Enriques, Federigo

Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **IX** (1905), pp. 5-13.

FEDERIGO ENRIQUES

Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari

NOTA

letta alla R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna
nella Sessione delli 11 Dicembre 1904

BOLOGNA
TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1905

Estratto dal *Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.* — Anno accademico 1904-1905.

§ **1.** — È noto che per una superficie algebrica si hanno due caratteri invarianti (*generi superficiali*), cioè il *genere geometrico* p_g (Clebsh-Noether) ed il *genere numerico* o *aritmetico* p_a (Cayley, Zeuthen, Noether, Enriques). Questi due caratteri, nel caso, che si considera come generale, delle *superficie regolari*, hanno egual valore, ma, se non si introduce alcuna ipotesi restrittiva, si può vedere soltanto che $p_a \leq p_g$; si conoscono effettivi esempi di superficie (*irregolari*) per cui $p_a < p_g$.

Esempii siffatti sono forniti dalle rigate (Cayley), dalle superficie con un fascio irrazionale di curve algebriche (Castelnuovo), e più generalmente dalle superficie che contengono un sistema continuo di curve algebriche non appartenente ad un sistema lineare di curve del medesimo ordine (Enriques).

Questi esempii (che si presentano anche analogamente nello studio delle superficie sotto l'aspetto trascendente) hanno indotto i geometri a porsi la questione inversa, se ad ogni superficie irregolare appartengano sistemi continui di curve non contenuti in sistemi lineari, onde la presenza di sistemi siffatti fornisca la proprietà fondamentale caratteristica delle superficie irregolari. Ma il problema è rimasto fino ad ora insoluto.

Questo problema appunto sono riuscito a risolvere, dando alla precedente domanda una risposta affermativa. Enuncio dunque il resultato a cui sono pervenuto:

Se sopra una superficie algebrica si costruiscono, per ogni valore di n, *le curve d'ordine* n *che vi appartengono, queste:*

1) *si distribuiscono in un numero finito di sistemi lineari completi, se la superficie è regolare* ($p_a = p_g$)*;*

2) *si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici continui generalmente non lineari, e danno luogo quindi ad infiniti sistemi lineari completi, se la superficie è irregolare.*

Questa proprietà caratterizza le superficie irregolari in modo esauriente; infatti essa permette di costruirle tutte a partire da serie doppiamente infinite di gruppi di punti, non contenute in serie lineari, sopra curve algebriche.

Dal teorema enunciato, discendono conseguenze importanti.

Il sig. F. Severi ha recentemente dimostrato che « ogni superficie alla quale appartengano degli integrali di differenziali totali di 1ª specie (di Picard) è irregolare ». Si conclude dunque che: *la proprietà di contenere sistemi continui non lineari vale per tutte le superficie con integrali di Picard di 1ª specie* (*).

(*) In una nota inserita negli *Annales de Toulouse* 2ª, S. III, ero riuscito a dimostrare la cosa soltanto nell'ipotesi che sieno dati p integrali con $2p$ periodi, e quella dimostrazione fu poi semplificata dal sig. Severi.

D' altra parte (grazie ad una osservazione ben nota del sig. Humbert che risale al 1893) la presenza di un sistema continuo completo non lineare sopra una superficie, assicura che questa possiede degli integrali di Picard di 1ª specie.

Risulta dunque; che *l'anzidetta proprietà è caratteristica per le superficie con integrali di Picard di 1ª specie.*

In particolare se ne deduce indirettamente che « *la condizione per l'esistenza di integrali di Picard di 1ª specie appartenenti ad una superficie è* $p_a < p_g$ », riuscendo così invertito il teorema sopra accennato del sig. Severi (*).

Ritornando al teorema fondamentale che dà la proprietà caratteristica delle superficie irregolari, vediamo poi come esso ammetta una ulteriore determinazione nel caso delle superficie di genere $p_g = 0$ ($p_a < 0$). Infatti partendo da un sistema continuo non lineare della superficie, ed usufruendo di un procedimento del sig. Castelnuovo (**), si potrà costruire su di essa un *fascio irrazionale di curve.*

Tale resultato permetterà in particolare di rispondere esaurientemente all' ultima questione accennata nella memoria di Castelnuovo e Enriques degli *Annali di Matematica* 1901, questione relativa alle condizioni perchè una superficie possa riferirsi ad una rigata.

(*) A questa inversione sembra giungere il signor Severi stesso, invertendo, con opportuni avvedimenti, il suo procedimento diretto. Egli mi ha comunicato il concetto fondamentale della dimostrazione, al cui svolgimento pare non debbano opporsi difficoltà nei particolari.

Questa dimostrazione offrirà interesse anche perchè porrà in luce una relazione fra $p_g - p_a$ e i numeri degli integrali di 1ª e 2ª specie.

(**) Cfr. Enriques — *Annales de Toulouse* l. c. p. 81.

Al teorema fondamentale di questa Nota si può aggiungere un complemento significativo, cui si riattaccheranno altre conseguenze notevoli. Vi accenniamo nell' ultima parte del nostro scritto.

§ **2.** — La dimostrazione del nostro teorema fondamentale è fondata sul seguente concetto:

I sistemi lineari completi di curve, tracciati sopra una superficie irregolare F $(p_a < p_g)$, hanno generalmente una *serie caratteristica* incompleta; pei sistemi che sopra la superficie si considerano come *regolari*, la deficienza sale al massimo valore $p_g - p_a$ (Castelnuovo). — Pertanto un sistema lineare regolare di curve C di genere π, secantisi a due a due in n punti, ha la dimensione

$$r = n - \pi + 1 + p_a ,$$

mentre la serie (caratteristica) segata sopra una C dalle rimanenti, appartiene ad una

$$g_n^{n - \pi + p_g}$$

completa.

Orbene, basterà dimostrare che il sistema lineare delle C è sempre contenuto in un sistema continuo più ampio di dimensione

$$r = n - \pi + 1 + p_g ;$$

perciò, costruito questo sistema continuo, faremo vedere che la serie lineare segata sopra la curva generica di esso dalle curve infinitamente vicine (*serie caratteristica* nel senso esteso di Severi), è completa. A questa conclusione perverremo anzi in generale, senza la restrizione che il sistema lineare $|C|$ sia regolare.

§ **3.** — Per raggiungere lo scopo detto innanzi, rappresentiamo la nostra superficie (d'ordine s) sopra un piano multiplo (*splo*) dotato di una certa curva di diramazione K; ciò può ottenersi p. es. mediante una proiezione da un punto esterno. Le immagini delle curve C saranno curve C_1 d'un certo ordine m, (uguale all'ordine delle C corrispondenti), dotate d'un certo numero d di punti doppi variabili, e toccanti in un certo numero q di punti la K; supposto (come è lecito) che il sistema $|C|$ non abbia punto base sulla superficie, neppure le C_1 passeranno per punti fissi nel piano.

Ora si può stabilire la seguente *osservazione fondamentale: tutte le curve d'ordine* m, *del piano, dotate di* d *punti doppi ed inoltre di* q *contatti con* K, *componenti il più ampio sistema continuo contenente quello delle* C, *sono immagini di curve d'ordine* m, *tracciate sulla superficie, che compongono il più ampio sistema continuo di curve del medesimo ordine cui appartiene* $|C|$.

Questa osservazione si giustifica in un modo molto semplice, ricorrendo a considerazioni di analysis situs; giova tuttavia di mettere in evidenza il fondamento di esse, che è un po' delicato.

Suppongasi che una curva L_1 d'ordine m, del piano *splo*, avente d punti doppi e toccante K in q punti, anzichè essere immagine semplice di una curva dello stesso ordine m della superficie (ed immagine $(s-1)$ *pla* della curva congiunta a questa nell'involuzione i cui gruppi sono rappresentati dai punti del piano *splo*), sia invece immagine *spla* di una curva irriducibile L della superficie, autocongiunta, cioè appartenente alla involuzione.

In tale ipotesi avviene che la curva L può variare con continuità sulla superficie, fino a degenerare in una curva composta di una C e della curva congiunta D. Ed è importante notare questo: che la L

generica e la $C + D$ hanno lo stesso numero $(sd + q)$ di punti doppi, corrispondenti ai d punti doppi della L_1 e di C_1, e ai q contatti, rispettivamente di L_1 e di C_1, colla K.

Ma questa conclusione è assurda: *non è possibile che una curva* L *variabile con continuità sopra una superficie, degeneri senza acquistare nuovi punti doppi*. Infatti si consideri la superficie di Riemann, immagine dei punti complessi di L; su questa deve ritenersi impedito il passaggio da una falda all' altra in ciascuno dei punti doppi dati, rotta cioè la connessione attraverso questi punti; e pur nondimeno, essendo L irriducibile, la superficie resta *connessa*. Orbene la $L (= C + D)$, degenere senza *nuovi* punti doppi, sarebbe invece composta di due parti *non connesse* fra loro; non si potrebbe passare con un cammino continuo da C a D attraverso i punti comuni alle due parti, perchè, secondo l' ipotesi di cui vogliamo provare l'assurdità, quei punti sono limiti di punti doppi di L, nei quali è impedito il passaggio da una falda all'altra. L'assurdo, che volevamo mettere in evidenza, nasce da ciò che, *una superficie di Riemann sconnessa non può risultare come limite di una superficie connessa.*

Pertanto resta stabilita la nostra osservazione fondamentale.

§ **4.** — Per fornire la dimostrazione promessa, ci rimane ora da valutare, nel piano multiplo, la dimensione del massimo sistema continuo di curve C_1 d'ordine m, con d punti doppi variabili e q contatti colla K, sistema che contiene le immagini delle curve C appartenenti al sistema lineare considerato sopra la superficie F. Nell' indicare, brevemente, come ciò possa ottenersi, ci varremo anche di un' osservazione semplificatrice comunicataci dal sig. Castelnuovo.

Consideriamo anzitutto, nel piano, il sistema di tutte le curve C_1 d' ordine m con d punti doppi variabili, il cui genere vale

$$\pi = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d .$$

La dimensione del sistema è

$$r = \pi - 1 + 3m .$$

Intersecando una curva C_1 colle curve infinitamente vicine del sistema stesso, si trova che *due* intersezioni vengono assorbite in ciascun punto doppio (*); pertanto la serie caratteristica (nel senso di Severi), segata sopra la C_1 dalle predette curve infinitamente vicine, è una

$$g^{\pi-2+3m}_{2\pi-2+3m}$$

completa.

Ciò posto consideriamo le C_1, d' ordine m, che (oltre ad avere d punti doppi variabili) hanno q contatti colla curva (di diramazione) K; o, quanto meno, consideriamo, uno qualunque dei sistemi di C_1 (più *ristretti*) che così si ottengono, se ve n' è più d' uno.

Due C_1 siffatte, infinitamente vicine fra loro, hanno comuni (oltre le $2d$ intersezioni assorbite dai punti doppi) i q punti di contatto con K. Dico che: tutte le C_1 del nostro sistema ristretto, infinitamente vicine ad una generica, segano su questa, all' infuori dei q punti fissi suddetti, una serie *completa*

$$g_{2\pi-2+3m-q} ,$$

che può essere speciale (la quale ci fornisce l' imma-

(*) Cfr. Beck — *Mathem. Annalen* Bd. XIV.

gine della serie caratteristica pertinente al più ampio sistema di curve C, della superficie, rappresentate dalle C_1).

Si consideri infatti, nel piano, una qualunque curva d'ordine m con d punti doppi, infinitamente vicina alla C_1 data, la quale passi per quei q punti di contatto; si dimostra che essa tocca parimente in q punti la K, e quindi appartiene al nostro sistema ristretto di C.

Infatti la proprietà che occorre dimostrare può convertirsi in questa (ben nota): se in uno spazio, ad un numero qualunque di dimensioni, si ha un iperpiano α tangente ad una curva in un punto, ogni iperpiano infinitamente vicino ad α il quale passi per il punto di contatto, tocca parimente la curva.

Riesce così compiuta la dimostrazione promessa, essendosi provato pel sistema delle immagini sul piano multiplo e quindi pel sistema obiettivo sopra la superficie che:

Ogni sistema continuo di curve algebriche di un dato ordine, sopra una superficie, il quale non sia contenuto in un altro più ampio, ha la serie caratteristica completa.

E perciò, in particolare, che « ogni sistema lineare regolare, di genere π e grado n, sopra una superficie irregolare (di genere p_a, p_g) è contenuto in un sistema continuo *non lineare* di dimensione

$$n - \pi + 1 + p_g \text{ ».}$$

§ **5.** — Rileviamo il fatto espressivo che « sopra una superficie qualunque, i sistemi continui di curve (non ampliabili o *completi*) hanno sempre la serie caratteristica completa » ; esso fornisce, come si vede, una utile estensione ed una più precisa determinazione del cosìdetto teorema di Riemann-Roch relativo ai sistemi lineari.

Si avverta che il teorema sopra enunciato si estende senza difficoltà ai sistemi completi con punti base assegnati.