Enriques, Federigo

Sui moduli delle superficie algebriche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XVII** (1908), pp. 690-694.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
Estratto dal vol. XVII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11°. — Seduta del 6 giugno 1908.

SUI MODULI

DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

NOTA

DEL CORRISP.

F. ENRIQUES

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1908

Matematica. — *Sui moduli delle superficie algebriche.* Nota del Corrispondente F. Enriques.

1. Si designino al solito con p_g e p_a i generi superficiali, geometrico ed aritmetico, di una superficie algebrica, e con $p^{(1)}$ il suo genere lineare (virtuale) escludendo la famiglia delle superficie rigate. Per esprimere il numero dei moduli appartenenti ad una classe di superficie, vi è luogo ad introdurre un nuovo carattere invariante

$$\theta \geq o,$$

che si lascia definire semplicemente come vedremo al n. 2.

Ogni superficie avente i caratteri $p_g p_a p^{(1)}$, θ, appartiene ad una classe di superficie coi medesimi caratteri, dove si distinguono

$$10 p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

moduli. Questo è, in altre parole, il numero delle condizioni richieste per l'identità birazionale di due superficie della classe.

E qui importa osservare che tutte le superficie di una classe, corrispondenti al medesimo genere aritmetico p_a, conservano sempre la medesima irregolarità e quindi lo stesso p_g, sicchè: *dal punto di vista invariantivo non accade che le superficie irregolari si presentino come casi particolari delle regolari; e neppure le superficie regolari si presentano come casi particolari delle irregolari*, in una famiglia che debba mantenere fisso il p_a.

Queste affermazioni (pur contrarie ad alcune fallaci apparenze) si giustificano osservando che all'irregolarità di una superficie corrisponde un ordine di connessione lineare del relativo spazio riemanniano a 4 dimensioni, il quale ordine non può variare quando lo spazio suddetto vari per trasformazione continua senza strappi e duplicature, cioè quando la superficie corrispondente varii in modo continuo senza acquistare nuove singolarità.

Quanto al numero θ, che figura nella formula di sopra, non possiamo dire se e quale funzione esso sia di $p_a, p_g, p^{(1)}$; ma è facile vedere che per definirlo in modo da comprendere *tutti* i casi ($p^{(1)} \geq 1$) si debbono prendere in considerazione almeno i plurigeneri P_i ($i = 2, 3 \ldots 1$) della superficie.

Per ogni classe di superficie coi generi

$$p_a = p_g = P_i = 1 \qquad (p^{(1)} = 1)$$

risulta che *il numero dei moduli è almeno 19* (come per la classe delle superficie di 4° ordine, $\theta = 0$).

Per le superficie regolari ($p_g = p_a = p$) di *genere* $p > 3$ con sistema canonico irriducibile (e quindi $p^{(1)} > 5$) si trova

$$\theta = p + \theta', \text{ con } \theta' \geq 0$$

e quindi *il numero dei moduli* è

$$10p - 2p^{(1)} + 12 + \theta'.$$

Prendendo $\theta' = 0$ si ricade nella espressione che il sig. Noether [1] ha dedotto da alcune ipotesi sulla validità delle note formule di postulazione. Risulta pertanto:

1) che la formula di Noether ($p > 3, p^{(1)} > 5$) dà almeno un minimo pel numero dei moduli;

2) che la eventuale differenza θ' è la deficienza di una serie covariante del sistema canonico, definita sopra la jacobiana di una rete del sistema (n. 4).

2. Per calcolare il numero dei moduli di una classe di superficie algebriche, procediamo come segue:

Consideriamo una superficie della classe priva di curve eccezionali e su questa un sistema regolare $|C|$ di dimensione ≥ 3, senza punti base (*puro*). Mediante un sistema ∞^3 contenuto in $|C|$, la superficie si lascia trasformare in una F di S_3, dotata di curva doppia e punti tripli (che sono tripli anche per la curva); la F appartiene ad una serie continua $\{F\}$ di superficie dotate di una curva doppia dello stesso ordine e collo stesso numero di punti tripli; si tratta di valutare la dimensione D di questa serie continua di superficie, e di detrarre da questo numero il numero S delle superficie trasformate di F che appartengono alla serie stessa; ciò che rimane è il numero dei moduli:

$$M = D - S.$$

[1] *Anzahl der Modulen einer Classe algebraischer Flächen.* Sitzungsberichte Akademie zu Berlin 1888.

Ora la dimensione D della serie continua completa a cui appartiene F, si potrà valutare in base all'osservazione seguente:

Tutte le superficie della serie, infinitamente vicine ad F, segano su F il sistema lineare completo ∞^{D-1} che si ottiene sommando il sistema segato dalle prime polari e il sistema $|C|$ delle sezioni piane (*sistema caratteristico* della serie $\}F\{$).

Infatti ogni superficie della serie infinitamente vicina alla F, d'ordine n, si può considerare come una superficie dello stesso ordine che passi semplicemente per la curva doppia di F e per i punti doppî (pinch-points) ad essa infinitamente vicini; viceversa ogni superficie d'ordine n che passi per questa curva e per questi punti doppî, e che sia infinitamente vicina ad F, ha una curva doppia dello stesso ordine infinitamente vicina a quella di F e similmente altrettanto punti doppî in prossimità ai pinch-points di F, quindi appartiene ad $\}F\{$.

Ciò posto, essendo n il grado di $|C|$ (ordine di F) e π il suo genere, le superficie φ_{n-1} polari di F segano su F un sistema lineare (contenuto in $2C + C'$) di genere

$$\bar{\pi} = 9\pi + p^{(1)} - 9.$$

Il grado δ di codesto sistema è il numero delle C d'un fascio dotate d'un punto doppio; perciò $I = \delta - n - 4\pi$ è il valore dell'invariante di Zeuthen-Segre, cioè

$$I = 12p_a - p^{(1)} + 9;$$

si deduce

$$\delta = n + \pi + 12p_a - p^{(1)} + 9.$$

Sommando $|C|$ al sistema segato dalle φ_{n-1} si ha il sistema caratteristico della serie continua $\{F\}$: il genere e il grado di questo sistema varranno dunque

$$\Pi = \bar{\pi} + 2n + 2\pi - 3 = 12\pi + 2n + p^{(1)} - 12$$

e

$$N = \delta + 2\ (2n + 2\pi - 2) + n = 6n + 8\pi + 12p_a - p^{(1)} + 5.$$

Quindi la dimensione $D - 1$ del sistema stesso, calcolata in base al teorema di Riemann-Roch, sarà

$$D - 1 = p_a + N - \Pi + 1 + \theta = 4n - 4\pi + 13p_a - 2p^{(1)} + 18 + \theta,$$

con

$$\theta \geq 0.$$

Procediamo ora a valutare il numero S che esprime quante trasformate di F appartengono alla serie continua $\{F\}$. Essendo $|C|$ un sistema regolare di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1,$$

vi sono in esso ∞^{4r-12} sistemi ∞^3, a ciascuno dei quali corrispondono ∞^{15} superficie trasformate di F proiettivamente identiche. Si avrà dunque

$$S = 4r + 3,$$

se il sistema $|C|$ non appartiene ad una serie continua più ampia di curve dello stesso ordine, ciò che accade per $p_a = p_g$. Ma se $p_a < p_g$, $|C|$ appartiene ad un sistema continuo non lineare

$$\infty^{r+p_g-p_a} \text{ (}^1\text{)},$$

formato di $\infty^{p_g-p_a}$ sistemi lineari di dimensione r, e quindi si avrà in generale

$$S = 4r + 3 + (p_g - p_a).$$

Si deduce dunque che *il numero dei moduli* della classe a cui appartiene F è

$$M = D - S = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta.$$

Ecco ora il significato di θ.

Essendo $|C|$ un sistema generico di F, il sistema caratteristico di $\{F\}$ è costituito dalle curve di $|3C + C'|$ che passano per i pinch-points di F; questi punti, in numero di

$$s = 2n + 8\pi + 2p^{(1)} - 12p_a - 21,$$

offrono $s - \theta$ condizioni indipendenti alle curve del sistema regolare $|3C + C'|$ che debbono contenerli; si dirà perciò che θ *è la sovrabbondanza del sistema* $|3C + C'|$ *per riguardo al gruppo* G_s *degli* s *punti*, i quali sono definiti dalla proprietà di essere punti doppî per ∞^1 curve C appartenenti al sistema ∞^3 delle sezioni piane, o — come brevemente diremo — sono *punti neutri* di questo sistema ∞^3.

Ora, poichè M esprime un carattere invariante di F. anche θ dovrà essere un invariante, cioè: *Per ogni sistema generico* $|C|$ *scelto su* F, *la sovrabbondanza del sistema* $|3C + C'|$ *in ordine al gruppo dei punti neutri di un qualsiasi sistema* ∞^3 *contenuto in* $|C|$, *assumerà un valore costante* $\theta \geq 0$, *che dipenderà dalla superficie* F *e non dal sistema scelto su di essa.*

3. Consideriamo ora una superficie di genere

$$p_g = p_a = p > 3,$$

(1) Enriques, Atti Acc. di Bologna dec. 1904.

con curve canoniche irriducibili ($p^{(1)} \geq 6$), e cerchiamo di assegnare per essa un limite inferiore del carattere θ.

A tale scopo poniamo al posto di un sistema generico $|C|$ il sistema canonico $|K|$; la formula che dà il numero dei moduli diviene

$$M = 9p - 2p^{(1)} + 16 + \bar{\theta},$$

dove $\bar{\theta}$ è la sovrabbondanza di $|3K + K'| = |5K|$ rispetto ad un gruppo G_s di punti neutri per un qualsiasi sistema ∞^3 contennto in $|K|$. In questa formula, figura la costante numerica 16 al posto di 12, perchè nell'espressione di M figurava $-4r$, e la dimensione r del sistema canonico è inferiore di un'unità al valore virtuale; si ha dunque

$$\bar{\theta} = \theta - 4.$$

Per valutare $\bar{\theta}$, consideriamo la jacobiana K_j di una rete di curve K; ogni sistema ∞^3 di $|K|$, contenente la rete, dà luogo ad un gruppo di punti neutri G_s, appartenente a K_j). Ora K_j è una curva del sistema $|4K|$, su cui $|5K|$ sega la serie canonica completa; la sovrabbondanza del sistema dedotto da $|5K|$ con l'imposizione del gruppo base G_s risulterà quindi uguale alla dimensione della serie speciale descritta da G_s su K_j (teorema di Riemann-Roch sulla curva K_j). Ma per ogni sistema ∞^3 contenente la rete di $|K|$ considerata, vi è un G_s su K_j, e perciò la dimensione della serie completa descritta da G_s sarà

$$p - 4 + \theta',$$

dove θ' ($\geq o$) designa la deficienza eventuale della serie costituita dai gruppi neutri G_s.

Si conclude che per

$$p_a = p_g = p > 3 \qquad (p^{(1)} \geq 6)$$

il numero dei moduli di una classe di superficie algebriche vale

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 12 + \theta',$$

dove θ' ($\geq o$) *designa la deficienza eventuale della serie descritta dai gruppi neutri dei sistemi* ∞^3 *contenuti nel sistema canonico, sopra la jacobiana di una rete*; si ha quindi

$$\theta = p + \theta'.$$