
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XV** (1906), pp. 665-669.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques" promosso dal

*Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche*

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

Matematica. — *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali.* Nota del Corrispondente F. ENRIQUES.

La Nota, che mi onoro di presentare all'Accademia, porta un primo contributo al problema di determinare tutte le superficie algebriche che ammettono una trasformazione birazionale non periodica, e quindi una serie discontinua di trasformazioni. La possibilità di superficie siffatte, che non posseggano un gruppo continuo di trasformazioni, era conosciuta per gli esempi del sig. Humbert (superficie di Kummer) e del sig. Painlevè, ai quali ho aggiunto recentemente l'esempio delle superficie di genere $p_a = p_g = 0$ coi plurigeneri $P_2 = 1$, $P_3 = 0$.

Qui si dimostra che *le superficie con una trasformazione non periodica* (non possedenti un gruppo continuo di trasformazioni) *contengono sempre un fascio di curve ellittiche, all'infuori del caso $p_a = P_2 = 1$.* Questo caso sembra dar luogo ad una vera eccezione al teorema; infatti il sig. Fano mi comunica che una superficie del 4° ordine F_4 , contenente una sestica di genere due, ammette una serie discontinua di trasformazioni in sè, e pare che la suddetta F_4 non possieda in generale fasci di curve ellittiche.

A prescindere dalle superficie coi generi 1, il teorema sopra enunciato trae il suo interesse da ciò, che, sotto alcune condizioni complementari, esso è invertibile, di guisachè si può dire che *le superficie con un fascio di curve ellittiche ammettono in generale gruppi discontinui di trasformazioni in sè stesse.*

Un'analisi approfondita della questione permetterà di porre il risultato qui ottenuto sotto una forma più notevole. Infatti (lasciando sempre da parte il caso $p_a = P_2 = 1$) si potranno esprimere le condizioni perchè una superficie possedga una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasforma-

zioni birazionali, scrivendo che il genere lineare $p^{(1)} = 1$ ($p_a \geq 0$ $P_2 > 0$), e che il numero degli *integrali doppi di 2^a specie* soddisfa ad una certa diseguaglianza.

Ma riservo questo teorema (che esige ancora qualche sviluppo) ad un'altra comunicazione.

1. Sia F una superficie algebrica la quale ammetta una trasformazione birazionale non periodica, ma non un gruppo continuo di trasformazioni in sè stessa. Anzitutto sarà il suo genere aritmetico

$$p_a \geq 0,$$

ed il suo bigenere

$$P_2 > 0 \quad (P_2 \geq p_a);$$

infatti una superficie per cui $p_a = P_2 = 0$ è razionale (Castelnuovo), ed una superficie per cui $p_a < 0$ è riferibile ad una rigata, oppure è ellittica o iperellittica (Enriques), cioè tutte queste superficie posseggono gruppi continui di trasformazioni.

S' indichi con $p^{(1)}$ il genere lineare (virtuale) di F; il bigenere P_2 , il trigenero P_3 ecc. soddisferanno rispettivamente alle diseguaglianze

$$\begin{aligned}
P_2 &\geq p_a + p^{(1)} \\
P_3 &\geq p_a + 3p^{(1)} - 2 \\
P_4 &\geq p_a + 6p^{(1)} - 5 \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Quindi, se $p^{(1)} > 1$ e $p_a \geq 0$, si avranno su F almeno ∞^3 curve tricanoniche ecc.; ed è facile vedere che queste, a prescindere tutt'al più da parti fisse, saranno irriducibili, per modo che si potrà costruire una superficie φ , trasformata di F appartenente ad un certo spazio S_r , avente come sezioni iperpiane curve pluricanoniche.

Ora se F ammette trasformazioni birazionali in sè, queste si rispecchiano in trasformazioni proiettive di φ . Ma, com'è noto, una superficie che ammetta una trasformazione proiettiva non periodica, ammette tutto un gruppo continuo di trasformazioni proiettive, ed è razionale o rigata (Enriques-Fano). Ciò non potendo accadere per la φ , si conclude intanto che *il genere lineare di F vale*

$$p^{(1)} = 1.$$

2. Ora, lasciando da parte l'ipotesi che la F possenga trasformazioni in sè, vogliamo stabilire un teorema generale sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$, per cui $p_a \geq 0$, $P_2 > 0$.

Designando con $p_g (= P_1)$ il genere geometrico, si possono distinguere i seguenti casi:

1) $p^{(1)} = 1, p_g > 1.$

Allora la superficie F contiene un fascio di curve ellittiche, costituito dalle curve canoniche o delle loro componenti, se quelle sono riducibili.

$$2) \quad p^{(1)} = 1, p_g = p_a = 1.$$

Qui il bigenore P_2 può avere i valori

$$P_2 = 1 \text{ o } P_2 > 1.$$

Se $P_2 = 1$ la superficie ha tutti i plurigeneri uguali ad 1; le curve pluricanoniche hanno l'ordine 0; ogni sistema lineare puro di genere π su F ha il grado $n = 2\pi - 2$. Il primo esempio di tali superficie è dato dalla superficie del 4° ordine che non contiene in generale fasci di curve ellittiche.

Se $P_2 > 1$ si ha su F un fascio di curve ellittiche bicanoniche, o componenti delle curve bicanoniche.

$$3) \quad \text{Può aversi} \quad p^{(1)} = 1, p_g = p_a = 0, P_2 > 0.$$

$$P_2 = 1 \text{ o } P_2 > 1.$$

Se $P_2 = 1$ la curva bicanonica può avere l'ordine 0 (essendo $P_3 = P_5 = \dots = 0$, $P_2 = P_4 = P_6 = \dots = 1$), oppure l'ordine > 0 (essendo $P_3 > 0$, $P_6 > 1$); ed in ambi i casi la F possiede fasci di curve ellittiche (1).

Se $P_2 > 1$ le curve bicanoniche, o le loro componenti, formano su F un fascio di curve ellittiche.

$$4) \quad p^{(1)} = 1, p_a = 0, p_g = 1.$$

Essendo l'irregolarità

$$p_g - p_a = 1$$

la superficie possiede un integrale semplice di 1ª specie con due periodi e quindi un fascio ellittico di curve C , di grado 0 e di un certo genere $\pi (> 0)$. Essa possiede poi una curva canonica K ellittica secante in $2\pi - 2$ punti ogni curva C .

Vogliamo dimostrare che, dato possa essere $\pi > 1$, sarà il bigenore $P_2 > 1$, e quindi si avrà su F un fascio di curve ellittiche costituito dalle curve bicanoniche o dalle componenti di queste.

Pongasi che sia $\pi > 1$ e $P_2 = 1$; facciamo vedere che si arriva ad un assurdo.

Si costruisca il sistema lineare $|C''|$ secondo aggiunto ad una curva C del fascio; esso ha la dimensione $3\pi - 3$ (perchè il primo aggiunto $|C'| = |C + K|$ ha il genere $3\pi - 2$), e, stante l'ipotesi $P_2 = 1$, sega sulla C la serie bicanonica completa $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$.

(1) Cfr. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*. Memorie della Società Italiana delle scienze (detta dei XL), 1906.

Ora designando con \bar{C} un'altra curva qualsiasi del fascio ellittico dato su F , il sistema

$$|C'' + \bar{C} - C| = \bar{C}''|$$

è il secondo aggiunto a \bar{C} . Al variare di \bar{C} tutti questi sistemi lineari formano un sistema continuo non lineare

$$\{C''\},$$

di dimensione $3\pi - 2$, le cui curve segano su C gruppi della anzidetta serie bicanonica $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$. Pertanto dovranno esistere ∞' curve residue di C rispetto a $\{C''\}$, una delle quali è la curva bicanonica di F . Queste curve saranno, come la bicanonica, di genere 1, e comporranno un fascio ellittico. Ma tale conclusione è incompatibile coll'ipotesi $p_g = 1$, perchè a questo secondo fascio ellittico corrisponderà un secondo integrale semplice di 1^a specie di F , ciò che porta $p_g - p_a > 1$.

Raccogliendo i risultati dell'analisi precedente possiamo enunciare la conclusione:

Una superficie ($p_a \geq 0, P_2 > 0$) di genere lineare $p^{(1)} = 1$ contiene sempre un fascio (razionale o irrazionale) di curve ellittiche; fa eccezione il caso delle superficie con tutti i generi 1 ($p_a = P_2 = 1$).

3. In base ai nn. 1, 2, ogni superficie che ammetta una trasformazione generante una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasformazioni birazionali in sè stessa, possiede un fascio di curve ellittiche, oppure ha tutti i generi uguali ad 1.

Si tratta ora d'invertire, fin dove è possibile, questo risultato.

Sia F una superficie contenente un fascio di curve ellittiche C ; e suppongasi che vi siano due curve K_1, K_2 secanti le C in uno stesso numero m di punti e secondo gruppi G'_m, G''_m i cui multipli non siano equivalenti.

Sopra una C generica consideriamo l'integrale ellittico di 1^a specie I , coi periodi ϖ, ϖ' ; siano a_1, a_2 rispettivamente le somme dei valori di I nei punti dei due gruppi G'_m, G''_m . Allora si può definire razionalmente una trasformazione birazionale della curva C in sè stessa, ponendo

$$I' \equiv I + a_1 - a_2.$$

Questa trasformazione non è periodica, poichè si avrebbe altrimenti

$$r(a_1 - a_2) \equiv 0 \pmod{\varpi, \varpi'}.$$

Al variare di C nel fascio si ha una trasformazione birazionale della superficie F , le cui potenze formano un gruppo discontinuo.

È chiaro che se le curve K_1, K_2 segassero le C in un numero diverso di punti, p. es. in m_1, m_2 punti rispett. basterebbe sostituire ad esse due mul-

tipli convenienti, p. es. $m_2 K_1, m_1 K_2$, e si otterrebbe sempre una trasformazione non periodica di F , semprechè non vi sia equivalenza fra due multipli qualsiasi dei gruppi segati da K_1, K_2 sulle C .

Si può dunque affermare che:

Se una superficie algebrica contiene un fascio di curve ellittiche C , e due curve secanti sulle C dei gruppi i cui multipli non sono equivalenti, essa ammette una trasformazione non periodica e quindi una serie discontinua di trasformazioni birazionali, che lasciano ferme le C .

Questo caso si può considerare come il *caso generale* delle superficie con un fascio di curve ellittiche, quando le suddette superficie si definiscano come luogo di curve ellittiche, appoggiantisi, in un certo numero di punti, a delle linee direttrici.

Aggiungasi infine l'osservazione che se una superficie contiene due fasci di curve ellittiche, mutate in sè rispettivamente da due trasformazioni non periodiche, moltiplicando queste trasformazioni si otterrà in generale un gruppo discontinuo che non ammetterà fasci invarianti di curve ellittiche.