Enriques, Federigo

Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques

in Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, **II**Picard, E. ed., and Simart, G. ed., Gauthier-Villars, Paris, 1906, pp. 485-524.

NOTE V.

SUR QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES,

Par MM. Castelnuovo et Enriques.

M. Picard a bien voulu nous demander d'ajouter à son Traité une courte exposition des résultats sur les surfaces algébriques, qu'on a obtenus dernièrement en Italie, et qui n'ont pas trouvé place dans son Ouvrage. Il a voulu ainsi nous fournir le moyen de faire connaître à un public plus large l'état actuel de la théorie des fonctions de deux variables suivant notre point de vue géométrique.

Nous tâcherons de répondre par cette Note, aussi bien qu'il nous sera possible, à la proposition très aimable de M. Picard.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Il convient d'abord de rappeler brièvement les concepts et les résultats fondamentaux, auxquels se rapportent les développements des Chapitres IV, V, VI du Tome II de ce Traité, en y ajoutant quelques remarques plus récentes.

On sait d'abord ce que c'est qu'un *système linéaire* de courbes (algébriques) tracées sur une surface (algébrique) (1); on sait de même qu'on appelle *complet* un système linéaire $|C|$ de courbes, qui n'est pas renfermé dans un système linéaire plus ample de courbes du même ordre douées des mêmes *points-base* (2).

(1) Tome II, Chapitre V, page 93 et suivantes.
(2) Page 101.

Une courbe C étant donnée sur la surface F, un système linéaire complet $|C|$ (de dimension ≥ 0) auquel C appartient, est déterminé, *pourvu que l'on donne sur* C *les points-base* qu'on veut imposer à $|C|$ (¹); il convient d'ajouter que $|C|$ pourra bien posséder de nouveaux points-base *accidentaux* (qu'on peut regarder comme virtuellement inexistants), en dehors de ceux qui lui ont été *imposés*.

Rappelons encore qu'on opère sur les systèmes complets, tracés sur une surface, par addition (²) et par soustraction (³), et qu'on est toujours amené à de nouveaux systèmes complets, pourvu toutefois (dans le second cas) que l'opération soit possible.

Il convient d'ajouter que pour chaque système linéaire on peut définir, en relation avec ses points-base imposés, deux nombres entiers, invariants vis-à-vis des transformations birationnelles de la surface : *le genre* (virtuel) π de la courbe générale du système; le *degré* (virtuel) du système, c'est-à-dire le nombre des intersections de deux courbes générales du système, en dehors de ses points-base imposés (il est sous-entendu que chaque intersection doit être évaluée en ayant égard à sa multiplicité pour les courbes en question).

Si l'on somme deux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, dont les genres et les degrés soient respectivement π_1, π_2, n_1, n_2, le genre et le degré de $|C_1 + C_2|$ s'expriment par les formules

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$
$$n = n_1 + n_2 + 2i,$$

où i désigne le nombre des intersections d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2 (⁴).

Au moyen de ces formules on peut définir le genre et le degré d'un *système quelconque, réductible ou même composé d'une seule courbe* (dimension $r = 0$), ce qui permet d'éliminer tout cas d'exception dans les calculs (⁵).

2. La notion des courbes adjointes à un système linéaire $|C|$, sur une surface F, se trouve établie dans le Chapitre VI (p. 117 et suiv.).

(¹) *Cf.*, page 102. L'énoncé ci-dessus est un peu plus général que celui donné dans le texte. On peut l'établir par la même voie, ou bien par le raisonnement très simple (et presque immédiat) donné par M. Enriques dans sa Note : *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche* (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1901).

(²) Page 104.

(³) Page 111.

(⁴) *Cf.*, pour la première formule, page 107.

(⁵) Enriques, *Intorno ai fondamenti... loc. cit.*, n° 12.

On a donné récemment une définition très simple de ces courbes [1].

Supposons d'abord que le système $|C|$ renferme (totalement) les sections planes de F. On sait alors que les courbes adjointes C' sont découpées sur F par les surfaces adjointes φ_{n-3} de l'ordre $n-3$ (n désignant l'ordre de F). Or on peut obtenir les C' en construisant d'abord le système complet $|K|$ découpé sur F par les surfaces polaires φ_{n-1} (en faisant abstraction des points-base qui tombent dans les points-pince de la courbe double de F, points qu'on doit envisager comme accidentaux), et puis en considérant le système résiduel de deux courbes C par rapport à K

$$|C'| = |K - 2C|.$$

Mais les courbes K (particulières) qui sont découpées par les surfaces polaires de F jouissent de cette propriété remarquable : chacune d'elles est le lieu des points doubles des courbes d'un réseau de sections planes de F ; c'est, comme on dit, la courbe jacobienne du réseau.

Maintenant, si l'on donne sur F un système quelconque de courbes $|C|$, qui ne renferme plus les sections planes de la surface, on peut considérer d'une manière analogue les jacobiennes K des réseaux contenus dans $|C|$ (pourvu que la dimension de $|C|$ soit $\geqq 2$) ; on démontre que ces courbes K appartiennent à un même système linéaire complet, qui possède un point-base de l'ordre $3i-1$ en chaque point-base d'ordre i pour $|C|$. Par la soustraction de deux courbes C, on obtient ainsi les *courbes C' adjointes* à $|C|$

$$|C'| = |K - 2C|.$$

D'après cette définition, il est très facile de reconnaître directement *la propriété fondamentale du système adjoint*, qui, dans le cas de deux systèmes $|C|$ et $|L|$ n'ayant aucun point-base sur F, est exprimée par la relation symbolique

$$|C' + L| = |C + L'|.$$

On sait que cette propriété renferme le caractère invariant des courbes *canoniques*, découpées sur la surface F par ses adjointes φ_{n-4} d'ordre $n-4$, en dehors des courbes *exceptionnelles ;* car (lorsque les φ_{n-4} existent, à savoir lorsque le genre géométrique $p_g > 0$) le système qu'elles découpent sur F est représenté par

$$|C' - C| = |L' - L| \quad (^2).$$

---

(1) Enriques, *loc. cit.*, nos 13 et suiv.

(2) Tome II, page 142.

Mais *la propriété du système adjoint, que nous venons de rappeler, nous apprend davantage;* en effet, elle nous amène à définir toute une série de systèmes invariants, qui peuvent exister sur des surfaces de genre $p_g = 0$, et qui peuvent même être utiles dans l'étude des surfaces de genre $p_g > 0$ (surtout en ce qui touche aux premières valeurs du genre), quoique dans ce cas ils se réduisent aux systèmes multiples du système canonique [1]. Les systèmes invariants, auxquels nous venons de faire allusion, sont les systèmes

$$|2C' - 2C| = |2L' - 2L|,$$
$$|3C' - 3C| = |3L' - 3L|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ils jouissent tous également de la propriété d'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles de la surface, pourvu qu'on en retranche (comme on le fait d'ordinaire) les courbes exceptionnelles qui en font partie. On leur donne les noms de système *bicanonique,* système *trois fois canonique,* etc. Le nombre des courbes bicanoniques indépendantes s'appelle *bigenre;* pareillement on peut envisager le *trigenre,* ....

Si l'on veut obtenir, par exemple, les courbes bicanoniques sur une surface F_n (d'ordre n), dans le cas le plus simple où elle est douée d'une courbe double et de points triples [2], il suffit de retrancher deux sections planes, du système qui est découpé sur F_n par les surfaces biadjointes Φ_{2n-6} d'ordre $2n - 6$, passant doublement par la courbe double (puisque ce système est justement le double de celui qui est découpé par les surfaces adjointes φ_{n-3}); on obtient ainsi des surfaces Φ_{2n-8} biadjointes à F_n, qui découpent sur F_n les courbes bicanoniques.

Les sections des surfaces biadjointes d'ordre $2n - 8$ (en dehors de leurs parties exceptionnelles) jouissent donc de la propriété d'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles de F_n.

On trouve l'exposition de ces résultats à la page 146 et suivantes du texte (t. II), et l'on peut voir à la page 149 les premiers exemples qu'on a donnés de surfaces de genre $p_g = 0$, et de bigenre $P_2 > 0$.

D'autres exemples nombreux se présentent en étudiant certaines classes de surfaces $z^2 = f(x, y)$ [3].

---

(1) C'est ainsi, par exemple, qu'on a pu donner une classification complète des surfaces de genre $p_g > 0$, et de genre linéaire $p^{(1)} = 2, 3$. — (*Cf.* ENRIQUES, *Rendiconti della R. Acc. d. Lincei,* 1897).

(2) Tome I, pages 71 et suiv.

(3) ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (*Rendic. della R. Accad. d. Lincei,* 1898).

L'importance des plurigenres ressortira de la seconde partie de cette Note, lorsqu'il s'agira d'établir si une surface donnée est rationnelle, ou si elle peut être transformée en un cylindre, etc. (*voir* p. 521).

Il résultera en particulier que, pour les surfaces qui ne se ramènent pas à la famille des cylindres, il y a toujours des plurigenres P_i qui ne s'annulent pas pour des valeurs assez grandes de i ($i = 4$ ou $i = 6$).

3. De la propriété fondamentale du système adjoint découlent encore les résultats concernant le *genre numérique* p_n ou p_a d'une surface, qui se trouvent largement développés dans le texte (t. II, p. 82-92, 125-129). Il nous suffira de rappeler que, lorsque $p_a < p_g$, la série (canonique) découpée sur la courbe générale d'un système irréductible $|C|$ de F par le système adjoint, n'est pas complète; cette série $g_{2\pi-2}^{\pi-1-\delta}$ a donc un défaut δ; mais *ce défaut, pour les différents systèmes de courbes tracés sur la surface, a un maximum qui est précisément* $p_g - p_a$ (¹).

Il y a une autre manière, en quelque sorte analogue, de définir le caractère invariant $p_g - p_a$.

Considérons, à cet effet, la série linéaire (*caractéristique*) qui est découpée sur la courbe générale de $|C|$ par les autres courbes du même système; c'est une série g_n^{r-1}, si l'on désigne par n, r, respectivement, le degré et la dimension de $|C|$. Eh bien! *la série caractéristique d'un système complet tracé sur une surface n'est pas complète (en général, au moins), lorsque* $p_a < p_g$; *mais, pour les différents systèmes existant sur* F, *le défaut de la série atteint un maximum qui est précisément* $p_g - p_a$ (²).

De ce théorème découle une relation importante entre les caractères d'un système linéaire $|C|$ donné sur une surface, dont les deux genres (géométrique et numérique) sont représentés par p_g, p_a. En désignant par n, π, r respectivement le degré, le genre et la dimension du système, et en supposant que celui-ci ne soit pas renfermé dans le système canonique, on a toujours

$$\pi - 1 - n + r \geqq p_a.$$

(¹) Page 128. D'après un théorème démontré tout dernièrement par M. Picard (t. II, p. 438), on a l'égalité $\delta = p_g - p_a$ pour tout système $|C|$ existant sur la surface. On n'est pas encore parvenu à retrouver ce théorème par les méthodes géométriques.

(²) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali...* (*Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. XXV, 1897). Une démonstration très simple a été donnée par M. SEVERI (*Rendiconti della R. Acc. d. Lincei*, octobre 1903).

Lorsque le système $|C|$ est renfermé dans le système canonique, en désignant par i le nombre des surfaces adjointes φ_{n-4} indépendantes qui passent par une courbe C, on a, au lieu de la relation qui précède, la suivante

$$\pi - 1 - n + r \geqq p_a - i.$$

La relation, que nous venons d'écrire, constitue l'*extension* aux surfaces de la propriété relative aux courbes qu'on appelle le *théorème de Riemann-Roch*.

C'est M. Nöther qui a énoncé cette extension dans une Note publiée en 1886 ([1]). Mais, dans le court essai de démonstration qu'il en a donné, il suppose que la série caractéristique d'un système complet soit toujours complète, ce qui est vrai seulement lorsque $p_a = p_g$. M. Enriques s'est occupé d'abord de justifier la formule en question dans le cas $p_a = p_g$; ensuite M. Castelnuovo est parvenu au résultat général pour tous les systèmes linéaires irréductibles de dimension $\geqq 2$, tracés sur une surface quelconque.

On a cherché ensuite à étendre ce théorème aux systèmes de courbes réductibles ([2]), et l'on est parvenu au résultat suivant, qui a été démontré d'une façon précise par M. Severi ([3]) : *si les caractères* π, n, i *d'une courbe, irréductible ou réductible, tracée sur une surface de genres* p_g, p_a, *satisfont à l'inégalité*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0,$$

la courbe appartient à un système linéaire de dimension

$$r \geqq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

4. Nous avons eu l'occasion de parler des surfaces (*irrégulières*), c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles $p_a < p_g$.

Le premier exemple de telles surfaces est fourni par les surfaces réglées dont les sections planes ont le genre $\pi > 0$; en ce cas on a

$$p_g = 0, \qquad p_a = -\pi \quad ([4]).$$

La classe des surfaces réglées ($\pi > 0$) est renfermée dans la classe plus générale des *surfaces possédant un faisceau irrationnel de*

([1]) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CIII.

([2]) Castelnuovo et Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali...*, n° 4 (*Annali di Matematica*, 3e série, t. VI, 1901).

([3]) *Sul teorema di Riemann-Roch* (*Atti dell' Accad. delle Scienze di Torino*, mai 1905).

([4]) Tome I, p. 241 ; tome II, page 155.

courbes de genre quelconque; toutes ces surfaces sont irrégulières, parce que les séries caractéristiques des systèmes linéaires tracés sur elles ne sont pas complètes (1).

On a généralisé cet exemple, en démontrant que : *toute surface possédant un système de courbes qui n'est pas contenu* (totalement) *dans un système linéaire est une surface irrégulière* (2).

A cette famille de surfaces appartiennent tous les exemples de surfaces irrégulières auxquels on est parvenu par des procédés différents. Citons, par exemple, les surfaces qui représentent (point par couple) le système des couples de points appartenant à deux courbes algébriques distinctes ou à une même courbe, surfaces dont les caractères invariants ont été déterminés d'une façon complète (3).

Cette remarque a conduit à penser que toute surface irrégulière rentrerait dans la famille citée. C'est ce qu'on a démontré dernièrement (4). Ainsi donc, *sur toute surface irrégulière, on trouve des systèmes algébriques de courbes qui ne sont pas contenus dans des systèmes linéaires.*

Ce théorème peut être précisé davantage. Rappelons à cet effet que la notion de la série caractéristique d'un système linéaire de courbes sur une surface peut être étendue à un système continu non linéaire, de la façon suivante (5) : les courbes infiniment voisines d'une courbe générale du système découpent sur celle-ci une série, qu'on appellera *série caractéristique* du système donné. On a maintenant le théorème (6) : *tout système continu de courbes algébriques existant sur une surface est renfermé en un système* (*linéaire ou non linéaire*) *dont la série caractéristique est complète.*

Le dernier système sera linéaire, d'après un théorème de M. Castelnuovo (n° 3), si la surface est régulière ($p_g = p_a$). Au contraire, si $p_g > p_a$, il existe sur la surface des systèmes linéaires complets, de

(1) Castelnuovo, *Alcuni risultati...*, n° 10 (*Mem. della Società italiana delle Scienze,* 1896).

(2) Enriques, *Una proprietà...* (*Rendic. del Circolo Matematico di Palermo,* t. XIII, 1899).

(3) Maroni, *Atti dell' Accad. d. Scienze di Torino,* 1903. — Severi, *Ibidem,* et *Memorie dell' Accad. d. Scienze di Torino,* 1903. — De Franchis, *Rendic. del Circolo Matem. di Palermo,* 1903.

(4) Enriques, *Sullà proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (*Rendic. della R. Accad. d. Scienze di Bologna,* 1904); *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 16 janvier 1905.

(5) Severi, *Osservazioni sui sistemi continui ...* (*Atti della R. Acc. d. Scienze di Torino,* 1904).

(6) Enriques, *loc. cit.*

genre π, degré n et dimension $r = p_a + n - \pi + 1$, dont la série caractéristique a le défaut maximum $p_g - p_a$; *ces systèmes sont donc renfermés en des systèmes continus de dimension*

$$\rho = p_g + n - \pi + 1,$$

composés par $\infty^{p_g - p_a}$ *systèmes linéaires complets de dimension*

$$r = \rho - (p_g - p_a).$$

Si l'on assujettit les courbes d'un tel système continu à satisfaire à r conditions linéaires, on obtient *une série* $\infty^{p_g - p_a}$ *de courbes non équivalentes,* série dont la courbe générale n'appartient à aucun système linéaire contenu dans la série. Mais on ne saurait pas construire sur la surface une série de dimension $p_g - p_a + 1$ douée de la même propriété.

Comment pourra-t-on reconnaître si une courbe ayant des caractères assignés, sur une surface de genres p_g, p_a, appartient à une desdites séries $\infty^{p_g - p_a}$? Voici la réponse : *il suffit que les caractères* π, n, i *de la courbe* (nommés au n° 3) *satisfassent à l'inégalité*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0.$$

Ce résultat, auquel M. Enriques est arrivé en s'appuyant sur l'extension du théorème de Riemann-Roch, a reçu une démonstration directe assez simple de M. Severi (¹).

5. Considérons sur une surface irrégulière un système continu S de courbes, composé par $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires complets $|C|$, $|C_1|$, $|C_2|$, ... Si l'on construit le système linéaire

$$|C'| = |C + C_1 - C_2|,$$

on reconnaît de suite que $|C'|$ appartient aussi au système S, et possède les mêmes caractères que $|C|$, ...

On voit donc que l'*opération* $|C_1 - C_2|$ transforme tout système linéaire complet $|C|$ de S en un autre système linéaire complet $|C'|$, qui est aussi renfermé dans S. Or, on peut former $\infty^{p_g - p_a}$ opérations analogues, et l'on reconnaît aisément qu'elles forment un groupe continu de transformations deux à deux permutables. Il convient d'énon-

(¹) *Sul teorema di Riemann-Roch* (*loc. cit.*).

cer ce résultat de la manière suivante (¹) : *les* $\infty^{p_g-p_a}$ *systèmes linéaires complets renfermés dans un système continu peuvent être représentés par les points d'une variété algébrique à* $p_g - p_a$ *dimensions, qui admet un groupe permutable* $\infty^{p_g-p_a}$ *de transformations birationnelles en elle-même.*

C'est la *variété de Picard* attachée à la surface. D'après un théorème établi par ce savant (²), les coordonnées d'un point général de la variété peuvent être exprimées à l'aide de fonctions abéliennes [$2(p_g - p_a)$ fois périodiques] de $p_g - p_a$ variables. En transportant cette propriété aux systèmes de courbes sur la surface considérée, on arrive à la conclusion (³) que *les* $p_g - p_a$ *paramètres non linéaires, dont dépend une courbe d'une série complète donnée sur la surface, peuvent être introduits de telle façon que les coefficients des équations de la courbe soient des fonctions abéliennes de ces paramètres.*

On a ainsi une extension aux surfaces de la propriété des groupes de points d'une courbe, qui est exprimée par le théorème d'inversion de Jacobi. On pourrait rechercher une autre extension de cette même propriété dans un sens plus direct; c'est ce qu'a fait M. Picard en parvenant à une réponse négative (*voir* la Note II de ce Traité).

6. En résumant les résultats rappelés dans les nᵒˢ 3, 4, 5, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si l'on envisage sur la surface une courbe, dont les caractères π, n, i *satisfont à l'inégalité*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0;$$

cette courbe sera renfermée dans une série complète dépendant de

$$r \geqq p_g + n - \pi + 1 - i$$

paramètres; et ces paramètres seront de deux sortes : les uns, au nombre de $r - (p_g - p_a)$, *entrent linéairement, de sorte que la courbe est un système linéaire par rapport à ces paramètres; les autres paramètres, au nombre de* $p_g - p_a$, *entrent d'une façon irrationnelle, et précisément les coefficients des équations de la courbe sont des fonctions* $2(p_a - p_g)$ *fois périodiques de ces derniers paramètres.*

(¹) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici* ... (*Rendiconti della R. Acc. d. Lincei,* mai-juin 1905, ou bien *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 23 janvier 1905).

(²) PICARD, *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo,* t. IX.

(³) CASTELNUOVO, *loc. cit.*

7. Il convient maintenant de rapprocher ces résultats, relatifs aux surfaces irrégulières, à d'autres résultats qui se rapportent aux surfaces douées d'intégrales de différentielles totales de première espèce.

M. Humbert, en appelant le premier l'attention des géomètres sur les systèmes non linéaires de courbes, a remarqué (1) que *toute surface, sur laquelle existe un système de courbes qui n'est pas contenu dans un système linéaire, possède quelques intégrales de différentielles totales de première espèce.*

On a cherché à invertir ce résultat. M. Enriques y est parvenu d'abord (2) en ajoutant l'hypothèse que les $q > 0$ intégrales appartenant à la surface aient $2q$ périodes, hypothèse qui, à cette époque, devait être regardée comme restrictive. Ensuite M. Enriques, en s'appuyant sur un théorème important de M. Severi, que nous allons citer tout à l'heure (n° 8), et profitant du résultat qu'il a établi dernièrement sur les surfaces irrégulières (n° 4), a pu démontrer, sans introduire aucune restriction (3), que *toute surface possédant $q > 0$ intégrales de différentielles totales de première espèce possède des systèmes algébriques de courbes, qui ne sont pas contenus dans des systèmes linéaires.*

8. On n'a maintenant qu'à comparer les résultats des nos 4 et 7 pour faire ressortir la vérité de la proposition suivante :

Les surfaces irrégulières et les surfaces douées d'intégrales simples de première espèce forment une seule famille.

Ce théorème renferme deux propositions réciproques dues respectivement à MM. Severi et Enriques. En vue de l'importance du résultat, il est bon peut-être de rappeler ici l'ordre dans lequel ces propositions ont été découvertes, et les étapes successives qui ont amené au résultat *quantitatif,* qui a permis de compléter le théorème énoncé.

En septembre 1904 M. Severi, en s'appuyant sur les résultats généraux de M. Picard, a examiné la courbe polaire d'une intégrale simple de seconde espèce (transcendante), et a remarqué que la série caractéristique, découpée sur cette courbe par les courbes qui appartiennent au même système linéaire, n'est pas complète; il en déduit que (4)

(1) *Journal de Mathématiques,* 4e série, t. X, 1893, p. 190.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III.

(3) Enriques, *Rendic. della R. Accad. di Bologna,* décembre 1904.

(4) *Rendiconti della R. Accad. d. Lincei,* septembre 1904; *Mathem. Anna-*

toute surface douée d'intégrales simples de seconde (ou de première) espèce est irrégulière.

En décembre 1904 M. Enriques, en s'appuyant sur la construction de systèmes non linéaires sur une surface irrégulière (n° 4), parvenait à la conclusion réciproque que [1] *les surfaces irrégulières possèdent des intégrales simples de première espèce.*

Ensuite M. Severi [2], en profitant du théorème de M. Enriques sur les systèmes non linéaires (n° 4), a pu démontrer l'égalité

$$r - q = p_g - p_a,$$

où r et q sont les nombres des intégrales simples de seconde et première espèce de la surface.

Enfin, une étude plus approfondie des systèmes non linéaires nommés, étude où le rôle essentiel est joué soit par la considération de la *variété de Picard* [3] (n° 5), soit par l'extension du théorème d'Abel [4] (dont nous allons parler au n° 10), a permis à MM. Castelnuovo et Severi de préciser de la manière suivante le lien qui existe entre l'irrégularité d'une surface et le nombre des intégrales simples qui lui appartiennent :

Une surface ayant les genres p_g, p_a possède exactement $p_g - p_a$ intégrales simples distinctes de première espèce et $2(p_g - p_a)$ intégrales simples distinctes de seconde espèce; le nombre des périodes des unes et des autres intégrales, et le nombre des cycles linéaires distincts de la variété de Riemann à quatre dimensions attachée à la surface est $2(p_g - p_a)$.

Ce résultat est donc le fruit d'une longue série de recherches, auxquelles ont également contribué les méthodes transcendantes de M. Picard et les méthodes géométriques employées en Italie.

9. Le théorème d'après lequel une surface irrégulière possède des systèmes non linéaires de courbes (n° 4) peut être précisé davantage dans quelques cas particuliers remarquables.

---

len, t. LXI. Une autre démonstration a été donnée par M. PICARD (*Comptes rendus*, 16 janvier 1905; *voir* aussi ce *Traité*, t. II, p. 419).

(1) *Rendiconti della Accad. d. Scienze di Bologna, loc. cit.*

(2) *Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino*, janvier 1905; *voir* aussi PICARD, *loc. cit.*

(3) CASTELNUOVO, *Comptes rendus*, 23 janvier 1905; *Rendic. della R. Accad. dei Lincei*, mai-juin 1905.

(4) SEVERI, *Comptes rendus*, 3 avril 1905; *Annali di Matematica*, 3e série, t. XII.

En 1900, M. Castelnuovo communiquait à M. Enriques ([1]) une construction d'après laquelle, étant donné sur une surface de genre $p_g = 0$ un système de courbes non équivalentes, on est amené à un faisceau irrationnel. En 1904 (au moyen du résultat du n° 4) M. Enriques en a déduit ([2]) que :

Toute surface de genres

$$p_g = 0, \quad p_a < 0$$

renferme un faisceau irrationnel de courbes.

Ce résultat peut être généralisé, en remarquant que le point essentiel de la construction précédente, c'est le fait que les intégrales simples de la surface sont fonctions l'une de l'autre.

Or on reconnaît, en général ([3]), que, *si, parmi les intégrales simples attachées à une surface, il y en a plusieurs qui sont fonctions de l'une d'entre elles, alors la surface renferme un faisceau irrationnel de courbes.* Il s'ensuit que *toute surface ayant* $p_g \geqq 2(p_a + 2)$ *possède un faisceau irrationnel de courbes* ([4]). Cette propriété appartient donc à toute surface dont le genre arithmétique $p_a < -1$ ([5]); (on verra ensuite que les courbes du faisceau sur une telle surface sont rationnelles).

Le même ordre de considérations a permis à M. de Franchis d'établir un théorème remarquable ([6]) :

Si la surface $z^2 = f(x, y)$ possède q intégrales simples distinctes de première espèce, la courbe plane $f(x, y) = 0$ est formée par $2q + 2$ ou $2q + 1$ courbes appartenant à un même faisceau; toute courbe du faisceau est la projection de deux courbes de la surface qui varient en un faisceau hyperelliptique de genre q.

Le théorème réciproque subsiste aussi.

10. La démonstration très simple, par laquelle M. Severi a établi le théorème du n° 8, s'appuie sur une proposition qui doit être regardée

([1]) *Annales de Toulouse*, 2e série, t. III.

([2]) *Rendic. Accademia di Bologna, loc. cit.*

([3]) De Franchis, *Rendic. della R. Accad. dei Lincei*, juin 1904; *Rendic. del Circolo matem. di Palermo*, t. XX, 1905, p. 49.

([4]) Castelnuovo, *Rendic. del Circolo matem. di Palermo*, t. XX, p. 55.

([5]) De Franchis, *Rendic. del Circolo matem. di Palermo; loc. cit.*

([6]) De Franchis, *Rendic. della R. Accad. dei Lincei, loc. cit.; voir* aussi une extension de ce théorème dans les *Rendic. del Circolo matem. di Palermo*, t. XX, p. 331.

comme l'extension aux séries de courbes tracées sur une surface du théorème d'Abel relatif aux séries de groupes de points d'une courbe. Il s'agit de décider, en recourant aux intégrales simples de première espèce de la surface, si une série continue de courbes tracées sur elle est contenue dans un système linéaire. On peut énoncer la condition cherchée de différentes façons, mais on doit toujours envisager la somme des valeurs que chaque intégrale acquiert aux points d'un certain groupe variable. Bornons-nous à rappeler la première forme sous laquelle M. Severi énonce son théorème (¹) :

Pour qu'une série algébrique de courbes sur une surface appartienne à un système linéaire, il est nécessaire et suffisant que la somme des valeurs que chaque intégrale simple de première espèce prend aux points d'intersection de deux courbes de la série, garde une valeur constante lorsque les deux courbes varient dans la série.

Une autre extension du théorème d'Abel a été donnée aussi par M. Severi dans le Mémoire cité. La voici. Supposons que deux surfaces F, F′ soient liées par une correspondance algébrique $(1, n)$; on aura alors sur F′ une *involution* d'ordre n, formée par ∞^2 groupes de n points correspondant aux points de F. Eh bien, *la condition pour que l'involution sur* F′ (*c'est-à-dire la surface* F) *soit régulière, est que la somme des valeurs de chaque intégrale simple de première espèce de* F′ *aux points d'un même groupe reste constante quand ce groupe varie.*

11. Aux systèmes algébriques de courbes tracées sur une surface s'étendent immédiatement les notions de système complet, d'addition et de soustraction de systèmes, que nous avons exposées lorsqu'il s'agissait de systèmes linéaires. Si l'on désigne par (C), (C_1), ... des systèmes algébriques complets, on pourra donc attribuer une signification précise à une relation telle que celle-ci :

$$h(C) = h_1(C_1) + h_2(C_2) + \ldots + h_\rho(C_\rho), \tag{1}$$

où les h, h_1, h_2, ... h_ρ sont des nombres entiers, dont le premier et quelqu'un des autres sont certainement positifs; on suppose naturellement que les soustractions relatives aux coefficients négatifs sont possibles. Si la relation (1) a lieu, on dira que les systèmes (C), (C_1), ..., (C_ρ) sont *algébriquement dépendants*. Or M. Severi est

(¹) *Comptes rendus*, 3 avril 1905; *Annali di Matematica*, 3ᵉ sér., t. XII. On trouvera un résultat plus expressif dans une Note de M. Severi parue tout dernièrement dans les *Rendic. del Circolo matem. di Palermo*, t. XXI, 1906.

parvenu à démontrer un théorème extrêmement remarquable, qui se rapporte aux notions rappelées tout à l'heure ([1]) :

Sur une surface algébrique on peut toujours fixer un nombre fini ρ *de systèmes algébriques complets* (C_i), *algébriquement indépendants, tels que tout autre système algébrique* (C), *tracé sur la surface, dépende algébriquement des systèmes nommés.*

Tous les systèmes (C) existant sur la surface sont donc fournis par la relation (1), en attribuant aux coefficients h des valeurs entières. On dit que les systèmes $(C_1), \ldots, (C_\rho)$ forment une *base* de la totalité des systèmes tracés sur la surface. Si celle-ci est régulière, la base est formée par des systèmes *linéaires*.

Le nombre ρ, qui entre dans le dernier théorème, ne diffère pas du nombre que M. Picard a désigné par la même lettre à la page 241 du Tome II de ce Traité, et qui joue un rôle important dans sa théorie des intégrales simples de troisième espèce. En effet, si l'on prend une courbe $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ de chacun des systèmes formant la base, il n'existe aucune intégrale simple de troisième espèce ayant ces seules courbes pour courbes logarithmiques; mais on peut former une intégrale qui a pour courbes logarithmiques les ρ courbes nommées et une courbe ultérieure C arbitrairement fixée.

La connexion existant entre la théorie de la *base* et celle des intégrales simples de troisième espèce permet à M. Severi de répondre à une question importante posée par M. Picard ([2]). Il démontre en effet que *la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les intégrales simples attachées à une surface algébrique se réduisent à des combinaisons algébrico-logarithmiques, c'est que la surface soit régulière.*

12. Revenons maintenant à la recherche des caractères invariants d'une surface. A côté des invariants (absolus) que nous avons considérés jusqu'ici, il convient de prendre en considération de nouveaux caractères, qui ne jouissent pas d'une invariance rigoureuse vis-à-vis de toutes les transformations birationnelles de la surface; ce sont les *invariants relatifs.*

On parvient à cette conception très féconde, en partageant les transformations qu'on peut faire subir à une surface en deux classes :

1° Attribuons à la première classe les transformations qui font cor-

---

([1]) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, 6 février 1905; un Mémoire plus détaillé sur ce sujet paraîtra prochainement dans les *Mathem. Annalen.*

([2]) Ce Traité, t. II, p. 144.

respondre *sans exception* un point à chaque point simple de la surface donné, et une courbe à chaque courbe de celle-ci ([1]);

2° Attribuons, au contraire, à la seconde classe les transformations qui font correspondre à un ou à plusieurs points (en nombre fini) des courbes (exceptionnelles), ou *vice versa*.

Nous appelons alors *invariant relatif* de la surface tout caractère de celle-ci, qui est invariant vis-à-vis des transformations birationnelles de la première classe. Une transformation de la seconde classe modifie en général ce caractère, à moins que la transformation ne change autant de points de F en courbes exceptionnelles, que de courbes exceptionnelles de F sont transformées en points.

Voici maintenant quelques invariants relatifs fondamentaux qui appartiennent à une surface algébrique quelconque.

Partons d'abord d'une surface F_n d'ordre n, de genre $p_g > 0$. Une surface φ_{n-4}, d'ordre $n-4$, adjointe à F_n, coupe celle-ci (en dehors de sa courbe double) suivant une courbe composée par une courbe canonique et les courbes exceptionnelles qui peuvent exister sur F_n ([2]). Or, la première partie jouit de la propriété d'invariance (en une acception absolue); son genre $p^{(1)}$ constitue donc un invariant absolu de la surface, qu'on appelle, d'après M. Nöther, *le genre linéaire* ([3]).

Mais si, en ne faisant pas abstraction des courbes exceptionnelles, on évalue le genre de la courbe composée qui constitue (en dehors de la courbe double) l'entière intersection de F_n avec φ_{n-4}, on obtient un *nombre* ω *qui est un invariant relatif de la surface*.

Or le nombre ω peut être évalué en fonction des caractères d'un système linéaire quelconque tracé sur la surface F_n, et de ceux de son adjoint, soit, par exemple, en fonction du genre π des sections planes de F_n, de l'ordre n, et du genre π' des intersections de F_n avec les surfaces adjointes (φ_{n-3}) de l'ordre $n-3$; on a, en effet,

$$\omega = \pi' - 3(\pi - 1) + n.$$

L'importance de cette formule découle de la remarque suivante :

L'expression $\pi' - 3(\pi - 1) + n$ *a un sens, même dans le cas où la surface donnée a le genre* $p_g = 0$; *elle conserve d'ailleurs toujours son invariance relative,* vis-à-vis des transformations de la

---

([1]) Nous passons sur la difficulté inhérente aux points singuliers, dont il est permis d'ailleurs de faire abstraction.

([2]) Tome II, page 118.

([3]) Tome I, page 205.

première classe. Ce fait est une conséquence presque immédiate de la propriété fondamentale du système adjoint (1).

Ou pourrait de même former avec le degré n' du système découpé sur F_n par les surfaces φ_{n-3} une expression qui jouit aussi d'une invariance relative, à savoir

$$n' - 4(\pi - 1) + n\,;$$

cette expression, lorsque $p_g > 0$ et que la surface F_n ne possède pas de courbes exceptionnelles, exprime le degré du système canonique. Mais on a toujours

$$n' - 4(\pi - 1) + n = \omega - 1,$$

ce qui donne une généralisation d'une formule bien connue de M. Nöther (2).

13. Un autre invariant relatif, qui va jouer un rôle important dans l'étude des surfaces appartenant à la classe des surfaces réglées, peut être obtenu, d'après MM. Zeuthen et Segré, de la manière suivante : prenons sur la surface F un faisceau linéaire de courbes C, de genre π, doué de n points-base (simples ou multiples); il y aura, en général, un certain nombre δ de courbes C douées d'un point double, en dehors des points-base; or l'expression

$$I = \delta - n - 4\pi$$

ne dépend pas du faisceau considéré, mais seulement de la surface F, dont elle constitue un invariant relatif (3).

14. Comparons maintenant les deux invariants relatifs ω et I, d'une surface F.

Lorsqu'on transforme F par une transformation birationnelle, qui fait correspondre une courbe exceptionnelle à un point de F, le nombre ω diminue d'une unité; au contraire I augmente d'une unité par la même transformation.

Il s'ensuit que l'expression $\omega + I$ ne change pas, c'est-à-dire qu'elle constitue un invariant absolu de F; on a d'ailleurs (d'après une formule de M. Nöther)

$$\omega + I = p_a + 9 \quad (4).$$

(1) Enriques, *Introduzione alla geometria sopra una superficie algebrica*, n° 41 (*Memorie della Società italiana delle Scienze*, 3e série, t. X, 1896).

(2) *Loc. cit.*

(3) *Cf.* Castelnuovo et Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali...*, *loc. cit.*, n° 6.

(4) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*

On trouvera dans le texte (page 412) un invariant relatif lié aux précédents et qui se rattache au nombre des cycles à *deux* dimensions d'une surface.

15. L'étude des invariants relatifs appartenant à une surface nous amène à considérer de plus près les courbes exceptionnelles.

Tous les géomètres qui se sont occupés des surfaces algébriques savent bien que la présence de ces courbes, qui peuvent se transformer en points, introduit dans la théorie une difficulté systématique. C'est, d'ailleurs, une difficulté propre aux surfaces, qui n'a rien d'analogue dans la théorie des courbes. Aussi plusieurs efforts ont été faits pour éliminer cette difficulté, autant que possible. Depuis son premier Mémoire (de 1893) l'un de nous (Enriques) avait prévu que toute surface F (quelques cas particuliers exceptés) aurait pu se transformer en une nouvelle surface F′ dénuée de courbes exceptionnelles; il est revenu ensuite sur le même sujet, en 1896.

Mais ces résultats partiels n'ont plus d'intérêt aujourd'hui, puisque la question vient d'être résolue heureusement d'une façon précise et complète.

On démontre, en effet, qu'étant donnée une surface F, on peut faire disparaître l'une après l'autre ses courbes exceptionnelles, par un procédé qui s'arrête nécessairement (en faisant disparaître toutes ces courbes), si la surface F ne possède aucun système linéaire de genre π quelconque et de degré $n > 2\pi - 2$. Mais si, au contraire, un tel système existe (ainsi que nous le dirons plus loin), la surface F peut être transformée en un plan ou en un cylindre, c'est-à-dire qu'elle appartient à la classe générale des surfaces réglées (rationnelles ou irrationnelles). On a donc le théorème [1] :

Toute surface F, *qui n'appartient pas à la classe des surfaces réglées, peut être transformée en une nouvelle surface* F′ *qui n'admet aucune courbe exceptionnelle, de sorte qu'à chaque point et à chaque courbe exceptionnelle de* F *corresponde sans exception un point sur* F′.

Par suite, en dehors de la classe des surfaces réglées, il ne peut y avoir sur une surface quelconque qu'un nombre fini de courbes exceptionnelles; au contraire, *il y en a un nombre infini sur les surfaces rationnelles et sur les réglées et leurs transformées.*

16. Si l'on transforme une surface F par deux transformations différentes, de façon à éliminer ses courbes exceptionnelles, on obtient

---

[1] CASTELNUOVO et ENRIQUES, *loc. cit.*, n° 18.

deux surfaces F', F'', qui se correspondent *point par point, sans exception.* En d'autres termes, toutes les correspondances birationnelles entre des surfaces qui n'ont pas de courbes exceptionnelles appartiennent à la première classe des transformations, au moyen desquelles nous avons introduit les invariants relatifs.

On voit maintenant comment on peut déduire un invariant absolu de chacun des invariants relatifs ω, I, que nous avons définis.

Soit F une surface douée d'un nombre fini e de courbes exceptionnelles, et soit F' une surface transformée de F ne possédant aucune courbe exceptionnelle. Calculons, par exemple, l'invariant relatif ω par rapport à F, et formons l'expression

$$\omega + e.$$

Elle a la même valeur que l'invariant ω calculé par rapport à F'. Elle est donc un *invariant absolu* de F, qu'on appelle *genre linéaire* $p^{(1)}$ (¹), parce qu'elle se réduit au genre des courbes canoniques, lorsque le genre p_g de F est plus grand que zéro. On a d'ailleurs $p^{(1)} \geqq 1$.

Il est aisé de comprendre l'importance de la définition plus étendue du genre linéaire d'une surface que nous venons de donner. Il suffit de remarquer qu'en désignant par P_i le i-genre de la surface, on établit la formule

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)}-1)+1,$$

et pour les surfaces régulières ($p_g = p_a = p$)

$$P_i = p + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)}-1)+1,$$

pourvu qur l'on ait $p^{(1)} > 1$ (²).

17. Dans la définition qui précède nous avons dû laisser de côté les surfaces rationnelles et les réglées ou leurs transformées. Car en ce cas on ne peut plus se reporter à une image convenable de la surface, dénuée de courbes exceptionnelles.

Mais on étend aisément à ces cas la définition du genre linéaire $p^{(1)}$, en *appelant* $p^{(1)}$ *le maximum que peut atteindre le caractère* ω pour une transformée quelconque de la surface (³).

(¹) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 20.

(²) Pour $p^{(1)} = 1$ on peut construire des surfaces pour lesquelles $P_2 > p + 1$. — *Cf.* Enriques, *Rendic. della R. Accad. d. Lincei*, 1898.

(³) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 21.

On trouve alors que dans la classe des surfaces rationnelles le maximum $p^{(1)}$ de ω est atteint par le plan ($p^{(1)} = 10$), et, dans la classe de surfaces représentables sur une réglée de genre p, le maximum est atteint par cette dernière surface $[p^{(1)} = -8(p-1)+1]$. On a ainsi une *définition tout à fait générale du genre linéaire*. L'évaluation de ce nombre dans les cas concrets se rattache à la question de reconnaître si une surface donnée peut être transformée en une réglée. Cette question sera résolue dans la seconde partie de cette Note.

SECONDE PARTIE.

---

18. La théorie générale des surfaces, dont nous venons de parler, montre sa fécondité lorsqu'on cherche à en appliquer les résultats à des classes particulières de surfaces. Parmi celles-ci, nous allons étudier maintenant les surfaces réglées, et celles qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Rappelons qu'une surface $f(x, y, z) = 0$ est dite *rationnelle* (ou *unicursale*), si l'on peut exprimer les coordonnées x, y, z de chacun de ses points par des fonctions rationnelles de deux paramètres u, v, de telle sorte que u, v s'expriment à leur tour rationnellement à l'aide de x, y, z.

La famille des surfaces rationnelles rentre comme cas particulier dans celle des *surfaces réglées* ou leurs *transformées*; pour ces surfaces $[f(x, y, z) = 0]$ les coordonnées d'un point sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t, et de deux variables X, Y liées par une relation algébrique de la forme

$$\varphi(X, Y) = 0$$

(équation d'un cylindre).

Au point de vue algébrique, la détermination de la famille des surfaces réglées et, en particulier, des surfaces rationnelles, fournit la réponse au problème suivant :

Étant donnée une équation algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

entre trois inconnues, reconnaître si elle peut être transformée rationnellement de façon à éliminer une, ou, en particulier, deux inconnues.

Dans cette recherche, on peut se placer à deux points de vue :

a. On cherche d'abord à obtenir la transformation demandée, en construisant sur f certaines fonctions rationnelles de x, y, z par un procédé qui permet de décider toujours par un nombre fini d'opérations si la transformation est possible ou non. On arrive ainsi à établir une *détermination* des surfaces rationnelles et réglées *à l'aide de caractères qualitatifs.*

b. On cherche à établir les conditions d'existence de la transformation demandée, en évaluant les caractères invariants de la surface. On arrive ainsi à une *détermination* des surfaces rationnelles et réglées *à l'aide de caractères quantitatifs.*

19. Examinons d'abord un cas particulier. Supposons que l'équation de la surface ait la forme $z^2 = f(x, y)$.

Nous allons expliquer en quel sens on est parvenu à résoudre en ce cas la question proposée, soit en se plaçant au point de vue a, soit au point de vue b.

Il s'agit de chercher les conditions auxquelles doit satisfaire la courbe plane $f = 0$ pour que la surface $z^2 = f(x, y)$ soit rationnelle; on donne à cette surface le nom de *plan double* qui a la *courbe limite* $f = 0$.

Clebsch a posé ce problème et en a examiné un cas; M. Nöther, en reprenant la question, dans toute sa généralité, est parvenu au résultat suivant :

Pour que la surface $z^2 = f(x, y)$ soit rationnelle, il faut et il suffit que la courbe f puisse se ramener, par une transformation birationnelle du plan x, y, à l'un des types suivants :

1° *Courbe d'ordre* $2n$ *quelconque douée d'un point multiple d'ordre* $2n-2$;

2° *Courbe générale du quatrième ordre;*

3° *Courbe du sixième ordre douée de deux points triples infiniment voisins.*

On peut, d'ailleurs, décider *a priori* si une courbe donnée f peut être transformée en un des types nommés.

Supposons que l'ordre de la courbe f et les multiplicités de ses points singuliers distincts soient des nombres pairs $2n$, $2i_1$, $2i_2$, ...;

on peut toujours satisfaire à ces conditions en recourant, s'il est nécessaire, à une transformation birationnelle préalable de la courbe f.

Appelons maintenant courbe adjointe d'indice $k(=1, 2, \ldots)$ à la courbe f une courbe d'ordre $2n - 3k$ assujettie à passer avec $2i - k$ branches par tout point $2i^{\text{ple}}$ de f. On reconnaît alors que, si la courbe f peut se ramener à l'un des types de Clebsch-Nöther, elle ne possède aucune courbe adjointe dont l'indice soit $\geqq 2$, et *vice versa;* donc, *la non-existence des courbes adjointes d'indices* 2, 3, ... *à la courbe* f *est la condition pour que la surface* $z^2 = f(x, y)$ *soit rationnelle, ou puisse être transformée birationnellement en une surface réglée* (¹). La seconde éventualité regarde certains cas de réduction de la courbe f, précisément le cas où la courbe f se compose d'un certain nombre de courbes rationnelles appartenant à un même faisceau.

Au moyen des relations qui existent entre les courbes canoniques, bicanoniques, ... d'une surface $z^2 = f(x, y)$ et les courbes adjointes des différents indices à la courbe f, on peut transformer ce résultat en le suivant, plus expressif que le théorème de Clebsch-Nöther :

Une surface $z^2 = f(x, y)$, *dont le genre géométrique* p_g, *le bigenre* P_2, *le trigenre* P_3, ... *sont nuls, est rationnelle ou peut être transformée en une surface réglée* (²).

D'après la condition qualitative qui précède, il suffit même de vérifier que

$$p_g = P_2 = \ldots = P_\nu = 0,$$

où ν est le plus grand entier $\leqq \frac{2n}{3}$, n étant l'ordre de f, et l'on en déduit $P_{\nu+1} = 0$, ...

Mais des conditions plus expressives découlent du nº 26. Il est à souhaiter qu'on y parvienne d'une façon élémentaire, en développant l'analyse des courbes adjointes d'ordre k sur le plan.

20. Ces théorèmes nous amènent à quelques applications remarquables en elles-mêmes, et qui constitueront le point de départ de l'analyse générale que nous nous proposons d'établir.

Supposons qu'une surface f possède un système linéaire ∞^1 de courbes rationnelles. On peut d'abord, d'après M. Nöther, transformer birationnellement la surface en une autre f' possédant un système ∞^1

(¹) Castelnuovo et Enriques, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi* (*Rendic. del Circolo matem. di Palermo,* t. XIV, 1900).

(²) *Loc. cit.*

de coniques, découpées par les plans passant par une droite, qui aura la multiplicité $n-2$ si la surface f a l'ordre n. Or, cette surface f', à l'aide d'une projection effectuée d'un point de la droite nommée, se représente sur un plan double, dont la courbe limite a un certain ordre $2m$ et possède un point multiple d'ordre $2m-2$.

Il résulte, d'après le théorème de Clebsch-Nöther, que la surface f' et, en conséquence, la surface f, est rationnelle; d'où le théorème de M. Nöther :

Une surface qui possède un système linéaire ∞^1 de courbes rationnelles est rationnelle (¹).

Supposons, en second lieu, qu'une surface possède un système linéaire ∞^1 de courbes elliptiques, système ayant (au moins) un point-base simple. L'existence de ce système fait voir d'abord que la surface a le genre géométrique p_g et les plurigenres P_2, P_3, ... nuls; elle permet en outre de représenter la surface sur un plan double, en représentant, sur les points d'une droite variable d'un faisceau, les couples de points de la série g_2^1, qui appartient à l'une des ∞^1 courbes elliptiques et qui possède un point double au point-base nommé. En recourant au dernier théorème du n° 19, on a donc :

Une surface qui possède un système linéaire ∞^1 de courbes elliptiques ayant (au moins) un point-base simple, est rationnelle ou peut être transformée birationnellement en une surface réglée, qu'on voit d'ailleurs être elliptique (²).

Enfin, d'une manière analogue, on démontre qu'une surface contenant un système linéaire ∞^1 de courbes hyperelliptiques de genre π quelconque, système ayant des points-base dont les multiplicités donnent une somme supérieure à $2\pi-2$, est rationnelle ou peut être représentée sur une surface réglée (³).

De ces théorèmes résultent des propositions, dont le lecteur verra de suite l'importance, quoiqu'elles soient moins expressives que les théorèmes primitifs.

Une surface dont les sections planes sont des courbes rationnelles est elle-même rationnelle.

(¹) M. Nöther (*Math. Annalen*, t. III) y parvient d'une manière directe, en construisant sur la F' une courbe qui rencontre en un seul point chacune des ∞^1 coniques. *Voir* aussi page 272 de ce Traité (en note).

(²) Castelnuovo et Enriques, *Sulle condizioni di razionalità..., loc. cit.*

(³) *Loc. cit.*

Une surface dont les sections planes sont des courbes elliptiques est rationnelle ou réglée (¹).

Une surface dont les sections planes sont des courbes hyperelliptiques de genre quelconque est rationnelle ou réglée (²).

On peut voir une démonstration du premier théorème à la page 59 du Tome II. Aux deux autres nous étions déjà parvenus par des procédés directs, tout à fait différents, avant d'avoir démontré les propositions générales d'où nous venons de les déduire.

21. A côté des résultats précédents, on peut placer d'autres théorèmes, en quelque sorte analogues, où, étant donnés sur une surface des systèmes particuliers de courbes, on conclut que la surface peut être transformée en une réglée.

Une surface réglée, ou une surface qui peut être transformée birationnellement en celle-ci, contient un faisceau de courbes rationnelles, c'est-à-dire une série ∞^1 telle que par tout point de la surface passe uue seule courbe de la série. Inversement, pourra-t-on affirmer que toute surface contenant un faisceau de courbes rationnelles peut être transformée en une surface réglée? M. Nöther (³) a abordé cette question; il a démontré qu'on peut, par une transformation préalable, changer la surface en une autre contenant un faisceau de droites ou de coniques. Dans le premier cas la question est tranchée; dans le second il s'agit encore de chercher si l'on peut tracer sur la surface une courbe qui découpe chaque conique en un seul point. Or l'existence d'une telle courbe a été démontrée par M. Nöther dans l'hypothèse que le faisceau soit rationnel, ainsi que nous l'avons dit au n° 20; et dans l'hypothèse d'un faisceau quelconque la démonstration a été donnée par l'un de nous.

On a donc le théorème :

Toute surface contenant un faisceau de courbes rationnelles peut être transformée birationnellement en une surface réglée (⁴).

Une autre propriété de toute surface réglée c'est qu'on peut construire sur elle des systèmes linéaires de courbes (coupant en un

---

(¹) Castelnuovo, *Rendic. della R. Accad. d. Lincei,* 1894.

(²) Enriques, *Rendic. della R. Accad. d. Lincei,* 1893; *Mathem. Annalen,* t. XLVI.

(³) *Math. Ann.*, t. III.

(⁴) Enriques, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* (*Math. Ann.,* t. LII).

seul point chaque génératrice), ayant le même genre et les dimensions aussi grandes que l'on veut. Or cette propriété caractérise entièrement la famille des surfaces réglées et de leurs transformées.

Plus précisément : *une surface contenant un système linéaire de courbes de genre* $\pi > 2$ *et dimension* $r \geq 3\pi - 5$, *peut être transformée en une surface réglée rationnelle ou irrationnelle* (pour $\pi = 1, 2$, *voir* le n° 20) (¹).

En effet, si l'on impose aux courbes du système les $3(\pi - 2)$ conditions de passer doublement par $\pi - 2$ points arbitraires de la surface, on obtient ou bien un système linéaire de courbes de genre 2, auquel on appliquera un théorème du n° 20, ou bien un système de courbes réductibles auquel on peut appliquer le théorème énoncé ci-dessus.

22. Nous supposons maintenant qu'une surface $f(x, y, z) = 0$ soit donnée sans aucune restriction *a priori*; nous ne connaissons, par conséquent, sur celle-ci aucun système remarquable de courbes. Nous allons développer un procédé général, d'après lequel il sera toujours possible de reconnaître si la surface f appartient à la famille des surfaces rationnelles et réglées.

Envisageons le système linéaire $|C|$ constitué par les sections planes de la surface f.

Construisons le système $|C'|$ adjoint à $|C|$, puis le système $|C''|$ adjoint à $|C'|$, et ainsi de suite. On parvient ainsi à une série de systèmes adjoints successifs, $|C|$, $|C'|$, $|C''|$, ... Deux cas peuvent se réaliser. Ou bien la série a un nombre infini de termes; ou bien elle s'arrête après un nombre fini d'opérations, parce qu'on arrive à un système $|C^i|$ qui ne possède aucun système adjoint. Cette distinction est essentielle, car elle ne dépend pas des transformations birationnelles qu'on peut appliquer à la surface f. D'une manière précise, si l'on transforme birationnellement la surface f en une nouvelle surface f_1, et si l'on construit les systèmes adjoints successifs en partant du système des sections planes $|C_1|$ de f_1, on parvient à une nouvelle série, qui sera infinie ou finie, selon que le premier ou le second cas se présente pour la série relative à f(²). On est donc porté à répartir les surfaces en deux familles, l'une composée des surfaces sur lesquelles le pro-

(¹) Cf. Enriques, *Sulla massima dimensione*... (*Atti dell' Accad. delle Scienze di Torino*, 1894).

(²) Castelnuovo et Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali*..., *loc. cit.*, n° 12.

cédé d'adjonction peut se poursuivre à l'infini, l'autre des surfaces sur lesquelles ledit procédé a un terme après un nombre fini d'opérations. A la première famille appartient, par exemple, toute surface d'ordre > 3 n'ayant aucun point singulier, ou, d'une manière générale, toute surface dont le genre géométrique ou le bigenre... est supérieur à zéro.

La seconde famille comprend les surfaces rationnelles et les surfaces représentables birationnellement sur les surfaces réglées; elle ne comprend pas d'autres surfaces en dehors de celles-ci, et c'est là un résultat essentiel de la théorie, que nous nous proposons de résumer.

Il y a lieu de faire de suite la remarque suivante : une surface qui renferme un système $|C|$ au moins de courbes de genre π quelconque, dont le degré est $n > 2\pi - 2$, appartient à la seconde famille; en effet les courbes adjointes successives C', C'', ... rencontrent la C en des groupes composés d'un nombre décroissant de points. *Vice versa*, sur toute surface de la seconde famille on peut construire un système tel que $|C|$; il suffit de prendre, dans la série des systèmes adjoints successifs à un système quelconque, un terme assez éloigné de celui-ci.

Une surface f de la seconde famille a, d'après ce qui précède, $p_g = 0$ et, par conséquent, $p_a \leqq 0$; posons $p_a = -p\ (p \geqq 0)$. Nous allons fixer notre attention sur le dernier système $|C^i|$, de dimension $r_i \geqq 1$, qu'on rencontre en parcourant une série de systèmes adjoints successifs, par exemple la série qu'on obtient en partant des sections planes de f. On voit de suite que ce système a le genre $\pi_i \leqq p + 1$. Mais un examen plus approfondi, où le théorème de Riemann-Roch (n° 3) et l'invariant I de Zeuthen-Segre vont jouer un rôle essentiel, permet d'établir que la dimension du système $|C^i|$ est $r_i \geqq 3\pi_i - 5$, si le système est irréductible. Si, au contraire, $|C^i|$ est réductible, les composantes irréductibles des courbes C^i, ou bien forment un système linéaire satisfaisant à l'inégalité qui précède, ou bien sont des courbes rationnelles qui appartiennent à un faisceau de genre p. Si l'on se reporte maintenant aux résultats des n^{os} 20, 21, on parvient à établir le théorème fondamental suivant :

Toute surface, sur laquelle le procédé d'adjonction s'épuise par un nombre fini d'opérations, peut être transformée birationnellement en une surface réglée rationnelle $(p_a = 0)$ *ou irrationnelle* $(p_a < 0)$ (¹).

Le problème de reconnaître si une surface appartient à la famille

(¹) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali...*, *loc. cit.*, n° 15.

des surfaces rationnelles et réglées, se trouve résolu par le théorème énoncé, au point de vue qualitatif (a) du n° **18**.

Ce théorème conduit à des conséquences remarquables; parmi celles-ci, quelques-unes avaient été déjà établies avant de posséder le théorème cité, par une application plus limitée du même procédé d'adjonction, qui a joué le rôle essentiel dans la démonstration rappelée ci-dessus.

D'abord nous sommes maintenant en mesure de donner plus de précision aux résultats du n° **21**.

Il suffit, en effet, de rappeler la remarque du n° **13**, pour qu'on puisse énoncer le théorème suivant :

Toute surface qui renferme un système au moins ∞^1 *de courbes de genre* π *quelconque et de degré* $n > 2\pi - 2$, *peut être transformée en une surface réglée rationnelle* ($p_a = 0$) *ou irrationnelle* ($p_a < 0$) : *on peut même supposer le système* ∞^0, *si* $\pi > 0$.

Ce théorème renferme les cas particuliers concernant les surfaces dont les sections planes ont le genre $\pi = 0, 1, 2$, que nous avons cités au n° **20**.

En faisant $\pi = 3$, on obtient déjà un résultat nouveau, à savoir : *les surfaces d'ordre* > 4, *dont les sections planes ont le genre* 3, *sont rationnelles, ou peuvent être transformées en une surface réglée de genre* $p \leqq 3$.

23. Voici maintenant une conséquence remarquable du dernier théorème, qui regarde la définition même d'une surface rationnelle.

Supposons que les coordonnées d'un point variable sur une surface s'expriment par des fonctions rationnelles de deux paramètres

$$(1) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v);$$

la surface est certainement rationnelle si l'on peut résoudre les (1) en exprimant u, v par des fonctions rationnelles de x, y, z. Mais il n'en est pas toujours ainsi. Il peut se faire qu'à tout point (x, y, z) de la surface correspondent $n > 1$ points (u, v) d'un plan; dans ce cas la surface se représente sur une *involution plane de* ∞^2 *groupes de* n *points*. Est-ce que la surface sera encore rationnelle? Il s'agit de voir si l'on peut remplacer u, v par deux nouveaux paramètres u', v' (fonctions rationnelles de u, v), tels que x, y, z s'expriment rationnellement par u', v', et u', v' s'expriment à leur tour rationnellement par x, y, z.

Remarquons, à cet effet, qu'aux droites du plan (u, v) correspondent sur la surface des courbes C, d'un certain genre π, appartenant à un même système complet.

Or on démontre : 1° que ce système a la série caractéristique complète; 2° que le degré du système est $n > 2\pi - 2$, ce qui permet d'appliquer le théorème du n° 22. On conclut donc que : *une surface, dont les coordonnées d'un point variable s'expriment par des fonctions rationnelles de deux paramètres, est rationnelle* [1].

Il y a lieu de généraliser ce résultat de la façon suivante :

Supposons que les coordonnées x, y, z du point général d'une surface f s'expriment par des fonctions rationnelles des coordonnées X, Y, t d'un point variable sur une surface réglée (cylindre) φ

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(X, Y, t), \qquad y = y(X, Y, t), \qquad z = z(X, Y, t), \\ \varphi(X, Y) = 0. \end{cases}$$

A tout point de f correspondent, au moyen des relations (1), $n \geqq 1$ points de φ, formant un groupe d'une involution ∞^2 sur la surface réglée. Inversement à tout point de φ correspond un point de f; et si le premier point parcourt une droite $X = h$, $Y = k$ [où $\varphi(h, k) = 0$], le second point parcourt une courbe rationnelle de f. La surface f contient donc ∞^1 courbes rationnelles formant une série algébrique. Or, si par tout point de f passe une seule courbe de la série, la surface f est représentable birationnellement sur une surface réglée (n° 21). Dans le cas contraire, on démontre que les ∞^1 courbes rationnelles appartiennent à un même système linéaire, dont les courbes générales ont un certain genre π et se rencontrent deux à deux en $n > 2\pi - 2$ points variables; on conclut (n° 22) que la surface f est rationnelle, puisque l'éventualité qu'elle puisse être transformée en une surface réglée irrationnelle doit être exclue par la présence de ∞^1 courbes rationnelles ne formant pas un faisceau. On parvient ainsi au théorème :

Si les coordonnées d'un point variable sur une surface sont des fonctions rationnelles des coordonnées d'un point d'une surface réglée, la première surface elle-même peut être ramenée à une réglée (rationnelle ou irrationnelle) par une transformation birationnelle.

Ou bien :

Les groupes d'une involution quelconque située sur une surface

---

[1] CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (*Mathem. Annalen*, t. XLIV).

réglée peuvent être représentés birationnellement sur les points d'un plan ou d'une nouvelle surface réglée (1).

On peut exprimer le même résultat sous une autre forme, en disant que :

Une surface possédant une série algébrique (au moins ∞^1) *de courbes rationnelles, peut être transformée birationnellement en une surface réglée, si la série est un faisceau, ou bien elle est rationnelle.*

Une autre conséquence du théorème du n° 22 a été déjà énoncée au sujet des courbes exceptionnelles (n° 10).

En effet, dès qu'on a démontré qu'une surface, qui ne renferme aucun système de genre π et de degré $n > 2\pi - 2$, possède un nombre fini de courbes exceptionnelles, on conclut que toute surface possédant un nombre infini de telles courbes peut être transformée en une surface réglée (rationnelle ou irrationnelle) (2).

24. Nous nous plaçons maintenant au point de vue (b) du n° 18, en cherchant à déterminer la famille des surfaces rationnelles et réglées par les valeurs de leurs caractères invariants.

Il y a lieu dans cette recherche de recourir à des méthodes différentes, suivant que la surface est régulière ou irrégulière (surfaces rationnelles et surfaces irrationnelles).

Soit d'abord une surface régulière de genre $p_g = p_a = 0$. A partir de ses sections planes C, nous construisons les systèmes adjoints successifs

$$|C'|, \quad |C''|, \quad \ldots.$$

Puisque l'on a $p_g = 0$, le système $|C'|$ ne contient pas $|C|$; mais il peut se faire que $|C''|$ renferme $|C|$; dans ce cas le bigenre $P_2 \geqq 1$, et la surface n'est certainement pas rationnelle. Supposons au contraire $P_2 = 0$; en examinant alors la série des points que $|C''|$ découpe sur une courbe C, on trouve une inégalité arithmétique entre les genres de trois systèmes adjoints successifs, d'où il résulte que les genres $\pi, \pi', \pi'', \ldots$ des systèmes adjoints forment, à partir d'un certain terme, une série décroissante, qui a nécessairement un nombre fini de termes. On en déduit le théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit ra-

(1) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 17.
(2) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 18.

tionnelle est que le genre arithmétique et le bigenre soient nuls (¹). (La relation $p_g = 0$ résulte de $P_2 = 0$).

On a donc le moyen de caractériser la classe des surfaces rationnelles par les valeurs particulières que prennent certains invariants, en un sens analogue à celui qui permet de caractériser les courbes rationnelles par la valeur du genre $p = 0$. Toutefois, le résultat établi pour les courbes ne s'étend pas aux surfaces de la manière qu'on pourrait supposer, car on peut donner des exemples de surfaces ayant $p_g = p_a = 0$ et $P_2 > 0$, qui ne sont pas, en conséquence, rationnelles. Le lecteur pourra les trouver à la page 148 et suivantes du tome II.

25. Avant de passer au cas $p_a < 0$, nous nous arrêterons un moment sur la remarque suivante.

Au sujet des surfaces rationnelles il convient de faire la distinction qui suit.

Soit $f(x, y, z) = 0$ une surface rationnelle; on pourra donc exprimer x, y, z par des fonctions rationnelles invertibles de deux paramètres u, v. Mais il arrivera généralement que, dans les coefficients de ces fonctions, entreront des *irrationalités arithmétiques*. A ce point de vue on est porté à établir, parmi les surfaces rationnelles, une classification ultérieure d'après la nature de ces irrationalités. On y parvient en s'appuyant encore sur le procédé d'adjonction, car il suffit d'examiner le dernier système adjoint (au moins ∞^2) qu'on obtient en partant des sections planes de la surface.

On est porté ainsi à distinguer des *types de surfaces rationnelles, dont la représentation sur un plan dépend respectivement de racines carrées ou cubiques, et des irrationalités définies par une des équations que l'on rencontre dans la bissection des fonctions hyperelliptiques de genre* $p = 1, 2, 3 \ldots$ *ou des fonctions abéliennes du genre* 3 *ou* 4 (²).

26. Soit maintenant une surface irrégulière de genres $p_g = 0$, $p_a < 0$. A partir des sections planes C, construisons la série des systèmes adjoints successifs

$$|C'|, \quad |C''|, \quad \ldots.$$

Cette série ne s'arrête pas si l'on a, pour quelques valeurs de i,

$$P_i > 0;$$

(¹) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero, loc. cit.*

(²) Enriques, *Sulle irrazionalità*... (*Mathem. Annalen*, t. XLIX).

c'est ce qui arrive certainement si la surface f a un nombre fini de courbes exceptionnelles, lorsque

$$p^{(1)} > 1.$$

Mais on ne peut pas être assuré directement de la non-existence d'une surface n'appartenant pas à la famille des réglées et ayant, par conséquent, un nombre fini de courbes exceptionnelles, pour laquelle

$$p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 0, \qquad p^{(1)} = 1.$$

Ainsi le critérium qualitatif établi au n° **22** ne fournit pas une détermination de la famille des surfaces réglées ($p_a < 0$) à l'aide de caractères invariants.

Un tel critérium serait fourni, il est vrai, dans le cas $p_a < -1$, par l'inégalité

$$p^{(1)} < 1,$$

mais le calcul du genre linéaire défini au n° **17**, de façon à comprendre le cas des surfaces réglées, exige d'établir le maximum d'une certaine expression formée avec les caractères des systèmes linéaires appartenant à la surface, et amène, en pratique, à effectuer les mêmes opérations que l'on doit effectuer d'après le n° **22**.

Il convient donc de traiter la question proposée par une autre méthode, en prenant comme point de départ la propriété caractéristique des surfaces irrégulières (n° **4**), d'après laquelle on sait, en particulier (n° **9**), qu'une surface de genres $p_g = 0$, $p_a < 0$, renferme un faisceau irrationnel de courbes K.

Il y a lieu de distinguer deux cas :

I. $$p_a < -1.$$

En ce cas, il suffit d'évaluer l'invariant de Zeuthen-Segre à l'aide du faisceau des courbes K, en tenant compte de l'irrationalité de celui-ci [1]; on en déduit que le genre des K est 0 et, par suite (n° **21**), que la surface peut être ramenée à une réglée [2].

Donc : *Toute surface de genres $p_g = 0$, $p_a < -1$ peut être transformée en une réglée.*

II. $$p_a = -1.$$

Ce cas est beaucoup plus difficile.

---

[1] Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 6, *Oss.*

[2] Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (*Rendic. del Circolo Matem. di Palermo*, t. XX, 5 marzo).

En supposant que les K aient le genre $\pi > 0$, on peut envisager sur la surface la série non linéaire des courbes K'', secondes adjointes aux courbes K.

L'examen de certaines courbes K'', qui se décomposent en une courbe K et en une courbe résiduelle elliptique, conduit à construire sur la surface un *faisceau rationnel de courbes elliptiques,* qui découpent les K en $n > 1$ points. On remarquera que ce second faisceau existe même lorsque $\pi = 0$, car alors la surface se ramène à une réglée elliptique : seulement on peut avoir ici $n = 1$.

Maintenant on peut représenter les surfaces de genres $p_g = 0$, $p_a = -1$, sur des *cylindres elliptiques multiples,* de façon qu'à un point du cylindre correspondent n points de la surface.

Par l'étude de cette correspondance *la construction de toutes les surfaces de genres $p_g = 0$, $p_a = -1$ se trouve ramenée à une transformation de déterminant d'ordre n des fonctions elliptiques.*

Dans le cas où n est un nombre premier, on peut transformer birationnellement la surface en une surface

$$\varphi(X, Y, Z) = 0,$$

où X, Y, Z s'expriment à l'aide de deux paramètres u, v par des formules de la forme suivante :

$$Z = v, \qquad Y = \wp'(u \mid \omega, \omega'),$$

$$X = \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \varepsilon^\lambda \wp_\nu(u + \lambda\omega_\nu) \right\} \sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}\ldots(z-a_t)^{h_t}},$$

$$h_i < n, \qquad \sum h_i \equiv 0 \pmod{n}, \qquad \nu = \infty,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;$$

$$\varepsilon^n = 1, \qquad \varepsilon \neq 1,$$

$$\wp_\nu(u) = \wp(u \mid n\omega, \omega'), \qquad \omega_\nu = \omega \qquad \text{pour} \qquad \nu = \infty,$$

$$\wp_\nu(u) = \wp(u \mid \omega - \nu\omega', \omega'), \qquad \omega_\nu = \omega' \qquad \text{pour} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Si l'on envisage maintenant les plurigenres des surfaces que nous venons de construire, on trouve que

$$P_4 > 0, \qquad \text{ou} \qquad P_6 > 0,$$

ou bien

$$P_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots),$$

ce dernier cas correspondant à l'hypothèse $\pi = 0$ et conduisant par conséquent aux réglées elliptiques.

En rapprochant ce résultat du précédent ($p_a < -1$) et de celui du n° 24 concernant le cas $p_a = 0$, on obtient enfin le théorème général suivant [1] :

Les conditions pour qu'une surface puisse être transformée birationnellement en une réglée (rationnelle ou irrationnelle) peuvent être exprimées en annulant les deux genres d'ordre 4, 6 :

$$P_4 = P_6 = 0.$$

Il convient de remarquer que ces conditions ne peuvent être simplifiées ultérieurement, car il y a effectivement des surfaces pour lesquelles

$$p_g = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 0, \qquad P_6 = 1,\ 2,\ (p_a = -1),$$

et d'autres pour lesquelles

$$p_g = P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = 0, \qquad P_4 = 1, \qquad (p_a = -1),$$

27. Il y a lieu seulement d'ajouter quelques remarques au sujet du cas particulier

$$p_a < -1.$$

Nous avons vu que toute surface de genres

$$p_g = 0, \qquad p_a < -1$$

peut être ramenée à une réglée.

Or si, dans la discussion qui précède, on introduit le théorème du n° 9 sous sa forme la plus expressive, on réussit à simplifier le résultat en montrant que la condition $p_g = 0$ est superflue. MM. Castelnuovo [2] et Enriques [3] ont fait en même temps cette remarque, d'après laquelle il résulte que :

Toute surface de genre numérique $p_a < -1$ *peut être ramenée à une réglée.*

Ces conditions peuvent aisément être exprimées d'une façon transcendante. En effet, d'après le n° 8, on voit qu'*il s'agit de reconnaître que la surface possède* $p > 1$ *intégrales simples de première espèce*

(1) ENRIQUES, *loc. cit.*
(2) CASTELNUOVO, *Rendic. del Circolo Matem. di Palermo,* t. XX, p. 55.
(3) ENRIQUES, *ibid.,* t. XX, p. 61.

et qu'elle ne possède aucune intégrale double de première espèce ($p_g = 0$).

Sous cette forme (avec la restriction superflue que les p intégrales simples aient $2p$ périodes), les conditions énoncées avaient été trouvées antérieurement, c'est-à-dire en 1900 (¹).

28. Le problème général de déterminer les surfaces qui admettent une infinité continue de transformations birationnelles en elles-mêmes a été posé par M. Picard en 1885.

Il y a lieu d'abord de distinguer deux cas, suivant que les transformations données engendrent un *groupe* d'ordre fini (au sens de Lie), ou qu'elles engendrent par multiplication une série de transformations dépendant d'un nombre infini de paramètres.

L'analyse de M. Picard se rapporte au premier cas. Elle aboutit aux résultats suivants :

Les surfaces qui admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles en elles-mêmes se partagent en trois familles :

1° *Surfaces hyperelliptiques, douées d'un groupe* ∞^2 *de transformations échangeables ;*

2° *Surfaces possédant un faisceau de courbes rationnelles ;*

3° *Surfaces possédant un faisceau de courbes elliptiques.*

Le premier cas, à plusieurs égards le plus important, est caractérisé par M. Picard d'une façon complète : les coordonnées d'un point de la surface sont des *fonctions quadruplement périodiques de deux variables,* ou, si l'on aime mieux, la surface peut être représentée sur la variété des couples de points de la courbe de genre *deux* (²).

Dans le second cas, M. Painlevé a remarqué que la surface peut être transformée en une réglée, ce qui résulte à présent du théorème général du n° **21**.

Dans le troisième cas il y a lieu de pousser plus avant l'analyse des conditions pour lesquelles une surface, qui renferme un faisceau de courbes elliptiques, admet un groupe de transformations dont ces courbes sont les trajectoires.

Cette question délicate a été résolue par M. Painlevé (³). Il résulte

---

(¹) ENRIQUES, *Annales de Toulouse*, 2ᵉ sér., t. III.

(²) *Voir* ce Traité, t. II, Chap. XIV.

(³) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles* (Paris, Hermann, 1897), p. 285.

de ses recherches que si une surface admet un groupe continu de transformations birationnelles, dont les trajectoires sont des courbes elliptiques, les coordonnées des points de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles de

$$\mathfrak{p}(u + \lambda\omega + \mu\omega' \mid a\omega + b\omega', c\omega + d\omega'), \quad \mathfrak{p}'$$

et de v, w liées par une relation algébrique

$$f(v, w) = 0.$$

Les surfaces qui jouissent d'une telle représentation paramétrique ont été appelées *surfaces elliptiques;* elles sont caractérisées géométriquement par le fait de renfermer : 1° un faisceau, rationnel ou irrationnel, de courbes elliptiques ayant le même module; 2° un autre faisceau elliptique de courbes de genre quelconque, coupant les premières en $n = ad - bc$ points (¹).

Il y a lieu d'ailleurs de déterminer les différentes classes de surfaces elliptiques par une analyse de l'équation

$$f(v, w) = 0.$$

Parmi ces classes, il faut nommer les surfaces de genres

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1,$$

dont nous avons donné les types au n° 26.

Nous pouvons maintenant résumer les résultats que nous venons d'exposer, en énonçant le théorème suivant :

Les surfaces qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes rentrent dans trois familles :

1° *Surfaces hyperelliptiques,* douées d'un groupe transitif ∞^2 de transformations échangeables;

2° *Surfaces réglées,* douées (au moins) d'un groupe de transformations, dont les trajectoires sont des courbes rationnelles;

3° *Surfaces elliptiques,* admettant un groupe (au moins) de transformations, dont les trajectoires sont des courbes elliptiques.

Parmi ces surfaces, il y a en particulier les surfaces douées d'un *groupe transitif de dimension* $r > 2$; nous avons remarqué qu'*elles*

(¹) Enriques, *Rendic. del Circolo di Palermo* (*loc. cit.,* 5 marzo).

se réduisent aux surfaces rationnelles et aux réglées elliptiques (¹).

29. La question se pose maintenant de reconnaître si une surface donnée rentre dans une des familles de surfaces douées d'un groupe, qui sont classifiées dans le numéro précédent.

Nous allons rendre compte brièvement de l'analyse, qui a permis de répondre à cette question par la simple évaluation des caractères invariants de la surface (²).

On remarquera d'abord (avec M. Picard) que les surfaces hyperelliptiques ont

$$p_a = -1, \qquad p_g = 1,$$

et, ensuite, que les surfaces elliptiques ont

$$p_a = -1,$$

et que leur genre p_g est égal au genre du faisceau des trajectoires elliptiques du groupe.

Soit maintenant une surface, dont le genre arithmétique

$$p_a < 0.$$

Si $p_a < -1$, on tombe sur la famille des surfaces réglées (nº 27). Envisageons le cas

$$p_a = -1.$$

Il faut distinguer les hypothèses

$$p_g = 0, \qquad p_g > 1, \qquad p_g = 1.$$

Lorsque $p_g = 0$, la surface renferme un faisceau elliptique de courbes, et un second faisceau rationnel de courbes elliptiques (nº 26); elle est par conséquent une surface elliptique, ce qui résulte d'ailleurs de sa représentation paramétrique.

Lorsque $p_g > 1$, puisque

$$p_g > 2p_a + 3,$$

la surface renferme un faisceau irrationnel de genre > 1 de courbes

---

(¹) Castelnuovo et Enriques, *Comptes rendus*, juillet 1895.

(²) Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero; Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XX).

(n° 9), qui sont d'ailleurs elliptiques. Une analyse approfondie montre que le genre du faisceau est précisément p_g.

Envisageons maintenant les p_g+1 intégrales simples de première espèce, qui appartiennent à la surface (n° 8); parmi celles-ci il y en a p_g, correspondant au faisceau nommé, dont les périodes se réduisent à $2p_g$; on aura par suite une intégrale avec deux périodes distinctes, qui nous fournira sur la surface un second faisceau irrationnel, et précisément elliptique, de courbes. La surface est donc elliptique.

Soit enfin

$$p_g=1.$$

Il y a deux intégrales simples de première espèce (n° 8), et, s'il n'y a pas de courbe canonique proprement dite, en dehors des courbes exceptionnelles, on sait que la surface est hyperelliptique ([1]).

Mais il peut se faire qu'il y ait une courbe canonique de genre $p^{(1)}=1$; en ce cas, on trouve deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques et, par suite, deux faisceaux elliptiques de courbes, dont l'un est composé de courbes elliptiques, l'autre de courbes ayant un genre $\pi\geqq 1$. La surface admet en ce cas un groupe elliptique ∞^1; elle admet un second groupe analogue, et rentre comme cas particulier dans la famille des surfaces hyperelliptiques, seulement dans le cas $\pi=1$.

Or, comment pourra-t-on distinguer les deux cas des surfaces hyperelliptiques et des surfaces elliptiques correspondant aux mêmes valeurs $p_g=1$, $p_a=-1$?

Il suffira, pour cela, d'évaluer le genre d'ordre 4, P_4; on a, en effet,

$$P_4=1$$

dans le premier cas,

$$P_4>1$$

dans le second.

On peut résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème suivant ([2]) :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface non rationnelle admette un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes, c'est que le genre arithmétique

$$p_a<0.$$

([1]) PICARD; *voir* ce Traité, t. II, Chap. XIV, n° 17.

([2]) ENRIQUES, *voir* le second Mémoire cité ci-dessus.

On a des surfaces admettant un groupe rationnel (famille de réglées) pour $p_a < -1$, *et des surfaces elliptiques ou hyperelliptiques si*

$$p_a = -1;$$

le cas hyperelliptique étant déterminé par les valeurs

$$p_g = P_4 = 1.$$

Et, en rapprochant ce théorème de celui énoncé au n° **26**, on peut dresser le Tableau suivant :

	$p_a < -1.$	$p_a = -1.$	$p_a = 0.$
$P_4 + P_6 = 0$ $(P_4 = P_6 = 0)$	réglées de genre $-p_a$	réglées elliptiques	réglées rationnelles
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 \neq 1$	impossible	surfaces elliptiques admettant un groupe ∞^1	
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 = 1$ $(p_g = P_4 = 1)$	impossible	surfaces hyperelliptiques	

30. Il reste enfin à examiner les surfaces admettant une série continue de transformations, qui n'engendrent pas un groupe d'ordre fini.

Il y a lieu de remarquer d'abord qu'on peut construire une telle série sur les surfaces rationnelles et réglées. Or, le théorème du n° **23** nous a permis de démontrer réciproquement que ce cas est le seul possible.

Partons du système $|C|$ des sections planes de la surface f, et transformons-le, en lui appliquant successivement un certain nombre r de transformations arbitraires de la série; nous parvenons ainsi à un nouveau système $|C_r|$, qui doit avoir nécessairement des points-base multiples, si la série n'est contenue en aucun groupe fini. En faisant abstraction de ces points, on peut calculer le genre virtuel π_r et le degré virtuel N_r de $|C_r|$. Or, on démontre que la différence $N_r - 2\pi_r$ peut être rendue aussi grande que l'on veut, en choisissant r assez grand.

Sur la surface existe donc un système tel que $N > 2\pi_r - 2$, d'où le théorème [1] :

Une surface admettant une série continue de transformations birationnelles en elles-mêmes, qui n'appartiennent à aucun groupe (d'ordre fini), *peut être transformée en une surface réglée* (rationnelle ou irrationnelle).

Si la série est transitive, la section plane de la surface réglée aura le genre 0 ou 1.

(1) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali ... loc. cit.*, n° 19.

ERRATA ET ADDITIONS DU TOME I.

Page 26. Quand nous disons qu'une variété d'ordre $n-1$ dans un espace à n dimensions est toujours simple, il est entendu, comme il résulte des hypothèses du n° 2, que la surface n'a pas de ligne multiple. Autrement le théorème peut n'être pas exact; on sait qu'il existe, dans l'espace à trois dimensions, des surfaces fermées n'ayant qu'un côté, mais elles ont des lignes multiples.

Pages 74 et suivantes. La démonstration du théorème général relatif à la réduction des singularités d'une surface algébrique est incomplète. Aux Mémoires cités page 74, ajoutons les travaux de M. Beppo Levi (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2ᵉ série, t. XXVI, 1897, et *Comptes rendus*, t. CXXXIV, 1902, p. 222 et 642) qui résolvent complètement la question.

Page 118, ligne 4, *lire* $B\frac{\partial f}{\partial y}$ *au lieu de* $B\frac{\partial f}{\partial z}$.

Page 118, dernière ligne, *lire* f'_y *au lieu de* f'_z.

Page 119, ligne 7, *lire* $\frac{\partial B}{\partial y}$ *au lieu de* $\frac{\partial B}{\partial x}$.

Page 120. M. Arthur Berry a démontré (*Acta mathematica*, t. XXVII) différents théorèmes relatifs à l'impossibilité pour une surface d'admettre des intégrales de première espèce. En particulier, une surface, dont les seules singularités sont des points doubles diminuant la classe de *deux* ou *trois* unités, ne peut avoir d'intégrales de première espèce.

Page 123, ligne 5 en remontant, *lire* z^{p-1} *au lieu de* z^p.

Page 136. La méthode pour déterminer les surfaces du *quatrième* degré ayant des intégrales différentielles totales de première espèe a été seulement indiquée. Ce sujet a été complètement traité depuis par M. Arthur Berry (*Comptes rendus*, septembre 1899 et *Cambridge philosophical Transactions*, vol. XVIII), par M. de Franchis (*Rendiconti di Palermo*, t. XIV), et par M. Lacaze dans sa thèse (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1901).

Page 139, ligne 2 du n° 16, *lire* première *au lieu de* seconde.

Page 140, ligne 3 du n° 17, *lire* première *au lieu de* seconde.

Page 144. Nous avons démontré qu'une surface du cinquième degré avec une conique double ne peut avoir deux intégrales de première espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre. Dans un de ses Mémoires, M. Picard avait énoncé plus généralement le même théorème pour toutes les surfaces du cinquième degré de genre géométrique égal à *un*. M. Arthur Berry a fait récemment une étude très complète des surfaces du cinquième degré ayant des intégrales de première espèce (*Cambridge philosophical Transactions*, vol. XIX, part II, 1902, et vol. XX, part I, 1904). Il a établi, en particulier, sans faire aucune hypothèse sur le genre, qu'une surface du cinquième degré ne peut avoir deux intégrales de première espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre.

Page 165, ligne 9, supprimer le dénominateur f'_z. Pour une formation plus explicite des équations relatives aux a, *voir* t. II, page 307.

Page 184, ligne 5, *lire* $x = \mathrm{X}z$ *au lieu de* $z = \mathrm{X}z$.

Page 185, ligne 3 en remontant, *lire* $\mathrm{X}z$ *au lieu de* $\mathrm{X}x$.

Page 186, ligne 5 en remontant, *lire* surface *au lieu de* courbe.

Page 188, lignes 7 et 8 en remontant. Il est dit qu'une certaine intégrale double reste finie, sauf pour l'origine. On vérifie aisément que cette intégrale reste finie même à l'origine en faisant le changement de variable

$$\frac{x}{y} = u,$$

u et z étant les nouvelles variables.

Page 223. Les questions étudiées dans la Section III ont fait l'objet d'une étude plus approfondie dans le Tome II (Chapitre II, Section V).

ERRATA ET ADDITIONS DU TOME II.

Page 43, à la seconde ligne du n° 32, *lire* minimum *au lieu de* maximum.

Page 128. Les résultats de cette page sont à rapprocher du théorème établi page 438.

Page 165, ligne 7, *au lieu de* ne deviennent pas infinies, *lire* ne deviennent pas infinies pour $x = a$.

Page 186. Le nombre désigné par ρ dans le Chapitre VII a été ultérieurement désigné par ρ_0. *Voir* d'ailleurs, sur ce changement de notation, page 289, en note.

Page 207. Nous avons supposé en différents endroits du Chapitre VIII que nous nous trouvions dans le cas général où les deux nappes se croisant le long de la courbe double n'étaient pas distinctes. On peut toujours le supposer, en faisant une transformation birationnelle préalable. L'étude directe du cas où il en serait autrement ne présente, d'ailleurs, aucune difficulté dans les réductions faites ultérieurement.

Page 366. Dans l'égalité (R) mettre la limite inférieure b_i dans l'intégrale $\int_{b_i}^{y} \Omega_i(y)\,dy$.

Page 371, ligne 6 du n° 21, *lire* sous des conditions, *au lieu de* sans des conditions.

Page 412. D'après ce qui a été vu page 358, on peut dire que la relation (13) exprime le caractère invariant (au sens relatif) des cycles à *deux* dimensions d'une surface algébrique.