Enriques, Federigo

Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche, appartenenti ad una data superficie di Riemann

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XIII** (1904), pp. 382-384.

Matematica. — *Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche, appartenenti ad una data superficie di Riemann.* Nota di F. ENRIQUES presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO [1].

1. Si abbia una curva algebrica (o una superficie di Riemann)

$$f(xy) = 0.$$

Costruita in un modo qualsiasi la funzione razionale

$$t = t(xy),$$

la quale prenda valori distinti allorchè, tenendo fermo un valore di una delle due variabili, gli si accoppino valori diversi dell'altra, risultano,

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

funzioni algebriche del parametro t con uno stesso numero n di rami, e col medesimo gruppo di monodromia, che si lascia considerare perciò come il gruppo della g'_n rappresentata dall'equazione

$$t(xy) = \text{cost.}$$

Alla costituzione del gruppo delle g'_n appartenenti alla curva f, si riattaccano talune interessanti questioni, che ebbi l'onore di enunciare in una comunicazione fatta al congresso matematico di Zurigo nel 1896 [2]. In questa ho osservato come si possa costruire una curva $f = 0$, la quale contenga una g'_n, possedente un gruppo di struttura assegnata; ma come

(1) Presentata nella seduta del 10 aprile 1904.

(2) Cfr. Mathem. Annalen Bd. 51, pag. 134.

si presenti invece estremamente difficile il problema inverso, di decidere « se una curva data f, contenga (per n assai grande) delle g'_n il cui gruppo abbia certe particolarità di struttura, p. es. sia composto ed abbia per fattori di composizione dei numeri primi ecc. ».

Una sola cosa (come ebbi occasione di avvertire) è tosto visibile; che una g'_n composta con una involuzione γ'_s (razionale o nò) ha gruppo imprimitivo e viceversa; cioè ogni funzione algebrica ad n rami

$$x = x(t)$$

il cui gruppo sia imprimitivo, si *compone* con una funzione algebrica

$$x = x(\tau)$$

avente un certo numero di rami $s\,(<n)$ divisore di n, e colla

$$\tau = \tau(t)$$

avente $^n/_s$ rami. Aggiungasi che, se la curva fondamentale f è a moduli generali e di genere $p > 1$, essa non contiene involuzioni irrazionali, e quindi è t funzione razionale di τ (¹).

A questo ordine di questioni reca un contributo la presente Nota, nella quale viene stabilito il teorema:

Il gruppo di monodromia di una funzione algebrica $x(t)$ appartenente ad una data superficie di Riemann (cioè il gruppo di una g'_n $t(xy) = \text{cost.}$ sopra una curva $f(x,y) = 0$) *è sempre il gruppo totale, se la funzione $x(t)$* (e la serie g'_n) *non è composta, e se essa ha qualche punto di diramazione semplice.*

Di qui si ottiene subito una facile dimostrazione del teorema di Kneser (²):

Se sopra una QUALSIASI *superficie di Riemann (curva) $f(xy) = 0$, si costruisce la funzione razionale*

$$t = ax + by\,,$$

corrispondente a due valori generici di a, b, il gruppo di monodromia della funzione algebrica $x(t)$ è SEMPRE *il gruppo totale.*

2. Sopra una curva irriducibile $f(xy) = 0$ si consideri una serie lineare g'_n rappresentata dall'equazione

$$t(xy) = \text{cost.}$$

Se questa ammette un punto di coincidenza semplice, la funzione algebrica $x(t)$ ha un punto di diramazione in cui vengono scambiati due rami. Perciò il

(¹) Loc. cit. pag. 143.
(²) Math. Annalen Bd. 28.

suo gruppo di monodromia, contenendo una trasposizione, è il gruppo totale, oppure è imprimitivo ([1]). In quest'ultimo caso gli n punti di un gruppo generico G_n della g'_n si possono dividere in un certo numero r di sple G_s ($nr = s$), ed i G_s formano sopra C un'involuzione g'_s o γ'_s (razionale o nò). In altri termini la g'_n risulta *composta* con un'involuzione d'ordine inferiore. Ciò viene appunto affermato dal primo dei nostri teoremi. Il quale racchiude come caso particolare il citato teorema di Kneser « se sopra una *qualsiasi* curva irriducibile $f(xy) = 0$, si costruisce la funzione razionale $ax + by = t$, corrispondente a due valori generici di a, b, il gruppo di monodromia della funzione algebrica $x(t)$ è *sempre* il gruppo totale ».

Infatti la g'_n segnata sulla nostra curva della funzione razionale t, essendo contenuta come g'_n generica nella g^2_n (semplice) segata dalle rette del piano, non può essere composta con un'involuzione d'ordine $< n$; e d'altra parte i punti di coincidenza di essa, che sono i punti di contatto delle tangenti condotte alla curva da un punto generico del piano, sono fra loro distinti.

([1]) Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni*, Pisa, Spoerri, 1900, (pag. 28).