
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sur les surfaces algébriques irrégulières

Comptes Rendus Acad. Sciences Paris **CXL** (1905), pp. 133-137.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

*promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali*

*Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali*

CORRESPONDANCE.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les surfaces algébriques irrégulières.*

Note de M. FEDERIGO ENRIQUES, présentée par M. Emile Picard.

D'après Clebsch et M. Noëther, étant donnée une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

d'ordre m , on peut former généralement des intégrales doubles de première espèce

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{f_z} dx dy$$

qui restent toujours finies sur la surface; il faut, pour cela, que les Q soient des polynômes, de l'ordre $m - 4$, *adjoints* à f , c'est-à-dire (pour se borner au cas ordinaire) qu'ils s'annulent sur la courbe double de $f = 0$. Ce nombre des polynômes Q linéairement indépendants est ce que l'on appelle le *genre géométrique* p_g de f .

Or, en désignant par N un entier suffisamment grand, on peut évaluer le nombre des polynômes d'ordre N adjoints à f , d'après une formule donnée dans toute sa généralité par M. Noëther.

Faisons dans cette formule

$$N = m - 4;$$

dans le cas que l'on envisage comme étant le plus général, on obtient ainsi le nombre p_g . Mais il peut arriver que la valeur p_a ainsi obtenue diffère de p_g ; précisément que l'on ait

$$p_a > p_g.$$

C'est Cayley qui, ayant aperçu le premier la curieuse circonstance qui précède, a appelé l'attention sur ce que le nombre p_a , quand il n'est pas égal à p_g , fournit un nouvel invariant des surfaces. M. Zeuthen établit ensuite une démonstration de l'invariance de p_a , sous quelques restrictions, dont on s'est affranchi par des recherches plus récentes.

On appelle p_a le *genre numérique* ou *arithmétique* de f , et l'on dit qu'une surface est *régulière* si

$$p_a = p_g,$$

qu'elle est *irrégulière* dans le cas contraire

$$p_a < p_g.$$

On connaît plusieurs exemples de surfaces irrégulières; aux surfaces réglées (remarquées par Cayley) on a ajouté les surfaces possédant un faisceau irrationnel de courbes quelconques, les surfaces hyperelliptiques, etc.

J'ai remarqué, il y a cinq ans, que tous ces exemples rentrent dans une même famille de surfaces que l'on peut définir par la propriété suivante : il existe sur la surface une série continue de courbes algébriques qui n'est pas renfermée dans un système linéaire de courbes du même ordre. Lorsqu'une surface renferme une telle série de courbes, elle est irrégulière.

Tout récemment je suis parvenu à établir la proposition réciproque que j'ai communiquée le 11 décembre 1904 à l'Académie de Bologne. On a donc le théorème :

Sur une surface régulière toutes les courbes algébriques d'un ordre donné se partagent en un nombre fini (≥ 0) de systèmes linéaires. Au contraire, sur une surface irrégulière, elles donnent lieu à des séries algébriques non linéaires, ou à une infinité continue de systèmes linéaires de courbes du même ordre.

D'une manière plus précise, si l'on envisage sur la surface un de ces systèmes complets qu'on appelle réguliers, et dont la dimension effective r est égale à la dimension virtuelle, on trouve qu'il est contenu dans un système non linéaire de dimension $r + p_g - p_n$.

Le théorème que je viens d'énoncer ramène la construction des surfaces irrégulières à celle des séries algébriques non linéaires de groupes de points sur les courbes. Cette construction d'une surface renfermant une série non linéaire de courbes a été remarquée par M. Humbert (*Comptes rendus*, 1893), qui a, le premier, appelé l'attention sur la question des systèmes non linéaires de courbes pouvant appartenir aux surfaces algébriques. M. Humbert a montré comment on peut obtenir, par la construction qui précède, des *intégrales* de Picard de première espèce, c'est-à-dire des intégrales de différentielles totales

$$\int P dx + Q dy,$$

qui restent toujours finies sur la surface.

On voit maintenant que : *sur une surface irrégulière il y a toujours des intégrales de Picard de la première espèce.*

Or rappelons un récent résultat, obtenu par M. Severi, d'après lequel, si

une surface algébrique admet des intégrales de Picard de la seconde espèce, elle est irrégulière. Le théorème de Severi s'applique *a fortiori* au cas où il y a des intégrales de première espèce.

Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface algébrique f admette des intégrales de première espèce, peut être exprimée par

$$p_a < p_g.$$

Partant : si, sur f , il y a des intégrales de Picard de la seconde espèce, il y en a aussi de la première, et les courbes algébriques tracées sur f donnent lieu à une infinité de systèmes linéaires de courbes du même ordre, composant des séries continues non linéaires.

Peut-on aller plus loin? Peut-on trouver une relation numérique entre la différence $p_g - p_a$ et le nombre des intégrales de première espèce attachées à la surface?

M. Severi croit pouvoir y parvenir en démontrant par le procédé direct la réciproque de son théorème cité ci-dessus. Il m'a même communiqué le résultat suivant : $p_g - p_a$ est égal à la différence entre le nombre des intégrales de Picard de seconde et de première espèce attachées à la surface.

M. Castelnuovo pense que la relation entre $p_g - p_a$ et le nombre des intégrales de première espèce pourra être établie en poursuivant l'étude des systèmes non linéaires de courbes tracées sur la surface.