AD, A′D″ giacenti in un piano e segate dalle parallele AA′, BB″, CC″, DD″, dedurremo dalla ipotesi AB = CD, che sarà anche A′B″ = C″D″. E di qui, applicando il medesimo teorema alle due rette A′D′, A′D″, deduciamo che è A′B′ = C′D′.

Se invece di AB = CD si avesse avuto per esempio AB > CD, collo stesso ragionamento se ne sarebbe dedotto che A′B″ > C″D″ e quindi che A′B′ > C′D′.

803. Notiamo il seguente corollario, di cui faremo uso nel seguito.

Cor. — *Se in un tetraedro si divide l'altezza in* n *parti uguali e pei punti di divisione si conducono i piani paralleli alla base, si ottengono* n − 1 *triangoli sezioni dell'angoloide al vertice, i cui lati sono, partendo dal vertice, uguali rispettivamente ad* $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ *dei lati paralleli del triangolo base.*

Dato il tetraedro ABCD, se ne divida l'altezza AH in *n* parti uguali AH_1, H_1H_2, ... (nella figura è $n = 3$) e siano $A_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$, . . . i triangoli sezioni dell'angoloide $\widehat{A}$ coi piani condotti pei punti H_1, H_2 . . parallelamente a BCD. Pel teorema precedente avremo che ciascuno degli spigoli AB, AC, AD rimane così diviso in *n* parti uguali.



Considerata allora una delle facce laterali del tetraedro, p. es., ABC, dai punti di divisione $A_1, A_2, \ldots$ del suo lato AB si conducano su di essa le parallele al lato AC fino ad incontrare il terzo lato BC. Avremo pel n. 302 che anche BC rimane diviso in *n* parti uguali e d'altra parte che A_1C_1 è uguale ad $\frac{1}{n}$ di BC (278, 2), A_2C_2 è uguale a $\frac{2}{n}$BC, ecc. Analoghe conclusioni si ottengono per le facce ACB e ADB, onde risulta veramente che i triangoli $A_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$, ... hanno i lati uguali rispettivamente ad $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ dei lati di BCD, che appartengono alla medesima faccia laterale del tetraedro.

804. Cor. — *Se in due tetraedri di basi uguali si dividono le altezze nel medesimo numero di parti uguali e pei punti di divisione si conducono in ciascun tetraedro i piani paralleli alla base rispettiva, le sezioni che così si ottengono dei due angoloidi al vertice, sono a partire dal vertice ordinatamente uguali.*

Infatti, pel n. prec., esse hanno a due a due i lati ordinatamente uguali (n. prec. e n. 90).

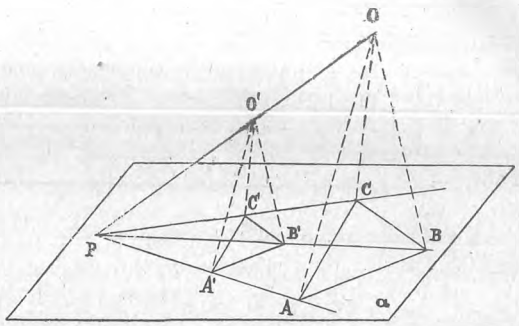
Dimostrazione stereometrica di un teorema di Geometria piana.

Ci proponiamo qui di accennare ad un esempio di applicazione della Geometria solida alla piana mostrando come, anche senza far uso della teoria dell'equivalenza e delle proporzioni, si possa stabilire il *teorema dei triangoli omotetici*, di cui abbiamo ripetutamente fatto cenno (es. 89 a pag. 222 ed es. 27 a pag. 287). Al quale teorema si riattacca la risoluzione elementare data dal DE PAOLIS del problema relativo al decagono regolare, che nella Geometria piana (nn. 400-403) abbiamo fatto dipendere dalla determinazione del segmento aureo.

Affinchè questa digressione non riesca soverchiamente prolissa, ci limiteremo a indicare le dimostrazioni per sommi capi, lasciando come esercizio all'alunno di svilupparne i particolari.

805. Teor. — *Se due triangoli* ABC, A′B′C′ *giacenti in uno stesso piano* α, *sono tali che i lati* AB, BC, CA *del primo siano ordinatamente paralleli ai lati* A′B′, B′C′, C′A′ *del secondo, le congiungenti* AA′, BB′, CC′ *dei vertici opposti o passano per un medesimo punto o sono parallele.*

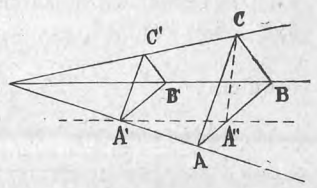
Da un punto O esterno al piano α dei due triangoli, si proiettino i tre lati di ABC e per A′B′, B′C′, C′A′, si conducano i piani rispettivamente paralleli ad OAB, OBC, OCA. I piani così costrutti come paralleli a tre piani aventi comune il punto O, si intersecheranno in un punto O′ (n. 792). Allora nei due triedri $\widehat{OABC}$, $\widehat{O'A'B'C'}$, aventi le facce ordinatamente parallele, gli spigoli omologhi, come intersezioni di piani a



due a due paralleli, sono paralleli (n. 792), e i piani determinati da essi AA′O′O, BB′O′O, CC′O′O, i quali segano α secondo le congiungenti dei vertici omologhi dei triangoli dati, hanno comune la retta OO′ congiungente i vertici dei due triedri. Se la OO′ incontra la α in un punto P, questo punto è comune alle rette AA′, BB′, CC′. Se poi la OO′ è parallela ad α, le AA′, BB′, CC′ sono parallele alla OO′ (n. 775) e quindi fra di loro (n. 771).

806. Teor. — *Se due triangoli* ABC, A′B′C′, *giacenti in uno stesso piano* α, *sono tali che le congiungenti i vertici* AA′, BB′, CC′, *passino per un medesimo punto* P *o siano parallele, e due lati* AB, BC *dell'uno siano rispettivamente paralleli a due lati* A′B′, B′C′ *dell'altro, anche il terzo lato* CA *del primo è parallelo al terzo lato* C′A′ *del secondo.*

Supponiamo che AA′, BB′, CC′, passino per un medesimo punto P.



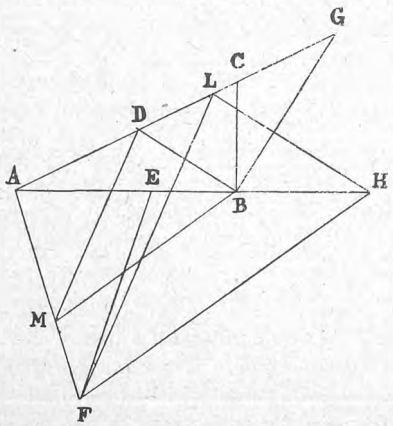
La parallela alla C′A′ per C incontrerà in un punto A″ il lato AB o il suo prolungamento; e, poichè i due triangoli A″BC, A′B′C′ soddisfano alle ipotesi del teorema precedente, la retta A′A″, che non può essere parallela ad entrambe le rette BB′, CC′ essendo queste secantisi, deve passare pel punto P comune ad esse, onde risulta che A″ coincide con A e il teorema è dimostrato.

In modo analogo si tratta il caso in cui le AA', BB' CC' siano parallele.

807. I due teoremi di Geometria piana (fra loro *inversi*), dimostrati nei due nn. prec., permettono, come dianzi abbiamo annunciato, di risolvere in un nuovo modo, e con mezzi più elementari il problema del n. 403; cioè il

Probl. — *Costruire l'angolo uguale alla quinta parte di due retti.*

È chiaro anzitutto (n. 266) che basterà per ciò costruire un triangolo isoscele, di cui ciascun angolo alla base sia uguale al doppio di quello al vertice: l'angolo al vertice sarà l'angolo cercato.



Costruito un qualsiasi triangolo rettangolo ABC, di cui il cateto AB sia doppio del cateto BC, si tagli da CA il segmento CD uguale a CB e da AB il segmento AE uguale ad AD, ed infine sulla base AE si costruisca il triangolo isoscele AEF di cui i lati uguali AF, EF siano uguali ad AB. Diciamo che l'angolo $\widehat{EFA}$ è uguale alla quinta parte di due retti.

Preso sul prolungamento di DC il segmento CG uguale a CD e quindi a CB, avremo che l'angolo $\widehat{GBD}$ è retto (n. 317), onde risulta

$$\widehat{GBC} = \widehat{DBA}$$

e quindi

$$\widehat{CGB} = \widehat{DBA}.$$

Costrutto allora entro l'angolo $\widehat{BAC}$ il triangolo ALH uguale ad ABG, sarà

$$\widehat{LHA} = \widehat{DBA}$$

e quindi le due rette LH, DB saranno parallele (n. 254).

Così, preso AM = AE, i triangoli isosceli MDA, FLA, aventi l'angolo al vertice comune, hanno gli angoli alla base uguali, onde anche le MD, FL saranno parallele (n. 254).

E allora dalla considerazione dei triangoli MBD, FHL risulta (n. prec.) che sono paralleli anche i lati MB, FH.

Ciò premesso, si considerino i due triangoli isosceli AEF, AFH. In essi gli angoli al vertice sono uguali entrambi ad $\widehat{ABM}$ (come risulta dall'uguaglianza di ABM, AEF e dal parallelismo di MB, FH). E d'altra parte, essendo isoscele anche il triangolo FHE sulla base FH (perchè si ha per una parte AG = AH, AD = AE, DG = EH e per l'altra DG = 2BC = AB, EH = AB = EF), si deduce che $\widehat{AHF}$ è uguale alla metà di $\widehat{AFH}$, e quindi nel triangolo isoscele AEF l'angolo alla base è doppio di quello al vertice: quindi l'angolo $\widehat{EFA}$ è veramente uguale alla quinta parte di due retti.

Nota. — La costruzione precedente ci fornisce subito la *costruzione del decagono regolare* (n. 403), essendo AE il lato del decagono iscritto nel cerchio di raggio AB. Al n. 404 si è notato che questo lato è uguale alla sezione aurea di AB. Possiamo quindi dire che si è data or ora una nuova costruzione della *sezione aurea* di un segmento dato.

Si ha qui nello stesso tempo anche una nuova costruzione del *pentagono regolare* di dato raggio.

Prisma indefinito.

808. Def. — Siano date nello spazio n rette parallele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tali che ciascuno dei piani a_1a_2, a_2a_3, . . ., $a_{n-1}a_n$, a_na_1 lasci le altre n—2 rette tutte da una stessa banda. La figura costituita dalle n rette (*spigoli*) e dalle n striscie a_1a_2, $a_2a_3, \ldots, a_na_1$ (*facce*) dicesi *superficie prismatica indefinita.*

I diedri $\widehat{a_1}$, $\widehat{a_2}$, . . ., $\widehat{a_n}$, sono tali che ogni punto appartenente ad n-1 di essi, appartiene anche al rimanente.

Dicesi *prisma indefinito* l'insieme dei punti comuni agli n diedri considerati.

Per $n = 3, 4, 5, \ldots$ il prisma si dice triangolare quadrangolare, pentagonale,.... rispettivamente.

I diedri $\widehat{a_1}, \widehat{a_2}, \ldots, \widehat{a_n}$ diconsi *diedri del prisma* e i $2n$ diedri adiacenti si designano col nome di *diedri esterni.*

Il prisma si designa con $a_1 a_2 \ldots a_n$.

I punti del prisma non appartenenti alla superficie del prisma diconsi *interni* ad esso; i punti non appartenenti al prisma si dicono *esterni.*

Le *due parti* in cui lo spazio rimane diviso dalla superficie prismatica sono caratterizzate dalle solite proprietà relative ai segmenti che hanno gli estremi nella medesima parte o in parti diverse.

809. Se un piano interseca uno spigolo di un prisma interseca anche gli altri (n. 769) ed è chiaro che la figura intersezione del prisma col piano è un poligono (convesso). Un tale poligono dicesi *sezione* del prisma.

Viceversa si dà origine ad un prisma, considerando un poligono e conducendo per i suoi vertici altrettante parallele, fuori del piano di esso.

810. Se un piano è perpendicolare ad uno spigolo di un prisma indefinito è perpendicolare anche agli altri (n. 770). La sezione del prisma che così si ottiene dicesi *sezione normale* del prisma indefinito.

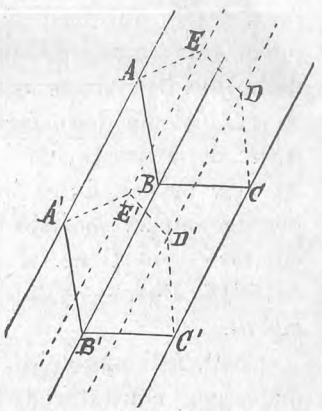
811. Considerando la sezione normale di un prima indefinito si ha il seguente

Teor. — *In un prisma indefinito ogni faccia è minore della somma delle altre* (n. 132).

812. Teor. — *La somma dei diedri di un prisma è uguale alla somma di tante volte due diedri retti quante sono le facce del prisma, diminuita di quattro diedri retti* (n. 271).

813. Teor. — *In uno stesso prisma indefinito sezioni parallele sono uguali.*

Infatti i lati delle due sezioni appartenenti ad una stessa faccia del prisma indefinito sono uguali come segmenti paralleli compresi fra rette parallele (numero 278,4), e gli angoli delle due sezioni compresi fra lati uguali sono uguali come sezioni ugualmente inclinate del medesimo diedro (numero 681).



814. Def. — Due prismi indefiniti si dicono *uguali*, se hanno ordinatamente uguali le facce e i diedri compresi fra le faccie uguali.

815. Cor. — *Se due prismi indefiniti sono uguali anche le loro sezioni normali sono uguali e riceversa.*

Nota. — Di qui risulta che ad ogni criterio di uguaglianza di poligoni corrisponde un criterio di uguaglianza dei prismi indefiniti.

Prisma finito.

816. Def. — La parte di un prisma indefinito compresa fra i piani di due sezioni parallele è un poliedro (n. 726), che dicesi *prisma finito* o semplicemente *prisma.*

Questo poliedro ha come facce i due poligoni sezioni (uguali fra loro) che diconsi *basi* e tanti paral-

lelogrammi appartenenti alle facce del prisma indefinito, che diconsi *facce laterali.*

I segmenti di spigoli del prisma indefinito compresi fra le due basi si dicono *spigoli laterali* o semplicemente *spigoli* del prisma; e la distanza dei piani delle due basi dicesi *altezza* del prisma.

L'insieme delle facce laterali si dice *superficie laterale* del prisma.

Un prisma finito dicesi triangolare, quadrangolare, pentagonale,.... secondo che tale è il prisma indefinito cui esso appartiene.

817. Cor. — *Gli spigoli laterali di un prisma sono uguali.*

818. Gli angoloidi di un prisma sono tutti triedri, onde per constatarne l'uguaglianza basta verificare l'uguaglianza degli angoli delle loro facce (n. 707). Abbiamo allora il seguente

Teor. — *Due prismi aventi le facce ordinatamente uguali sono uguali.*

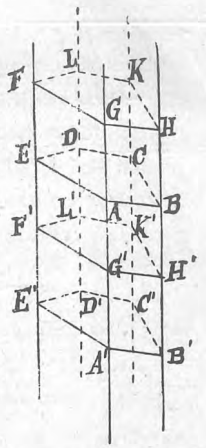
Infatti essi hanno uguali le facce e gli angoloidi, ciò che appunto è richiesto dalla definizione di uguaglianza di poliedri (n. 729).

819. Cor. — *Due prismi appartenenti al medesimo prisma indefinito e aventi gli spigoli laterali uguali e le basi parallele sono uguali.*

Siano i due prismi AB ..... KL, A′B′ ..... K′L′, appartenenti al medesimo prisma indefinito, aventi le basi parallele e gli spigoli laterali uguali. Diciamo che sono uguali.

Anzitutto le basi sono uguali come sezioni parallele di uno stesso prisma indefinito (n. 813). Di più le facce dei due prismi, appartenenti ad una stessa

faccia del prisma indefinito, sono uguali: per esempio ABHG, A′B′H′G′ sono uguali, perchè sono paparallelogrammi aventi uguali i lati AG, A′G′ per ipotesi, i lati AB, A′B′ come segmenti paralleli compresi fra rette parallele (n. 278, 2) e gli angoli compresi come corrispondenti rispetto alle parallele AB, A′B′ e alla trasversale AA′ (num. 263, 2).



820. Un prisma si dice *retto*, se le basi sono sezioni normali del prisma indefinito, di cui il prisma dato è parte.

Nel prisma retto l'altezza è uguale allo spigolo laterale.

821. Teor. — *Due prismi retti sono uguali, se hanno uguali le basi e le altezze.*

Infatti hanno le facce ordinatamente uguali.

Parallelepipedo.

822. Def. — Un prisma le cui basi siano parallelogrammi dicesi *parallelepipedo.*

Il parallelepipedo ha otto vertici, dodici spigoli e sei facce; ad ogni faccia ne sono *adiacenti* quattro. Due facce non adiacenti, cioè non aventi nessuno spigolo comune, si dicono *opposte.* Così diconsi *opposti* diedri o triedri compresi tra faccie ordinatamente opposte, e si dicono opposti spigoli di diedri opposti e vertici di triedri opposti.

I segmenti congiungenti due vertici opposti di-

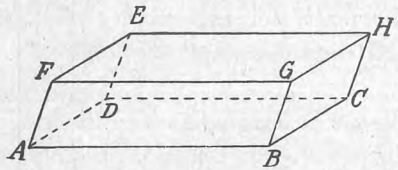
consi *diagonali* del parallelepipedo. Ogni parallelepipedo ha quattro diagonali.

823. Teor. — *Se in un prisma quadrangolare indefinito le facce non consecutive sono parallele, ogni prisma finito che gli appartenga è un parallelepipedo.*

Infatti ogni sezione del prisma considerato è un parallelogramma (n. 775).

824. Teor. — *Le facce opposte di un parallelepipedo sono parallele ed uguali.*

Il prisma quadrangolare ABCDEFGH, di base AC, sia un parallelepipedo, cioè il quadrangolo ABCD sia un parallelogramma.



Poichè le BC, BG sono parallele alle AD, AF rispettivamente, il piano della faccia BCHG sarà parallelo al piano della faccia ADEF (n. 773, 782) e l'angolo $\widehat{CBG}$ sarà uguale all'angolo $\widehat{DAF}$ (n. 681).

Allora si conclude che i due parallelogrammi ADEF e BCHG, aventi uguali due lati e l'angolo compreso, sono uguali (n. 280).

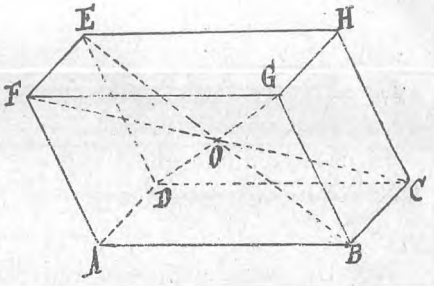
Nota. — Risulta dal teorema precedente che uno stesso parallelepipedo si può considerare come prisma in tre modi indifferenti, in quanto si possono assumere come basi due facce opposte qualsiansi.

825. Cor. — *Gli spigoli di un parallelepipedo sono a quattro a quattro paralleli ed uguali* (nn. 792, e 795).

826. Cor. — *Le quattro diagonali di un parallelepipedo passano per un punto che le divide tutte e quattro per metà.*

Del parallelepipedo ABCDEFGH si considerino due diagonali quali si vogliano, p. es., le BE, CF.

Poichè i segmenti BC, FE sono uguali e paralleli, il quadrangolo BCEF è un parallelogramma (n. 282) e le sue diagonali BE, CF si dimezzano in un punto O (n. 278,3). Così, considerata un'altra diagonale GD, questa giace in uno stesso piano con la BE e la dimezza, cioè passa per il medesimo punto O.



827. Cor. — *In ogni parallelepipedo sono uguali i diedri opposti e i triedri opposti.*

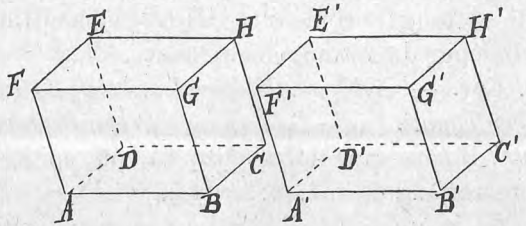
Infatti i diedri opposti hanno uguali due sezioni ugualmente inclinate sugli spigoli (n. 681) e i triedri opposti hanno ordinatamentente uguali le facce (n. 707).

828. Teor. — *Di due parallelepipedi si può conchiudere che sono uguali, se si sa che hanno ordinatamente uguali un triedro e i tre spigoli di esso.*

Nei due parallelepipedi ABC ... H, A′B′C′ .... H′ sia

$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$

$$AB = A'B',\ AD = A'D',\ AF = A'F'.$$



Diciamo che i due parallelepipedi sono uguali.

Le tre facce che hanno il vertice A comune sono

uguali ordinatamente alle tre facce che hanno il vertice comune A', perchè sono, a due a due, parallelogrammi aventi uguali un angolo e i due lati adiacenti (n. 280).

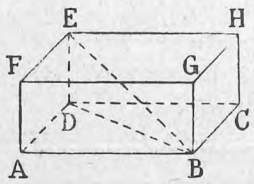
Le altre tre facce sono uguali, perchè facce opposte a facce uguali (n. 824).

Se ne conchiude che i due parallelepipedi, aventi le facce ordinatamente uguali sono uguali (n. 818).

829. Un parallelepipedo retto, le cui basi siano rettangoli, dicesi, *parallelepipedo rettangolo* od *ortogonale.*

Un parallelepipedo rettangolo si può considerare in tre modi differenti come prisma retto (n. 824).

Si può costruire un parallelepipedo rettangolo dati i tre lati concorrenti in un vertice, prendendo per un punto tre rette a due a due perpendicolari, tagliando su di esse, a partire dal punto comune tre segmenti uguali ai dati e conducendo per ciascun estremo il piano parallelo al piano delle altre due rette.



Il parallelepipedo così determinato dicesi « parallelepipedo rettangolo contenuto dai tre segmenti dati » o « parallelepipedo rettangolo di essi ».

830. Cor. — *Nel parallelepipedo rettangolo le diagonali sono uguali.*

Infatti il quadrangolo definito da due spigoli opposti è un rettangolo (nn. 282, 626).

831. Se in un parallelepipedo sono uguali tre spigoli concorrenti in un punto, sono uguali anche tutti gli altri spigoli (n. 825). Un parallelepipedo siffatto dicesi *romboedro.*

Dicesi poi *cubo* un parallelepipedo rettangolo avente tutti gli spigoli uguali.

Il cubo ha per facce sei quadrati uguali (numeri 287, 824).

Il cubo resta determinato quando ne è dato il lato; e il cubo costruito sopra un segmento dato come lato si dice « cubo di esso ».

Poliedri regolari.

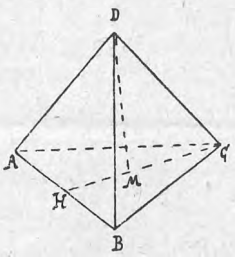
832. Def. — Un poliedro (convesso) che ha per facce poligoni regolari uguali e che ha tutti gli angoloidi uguali dicesi *regolare.*

Un esempio di poliedro regolare ci è dato già dal cubo; altri esempi saranno forniti dalle costruzioni dei nn. 834-838.

833. Nota. — Dicemmo al n. 724 che talvolta una piramide retta a base regolare vien detta semplicemente « piramide regolare ». È per altro manifesto come in generale una piramide siffatta non sia un poliedro regolare nel senso or ora indicato.

834. Probl. — *Costruire un tetraedro regolare avente un dato spigolo.*

Costruito sul dato spigolo AB un triangolo equilatero ABC (n. 235), dal centro M (n. 335) si innalzi la perpendicolare, e su questa si prenda un punto D tale che AD = AB.

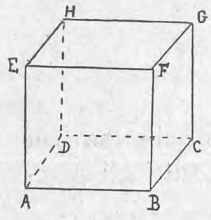


Se H è il piede della altezza abbassata da C su AB, la DH sarà perpendicolare al segmento AB (numero 629) nel suo punto di mezzo

(n. 115), onde risulta che BD = AD (n. 122). Analogamente si dimostra che CD = AB, onde si conclude che il tetraedro ABCD ha come facce quattro triangoli equilateri uguali e ha i quattro angoloidi uguali (numero 707), cioè è regolare.

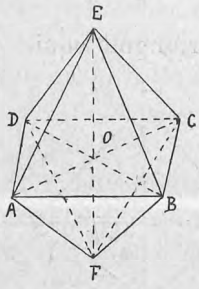
835. Probl. — *Costruire un esaedro regolare (cubo) di dato spigolo.*

Costruito sul dato spigolo AB un quadrato ABCD, si innalzino dai suoi vertici le perpendicolari al suo piano e su di esse da una medesima parte si prendano i quattro segmenti AE, BF, CG, DH uguali ad AB. Il poliedro ABCDEFGH ha come facce sei quadrati uguali e ha quindi (n. 707) gli angoloidi, che sono triedri, uguali.



836. Probl. — *Costruire un ottaedro regolare di dato spigolo.*

Costruito sul dato spigolo AB il quadrato ABCD, dal centro O di esso (punto d'incontro delle diagonali) si innalzi la perpendicolare al piano di esso e su qnesto si prendano da una parte e dall'altra i segmenti OE, OF uguali alla metà OA della diagonale del quadrato ABCD. Dalla uguaglianza dei triangoli AOE, AOF, BOE, ecc. (numero 109, *a*) discende che tutti gli spigoli del poliedro ABFCDE sono uguali; e quindi che il poliedro ha come facce otto triangoli equilateri uguali. Analogamente dall'uguaglianza dei triedri $\widehat{EOAB}$, $\widehat{EOBC}$, ... $\widehat{AOEB}$, $\widehat{AOED}$, ... risulta che



sono uguali anche tutti i diedri del poliedro come somme di diedri uguali, onde si conclude che sono uguali anche gli angoloidi del poliedro, il quale è perciò regolare.

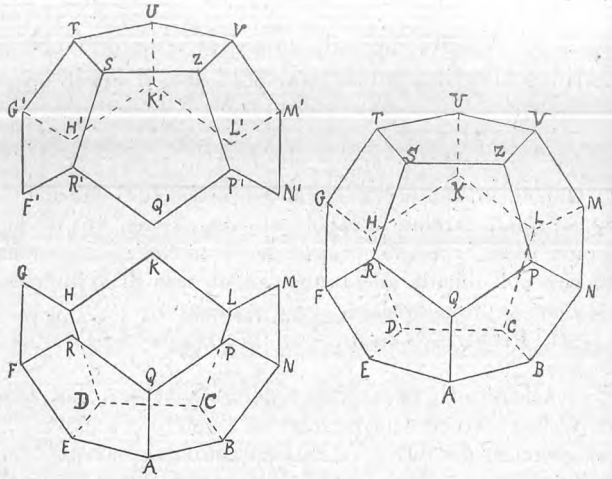
Qui da ultimo accenneremo ad altri due poliedri regolari, pei quali daremo le regole di costruzione, in modo che l'alunno possa, volendo, prepararne i modelli in cartoncino. Non sarà poi difficile all'alunno volonteroso di sviluppare nei particolari la dimostrazione della regolarità.

837. Probl. — *Costruire un dodecaedro regolare di spigolo dato.*

Considerato il pentagono regolare che ha il dato lato AB (per il che, costruito un pentagono regolare [n. 405 o n. 807] basta costruire su AB il pentagono equilatero avente quattro angoli interni uguali a quelli del pentagono regolare), si costruiscano su due lati consecutivi di esso, p. es., AE, AB, due pentagoni uguali al dato e si immagini di farli ruotare intorno a codesti due lati finchè abbiano in comune il lato passante per A: indicandoli, in codesta posizione con AEFRQ, ABNPQ, (vedi fig. alla pag. seg.) avremo che i triedri $\widehat{AEBQ}$, $\widehat{BANC}$, avendo un diedro comune e due facce uguali sono uguali (n. 702); onde risulta che l'angolo $\widehat{NBC}$ è uguale ad $\widehat{EAQ}$, cioè all'angolo interno del pentagono regolare.

Di qui si conclude che entro l'angolo $\widehat{CBN}$ si può costruire un pentagono regolare CBNML, uguale agli altri tre da noi costruiti. Così continuando si ottiene da ultimo una specie di calotta poliedrica avente per base il pentagono regolare ABCDE e racchiusa da altri cinque pentagoni uguali aventi a due a due comune un lato. Superiormente codesta calotta è limitata da una poligonale chiusa (evidentemente *non* piana) avente dieci lati, tutti uguali ad AB, e i suoi dieci angoli convessi sono tutti uguali all'angolo interno del pentagono regolare, come risulta dell'uguaglianza dei triedri $\widehat{A}$, $\widehat{Q}$, $\widehat{B}$, $\widehat{N}$,..

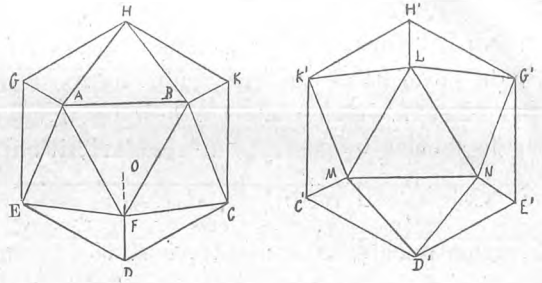
Ciò premesso, si costruisca un'altra calotta poliedrica uguale a quella or ora ottenuta e la si posi capovolta sulla



prima. Dalla uguaglianza degli angoli convessi delle due poligonali che limitano le due calotte risulta la possibilità di far combaciare esattamente questi due orli; e in tal modo si ottiene un poliedro, avente per facce dodici pentagoni regolari uguali. Poichè gli angoloidi sono triedri ne risulta senza altro che essi, avendo le facce uguali, sono tutti uguali (n. 707) e si conclude che il dodecaedro ottenuto è regolare.

838. Probl. — *Costruire un icosaedro regolare di spigolo dato.*

Costruito sullo spigolo dato AB un pentagono regolare ABCDE (cfr. il n. prec.) si innalzi dal suo centro O (n. 319) la perpendicolare al suo piano e si prenda su di essa un punto F tale che AF (e quindi BF, DF,... n. 632), sia uguale ad AB. La piramide FABCDE ha come facce laterali cinque triangoli equilateri. Dall'uguaglianza dei due triedri $\widehat{BAFC}$, $\widehat{FABC}$ (aventi un diedro comune e due facce uguali) risulta la possibilità di costruire una piramide uguale a quella or ora ottenuta, ed avente il vertice B e le due facce ABF, FBC; sia BAFCKH codesta piramide. Similmente si può costruire una terza piramide ABHGEF, uguale alle precedenti, col vertice in A e avente tre facce comuni con le altre due. Così si ottiene una calotta poliedrica racchiusa da dieci triangoli equilateri uguali,



avente tutti i diedri uguali e limitata da una poligonale chiusa a sei lati, *non* piana.

Costruita un'altra calotta uguale a quella or ora ottenuta, si verifica direttamente mediante modelli di cartoncino (e si dimostra ricorrendo a confronti di angoloidi) che è possibile riunire le due calotte in modo che gli orli rispettivi combacino perfettamente. Si ottiene allora un poliedro avente come facce venti triangoli equilateri uguali; e poichè tutti i diedri sono uguali, si conclude che l'icosaedro ottenuto è regolare.

839. Nota. — Abbiamo visto che nel piano esistono poligoni regolari ad un numero arbitrario di lati, sebbene solo una parte di essi (pure in numero infinito) si sappia costruire ove non si disponga che della riga e del compasso.

Invece di poliedri regolari non esistono che i cinque tipi dianzi costruiti. Di questo fatto ci possiamo convincere nel modo seguente.

Si ricordi che la somma delle facce di un angoloide è sempre minore di 4 retti (n. 716).

Perciò se le facce di un poliedro regolare sono triangoli (equilateri), ciascuna faccia dei suoi angoloidi vale $\frac{2}{3}$ di retto, onde risulta che l'angoloide non può avere più di 5 faccie; ora secondo che per ciascun vertice del poliedro regolare passano 3, 4 o 5

triangoli equilateri si ha rispettivamente il tetraedro o l'ottaedro o l'icosaedro regolare.

Se le facce sono quadrati, non ne possono passare per ciascun vertice che tre e si ha il cubo.

Se le facce sono pentagoni regolari (il cui angolo interno vale $\frac{6}{5}$ di retto), ne possono passare per ciascun vertice ancora tre soltanto, e si ricade sul dodecaedro.

Infine non vi può essere nessun poliedro regolare a facce esagonali, perchè nell'esagono regolare l'angolo interno vale $\frac{4}{3}$ di retto e d'altra parte per ogni vertice del poliedro debbono passare almeno tre facce. E la medesima ragione di impossibilità si riscontra, quando si cerchino poliedri regolari, le cui facce abbiano più di sei lati.

Si conclude dunque veramente che *non vi sono altri poliedri regolari all' infuori del tetraedro, dell'esaedro, dell'ottaedro, del dodecaedro e dell' icosaedro.*

XIII.

CILINDRO E CONO

Cilindro indefinito.

840. Def. — Data una retta *a,* l'insieme delle parallele ad *a* aventi da essa una data distanza dicesi *superficie cilindrica circolare* (o *di rotazione*) *indefinita* di *asse a* e di *raggio* uguale alla distanza prefissata delle rette parallele dall'asse.

Codeste parallele diconsi *generatrici.*

841. Osservazione. — Alle rette parallele appartenenti al cilindro si dà il nome di « generatrici », perchè il cilindro si può considerare *generato* da una di codeste rette che ruoti intorno all'asse tenuto fisso, mantenendosi parallela ad esso e sempre alla medesima distanza.

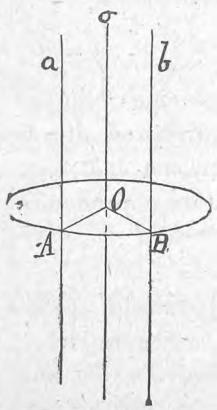
842. Indicando con r il raggio del cilindro, le rette parallele all'asse, che hanno da esso una distanza diversa da r, diconsi *interne* o *esterne* al cilindro, secondo che cotesta distanza è minore o maggiore di r; e si dicono rispettivamente *interni* o *esterni* anche i punti di codeste rette.

843. Def. — Data una superficie cilindrica circolare indefinita, si dice *cilindro circolare indefinito* l'insieme dei punti della superficie e dei punti interni ad essa.

Per *asse* o *raggio* del cilindro intendonsi l'asse e il raggio della superficie corrispondenti.

844. Teor. — *Una superficie cilindrica circolare è intersecata da ogni piano perpendicolare all'asse secondo una circonferenza, avente il centro sull'asse e il raggio uguale al raggio del cilindro considerato.*

Dato il cilindro di asse o, si conduca per un punto O dell'asse il piano perpendicolare α. Esso incontrerà ogni generatrice in un punto (n 769). Se A è l'intersezione di α con una generatrice a del cilindro, la retta OA è perpendicolare alla retta o (nn. 626, 770), cosicchè il segmento OA è uguale alla distanza di a da o, cioè al raggio del cilindro. Si ha quindi che ogni punto d' intersezione di α col cilindro dista da O di un segmento uguale al raggio del cilindro.



Reciprocamente sia B un punto del piano α appartenente alla circonferenza di centro O e raggio uguale al raggio del cilindro. La retta b perpendicolare ad α nel punto B è parallela ad o (n. 768) e dista da o di un segmento OB uguale al raggio del cilindro. Ne risulta che la retta b è una generatrice del cilindro, e quindi che il punto B appartiene alla intersezione del cilindro col piano α.

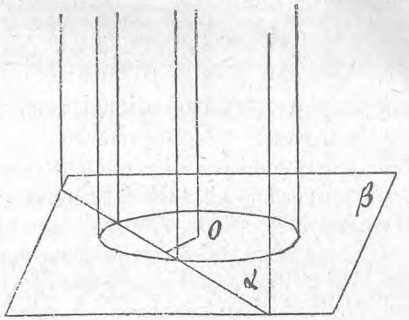
845. Risulta dal n. prec. che il cilindro circolare si può anche definire come l'insieme delle rette perpendicolari ad un piano nei punti di un cerchio.

846. Osservazione. — Il cilindro circolare considerato sin qui rientra nella figura più generale ottenuta conducendo le parallele ad una retta fissa pei punti di una circonferenza.

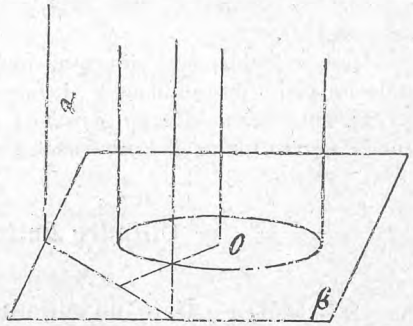
Questa figura prende il nome di *cilindro ellittico* (indefinito) perchè la sezione di essa perpendicolare alle generatrici è una linea detta *ellisse*.

847. Def. — Dicesi *sezione normale* di un cilindro indefinito ogni cerchio ottenuto segando il cilindro con un piano perpendicolare all' asse.

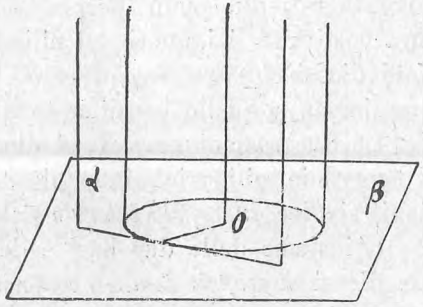
848. Teor. — *Un piano parallelo all'asse di un cilindro circolare ha comuni con la superficie di questo, due generatrici o una sola generatrice o nessun punto secondo che la sua distanza dall'asse è minore, uguale o maggiore del raggio del cilindro.*



Un piano β, perpendicolare all' asse in un punto O, sega la superficie cilindrica secondo una circonferenza di centro O e il piano dato α parallelo all' asse, secondo una retta la cui distanza da O è uguale alla distanza di α dall' asse (n. 629).



Ora codesta retta è secante, tangente od esterna alla circonferenza O secondo che la sua distanza da O è minore, uguale o maggiore del raggio della circonferenza (nn. 183, 186, 194), ossia del raggio del cilindro, ed è chiaro che corrispondentemente il



piano α ha comune col cilindro due generatrici, una sola o nessun punto.

849. Come caso particolare del teorema precedente abbiamo che la superficie cilindrica è intersecata da ogni piano per l'asse, secondo due generatrici, ad ugual distanza dall'asse e da bande opposte.

850. Un piano avente comune con un cilindro una sola generatrice dicesi *tangente* al cilindro.

851. Nota. — Analogamente a ciò che abbiamo fatto per la sfera, dovremmo ora dire qualche cosa intorno alla intersezione di due superficie cilindriche o una superficie cilindrica e di una sfera. Ma in generale siffatta intersezione è una *linea*, il cui studio trascende dalla Geometria elementare.

Qui ci limiteremo a proporre come esercizio i due seguenti casi particolari del problema precedente:

1). *Intersezione di due superficie cilindriche aventi gli assi paralleli.*

Questo problema si riduce ad un problema piano considerando un piano perpendicolare ai due assi.

2). *Intersezione di una superficie cilindrica con una superficie sferica avente il centro sull' asse.*

Cilindro finito.

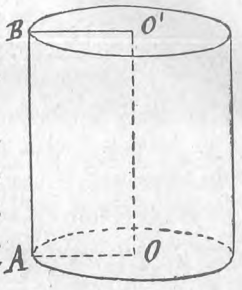
852. Def. — Dato un cilindro circolare indefinito e considerati due piani perpendicolari all'asse, la figura costituita dai punti del cilindro presi fra i due piani dicesi *cilindro circolare retto* e si dice *finito* per opposizione a quello considerato dianzi.

Le due sezioni normali si dicono *basi* e la parte di superficie cilindrica indefinito, compresa fra i due piani, si dice *superficie laterale* del cilindro finito.

L'insieme delle due basi e della superficie laterale dicesi *superficie totale* o *contorno* del cilindro retto.

La distanza delle due basi si dice *altezza* del cilindro retto.

I punti del cilindro non appartenenti alla superficie si dicono *interni*; i punti non appartenenti al cilindro si dicono *esterni* ed esso.



853. Osservazione. — La superficie laterale del cilindro retto si può immaginare descritta dalla rotazione di un segmento AB *(generatrice)* intorno ad una retta OO' ad esso parallela, mentre il cilindro è descritto in codesto stesso movimento di rotazione dal rettangolo ABO'O, che ha il lato OO' sulla retta fissa.

Cono indefinito.

854. Def. — Dati una semiretta a di origine A ed un angolo acuto, l'insieme delle semirette uscenti da A e formanti con a angoli uguali all'angolo dato dicesi *superficie conica circolare* (o di *rotazione*) *indefinita* di *asse* a e di *vertice* A.

L'angolo dato dicesi *angolo d'apertura* del cono. Le semirette d'origine nel vertice e appartenenti alla superficie conica si dicono *generatrici.*

855. Indicato con α l'angolo di apertura, le semirette pel vertice del cono, formanti coll'asse un angolo diverso da α, diconsi *interne* o *esterne* secondo che quell'angolo è minore o maggiore di α; e si dicono rispettivamente *interni* o *esterni* anche i punti di codeste semirette.

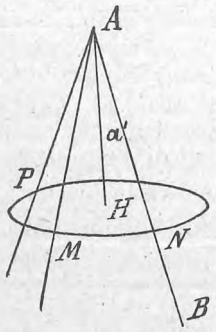
856. Def. — Data una superficie conica circolare

indefinita, dicesi *cono circolare indefinito* la figura costituita dai punti che appartengono alla superficie considerata o sono interni ad essa.

857. Osservazione. — Il cono da noi definito si può immaginare *generato* da un raggio uscente da un punto di una retta, il quale ruoti, intorno a codesta retta tenuta fissa, mantenendosi rigidamente connesso con essa.

858. Teor. — *Una superficie conica circolare è intersecata da ogni piano perpendicolare all'asse secondo una circonferenza avente il centro sull'asse.*

Dato il cono di vertice A ed asse a' conduciamo per un punto H dell'asse il piano perpendicolare α. Diciamo che esso interseca la superficie conica secondo una circonferenza di centro H.



Infatti ogni generatrice del cono determina con a' un piano che è segato dal piano α secondo una retta PN perpendicolare ad a' (n. 626) e tale quindi che interseca in un punto N la generatrice AB che con a' forma un angolo minore di un retto (n. 265). Si ha dunque che ogni generatrice del cono interseca il piano α. Siano allora M, N le intersezioni di due generatrici del cono col piano α. Congiunto H con M ed N, abbiamo che i triangoli AHM, AHN, rettangoli in H, aventi il cateto AH comune e gli angoli $\widehat{HAM}$, $\widehat{HAN}$ uguali, sono uguali (n. 109, *b*), ed hanno quindi uguali i cateti HM, HN. Concludiamo che le intersezioni delle generatrici del cono col piano α sono equidistanti da H.

Reciprocamente diciamo che se P è un punto qualsivoglia della circonferenza di centro H e raggio HM, la AP è una generatrice del cono. Infatti congiunto P con A e con H, i triangoli AHM, AHP, rettangoli in H (n. 626), aventi il cateto AH comune e i cateti HM, HP uguali, sono uguali (n. 109, *a*) ed hanno uguali gli angoli $\widehat{MAH}$, $\widehat{PAH}$. Di qui risulta che la AP è veramente una generatrice del cono.

859. Reciprocamente si ha il

Teor. — *Innalzato nel centro di una circonferenza la perpendicolare al piano di essa, le congiungenti un punto di questa coi punti della circonferenza sono le generatrici di una superficie conica, avente per asse la nominata perpendicolare.*

Innalzato nel centro H della circonferenza MNP (vedi fig. del n. prec.) la perpendicolare al piano MNP, e congiunto un punto A di codesta perpendicolare con due punti qualsiasi M, N della circonferenza, diciamo che gli angoli $\widehat{MAH}$, $\widehat{NAH}$ sono uguali. Infatti i due triangoli MAH, NAH rettangoli in H (n. 626) hanno il cateto AH comune e i cateti HM, HN uguali e perciò sono uguali (n. 109, *a*).

860. Nota. — Un piano pel vertice A del cono dianzi ottenuto, il quale passi per una retta del piano della circonferenza MNP, ha comune col cono due generatrici, o una, o nessuna, secondo che codesta retta è secante, tangente o esterna rispetto alla circonferenza.

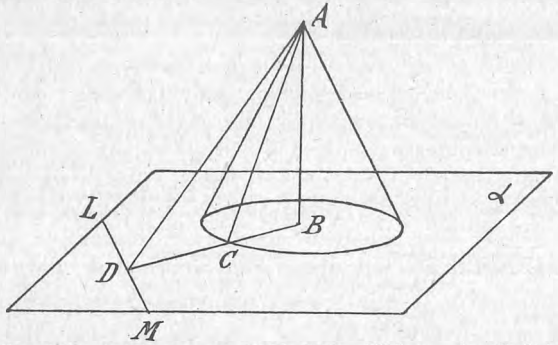
Codesto piano dicesi rispettivamente *secante, tangente o esterno* al cono.

La generatrice comune ad un cono e ad un suo piano tangente dicesi *generatrice di contatto.*

861. Osservazione. — Appare dai nn. 858, 859 la possibilità di generalizzare la definizione di cono data al n. 856, chiamando *cono* la figura che si ottiene proiettando i punti di un cerchio da un punto qualsiasi non appartenente al piano di essa. Ma noi non ci dilungheremo su questa generalizzazioue.

862. Teor. — *Un piano passante pel vertice di un cono circolare è, rispetto al cono, secante, tangente o esterno secondo che esso forma con l'asse un angolo minore o uguale o maggiore dell'angolo di apertura del cono.*

Sia dato il cono di vertice A e di asse AB, e il piano γ passante per A. Se γ è perpendicolare all'asse, esso è manifestamente esterno al cono, perchè l'angolo di apertura di questo è acuto (n. 854). Escluso codesto caso si conduca per un punto arbitrario B dell'asse il piano α perpendicolare ad esso. Il piano α interseca la superficie conica secondo una circonferenza di centro B (n. 858) e il piano γ secondo una retta



LM. Sia BD la distanza di B dalla LM e sia C l'intersezione (eventualmente coincidente con D) della retta BD con la circonferenza. Allora il piano BAD è perpendicolare al piano α (n. 668) e quindi l'angolo $\widehat{BAD}$ è l'angolo del piano γ con la AB (n. 678).

Ora la LM sarà secante, tangente od esterna alla circonferenza, secondo che BD è minore, uguale o maggiore di BC (nn. 183, 186, 194), ossia come risulta dai triangoli ABC, ABD, secondo che l'angolo $\widehat{BAD}$ di γ con l'asse è minore, uguale o maggiore dell'angolo $\widehat{BAC}$ di apertura del cono. Nel primo caso il piano γ contiene le due generatrici che da A proiettano le intersezioni di LM colla circonferenza: nel secondo caso γ contiene la generatrice che da A va al punto di contatto di LM con la circonferenza: nel terzo caso infine, il piano γ non contiene nessuna generatrice del cono, e quindi è costituito di punti tutti esterni al cono, eccettuato il punto A.

863. Come caso particolare del teorema precedente abbiamo che un piano passante per l'asse interseca la superficie conica secondo due generatrici che formano coll'asse angoli uguali (all'angolo di apertura).

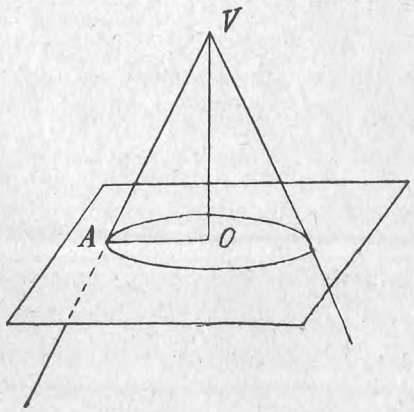
864. Nota. — Lo studio delle intersezioni di due coni o di un cono e di una sfera trascende in generale la Geometria elementare. Noi qui ci limiteremo a proporre come esercizii i seguenti casi particolari:

1.° *Discutere i vari casi relativi alla intersezione di una superficie sferica e di una superficie conica il cui asse passi pel centro di essa.* (L'intersezione, quando esiste, è costituita da una o da due circonferenze). Si noti in particolare il caso in cui il vertice del cono è nel centro della sfera e quello in cui tutte le generatrici del cono sono tangenti alla sfera.

2.° *Discutere i vari casi relativi alla intersezione di due superficie coniche collo stesso vertice.* (Questa, se esiste, si compone di due generatrici o di una generatrice lungo la quale i due coni sono tangenti fra loro, cioè hanno il medesimo piano tangente. La discussione si fa segando i due coni con una sfera avente il centro nel vertice comune).

Cono finito e tronco di cono.

865. Def. — Dato un cono circolare ed una sua sezione perpendicolare all'asse, la figura costituita dai punti del cono, che rispetto al piano della sezione cadono dalla stessa banda del vertice chiamasi *cono circolare retto* e si dice *finito* in opposizione a quello considerato al n. 856.



La nominata sezione del cono indefinito dicesi *base* dal cono finito e la distanza del vertice del piano di essa dicesi *altezza*. I segmenti uguali di ge-

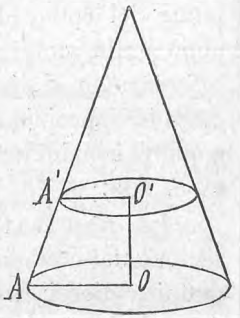
neratrici compresi fra il vertice e il piano della base diconsi *apotemi* e l'insieme dei punti appartenenti ad essi dicesi *superficie laterale* del cono. L'insieme della superficie laterale e della base dicesi *superficie totale.*

I punti del cono non appartenenti alla superficie diconsi *interni* e i punti non appartenenti al cono diconsi *esterni.*

866. Osservazione. — Il cono finito si può immaginare generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo AOV intorno ad un cateto (asse) OV.

867. Nota. — Tenendo presente la definizione più generale di cono (non circolare) cui abbiamo accennato al n. 861, possiamo considerare il cono finito (*obliquo*) che si ottiene considerando tutti i segmenti che vanno ai punti di un cerchio da un punto fuori del suo piano, il quale non si trovi sulla perpendicolare al cerchio nel centro.

868. Def. — Dato un cono circolare indefinito e considerate due sue sezioni, perpendicolari all'asse, la figura costituita dai punti del cono compresi fra i piani delle due sezioni dicesi *tronco di cono* retto.



Le due sezioni considerate diconsi *basi* del tronco e la distanza OO′ dei loro piani dicesi *altezza* del tronco di cono.

La parte di superficie del cono circolare indefinito compresa fra i piani delle due sezioni, costituisce la *superficie laterale* del tronco di cono e l'insieme di essa e dei due cerchi basi dicesi *superficie totale.*

I segmenti AA′ di generatrici del cono compresi fra i detti due piani diconsi *apotemi* del tronco di cono.

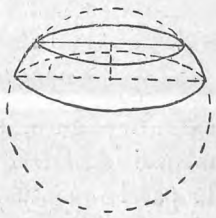
869. Osservazione. — Nel movimento stesso che genera il cono, la superficie laterale del tronco di cono è generata dalla rotazione del segmento AA′ (apotema) attorno alla retta OO′ giacente con esso in uno stesso piano e non parallelo ad esso. Il tronco è similmente generato dal trapezio AOO′A′ intorno al lato OO′ perpendicolare alle due basi.

Poliedri a faccie curve.

870. Noi abbiamo già veduto alcuni semplicissimi esempi di figure limitate da superficie piane, sferiche, cilindriche o coniche. Esse vengono definite combinando per riunione o interferenza parti di spazio relative a piani, sfere, cilindri e coni.

Ora è chiaro come la costruzione di figure siffatte possa venir generalizzata in svariatissimi modi. Noi qui ci limiteremo ad indicare alcuni esempi dei quali taluno si collega ai poligoni a lati circolari che abbiamo considerati nel piano (n. 239 e segg.).

871. Data una sfera, e considerati due piani seganti paralleli, la parte di sfera compresa fra i due piani paralleli dicesi *segmento sferico.* I due cerchi sezioni diconsi *basi*, e la distanza di esse *altezza* del segmento; la congiungente i centri delle due basi (perpendicolare ad esse) dicesi *asse* del segmento. La parte di superficie sferica compresa fra i due piani si chiama superficie laterale del segmento od anche *zona* sferica, e l'arco sezione della zona



con un semipiano uscente dall'asse dicesi *sezione meridiana* della zona.

Quando uno dei due piani dati sia tangente alla sfera, la zona si riduce ad una calotta, e il segmento a due basi ad un segmento ad una sola base (n. 766).

872. Dato in un piano un qualsiasi poligono a lati circolari (n. 239), si consideri la figura generata dalle perpendicolari al piano nei punti del contorno del poligono: si ottiene così una superficie, che si può chiamare superficie *prismatica indefinita a facce cilindriche*.

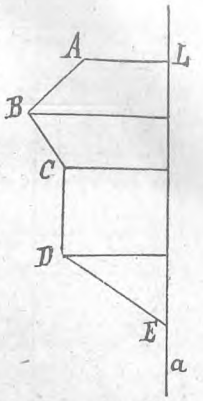
Il prisma corrispondente si ottiene combinando per riunione e interferenza le parti di spazio relative alle facce cilindriche (o piane) del prisma, nello stesso modo in cui nel piano del poligono considerato si combinano per riunione e interferenza le parti relative alle circonferenze e alle rette dei lati, per ottenere il poligono.

Se poi si considera un altro piano parallelo al piano del poligono dato, si ottiene un *prisma retto finito a facce cilindriche*.

873. Analogamente si conducano le semirette che vanno ai punti di un poligono a contorno curvilineo da un punto V esterno al piano di questo. Si ottiene così un *angoloide a facce coniche* (in generale non circolari), che si definisce analogamente a quello che si è fatto pel prisma a facce cilindriche.

Considerando la figura costituita dal poligono dato e dalla parte di angoloide, che giace rispetto al piano del poligono dalla stessa parte del punto V, si ottiene una figura che dicesi *piramide a facce coniche* a cui si estendono le definizioni date al n. 722 per le piramidi a facce piane.

874. Passando ad un'altra classe di figure, si considerino una poligonale piana qualsiasi ABCDE e una retta a del suo piano, la quale passi eventualmente per uno o entrambi gli estremi della poligonale.



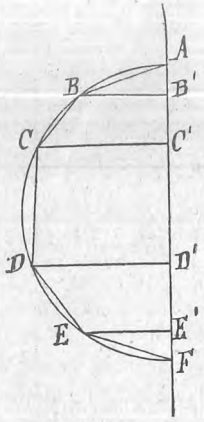
Se si immagina che la poligonale rimanendo rigida e rigidamente connessa colla retta a, ruoti intorno a questa tenuta fissa, si vede che essa descrive una *superficie* che dicesi *superficie di rotazione generata dalla data poligonale*.

Essa si può manifestamente definire come la riunione di un certo numero di superficie laterali di coni e cilindri. Per es. nel caso della figura, i lati AB e BC descrivono le superficie di due tronchi di cono, CD descrive una superficie cilindrica e DE una superficie conica.

Se poi dagli estremi della poligonale si abbassano le perpendicolari sulla retta fissa, otteniamo un poligono (convesso o concavo) che nel movimento di rotazione indicato genera un solido, cui si dà il nome di *solido di rotazione generato dalla poligonale data*. Questo solido si può definire per riunione (e interferenza) di coni, di tronchi di cono e di cilindri.

875. A noi importa pel seguito definire la superficie e il solido di rotazione, generati da una poligonale iscritta in una semicirconferenza, la quale ruoti intorno al diametro che ne congiunge gli estremi.

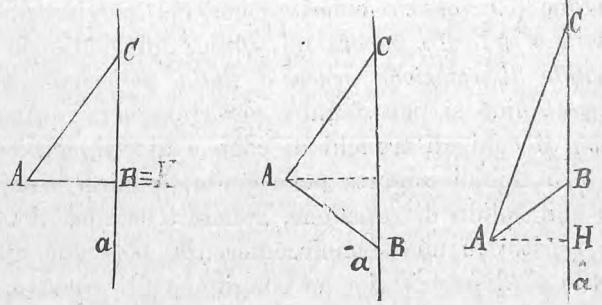
Per fissare le idee, consideriamo la poligonale di cinque lati ABCDEF: abbassate da B, C, D, E le perpendicolari BB′, CC′, DD′, EE′ sul diametro AF, avremo che la superficie di rotazione generata dalla poligonale è data dalla riunione delle superficie laterali dei due coni descritti da AB e EF, dei due tronchi di cono descritti da BC e DE, e del cilindro descritto



da CD; e il solido è dato dalla riunione di codesti coni e tronchi di cono e di codesto cilindro.

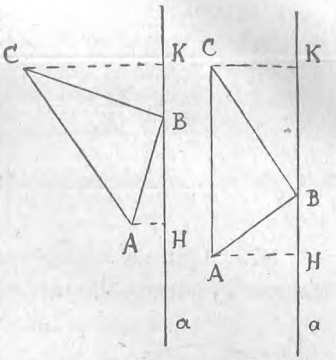
876. Consideriamo in particolare il solido di rotazione generato da un triangolo ABC che ruota intorno ad un asse a passante per un suo vertice e giacente nel suo piano.

Se un lato BC del triangolo appartiene all'asse a di rotazione, si abbassi da A la perpendicolare AH su a. Nel caso in cui il triangolo dato sia rettangolo in B, e quindi il punto H coincida con B, il solido di rotazione è il cono finito che ha per asse la a e per apotema AC. Se H



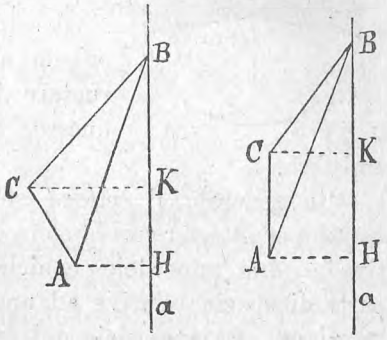
cade fra B e C, il solido di rotazione si ottiene per riunione dei due coni di asse a e di apotemi AC, AB. Se infine H cade fuori di BC (per fissare le idee, supponiamo che cada sul prolungamento di CB), il solido di rotazione si ottiene combinando per interferenza la parte di spazio interna al cono di apotema AC con quella esterna a quello di apotema AB.

Supponiamo più in generale che il triangolo non abbia sull'asse che il solo vertice B, e abbassate da A e C le perpendicolari AH, CK sull'asse, distinguiamo tre casi secondo che B è interno o esterno al segmento HK, o coincide con uno dei punti H o K.

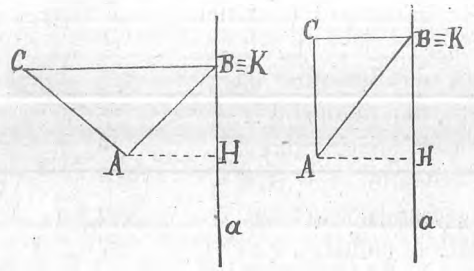


Nel primo caso, per avere il solido di rotazione si combina per interferenza la parte di spazio interna al tronco di cono (o al cilindro) descritto da AC colla regione esterna ad entrambi i coni di apotemi AB e BC.

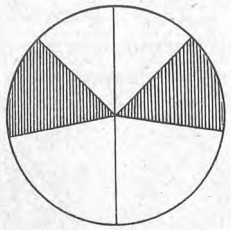
Se B appartiene al prolungamento di HK, per avere il solido di rotazione si combinino per riunione le regioni interne al tronco di cono (o cilindro) descritto da AC, e al cono descritto da BC, e la parte di spazio così ottenuta si combini per interferenza colla regione esterna al cono descritto da AB.



Se infine B coincide con uno dei punti H, K, per es. con K, il solido di rotazione si definisce combinando pen interferenza la parte interna al tronco di cono (o cilindro) descritto da AC colla regione esterna al cono descritto da AB.



877. Qui da ultimo accenneremo al solido di rotazione generato da un settore che ruoti intorno ad un diametro del suo cerchio.



Questo solido si chiama *settore sferico.*

Se il settore circolare che si considera corrisponde ad un angolo al centro retto, e si fa ruotare intorno ad un lato di questo, il settore sferico è un emisfero.

In generale, il settore sferico si ottiene combinando per interferenza la sfera colle parti di spazio relative a due superficie coniche (eventualmente colle parti di spazio relative ad una superficie conica e ad un piano). La superficie del settore sferico si ottiene come riunione di una zona colle superficie di due coni (o, eventualmente, colle superficie di un cono e di un cerchio).

878. D'or innanzi, per brevità, le figure solide, limitate da facce piane e curve di cui abbiamo discorso, si designeranno col nome generico di « *poliedri a facce curve* ».

879. Dato un poliedro a facce curve si può sempre costruire un tetraedro (o un poliedro a facce piane o una sfera) che sia tutto contenuto in esso.

Se è data, per es. una piramide a facce coniche, basta costruire nella base un triangolo (n. 242) e proiettarlo dal vertice. In modo analogo si procede pel prisma a facce cilindriche, nel quale si ottiene subito un prisma triangolare a facce piane, entro il quale si può iscrivere un tetraedro.

È facile estendere la dimostrazione al caso generale, ma noi non ci indugeremo su ciò; si tratta d'altronde, di cosa evidente alla intuizione.

880. Riunendo due poliedri a facce piane curve A e B non aventi punti interni comuni, cioè *non ricoprentisi*, si ottiene una figura che dicesi *somma* di essi.

È particolarmente notevole il caso in cui si sommano due figure *adiacenti*, cioè aventi comune una superficie, che sia parte di ciascuna delle due superficie limitanti.

881. Se un poliedro è somma di altri due, ciascuno di questi si dice *differenza* del poliedro totale e dell'altra parte.

Così p. es. un tronco di cono si può considerare come differenza di due coni.

882. Ad ogni poliedro a facce piane o curve appartengono *punti*, *rette* o *piani*, a partire dai quali la figura stessa può essere costruita: intendiamo accennare ai vertici delle superficie coniche e ai centri delle superficie sferiche limitanti, ai punti (in numero finito) comuni a tre o più facce, alle rette e ai piani determinati da questi punti, ed inoltre agli assi dei coni e dei cilindri, e ai piani che eventualmente limitino la figura. I suddetti elementi daranno luogo alla considerazione di segmenti ed angoli; cioè distanze di punti, o di punti e rette, o di punti e piani, ed angoli di rette o di rette e piani, o sezioni normali di diedri.

Ora si possono confrontare due poliedri a facce curve definendo in generale le loro *uguaglianza*. Si dovranno dire *uguali* due poliedri siffatti quando:

1.° i punti, le rette e i piani dell'uno danno luogo a segmenti e ad angoli uguali ordinatamente a quelli dell'altro;

2.° le superficie costituenti le facce curve dell'uno (coniche, cilindriche, sferiche) sono uguali alle corrispondenti superficie dell'altro;

3.° i due poliedri sono determinati nel medesimo modo per riunione od interferenza delle parti di spazio relative alle facce.

883. È poi chiaro che dati due poliedri non importerà verificare direttamente che sono uguali *tutte* le coppie di segmenti e di angoli che entrano in considerazione ecc., ma si avranno dei *criterii d'uguaglianza* in base ai quali basterà confrontare *alcuni* elementi delle due figure, per essere fatti certi dell'uguaglianza dei rimanenti.

Così ad es., per verificare che sono uguali due piramidi a facce coniche, basta in generale confrontare i poligoni curvilinei che ne costituiscono le basi, e le piramidi a facce piane che hanno i medesimi vertici (supposto che le basi abbiano almeno tre vertici, non in linea retta).

Ma a noi non importa di sviluppare siffatti criteri d'uguaglianza relativi a poliedri a facce curve, giacchè non avremo occasione di ricorrervi nel seguito.

884. Osservazione. — Due poliedri uguali, nel senso dianzi indicato, sono sovrapponibili col movimento o sovrapponibili l'uno all'immagine speculare dell'altro rispetto ad uno specchio piano *(uguaglianza diretta e inversa)*.

ESERCIZI

1. Luogo dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo.

2. Luogo dei punti le cui distanze dai tre vertici di un triangolo sono disuguali in un senso fissato.

3. Costruire il centro della sfera che passa pei quattro vertici di un tetraedro.

4. Luogo dei punti equidistanti da tre rette, lati di un triangolo.

5. Luogo dei punti le cui distanze dai tre lati di un triangolo sono disuguali in un senso fissato.

6. Costruire una sfera tangente a quattro rette date.

7. Luogo del punto di mezzo di un segmento, eguale ad un segmento dato, che si muove appoggiandosi coi suoi estremi a due rette ortogonali nello spazio che non s'incontrano.

8. I piani bisettori dei diedri (interni od esterni) formati dai piani di un tetraedro passano sei a sei per otto punti, che sono centri di altrettante sfere tangenti ai piani delle facce (una di queste sfere è interna al tetraedro e dicesi *iscritta* (es. 13 a pag. 463; le altre, diconsi *ex-iscritte*).

9. In un tetraedro le tre rette congiungenti i punti di mezzo degli spigoli opposti passano per uno stesso punto (*baricentro*). Questo punto è comune alle quattro rette (*mediane*) proiettanti dai vertici i baricentri delle facce opposte.

10. Eccepito il caso in cui le quattro altezze di un tetraedro passano per uno stesso punto, codeste altezze (prese a

coppie) danno luogo a sei minime distanze, parallele ai sei spigoli del tetraedro.

11. Condizioni sufficienti perchè un prisma quadrangolare sia un parallelepipedo, sono espresse delle seguenti proprietà:

a) Le facce opposte sono uguali;

b) I diedri opposti sono uguali;

c) Le diagonali passano per un medesimo punto, nel quale sono divise per metà.

12. Condizione sufficiente perchè un parallelepipedo sia rettangolo è che le sue diagonali sieno uguali.

13. La somma degli angoli di un poliedro (convesso) è uguale a tante volte quattro angoli retti quanti sono i vertici del poliedro meno due (v. il teorema EULERO, es. 40 a pag. 466).

Se si congiunge un punto O coi punti di una figura F, le rette (a cui appartengono le *semirette proiettanti*), si dicono pure *proiettanti* i punti della figura dal *centro* O.

Segando queste rette con un piano non passante per O, si ottiene una figura F' che dicesi *proiezione* della F, dal punto O, sopra il piano.

Relativamente all'operazione suindicata (proiezione) danno luogo ad una *eccezione* i punti di F che si trovano sopra rette per O parallele al piano secante; a questi punti non corrisponde alcun punto di F'.

14. Proiettare un triangolo secondo un triedro trirettangolo (avente come facce tre angoli retti).

15. Proiettare un triangolo dato in un triangolo equilatero avente come lato un segmento assegnato.

16. Proiettare un quadrilatero in un parallelogramma.

Che cosa c'è d'arbitrario nella costruzione?

17. Proiettare un quadrilatero in un rettangolo. Dove occorre prendere il centro di proiezione? (Da esso si deve vedere sotto angolo retto il segmento che ha per estremi le intersezioni delle due coppie di lati opposti del quadrilatero).

18. Proiettare un quadrilatero in un quadrato. (Dal centro di proiezione si deve anche vedere sotto angolo retto il segmento determinato dalle due diagonali del quadrilatero sopra la retta che unisce i punti d'intersezione delle due coppie di lati opposti).

In base al teorema dei triangoli omologici e al suo inverso (nn. 805-806) si risolvano i due seguenti esercizi di interesse pratico nel disegno.

19. In un foglio di carta limitato, congiungere un punto dato col punto (inaccessibile) comune a due rette che s'incontrano fuori del foglio.

20. Segnate due coppie di rette che s'incontrano fuori del foglio, determinare la retta che ne congiunge i due punti d'incontro, segnando la parte di essa che appartiene al foglio (nell'ipotesi che la retta di cui si tratta non sia tutta esterna al foglio suddetto).

21. Se due poliedri regolari di un medesimo numero di facce hanno uno spigolo uguale, essi sono uguali.

22. Le perpendicolari nei centri delle facce di un poliedro regolare passano per uno stesso punto, equidistante dai vertici e dalle facce (centro di una sfera *iscritta* e di una sfera *circoscritta* al poliedro).

23. Se pei vertici di un poliedro regolare si conducono i piani tangenti alla sfera circoscritta, si ottiene un nuovo poliedro regolare (*polare* del primo). Discutere i varii casi possibili in cui il poliedro dato sia un tetraedro, un cubo, un ottaedro, un dodecaedro, un icosaedro.

24. I punti di contatto delle facce di un poliedro regolare colla sfera inscritta, sono i vertici di un nuovo poliedro regolare.

25. Determinare i raggi delle sfere iscritte e circoscritte ad un dodecaedro a ad un icosaedro regolare.

26. Segare un cubo secondo un esagono regolare.

27. I punti di mezzo degli spigoli di un tetraedro regolare sono i vertici di un otteadro regolare.

28. Si può iscrivere ad un cubo un tetraedro regolare i cui vertici siano vertici del cubo e gli spigoli siano diagonali delle facce del cubo.

29. Ad ogni dodecaedro regolare si può iscrivere un cubo i cui vertici siano vertici del dodecaedro e gli spigoli siano diagonali delle facce del dodecaedro.

30. I centri delle facce di un poliedro regolare sono i vertici di un altro poliedro regolare, che dicesi *coniugato* del primo.

31. Se la superficie di un cerchio minore di una sfera è uguale alla sesta parte della superficie della sfera stessa, il diametro di codesto cerchio, e i lati del quadrato e del triangolo iscritto in esso sono gli spigoli rispettivamente del tetraedro, dell'esaedro e dell'ottaedro regolari, iscritti in codesta sfera.

32. Si segnino sopra i dodici spigoli di un cubo i loro punti di mezzo e si uniscano a tre a tre quelli fra questi punti appartenenti a spigoli per un medesimo vertice; sopprimendo gli otto tetraedri che restano così determinati nei triedri del cubo, si ottiene un poliedro (*semiregolare* o *archimedeo*) che ha tutte le facce regolari, ma non uguali e gli angoloidi uguali, ma non regolari, il quale dicesi *cubottaedro*.

33. I vertici del cubottaedro appartengono ad una sfera (*circoscritta*).

34. Lo spigolo del cubottaedro è uguale al raggio della sfera circoscritta [1].

35. Si considerino tutte le rette passanti per i punti di una circonferenza le quali distino dal centro del raggio, e facciano col piano della circonferenza un dato angolo acuto.

a) Queste rette si distribuiscono in due sistemi, per modo che due rette di un medesimo sistema sono sghembe fra di loro, e due rette di sistema diverso sono incidenti (si incontrano) o parallele.

b) Due rette di sistema diverso sono simmetriche rispetto ad un piano perpendicolare al piano della circonferenza per il suo centro.

c) Il luogo delle intersezioni delle rette di un sistema

[1] I. Amaldi. — *Una proprietà di un poliedro archimedeo* — *Pitagora*, Anno III, 1901-02.

con un piano parallelo a quello della circonferenza assegnata è una circonferenza C.

d) Il luogo delle intersezioni delle rette dell'altro sistema col piano suddetto, è la medesima circonferenza C.

Nota. — Risulta di qui che le rette dei due sistemi sopra nominati appartengono ad una medesima *superficie* che dicesi *iperboloide rotondo*. Su questa superficie si sogliono distinguere le rette dei due sistemi, chiamando quelle dell'uno *generatrici* e quelle dell'altro *direttrici*.

Il cerchio da cui siamo partiti per costruire l'iperboloide dicesi *cerchio di gola* di esso.

36. Si considerino due circonferenze, basi di un cilindro retto, e ad ogni punto A dell'una si facciano corrispondere i due punti A_1, A_2 dell'altra che hanno una data distanza (minore del diametro) dal punto A' di essa, posto sopra la generatrice per A. Le rette che congiungono i punti corrispondenti delle due circonferenze costituiscono i due sistemi (di generatrici e direttrici) di un iperboloide rotondo, il cui cerchio di gola sta in un piano parallelo alle basi del cilindro e ha per centro il punto di mezzo del segmento congiungente i centri delle due basi.

37. Teorema di **Pascal**. — Se un esagono ABCDEF (sciolto od intrecciato) è iscritto in un cerchio e non vi sono lati opposti paralleli, i punti d'incontro delle tre coppie di lati opposti si trovano sopra una medesima retta. [Si consideri il cerchio come sezione di un iperboloide rotondo, il cui asse sia perpendicolare al cerchio nel suo centro. Si mandino quindi le tre rette, generatrici dell'iperboloide, passanti pei punti A, C, E e le tre direttrici per B, D, F a segare rispettivamente le prime tre in tre punti; questi sono i vertici di un triangolo il cui piano sega il piano dell'esagono secondo una retta....]. (Si esaminino i casi eccezionali per la costruzione accennata).

38. Come deve essere modificato l'enunciato precedente se nell'esagono vi sono due lati opposti paralleli?

39. Teorema di **Pappo**. — Se in un piano si hanno due rette *a*, *b* secantisi in un punto O, e, fuori di questo, si prendono su *a* tre punti A, C, E, e su *b* tre punti B, D, F, le tre coppie di rette AB, DE; BC, EF; CD, FA, ove non ve ne sia qualcuna formata di rette parallele, s'incontrano in tre

punti di una medesima retta. (Si consideri un iperboloide rotondo, cui le rette a, b appartengono...).

40. Come si deve modificare l'enunciato precedente, se qualcuna delle coppie nominate è costituita di rette parallele?

41. Luogo dei centri delle sfere di raggio dato che tocchino una retta data.

42. Determinare l'intersezione di un cilindro e di un cono (circolari) aventi il medesimo asse.

43. Per un punto esterno ad una sfera passano infinite tangenti alla sfera, le quali costituiscono un cono circolare (cono circoscritto alla sfera) avente per asse la retta congiungente il punto dato col centro della sfera, e il luogo dei punti di contatto è una circonferenza, sezione del cono con un piano perpendicolare all'asse.

44. Costruire un cono circoscritto a due sfere date. — Discussione.

45. Costruire una sfera iscritta in un dato cono, o cilindro, (circolare) indefinito e tangente ad un piano. Nel caso del cono si suppone che il piano non passi pel vertice. [Esaminare pel cono i tre casi in cui il piano non sia parallelo ad alcuna generatrice, o sia parallelo ad una o a due generatrici].

Def. — Dato un cono indefinito ed un piano che ne intersechi le generatrici, il luogo delle intersezioni è una *linea*, che dicesi *sezione conica* o semplicemente *conica*. Essa dicesi *ellisse*, *parabola* o *iperbole* secondo che il piano secante considerato forma coll'asse del cono un angolo maggiore, uguale o minore dell'angolo di apertura, ossia secondo che il piano pel vertice, parallelo al piano considerato, è esterno, tangente o secante rispetto al cono.

Dato un cono indefinito, i punti di contatto di un piano secante, colle sfere tangenti ad esso che sono iscritte nel cono dato o nel suo opposto al vertice, si dicono *fuochi della sezione conica*.

46. Quanti fuochi ha una sezione conica? — Discussione.

47. La somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai fuochi è costante al variare del punto sull'ellisse stessa. (Si confronti la somma suddetta col segmento di una generatrice del cono che è compreso fra i punti di contatto colle due sfere...).

48. Il luogo dei punti di un piano per cui la somma delle distanze da due punti fissi è uguale ad un segmento assegnato (maggiore della distanza dei due punti), è una ellisse [Si costruisca un cono circolare di cui l'ellisse è sezione. Si metta in luce l'arbitrarietà che c'è nella costruzione].

49. Un'ellisse si può sempre considerare come sezione di un cilindro circolare e viceversa.

50. La differenza delle distanze di un punto d'un'iperbole dai fuochi è costante al variare del punto sull'iperbole.

51. Il luogo dei punti in un piano le cui distanze da due punti fissi hanno una differenza costante, è un'iperbole.

52. Teorema di **Pascal**. — Se un esagono (sciolto o intrecciato) è iscritto in una sezione conica, le tre coppie di lati opposti, ove sieno secantisi, s'incontrano in tre punti di una medesima retta (cfr. es. 37).

53. Come si deve modificare l'enunciato precedente se qualcuna delle coppie suddette è costituita di rette parallele?

54. Dati cinque punti di una sezione conica, determinare l'intersezione ulteriore di essa con una retta passante per uno dei cinque punti. (Si adoperi il teorema di **Pascal**).

Nota. — Si può dimostrare che cinque punti di un piano di cui tre non siano in linea retta, appartengono sempre ad una sezione conica, essendo possibile di proiettare un pentagono qualsiasi in un pentagono iscritto in un cerchio. La risoluzione del problema precedente c'insegna che la conica che passa per cinque punti è *unica*.

XIV.

LE SUPERFICIE E I SOLIDI DEI POLIEDRI

Trasformazione della superficie laterale di un poliedro in un poligono equivalente.

885. I teoremi della teoria della equivalenza relativi ai poligoni piani (Cap. V) ci permettono di trasformare in un poligono (triangolo, rettangolo, ecc.) la superficie laterale di un poliedro qualsiasi (a facce piane). Ci limiteremo ad indicare in proposito i seguenti enunciati.

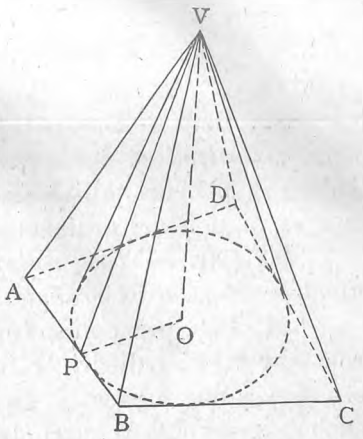
886. Teor. — *La somma delle facce laterali di un prisma retto è equivalente al rettangolo che ha per base il perimetro della base e per altezza l'altezza del prisma.*

Infatti le facce sono rettangoli aventi per altezza comune l'altezza del prisma e per basi i lati della base del prisma.

887. Teor. — *La superficie laterale di una piramide retta a base regolare è equivalente al triangolo che ha per base il perimetro della base e per altezza l'apotema della piramide.*

Infatti, divisa la base di codesto triangolo in tante parti uguali quante sono le facce della piramide, e congiunti i punti di divisione col vertice, si ottengono tanti triangoli equivalenti alle facce della piramide (n. 370).

888. Il teorema precedente si estende al caso in cui si consideri una qualsiasi piramide $\widehat{VABCD}$ *circoscritta* ad un cono retto (finito), cioè una piramide che abbia per base un poligono qualsivoglia circoscritto al cerchio base del cono e per vertice il vertice del cono. Le facce di una tale piramide sono tutte tangenti al cono (n. 860).



Considerata una qualsiasi di esse, p. es. la ABV e la sua generatrice di contatto VP, avremo che AB è tangente al cerchio base del cono nel punto P, onde OP sarà perpendicolare ad AB (n. 129): poichè OP è anche perpendicolare a VO, avremo che la AB è perpendicolare anche alla VP (n. 629); cioè l'altezza della faccia ABV è uguale all'apotema del cono.

Se ne conclude che tutte le facce della piramide hanno altezza uguale all'apotema del cono, onde si può senz'altro enunciare il seguente teorema, che comprende come caso particolare quello dato al numero precedente:

Teor. — *La superficie laterale di una piramide circoscritta ad un cono retto è equivalente al triangolo che ha per base il perimetro della base della piramide e per altezza l'apotema del cono.*

Prismi equivalenti.

889. Def. — Due poliedri (a facce piane) si dicono *equivalenti* se per mezzo di piani si possono dividere in poliedri ordinatamente uguali, cioè se sono somme di poliedri ordinatamente uguali (cfr. n. 346).

890. Cor. — *Due poliedri equivalenti si possono dividere in tetraedri ordinatamente uguali* (cfr. n. 348).

891. Dati più poliedri qualsivogliano, si considerino altrettanti poliedri ordinatamente uguali ai dati e a due a due adiacenti. La somma di questi si dice anche *somma* dei poliedri dati (cfr. n. 880).

892. Dalla definizione precedente discende senza altro il seguente

Teor. — *Somme di poliedri equivalenti sono equivalenti.*

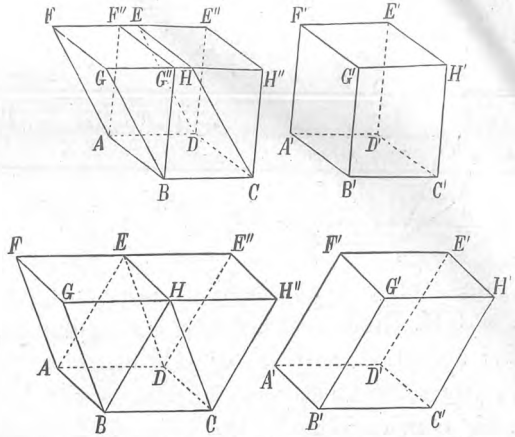
893. Così, con considerazioni analoghe a quelle del n. 355, si dimostra il seguente

Teor. — *Poliedri equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra di loro.*

894. Teor. — *Due parallelepipedi aventi basi uguali e altezze corrispondenti uguali sono equivalenti.*

I due parallelepipedi AB.... H, A′B′.... H′ abbiano uguali le basi ABCD, A′B′C′D′ e le altezze corrispondenti; diciamo che essi sono equivalenti.

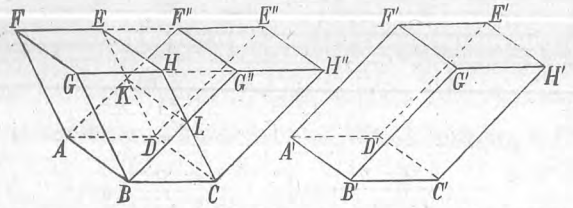
Sulla base ABCD costruiamo il parallelepipedo ABCDE″F″G″H″ uguale ad A′B′C′...H′. Le facce EFGH, E″F″G″H″ giaceranno in uno stesso piano. Ora se codeste due facce coincidessero, i due parallelepipedi AB.... H e AB.... H″ sarebbero uguali; onde



sarebbero uguali anche AB.... H, A′B′.... H′ e il teorema sarebbe dimostrato. Escluso dunque codesto caso, i due parallelogrammi EFGH, E″F″G″H″, giacenti in uno stesso piano possono essere o no compresi fra le stesse due parallele.

Esaminiamo anzitutto il primo di codesti due casi; cioè supponiamo che i due parallelepipedi AB...H, AB...H′ siano contenuti fra i due medesimi piani paralleli. Se i due parallelogrammi EFGH, E″F″G″H″ hanno comune un parallelogramma EF″G″H (che può anche ridursi ad un solo segmento in cui coincidono EH ed F″G″), i due parallelepipedi hanno comune il prisma di base BCHG″ e di spigolo laterale BA, e le due parti rimanenti sono due prismi a base triangolare BG″GFAF″, CH″HEDE″, i quali avendo uguali ordinatamente tutte le facce sono uguali (n. 818). È allora dimostrato che i due parallelepipedi, essendo somme di parti uguali, sono equivalenti. Se invece le due facce EFGH, E″F″G″H″, pur essendo comprese fra le

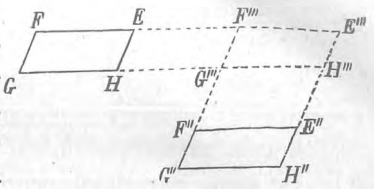
due medesime parallele, non hanno punti comuni, si riporti di seguito, sul prolungamento di GH a partire



da H, un numero sufficiente di segmenti consecutivi uguali a GH. Ripetendo codesta operazione fino a che si arrivi al primo multiplo di GH maggiore od uguale a GG″, otterremo un estremo appartenente al segmento G″H″. Se consideriamo allora i parallelepipedi aventi tutti come base il parallelogramma ABCD e come spigoli opposti ad AD i segmenti dianzi costruiti sulla retta GH″, avremo, per quanto si è visto dianzi, che il primo è equivalente ad ABCDH, l'ultimo ad ABCDH″ e ciascuno degli altri tanto al suo precedente come al suo susseguente. Risulta di qui veramente (n. 893) che ABCDH è equivalente ad ABCDH″.

Esaurito così il caso di due parallelepipedi compresi fra i due medesimi piani paralleli, passiamo al caso generale, cioè a quello in cui il parallelepipedo di base ABCD ed uguale ad A′B′C′D′H′, non è compreso con ABCDH″ fra i due medesimi piani paralleli. Allora le due facce EFGH, E″F″G″H″, giacenti ancora in un piano, sono due parallelogrammi uguali, non compresi fra le stesse due parallele, ma aventi i lati paralleli; onde, prolungando in una di esse due lati opposti e nell'altra i due lati opposti non paralleli a quelli, si determinerà un parallelogramma E‴F‴G‴H‴ uguale ai due parallelogrammi dianzi

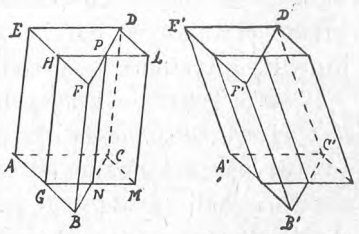
considerati, e compreso con ciascuno di essi fra due stesse parallele. Allora i due parallelepipedi aventi la base ABCD comune, e come facce opposte i due parallelogrammi EFGH, E″F″G″H″, sono ciascuno equivalente al parallelepipedo avente la base ABCD e la faccia opposta E‴F‴G‴H‴, onde essi stessi sono equivalenti fra loro (n. 893); e lo stesso accade dei due parallelepipedi primitivi



ABCD.... H, A′B′C′D′.... H′.

895. Teor. — *Due prismi triangolari aventi basi ed altezze uguali sono equivalenti.*

Siano ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ i due prismi aventi uguali le basi ABC, A′B′C′ e le relative altezze.



Nel primo di essi prendiamo il punto medio G dello spigolo AB, e, costruito il parallelogramma ACMG, contenuto dai lati AC, AG, consideriamo il parallelepipedo ACMGHEDL, avente la base ACMG e lo spigolo laterale AE. Indicando con PN la intersezione dei piani HGM, BCD, abbiamo che i due prismi triangolari aventi le basi GBN, MCN e lo spigolo laterale NP comune, sono uguali. Infatti la base GBN è uguale ad MCN (n. 369) e quindi a LDP (n. 813); gli spigoli laterali BF e DC (e quindi GH ed LM) sono uguali (n. 817). Di più sono uguali gli angoli $\widehat{GNP}$, $\widehat{LPN}$ e $\widehat{BNP}$, $\widehat{DPN}$ pel n. 263,1 e gli angoli $\widehat{HFB}$,

$\widehat{LDC}$, in quanto sono rispettivamente uguali (numeri 263,2 ; 278,1) agli angoli uguali (n. 824) $\widehat{AGH}$, $\widehat{CML}$.

Di qui pel n. 280 risulta che le facce dei due prismi sono ordinatamente uguali.

È così manifesto che il prisma triangolare dato ABCD e il parallelepipedo AGMCD, ottenuti sommando al prisma comune AGNCD due prismi triangolari uguali, sono equivalenti.

Eseguendo sul secondo prisma triangolare dato A′B′C′D′ le costruzioni analoghe a quelle eseguite sul prisma ABCD, otterremo un parallelepipedo, il quale per una parte sarà equivalente a codesto prisma triangolare e, per l'altra, avrà base ed altezza uguali al parallelepipedo AGMCD, e sarà quindi ad esso equivalente (n. prec.). Si può allora concludere che i due prismi triangolari dati, come equivalenti a parallelepipedi equivalenti, sono pure equivalenti fra loro.

896. Teor. — *Due prismi quali si vogliano aventi le basi equivalenti e le altezze uguali sono equivalenti.*

Si decompongano le basi in triangoli ordinatamente uguali (n. 348), e pei vertici di questi si conducano le parallele agli spigoli dei prismi corrispondenti. I due prismi sono così decomposti nella somma di più prismi triangolari a due a due equivalenti (n. prec.).

897. In particolare si ha dal teor. prec. che *parallelepipedi rettangoli aventi altezze uguali e basi equivalenti sono equivalenti.*

898. Per invertire la proposizione del n. 896 è necessario ricorrere nuovamente alla intuizione. Una

osservazione analoga a quella fatta al n. 358, ci mostra che vale il seguente

Postulato (dell'equivalenza o del De Zolt). — *Diviso un poliedro in parti poliedriche, la somma di queste, all'infuori di una, non è equivalente al poliedro primitivo.*

899. Teor. — *Prismi equivalenti ed aventi basi equivalenti, hanno allezze uguali.*

Se infatti avessero altezze disuguali, il prisma di altezza maggiore si potrebbe dividere, mediante una sezione parallela alla base, in due prismi, uno dei quali avesse altezza uguale all'altezza dell'altro prisma dato e fosse quindi equivalente a quest'ultimo (n. 896). Ma i due prismi dati sono equivalenti fra loro. Se ne conclude che il prisma di altezza maggiore dovrebbe essere equivalente ad una sua parte, il che è assurdo (n. prec.).

900. In modo analogo si dimostra il seguente teorema che inverte in un secondo modo il n. 896.

Teor. — *Prismi equivalenti di altezze uguali hanno basi equivalenti.*

Trasformazioni di prismi.

Quando in un modo qualsiasi si è costruito un poliedro equivalente ad un poliedro dato, si suol dire che si è *trasformato* questo in quello.

901. Probl. — *Trasformare un prisma dato in un parallelepipedo rettangolo avente uno spigolo dato.*

Basta trasformare la base del prisma in un rettangolo di base uguale allo spigolo prefissato (n. 380) e considerare il parallelepipedo rettangolo che ha co-

desto rettangolo come base e l'altezza uguale a quella del prisma dato.

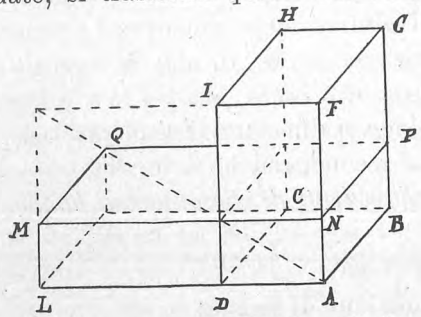
902. Possiamo anche dire che al n. prec. si è imparato il modo di *trasformare un prisma dato in un parallelepipedo di altezza data.*

903. Applicando due volte la trasformazione del n. 901 possiamo risolvere il seguente

Probl. — *Trasformare un parallelepipedo rettangolo dato in un parallelepipedo rettangolo di base data.*

Sia il parallelepipedo rettangolo ABCDIFGH, e si voglia trasformare in un parallelepipedo rettangolo avente per base un dato rettangolo.

Considerata una faccia AFID del parallelepipedo dato, si trasformi questa nel rettangolo ALMN equi-



valente e avente un lato AL uguale ad uno dei lati della base prefissata (in base al n. 358 o alla costruzione diretta suggerita dalla figura). Allora il parallelepipedo rettangolo di base ALMN e di altezza uguale ad AB è equivalente al parallelepipedo rettangolo dato (numero 897), ed ha lo spigolo AL uguale ad uno dei lati della base prefissata.

Ora le stesse costruzioni applicate pocanzi al parallelepipedo rettangolo primitivo, si applicano al parallelepipedo ALMNP, trasformando la faccia ABPN nel rettangolo equivalente e avente un lato uguale al secondo lato della base prefissata. Si otterrà così un

parallelepipedo rettangolo equivalente al dato (n. 897) e avente una faccia uguale alla base prefissata.

904. Applicando successivamente le trasformazioni indicate al n. 901 e al n. prec., si può *trasformare un prisma qualsiasi in un parallelepipedo di base data,* e, in particolare, *in un parallelepipedo rettangolo di base quadrata avente un lato assegnato.*

Nota. — In base ai teoremi dei nn. 893, 899, l'altezza del parallelepipedo così ottenuta resta determinata in modo unico.

905. Qui si presenta il problema di trasformare un parallelepipedo rettangolo (di cui la base può supporsi quadrata) in un cubo.

Questo problema ha acquistato fino dall'epoca dei Geometri greci una grande celebrità, nel caso particolare in cui si tratti di *costruire il lato di un cubo doppio di un cubo dato* (*duplicazione del cubo*). I tentativi per risolvere questo problema riuscirono infruttuosi; e l'insuccesso fu giustificato quando si dimostrò che la soluzione di esso non può essere raggiunta cogli istrumenti elementari *riga e compasso* [1]

906. Le costruzioni precedenti permettono anche di *trasformare un prisma dato in un prisma avente una base prefissata.*

Basta trasformare il prisma dato in un parallelepipedo rettangolo avente la base equivalente alla base prefissata e poi considerare un prisma avente la base prefissata e l'altezza uguale a quella del parallelepipedo ottenuto.

Differenze di prismi equivalenti.

907. Def. — Se un poliedro P è equivalente alla

[1] Cfr. l'articolo già cit. di A. Conti nei *Collectanea* di F. Enriques.

somma di un poliedro Q e di un altro poliedro, P si dice *prevalente* a Q, e Q *suvvalente* a P.

Ciò si potrà scrivere

$$P > Q \text{ o } Q < P.$$

908. Risulta dal n. 896 che se due prismi hanno altezze uguali e uno di essi ha base prevalente a quella dell'altro, il primo è prevalente al secondo; e che se due prismi hanno basi equivalenti e altezze disuguali, quello che ha altezza maggiore è prevalente.

909. In modo analogo a quello del n. 386, si dimostra in generale in base al postulato dell'equivalenza (n. 898) e al teor. del n. 893, il

Teor. — *Dati due poliedri* A *e* B, *se si verifica uno dei seguenti tre casi: che* A *sia prevalente o equivalente o suvvalente a* B, *non può verificarsi alcuno degli altri due.*

910. Nota. — Come al n. 387 notiamo che dal teor. prec. non discende affatto che, dati due poliedri A e B qualsiasi, debba necessariamente verificarsi uno dei tre casi suindicati, vale a dire che A debba essere rispetto a B *o* prevalente *o* equivalente *o* suvvalente.

Anzi vedremo (n. 918) che vi sono coppie di poliedri tali che l'uno non è nè prevalente nè suvvalente all'altro e che tuttavia non sono decomponibili in parti ordinatamente uguali.

Ma se ci limitiamo a considerare i prismi, si ha veramente che uno dei tre casi suaccennati deve necessariamente verificarsi.

Per dimostrare questo, premettiamo il seguente teorema generale.

911. Teor. — *Se i poliedri* A *e* B *sono equivalenti rispettivamente ad* A′ *e* B′, *ed è* A *prevalente a* B *sarà anche* A′ *prevalente a* B′.

Per la dimostrazione si veda il n. 387.

912. Ciò premesso, possiamo dimostrare il

Teor. — *Dati due prismi* P, Q, *il prisma* P *sarà necessariamente o prevalente o equivalente o suvvalente a* Q.

Trasformati i due prismi P, Q in due parallelepipedi rettangoli di data base P′, Q′, sarà P′ prevalente o equivalente o suvvalente a Q′, secondo che l'altezza di P′ è maggiore o uguale o minore dell'altezza di Q′ (nn. 896, 908): e, corrispondentemente, sarà (nn. 893, 911) P prevalente o equivalente o suvvalente a Q.

913. Il teor. prec. si può anche enunciare come segue:

Due prismi, tali che l'uno non sia nè prevalente nè suvvalente all'altro, sono equivalenti (cioè decomponibili in parti ordinatamente uguali).

Abbiamo così un importante *criterio per riconoscere l'equivalenza di due prismi*, differente da quello contenuto nella definizione di equivalenza (n. 889).

914. La stesso teor. del n. 912 conduce ad un altro notevole criterio per riconoscere l'equivalenza di due prismi.

Premettiamo perciò la seguente

Def. — Se un poliedro A è somma di due poliedri B e C, il poliedro B si dice *differenza* dei poliedri A e C.

915. Nota. — Per costruire la differenza di due prismi, basta trasformare questi in due parallelepipedi rettangoli di ugual base (n. 903) e considerare il parallelepipedo rettangolo avente la medesima base e

l'altezza uguale alla differenza delle altezze dei due parallelepipedi rettangoli ottenuti.

916. Teor. — *Prismi che siano differenze di prismi equivalenti sono equivalenti.*

Il prisma C sia differenza dei prismi A e B, e il prisma C′ sia differenza dei prismi A′ e B′ equivalenti ad A e B rispettivamente.

Diciamo che C e C′ sono equivalenti. Se infatti C e C′ non fossero equivalenti, uno dei due sarebbe prevalente (n. 912). Se fosse p. es. C prevalente a C′ sarebbe, come si vede dalla definizione stessa, anche la somma di B e C, cioè A, prevalente alla somma di B′ e C′, cioè ad A′, il che contraddice all'ipotesi.

Confronto di poliedri.

917. Dati due prismi A, B, sappiamo in ogni caso confrontarli (trasformandoli in parallelepipedi di ugual base) e siamo certi che A sarà necessariamente o prevalente o equivalente o suvvalente a B.

Ma, come già si è accennato al n. 910, quando si passa ai poliedri in generale, *si invontrano coppie di poliedri* A *e* B, *tali che non è* ***nè prevalente nè equivalente nè suvvalente*** *a* B.

Qui ora ci proponiamo appunto di precisare codesto fatto e di rendere possibile, anche in tal caso, il confronto di A e B.

918. Osservazioni. — Due poliedri equivalenti A e B hanno qualcosa di comune, che nel linguaggio ordinario si designa come « *estensione* » o « *solido* » talchè si dice che essi « *hanno ugual estensione o ugual solido* ».

Ma vi sono anche coppie di poliedri, che, nello

stesso senso intuitivo suaccennato, giudichiamo « *avere ugual solido* » e che pure non sono decomponibili in parti ordinatamente uguali (congruenti).

P. es. è stato dimostrato che un *tetraedro regolare* e *un cubo* (o un altro prisma qualsiasi) non possono mai essere decomposti in parti ordinatamente uguali [1]; mentre è chiaro che si possono determinare un cubo e un tetraedro regolare *aventi ugual solido*, p. es. modellandoli in argilla omogenea, in modo che abbiano ugual peso.

D'altra parte la nostra intuizione ci assicura che se due poliedri qualsivogliano non hanno ugual solido uno di essi è prevalente all'altro. Se, per esempio, si modellano (da un blocco di argilla omogenea) due poliedri A e B, i quali non abbiano ugual peso (ossia non abbiano ugual solido), uno di essi peserà più dell'altro, p. es. A più di B. E allora è chiaro che si potranno suddividire A e B in tanti pezzetti, in modo che ogni parte di B abbia la sua uguale fra quelle di A e che, oltre a codeste parti costituenti nel loro insieme B, in A ne siano contenute altre.

In accordo colle precedenti osservazioni, porremo la seguente definizione.

919. Def. — Due poliedri quali si vogliano A e B si dicono di *ugual solido* o *equisolidi*, se A non è nè prevalente nè suvvalente a B.

Scriveremo

A *equisolido* a B o A = B.

920. Se i poliedri A e B sono equivalenti, essi

---

[1] M. Dehn, *Ueber den Rauminhalt;* Math. Ann. Bd. LV. 1902; cfr. U. Amaldi, *Dimostrazione secondo* M. Dehn *della impossibilità di decomporre in generale due poliedri di ugual volume in parti poliedriche sovrapponibili;* Bollettino di Matematica del Conti, Anno IV.

hanno anche ugual solido; ma non è vera la proposizione inversa. Risulta tuttavia dal n. 913 che:

Prismi aventi ugual solido sono equivalenti (cioè decomponibili in parti ordinatamente uguali).

921. È implicito nella def. del n. 919 che:

Dati due poliedri qualsiasi A *e* B, *sarà necessariamente*

$$o \quad A > B$$
$$o \quad A = B$$
$$o \quad A < B.$$

922. Per precisare il concetto di uguaglianza di solido occorre servirsi ancora della intuizione. Noi per semplicità ammetteremo senz'altro come postulati le tre seguenti proposizioni, che potrebbero dedursi da un unico postulato, ma che sono tutte evidenti all'intuizione, come risulta da osservazioni, analoghe a quelle del n. 918.

923. Postulato. — *Poliedri aventi solido uguale ad un terzo, hanno solido uguale fra loro;* cioè da

$$A = C, \; B = C$$

consegue

$$A = B.$$

924. Postulato. — *Somme di poliedri aventi solido uguale, hanno solido uguale;* cioè da

$$A = A', \; B = B'$$

consegue

$$A + B = A' + B'.$$

925. Postulato. — *Se i poliedri* A *ed* A′ *hanno ugual solido e* B *è prevalente a* B′, *allora* A + B *è prevalente ad* A′ + B′.

926. Cor. — *Differenze di poliedri aventi solido uguale hanno solido uguale.*

Discende dal n. 922 e dal n. prec. in base a un ragionamento per assurdo.

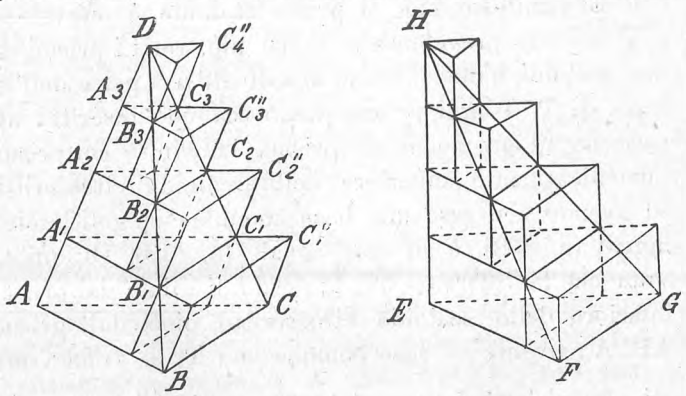
927. In generale, in base ai precedenti postulati e alla def. del n. 919 si dimostra che, in ordine al confronto di poliedri, sussistono tutte le relazioni che caratterizzano le *grandezze geometriche* (cfr. il Cap. VI).

Piramidi aventi solidi uguali.

La definizione generale di uguaglianza di solidi, data al n. 918, ci permette di confrontare i solidi di due piramidi quali si vogliono, mentre un tale confronto non sarebbe in generale possibile, ove si ricorresse alla divisione in parti ordinatamente uguali [1].

Prima di passare a codesto confronto dobbiamo svolgere alcune considerazioni preliminari.

928. Dato un tetraedro ABCD, che per semplicità designeremo con T, se ne divida l'altezza h, relativa alla base ABC, in un numero n qualsiasi di parti uguali (nella figura si è supposto $n = 4$), e, per



[1] Cfr. i lavori citati in nota alla pag. 539.

ciascuno dei punti di divisione si conducano i piani paralleli alla base ABC, i quali intersechino il tetraedro secondo i triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ . . . .; poi pel lato BC si conduca il piano parallelo alla AD fino a intersecare il piano $A_1B_1C_1$; pel lato B_1C_1 si conduca il piano parallelo alla retta AD fino ad incontrare la base ABC e il piano $A_2B_2C_2$: pel lato B_2C_2 si conduca il piano parallelo alla AD fino ad incontrare il piano $A_1B_1C_1$ e il piano $A_3B_3C_3$ e così via.

Otteniamo così due successioni di prismi triangolari

(1) $$AC_1,\ A_1C_2,\ A_2C_3,\ \ldots.$$

e

(2) $$AC_1'',\ A_1C_2'',\ A_2C_3''\ \ldots.;$$

la (1) è costituita da n — 1 prismi tutti interni al tetraedro dato T, e la (2) da n prismi, di cui ciascuno ha una parte esterna a T. La somma dei prismi interni (1) dicesi *scaloide iscritto* a T, e la somma dei prismi (2) dicesi *scaloide circoscritto*.

È manifesto che il primo scaloide è suvvalente e il secondo prevalente a T. Di più, tutti i prismi dei due scaloidi hanno altezze uguali all'n^{ma} parte dell'altezza di T, e ogni prisma dello scaloide inscritto appartiene ad un medesimo prisma indefinito col prisma immediatamente superiore dello scaloide circoscritto, ed avendo con esso una base comune e spigoli laterali uguali (n. 802), è ad esso uguale (n. 819). Di qui risulta che la differenza dei due scaloidi è data dal prisma inferiore dello scaloide circoscritto, cioè dal prisma $ABCA_1$, avente la base comune con T, e, come tutti gli altri prismi dello scaloide, l'altezza $\frac{h}{n}$.

Dopo ciò, si consideri un secondo tetraedro EFGH, che designeremo con T', avente la base EFG e l'altezza corrispondente uguali rispettivamente ad ABC e ad h; se ne divida l'altezza nello stesso numero n di parti uguali considerato dianzi, e si costruiscano per esso lo scaloide iscritto e circoscritto, i quali saranno l'uno suvvalente e l'altro prevalente a T'.

Ma l'altezza di ciascuno dei prismi di codesti scaloidi è uguale alla n^{ma} parte dell'altezza di T e di T', ossia all'altezza di ciascuno dei prismi degli scaloidi iscritto e circoscritto a T; e poichè T e T' hanno anche le basi uguali, e le sezioni parallele alle basi, che vi abbiamo considerato, dividono le altezze nel medesimo numero di parti uguali, avremo che le sezioni dell'un tetraedro sono, a partire dal vertice, ordinatamente uguali a quelle dell'altro (n. 804), cosicchè ogni prisma dello scaloide iscritto o circoscritto a T ha base ed altezza uguali al prisma di ugual posto dello scaloide rispettivamente iscritto o circoscritto a T', ed è perciò ad esso equivalente (n. 896). Discende di qui che gli scaloidi iscritto e circoscritto a T, sono equivalenti rispettivamente agli scaloidi inscritto e circoscritto a T'.

Avremo quindi che non solo T, ma anche T', è prevalente allo scaloide iscritto a T e suvvalente allo scaloide circoscritto a T'.

Premesse queste considerazioni possiamo dimostrare il seguente fondamentale

929. Teor. — *Tetraedri di base ed altezze corrispondenti uguali hanno uguale solido.*

Siano i due tetraedri ABCD, EFGH, aventi le basi e le altezze corrispondenti uguali.

Diciamo che essi hanno uguale solido.

Per dimostrarlo ragioniamo per assurdo, supponendo che l'uno sia prevalente all'altro; precisamente, indicando con T e T′ i due tetraedri, sia

$$T > T'.$$

Potremo allora considerare un prisma suvvalente alla differenza T — T′ e trasformarlo in un prisma P avente come base la base di T (e di T′) (n. 906).

Se k è l'altezza di codesto prisma P, si scelga n in modo che nk sia maggiore dell'altezza h di T (n. 37). Avremo allora che ogni prisma avente per base ABC e per altezza $\frac{h}{n}$ (la quale è minore di k) sarà suvvalente al prisma P, che ha la medesima base e altezza maggiore (n. 908), e sarà quindi anche suvvalente alla differenza di T e T′.

Ma, se, divisa l'altezza h di T in n parti uguali, consideriamo i relativi scaloidi iscritto e circoscritto, noi sappiamo per una parte che fra codesti due solidi sono compresi tanto il tetraedro T quanto T′, cosicchè la differenza dei due scaloidi è prevalente alla differenza T — T′; e d'altra parte sappiamo che la differenza dei due scaloidi è data precisamente da un prisma di base ABC e di altezza $\frac{h}{n}$. Onde si giunge alla conclusione assurda che codesto prisma è nello stesso tempo prevalente e, per quanto si è visto pocanzi, suvvalente a T — T′.

Poichè ad analoga conclusione conduce l'ipotesi $T < T'$, si ha veramente che i due tetraedri hanno ugual solido (n. 919).

Nota. — Attesa la grande importanza del teorema or ora stabilito, vogliamo indicarne una seconda dimostrazione, molto elegante, che si trova negli *Elementi* di EUCLIDE.

In questa seconda dimostrazione ricorriamo alla teoria delle proporzioni della Geometria piana, che sin qui nella Geometria solida non abbiamo mai adoperato. Supponiamo anche risolto il problema: *Trasformare un poligono in un altro, simile a un poligono dato* (cfr. es. 65, del cap. VI, pag. 292).

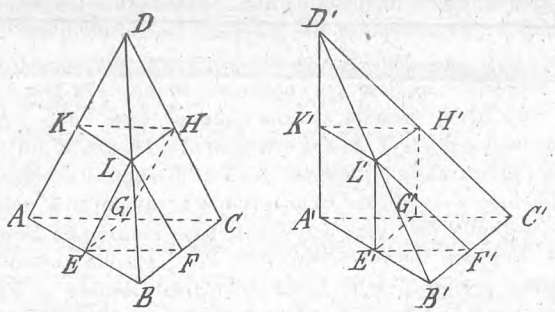
Si procede ancora per assurdo. Siano ABCD, A′B′C′D′ i due tetraedri di uguale altezza e ugual base, che noi indicheremo ancora con T,T′ rispettivamente. Costruito un prisma che sia minore della differenza fra T e T′ (supposti di solido disuguale), esso si trasformi in un prisma equivalente P di altezza uguale a quella del tetraedro T e di base simile alla base ABC di esso. Indicato un tal prisma con P, si prenda un numero n abbastanza grande perchè la $(2^n)^{ma}$ parte aliquota di un lato di ABC, per es. AB, sia minore del lato corrispondente della base di P. Allora il prisma P_n, che ha per altezza l'altezza di P, e per base il triangolo simile ad ABC, costruito sulla $(2^n)^{ma}$ parte aliquota di AB, come lato corrispondente ad AB, è manifestamente suvvalente a P.

Dopo ciò, nel tetraedro T si dividano per metà i lati AB, BC, CA, CD, AD, BD rispettivamente in E, F, G, H, K, L, e si congiungano E, F, H, K con L, G con H e con E, ed E con F (vedi la fig. alla pae. seg.); i segmenti così condotti, come congiungenti i punti medi di due lati di una faccia di T, sono paralleli ciascuno al rispettivo terzo lato (n. 305), onde risulta che i due solidi AEGHKL, EFLHGC sono due prismi triangolari. Il tetraedro T è somma di essi e dei due tetraedri HKLD, FEBL.

Confrontiamo i due prismi AEGHKL, EFLHGC. Poichè il parallelogramma CGEF e il triangolo GAE hanno base ed altezza uguali, il parallelogramma è doppio del triangolo (n. 369). D'altra parte il prisma EFLHGC si può riguardare come ottenuto dividendo per metà (mediante il piano diagonale ELHG) il parallepipedo di base EFCG e avente come spigolo laterale il segmento CH. Poichè codesto parallelepipedo ha altezza uguale e base doppia del prisma triangolare AEGHKL, ed è quindi equivalente al doppio di esso (n. 896),

concludiamo che il prisma EFLHGC ed il prisma AEGHKL sono equivalenti.

D'altra parte, per confrontare i due tetraedri HKLD, FEBL, osserviamo che i triangoli AEG, EBF, aventi ordinatamente uguali i lati AE, EB e gli angoli adiacenti (come



corrispondenti rispetto a rette parallele, n. 252) sono uguali (n. 84). Ma AEG è uguale a KLH; quindi EBF è uguale a KLH. Analogamente si dimostra che le altre facce di HKLD sono uguali rispettivamente alle facce corrispondenti di FEBL, onde risulta che i due tetraedri HKLD, FEBL sono uguali (n. 729). È poi manifesto che le basi KLH ed EBF di codesti tetraedri sono simili alla base ABC di T, ed hanno ordinatamente i lati uguali alla metà dei lati di ABC (n. 305).

Ciò premesso, eseguiamo sul tetraedro T′ le medesime costruzioni eseguite dianzi su T; T′ resterà così decomposto nella somma di due prismi triangolari equivalenti e di due tetraedri uguali, ed aventi come altezza la metà dell'altezza di T′, e come base il triangolo simile ad A′B′C′, che ha i lati metà di A′B′C′. Ma poichè, per ipotesi, la base ABC di T e l'altezza corrispondente sono rispettivamente uguali alla base A′B′C′ e all'altezza corrispondente di T′, saranno uguali i triangoli AEG, A′E′G′, e quindi equivalenti i prismi AEGHKL, A′E′G′H′K′L′ (n. 895). Saranno di conseguenza equivalenti anche i prismi EFLHGC, E′F′L′H′G′C′, come equivalenti a prismi equivalenti (n. 893); e la differenza di T e T′ sarà data dalla differenza della somma dei tetraedri KLHD ed EBFL, e della somma dei tetraedri K′L′H′D′ ed E′B′F′L′, ossia

dal doppio della differenza dei due tetraedri KLHD e K′L′H′D′, aventi basi simili rispettivamente a quelle dei primitivi T e T′, e lati della base ed altezza uguali alla metà dei lati delle basi e dell'altezza di T e T′. Designiamo KLHD e K′L′H′D′ rispettivamente con T_1 e T'_1.

Su T_1 e T'_1 possiamo ripetere le costruzioni e le considerazioni fatte dianzi su T e T′; onde avremo che la differenza di T_1, e T'_1 è uguale al doppio della differenza di due tetraedri T_2 e T'_2, aventi le basi simili rispettivamente a quelle di T_1 e T'_1 e quindi anche di T e T′, ed aventi lati della base e altezza uguali rispettivamente alla metà dei lati delle basi e dell'altezza di T_1 e T'_1, ossia alla quarta parte dei lati della base e dell'altezza di T e T′.

Ripetendo successivamente n volte le medesime costruzioni, avremo, da ultimo, che la differenza di T e T′ è equivalente a 2^n volte la differenza di due tetraedri T_n, T'_n aventi le basi simili a T e T′, e i lati della base e l'altezza uguali rispettivamente alle $(2^n)^{me}$ parti aliquote dei lati della base e dell'altezza di T e T′.

Ora è manifesto che ciascuno dei tetraedri T_n e T'_n è suvvalente al prisma avente base ed altezza uguali alla base e all'altezza di essi, e che quindi anche la differenza di T_n e T'_n sarà suvvalente a codesto prisma. Perciò la differenza di T e T′, equivalente a 2^n volte la differenza di T_n e T_n, sarà suvvalente al prisma di base uguale a quella di T_n (e T_n) e di altezza uguale a 2^n volte quella di T^n_n (e T'_n), cioè all'altezza di T (e T′).

Ma un tal prisma è equivalente al prisma P_n, che noi, in base all'ipotesi che T e T′ non siano equivalenti, abbiamo visto essere invece suvvalente a P, e quindi anche alla differenza di T e T′.

Concludiamo che l'ipotesi che T e T′ non abbiano ugual solido è assurda.

930. Cor. — *Piramidi aventi altezze uguali e basi equivalenti hanno ugual solido.*

Dividendo le due basi in triangoli a due a due uguali (n. 348), e considerando i tetraedri aventi per basi codesti triangoli e per vertici i vertici delle pira-

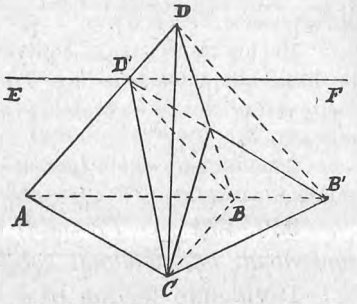
midi rispettive, queste si decompongono nel medesimo numero di tetraedri aventi a due a due basi ed altezze uguali, e quindi anche (n. prec.) solido uguale. Perciò anche le piramidi date hanno ugual solido (n. 924).

931. In base al corollario precedente si può facilmente costruire un tetraedro avente solido uguale ad una piramide data e la medesima altezza: basta trasformare la base della piramide primitiva in un triangolo equivalente (n. 375).

Così si possono sommare piramidi aventi la medesima altezza, in quanto il problema si riduce a sommarne le basi; ma per sommare piramidi di altezze disuguali è necessario risolvere prima il seguente problema.

932. Probl. — *Costruire un tetraedro che abbia solido uguale ad un tetraedro dato e un' altezza uguale ad un segmento dato.*

Dato il tetraedro ABCD, e prefissato un segmento come altezza, sia α il piano parallelo ad ABC e distante da esso di codesto segmento, e sia EF la intersezione di esso col piano ABD. Costruito allora nel piano ABD il triangolo AB'D' equivalente ad ABD, ed avente la base sulla AB e il vertice opposto sulla EF (n. 377), diciamo che il tetraedro AB'CD' soddisfa al problema.



Infatti la distanza del vertice D' dal piano della faccia AB'C è uguale all' altezza prefissata, e, d' altra parte, il tetraedro AB'CD' ha la faccia AB'D' equivalente alla faccia ABD del tetraedro ABCD, e il vertice opposto C in comune con esso; cosicchè (n. 930) i due tetraedri ABCD, AB'CD' hanno solidi uguali.

933. Il problema precedente permette di *costruire un tetraedro che abbia solido uguale ad una qualsiasi piramide data, e un' altezza uguale ad un segmento dato.* Basta a questo scopo costruire dapprima un tetraedro che abbia solido uguale alla piramide data e poi applicare il numero precedente.

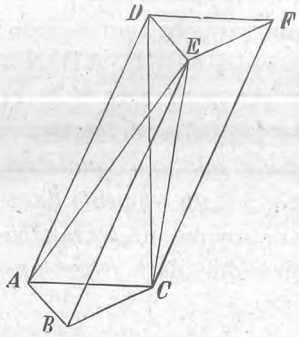
Si possono allora *sommare più piramidi quali si vogliano*, costruendo dapprima altrettante piramidi aventi tutte la medesima altezza e solidi rispettivamente uguali a quelli delle date; e poi considerando una piramide avente codesta altezza medesima e la base equivalente alla somma delle basi delle nuove piramidi ottenute.

Infine, da quanto precede, risulta come si possa *costruire una piramide avente solido uguale ad un poliedro dato.* Congiungendo i vertici del poliedro con un punto di esso, in particolare con un vertice, si decompone il poliedro in un certo numero di piramidi, che sommate insieme danno una piramide avente solido uguale al poliedro.

Confronto fra prismi e piramidi.

934. Teor. — *Un prisma ha solido triplo di una piramide avente base ed altezza uguali alla base e all' altezza del prisma dato.*

Considerando dapprima il caso di un prisma triangolare ABCD, abbiamo che il piano ACE divide il



prisma nella piramide ABCE avente base ed altezza uguali al prisma dato, e nella piramide quadrangolare ACFDE. Quest'ultima è divisa dal piano ECD nelle due piramidi triangolari ACDE ed EFDC, la seconda delle quali ha base ed altezza uguali al prisma. Di qui discende intanto che le due piramidi ABCE, EFDC hanno solidi uguali (n. 929). Quanto poi alla terza piramide ACDE, essa ha la base uguale alla faccia FCD della piramide EFDC, e il vertice opposto comune con essa; onde risulta che anch'essa ha solido uguale a codesta piramide EFDC.

Abbiamo dunque veramente che il prisma ABCD è somma di tre piramidi aventi tutte e tre solido uguale a una piramide di base ed altezza uguali al prisma dato.

Se poi il prisma è a base qualsiasi (non triangolare), si decomponga questa in triangoli, e, corrispondentemente, il prisma in altrettanti prismi triangolari. Ciascuno di questi è somma di tre piramidi triangolari, aventi solidi uguali alla piramide di altezza e base uguale al prisma triangolare considerato. Risulta di qui che la somma dei prismi triangolari, cioè il prisma dato, è equivalente alla somma delle terne di piramidi triangolari. Ma questa somma è manifestamente equivalente alla somma di tre piramidi aventi tutte e tre solidi uguali ad una piramide di base ed altezza uguali al prisma dato.

Nota. — Il teorema or ora dimostrato si può enunciare dicendo che *una piramide ha solido uguale al terzo di un prisma avente base ed altezza rispettivamente uguali ad essa.*

935. I problemi risoluti ai nn. 901, 903, 932, 933 e il teor. prec. permettono di risolvere il seguente problema, che è di fondamentale importanza.

Probl. — *Costruire sopra un rettangolo (o un quadrato) assegnato come base, un parallelepipedo rettangolo, avente solido uguale ad un qualsivoglia poliedro dato.*

Costruita una piramide avente solido uguale al poliedro dato (n. 933), si consideri il prisma che ha la base stessa di codesta piramide, e l'altezza uguale alla terza parte dell'altezza di essa (n. prec.); e da ultimo si trasformi codesto prisma nel prisma che ha per base il rettangolo o il quadrato assegnato (numeri 901, 903).

Nota. — Giova notare come, fissata la base del parallelepipedo rettangolo che deve aver solido uguale al poliedro dato, l'altezza che si ottiene pel parallelepipedo è sempre la stessa, benchè la costruzione, che a ciò si richiede, possa eseguirsi in infiniti modi.

Infatti, due parallelepipedi rettangoli aventi la stessa base e altezze disuguali hanno solidi disuguali (n. 908).

Confronto di poliedri a facce curve.

936. Si può estendere il concetto di equivalenza definito al n. 889 (cfr. il n. 409).

Un poliedro qualsiasi (a facce piane o curve) si può immaginare diviso mediante superficie piane o

curve (cioè sferiche o coniche o cilindriche) in *parti* limitate da superficie piane e curve, in modo da risultare come somma di codeste parti non ricoprentisi fra loro.

Allora si diranno *equivalenti* due poliedri a facce piane o curve, che possano essere divisi, per mezzo di superficie piane e curve, in parti a due a due ordinatamente uguali.

Similmente si estende la definizione di *prevalenza e suvvalenza.*

937. Discende di qui come al n. 893 il

Teor. — *Poliedri a facce piane o curve, i quali siano equivalenti ad un terzo, sono equivalenti fra loro,*

938. Un'osservazione analoga a quella del n. 358 ci conduce ad enunciare il

Postulato (dell'equivalenza generalizzato). — *Diviso in parti un poliedro a facce piane o curve per mezzo di superficie piane o curve, la somma di codeste parti all'infuori di una non è equivalente al poliedro primitivo.*

939. Osservazione. — Un'osservazione analoga a quella del n. 358 e il teor. del n. 913 permettono di concludere (cfr. il n. 412) che *se due prismi sono equivalenti per divisione mediante superficie piane e curve si potranno anche dividere in parti ordina tamente uguali mediante soli piani.*

940. In base alla def. del n. 936 e al postulato del n. 938 si dimostra anche pei poliedri a facce curve (e rispetto alla equivalenza generalizzata) il teor. del numero 909.

Ma, come già accadde nel piano per i poligoni a lati curvilinei e nello spazio per i poliedri a faccie piane, le relazioni di equivalenza, prevalenza e suvvalenza non sono sufficienti ad esaurire tutti i casi che

si possono presentare nel confronto di poliedri a facce curve; giachè esistono coppie di poliedri a facce curve A e B tali che A non è nè prevalente, nè equivalente, nè suvvalente a B.

Osservazioni analoghe a quelle del n. 918 conducono ad estendere ai poliedri a facce curve la def. del n. 919, per cui due poliedri A e B qualsiansi si diranno avere ugual solido quando A non sia nè prevalente nè suvvalente a B.

Dopo di che, estesi ai poliedri a facce curve i postulati dei nn. 923-925, si dimostreranno anche pei poliedri a facce curve tutte le relazioni che caratterizzano le *grandezze geometriche* (nn. 427-428).

In particolare notiamo che se due poliedri non hanno ugual solido, esiste un poliedro *differenza dei dati.*

In base al n. 879, si può sempre considerare un tetraedro o un prisma (di cui la base o l'altezza potrà essere assegnata (nn. 902, 903), suvvalente a codesta differenza (cfr. 426).

XV.

PROPORZIONI E SIMILITUDINE

Proporzioni.

941. Ricordando le proprietà per le quali nella Geometria piana abbiamo raccolto i segmenti, gli angoli, i poligoni sotto la comune denominazione di grandezze geometriche (n. 428), vediamo che alle medesime proprietà soddisfano anche i diedri e i poliedri a faccie piane o curve.

Considereremo pertanto i diedri, e i poliedri come formanti nuove *classi di grandezze geometriche* (in ciascuna delle quali valgono le ricordate proprietà appartenenti alla uguaglianza, disuguaglianza, somma, ecc.).

Applicando direttamente la definizione di proporzione fra grandezze (n. 440), dedurremo i seguenti teoremi.

942. Teor. — *Dato un gruppo di piani paralleli e due trasversali, due segmenti quali si vogliono di una di queste, sono proporzionali ai segmenti dell'altra, intercettati dai medesimi piani.*

Si deduce direttamente dal n. 802, nello stesso modo in cui il teorema di TALETE (n. 448) si deduce dal teorema del n. 300.

943. Teor. — *I diedri sono proporzionali alle rispettive sezioni normali.*

Per definizione, fra due diedri passa la medesima relazione di uguaglianza o disuguaglianza che fra le rispettive sezioni normali (nn. 646, 660), e la somma di più diedri ha per sezione normale la somma delle sezioni normali dei diedri addendi (n. 659). Di qui risulta senz'altro che se, dati due diedri, si prendono due equimultipli arbitrarii del primo diedro e della sua sezione normale, e due equimultipli del secondo diedro e della sua sezione normale, avremo che il multiplo del primo diedro sarà maggiore, uguale o minore del multiplo del secondo diedro, secondo che il multiplo della prima sezione normale è maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda sezione normale. Abbiamo cioè che i due diedri sono proporzionali alle rispettive sezioni normali (n. 440).

944. Teor. — *Prismi o piramidi aventi ugual base sono proporzionali alle rispettive altezze* (n. 908; cfr. n. 464; n. 934).

945. Teor. — *Prismi o piramidi aventi la stessa altezza sono proporzionali alle basi rispettive* (n. 908; n. 464).

Nota. — I due teoremi precedenti si invertono in base alla unicità della quarta proporzionale (numeri 472, 473).

Sezioni parallele di un angoloide
Tronco di piramide.

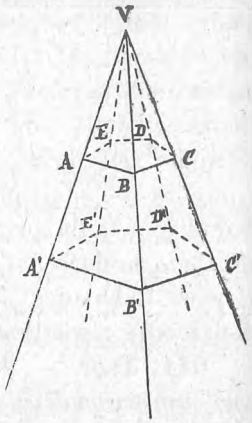
946. Teor. — *Se un piano sega tutti gli spigoli di un angoloide, il poligono sezione è simile alla sezione del medesimo angoloide con ogni altro piano parallelo al dato; e le*

due sezioni sono proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice.

Sia ABCDE la sezione di un angoloide $\widehat{V}$ con un piano che intersechi tutti gli spigoli di esso, e sia A'B'C'D'E' la sezione col medesimo angoloide di un piano parallelo ad ABC.

Diciamo anzitutto che codesti due poligoni, aventi ugual numero di vertici, sono simili.

Infatti i lati dei due poligoni appartenenti alla medesima faccia dell'angoloide sono paralleli, come sezioni di piani paralleli con uno stesso piano (n. 785). Allora considerando, per esempio, i triangoli VAB, VA'B', avremo che AB sta ad A'B' come VB sta a V'B' (n. 457): ma, confrontando i triangoli VBC, VB'C', abbiamo che come VB sta a VB' così BC sta a B'C'; onde risulta che AB sta ad A'B' come BC sta a B'C' (n. 470). Si conclude così che i lati dell'un poligono sono proporzionali ai lati dell'altro, che appartengono ordinatamente alla medesima faccia dell'angoloide.



Quanto agli angoli compresi fra lati proporzionali, poichè sono sezioni ugualmente inclinate del medesimo diedro, essi sono uguali (n. 681); onde concludiamo che i poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' sono simili.

In secondo luogo diciamo, che se la perpendicolare, abbassata dal vertice sui piani delle due sezioni, li incontra nei due punti H, H', sussiste la proporzione

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = q\ (VH) ; q\ (VH').$$

Infatti, i due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' in quanto sono simili sono proporzionali ai quadrati di due lati omologhi qualsiansi (n. 513): p. es. è

$$(1) \qquad ABCDE : A'B'C'D'E' = q\ (AB) : q\ (A'B').$$

Ma nei due triangoli simili ABC, A'B'C' si ha che

$$AB : A'B' = VA : VA'$$

e d'altra parte, considerando i segmenti determinati dai

piani paralleli delle due sezioni sulle due trasversali VA, VH, abbiamo che

$$VA : VA' = VH : VH';$$

onde sussisterà la proporzione

$$AB : A'B' = VH : VH'.$$

Di qui per il n. 514, ricaviamo che

$$q\ (AB) : q\ (A'B') = q\ (VH) : (q\ VH')$$

e in base alla (1) concludiamo che veramente

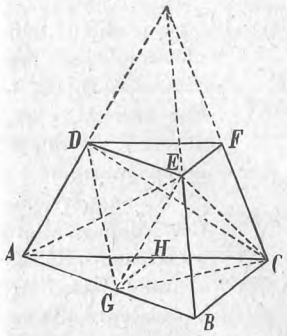
$$ABCDE : A'B'C'D'E' = q\ (VH) : q\ (VH').$$

947. Def. — Dato un angoloide, e consideratene le sezioni con due piani paralleli, il poliedro contenuto da codeste due sezioni e dai trapezi determinati sulle facce dell'angoloide dai due piani paralleli considerati, dicesi *tronco di piramide* (a basi parallele).

I due poligoni simili, sezioni dell'angoloide, si dicono *basi*, e la loro distanza *altezza* del tronco.

Il tronco si può anche definire come differenza delle due piramidi aventi come angoloide al vertice l'angoloide dato, e come basi le basi del tronco.

948. Teor. — *Il tronco di piramide* (a basi parallele) *ha solido uguale alla somma di tre piramidi aventi la stessa altezza del tronco, e per basi rispettive le due basi del tronco e la loro media proporzionale.*



Dimostriamo anzitutto il teorema per un tronco di tetraedro ABCDEF. Esso dal piano AEC, rimane diviso nella piramide a base quadrangolare ACFDE e nel tetraedro ABCE che ha l'altezza del tronco e la base ABC comune con esso. Conducendo nella piramide a base quadrangolare il piano ECD, essa rimane divisa nel tetraedro ACDE e nel tetraedro DEFC, il quale ha l'altezza del tronco e la base DEF comune con esso. Perciò a dimostrare il teorema ci rimane solo da far vedere che il tetraedro ACDE ha solido uguale ad un tetraedro avente l'altezza del tronco e la base media proporzionale fra ABC e DEF.

Condotta per E la parallela alla DA fino ad incontrare in G la AB, e congiunto G con D, i tetraedri ACDG e ACDE hanno la base ACD comune, e i vertici opposti sopra una stessa parallela alla base (n. 773); onde (n. 777) codesti due tetraedri hanno solidi uguali (n. 919). Poichè ACDG ha sulla base AGC la medesima altezza del tronco, basterà oramai dimostrare che AGC è media proporzionale fra ABC e DEF ossia (condotta da G la GH parallela a BC, e quindi ad EF) fra ABC e AGH, che è evidentemente uguale a DEF.

Ora si ha che (n. 464)

$$ABC : AGC = AB : AG$$
$$AGC : AGH = AC : AH.$$

Ma pel teorema di Talete (n. 448)

$$AB : AG = AC : AH;$$

onde risulta (n. 469) che

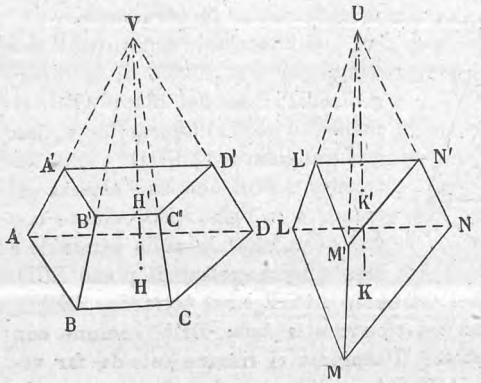
$$ABC : AGC = AGC : AGH;$$

ossia

$$ABC : AGC = AGC : DEF.$$

Dimostrato così il teorema nel caso di un tronco di tetraedro, consideriamo il caso generale di un tronco di piramide qualsiasi.

Sia il tronco di piramide qualsiasi ABC... C'D' di cui indicheremo per brevità con B_1, B_2 le due basi ($B_1 < B_2$) e sia V il vertice della piramide, a cui esso appartiene. Costruiamo allora un tetraedro ULMN avente la base LMN equivalente alla base maggiore B_2 del tronco dato e l'altezza UK uguale all'altezza VH della piramide a cui quel tronco appartiene. Se VH' è la distanza della base minore B_1 del tronco dato dal vertice V della sua



piramide, prendiamo sull'altezza UK del tetraedro il segmento UK' = VH', e per il punto K' conduciamo la sezione L'M'N' parallela alla base LMN.

Poichè sussistono le proporzioni

$$ABCD : A'B'C'D' = q\,(VH) : q\,(VH')$$
$$LMN : L'M'N' = q\,(UK) : q\,(UK');$$

ed è per costruzione UK = VH, UK' = VH', avremo che

$$ABCD : A'B'C'D' = LMN : L'M'N'.$$

D'altra parte ABCDE è equivalente ad LMN; onde concludiamo che L'M'N' è equivalente ad A'B'C'D'.

Di qui risulta che le due piramidi VABCD, VA'B'C'D' hanno solidi rispettivamente uguali ai due tetraedri ULMN, UL'M'N' e quindi anche il tronco di piramide ABC... C'D', differenza delle due prime piramidi, avrà solido uguale al tronco di tetraedro LMNN'L'M', differenza dei due tetraedri. Si conclude di qui che anche il tronco di piramide dato ha un solido uguale alla somma dei tre tetraedri, in cui, secondo quanto dicemmo dianzi, si può decomporre il tronco di tetraedro: inoltre a codesti tre tetraedri possiamo evidentemente sostituire tre piramidi, che abbiano l'altezza comune dei due tronchi e le basi rispettivamente uguali ad ABCDE, A'B'C'D'E' e alla loro media proporzionale.

Poliedri simili.

949. Def. — Due poliedri si dicono *simili*, se hanno uguali gli angoloidi e ordinatamente simili le facce che li comprendono.

Dati due poliedri simili, ad ogni elemento (vertice, spigolo, angolo, diedro) dell'uno *corrisponde* un elemento (*omologo*) dell'altro.

Gli angoli e i diedri omologhi sono uguali.

Gli spigoli omologhi sono proporzionali.

950. Come esempi di poliedri simili si possono considerare due poliedri regolari di un ugual numero

di faccie, in particolare, due cubi o due tetraedri regolari.

951. Si può distinguere una similitudine *diretta* o *inversa*, secondochè gli angoloidi corrispondenti sono uguali direttamente o inversamente.

952. Per riconoscere la similitudine di due poliedri, non importa verificare la sussistenza di tutte le proporzioni ed uguaglianze richieste dalla definizione; ma si hanno in proposito alcuni criterii, di cui porge un semplice esempio il seguente teorema, del quale proponiamo come esercizio la dimostrazione.

Teor. — *Due tetraedri sono simili se hanno uguale un diedro e simili le facce intorno ad esso, per modo che si corrispondano gli spigoli comuni a queste e gli angoli adiacenti ai suddetti spigoli.*

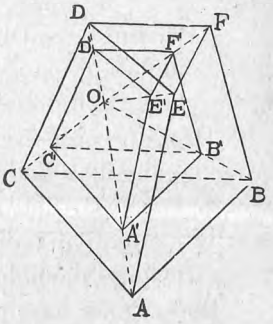
953. Teor. — *Due poliedri simili ad un terzo sono simili fra loro.*

954. Teor. — *Due poliedri simili, aventi uguali due spigoli omologhi, sono uguali* (nn. 442, 729).

955. Relativamente alla costruzione di poliedri simili ci limiteremo ad indicare il seguente procedimento che estende l'omotetia fra poligoni, considerata ai numeri 506, 507.

Probl. — *Costruire un poliedro simile ad un poliedro dato.*

Sia, per es., un poliedro a sei vertici ABCDEF, e prendasi fuori dalla sua superficie un punto O.



Congiunto O con A, B, C, D, E, F, si prendano, sulle semirette congiungenti, tanti segmenti OA′, OB′, OC′, OD′, OE′, OF′, proporzionali ad

OA, OB, OC, OD, OE, OF. Il poliedro A′B′C′D′E′F′ riesce simile al poliedro dato ABCDEF.

Infatti si ha che:

a) gli spigoli AB e A′B′, BC e B′C′.... sono paralleli (n. 477);

b) gli angoli dei due poliedri ($\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'B'C'}$ ecc.) risultano uguali come sezioni ugualmenle inclinate dei medesimi diedri (n. 681);

c) gli spigoli AB e A′B′, BC e B′C′, ecc. sono proporzionali ad OA e OA′, OB e OB′,... (n. 457);

d) in conseguenza le facce dei due poliedri sono poligoni simili (n. 498):

e) infine i piani ABC e A′B′C′ ecc., risultano paralleli (n. 782), e quindi sono uguali i loro diedri (n. 801); onde anche gli angoloidi dei due poliedri sono uguali (n. 717).

956. Def. — Due poliedri simili, nella posizione particolare considerata innanzi, diconsi *omotetici*.

957. Nota. — La similitudine fra due poliedri omotetici è diretta. Ogni poliedro direttamente uguale all'uno di essi è simile direttamente all'altro; ed invece ogni poliedro inversamente uguale all'uno è inversamente simile all'altro.

958. Cor. — *Si può costruire un poliedro simile ad un poliedro dato, ed avente un lato assegnato.*

Se l è il lato prefissato come omologo di AB, basta nella costruzione precedente (n. 955), prendere OA′ per modo che sussista la proporzione

$$OA : OA' = AB' : l.$$

959. Cor. — *Due poliedri simili si possono* (in infiniti modi) *decomporre in tetraedri a due a due ordinatamente simili.*

Siano per es. due poliedri simili ABCDEF, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Preso nell'interno di ABCDEF un punto qualsiasi O, si costruisca, seguendo il n. prec., un poliedro A'B'C'D'E'F' omotetico ad ABCDEF ed avente uno spigolo $A'B' \equiv A_1B_1$ (vedi fig. al n. 955).

Questo poliedro risulta simile ad $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ perchè entrambi sono simili ad ABCDEF; e siccome è per costruzione $A'B' = A_1B_1$ sarà $A'B'C'D'E'F' \equiv$ $\equiv A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (n. 954).

Ora si immagini che ciascuna faccia del poliedro ABCDEF, la quale non sia già triangolare, venga decomposta in triangoli per mezzo delle diagonali uscenti da un vertice, e si congiungano i vertici di tutti codesti triangoli con O. Allora il poliedro stesso resta decomposto in tanti tetraedri, e i medesimi segmenti condotti dianzi per O, prolungati ove occorra, decompongono il poliedro A'B'C'D'E'F' in altrettanti tetraedri ordinatamente omotetici ai primi. Eseguendo le stesse costruzioni nel poliedro $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ questo rimane decomposto in tanti tetraedri ordinatamente simili a quelli in cui è decomposto ABCDEF.

960. Teor. — *Le superficie di due poliedri simili sono proporzionali ai quadrati degli spigoli omologhi.*

Il teorema si dimostra componendo le proporzioni che si ottengono tra le facce (simili) e i quadrati dei loro lati (n. 513), procedendo cioè in modo analogo a quello tenuto al n. 510.

961. Passiamo da ultimo a determinare la relazione che intercede tra due poliedri simili. Generalizzando notazioni già usate in Geometria piana, designeremo con pr $(a, b, c,)$ il parallelepipedo contenuto dagli spigoli a, b, c; con cb (a) il cubo di lato a.

Teor. — *Due poliedri simili sono proporzionali ai cubi degli spigoli omologhi.*

1° Cominciamo dal caso di due parallelepipedi rettangoli simili: siano essi pr (a, b, c) e pr (a', b', c'), e supponiamo anzitutto che a ed a' siano commensurabili, e precisamente si abbia

$$\frac{a}{m} = \frac{a'}{n}.$$

Sarà anche, per la ammessa proporzionalità di a,a' ; $b,b' : c,c'$ (n. 442)

$$\frac{b}{m} = \frac{b'}{n}, \quad \frac{c}{m} = \frac{c'}{n}.$$

Si divida allora ciascuno degli spigoli del primo parallelepipedo in m parti uguali, e ciascuno spigolo del secondo in n parti uguali, e per ogni punto di divisione di ogni spigolo si conduca il piano perpendicolare ad esso. Il primo parallelepipedo resta così diviso in m^3 parallelepipedi rettangoli uguali, di spigoli $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$: e il secondo in n^3 parallelepipedi uguali fra loro, aventi gli spigoli $\frac{a'}{n}, \frac{b'}{n}, \frac{c'}{n}$ e perciò uguale ai precedenti. Risulta cioè che

$$\frac{\text{pr } (a, b, c)}{m^3} = \frac{\text{pr } (a', b', c')}{n^3}.$$

D'altra parte si vede analogamente che il cubo di a è equivalente alla somma di m^3 volte il cubo di $\frac{a}{m}$, e il cubo di a' è equivalente alla somma di n^3 volte il cubo di $\frac{a'}{n}$, che è uguale al cubo di $\frac{a}{m}$: si ha dunque

$$\frac{\text{cb } (a)}{m^3} = \frac{\text{cb } (a')}{n^3}.$$

Di qui, e dall'uguaglianza precedente, risulta che

pr (a, b, c) : pr (a', b', c') = cb (a) : cb (a').

Per dimostrare la stessa proposizione nel caso generale, si considerino insieme coi dati parallelepipedi rettangoli

pr (a, b, c), pr (a', b', c')

i due altri parallelepipedi rettangoli

pr (a', b, c), pr (a', b', c).

Avremo che (n. 944)

pr (a, b, c) : pr $(a', b, c) = a : a'$

pr (a', b, c) : pr $(a', b', c) = b : b'$

pr (a', b', c) : pr $(a', b', c') = c : c'$;

ossia, per la proporzionalità delle coppie a, a' ; b, b' ; c, c', avremo che i parallelepipedi

pr (a', b, c), pr (a', b, c), pr (a', b', c), pr (a', b', c')

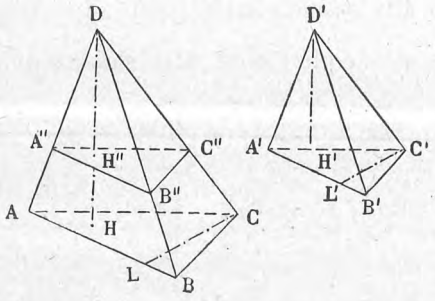
stanno ciascuno al seguente come a sta ad a'. Ma anche ciascuno dei solidi

cb (a), pr (a, a, a'), pr (a, a', a'), cb (a')

sta al seguente come a ad a'; onde risulta (n. 446) che codeste 2 quaterne di solidi sono proporzionali (n. 468), e in particolare,

pr (a, b, c) : pr (a', b', c') = cb (a) : cb (a').

2°. Consideriamo in secondo luogo due tetraedri simili ABCD, A′B′C′D′, che indicheremo per brevità con T e T′ rispettivamente. Fissate due facce omologhe, p. es. ABC, A′B′C′, e, presi in questi due triangoli simili due lati omologhi, p. es. AB, A′B′,si trasformino codeste due basi nei rettangoli r (AB, $\frac{1}{2}$ CL),



r(A′B′, $\frac{1}{2}$C′L′), dove CL, C′L′ sono, nei due triangoli considerati, le altezze relative ai lati AB, A′B′. Essendo poi DH, D′H′ le altezze dei due tetraedri relative alle basi ABC, A′B′C′ rispettivamente, si considerino i due parallelepipedi rettangoli

pr(AB, $\frac{1}{2}$ CL, $\frac{1}{3}$DH), pr(A′B′ $\frac{1}{2}$ C′L′, $\frac{1}{3}$ D′H′), che indicheremo con P, P′ e che hanno solido uguale a T, T′ rispettivamente (n. 934).

Diciamo che P, P′ sono simili. Per dimostrare ciò, basta provare che (nn. 949, 443, 469)

AB : A′B′ = CL : C′L′ = DH : D′H′.

A tal fine notiamo anzitutto che nei triangoli simili ABC, A′B′C′

(1) AB : A′B′ = BC : B′C′

e che nei triangoli simili BCL, B′C′L′

BC : B′C′ = CL : C′L′;

onde risulta intanto che

AB : A′B′ = CL : C′L′.

In secondo luogo sulla DA si prenda il segmento DA″ = D′A′ e per A″ si conduca la sezione A″B″C″ parallela ad ABC. Il tetraedro A″B″C″D, simile ad ABCD e quindi ad A′B′C′D′ e avente lo spigolo A″D = A′D′, risulterà uguale ad A′B′C′D′ (n. 954); cosicchè sarà

(2) DH″ = D′H′, A″B″ = A′B′.

Ma per il n. 942 abbiamo che

AD : A″D = DH : DH″,

e dai triangoli simili ABD, A″B″D risulta che

AD : A″D = AB : A″B″;

onde, tenuto conto delle (2), concludiamo che

AB : A′B′ = DH : D′H′

e quindi, ricordando la (1)

AB : A′B′ = BC : B′C′ = DH : D′H′.

Constatato così che i due parallelepipedi P, P′ sono simili e tenuto conto che essi sono equivalenti a T, T′ avremo anzitutto che

$$P : P = cb\ (AB) : cb\ (A'B')$$

e poi che

$$T : T' = cb\ (AB) : cb\ (A'B').$$

3.° Occupiamoci infine del caso generale, e confrontiamo due poliedri simili qualsiansi, p. es. ABCDEF, $A_1B_1C_1D_1E_1E_1$.

Diciamo che i solidi di essi sono proporzionali ai cubi di due spigoli omologhi, p. es. ai cubi di AB e A_1B_1.

Infatti si decompongano i due poligoni in tante coppie di tetraedri simili (n. 959). Ragionando in modo analogo a quello del n. 513 si dimostra che codeste coppie di tetraedri sono tutte proporzionali; onde concluderemo, in base al n. 509, che è proporzionale a quelle anche la coppia costituita dalla somma degli antecedenti e dalla somma dei conseguenti, cioè dal poliedro ABCDEF e dal poliedro $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Ma due tetraedri parziali, aventi come lati omologhi AB, A_1B_1, stanno fra loro come i cubi di AB e A_1B_1; cosichè veramente

$$ABCDEF : A_1B_1C_1D_1E_1F_1 = cb(AB) : cb(A_1B_1).$$

ESERCIZI

1. Trasformare in un quadrato la superficie laterale di:
un tetraedro regolare;
un cubo;
un ottaedro regolare;
un dodecaedro regolare;
un isocaedro regolare;
una piramide circoscritta ad un cono retto, dato il perimetro della base, l'altezza del cono e la sua apertura;
un tetraedro iscritto in un cono retto, dati i lati del triangolo base e l'altezza del cono.

2. Il quadrato della diagonale di un parallelepipedo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati dei tre spigoli concorrenti in un vertice.

3. In un parallelepipedo qualsiasi, la somma dei quadrati delle diagonali è equivalente alla somma dei quadrati degli spigoli.

4. Se si hanno due terne di segmenti ***a, b, c,*** e ***a′, b′, c′,*** tali che sieno equivalenti i rettangoli di ***a, b,*** e ***a′, b′*** e quelli di ***b, c*** e ***b′, c′,*** saranno pure equivalenti i rettangoli di ***a, c,*** e ***a′, c′***. (Si confrontino i parallepipedi rettangoli aventi per spigoli ***a, b, c*** e ***a′, b′, c′***).

Nota. — Si confronti la semplice dimostrazione che qui si ottiene, con quella indicata nell'es. 85 dopo il Cap. V; pagina 222.

Si confrontino per le traccie degli esercizi seguenti gli esercizi 44 e segg., 72 e segg. del cap. V.

5. Luogo dei punti pei quali la differenza dei quadrati

delle distanze da due punti fissi è equivalente ad un quadrato assegnato.

6. Se per un punto O, fuori di una sfera, si conduce una retta, a segare la sfera di due punti A, B, il rettangolo dei segmenti OA, OB resta costantemente equivalente alla differenza fra il quadrato della distanza di O dal centro della sfera e il quadrato del raggio. (La superficie del suddetto rettangolo dicesi *potenza* del punto rispetto alla sfera).

7. Luogo dei punti ugualmente interni od esterni rispetto a due o tre sfere date, ed aventi ugual potenza rispetto a queste. *Piano radicale* di due sfere, *asse radicale* di tre.

8. Punto interno od esterno rispetto a quattro sfere date (o comune ad esse) che abbia ugual potenza rispetto a queste. Discussione (*centro radicale* di quattro sfere).

9. Luogo dei punti la cui potenza rispetto ad una sfera data è equivalente ad un quadrato assegnato.

10. Luogo dei punti per cui la somma dei quadrati delle distanze da più punti fissi, presi ciascuno un certo numero intero di volte, è equivalente ad un quadrato assegnato.

11. Luogo dei punti per cui la differenza fra i quadrati delle distanze da due rette parallele assegnate è equivalente ad un dato quadrato.

12. Luogo dei punti per cui la somma dei quadrati delle distanze da più rette parallele, presi ciascuno un certo numero intero di volte, è equivalente ad un quadrato assegnato.

13. Due prismi triangolari appartenenti al medesimo prisma indefinito, e aventi uguali gli spigoli laterali, sono equivalenti. (Si considerino prima due prismi triangolari di uno stesso prisma indefinito aventi comune una faccia; e poi due prismi aventi comune un solo spigolo).

14. Due prismi, di un numero qualsiasi di facce, appartenenti al medesimo prisma indefinito e aventi uguali gli spigoli laterali, sono equivalenti.

15. Due prismi, aventi uguali le sezioni normali e gli spigoli laterali, sono equivalenti (n. prec.).

16. Due prismi, aventi uguali gli spigoli laterali, ed equivalenti le sezioni normali, sono equivalenti.

17. Se un tetraedro ha spigoli doppi di quelli di un altro, esso ha solido uguale ad otto volte quello del secondo.

18. Il cubo della somma di due segmenti è equivalente alla somma dei cubi dei due segmenti e del triplo del parallelepipedo rettangolo che ha per spigoli i due segmenti dati e la loro somma.

19. Se si conducono due piani paralleli a due facce ortogonali di un parallelepipedo rettangolo, i quali s'incontrino secondo una retta appartenente ad un piano (diagonale) che contiene due spigoli opposti, si ottengono due parallelepipedi rettangoli, non attraversati dal suddetto piano diagonale, tra loro equivalenti.

20. Un tetraedro ha solido uguale alla sesta parte di un parallelepipedo le cui facce opposte passino per due spigoli opposti del tetraedro.

21. Un cubo ha solido uguale sei volte l'ottaedro regolare che ha come vertici i centri delle facce del cubo.

22. Un ottaedro regolare ha solido uguale a $^2/_3$ di quello del cubo i cui spigoli sono uguali agli spigoli dell'ottaedro.

23. Trasformare in un parallepipedo rettangolo, avente solido uguale, e di cui la base sia un quadrato assegnato:

a) un tetraedro la cui base sia un triangolo equilatero avente come lato il lato del quadrato, e in cui il triedro opposto sia trirettangolo ed abbia i tre spigoli uguali;

b) una piramide la cui base sia un pentagono regolare avente per lato il lato del quadrato, ed i cui spigoli laterali siano uguali al lato stesso;

c) l'icosaedro regolare che ha per spigolo il lato del quadrato; (si decomponga il poliedro in tante piramidi col vertice nel centro della sfera iscritta, e si determini il raggio della suddetta sfera che è altezza di queste. Cfr. es. 25, dopo il Cap. XIII);

d) il dodecaedro regolare che ha per spigolo il lato del quadrato.

Def. — Il poliedro determinato segando un prisma indefinito con due piani non paralleli, dicesi *tronco di prisma*. Le facce di esso che appartengono ai due piani suddetti diconsi *basi*.

24. Un tronco di parallelepipedo ha solido uguale a un parallelepipedo avente per base una sezione normale, e per altezza il quarto della somma dei quattro spigoli laterali (*media di essi*).

25. Un tronco di prisma triangolare ha solido uguale alla somma di tre tetraedri, che hanno per base una base del tronco, e per vertici opposti i tre vertici del tronco stesso fuori di essa.

26. Un tronco di prisma triangolare ha solido uguale a un prisma che ha per base una sezione normale, e per altezza la distanza dei baricentri dei triangoli basi.

27. Se due poligoni, non posti nello stesso piano, sono simili ed hanno i lati omologhi paralleli, le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in uno stesso punto.

28. Data una circonferenza, se si congiunge un punto esterno al suo piano coi punti di essa, e su queste congiungenti si prendono dei segmenti ad esse proporzionali, il luogo degli estremi di codesti segmenti è un'altra circonferenza.

29. Se due piramidi simili hanno le basi parallele, e uno spigolo dell'una è parallelo allo spigolo corrispondente dell'altra, e di più rispetto al piano di una delle due basi le due piramidi cadono dalla stessa parte, le due piramidi sono omotetiche.

30. Costruire un tetraedro simile a un tetraedro dato e avente un'altezza data.

31. Due poliedri omotetici ad un terzo sono omotetici fra loro.

32. I centri d'omotetia di tre poliedri, omotetici a due a due, appartengono ad una medesima retta.

Enunciamo qui da ultimo alcune proposizioni, che si dimostreranno in base alla definizione data a pag. 294 e generalizzata a pag. 295 e alle conseguenze che là se ne sono dedotte.

Prima, per altro, dobbiamo avvertire che dicesi *ragione triplicata* di una data ragione, la ragione composta di tre ragioni uguali alla data.

33. Se una ragione è composta di tre o più ragioni uguali alle ragioni che compongono un'altra ragione, le due ragioni composte sono uguali, anche quando le ragioni componenti non si susseguano nel medesimo ordine.

34. Due parallelepipedi simili stanno fra loro nella ragione triplicata dei lati omologhi.

35. Due parallelepipedi contenuti da parallelogrammi che siano ordinatamente equiangoli fra loro (ossia due parallelepipedi aventi gli angoloidi ordinatamente uguali) stanno fra loro nella ragione composta delle ragioni degli spigoli (di due angoloidi corrispondenti). (Cfr. l'es. 75 a pag. 293).

36. Le basi di due parallelepipedi equivalenti sono inversamente proporzionali alle altezze (cioè sono proporzionali alle altezze in modo che siano medi della proporzione la base e l'altezza di uno stesso parallelepipedo); e, viceversa, due parallelepipedi le cui altezze siano inversamente proporzionali alle basi, sono equivalenti. [Cfr. il n. 495].

37. Due piramidi simili stanno fra loro nella ragione triplicata della ragione di due lati omologhi.

38. Due poliedri simili stanno fra loro nella ragione triplicata della ragione di due lati omologhi.

XVI.

CUBATURA DEL CILINDRO, DEL CONO E DELLA SFERA E QUADRATURA DELLE SUPERFICIE RELATIVE.

Cubatura del cilindro, del cono e del tronco di cono.

962. Eseguire la *cubatura* di un cilindro (o cono o tronco di cono) vuol dire determinare un poliedro avente solido uguale al cilindro (o cono o tronco di cono).

Prima di procedere alla cubatura del cilindro retto (limitato) è necessario premettere la seguente

963. Def. — Dato un cilindro retto (limitato), dicesi *iscritto* o *circoscritto* in esso ogni prisma retto (limitato) di uguale altezza, le cui basi siano inscritte o circoscritte nei cerchi basi del cilindro.

Dato un cilindro retto (limitato), per avere un prisma iscritto o circoscritto ad esso, basta iscrivere o circoscrivere ad una delle basi del cilindro un poligono, e poi considerare il prisma retto che ha per base codesto poligono, e per altezza l'altezza del cilindro. Gli spigoli laterali di un prisma iscritto in un cilindro, sono generatrici del cilindro, e le facce laterali di un prisma circoscritto sono tangenti al cilindro lungo altrettante generatrici.

964. Teor. — *Un cilindro ha solido uguale ad un prisma colla medesima altezza, avente per base un poligono che abbia superficie uguale al cerchio base del cilindro.*

Si dimostra per assurdo.

Siano C e P un cilindro e un prisma di uguale altezza, le cui basi rispettive c, p abbiano superficie uguale.

Se C e P non hanno ugual solido, uno di essi sarà prevalente all'altro. Sia per es. $C > P$.

Allora si potrà costruire un prisma P_1, avente la medesima altezza del cilindro C, il quale sia suvvalente alla differenza $C - P$ (n. 940).

Indicata con p_1 la superficie della base di P_1, possiamo iscrivere e circoscrivere nel cerchio c due poligoni la cui differenza sia suvvalente a p_1 (n. 535).

Ed allora la differenza dei due prismi, circoscritto ed iscritto, risulterà suvvalente a P_1 il quale alla sua volta è suvvalente a $C - P$.

Ma il primo prisma contiene C, ed è quindi prevalente a questo; il secondo prisma è suvvalente a P, giacchè ha la stessa altezza e la base suvvalente; cosicchè la differenza dei due prismi dovrebbe essere prevalente a $C - P$, il che contraddice alle conclusioni di pocanzi.

965. La cubatura del cono si ottiene con procedimento analogo a quello seguito pel cilindro.

Cominciamo col ricordare che abbiamo definito al n. 888 ciò che si intende per *piramide circoscritta* a un cono, e aggiungiamo che dicesi *iscritta* in un cono ogni piramide avente come vertice il vertice del

cono, e come base un poligono iscritto nella base del cono.

Ciò premesso, dimostriamo il seguente

966. Teor. — *Un cono ha solido uguale ad una piramide colla medesima altezza, avente per base un poligono la cui superficie sia uguale a quella del cerchio base del cono.*

Si procede per assurdo come pel cilindro.

Sia C un cono di base c e P una piramide di base p e di uguale altezza, e sia $c = p$.

Se C e P non hanno solido uguale, sia per es. C > P. Allora si potrà costruire una piramide P_1 colla medesima altezza, suvvalente alla differenza C —P (n. 940).

Ma si possono iscrivere e circoscrivere al cono C due piramidi per modo che la differenza tra le basi sia suvvalente alla base di P_1 (n. 535).

Si ha allora per una parte, che la differenza fra la piramide circoscritta e la iscritta è suvvalente a C — P; per l'altra parte, che la prima piramide è prevalente a C, la seconda suvvalente a P, e quindi la differenza suddetta è prevalente a C — P. Onde si cade in un assurdo.

967. Considerando un tronco di cono come differenza di due coni e tenendo conto del n. prec. otteniamo il seguente

Teor. — *Un tronco di cono ha solido uguale ad un tronco di piramide* (a basi parallele) *colla medesima altezza, avente per basi due poligoni equisuperficiali ai cerchi basi del tronco di cono.*

Sviluppo della superficie del cilindro, del cono e del tronco del cono.

Dopo avere imparato a costruire un poliedro (prisma o piramide) avente solido uguale ad un cilindro o ad un cono, procediamo ora ad alcune considerazioni, da cui scaturirà un modo di confronto delle superficie laterali di un cilindro o di un cono con una superficie piana.

968. Teor. — *Dato un cilindro retto, il rettangolo che ha come altezza l'altezza del cilindro e come base la circonferenza base di esso rettifivata, è prevalente alla superficie laterale di ogni prisma iscritto nel cilindro, e suvvalente alla superficie laterale di ogni prisma circoscritto; ed ogni altro poligono che goda delle medesime proprietà, è equivalente al rettangolo indicato.*

Dato il cilindro retto C, sia R il rettangolo che ha altezza uguale a C e come base un segmento c uguale alla circonferenza base di C rettificata.

Iscritto in C un qualsiasi prisma retto P, la superficie laterale di P è equivalente al rettangolo di altezza uguale a quella di P, ossia di C, e di base uguale al perimetro della base di P (n. 886). Ma la base di P è un poligono iscritto nella circonferenza base di C, e quindi il suo perimetro è minore di c (n. 526). Ne risulta senz'altro che la superficie laterale del prisma P, inscritto nel cilindro C, è minore del rettangolo R.

Analogamente, si dimostra che R è minore della superficie laterale di ogni prisma circoscritto a C.

Reciprocamente si abbia un poligono R', il quale sia suvvalente alle superficie laterali di tutti i prismi

circoscritti a C, e prevalente a quelle di tutti i prismi iscritti. Diciamo che esso è equivalente ad R.

Basterà dimostrare che dei poligoni R ed R′ l'uno non può essere prevalente all'altro (n. 418), e a questo scopo ragioneremo per assurdo. Se fosse, per esempio, R prevalente ad R′, la differenza sarebbe un poligono che potremmo trasformare in un rettangolo R″ di altezza uguale a C, mentre invece è facile mostrare che si possono sempre inscrivere e circoscrivere a C due prismi, per cui la differenza delle superficie laterali è suvvalente ad R″. Si costruiscano infatti due poligoni, l'uno iscritto e l'altro circoscritto alla base di C, pei quali la differenza dei perimetri sia minore della base di R″ (n. 524); è allora manifesto che i due prismi, inscritto e circoscritto a C, che hanno come basi codesti poligoni, sono tali che la differenza delle loro superficie laterali è suvvalente ad R″; ma ciò è assurdo, perchè R ed R′ sono l'uno e l'altro compresi fra le superficie laterali di tutti i prismi circoscritti a C e quelle di tutti i prismi iscritti.

969. Osservazione. — Si immagini ora di aver costruito un modello concreto di un cilindro retto, mediante un foglio, od un qualsiasi velo flessibile ed inestendibile. Se dopo averlo tagliato lungo una generatrice, distendiamo il foglio o il velo, senza ripiegature sopra un piano, otteniamo un rettangolo che ha per altezza l'altezza del cilindro primitivo, e per base quel lembo che dianzi era disposto secondo la circonferenza base del cilindro. Ora l'osservazione ci assicura che codesto rettangolo è maggiore della superficie laterale di ogni prisma iscritto al nostro primitivo cilindro, ed è minore della superficie laterale di ogni prisma circoscritto.

Ciò si vede chiaramente anche facendo ruzzolare su di un piano il cilindro, un prisma iscritto e uno circoscritto, a partire da una generatrice che sia spigolo laterale comune ai due prismi, fino a ricondurre codesta generatrice a contatto col piano.

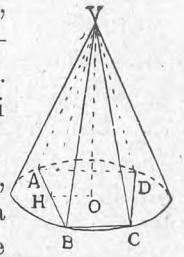
Resta così giustificata la seguente

970. Def. — Dato un cilindro retto, la superficie del rettangolo avente per altezza quella del cilindro, e per base il segmento uguale alla circonferenza base del cilindro rettificata, si dice *sviluppo della superficie laterale* od anche *superficie laterale sviluppata (o spianata)* del cilindro.

Applicando al cono retto (limitato) considerazioni analoghe a quelle usate dianzi pel cilindro, determineremo ora la superficie laterale del cono.

971. Per giungere più sollecitamente alla determinazione della superficie laterale del cono giova premettere alcune semplici considerazioni, delle quali alcune ci saranno utili anche nella cubatura della sfera.

a) In un cono retto di vertice V, e la cui base abbia il centro O, sia inscritta una piramide qualsiasi VABCD. Le altezze delle sue diverse facce laterali sono minori dell'apotema del cono.



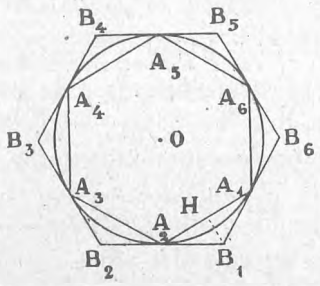
Infatti, considerata la faccia ABV, e abbassata in essa dal vertice V sulla base AB l'altezza VH, questa è minore dell'apotema VA, ipotenusa del triangolo rettangolo VAH, del quale VH è cateto (n. 108).

Discende di qui che ogni triangolo, faccia laterale della piramide iscritta, è minore del triangolo che ha

ugual base e altezza uguale all'apotema del cono; e quindi ancora che la *superficie laterale della piramide iscritta è suvvalente al triangolo che ha altezza uguale all'apotema del cono e base uguale del perimetro della base della piramide iscritta.*

b) Riprendiamo in secondo luogo per un momento le considerazioni del Cap. VII (nn. 521, 522). Noi abbiamo visto là che, se si iscrive e circoscrive ad un cerchio il poligono regolare ad n lati (nella fig. è $n = 6$) la differenza

$$HB_1 = OB_1 - OH$$



fra il raggio del poligono circoscritto e l'apotema di quello iscritto è minore dell'n^{ma} parte dell'altezza del triangolo Δ del n. 522, avente la base quadrupla del diametro e gli angoli alla base uguali all'n^{ma} parte di due retti.

Prefissato un segmento ε piccolo a piacere, basterà prendere n abbastanza grande perchè i poligoni regolari ad n lati, iscritto e circoscritto al cerchio, siano tali che la differenza tra il raggio del poligono circoscritto e l'apotema di quello iscritto risulti minore di ε, cioè:

$$OB_1 - OH < \varepsilon.$$

Poichè si ha

$$OA_1 > OH, \quad OA_1 < OB_1$$

sarà allora a maggior ragione

$$OB_1 - OA_1 < \varepsilon$$
$$OA_1 - OH < \varepsilon;$$

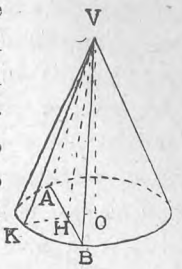
quindi sussisteranno i teoremi seguenti:

1) *Dato un cerchio e prefissato un segmento ε piccolo a piacere, si possono determinare due poligoni regolari di ugual numero di lati, l'uno circoscritto e l'altro iscritto al cerchio, tali che la differenza dei raggi dei due poligoni sia minore di ε.*

2) *Dato un cerchio e prefissato un segmento ε piccolo a piacere, si può sempre iscrivere o circoscrivere al cerchio un poligono regolare tale che la differenza tra il raggio e l'apotema sia minore di ε.*

c) È allora facile convincersi che, *dato un cono di apotema a, e preso un segmento ε (minore di a), esistono piramidi regolari iscritte nel cono, il cui apotema è maggiore di $a - \varepsilon$.*

Si iscriva nella base del cono, di cui sia r il raggio, un poligono regolare il cui apotema OH differisca da r meno di ε, cioè sia tale che $OH > r - \varepsilon$. Prolungando OH fino ad incontrare in K la circonferenza base del cono, avremo $HK < \varepsilon$. Se allora proiettiamo il poligono dal vertice V, otteniamo una piramide regolare iscritta nel cono il cui apotema è VH (n. 629). Ora nel triangolo HVK abbiamo (n. 97),



$$VH > VK - HK$$

e quindi, a più forte ragione,

$$VH > a - \varepsilon,$$

972. Ciò premesso, possiamo dimostrare il seguente

Teor. — *Dato un cono retto, il triangolo che ha come altezza l'apotema del cono e come base la circonferenza base di esso rettificata, è prevalente alla superficie*

laterale di ogni piramide iscritta nel cono e suvvalente alla superficie laterale di ogni piramide circoscritta; ed ogni altro poligono che goda delle medesime proprietà è equivalente al triangolo indicato.

Dato il cono C, sia T il triangolo che ha come altezza l'apotema di C, e come base *c* la circonferenza base di C rettificata.

Circoscritta a C una qualsiasi piramide, la superficie laterale di questa è equivalente al triangolo che ha per altezza l'apotema del cono e per base il perimetro del poligono base (n. 887). Ma poichè questo è circoscritto alla base di C, il suo perimetro è maggiore della circonferenza base di C rettificata (n. 526). Onde risulta che la superficie laterale della piramide circoscritta è prevalente al triangolo T.

Consideriamo in secondo luogo una qualsiasi piramide iscritta in C. La sua superficie laterale è suvvalente al triangolo che ha per altezza l'apotema del cono e per base il perimetro della base della piramide stessa (n. prec., *a*), il quale, come perimetro di un poligono iscritto nel cerchio base di C, è minore della circonferenza rettificata di codesto cerchio (n. 526). Di qui risulta che la superficie laterale della piramide iscritta in C è minore di quella del triangolo T.

Ci rimane a dimostrare che se un poligono T′ è, come T, suvvalente alle superficie laterali delle piramidi circoscritte a C e prevalente a quelle delle piramidi scritte, ha superficie uguale a T. Ragioneremo per assurdo, supponendo che il poligono T′, per ipotesi compreso fra le superficie laterali delle piramidi iscritte e circoscritte a C, non sia equivalente a T.

Sia, in primo luogo,

$$T > T'.$$

Allora la differenza di T e T′ sarà equivalente ad un certo poligono P

$$(1) \qquad T - T' = P$$

Ma è facile dimostrare che si può iscrivere in C una piramide la cui superficie laterale H abbia da T differenza suvvalente a P, cioè tale che sia

$$T - H < P;$$

di qui e dalla (1) discende

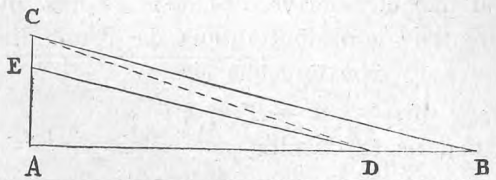
$$T - H < T - T'$$

e quindi, aggiungendo $H + T'$ da una parte e dall'altra,

$$H > T'$$

e questo, poichè T′ è per ipotesi prevalente alla superficie laterale di ogni piramide iscritta in C e quindi anche ad H, dimostrerà essere assurdo che T possa essere prevalente a T′.

Per ottenere una piramide la cui superficie laterale H abbia da T differenza suvvalente a P, consideriamo il triangolo rettangolo ABC, che ha per cateto AC l'apotema del cono, e



per cateto AB la circonferenza base del cono rettificata. Codesto triangolo ha superficie uguale a T.

Diviso allora in qualsiasi modo il poligono P, differenza di T e T′, in due parti P_1, P_2, si trasformi P_1 in un triangolo di altezza uguale ad AC, apotema del cono, e, se BD è la base di codesto triangolo, si trasformi P_2 in un triangolo di altezza uguale ad AD, e sia CE la base di questo triangolo. Avremo quindi che P_1 e P_2 sono equivalenti ai triangoli BDC, CED rispettivamente, e che P è equivalente al quadrangolo DBCE.

Allora noi possiamo iscrivere nel cono C una piramide regolare, il cui apotema differisca da AC per meno di EC, cioè sia compreso fra AE e AC (n. prec., *c*). Se il perimetro della base di codesta piramide, che è certamente minore di AB, non è maggiore di AD, potremo raddoppiare il numero dei lati della base di essa un numero bastevole di volte per ottenere una piramide regolare iscritta in C, la quale, avendo sempre l'apotema compreso fra AE ed AC, abbia il perimetro della base compreso fra AD ed AB (n. 524).

È allora manifesto che codesta piramide soddisfa alle condizioni volute perchè la sua superficie laterale H è equivalente ad un triangolo avente la base compresa fra AD e AB, e l'altezza compresa fra AE ed AC, ed è quindi tale che differisce dal triangolo ABC, equivalente a T, per meno del quadrilatero BCED, cioè per meno di P.

Supponiamo in secondo luogo che sia, se è possibile,

$$T < T'$$

e poniamo

$$(2) \qquad T' - T = P,$$

cioè indichiamo con P il poligono differenza di T′ e T.

Ma si può circoscrivere al cono C una piramide la cui superficie laterale K abbia da T una differenza suvvalente a P, cioè tale che sia

$$(3) \qquad K - T < P;$$

e di qui e dalla (2) risulta

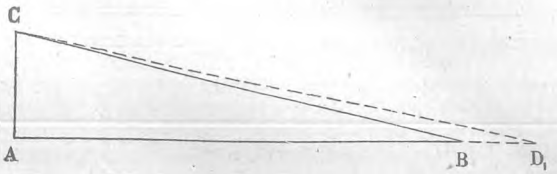
$$K - T < T' - T$$

e quindi, aggiungendo T ad ambe le parti,

$$K < T';$$

il che è assurdo perchè T′ è per ipotesi suvvalente alla superficie laterale di ogni piramide circoscritta al cono C e quindi anche alla superficie K.

Per determinare una piramide la cui superficie laterale K soddisfi alla (3) si consideri ancora il triangolo rettangolo ABC equivalente a T, cioè avente per cateto AC l'apotema del cono



e per cateto AB la circonferenza base rettificata, e si trasformi il poligono P in un triangolo avente per altezza l'apotema AC.

Portata la base di codesto triangolo sul prolungamento di AB in BD_1, avremo

$$BCD_1 = P.$$

Ora basta circoscrivere al cono una piramide il cui perimetro di base differisca dalla lunghezza AB della circonferenza base del cono per meno di BD, perchè la superficie laterale K di codesta piramide sia compresa fra ABC e AD_1C, cioè fra T e T + P; onde avremo

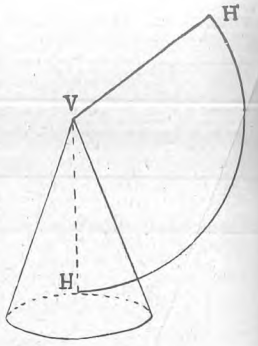
$$K < T + P$$

e sussisterà veramente la (3).

Abbiamo così constatato che non può essere nè $T > T'$, nè $T < T'$; onde concludiamo che effettivamente ogni poligono compreso fra le sue superficie laterali delle piramidi iscritte e circoscritte a C ha superficie uguale al triangolo T.

973. Osservazione. — Se mediante un foglio opportunamente ritagliato, o mediante un velo flessibile ed inestendibile, noi costruiamo il modello di un cono retto, e poi lo tagliamo lungo una generatrice VH, e distendiamo il foglio o il velo su di un piano, otteniamo un settore circolare VHH′ il cui raggio VH è uguale all'apotema del cono, e di cui il lato circolare HH′ è il lembo che dianzi era incurvato in modo da formare la circonferenza base del cono. Il medesimo settore VHH′ si ottiene facendo ruzzolare il cono su di un piano fino a ricondurre a contatto col piano la

generatrice VH, lungo la quale il cono appoggiava sul piano al principio del movimento. Ora, se considerate due piramidi, l'una iscritta, l'altra circoscritta al cono, le facciamo ruzzolare sul piano, vediamo che la superficie laterale della piramide iscritta è suvvalente al settore circolare VHH′, mentre la superficie laterale della piramide circoscritta è prevalente ad esso. D'altra parte sappiamo che codesto settore ha superficie uguale ad un triangolo che ha per altezza l'apotema del cono e per base il segmento uguale all'arco circolare HH′ rettificato (n. 543), ossia, evidentemente, alla circonferenza base del cono rettificata.

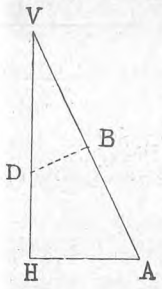


Appare quindi legittima la seguente

974. Def. — Dato un cono retto, il triangolo avente per altezza l'apotema del cono e per base la circonferenza base del cono rettificata, si dice *sviluppo della superficie laterale* od anche *superficie (laterale) sviluppata (o spianata)* del cono.

975. Nota. — Si possono confrontare le superficie laterali di cilindri e coni, paragonando i loro sviluppi. Se questi sono equivalenti, si dice brevemente che i suddetti cilindri e coni *hanno ugual superficie laterale;* e talvolta anche, se un cilindro o cono ha uno sviluppo prevalente ad un altro cilindro o cono, si dice per brevità che il primo ha superficie laterale maggiore del secondo. E ad esprimere siffatte relazioni si usano i soliti segni $=$, $>$, $<$ (cfr. nn. 385, 417).

976. Gioverà, per ulteriori applicazioni, trasformare il triangolo uguale alla superficie laterale del cono, nel rettangolo di altezza uguale all'altezza del cono. A ciò si giunge direttamente colle seguenti semplicissime considerazioni.



Dato il cono di cui VH è l'altezza, HA è il raggio della base, e quindi VA l'apotema, nel piano AVH, si conduca la perpendicolare al segmento VA nel suo punto medio B, fino ad incontrare in D l'altezza VA o il suo prolungamento. Indichiamo con c, c_1 i segmenti uguali alle circonferenze rettificate, di raggio rispettivamente HA, BD. Sappiamo che la superficie laterale del cono è uguale alla superficie del triangolo di base c e altezza AV, e quindi alla superficie del rettangolo di base c e altezza BV.

Ma dai triangoli simili AVH, DVB risulta la proporzione (n. 457)

$$BV : HV = BD : HA,$$

la quale combinata con l'altra (n. 527)

$$BD : HA = c_1 : c$$

dà

$$BV : HV = c_1 : c.$$

Ma se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo contenuto dagli estremi è equivalente al rettangolo contenuto dai medi (n. 491); onde concludiamo che il rettangolo di altezza BV e base c è equivalente al rettangolo di altezza HV e base c_1 e quindi che la superficie sviluppata del cono è uguale alla superficie del rettangolo di altezza HV e base c_1.

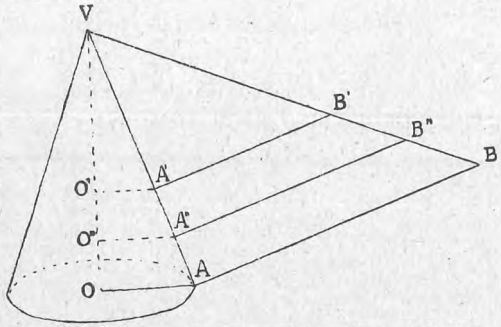
Tenendo presenti i nn. 970, 975, possiamo enunciare il risultato precedente sotto la forma seguente

Teor. — *Un cono ha superficie laterale eguale al cilindro, che ha per altezza l'altezza del cono, e per base il cerchio di raggio uguale al segmento che in un piano per l'asse del cono è intersecato da codesto asse sulla perpendicolare nel punto medio dell'apotema.*

977. Def. — Dato un tronco di cono, dicesi *sviluppo della superficie laterale* od anche *superficie (laterale) sviluppata (o spianata)* di esso, la differenza delle superficie sviluppate dei due coni appartenenti al medesimo cono indefinito del tronco considerato, e aventi come basi le due basi di questo.

978. Risulta allora dai nn. 974, 975 il seguente

Teor. — *Lo sviluppo di un tronco di cono retto è equivalente ad un trapezio, avente per altezza l'apotema del tronco di cono, e per basi parallele i segmenti uguali alle circonferenze basi del tronco rettificate.*



Dato un tronco di cono, di cui O, O' siano i centri delle basi, ed AA' sia l'apotema, consideriamo il cono V, di cui è parte il dato tronco. Lo sviluppo del tronco di cono è uguale alla differenza degli sviluppi dei due coni di vertice V e di basi O ed O'. Se ora nel piano OVA conduciamo la perpendicolare in A all'apotema

AV, e su di essa prendiamo il segmento AB uguale alla circonferenza O rettificata, lo sviluppo del cono maggiore è uguale al triangolo ABV.

D'altra parte, condotta per A', nel piano stesso del triangolo, la parallela alla AB fino ad incontrare la VB in B', avremo dai triangoli simili ABV, A'B'V

$$AV : A'V = AB : A'B';$$

e dai triangoli simili OAV, O'A'V,

$$OA : O'A' = AV : A'V,$$

onde risulta (n. 469)

$$OA : O'A' = AB : A'B'.$$

Ma anche il segmento ottenuto rettificando la circonferenza O', di raggio O'A', è quarta proporzionale dopo OA, O'A' e AB (n. 527). Ne risulta (n. 482) che il segmento A'B' è uguale alla circonferenza O' rettificata e quindi che il triangolo A'B'V è uguale allo sviluppo del cono minore.

È allora dimostrato che lo sviluppo del tronco di cono è equivalente al trapezio ABB'A' che ha per altezza l'apotema del tronco di cono e per basi parallele le circonferenze O ed O' rettificate.

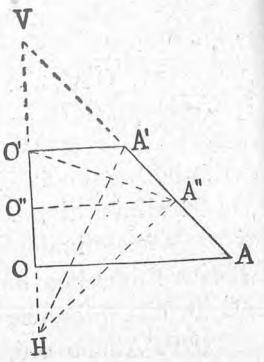
979. Anche qui, come al n. 976, giova, per le successive applicazioni, trasformare il trapezio ABB'A' nel rettangolo di altezza uguale all'altezza del tronco.

Perciò cominciamo col trasformarlo nel rettangolo che ha per altezza l'apotema AA'. Condotto pel punto medio O'' di OO' (vedi la fig. del n. prec.) il piano parallelo alla base del tronco di cono fino ad intersecare l'apotema AA' in A'', e tirata da A'' la parallela A''B'' alla AB, il segmento A''B'' è uguale alla circonferenza rettificata della *sezione mediana* del tronco di cono, cioè della sezione che ha il punto O''

per centro, e il segmento O″A″ per raggio (basta ragionare come per A′B′ al n. prec.). D'altra parte, il trapezio ABB′A′ è equivalente al rettangolo di altezza AA′ e di base A″B″ (n. 372). Estendendo allora anche ai tronchi di cono ciò che dicemmo al n. 975 pei cilindri e pei coni, possiamo intanto enunciare il seguente

Teor. — *Un tronco di cono ha superficie laterale eguale al cilindro che ha per altezza l' apotema del tronco di cono e per base il cer chio sezione mediana del tronco.*

980. Ciò premesso, dal punto medio A″ dell'apotema AA′, conduciamo nel piano OAV la perpendicolare fino ad incontrare l'asse VO in H. Allora, congiunti A′ con H e O′ con A″ i due triangoli HA″A′, A″O″O′ risultano simili. Infatti anzitutto essi sono rettangoli; e in secondo luogo la circonferenza di diametro HA′ passa per O′ e A″ in quanto gli angoli $H\widehat{O'}A'$, $A'\widehat{A''}H$ sono retti; talchè gli angoli $H\widehat{O'}A''$, $H\widehat{A'}A''$ risultano uguali come iscritti in un medesimo arco (n. 315).



Ciò premesso, dalla similitudine di codesti due triangoli HA″A′, A″O″O′ ricaviamo

$$A''O'' : HA'' = O''O' : A''A'$$

e quindi, poichè O″O′ e A″A′ sono le metà rispettivamente di OO′ ed AA′ (n. 444),

$$A''O'' : HA'' = OO' : AA'.$$

D' altra parte, se indichiamo con c e c_1 le circonferenze rettificate di raggi A″O″, HA″, abbiamo (n. 527)

$$c : c_1 = A''O'' : HA''.$$

Da questa e dall'ultima proporzione risulta (n. 469)

$$c : c_1 = OO' : AA',$$

e quindi (n. 491) che il rettangolo di base c e altezza AA′, uguale allo sviluppo del tronco di cono, è equivalente al rettangolo di base c_1 e altezza OO′. Possiamo perciò enunciare il seguente

Teor. — *Un tronco di cono ha superficie laterale uguale al cilindro, che ha per altezza l' altezza del tronco, e per base il cerchio di raggio uguale al segmento che, in un piano per l' asse del cono, è intersecato da codesto asse sulla perpendicolare nel punto medio dell' apotema.*

Quadratura della superficie sferica e cubatura della sfera.

Passiamo oramai ad occuparci della sfera. Come pel cerchio in Geometria piana (Cap. VII) abbiamo dovuto occuparci prima della rettificazione della circonferenza per poi giungere alla quadratura del cerchio, così qui daremo prima la quadratura della superficie e poi la cubatura della sfera.

981. Per la quadratura della superficie della sfera è necessario premettere alcune considerazioni, che ora qui svolgeremo, sulle poligonali regolari inscritte (o circoscritte) ad una semicirconferenza, e sulle superficie di rotazione generate da esse.

a) Anzitutto notiamo che per iscrivere in una semicirconferenza di diametro AB una poligonale regolare di n lati, basta iscrivere nel cerchio di diametro AB il poligono regolare di $2n$ lati e avente come vertice il punto A (e quindi anche B).

Per circoscrivere ad una semicirconferenza una poligonale di n lati, basta condurre le tangenti alla semicirconferenza nei punti medi degli archi determinati dai vertici della poligonale regolare ad n lati iscritta.

Noi quindi (servendoci della riga e del compasso) sapremo *iscrivere e circoscrivere ad un dato cerchio tutte le poligonali regolari di un numero di lati dato da*

$$2,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots$$
$$3,\ 6,\ 12,\ \ldots,\ 3\cdot 2^n\ \ldots$$
$$5,\ 10,\ 20,\ \ldots,\ 5\cdot 2^n\ \ldots,$$
$$15,\ 30,\ 60,\ \ldots,\ 3\cdot 5\cdot 2^n\ \ldots$$

Notiamo poi che una poligonale regolare iscritta in una semicirconferenza è circoscrittibile ad una altra semicirconferenza e viceversa.

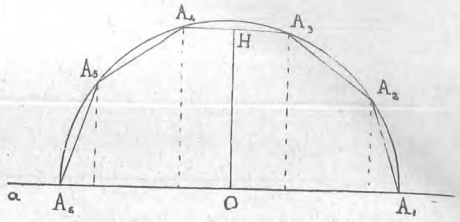
Infine notiamo che dalla proposizione del numero 971 *b*, 2) risulta la seguente: *Data una semicirconferenza e prefissato un segmento* ε *piccolo a piacere, si può sempre circoscrivere alla semicirconferenza una poligonale regolare tale che la differenza fra la risultante della poligonale e il diametro della circonferenza sia minore di* ε.

b) Passiamo a considerare le superficie di rotazione generate dalle poligonali regolari iscritte e circoscritte ad una semicirconferenza.

Sia $A_1A_2\ \ldots\ A_n$ una poligonale regolare di centro O e apotema OH (nella figura facciamo $n = 6$).

Essa si potrà considerare sia come iscritta nella semicirconferenza di centro O e raggio OA, sia come circoscritta alla semicirconferenza avente il medesimo centro e il raggio OH. Ora sappiamo già (n. 875) che la superficie di rotazione di asse A_1A_n, che la ammette come generatrice, si ottiene per riunione delle

superficie laterali dei coni, tronchi di cono, e cilindri che hanno per asse comune la A_1A_n, e come apotemi i lati della poligonale. Fissato uno qualsiasi di questi p. esempio A_iA_{i+1}, lo sviluppo ad esso corrispondente, è equivalente a quello del cilindro che ha per altezza la distanza dei piedi delle perpendicolari abbassate da A_i, A_{i+1} su A_1A_n (proiezione di A_iA_{i+1} su A_1A_n), e per base il cerchio di raggio uguale al segmento segato sull'asse di A_iA_{i+1} dalla A_1A_n (nn. 970, 976, 980), uguale cioè all'apotema OH della poligonale.



Per avere lo sviluppo della superficie di rotazione dobbiamo sommare gli sviluppi di tanti cilindri aventi come base comune il cerchio di raggio OH, e come altezze le proiezioni su A_1A_n dei singoli lati della poligonale, le quali proiezioni sommate danno precisamente la risultante A_1A_n della poligonale. Ricordiamo che lo sviluppo della superficie laterale di un cilindro è dato dal rettangolo di altezza uguale all'altezza, e di base uguale al segmento ottenuto rettificando la circonferenza base del cilindro (n. 970), e che per sommare più rettangoli di ugual base basta sommare le altezze. Concludiamo allora *che la superficie di rotazione che ha come generatrice una poligonale regolare iscritta ad una semicirconferenza, e come asse il diametro di questa, ha sviluppo equivalente alla superficie laterale del cilindro, che ha per raggio della base l'apotema, e per altezza la risultante della poligonale.*

982. Ciò premesso, è facile stabilire il seguente

Teor. — *Data una sfera, la superficie laterale del cilindro che ha per base un cerchio massimo della sfera e per altezza il diametro di essa, è compresa fra le superficie di rotazione che hanno per generatrici le poligonali regolari iscritte e le poligonali regolari circoscritte alla semicirconferenza massima della sfera, e per asse, il diametro di codesta semicirconferenza; ed ogni poligono* (a lati qualsiansi) *che goda di codeste proprietà ha superficie uguale allo sviluppo della superficie laterale del cilindro or ora nominato.*

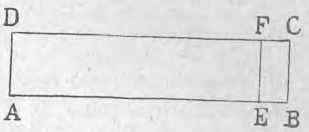
La prima parte discende immediatamente dalle considerazioni del n. prec. Se, invero, indichiamo con S la superficie laterale del cilindro C, che ha per base un cerchio massimo della sfera data e per altezza il suo diametro, la superficie di rotazione generata da una poligonale regolare circoscritta alla semicirconferenza massima della sfera ha sviluppo equivalente a quello della superficie laterale di un cilindro di base uguale a quella di C e di altezza maggiore, perchè la proiezione di una tal poligonale sull'asse è maggiore del diametro (n. 178); e la superficie generata da una poligonale regolare iscritta, ha sviluppo equivalente a quello della superficie laterale di un cilindro di altezza uguale a quella di C e di base suvvalente.

Per dimostrare la seconda parte del teorema, rappresentiamo con S′ un poligono (a lati qualsiansi) compreso come S, fra le superficie di rotazione, che hanno per generatrici le poligonali regolari iscritte e circoscritte alla semicirconferenza massima della sfera. Diciamo che $S = S'$. Per dimostrarlo si procede per assurdo.

Supposto, in primo luogo, che sia $S > S'$, faremo vedere che si può iscrivere nella semicirconferenza massima della sfera una poligonale regolare tale, che la superficie di rotazione generata da essa sia maggiore di S′; il che contraddice alla ipotesi che S′ sia maggiore di ogni siffatta superficie di rotazione iscritta.

Se, dunque, è $S > S'$, sia P un poligono suvvalente ad $S - S'$ (n. 426).

Lo sviluppo di S è dato dal rettangolo ABCD che ha come altezza AD il diametro della sfera e come base AB la circonferenza massima di essa rettificata (n. 970). Trasformato il poligono P nel rettangolo equivalente di altezza uguale ad AD, sia BE la base di codesto rettangolo. Allora avremo che il poligono S′ sarà suvvalente al rettangolo AEFD.



Ma se determiniamo un segmento a tale che

$$AB : \frac{AD}{2} = AE : a,$$

avremo che la circonferenza di raggio a rettificata è uguale ad AE (n. 527). E allora se iscriviamo nella semicirconferenza massima della sfera data una poligonale regolare il cui apotema sia maggiore di a (n. 971, *b*), lo sviluppo della superficie di rotazione che ha per generatrice codesta poligonale, è equivalente ad un rettangolo di altezza AD e di base maggiore di AE, ed è quindi prevalente ad S′.

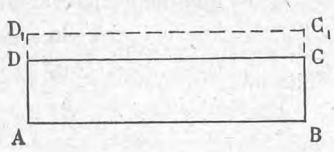
Poichè ciò non può essere, si conclude intanto che non è

$$S > S'.$$

Supponiamo in secondo luogo che la superficie laterale S del cilindro considerato abbia uno sviluppo suvvalente ad un poligono (a lati qualsiansi) S′, compreso, come S, fra gli sviluppi delle superficie di rotazione, che hanno per generatrici le poligonali regolari iscritte e circoscritte, alla semicirconferenza mas-

sima della sfera. Si dimostra che anche questa ipotesi è assurda, mostrando come si possa circoscrivere alla semicirconferenza massima della sfera una poligonale regolare tale, che la superficie di rotazione generata da essa abbia uno sviluppo suvvalente ad S'.

Sia dunque $S < S'$. Considerato ancora il rettangolo ABCD, che dà lo sviluppo della superficie laterale S del solito cilindro, si prenda un poligono $\overline{P}$ suvvalente alla differenza $S' - S$ e si trasformi $\overline{P}$ nel rettangolo equivalente che ha per base DC (circonferenza base rettificata del solito cilindro).



Portato sul prolungamento di AD il segmento DD_1 uguale all'altezza di questo nuovo rettangolo e completato il rettangolo DCC_1D_1 avremo

$$DCC_1D_1 = \overline{P}$$

e quindi

$$DCC_1D_1 < S' - S$$

ossia essendo $S = ABCD$

$$(1) \qquad ABC_1D_1 < S'.$$

Se allora circoscriviamo alla semicirconferenza massima della sfera una poligonale regolare la cui proiezione sul diametro abbia dal diametro stesso AD una differenza, in più, minore di DD_1, la superficie di rotazione che ha per generatrice codesta poligonale ha come sviluppo un rettangolo di base AB e di altezza minore di AD_1 e perciò suvvalente ad ABC_1D_1 e quindi, per la (1), ad S'. Ora ciò è assurdo, perchè, per ipotesi, S' è prevalente agli sviluppi di tutte le superficie di rotazione, generate da poligonali regolari circoscritte. Non può quindi essere

$$S < S_1.$$

Constatato così che non può essere nè $S > S'$, nè $S < S'$, si conclude che è $S = S'$; ossia che ogni poligono compreso fra gli sviluppi delle superficie di rotazione, generate dalle poligonali regolari iscritte e circoscritte alla semicirconferenza massima della sfera, ha superficie uguale allo sviluppo di S.

983. Oss. — Se immaginiamo di aver costruito con una lamina sottile, o un tessuto opportuno, supposti flessibili ma inestendibili, una sfera, non è possibile, come pel cilindro e pel cono (nn. 969, 973), tagliare codesta lamina o codesto tessuto in modo da poterli poi distendere, senza ripiegature, su di un piano, così da avere un confronto diretto fra la superficie sferica e una superficie piana. Pur tuttavia, il concetto intuitivo di superficie che tutti abbiamo, ci dice che la superficie della sfera è compresa fra le superficie di rotazione generate da poligonali iscritte, e, rispettivamente, circoscritte alla semicirconferenza massima di essa. E alla medesima conclusione arriviamo se, costruite con una medesima lamina di spessore e di densità costanti, una sfera e due superficie di rotazione delle due specie indicate, confrontiamo i loro pesi. Resta così giustificata la seguente

984. Def. — Data una sfera, si dice che la sua superficie è uguale alla superficie laterale del cilindro, che ha base uguale al suo cerchio massimo e altezza uguale al suo diametro.

La superficie sviluppata del cilindro or ora indicato, dicesi anche *superficie spianata* della sfera.

985. Cor. — *La superficie sferica spianata è il rettangolo che ha per altezza il suo diametro e per base la sua circonferenza massima rettificata* (n. 970).

986. Il cerchio massimo della sfera ha superficie uguale alla metà del rettangolo che ha per altezza il raggio della sfera, e per base la circonferenza massima rettificata (nn. 537, 369). Avremo allora, dalla precedente, quest'altra proposizione:

Cor. — *La superficie sferica spianata è uguale a quattro volte il suo cerchio massimo.*

987. Una dimostrazione analoga a quella del numero 982 conduce al

Teor. — *Data una zona sferica (o una calotta), lo sviluppo della superficie laterale del cilindro, che ha per altezza l'altezza del segmento sferico corrispondente, e per base il cerchio massimo della sfera cui appartiene la zona, è compreso fra gli sviluppi delle superficie di rotazione aventi per asse l'asse del segmento, e per generatrici le poligonali regolari iscritte e circoscritte nella sezione meridiana della zona (o calotta): e ogni poligono che goda di codeste proprietà ha superficie uguale allo sviluppo or ora indicato.*

988. Si giustifica allora, con un'osservazione analoga a quella del n. 983 la seguente

Def. — La superficie di una zona sferica (o di una calotta) è *uguale* alla superficie laterale del cilindro che ha per altezza l'altezza del segmento sferico corrispondente, e per base il cerchio massimo della sfera, cui appartiene la zona (o calotta).

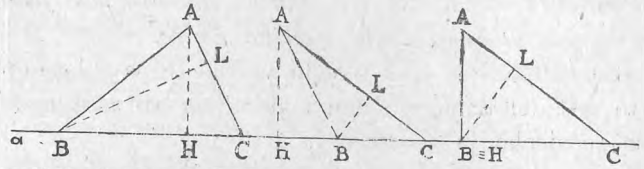
La superficie sviluppata del cilindro or ora indicato si dice anche *superficie spianata* della zona (o calotta).

989. Cor. — *Su di una stessa sfera, o su sfere uguali, zone (o calotte) corrispondenti a segmenti sferici di altezze uguali, hanno superficie uguali.*

990. Per ottenere la *cubatura della sfera* è necessario premettere la determinazione del solido di rotazione che ha come generatrice una poligonale regolare iscritta in un semicerchio, e come asse il diametro di questo.

A tale scopo cominceremo dal determinare il solido di rotazione generato da un triangolo ABC, che ruoti intorno ad un asse a del suo piano, e passante per un vertice di esso, p. e. per B.

Se anche il vertice C cade su a, codesto solido che si ottiene per somma o differenza dei due coni, che hanno HA per raggio comune della base, e AB, AC per apotemi (n. 875), è uguale alla terza parte del

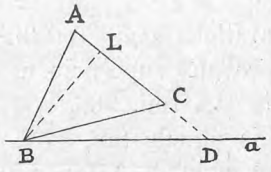


parallelepipedo rettangolo che ha per altezza BC e per base una superficie uguale a quella del cerchio di raggio HA (nn. 966, 934). Ma questo cerchio ha superficie uguale (nn, 537, 369) alla metà del rettangolo r(AH, c) di AH e della circonferenza di raggio AH rettificata. Dunque il solido generato da ABC è uguale a quello della terza parte del parallelepipedo rettangolo pr (BC, AH, $\frac{c}{2}$) di BC, AH e $\frac{c}{2}$, il quale si può considerare come avente per base il rettangolo r(BC, AH) di BC e HA, e per altezza il segmento $\frac{c}{2}$.

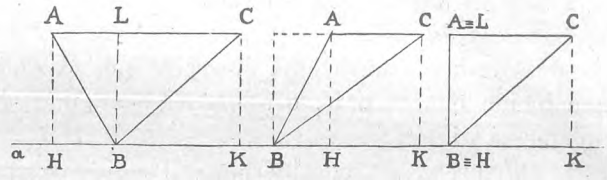
Ma se da B abbassiamo in ABC l'altezza BL, il rettangolo di BC e AH è equivalente a quello di AC e BL, perchè entrambi sono equivalenti al doppio del triangolo ABC (n. 369). Onde risulta che il solido generato da ABC è uguale al terzo del parallelepipedo

rettangolo pr(BL, AC, $\frac{c}{2}$) di BL, AC e $\frac{c}{2}$. Ma il rettangolo di AC e $\frac{c}{2}$ è uguale alla superficie sviluppata del cono descritto da AC intorno all'asse a (n. 974), e perciò concludiamo che il solido generato da ABC è uguale al terzo del parallelepipedo avente l'altezza BL e la base uguale alla superficie descritta da AC intorno all'asse a, o, ciò che è lo stesso (n. 934), il solido in questione è uguale a quello di *una piramide di altezza* BL, *che ha la superficie della base uguale alla superficie descritta da* AC.

Se sull'asse a cade il solo vertice B, e il lato opposto AC del triangolo non è parallelo all'asse medesimo, cosicchè lo incontra in un punto D, il solido generato da ABC si può definire come differenza dei solidi generati da ABD, CBD intorno all'asse a. A ciascuno di codesti due solidi è applicabile la conclusione ottenuta pocanzi; onde siamo condotti a far la differenza di due piramidi di altezza uguale a BL, e aventi le superficie delle basi uguali alle superfici descritte rispettivamente da AC e CD. Ne concludiamo anche in questo caso che il solido generato da ABC è uguale a quello di *una piramide di altezza* BL, *che ha la superficie della base uguale alla superficie descritta da* AC.



Consideriamo, da ultimo, il caso, in cui il lato AC del triangolo, opposto al vertice B che cade su a, è parallelo ad a, e, per fissare le idee, supponiamo che B sia interno alla proiezione HK di AC su a.



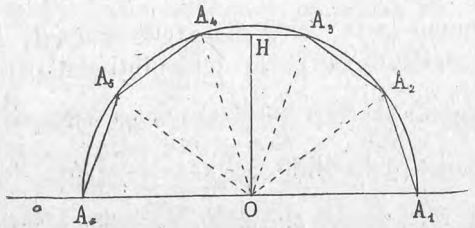
Allora il solido generato da ABC si ottiene sottraendo dal solido del cilindro descritto da AC i solidi dei coni descritti da AB e BC. Di qui risulta che se indichiamo con c la circonferenza di raggio BL rettificata, codesto solido sarà uguale a quello del parallelepipedo rettangolo pr (AC, $\frac{BL}{2}$, c) di altezza AC e di base uguale alla metà del rettangolo di BL e c, diminuito della terza parte dei solidi dei parallelepipedi rettangoli pr (HB, $\frac{BL}{2}$, c) e pr (BK, $\frac{BL}{2}$, c), cioè diminuito del solido della terza parte del parallelepipedo rettangolo pr (HK, $\frac{BL}{2}$, c). Ma è HK = AC; onde risulta che il solido generato da ABC è uguale ai due terzi di quello del pr (AC, $\frac{BL}{2}$, c) ossia, considerando il parallelepipedo che ha uno spigolo doppio, al terzo del parallelepipedo rettangolo pr(AC, BL, c), del quale si può considerare BL come altezza e il rettangolo r (AC, c) come base. Ma codesto rettangolo ha superficie uguale alla superficie sviluppata del cilindro di altezza AC e raggio BL (n. 970): onde concludiamo che anche in questo caso il solido generato da ABC è uguale a quello di

una piramide di altezza BL, *e di base uguale alla superficie generata da* AC.

Alla medesima conclusione si arriva nel caso in cui B coincida con H o K, o appartenga ad uno dei prolungamenti di HK.

991. Ciò premesso, consideriamo il solido di rotazione generato da una qualsiasi poligonale regolare iscritta o circoscritta ad una semicirconferenza, e avente per asse il diametro di questa, che congiunge i termini della poligonale.

Siano $A_1A_2 \ldots A_n$ la poligonale (nella figura $n = 6$), O il centro e OH l'apotema. Congiunto O coi vertici, il solido di rotazione suaccennato è uguale



alla somma dei solidi generati, intorno all'asse A_1A_n, dagli $n - 1$ triangoli OA_1A_2, OA_2A_3, ..., $OA_{n-1}A_n$, aventi tutti l'altezza OH. Perciò il solido che ha per generatrice la poligonale, si ottiene sommando $n - 1$ piramidi di altezza comune OH, e aventi le superficie delle basi uguali alle superficie descritte rispettivamente dagli $n - 1$ lati della poligonale. Concludiamo senz'altro che *il solido di rotazione generato da una poligonale regolare iscritta o circoscritta ad una semicirconferenza e avente come asse il diametro congiungente i termini della poligonale è uguale al solido di una piramide avente l'altezza uguale all'apotema della poligonale, e la superficie della base uguale alla superficie di rotazione generata, intorno all'asse del solido dalla poligonale considerata.*

992. A questo punto possiamo ormai procedere alla cubatura della sfera.

Teor. — *Una sfera ha solido uguale ad una piramide, in cui la superficie della base è uguale alla superficie spianata della sfera e l'altezza è uguale al raggio di essa.*

Indichiamo con S la sfera e con P la piramide or ora nominata; e notiamo subito che codesta piramide P ha solido uguale al parallelepipedo rettangolo AH, che ha per altezza AF un terzo del raggio di S, e per base la superficie spianata della sfera, vale a dire il rettangolo del diametro AD e della circonferenza massima rettificata AB (vedi fig. alla pagina seguente).

Diciamo che è

$$S \text{ equisolido } P.$$

Per dimostrarlo proveremo che partendo dalle ipotesi contrarie si giunge ad un assurdo. Precisamente mostreremo che, se si suppone

$$S < P$$

si può *iscrivere* nella semicirconferenza massima di S una poligonale regolare tale che il solido di rotazione da essa generato sia prevalente alla sfera, il che è manifestamente assurdo.

E parimenti mostreremo che, se si suppone $S > P$ si può circoscrivere alla semicirconferenza massima di S una poligonale regolare tale che il solido di rotazione da essa generato sia suvvalente alla sfera, il che è ancora assurdo. Così sarà provato che veramente è

$$S = P.$$

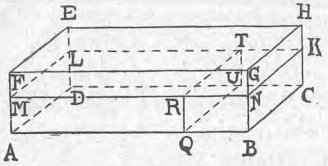
Sia dunque in primo luogo

$$S < P.$$

Allora si può costruire un poliedro Q, tale che sia (numero 940)

$$Q < P - S.$$

Diviso Q in un qualsiasi modo, in due parti poliedriche Q_1, Q_2, si costruisca sulla base FGHE il parallelepipedo rettangolo che ha solido uguale a Q_1 (n. 935), e sia FM la sua altezza. Completato il parallelepipedo, si costruisca sulla base BCKN il parallelepipedo rettangolo che ha solido uguale a Q_2 (n. 825); supposto che BQ sia l'altezza, si completi il parallelepipedo BT.



Poichè

$$Q < P - S$$

e quindi

$$S < P - Q$$

avremo che S è suvvalente al parallelepipedo rettangolo AT.

Ma noi possiamo iscrivere nella semicirconferenza massima di S una poligonale regolare tale, che la superficie di rotazione che la ammette come generatrice, sia prevalente al rettangolo AQUD (cfr. il n. 982). Alla medesima condizione soddisfa ogni poligonale regolare iscritta avente un numero maggiore di lati, e fra codeste poligonali ne esistono infinite (n. 971, *b*) che hanno l'apotema maggiore del triplo di AM (e, naturalmente, minore del triplo di AF, cioè del raggio della sfera). Il solido di rotazione che ha per generatrice una di codeste poligonali è uguale a quello di un parallelepipedo rettangolo di base maggiore di AQUD e di altezza maggiore di AM, e quindi è prevalente al parallelepipedo AT, che, come dianzi si è visto, è prevalente alla sfera. Se ne conclude che il solido di rotazione dianzi nominato dovrebbe essere prevalente alla sfera, il che, come già si è notato, è assurdo: onde risulta che non può essere $S < P$.

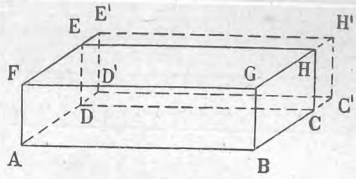
Supponiamo in secondo luogo

$$S > P.$$

Preso allora un poliedro $\overline{Q}$, tale che sia (n. 940)

$$\overline{Q} < S - P,$$

si trasformi il poliedro $\overline{Q}$ in un parallelepipedo rettangolo avente una faccia uguale alla faccia CDEH del parallelepipedo AH considerato dianzi e avente solido uguale alla nostra piramide P. Preso sul prolungamento di AD il segmento DD′ uguale all'altezza del parallelepipedo equivalente a $\overline{Q}$, e completato il parallelepipedo rettangolo corrispondente, avremo



$$CDEH.... E' = \overline{Q}$$

e quindi

$$CDEH.... E' < S - P$$

ossia, essendo $P = ABGF.... H$,

$$(1) \qquad ABGF.... H' < S.$$

Ora nel parallelepipedo totale ABGF.... H′ l'altezza AF è uguale ad un terzo del raggio della sfera S e la base ABC′D′ ha il lato AB uguale alla circonferenza massima rettificata di S e l'altro lato BC′ maggiore di BC che è uguale al diametro di S. Potremo allora circoscrivere alla semicirconferenza massima di S una poligonale regolare tale che la superficie di rotazione, da essa generata, sia suvvalente ad ABC′D′; giacchè a tale scopo basterà che la proiezione della poligonale sull'asse di rotazione sia minore di AD′. Il solido di rotazione generato da cotesta poligonale è uguale ad un parallelepipedo rettangolo avente l'altezza uguale ad AF e la base minore di ABC′D′; e perciò sarà suvvalente ad ABGF... H′ e quindi, per la (1), ad S, il che è assurdo, perchè il solido della sfera è suvvalente ad ogni solido di rotazione generato da una poligonale circoscritta alla semicirconferenza massima.

993. Analogo procedimento permette di stabilire il seguente

Teor. — *Un settore sferico ha solido uguale ad una*

piramide, in cui la superficie della base è uguale alla superficie della zona corrispondente (o della calotta) e l'altezza è uguale al raggio della sfera, cui appartiene il settore considerato.

XVII.

MISURA

994. I poliedri costituiscono una *classe di grandezze geometriche*: perciò si possono estendere ad essi le considerazioni dei nn. 546-569 del cap. VIII. Fissato un poliedro U, al quale si fa corrispondere il numero 1, cioè la *unità* di misura dei poliedri, dicesi *misura*, o più precisamente *volume* di un qualsiasi altro poliedro P, commensurabile o no col poliedro unità, il rapporto, razionale o irrazionale, P : U.

Si giunge a stabilire una relazione più semplice fra la misura dei poliedri e quella dei poligoni e dei segmenti, scegliendo come unità, anzichè un poliedro qualsiasi, il cubo dell'unità dei segmenti.

Fatta una tale convenzione, si immagini di sostituire ad ogni poliedro, che si voglia misurare un parallelepipedo rettangolo avente il medesimo solido e la base uguale al quadrato dell'unità dei segmenti (n. 935).

Allora considerazioni analoghe a quelle del numero 579 del cap. VIII ci conducono a concludere che ad ogni parallelepipedo rettangolo avente per base l'unità di superficie, corrisponde come misura (volume) lo stesso numero che misura la sua altezza.

Reciprocamente, dato un numero qualsiasi, si può costruire un segmento che lo ammetta come misura (numero 560), e allora il parallelepipedo rettangolo che ha per base l'unità di superficie e per altezza codesto segmento sarà misurato dal numero dato.

Per la corrispondenza così stabilita fra numeri e poliedri, si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

a) *Poliedri aventi ugual solido hanno ugual volume e viceversa.*

b) *Se un poliedro è prevalente ad un altro, il primo ha volume maggiore del secondo.*

c) *Il volume della somma di due poliedri è uguale alla somma dei volumi dei poliedri dati.*

Si estendono poi ai solidi dei poliedri e ai loro volumi i teoremi del nn. 573-575.

995. Taluni risultati dei cap. XIV e XV permettono di stabilire alcune regole pel calcolo diretto dei volumi dei poliedri d'uso più frequente.

Cominciamo dal considerare un parallelepipedo rettangolo, di cui siano $a, b, c,$ le misure degli spigoli concorrenti in un medesimo vertice (*dimensioni*) del parallelepipedo.

Se designiamo con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ i segmenti misurati dai numeri a, b, c e con $\boldsymbol{u}$ il segmento unità, avremo, usando le notazioni del n. 961, che (n. 944).

$$pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) : pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{u}$$
$$pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) : pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{u}$$
$$pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) : pr\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{u}.$$

Se allora indichiamo con x, x_1, x_2 i volumi dei parallelepipedi rettangoli

$$pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),\ pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}),\ pr\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}),$$

e notiamo che il $pr\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, cioè il cubo di lato 1, ha il volume 1, troviamo le seguenti proporzioni numeriche (nn. 576, 994)

$$x : x_1 = c : 1$$
$$x_1 : x_2 = b : 1$$
$$x_2 : 1 = a : 1$$

ossia

$$x = cx_1$$
$$x_1 = bx_2$$
$$x_2 = a$$

e quindi

$$x = abc;$$

cioè *il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto delle sue dimensioni*, od anche dal prodotto (dell'area) della base per l'altezza.

In particolare *il volume del cubo è uguale alla terza potenza* (della misura) *dello spigolo.*

996. Poichè un prisma qualsiasi è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo avente base equivalente ed altezza uguale (n. 896), avremo che *il volume del prisma è dato dal prodotto* (dell'area) *della base per l'altezza.*

997. Una piramide qualsiasi ha solido uguale alla terza parte di un prisma avente base equivalente ed altezza uguale ad essa (n. 934): perciò *il volume di una piramide è dato dal terzo del prodotto* (dell'area) *della base per l'altezza.*

998. Sia un tronco di piramide (a basi, parallele). Se h è l'altezza, e b, B sono le aree delle basi, risulta dal n. 948 che il volume è dato da

$$\frac{1}{3}h\left(b + B + \sqrt{bB}\right).$$

cioè *il volume di un tronco di piramide* (a basi parallele) *è dato dal terzo del prodotto dell'altezza per la somma* (delle aree) *delle due basi e della loro media proporzionale.*

999. Consideriamo un cilindro retto di altezza h e di raggio r. La sua superficie laterale, uguale a quella del rettangolo di base $2\pi r$ e di altezza h, è misurata da (nn. 970, 599).

$$2\pi rh;$$

perciò la superficie totale del cilindro è data da

$$2\pi r\ (h + r).$$

Il solido del cilindro, uguale a quello di un prisma di base πr^2 e altezza h, è misurato (nn. 876, 907) da

$$\pi r^2 h.$$

1000. Dato un cono di cui siano r ed a rispettivamente il raggio della base e l'apotema, la sua superficie laterale è misurata (nn. 874, 594) da

$$\frac{2\pi r\ .\ a}{2} = \pi ra$$

e quindi la superficie totale da

$$\pi r\ (a + r).$$

Il volume del cono, poichè l'altezza h di esso è data da

$$h = \sqrt{a^2 - r^2},$$

è uguale a (nn. 966, 997)

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\ \pi r^2\ \sqrt{a^2 - r^2}.$$

1001. Dato un tronco di cono di cui siano r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ i raggi delle due basi ed a l'apotema, la sua superficie laterale è data (nn. 978, 595) da

$$\frac{2\pi r_1 + \pi r_2}{2}a = \pi\ (r_1 + r_2)\ a.$$

1002. Il solido poi è uguale (n. 967) a quello di un tronco di piramide (a basi parallele), di cui l'altezza sia uguale a quella del tronco di cono e le basi abbiano superficie rispettivamente uguali a quello. Se h è l'altezza del tronco di cono avremo che il suo solido è misurato (nn. 998, 610) da

$$\frac{1}{3}\ \pi h\ (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

1003. Si consideri una sfera di raggio r. Discende dai nn. 986, 610 che la superficie è data da

$$4\pi r^2.$$

Abbiamo poi dai nn. 992, 997 che il solido della sfera è misurato da

$$\frac{1}{3}\ 4\pi r^2 . r = \frac{4}{3}\ \pi r^3.$$

1004. Perciò se v, v' sono i volumi di due sfere di raggio r, r' rispettivamente avremo

$$v = \frac{4}{3}\ \pi r^3\ ,\ v' = \frac{4}{3}\ \pi r'^3$$

e quindi ancora

$$\frac{v}{v'} = \frac{r^3}{r'^3}.$$

Di qui si conclude che *due sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi.*

1005. Data su di una sfera di raggio r una zona o una calotta di altezza h, la sua superficie è data (nn. 980, 999) da

$$2\pi rh,$$

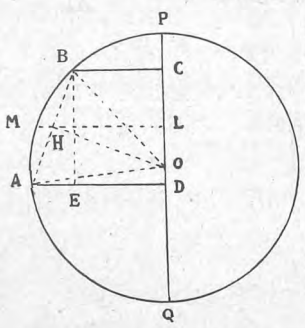
e il solido del settore sferico corrispondente è dato (nn. 904, 908) da

$$\frac{1}{3} r.2\pi rh = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

1006. Determiniamo da ultimo il *volume del segmento sferico.*

Si consideri il segmento sferico a due basi S, avente per sezione meridiana l'arco AMB e per asse il diametro PQ; e si ponga

$$OA = r,\ DA = a,\ CB = b,\ CD = h.$$



Il segmento S si ottiene riunendo il tronco di cono T (eventualmente cilindro) generato dal trapezio ABCD, e il solido (anulare) di rotazione R descritto dal segmento circolare AMB intorno all'asse PQ.

Siamo così condotti a determinare anzitutto il volume di codesto solido anulare R. Esso si ottiene dal settore sferico generato da AMBO, togliendo il solido di rotazione generato dal triangolo ABO il quale, pel n. 990 è equisolido ad una piramide di altezza OH e di base uguale alla superficie generata da AB. Il volume di quest'ultimo solido sarà quindi intanto (n. 980)

$$\frac{2}{3}\pi h\ (OH)^2.$$

Ricordando che il volume del settore sferico AMBO è (n. prec.)

$$\frac{2}{3}\pi h\ (OA)^2$$

si trova

$$R = \frac{2}{3}\pi h\ [(OA)^2 - (OH)^2].$$

Ma (n. 587) si ha

$$(OA)^2 - (OH)^2 = (AH)^2 = \frac{(AB)^2}{4}$$

Quindi

$$R = \frac{1}{6}\pi h\ (AB)^2.$$

Per avere il volume del segmento basta aggiungere ad R il volume del tronco di cono ABCD, cioè (n. 1001)

$$\frac{1}{3}\pi h\ (a^2 + ab + b^2);$$

onde si ha

$$S = \frac{1}{3}\pi h\ (a^2 + ab + b^2) + \frac{1}{6}\pi h\ (AB)^2.$$

Ma se da B si abbassa la perpendicolare BE su AD, si ha (n. 587)

$$(AB)^2 = (BE)^2 + (AE)^2$$

cioè

$$(AB)^2 = h^2 + (a - b)^2$$

e sostituendo in S e riducendo, si trova

$$S = \frac{1}{2}\pi h\ (a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Si ha così il

Teor. — *Un segmento sferico a due basi ha solido uguale alla semisomma di due cilindri aventi la stessa altezza del segmento, e per basi rispettive le basi del segmento, aumentata della sfera avente per diametro l'altezza del segmento.*

1007. Ponendo $b = 0$ nella formola ottenuta dianzi, si ottiene pel volume del segmento sferico ad una sola base, in cui a sia il raggio della base ed h l'altezza

$$\frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Se r è il raggio della sfera si ha (n. 459)

$$a^2 = h\ (2r - h),$$

cosicchè il volume del segmento è anche dato da

$$\frac{1}{3}\pi h^2\ (3r - h).$$

1008. La espressione ottenuta al n. 1006 per il volume del segmento sferico a due basi si semplifica se si tien conto del raggio $LM = p$ della sezione del segmento equidistante dalle basi.

Posto

$$PD = x,\ PC = y,\ PL = z = \frac{x+y}{2}$$

abbiamo (n. 459)

$$a^2 = x\,(2r - x), b^2 = y\,(2r - y)$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\,(a^2 + b^2) = 2rz - \frac{x^2 + y^2}{2}$$
$$= 2rz - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$
$$= 2zr - z^2 - \frac{h^2}{4}$$
$$= p^2 - \frac{h^2}{4}.$$

Cosicchè da ultimo della formola del n. 1006 si deduce la seguente notevole formola (del MAC-LAURIN)

$$S = \pi h \left(p^2 - \frac{h^2}{12} \right).$$

ESERCIZI

1. Trovare le aree delle superficie e i volumi dei cinque poliedri regolari (nn. 834-838), quando ne sono dati gli spigoli. [Pei volumi si calcoli prima il raggio della sfera iscritta].

2. Trovare le aree delle superficie e i volumi dei poliedri, che si ottengono, troncando i cinque poliedri regolari con piani passanti pei punti medî degli spigoli, quando sia dato lo spigolo di ciascun poliedro.

3. Trovare il volume del tetraedro che ha per base il triangolo di lati a, b, c e gli altri tre spigoli uguali ad l.

4. Il volume di un tronco di piramide (a basi parallele) è dato da

$$\frac{1}{3}\,h\left(\frac{b + B}{2}\right) + 2\,b'$$

dove h è l'altezza, B e b sono le aree delle due basi e b' l'area della sezione media, parallela alle basi.

5. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie laterale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

6. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie totale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

7. Le superficie sviluppate dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono equivalenti. I solidi sono inversamente proporzionali ai lati fissi.

8. Il litro per misurare i grani ha la forma di un cilindro circolare, di cui l'altezza è uguale al diametro; nel litro da

liquidi l'altezza è doppia del diametro. Calcolare le dimensioni di codeste due misure.

9. Calcolare il raggio interno di un tubo di vetro cilindrico, che pesa 90 gr. quando è vuoto, e 200 gr. quando vi si introduce una colonna di mercurio di 9 cm., posto che la densità del mercurio è 13,568.

10. Per estrarre l'acqua da un pozzo si fa uso di una pompa, il cui tubo ha un diametro interno uguale a d, e il cui stantuffo ha una data corsa h. Il diametro del pozzo è D e la profondità H. Dopo quante corse dello stantuffo si vuoterà il pozzo?

11. Trovare il cilindro di massimo volume, che ha una data superficie totale.

12. Le superficie laterali e i solidi dei coni generati dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ai cateti sono inversamente proporzionali ai cateti fissi.

13. Dividere la superficie laterale di un cono, o di un tronco di cono, in due parti uguali mediante un piano parallelo alle basi.

14. Calcolare i raggi delle basi in un tronco di cono, di cui si conoscano l'altezza, l'apotema e la superficie o il volume.

15. Qual è la base del cilindro che ha la medesima altezza e la medesima superficie laterale del tronco di cono, di cui siano r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ i raggi delle due basi ed a l'apotema?

16. Iscrivere in un cono dato un cilindro di volume massimo, o, inversamente, circoscrivere a un cilindro un cono di volume minimo. [Un cilindro si dice *iscritto* in un cono se ha una base sulla base del cono e l'altra base è una sezione circolare del cono].

17. Fra i coni, che hanno un dato apotema, trovar quello di massimo volume.

18. Fra i cilindri iscritti in un dato cono trovare quello che ha la massima superficie totale.

19. In un liquido di densità d si tuffa un tronco di cono omogeneo di densità d': i raggi delle basi sono R ed r e l'altezza h. Calcolare l'altezza della parte immersa e il diametro della sezione fatta dal piano di livello del liquido.

20. Come stanno fra loro le superficie di una sfera, di un cilindro e di un cono, tali che il cilindro e il cono abbiano come altezza il diametro e come raggio delle basi il raggio della sfera?

21. Iscrivere in una sfera un cilindro, di cui la somma delle due basi sia uguale alla superficie laterale. (Un cilindro o un tronco di cono si dice *iscritto* in una sfera se le due basi sono cerchi, sezioni della sfera).

22. Calcolare i raggi delle basi di un tronco di cono iscritto in una sfera, conoscendo il volume e l'altezza del tronco.

23. Iscrivere in una sfera data un cilindro di superficie totale data.

24. Trovare il massimo della superficie laterale, della superficie totale, del volume di un cilindro o di un cono iscritto a una sfera data.

25. Circoscrivere a una sfera data un cono o un tronco di cono di volume massimo.

26. Dati in un piano due cerchi concentrici, se per essi si fanno passare due sfere, le quali siano tangenti internamente, la differenza delle due calotte che contengono il punto di contatto, ha superficie uguale alla corona circolare; cioè la calotta maggiore ha superficie uguale alla somma della calotta minore e della corona circolare. Si ha così un esempio di superficie avviluppante uguale alla superficie avviluppata [1].

27. Le zone, che due sfere concentriche intercettano sulle sfere passanti pel centro comune di esse, hanno superficie uguali.

28. Quale parte della superficie terrestre (supposta sferica) può vedere un aeronauta, che si innalzi in pallone a una altezza h sul livello del mare?

29. Dividere una zona in media ed estrema regione per mezzo di un piano parallelo alle basi.

31. Dividere una sfera per mezzo di un piano, in guisa che l'area della sezione sia uguale alla differenza delle superficie delle due calotte.

31. Conoscendo la lunghezza dell'asse di una caldaia ci-

---

[1] I. Amaldi: *Pitagora*, Anno IX, n. 1-2.

lindrica, terminata da due semisfere, calcolare le dimensioni della parte cilindrica in modo che la superficie totale della caldaia sia uguale a una superficie data.

32. In che rapporto stanno fra loro i diametri di due sfere di una medesima sostanza, delle quali l'una pesi il doppio dell'altra?

33. In che rapporto stanno i volumi della sfera, del cilindro e del cono dell'es. 20?

34. La Terra, il Sole e la Luna, considerati come sfere, hanno raggi che stanno fra loro come $r : 108\ r : 0{,}27\ r$, e la distanza dei centri della Luna e della Terra è uguale a $60\ r$. Si domanda:

a) Quante sfere uguali alla Terra si potrebbero formare col Sole?

b) Quante sfere si potrebbero costruire col Sole, le quali fossero uguali alla sfera tangente esternamente tanto alla Terra quanto alla Luna?

35. In quale rapporto restano divisi la superficie e il volume di una sfera dal piano di una delle facce del cubo iscritto?

36. Il solido di rotazione generato da un esagono regolare, che ruoti intorno ad un suo lato, è uguale al solido della sfera, il cui raggio è triplo di codesto lato.

37. Se ad una sfera si circoscrivono il cilindro e il cono, il cui apotema sia uguale al diametro della base, la superficie totale del cilindro è media geometrica fra la superficie della sfera e la superficie totale del cono; il cilindro è medio geometrico fra sfera e il cono. Codeste tre superficie e codesti tre solidi sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.

38. Una cassula, il cui interno ha forma di calotta ed è fonda mm.12, contiene, piena, 38 gr. di mercurio (peso specifico = 13,6). Quale è la sua superficie interna?

39. Quale è la calotta sferica che ha una superficie data e solido massimo, e reciprocamente, quale è la calotta sferica che ha un volume dato e superficie minima?

40. Calcolare il volume V di una lente biconvessa, conoscendo i raggi r, r' delle due facce e lo spessore s.

$$V = \frac{12}{\pi}\,\frac{s}{r + r' - s}\,(s^2 - (r + r')s + 12\,rr').$$

FINE

INDICE

PREFAZIONE . . . . . PAG. III
INTRODUZIONE . . . . . » VII

I. Gli enti fondamentali: punto, retta, piano.

Punto, retta, piano . . . . . » 1
Proprietà lineari della retta . . . . . » 2
Confronto di segmenti . . . . . » 5
Proprietà superficiali del piano . . . . . » 10
Confronto di angoli . . . . . » 15
ESERCIZI . . . . . » 18

II. Figure poligonali.

Triangoli . . . . . » 20
Triangoli uguali . . . . . » 22
Disuguaglianza fra elementi di triangoli . . . . . » 35
Perpendicolari . . . . . » 42
Triangoli rettangoli . . . . . » 48
Luoghi geometrici . . . . . » 51
Poligoni . . . . . » 55
Poligoni uguali . . . . . » 59
Poligoni concavi . . . . . » 60
Poligonali . . . . . » 64
Costruzioni . . . . . » 66
ESERCIZI . . . . . » 70

III. Il cerchio.

Circonferenza e cerchio . . . . . Pag. 76
Archi e settori . . . . . » 78
Diametri, centro e corde . . . . . » 80
Intersezioni di rette e cerchi . . . . . » 85
Posizione relativa di due cerchi . . . . . » 89
Costruzioni col compasso . . . . . » 98
Figure a contorno curvilineo . . . . . » 107
Esercizi . . . . . » 113

IV. Teoria delle parallele e sue applicazioni.

Parallele . . . . . » 117
Somma degli angoli di un poligono . . . . . » 123
Parallelogrammi . . . . . » 125
Rettangolo, rombo, quadrato . . . . . » 129
Distanza di due parallele . . . . . » 132
Divisione di un segmento in parti uguali . . . . » 134
Punti notevoli di un triangolo . . . . . » 138
Angoli nel cerchio . . . . . » 140
Poligoni regolari . . . . . » 147
Esercizi . . . . . » 155

V. Teoria della equivalenza.

Preliminari . . . . . » 172
Rettangoli equivalenti . . . . . » 173
Parallelogrammi equivalenti . . . . . » 176
Teorema di Pitagora e sue conseguenze . . . . . » 181
Triangoli equivalenti . . . . . » 186
Trasformazioni di poligoni . . . . . » 188
Confronto di poligoni . . . . . » 193
Differenze di poligoni equivalenti . . . . . » 197
Secondo modo di trasformare un rettangolo in un quadrato . . . . . » 199
Sezione aurea e pentagono regolare . . . . . » 200
Equivalenza di poligoni a lati circolari . . . . . » 204
Confronto di poligoni a lati circolari . . . . . » 206
Esercizi . . . . . » 210

VI. Teoria delle proporzioni.

Grandezze geometriche . . . . . Pag. 223
Rapporto di due grandezze . . . . . » 225
Coppie di grandezze proporzionali . . . . . » 230
Proporzioni dedotte da un data . . . . . » 234
Proporzioni di segmenti, poligoni, ecc. . . . . » 240
Inversione dei teoremi precedenti . . . . . » 253
Segmenti proporzionali e parallelogrammi equivalenti » 266
Poligoni simili . . . . . » 271
Confronto dei perimetri e delle superficie di due poligoni simili . . . . . » 276
Esercizi . . . . . » 285

VII. Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio.

Continuità della retta . . . . . » 302
Rettificazione della circonferenza . . . . . » 307
Quadratura del cerchio . . . . . » 316
Esercizi . . . . . » 323

VIII. Teoria della misura.

Ricerca della massima summultipla comune di due grandezze . . . . . » 325
Rapporto di grandezze incommensurabili. . . . . » 334
Operazioni sui numeri irrazionali . . . . . » 344
Misura dei segmenti . . . . . » 349
Misura degli angoli . . . . . » 352
Misura dei poligoni . . . . . » 353
Area del rettangolo e del quadrato. Applicazioni . » 355
Area del triangolo e del trapezio. Applicazioni . . » 359
Misura della circonferenza . . . . . » 362
Area del cerchio e del settore circolare . . . . . » 369
Applicazioni della teoria della misura . . . . . » 372
Esercizi . . . . . » 379
Sofismi geometrici . . . . . » 392

IX. Rette e piani nello spazio.

Parti di spazio e intersezione di due piani . . . Pag. 397
Retta e piano perpendicolari . . . . . » 399
Diedri e loro sezioni normali . . . . . » 408
Diedri uguali . . . . . » 413
Piani perpendicolari . . . . . » 417
Sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali. . . » 422

X. Angoloidi e poliedri.

Triedri . . . . . » 428
Triedri polari . . . . . » 431
Triedri uguali . . . . . » 434
Angoloidi . . . . . » 440
Poliedri . . . . . » 444

XI. La sfera.

Preliminari . . . . . » 450
Intersezioni di rette e piani con sfere e di sfere con sfere . . . . . » 452
Figure sferiche . . . . . » 458
Esercizi . . . . . » 462

XII. Rette e piani paralleli - Prismi.

Rette parallele . . . . . » 466
Retta e piano paralleli . . . . . » 469
Minima distanza di due rette sghembe . . . . . » 472
Piani paralleli . . . . . » 474
Distanza di due piani paralleli . . . . . » 479
Angoli con lati paralleli . . . . . » ivi
Trasversali a più piani paralleli. . . . . » 481
Dimostrazione stereometrica di un teorema di Geometria piana . . . . . » 484
Prisma indefinito . . . . . » 487
Prisma finito . . . . . » 489
Parallelepipedo . . . . . » 491
Poliedri regolari . . . . . » 495

XIII. Cilindro e cono.

Cilindro indefinito . . . . . Pag. 501
Cilindro finito . . . . . » 504
Cono indefinito . . . . . » 505
Cono finito e tronco di cono . . . . . » 509
Poliedri a faccie curve . . . . . » 511
Esercizi . . . . . » 519

XIV. Le superficie e i solidi dei poliedri.

Trasformazione della superficie laterale di un poliedro in un poligono equivalente . . . . » 526
Prismi equivalenti . . . . . » 528
Trasformazione di prismi . . . . . » 533
Differenze di prismi equivalenti . . . . . » 535
Confronto di poliedri. . . . . » 538
Piramidi aventi solidi uguali . . . . . » 541
Confronto fra prismi e piramidi . . . . . » 549
Confronto di poliedri a facce curve . . . . . » 551

XV. Proporzioni e similitudine.

Proporzioni . . . . . » 554
Sezioni parallele di un angoloide. Tronco di piramide » 555
Poliedri simili . . . . . » 559
Esercizi . . . . . » 567

XVI. Cubatura del cilindro, del cono e della sfera e quadratura delle superficie relative.

Cubatura del cilindro, del cono e del tronco di cono. » 574
Sviluppo della superficie del cilindro, del cono e del tronco di cono . . . . . » 575
Quadratura della superficie sferica e cubatura della sfera . . . . . » 589

XVII. Misura.

. . . . . » 605
Esercizi . . . . . » 613