Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO AND AMALDI, U.

Elementi di Geometria [ad uso delle scuole tecniche]

Zanichelli, Bologna, 1910. (II edizione)



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

६१७५

FEDERIGO ENRIQUES E UGO AMALDI

ELEMENTI DI GEOMETRIA

AD USO DELLE SCUOLE TECNICHE

Seconda edizione

R. Università di Napoli
04093
Istituto di Matematica

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
FIRENZE - ROMA - MILANO - R. Bemporad & F.
TORINO - S. Lattes & C. — GENOVA - Edoardo Spiotti
NAPOLI - Fratelli Treves

PROPRIETÀ LETTERARIA

BOLOGNA - TIP. CACCIARI, XI, 1910.

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Gli elementi di Geometria che pubblichiamo, contemplando in modo speciale i programmi delle nostre Scuole tecniche, rispondono ad un doppio ordine di criterii teorici e pratici, traducenti il concetto che ci formiamo di un primo insegnamento geometrico.

Dal punto di vista teorico occorre svolgere nei giovanetti le facoltà immaginative e preparare la comprensione di un più perfetto ordinamento logico della materia; perciò importa mettere in evidenza le esperienze elementari su cui riposa l'edifizio geometrico, ed evitare quelle ambigue pseudo-definizioni e dimostrazioni che sotto il pretesto di fare appello all'intuizione, introducono formule verbali prive di senso.

Dal punto di vista pratico un primo insegnamento di Geometria — massime nelle Scuole tecniche — deve educare gli alunni alle costruzioni e alle misure, e però conviene sia concepito secondo un indirizzo costruttivo e metrico.

I due ordini di criterii accennati, bene si accordano in uno sviluppo parzialmente sperimentale ed induttivo che movendo dall'uso degli istrumenti, definisce le figure per mezzo di essi e introduce i postulati come semplici regole emergenti dalle relative costruzioni. Anche i procedimenti di misura trovano subito un posto in questo ordinamento, ottenendosi così il vantaggio di porgere fin da principio agli alunni interessanti esercitazioni.

D'altronde un rapido sguardo alla disposizione dei capitoli permette al lettore di scorgere che il nostro disegno si attua senza troppo sensibili scostamenti dall'ordine tradizionale; che i pochi postulati da noi aggiunti concernono sempre proprietà evidenti, come p. es. la convessità del cerchio, e che da essi si trae una notevole economia di sviluppo nella teoria dei triangoli, dove ad es. diventa inutile la deduzione di alcune diseguaglianze che fanno capo al teorema delle perpendicolari e delle oblique.

Il criterio della misura che abbiam tenuto in vista in tutti gli Elementi, domina poi in modo assoluto i cenni consacrati alla Geometria solida che, attenendoci al programma, abbiamo limitato alle definizioni e nozioni strettamente necessarie per valutare superficie e volumi.

Tali, in breve, i concetti fondamentali che hanno guidato l'opera nostra. Coloro che conoscono già gli Elementi ad uso delle Scuole secondarie superiori, rav-

viseranno facilmente, attraverso le differenze imposte dai gradi diversi d'insegnamento, l'unità della veduta filosofico-didattica che domina i due libri.

L'educazione matematica che abbiamo in vista deve aprire la via a comprendere il valore dell'esperienza, dell'induzione e della deduzione nel campo della Fisica, e così ad apprezzare esattamente il significato del metodo sperimentale che domina la Scienza moderna.

INTRODUZIONE

Negli oggetti, o *corpi fisici*, noi possiamo considerare le sole proprietà di *forma* e di *estensione*, prescindendo da quelle altre proprietà che dipendono dalla natura della materia di cui sono costituiti.

La Geometria è la scienza che studia appunto le proprietà di forma e di estensione dei corpi (proprietà geometriche).

I corpi, in quanto idealmente si considerano dotati di sole proprietà geometriche, si sogliono designare col nome di « figure geometriche » o semplicemente di « figure ».

Così, per esempio, un *dado di avorio* ci fornisce un modello di quella figura geometrica che si chiama *cubo*.

Le proprietà geometriche delle figure si possono scoprire:

1) o coll'*osservazione* del modello (*intuizione*),

aiutata — se occorre — da mezzi sperimentali, per es. da *istrumenti* di costruzione e di misura;

2) o col ragionamento (*dimostrazione*) deducendole da altre proprietà geometriche che l'osservazione ha messo in luce.

Nei primi sviluppi — riferendoci alle più semplici *figure fondamentali,* dalla cui combinazione si otterranno via via le figure più complicate — noi ci varremo appunto dell'intuizione in rapporto colle operazioni costruttive; le proprietà evidenti che così si ottengono prendono il nome di *postulati*, e costituiscono le premesse sufficienti per uno sviluppo intieramente deduttivo della Geometria.

Tuttavia in questo trattato — confacente ad un primo grado di studio — non vogliamo limitare in alcuna guisa il ricorso diretto all'intuizione, ovunque ciò valga a semplificare il riconoscimento di qualche proprietà.

Come avviamento ad una distinzione critica dei varii modi con cui si ottengono le proprietà geometriche, varranno le designazioni [1]) di cui faremo uso sistematico dopo il Cap. I.

Le proposizioni che si deducono successivamente per mezzo di ragionamenti, a partire dai postulati

[1]) **Teor.** cioè **Teorema**; **Cor.** cioè **Corollario**; **Probl.** cioè **Problema.**

(cioè le proposizioni che si dimostrano), si chiamano *teoremi.*

Le conseguenze più immediate di un teorema (o anche di un postulato) si dicono *corollari* di esso. E talvolta una proposizione, che non ha importanza di per sè stessa, ma viene premessa allo scopo di dimostrare un successivo teorema, si dice *lemma.*

Spesso l'osservazione di una figura ci conduce a supporre delle proprietà non evidenti di essa, suggerendoci di porre delle domande (*problemi*) e segnandoci la via per ottenere la risposta (*risoluzione*).

I.

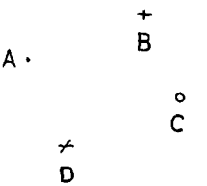
COSTRUZIONI E CONCETTI FONDAMENTALI.

Piano, punto e retta. Riga.

1. Distendiamo un foglio di carta da disegno su di un tavolo ben spianato e levigato. Sarà questo il **piano** su cui noi disegneremo.

Intorno a noi abbiamo altri *piani:* la lavagna, su cui disegneremo col gessetto, il pavimento della scuola, le pareti. E così ancora, la superficie di uno specchio, la superficie di un lago, ecc. servono tutte a farci comprendere « che cos'è un *piano* ».

2. Con un lapis ben acuminato si possono *segnare* sul foglio del disegno quanti **punti** si vogliono.



Per distinguerli l'uno dall'altro segneremo accanto a ciascuno di essi una lettera maiuscola e li chiameremo « punto A », « punto B », « punto C », ecc.

3. Se pieghiamo su se stesso il nostro foglio di carta e poi di nuovo lo distendiamo sul tavolo, la traccia della ripiegatura ci dà l'immagine di una **linea retta** o, come diremo per semplicità, di una *retta*.

Così un orlo del cartone di un libro rilegato, un filo sottile ben teso, un raggio di sole che entri da un forellino in una stanza buia servono tutti a farci capire « che cosa è *una retta* ».

4. Per *disegnare una retta* sul foglio si usa solitamente una RIGA.

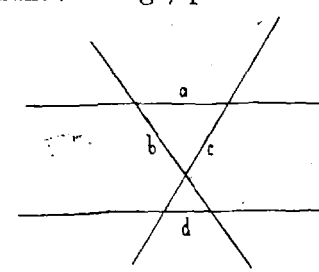


Appoggiata la riga sul foglio si fa scorrere lungo uno dei suoi orli la punta del lapis o della penna o del tiralinee. La traccia che così si ottiene sul foglio sarà più o meno lunga secondo la lunghezza della riga e l'ampiezza del foglio. Ma noi penseremo la retta **illimitata nei due sensi**, cioè indefinitamente proseguita nell'uno e nell'altro senso.

Per poter prolungare la retta quanto occorre, penseremo il piano **illimitato.**

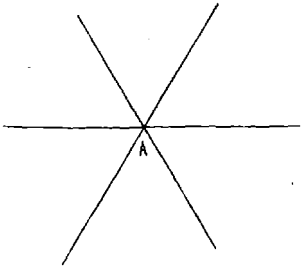
E perciò se il nostro foglio è troppo piccolo per il disegno che vogliamo eseguire, gliene incolleremo accanto un'altro, da quella parte, in cui ci sarà più comodo.

5. Sul nostro piano, usando la riga, possiamo disegnare quante rette vogliamo. Per distinguerle, segneremo accanto a ciascuna una lettera minuscola e le chiameremo « retta *a* », « retta *b* », « retta *c* »...



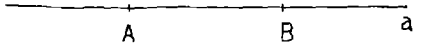
6. Nel piano, per un punto A, possiamo, per mezzo della riga, *condurre* quante rette vogliamo.

Ma preso un altro punto B *non possiamo condurre che una sola retta che passi per A e B;* cioè, possiamo dire che:



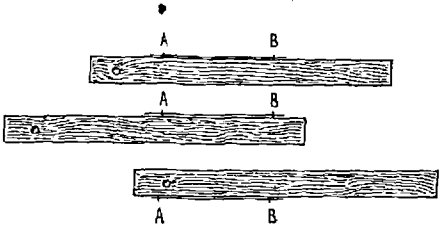
Due punti determinano una retta.

Ciò si può verificare osservando che, se fra i due punti A e B tendiamo sul foglio due fili, p. es. puntando in A e B due spilli, i due fili si adagiano l'uno sull'altro.



7. La retta che passa per due punti A, B si dice « retta AB ».

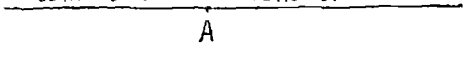
Quando si vuol condurre le retta AB con la riga, questa si può adagiare sul foglio in vari modi (vedi l'unita figura). Ma se la riga è esatta si deve sempre ottenere la medesima retta. Si ha così un modo per *verificare la riga.*



Semirette e segmenti.

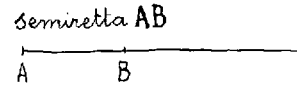
8. Su di una retta possiamo segnare quanti punti vogliamo.

L'unita figura mostra che ogni punto A di una retta la divide in due parti, ciascuna delle quali è *illimitata in un sol senso.* Queste due parti si chiamano **semirette** o **raggi** di *origine* A.

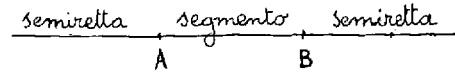


Le due semirette in cui una retta è divisa da un punto si dicono l'una il *prolungamento* dell'altra.

La semiretta che ha un'origine A e passa per un punto B si dice « semiretta AB ».



9. Si vede analogamente dall'annessa figura che una retta è divisa da due suoi punti A, B *in tre parti.*



La parte intermedia si dice « **segmento** AB » (o segmento di *estremi* A e B); e le altre due parti sono due semirette (*prolungamenti del segmento* AB).

Il segmento AB si dice anche *distanza* dei due punti A, B.



Dato sul foglio un segmento AB, se si vuol *prolungarlo*, p. es. dalla parte di B, si appoggia la riga sul foglio in modo che il suo orlo collimi con una parte di AB.

Confronto di segmenti.

10. *Due segmenti possono essere* **uguali** *o* **disuguali.**

Dati due segmenti AB, CD, per verificare se essi siano *uguali* o *disuguali*, si ripieghi su sè stessa una



strisciolina di carta e adagiato l'orlo rettilineo della ripiegatura sul segmento AB, si segnino su di esso i

due punti A', B' che coincidono con A, B rispettivamente.

Dopo ciò si trasporti codesta strisciolina di carta in guisa che il punto A' vada a coincidere con C e l'orlo A'B' della ripiegatura si adagi sulla semiretta CD. Se allora il punto B' va a coincidere con D concludiamo che i segmenti AB, CD sono uguali; e scriveremo

$$AB = CD \qquad o \qquad CD = AB.$$

In caso contrario i due segmenti sono disuguali; e precisamente se B' va a cadere fra C e D (cioè in



un punto *interno* al segmento CD) diremo che AB è *minore* di CD e che CD è *maggiore* di AB e scriveremo

$$AB < CD \quad , \quad CD > AB.$$

Se invece B' va a cadere sul prolungamento di CD (in un punto esterno a CD) diremo che AB è *mag-*

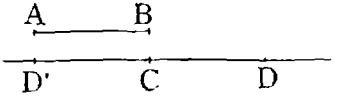


giore di CD o che CD è *minore* di AB e scriveremo

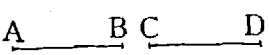
$$AB > CD \quad , \quad CD < AB.$$

11. Nello stesso modo si verifica che:

a) *Data una retta e un punto* C *su di essa, si possono determinare sulla retta due segmenti aventi un estremo in* C *e uguali ad un segmento dato* AB.



b) *Segmenti uguali ad un terzo sono uguali fra loro*, cioè se



$AB = CD$ e $CD = EF$ si ha $AB = DF$.

c) *Se un segmento è maggiore di un altro e questo è maggiore di un terzo, il primo è maggiore dell'ultimo;* cioè se

$$AB > CD \quad \text{e} \quad CD > EF$$

si ha

$$AB > EF.$$

d) *Se due segmenti sono disuguali, due segmenti ad essi rispettivamente uguali, sono disuguali nello stesso senso;* cioè se

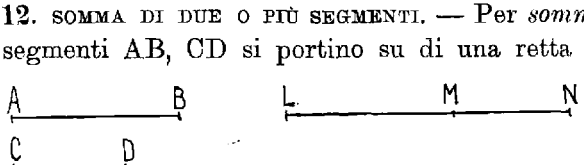
$$AB > CD \text{ e } A'B' = AB,\ C'D' = CD$$

avremo

$$A'B' > CD.$$

Somma e differenza di segmenti. Multipli e summultipli.

12. SOMMA DI DUE O PIÙ SEGMENTI. — Per *sommare* due segmenti AB, CD si portino su di una retta due

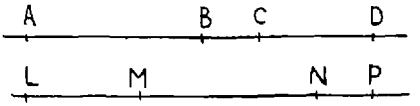


segmenti *consecutivi* LM, MN rispettivamente uguali ad AB, CD. Il segmento LN si dice *somma* di AB e CD (*addendi* o parti) e si scrive

$$LN = AB + CD.$$

Analogamente si definisce la *somma di tre o più segmenti.*

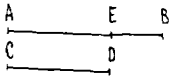
13. In ogni caso, *anche se si cambia l'ordine in cui si prendono i segmenti da sommare, si ottiene sempre come somma il medesimo segmento.*



Si guardi p. e. l'unita figura dove si è preso

$$LM = CD,\ MN = AB,\ NP = BC.$$

14. DIFFERENZA DI DUE SEGMENTI. — Per *sottrarre* da un segmento AB un segmento minore CD si prenda su AB a partire da A il segmento AE uguale a CD. Il segmento EB si dice *differenza* di AB e CD e si scrive



$$EB = AB - CD.$$

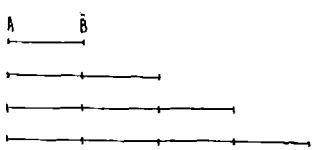
Similmente AE si dirà differenza di AB ed EB e si scriverà

$$AE = AB - EB.$$

15. Si verifica senz'altro che: *Sommando a segmenti uguali segmenti uguali si ottengono segmenti uguali.*

Sottraendo da segmenti uguali segmenti uguali, si ottengono segmenti uguali.

16. MULTIPLI E SUMMULTIPLI DI UN SEGMENTO. — Dato un segmento AB, la somma di due segmenti uguali ad AB dicesi *segmento doppio* di AB, o *multiplo di* AB *secondo* 2. Così la somma di tre, quattro, cinque... segmenti uguali ad AB diconsi rispettivamente *multipli di* AB *secondo* 3, 4, 5,...



I multipli di AB si indicano con 2AB, 3AB, 4AB,...

17. Si segni un segmento AB sull'orlo rettilineo di una strisciolina di carta. Ripiegando questa su sè stessa in modo che B vada a coincidere con A, dividiamo il segmento AB in due *parti* uguali, ciascuna delle quali si dice *metà* di AB (od anche *summultiplo* o *parte aliquota* di AB secondo 2).

Ripiegando ancora la strisciolina di carta, possiamo dividere il segmento AB in 4 parti uguali e poi in 8 e così via.

Similmente, ripiegando opportunamente, possiamo dividere il segmento AB in 3 parti uguali, ecc.

In ogni caso, quando AB è diviso in un certo numero di parti uguali, ciascuna di queste si dice *parte aliquota* o *summultiplo* di AB.

Queste diverse parti aliquote si indicano con

$$\frac{AB}{2}, \frac{AB}{3}, \frac{AB}{4}, \ldots$$

Si legga « una metà di AB », « un terzo di AB », « un quarto di AB », ecc.

18. *Se due segmenti sono uguali, sono pure uguali i loro multipli secondo* 2, *o* 3, *o* 4,... *e così pure le loro metà, i loro terzi, i loro quarti*, ecc.

Misura dei segmenti. Riga graduata.

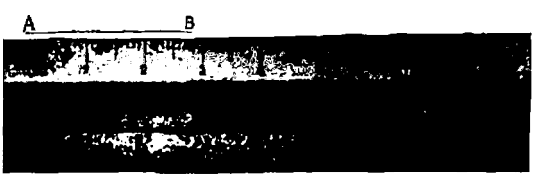
19. Nel disegno, per confrontare segmenti, trasportarli, sommarli, ecc., si adopera solitamente, invece della strisciolina di carta ripiegata di cui noi ci servimmo dianzi, una RIGA GRADUATA.

Si hanno righe graduate di varia lunghezza; ma la più usata nel disegno è il *doppio-decimetro*.

Il doppio decimetro è una piccola riga, di cui lo spigolo è diviso (*graduato*) in venti tratti uguali fra loro, e numerati da 0 a 20, ognuno dei quali è un *centimetro*, cioè la centesima parte aliquota del *metro*, che, come sappiamo fino dalle Scuole elementari, è l'*unità di misura fondamentale delle lunghezze.*

Ciascuno poi di codesti 20 centimetri è diviso in dieci parti uguali o *millimetri* e talvolta ogni millimetro è suddiviso per metà.

20. Per misurare un segmento AB, si appoggi il doppio decimetro sul foglio in modo che lo spigolo graduato collimi colla retta AB e l'estremo A coincida collo 0 della graduazione. Se l'altro estremo B coincide con una delle divisioni della graduazione p. es.



colla 28ª (escluso lo 0) si dice che 28 mm. è la *misura* (o *lunghezza*) del segmento AB.

Se poi B non coincide con alcuna divisione, sarà compreso fra le due divisioni successive, p. es., fra la 28ª e la 29ª: allora si dirà che 28 mm. è la *misura* (o *lunghezza*) *approssimata* per difetto (a meno di 1 mm.) di AB, e 29 mm. è la *misura approssimata* per eccesso del segmento dato.

Se in questo secondo caso si volesse conoscere in modo più preciso la lunghezza del segmento AB, bisognerebbe poter disporre di una riga graduata, a graduazione più minuta [1]:

---

[1] Per es. i Biologi per misurare grandezze microscopiche (come le dimensioni dei microbi) usano speciali oculari su cui sono segnate scale graduate che permettono di valutare le lunghezze in *micron* (millesimi di millimetro).

ma, come già dicemmo, le righe graduate che si usano nel disegno sono, tutt' al più, suddivise in mezzi millimetri.

21. Nella pratica per misurare le lunghezze si usano, invece delle righe graduate del disegno, altri strumenti (metri pieghevoli a regoletti di legno o di ottone, regoli graduati per stoffe, metri a nastro, ecc.).



In ogni caso i metri usati nella pratica sono uguali al *metro-campione*, il quale è segnato sullo spigolo di un regolo di platino, che si conserva dal 1790 negli Archivi dello Stato Francese a Parigi, ed è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, secondo le determinazioni della Commissione geodetica francese nominata dall'Assemblea Nazionale nel 1791.



22. Per misurare le grandi lunghezze che si presentano nella pratica (p. es. la lunghezza di una strada) si considerano altre unità ausiliari: il *decametro* (1. *dam*), che è uguale a 10 m., *l'ettometro* (1 *hm.*), uguale a 100 m., il *chilometro* (1 *km.*), uguale a 1000 m.

23. *La lunghezza della somma di due o più segmenti è la somma delle rispettive lunghezze.*

Parti di piano. Angoli.

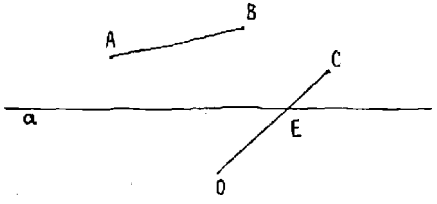
24. Se sul foglio tracciamo una retta *a* e lo tagliamo lungo di questa, il foglio resta diviso in due parti.

Così il piano, pensato come una superficie illimitata, vien *diviso* da una retta *a*, tracciata su di esso, in *due parti.*

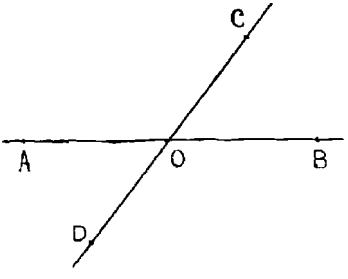
Codeste due parti si dicono *semipiani.*

25. Se si è diviso il piano con una retta *a* in due

semipiani e si prendono due punti A, B in uno stesso semipiano il segmento AB giace tutto in quel semipiano. Se invece si prende un punto C in un semipiano e un punto D nell'altro, il segmento CD attraversa, o come si dice, *sega* la *a* in un punto E.



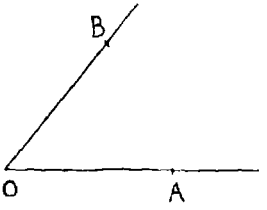
La parte CE di CD giace in un semipiano e la parte ED nell'altro.



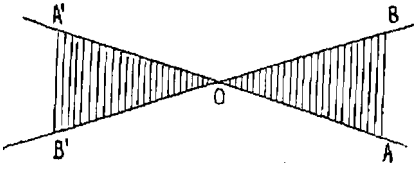
26. Se per un punto O del piano conduciamo *due* rette AB, CD, vediamo che il piano vien diviso in *quattro parti.*

Codeste quattro parti di piano si chiamano **regioni angolari** o semplicemente **angoli.**

Un *angolo* è determinato da due semirette OA, OB aventi la stessa origine O. L'angolo si designa con $A\widehat{O}B$; il punto O si dice *vertice* e le semirette OA, OB *lati* dell'angolo.

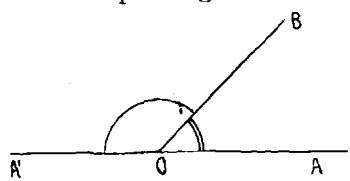


27. Dato un angolo $A\widehat{O}B$ si conducano i prolungamenti OA', OB' dei due lati. Queste due semirette determinano un angolo $A'\widehat{O}B'$, che si dice *opposto al vertice* all'angolo dato $A\widehat{O}B$.



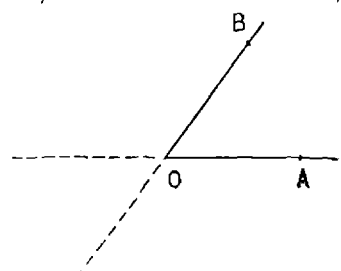
28. Se invece, dato un angolo $A\widehat{O}B$, si con-

duce il prolungamento di un solo lato, p. es. il prolungamento OA′ di OB, si ottiene un angolo $B\widehat{O}A'$ che si dice *adiacente* di $A\widehat{O}B$.



Angoli concavi e piatti.

29. Dato un angolo AOB, le due semirette OA, OB dividono il piano in due parti di cui una è l'angolo $A\widehat{O}B$ e l'altra è l'insieme dei due angoli adiacenti ad esso e dell'opposto al vertice. Per brevità, anche questa seconda parte di piano si chiama *angolo*.



Per distinguerla dalla prima, si dice *angolo concavo* $A\widehat{O}B$, mentre l'altra parte si dice *angolo convesso* $A\widehat{O}B$.

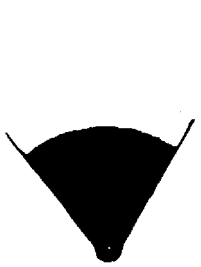
30. Date per un punto O due semirette OA, OB (che non siano sulla stessa retta) ogni altra semiretta uscente da O, è interna o all'angolo convesso o all'angolo concavo, aventi comuni i lati OA, OB.

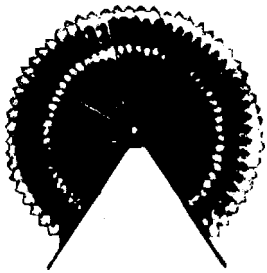
L'angolo concavo si distingue da quello convesso in quanto i prolungamenti dei lati sono interni al primo ed esterni al secondo.

31. Talvolta si è condotti a considerare anche angoli, in cui i due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro e che perciò segnano il passaggio dagli angoli convessi ai concavi. Angoli siffatti si chiamano *piatti*.



32 . Un ventaglio giapponese, secondo che è o quasi chiuso o quasi del tutto aperto, ci dà l'idea di un angolo convesso o concavo.





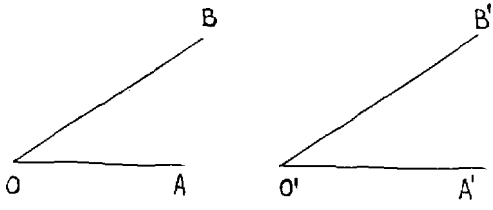
Se poi l'apriamo a metà in modo che le due stecche si dispongano in linea retta, otteniamo l'immagine di un angolo piatto.



33. AVVERTENZA. — D'or innanzi, quando nomineremo un « angolo $A\widehat{O}B$ » senza dire nulla di più, intenderemo parlare dell'angolo $A\widehat{O}B$ convesso.

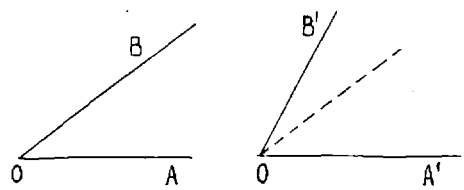
Confronti di angoli.

34. *Due angoli possono essere* **uguali** *o* **disuguali.** Dati due angoli $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O}'B'$, per verificare se essi siano *uguali* o *disuguali*, si trasporti l'angolo $A\widehat{O}B$, p. es., ritagliandolo in carta o ricalcandolo in lapis su carta trasparente, sull'altro angolo $A'\widehat{O}'B'$, facendo coincidere il vertice O con O′ e il



lato OA con OA'. Se il lato OB va a cadere precisamente su O'B', i due angoli sono *uguali* e scriveremo

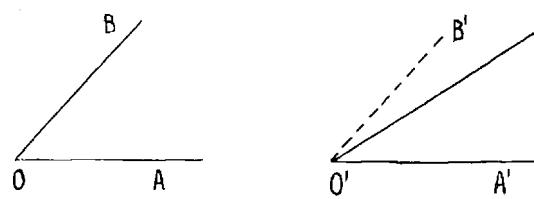
$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} \quad \text{o} \quad \widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}.$$



Se invece il lato OB va a cadere internamente ad $\widehat{A'O'B'}$, l'angolo $\widehat{AOB}$ è *minore* di $\widehat{A'O'B'}$ e $\widehat{A'O'B'}$ è *maggiore* di $\widehat{AOB}$, il che si scrive

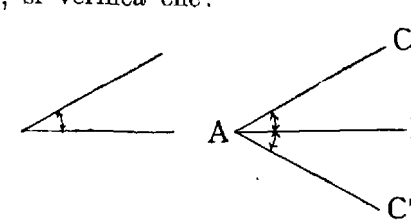
$$\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'} \quad , \quad \widehat{A'O'B'} > \widehat{AOB}.$$

Se poi infine il lato OB cade esternamente ad $\widehat{A'O'B'}$, l'angolo $\widehat{AOB}$ è *maggiore* di $\widehat{A'O'B}$, e $\widehat{A'O'B'}$ è *minore* di $\widehat{AOB}$; ciò si scrive



$$\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'} \quad \text{o} \quad \widehat{A'O'B'} < \widehat{AOB}.$$

35. Ritagliando un angolo di carta o disegnandolo su carta trasparente, si verifica che:



Data sul piano una semiretta AB *si possono condurre per* A *due semirette* AC, AC', *che formino con* AB *due angoli* $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAC'}$, *uguali ad un angolo dato.* Questi

due angoli giacciono da parti opposte del lato comune AB.

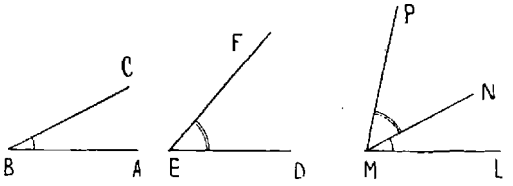
36. Si verifica ancora che:

a) *Angoli uguali ad uno stesso angolo sono uguali fra loro.*

b) *Due angoli piatti qualsiansi sono uguali fra loro.*

Somma e differenza di angoli. Multipli e summultipli di un angolo.

37. SOMMA DI DUE O PIÙ ANGOLI. — Per *sommare*

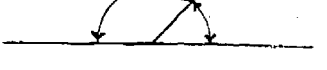


due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$, si portino a partire da un raggio ML, e da una parte di esso, due angoli *consecutivi* $\widehat{LMN}$, $\widehat{NMP}$, uguali rispettivamente ai dati. (Ciò si può fare ritagliando gli angoli dati o ricalcandoli su carta trasparente).

L'angolo $\widehat{LMP}$ così ottenuto dicesi *somma* di $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ (*addendi* o *parti*) e si scrive

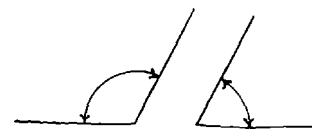
$$\widehat{LMP} = \widehat{ABC} + \widehat{DEF}.$$

In modo analogo si definisce la *somma di tre o più angoli.*



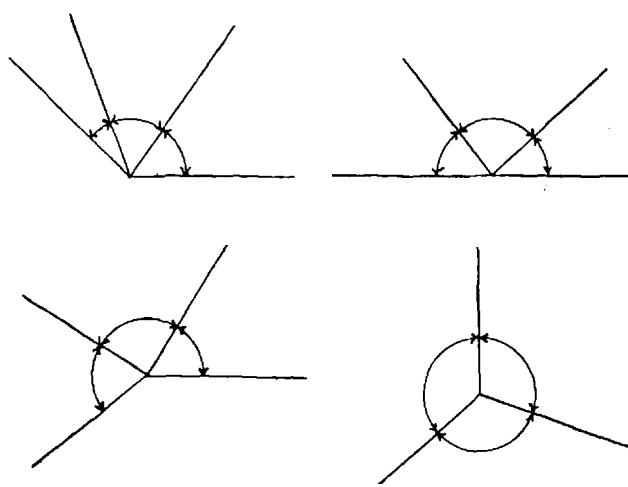
38. *La somma di due angoli adiacenti è un angolo piatto.*

39. Due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto.

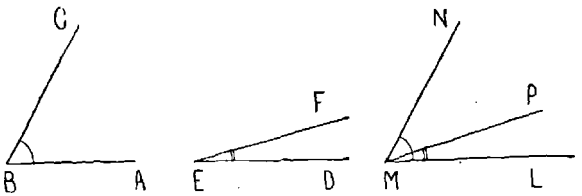


Un angolo e un suo adiacente sono supplementari.

40. La somma di più angoli convessi può essere uguale a un angolo convesso o piatto o concavo od anche a due angoli piatti (*angolo di un giro*).



41. DIFFERENZA DI DUE ANGOLI. — Per trovare la *differenza* di due angoli disuguali $A\widehat{B}C$, $D\widehat{E}F$ o, come si suol dire, per *sottrarre* dall'angolo maggiore $A\widehat{B}C$ il minore $D\widehat{E}F$, si prenda un angolo $L\widehat{M}N$ uguale al maggiore, cioè ad $A\widehat{B}C$, e si porti il minore in $L\widehat{M}P$.



L'angolo $\widehat{PMN}$ si dice *differenza* di $\widehat{ABC}$ e $\widehat{DEF}$; e si scrive

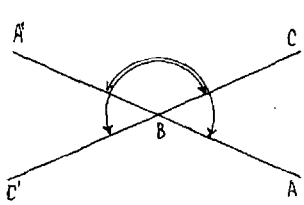
$$\widehat{PMN} = \widehat{ABC} - \widehat{DEF}.$$

42. Ritagliando degli angoli di carta si verifica che: *Se a due angoli uguali si sommano o si sottraggono angoli uguali, si ottengono angoli uguali.*

43. Ricaviamo di qui che:

Angoli supplementari di angoli uguali sono uguali.

44. Il n. prec. ci conduce ad un'altra notevole conseguenza.



Preso sul foglio del disegno un angolo $\widehat{ABC}$, se ne disegni l'opposto al vertice $\widehat{A'BC'}$.

Gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'BC'}$ sono entrambi adiacenti dello stesso angolo $\widehat{CBA'}$; cosicchè, essendo supplementari di uno stesso angolo, sono uguali fra loro (n. prec.).

Abbiamo dunque che:

Angoli opposti al vertice sono uguali fra loro.

45. MULTIPLI E SUMMULTIPLI DI UN ANGOLO. — Dato un angolo $\widehat{AOB}$, la somma di due angoli uguali ad

esso si dice *angolo doppio* di $A\widehat{O}B$ (o *multiplo* di $A\widehat{O}B$ *secondo* il numero 2).

Così le somme di tre o quattro o cinque,... angoli uguali ad $A\widehat{O}B$ si dicono *multipli* di $A\widehat{O}B$ secondo 3, o 4, o 5,...

I multipli di $A\widehat{O}B$ si indicano con

$$2\,A\widehat{O}B\ ,\ 3\,A\widehat{O}B\ ,\ 4\,A\widehat{O}B,...$$

46. Dato un angolo $A\widehat{O}B$, dopo averlo ritagliato o ricalcato in lapis su carta trasparente, si ripieghi su sè stesso in modo che i due lati si sovrappongano l'uno all'altro. La ripiegatura dà una semiretta, che divide l'angolo $A\widehat{O}B$ in due parti uguali.

Codesta semiretta si chiama *bisettrice* dell'angolo e ciascuna delle due parti si dice *metà* di $A\widehat{O}B$.

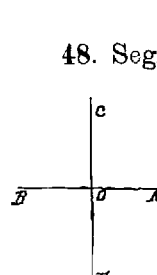
In ogni caso, quando $A\widehat{O}B$ è diviso in un certo numero di parti uguali, ciascuna di queste si dice *parte aliquota* o *summultiplo* dell'angolo dato:

$$\frac{A\widehat{O}B}{2}\ ,\ \frac{A\widehat{O}B}{3}\ ,\ \frac{A\widehat{O}B}{4}\ ,...$$

47. *Se due angoli sono uguali, sono pure uguali i loro doppi, i loro tripli, ecc. e così pure le loro metà, i loro terzi ecc.*

Angoli retti, acuti, ottusi.

48. Segnata sul foglio una retta AB e preso su di essa un punto O, si pieghi il foglio in modo da far combaciare le due semirette OA e OB.



Disteso ancora il foglio, la ripiegatura ottenuta dà una retta CD, la quale divide per metà ciascuno dei due angoli piatti $A\widehat{O}B$.

Avremo quindi

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB} \quad \text{e} \quad \widehat{BOD} = \widehat{DOA}.$$

Ma siccome $\widehat{AOC}$ e $\widehat{BOD}$ sono opposti al vertice, anch'essi sono uguali (n. 44); cosicchè sono uguali fra loro tutti e quattro gli angoli

$$\widehat{AOC},\ \widehat{COB},\ \widehat{BOD},\ \widehat{DOA},$$

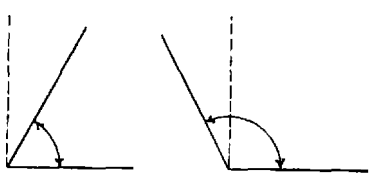
in cui il piano è diviso dalle rette AB, CD.

Ciascuno di codesti quattro angoli si dice *retto*; cioè si dice *angolo retto* la metà di un angolo piatto.

49. *Ogni angolo retto è uguale al suo supplementare;* ossia, *il supplementare di un angolo retto è pur esso un angolo retto.*

50. Come sono uguali fra loro tutti gli angoli piatti, così *tutti gli angoli retti sono uguali,* perchè sono ciascuno metà di un angolo piatto.

51. Un angolo minore di un angolo retto si dice *acuto;* un angolo maggiore di un retto si dice *ottuso.*



Angolo acuto Angolo ottuso

Se due angoli sono supplementari ma non retti, uno di essi è acuto e l'altro ottuso.

Misura degli angoli. Rapportatore.

52. Per misurare gli angoli si assume solitamente come unità fondamentale la 90^{ma} parte aliquota dell'angolo retto, la quale si chiama *grado* e si scrive $1°$.

Se un angolo è multiplo di un grado secondo un certo numero, p. es. secondo il numero 27, si dice che « la *misura* o *ampiezza* dell' angolo dato è di 27 gradi » e si scrive « 27° ».

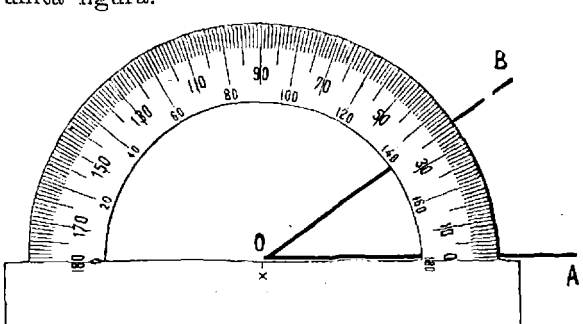
Si dirà quindi che l'ampiezza di un angolo retto è di 90° e quella di un angolo piatto di 180°.

53. Per misurare un angolo, che non sia multiplo esatto di un grado, si prendono come unità ausiliare il *minuto* che è la 60^{ma} parte aliquota di 1° e il *secondo* che è la 60^{ma} parte aliquota del minuto, ossia la 3600^{ma} parte aliquota di 1°.

Un minuto si scrive « 1′ » e un secondo « 1″ ».

Così si dirà p. es. che la ampiezza di un angolo è 35° 26′ 13″, cioè 35 gradi 26 primi 13 secondi, se l' angolo è uguale alla somma di 35 angoli uguali ad un grado, più 26 angoli uguali ad un minuto, più 13 angoli uguali ad un secondo.

54. Nel disegno per misurare gli angoli, come pure per confrontarli, sommarli ecc., si usa il SEMICIRCOLO GRADUATO O RAPPORTATORE, che è rappresentato nell' unita figura.



L' orlo curvo esterno del rapportatore è suddiviso in 180 intervalli per mezzo di tante intaccature retti-

linee, le quali prolungate passano tutte per il punto medio O dell'orlo rettilineo interno, e corrispondono alla divisione in 180 gradi dell'angolo piatto che ha il vertice in codesto punto e i lati su codesto orlo rettilineo. Le divisioni del rapportatore sono numerate di 10 in 10 tanto in un senso quanto nell'altro, affinchè si possano misurare gli angoli in entrambi i sensi.

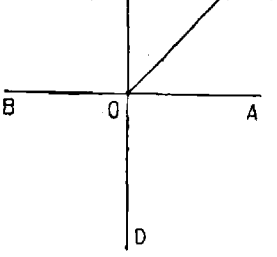
Per misurare un angolo $\widehat{AOB}$ col rapportatore si adagia questo sull'angolo come è indicato dalla precedente figura, e la graduazione numerata permette subito di assegnare l'ampiezza in gradi di $\widehat{AOB}$.

Per es. nel caso della figura l'ampiezza di $\widehat{AOB}$ è di 36° (1).

Posizioni notevoli di due rette. Squadra.

a) *Rette perpendicolari.*

55. Due rette AB, CD che, segandosi in un punto O, dividono il piano in quattro angoli retti, si dicono fra loro *perpendicolari*.

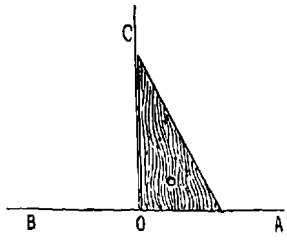


Ogni retta passante per O e diversa dalla CD forma colla AB angoli adiacenti disuguali e non è quindi perpendicolare alla AB.

Vediamo così che: *Per un punto* O *di una retta* AB *passa una sola perpendicolare alla* AB.

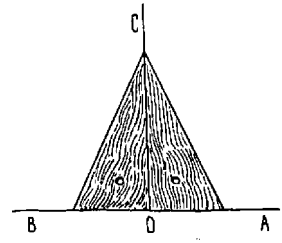
(1) Nei semicircoli graduati usuali i gradi sono, tutt' al più, divisi per metà. Per misurare gli angoli con una approssimazione maggiore il modo più naturale è di ampliare le dimensioni del semicircolo graduato e quindi suddividerne l'orlo in un numero maggiore di parti uguali. Così si fa negli istrumenti topografici ed astronomici, i quali sono forniti di circoli graduati, suddivisi in archi uguali, di cui ciascuno può anche essere di 3 o di 2 primi soltanto. Per raggiungere poi una ulteriore approssimazione si ricorre ad altri istrumenti sussidiari (nonii, microscopi a stima, microscopi a vite micrometrica...) e in tal modo si arriva a determinare gli angoli con una approssimazione che può essere persino di $^1/_{100}$ di secondo.

56. Per condurre per un punto O di una retta AB la perpendicolare OC alla AB basta, come vedemmo al numero 48, ripiegare il foglio in modo da far combaciare le due semirette OA, OB.



Nel disegno solitamente si adopera la SQUADRA, come indica l'unita figura.

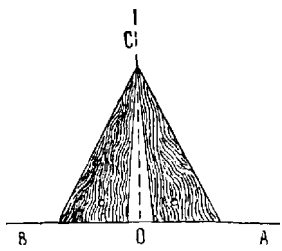
Gli angoli AOC e BOC, entrambi retti, sono uguali; perciò se ribaltiamo la squadra sul foglio dall'altra parte della OC, essa deve sovrapporsi esattamente all'angolo $\widehat{BOC}$.

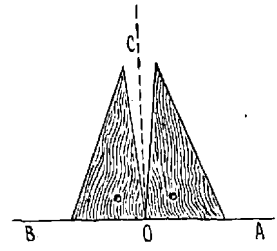


Abbiamo così un modo per *verificare* se la squadra sia esatta.

Quando si sia verificata *una volta* la squadra, si è sicuri che tutte le costruzioni che si eseguiranno con essa riusciranno esatte.

57. Nell'unita figura abbiamo esempio di squadre inesatte o, come si dice, *false*.





58. La squadra si può usare anche per condurre per un punto dato A una retta che sia perpendicolare ad una retta data a, non passante per A.

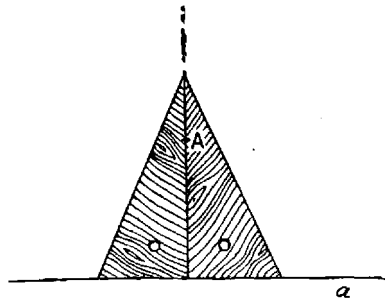
Basta perciò fare scorrere la squadra sul foglio, con uno spigolo dell'angolo retto lungo la retta *a*, finchè l'altro spigolo vada a combaciare col punto A.

La traccia di questo ultimo spigolo dà la perpendicolare cercata.

Il segmento di perpendicolare compreso fra A e il suo incontro con la retta *a* (*piede* della perpendicolare) dicesi semplicemente *perpendicolare* da A ad *a* o *distanza* del punto A dalla retta *a*.

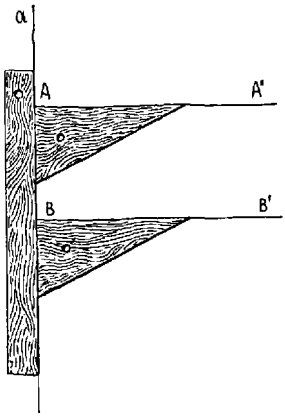
59. *Data una retta* a, *per un punto* A *fuori di essa, passa una sola perpendicolare alla retta* a.

Ciò si verifica come indica l'unita figura, cioè ribaltando la squadra (supposta esatta) intorno alla perpendicolare ottenuta al n. prec.



b) Rette parallele.

60. Disegnata con la riga una retta *a*, e, tenuta ferma la riga lungo di essa, conduciamo con la squadra la perpendicolore AA′ alla *a* in un suo punto A.



Se, tenendo sempre ferma la riga, facciamo scorrere lungo di essa la squadra, vediamo che tutti i punti dello spigolo, che prima era lungo la AA′, come pure i punti dei suoi prolungamenti, si allontanano ugualmente dalla AA′;

cosicchè la perpendicolare BB′ alla a in un punto B diverso da A giace tutta da una stessa parte della retta AA′ e perciò non la può mai incontrare.

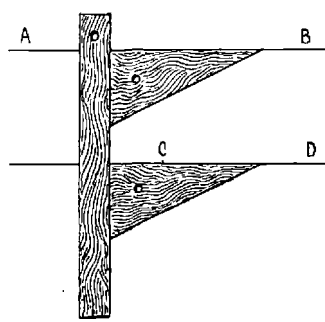
Le rette AA′, BB′ si diranno *parallele.*

In ogni caso due rette del piano si diranno *parallele*, se non hanno nessun punto comune.

61. Dalla precedente osservazione risulta che:

Tutte le perpendicolari ad una retta sono parallele fra loro.

62. La stessa osservazione del n. 60 ci suggerisce la seguente costruzione, per *condurre per un punto* C *una retta parallela ad una retta data* AB, *non passante per* C.

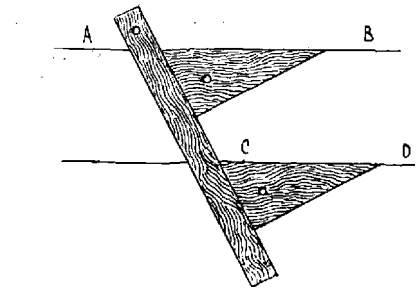


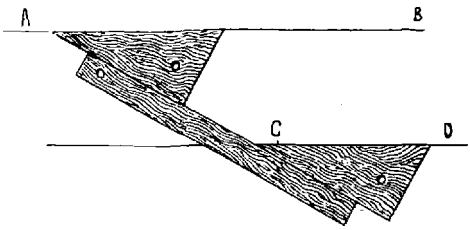
A questo scopo si collochi la squadra sul foglio con uno spigolo dell'angolo retto lungo la AB e, fatta combaciare la riga collo spigolo della squadra perpendicolare alla AB, si faccia scorrere la squadra, tenendola a contatto della riga, finchè lo spigolo che prima era sulla AB passi per C.

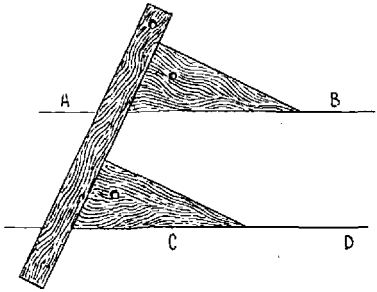
La CD sarà parallela alla AB.

63. La costruzione precedente si può eseguire anche facendo scorrere lungo la riga, invece dell'angolo retto della squadra come al n. prec., uno qualsiasi degli altri due angoli.

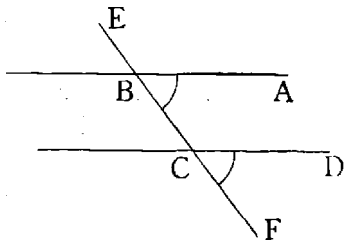
Noi vediamo che *qualunque sia l'ampiezza dell'angolo, di cui un lato scorre su di una retta fissa, l'altro lato nelle sue varie posizioni dà sempre rette parallele* (vedi le figure seguenti).





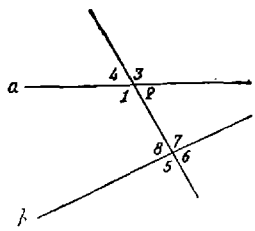


Risulta di qui che se per due punti B e C di una retta EF si conducono da una stessa parte due semirette BA, CD tali che gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{FCD}$ siano uguali, le due rette BA, CD sono parallele.



Questa osservazione è molto importante.

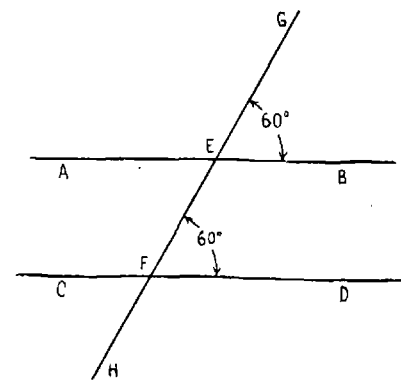
Per enunciarla in modo preciso, conviene dar dei nomi agli otto angoli che due rette a, b formano con una *trasversale* qualsiasi, cioè con una retta che le incontri entrambe.



Riferendoci all'unita figura, si dicono *corrispondenti* gli angoli 3 e 7; come pure gli angoli 2 e 6, 1 e 5, 4 e 8; cosicchè ciascuno degli otto angoli formati dalle due rette con la trasversale ha un corrispondente determinato.

Ciò permesso, l'osservazione precedente si può enunciare dicendo che:

Due rette le quali formino con una trasversale due angoli corrispondenti uguali sono parallele.



Notiamo che se sono uguali due angoli corrispondenti, sono pure uguali le altre tre coppie di angoli corrispondenti (si ricordino i nn. 43, 44).

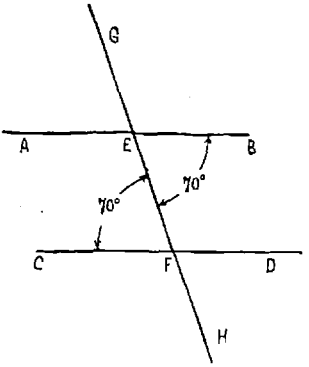
64. Date due rette segate da una trasversale, si dicono *alterni* due angoli, di cui l'uno sia l'opposto al vertice del corrispondente dell'altro.

P. es. riferendoci alla figura del n. prec., avremo che sono alterni gli angoli 3 e 5, 2 e 8, 1 e 7, 4 e 6; cosicchè ognuno degli otto angoli ha il suo alterno.

Allora come conseguenza della proposizione del n. prec. si ha che:

Due rette le quali formino con una trasversale due angoli alterni ugnali, sono parallele.

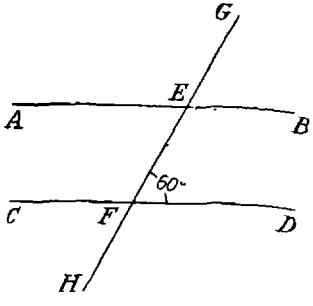
P. es. date le AB, CD e la trasversale GH, gli angoli alterni interni $F\widehat{E}B$, $E\widehat{F}C$ siano entrambi di 70°. Allora l'opposto al vertice di $E\widehat{F}C$, cioè $H\widehat{F}D$, è anch'esso di 70° (n. 43); cosicchè abbiamo che sono uguali gli angoli corrispondenti $F\widehat{E}B$, $H\widehat{F}D$, e perciò le AB, CD sono parallele (n. prec.).



65. Infine date due rette segate da una trasversale, si dicono *coniugati* due angoli giacenti dalla stessa parte della trasversale e tali che l'uno sia adiacente al corrispondente dell'altro.

P. es., riferendoci alla solita fig. del n. 63, sono coniugati gli angoli 3 e 6, 2 e 7, 1 e 8, 4 e 5.

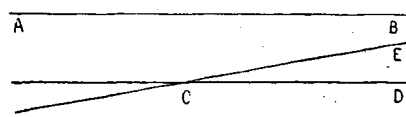
Due rette le quali formino con una trasversale due angoli coniugati supplementari sono parallele.



P. es., se date le rette AB, CD e la trasversale GH, gli angoli coniugati $F\widehat{E}B$, $D\widehat{F}E$ sono rispettivamente di 120° e 60°, l'adiacente $B\widehat{E}G$ di $F\widehat{B}E$ sarà di 60°, come $D\widehat{F}E$; e poichè $B\widehat{E}G$, $D\widehat{F}E$ sono angoli corrispondenti, le due rette AB, CD saranno parallele.

66. Per un punto C fuori di una retta AB noi sappiamo condurre, con la riga e la squadra, una parallela alla AB; e, come abbiamo visto al n. 63, questa costruzione si può eseguire in diversi modi. Ma basta osservare la figura per vedere che si deve sempre ottenere la medesima parallela.

Invero se CD è la parallela alla AB, che abbiamo trovato usando in un certo modo la riga e la squadra (p. es. come si è detto al n. 62) noi vediamo che ogni altra retta per C, diversa dalla CD, quando sia prolungata abbastanza, finisce col passare dall'altra parte della AB e perciò la sega in un punto cioè non è ad essa parallela.



Abbiamo dunque che:

Vi è una sola retta passante per un punto e parallela ad una retta (non passante per quello).

Questa importante osservazione *(postulato delle parallele)* conduce a varie conseguenze che ora enunceremo.

67. *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra di loro.*

Se, in un piano, le rette a e b, parallele alla medesima retta c, si incontrassero, per il loro punto comune passerebbero due rette parallele alla c, il che è contrario alla proposizione precedente.

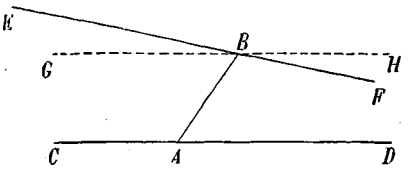
68. *Se in un piano si hanno più parallele, una retta secante rispetto ad una di queste sega anche tutte le altre.*

Se infatti una retta, che interseca una delle parallele considerate, non ne intersecasse un'altra, que-

st'ultima ammetterebbe due parallele distinte per un medesimo punto.

69. *Se due rette formano con una trasversale angoli coniugati non supplementari, le due rette si incontrano da quella parte, da cui la somma dei due angoli coniugati è minore di 180°.*

Le due rette CD, EF formino colla trasversale AB angoli coniugati non supplementari; sia precisamente $A\widehat{B}F + B\widehat{A}D$ minore di due retti. Poichè codesti due angoli insieme con $C\widehat{A}B$, $A\widehat{B}E$ danno una somma uguale a quattro retti, avremo intanto che $C\widehat{A}B + A\widehat{B}E$ è maggiore di due retti. Ora se per B, si conduce la retta GH tale che $H\widehat{B}A$ sia supplementare di $B\widehat{A}D$, essa sarà parallela alla CD (n. 65); onde risulta, pel postulato delle parallele (n. 66), che la EF, distinta dalla parallela GH, incontrerà la CD, ed è chiaro che il raggio BE, che forma colla AB e con AC angoli coniugati la cui somma supera due retti, è esterno alla striscia di piano racchiusa dalle due parallele, cosicchè sarà il raggio opposto BF quello che incontra la CD.



70. Disegnate sul foglio due rette parallele e condotta una loro trasversale qualsiasi, si verificano ritagliando la carta le seguenti proposizioni:

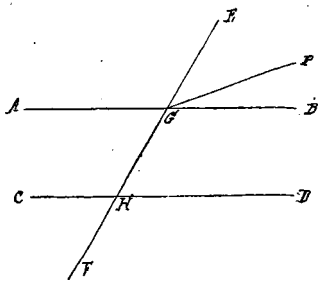
Se due rette sono parallele, esse formano con ogni trasversale

1) *angoli corrispondenti uguali;*

2) *angoli alterni uguali.*

Ciò si può anche *dimostrare* nel modo seguente.

Siano le due rette parallele AB, CD intersecate dalla trasversale EF nei punti G, H rispettivamente.



1) Scelti due qualsivogliano angoli corrispondenti per esempio $B\widehat{G}E$ e $D\widehat{H}G$, diciamo che essi sono uguali.

Supposto che siano disuguali, potremo condurre per G, dalla stessa parte di GB rispetto alla EF, la semiretta GP tale che l'angolo $P\widehat{G}E$ sia uguale a $D\widehat{H}G$. Allora le rette GP e CD, che con la trasversale EF formano angoli corrispondenti uguali sono parallele (n. 63), e pel punto G passano le due rette distinte GB, GP entrambe parallele alla CD, il che non può essere (n. 66). Abbiamo dunque veramente che gli angoli $C\widehat{H}F$, $B\widehat{G}E$ non possono essere disuguali.

2) Diciamo che gli angoli alterni, per esempio $B\widehat{G}E$, $F\widehat{A}C$, sono uguali.

Infatti essendo uguali gli angoli corrispondenti $B\widehat{G}E$, $D\widehat{H}G$, l'angolo $B\widehat{G}E$ sarà di conseguenza uguale anche all'opposto al vertice di $D\widehat{H}G$, cioè ad $F\widehat{A}C$.

71. Si vede ancora facilmente che:

Se due rette sono parallele, esse formano con ogni trasversale angoli coniugati supplementari.

Riferendoci alla fig. precedente, i due angoli coniugati $H\widehat{G}B$, $D\widehat{H}G$ sono supplementari, perchè $H\widehat{G}B$ è adiacente e quindi supplementare di $B\widehat{G}E$, che è corrispondente a $D\widehat{H}G$ e quindi uguale ad esso (n. prec.).

72. Risulta dal n. 70 che:

Se due rette sono parallele, ogni perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra.

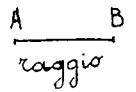
Circonferenza e cerchio. Compasso.

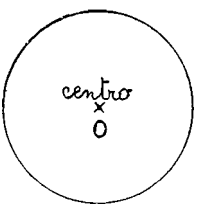
73. Puntato sul foglio con uno spillo in un punto O il capo di un filo, fissiamo al filo, ad una certa distanza da O, la punta del lapis.

Se col lapis, tenendo ben teso il filo, giriamo intorno al punto O, fino a tornare alla posizione di partenza, otteniamo sul foglio una **linea chiusa** i cui punti hanno tutti la stessa distanza da O.

Questa linea si dice una *circonferenza*.

Cioè dati un punto O ed un segmento AB, si dice *circonferenza* di *centro* O e *raggio* AB, la *linea* dei punti che hanno da O distanza uguale ad AB.





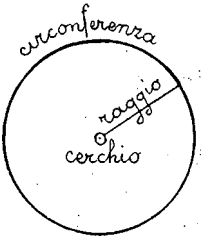
Nel disegno, per descrivere una circonferenza, si usa un COMPASSO, di cui una punta è sostituibile con una matita o con un tiralinee.

74. Come risulta dalla figura, la circonferenza divide il piano in due parti:

1.° il *cerchio* o regione piana dei punti (*interni*) la cui distanza da O è minore del raggio;

2.° la regione piana dei punti (*esterni*) la cui distanza da O è maggiore del raggio.

La circonferenza e il cerchio si designano, indicandone il centro e il raggio, e, quando non siavi possibilità di equivoco, indicando soltanto il centro.

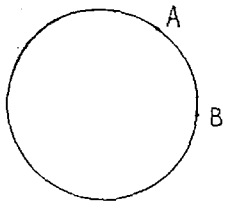


75. *Due circonferenze o due cerchi aventi ugual raggio sono uguali*, come si verifica sovrapponendoli.

Diametri e corde. Archi e settori.

76. Segnato un punto A su di una circonferenza O, questa, diversamente da quanto accade per la retta,

non resta divisa in due parti, perchè la circonferenza è una *linea chiusa*.

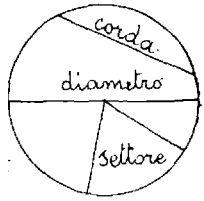


Ma se invece sulla circonferenza segniamo due punti A, B, essa resta divisa in *due* parti, che si chiamano *archi* (di circonferenza).

77. Un segmento AB, avente gli estremi sulla circonferenza, si dice *corda*.

Ad ogni arco AB del cerchio corrisponde una corda che si dice *sottesa* dall'arco.

Le corde passanti pel centro si chiamano *diametri*.



78. *I diametri di un cerchio sono tutti uguali*, perchè sono doppi del raggio.

79. Condotta una corda di un cerchio, noi, esaminando la figura, vediamo che *i punti di una corda, tolti gli estremi, sono tutti interni al cerchio.*

80. Due raggi OA, OB di un cerchio, lo dividono in due parti, che si chiamano *settori* circolari.

I due angoli $A\widehat{O}B$, l'uno convesso e l'altro concavo, si dicono *angoli al centro.*

A ciascun arco AB e a ciascun settore ABO *corrisponde* un determinato angolo al centro.

81. In modo simile a quello tenuto per i segmenti (n. 10) e per gli angoli (n. 34), si possono confrontare due archi (e settori) di una stessa circonferenza (o cerchio) o di circonferenze (o cerchi) uguali; e si può verificare se essi siano **uguali** o, in caso contrario, quale sia il *maggiore* e quale il *minore*.

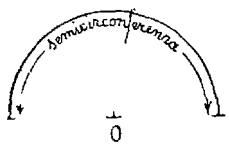
Così si verifica che:

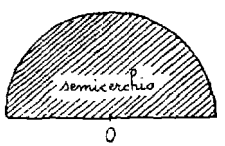
In una stessa circonferenza o cerchio e in circonferenze o cerchi uguali, ad archi o settori uguali corrispondono angoli al centro uguali, e ad archi o settori disuguali corrispondono angoli al centro disuguali nello stesso senso, e viceversa.

Nota. — Perciò, nel costruire un rapportatore, basta dividerne in 180 parti uguali la semicirconferenza esterna.

82. In particolare sono uguali i due archi in cui una circonferenza è divisa da un suo diametro e che corrispondono ad angoli al centro piatti; perciò codesti archi diconsi *semicirconferenze.*

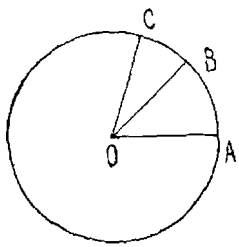
Così sono uguali i due settori in cui un cerchio





è diviso da un suo diametro; e per questa ragione essi diconsi *semicerchi.*

83. È anche manifesto in qual modo *si sommino* due o più archi o settori (della stessa circonferenza o cerchio o di circonferenze o cerchi uguali) e come si *sottragga* da un arco o settore un altro arco o settore (della stessa circonferenza o cerchio o di circonferenze o cerchi uguali).



84. Risulta senz'altro dalla figura che: *All'arco o settore somma di due o più archi o settori corrisponde un angolo al centro che è la somma degli angoli al centro corrispondenti ai singoli addendi.*

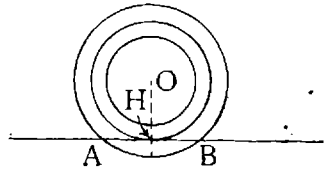
Analogamente per la differenza.

Posizioni relative di una retta e di una circonferenza.

85. Per le costruzioni col compasso è importante esaminare qui le posizioni relative di una retta e una circonferenza e di due circonferenze fra loro.

Cominciamo dal considerare una retta e una circonferenza.

Data una retta e preso un punto *qualsiasi* fuori di essa, abbassiamo da O la perpendicolare OH sulla retta.



Se con centro in O descriviamo una circonferenza di raggio minore della distanza OH di O dalla retta, vediamo che la circonferenza e la retta non hanno nessun punto comune, ossia, come si suol dire, *la retta è esterna alla circonferenza.*

Se invece, mantenendo il centro in O, prendiamo un raggio maggiore di OH, vediamo che la circonferenza *attraversa* due volte la retta, ossia *la circonferenza e la retta si segano in due punti.*

Se infine conduciamo la circonferenza di centro O che ha per raggio OH (distanza di O dalla retta) vediamo che la circonferenza e la retta hanno comune soltanto il punto H o, come si suol dire, sono *tangenti* in H.

Insomma abbiamo che:

Dati un cerchio di raggio r *e una retta avente dal centro la distanza* d,

a) *se* $d < r$ *la retta è secante;*

b) *se* $d = r$ *la retta è tangente;*

c) *se* $d > r$ *la retta è esterna al cerchio.*

86. È vero anche l'*inverso* di questo teorema, cioè:

Dato un cerchio di raggio r *e una retta avente dal centro la distanza* d:

a) *se la retta è secante è* $d < r$;

b) *se la retta è tangente è* $d = r$;

c) *se la retta è esterna al cerchio è* $d > r$.

Per dimostrare la prima parte basta notare che la distanza di una retta secante dal centro non può essere nè uguale nè maggiore del raggio, perchè in tal caso la retta sarebbe rispettivamente tangente o esterna (n. prec.).

Analogamente si dimostrano la seconda e terza parte del teorema.

87. Risulta dal n. 85 che:

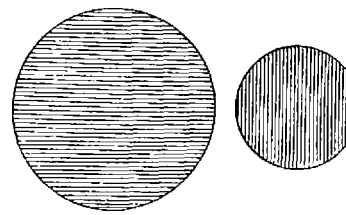
La perpendicolare ad un raggio di un cerchio in un suo estremo è tangente al cerchio.

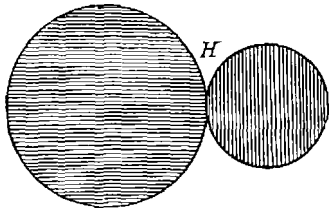
Posizioni relative di due cerchi o due circonferenze.

88. Per vedere le varie posizioni relative, in cui possono trovarsi nel piano due cerchi, ritagliamone due in carta e posiamoli sul piano.

Essi possono anzitutto *non avere nessun punto comune* o, come si suol dire, *essere esterni l'uno all'altro.*

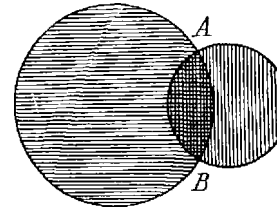
Avvicinando i due cerchi possiamo portarli in tale posizione che abbiano comune un solo punto H del contorno e nessun altro all'infuori di questo. Allora i due



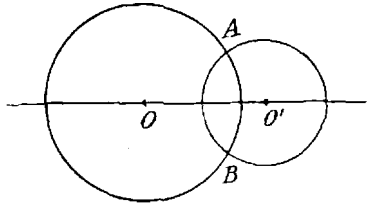


cerchi e le due circonferenze si diranno *tangenti fra loro esternamente* nel punto H (punto di contatto).

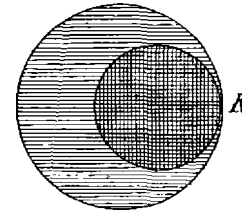
89. Movendo ancora l'un cerchio verso l'altro, avremo dapprima che *essi si ricopriranno fra loro in parte;* ed allora è manifesto che i due contorni, cioè le circonferenze relative si attraversano o, come si suol dire, *si segano l'una con l'altra in due punti* A, B.



Questi due punti A, B *giacciono da parti opposte della retta* OO′ *che congiunge i due centri.* Infatti se si piega il foglio lungo la retta OO′ in modo da far combaciare i due semipiani, le due semicirconferenze da una parte si sovrappongono esattamente alle altre due e perciò i due punti A e B vanno a coincidere.



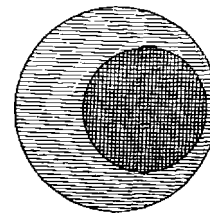
90. Riprendendo i due cerchi possiamo spostarli ancora l'uno verso l'altro finchè il minore sia tutto interno al cerchio maggiore e la circonferenza del primo abbia comune colla circonferenza del secondo un solo punto K.



Allora si dice che *il cerchio (e la circonferenza) minore è tan-*

gente internamente al cerchio (e alla circonferenza) maggiore (1).

Da ultimo, spostando ancora un poco il cerchio minore, possiamo far sì che, pur restando il cerchio minore interno all'altro, le due circonferenze non abbiano più alcun punto comune. Allora si dice senz'altro che il cerchio minore è *interno* all'altro.



91. Le osservazioni precedenti ci permettono di concludere che:

Due circonferenze nel piano:

o non hanno punti comuni (e sono l'una esterna all'altra oppure la minore è interna alla maggiore);

o sono tangenti in un punto (esternamente oppure internamente);

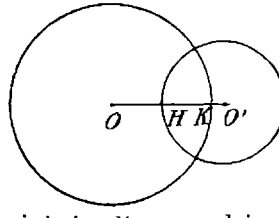
o si segano in due punti situati da parti opposte della retta dei centri.

92. Per le costruzioni che dovremo eseguire in seguito è necessario aggiungere qualche altra osservazione sul caso di due circonferenze che si segano. Siano O, O′ due circonferenze segantisi in due punti A, B e tali che il centro di ciascuna sia esterno (o almeno non interno) all'altra.

Allora la distanza OO′ dei centri è maggiore (o non minore) di ciascuno dei due raggi cosicchè le due circonferenze segheranno il segmento OO′ in due punti appartenenti ad esso. Più precisamente, siccome i due cerchi debbono ricoprirsi in parte (giacchè altrimenti

(1) È chiaro che se i due cerchi sono uguali e si portano a toccarsi internamante, si sovrappongono esattamente.

le due circonferenze o non avrebbero punti comuni o sarebbero tangenti) il segmento OO′ intersecherà prima in un punto H la circonferenza O′ e poi in un punto K la circonferenza O. Avremo quindi:



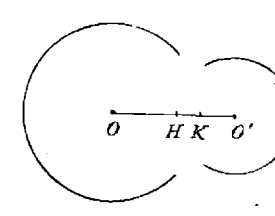
$$\begin{aligned} OO' &= OK + KO' \\ &= OK + (HO' - HK) \\ &= OK + HO' - HK \end{aligned}$$

e infine

$$OO' < OK + HO';$$

cioè *la distanza dei centri sarà minore della somma dei raggi delle due circonferenze.*

Viceversa consideriamo due circonferenze O,O′, *aventi ciascuna il centro esterno* (o non interno) *all'altra e tali che la distanza dei centri sia minore della somma dei raggi.*



Allora in primo luogo il segmento OO′, essendo maggiore di ciascun raggio, (in quanto le due circonferenze hanno ciascuna il centro esterno o non interno all' altra) intersecherà le due circonferenze O,O′ in due punti K, H rispettivamente appartenenti al segmento stesso; e siccome il segmento OO′ è per ipotesi minore della somma

$$OK + HO'$$

dei due raggi, i due segmenti OK, HO′ avranno una parte comune; ossia sul segmento OO′, andando da O ad O′, si troverà prima H e poi K. Ciò vuol dire che il punto K della circonferenza O è interno alla O′ e che il punto H della circonferenza O′ è interno alla O;

cosicchè i due cerchi che per ipotesi hanno i centri l'uno esterno (o non interno) all'altro, si ricoprono in parte e le due circonferenze si segano in due punti.

Concludiamo quindi che:

Se due circonferenze si segano e il centro di ciascuna è esterno (o non interno) all'altra, la distanza dei centri è minore della somma dei raggi; e, viceversa, se due circonferenze, aventi ciascuna il centro esterno (o non interno) all'altra, hanno fra i centri una distanza minore della somma dei raggi, le due circonferenze si segano in due punti.

93. Con analogo ragionamento si dimostra che:

Se due circonferenze si segano e il centro di ciascuna è interno (o non esterno) all'altra, la distanza dei centri è maggiore della differenza dei raggi e viceversa.

Raccogliendo in un solo enunciato questa proposizione e quella del n. prec. abbiamo che:

Se due circonferenze si segano, la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza e viceversa.

II.

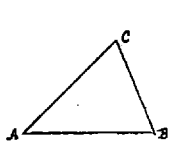
FIGURE POLIGONALI

Triangoli.

Noi abbiamo considerato dianzi alcune classi di figure (rette, segmenti, raggi, angoli, coppie di rette parallele) costituite di punti e rette o parti di retta (segmenti e semirette).

Appartengono a questa stessa categoria le *figure poligonali* (triangolo, quadrangolo....), di cui ora ci dobbiamo occupare.

94. Def. — La figura costituita da tre punti non in linea retta A, B, C, e dai tre segmenti AB, BC, CA che li congiungono a due a due, dicesi *triangolo* ABC. I tre punti dati sono i *vertici*, e i tre segmenti sono i *lati* del triangolo.

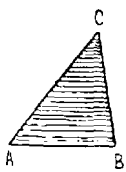


La linea chiusa costituita dai tre lati si chiama *contorno* del triangolo; e il segmento somma dei tre lati si dice *perimetro*.

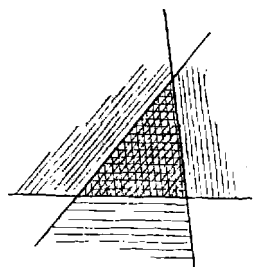
Gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$, contenenti rispettivamente i segmenti CA, AB, BC si dicono *angoli* (*interni*) *del triangolo*.

I sei angoli adiacenti (n. 28) a codesti tre angoli diconsi *angoli esterni* del triangolo. Un angolo esterno si dice *opposto* a ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.

Talvolta, pensando tacitamente alla posizione in cui si immagina il triangolo, ad uno dei suoi lati si dà il nome di *base*. Questo nome si usa particolarmente nel caso di un triangolo avente due lati uguali per designare il terzo lato. Un triangolo avente due lati uguali si dice *isoscele*. In un triangolo isoscele gli angoli interni compresi fra la base e i lati uguali si dicono *angoli alla base*. Parlando del *vertice* di un triangolo isoscele, senza nominare di quale si tratti, si intende riferirsi a quello opposto alla base; e la distanza del vertice dalla base dicesi *altezza* del triangolo (relativo al lato preso come base).



95. Il contorno di un triangolo divide il piano in *due parti*, di cui una è limitata l'altra invece è illimitata. La parte limitata (che nell'unita figura è tratteggiata) si dice *superficie del triangolo* e talvolta anche semplicemente triangolo.



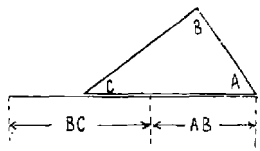
La superficie del triangolo è la parte di piano comune ai tre angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$, od anche a quei tre semipiani che sono limitati dai lati e contengono il triangolo.

Relazioni fra i lati di un triangolo.

96. Teor. — *In un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.*

Di questo teor. è facile dare una verifica immediata.

Disegnato sul foglio un triangolo ABC, distendiamo un filo da A a C lungo i lati AB e BC. Se



lo stesso tratto di filo si distende sulla semiretta AC a partire da A, esso ricopre il lato AC e ne sopravanza una parte.

Lo stesso si può ripetere anche per il lato AB e per il lato BC cosicchè il teor. è verificato.

Del resto questo teor. è una conseguenza di un'altra osservazione fatta nel Capitolo precedente (n. 92).

Notiamo anzitutto che basta dimostrare il teorema per quello dei tre lati del triangolo che è maggiore (o non minore) degli altri due; perchè se p. es. CB è minore (o uguale) ad AC, sarà naturalmente CB minore della somma di AC e AB.

Preso dunque il lato maggiore (o non minore degli altri due) AC, si ricordi che se due circonferenze si segano e hanno ciascuna il centro esterno (o non interno) all'altra, la distanza dei centri è minore della somma dei raggi (n. 92).

Allora si noti che, essendo AC maggiore (o non minore) tanto di AB quanto di CB, le due circonferenze di centri A e C e di raggi AB e CB rispettivamente hanno ciascuna il centro esterno (o non interno) all'altra. Di più esse si segano nel punto B e nel punto in cui va a cadere B quando si ribalta il triangolo ABC sul piano intorno al lato AC. Perciò la distanza AC dei centri sarà minore della somma dei raggi AB, CB.

97. Cor. — *In un triangolo ciascun lato è minore della differenza degli altri due.*

Infatti se, riferendoci alla fig. del n. prec.), vogliamo dimostrare che il lato AB è maggiore della differenza degli altri due, ricordiamo la disuguaglianza (n. prec.)

$$AB + BC > AC$$

e sottragghiamo BC da una parte e dall'altra. Avremo

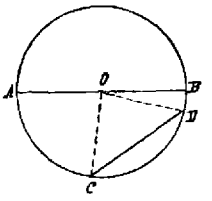
$$AB > AC - BC.$$

E analogamente si dimostra

$$BC > AC - AB, \quad AC > BC - AB.$$

98. Cor. — *In un cerchio un diametro è maggiore di ogni altra corda,* non passante pel centro.

Dati nel cerchio O il diametro AB e la corda CD non passante per il centro, i tre punti C, D, O, determinano un triangolo; e in esso CD è minore della somma degli altri due lati OC, OD (n. prec.). Ma i segmenti OC, OD, OA, OB come raggi di uno stesso cerchio sono tutti uguali, onde concludiamo che CD è minore della somma di OA e OB, cioè appunto del diametro AB.

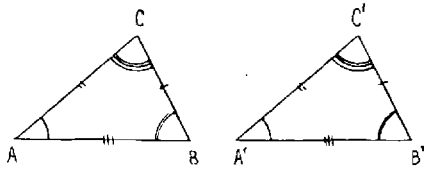


Triangoli uguali.

99. Due triangoli possono essere **uguali** o **disuguali.**

Per verificare se due triangoli dati ABC, A′B′C′ siano uguali, si prova, ritagliandone uno in carta e collocandolo opportunamente sull'altro, se essi siano *sovrapponibili* esattamente.

Se accade che A′B′C′ si possa collocare su ABC in modo che i tre vertici A′, B′, C′ del primo vadano proprio a cadere su A, B, C rispettivamente, diremo che i due triangoli sono uguali e scriveremo



$$ABC = A'B'C'.$$

Allora i lati A′B′, B′C′, C′A′ di A′B′C′ vanno a sovrapporsi esattamente ai lati AB, BC, CA di ABC;

cioè fra gli *elementi* (*lati* ed *angoli*) dei due triangoli si hanno le seguenti sei uguaglianze

$$AB = A'B' \ , \ BC = B'C' \ , \ CA = C'A',$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \ , \ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \ , \ \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}.$$

Criteri di uguaglianza e costruzioni di triangoli.

100. Per poter affermare che due triangoli sono uguali non occorre verificar proprio tutte e sei le uguaglianze indicate al n. prec., ma basta assicurarsi che ne sussistono alcune, perchè le altre sono allora verificate di conseguenza.

Si hanno invero i tre *criteri di uguaglianza dei* triangoli che noi verificheremo nei nn. 101, 105, 107. Essi ci condurranno ad altrettanti modi di costruzione di un triangolo, di cui siano prefissati tre elementi.

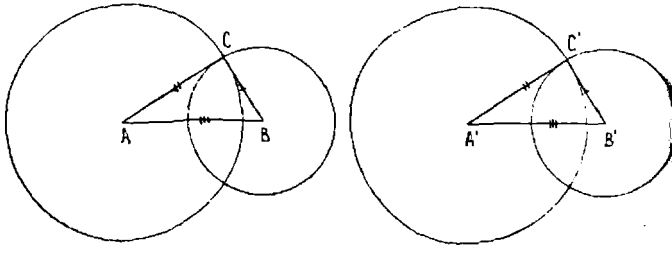
101. I CRITERIO D'UGUAGLIANZA. — *Se due triangoli hanno uguali rispettivamente i tre lati, essi sono uguali:* e quindi hanno uguali anche gli angoli opposti ai lati uguali.

Dati i due triangoli ABC, A'B'C', in cui è

$$AB = A'B' \ , \ BC = B'C' \ , \ CA = C'A',$$

diciamo che i due triangoli sono uguali.

Si descrivano col compasso le due circonferenze



che hanno i centri A e B e passano per C e similmente le due circonferenze di centri A′ e B′ e passanti per C′.

Le due prime circonferenze si segano nel punto C e in un altro punto da parte opposta rispetto alla AB; così le altre due circonferenze si segano in C′ e in un altro punto situato da banda opposta rispetto alla A′B′.

Ora, essendo

$$A'C' = AC \ , \ B'C' = BC$$

le due circonferenze A′ , B′ sono rispettivamente uguali alle circonferenze A, B.

Ritagliamo allora la figura costituita dal triangolo A′B′C′ e dalle due circonferenze A′, B′ e portiamola sull'altra figura analoga, in modo che il segmento A′B′ si adagi su AB e il triangolo A′B′C′ cada rispetto alla AB dalla stessa parte di ABC.

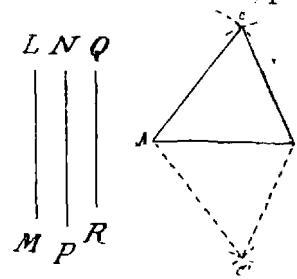
Le due circonferenze A′, B′ andranno a coincidere con le circonferenze A, B rispettivamente e il punto C′ di intersezione di A′, B′ cadrà necessariamente nel punto C, comune alle circonferenze A, B e giacente con C′ dalla stessa parte di AB.

Si verifica in tal modo che i due triangoli sono sovrapponibili e quindi uguali.

102. Poichè due triangoli aventi i lati ordinatamente uguali sono uguali, quando si vorrà costruire un triangolo uguale ad un triangolo dato (*trasportare il triangolo dato*) basterà costruire un triangolo avente i tre lati ordinatamente uguali a quelli del dato. Siamo così condotti al seguente

Probl. — *Costruire un triangolo avente i lati rispettivamente uguali a tre segmenti dati;* o come si dice solitamente: *Costruire un triangolo dati i tre lati.*

Se sono LM, NP, QR i tre segmenti dati ed NP è maggiore degli altri due (o almeno non minore) prendiamo come base del triangolo un segmento AB = NP e descriviamo la circonferenza di centro A e raggio LM e la circonferenza di centro B e raggio QR.



Se queste due circonferenze si segano e C è uno dei due punti che esse hanno comune, il triangolo ABC soddisfa al problema, perchè abbiamo

$$AB = PN \ , \ AC = LM \ , \ BC = QR.$$

E l'altro punto C' di intersezione delle due circonferenze dà un altro triangolo ABC' (uguale ad ABC) pur esso soddisfacente al problema.

Nota. — Per vedere quando accada veramente che le due circonferenze dianzi descritte si segano, notiamo che, siccome la distanza AB dei due centri è maggiore (o non minore) di ognuno dei due raggi, ciascuna di esse ha il centro esterno (o non interno) all'altra; e allora risulta dal n. 92 che affinchè le due circonferenze si seghino occorre e basta che AB sia minore della somma dei due raggi, cioè

$$NP < LM + QR.$$

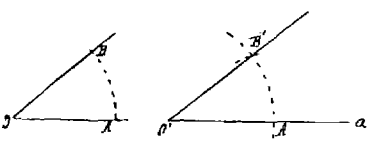
Abbiamo dunque che *con tre segmenti si può costruire un triangolo sempre e soltanto quando quello fra essi che è maggiore (o non minore) di ciascuno degli altri due, è minore della loro somma.*

Ciò è in accordo col n. 96.

103. Come caso particolare del *trasporto del triangolo* possiamo risolvere anche il problema seguente (*trasporto dell' angolo*).

Probl. — *Costruire sopra una semiretta data e da una banda assegnata rispetto ad essa, l'angolo uguale ad un angolo dato.*

Dati la semiretta a' d'origine O' e un angolo di vertice O, con centro in O e raggio arbitrario, si descriva un arco che intersechi in A, B i due lati dell'angolo dato. Allora, centro in O' si descriva il cerchio di raggio uguale ad OA, il quale intersechi a' nel punto A', e dal punto A' come centro, e con apertura di compasso uguale ad AB si tagli sulla circonferenza O' dalla banda prefissata rispetto ad a' la corda $A'B'$. L'angolo $A'\widehat{O'}B'$ è uguale all'angolo dato $A\widehat{O}B$.



Infatti i due triangoli isosceli ABO, $A'B'O'$ hanno uguali per costruzione le basi AB, $A'B'$ e i lati AO, $A'O'$ (e BO, $B'O'$) e quindi sono uguali (n. 101) ed hanno uguali gli angoli al vertice.

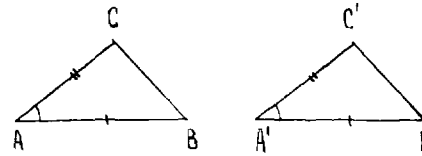
104. Nota. — La costruzione or ora indicata permette di *trasportare* un angolo usando soltanto la riga e il compasso.

105. II CRITERIO D'UGUAGLIANZA DEI TRIANGOLI. — *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, essi sono uguali;* e quindi hanno rispettivamente uguali anche i terzi lati e gli angoli opposti ai lati uguali.

Siano due triangoli ABC, $A'B'C'$ tali che sia

$$AB = A'B' \ , \ AC = A'C' \ , \ B\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C'.$$

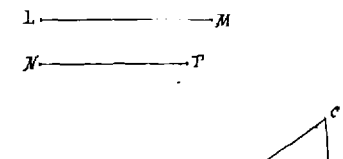
Per verificare che i due triangoli sono uguali, ritagliamo A′B′C′ e portiamolo su ABC, sovrapponendo l'angolo $\widehat{A'}$ all'angolo uguale $\widehat{A}$, in modo che la semiretta A′B′ si disponga sulla semiretta AB. Siccome, per ipotesi, i segmenti AB, AC sono uguali rispettivamente ad A′B′, A′C′, i punti B′, C′ andranno a coincidere con B, C rispettivamente e quindi i due triangoli si ricopriranno esattamente e avremo



$$B'C' = BC \ , \ \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'} \ , \ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$

106. Questo secondo criterio suggerisce la seguente costruzione (cfr. n. 102).

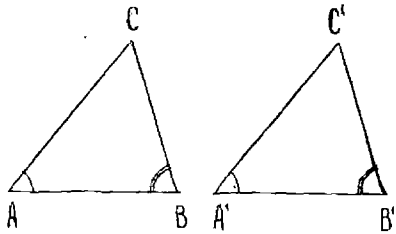
Probl. — *Costruire un triangolo che abbia due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali a due segmenti e ad un angolo dati;* o come si dice solitamente: *Costruire un triangolo dati due lati e l'angolo compreso.*



Siano prefissati i lati LM, NP e l'angolo $\widehat{V}$. Costruito un angolo $\widehat{A}$ uguale a $\widehat{V}$, sui lati di questo si prendano i segmenti AB, AC uguali ad LM, NP rispettivamente. Il triangolo ABC soddisfa al problema.

107. III CRITERIO D'UGUAGLIANZA. — *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli e il lato comune, i due triangoli sono uguali;* e quindi hanno

uguali i terzi angoli e i lati opposti agli angoli uguali.



Siano ABC, A′B′C′ due triangoli tali che

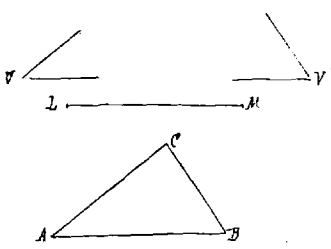
$$AB = A'B' \ , \ \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \ , \ \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$

Per verificare che i due triangoli sono uguali, portiamo A′B′C′ su ABC in modo che il lato A′B′ si sovrapponga al lato uguale AB e il vertice C′ cada da quella stessa parte di AB da cui cade C.

Allora, siccome gli angoli $\widehat{C'A'B'}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono uguali rispettivamenle a $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ABC}$, la semiretta A′C′ andrà a coincidere con AC e la semiretta B′C′ con BC, talchè il punto C′ cadrà precisamente in C.

È così verificato che i due triangoli A′B′C′, ABC sono sovrapponibili esattamente.

108. Probl. — *Costruire un triangolo che abbia due angoli e il lato, comune ad essi, uguali rispettivamente a due angoli e ad un segmento prefissati;* o, come si dice solitamente: *Costruire un triangolo, dati due angoli e il lato comune.*



Dati il segmento LM e gli angoli $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$, per costruire un triangolo avente un lato e due angoli adiacenti uguali ordinatamente ad LM, $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$, si prenda un segmento AB uguale ad LM e per A, B si conducano da una stessa banda rispetto alla AB, due se-

mirette le quali formino colle semirette AB, BA due angoli uguali rispettivamente a $\widehat{V}, \widehat{V}'$. Se le due semirette dianzi condotte si incontrano in un punto C, il triangolo ABC soddisfa al problema.

Nota. Le due semirette dianzi condotte si incontrano e vi è un triangolo ABC soddisfacente al problema, sempre e soltanto se la somma di V e V′ è minore di 180° (n. 69).

109. Ai nn. 102, 106, 108 abbiamo visto come si costruisca un triangolo di cui siano dati:

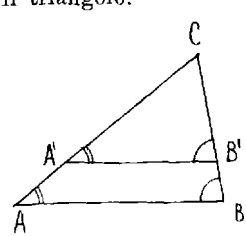
a) *i tre lati;*

b) *due lati e l'angolo compreso;*

c) *due angoli e il lato comune.*

Ora notiamo in primo luogo che, mentre nel caso *b)* la costruzione riesce sempre, comunque siansi presi i due segmenti e l'angolo, invece nei casi *a)* e *c)* gli elementi dati debbono soddisfare ad una condizione; precisamente nel caso *a)* i tre segmenti si debbono scegliere in modo che quello di essi che è maggiore (o non minore) degli altri due sia minore della somma di questi ultimi: e nel caso *c)* i due angoli dati debbono avere una somma minore di due retti (o 180°).

In secondo luogo poi osserviamo che, dopo i tre casi *a) b) c)* si presenterebbe come naturale di proporsi di costruire un triangolo di cui siano dati i tre angoli; ma è facile vedere che vi sono infiniti triangoli che hanno gli angoli ordinatamente uguali ad un triangolo, ossia che i tre angoli non determinano il triangolo.



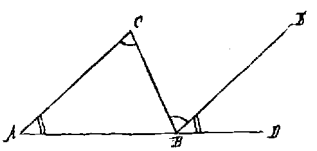
Infatti se in un triangolo ABC si conduce per un punto A′ del lato AC la parallela al lato AB fino a incontrare in B′ il lato BC, il triangolo A′B′C′ ha (n. 70) gli angoli ordinatamente uguali a quelli di ABC.

Ciò dipende dal fatto che dei tre angoli di un triangolo, due soli si possono prefissare a nostro arbitrio, dopo di che l'ampiezza del terzo resta determinata. Questo risulta dal teorema fondamentale che dimostreremo nel n. seguente.

Somma degli angoli di un triangolo.

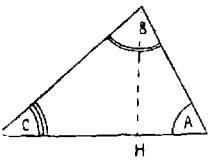
110. Teor. — *La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti, ossia a 180°.*

Dato un triangolo ABC, diciamo che la somma di $B\widehat{A}C$, $C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}B$ è uguale a due retti.

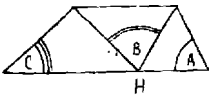


Prolungato invero AB in D e condotta per B la parallela BE ad AC avremo che sono uguali gli angoli $A\widehat{C}B$, $E\widehat{B}C$, come alterni interni formati dalle parallele AC, BE colla trasversale BC (n. 70), e gli angoli $B\widehat{A}C$, $D\widehat{B}E$ come corrispondenti rispetto alle medesime parallele e alla trasversale AB. Avremo quindi che la somma di $A\widehat{C}B$, $C\widehat{B}A$ e $B\widehat{A}C$ è uguale alla somma di $C\widehat{B}A$, $E\widehat{B}C$ e $D\widehat{B}E$, cioè appunto a due retti.

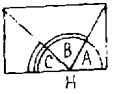
111. Del precedente teorema si può dare la seguente verifica. Ritagliato nella carta un triangolo ABC, guardiamo quale sia il suo lato maggiore (1).



Se, come nella nostra figura, codesto lato è AC, abbassiamo da B la perpendicolare BH su AC, servendoci della squadra o piegando la carta in modo che la piega passi per B e il lato AC si ripieghi su sè stesso.



Se allora pieghiamo le tre punte del triangolo in maniera che



(1) Questa verifica si può compiere anche se AB non è il lato maggiore purchè non sia adiacente ad un angolo ottuso.

i tre vertici risultino riuniti in H, vediamo che la somma dei tre angoli del triangolo dà un angolo di 180°.

112. Risulta dalla dimostrazione del n. 110 che *l'angolo esterno* $D\widehat{B}C$ *è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacienti* $A\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}C$ e quindi che *in un triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.*

113. Cor. — *Se due angoli di un triangolo sono uguali rispettivamente a due angoli di un altro triangolo anche i rimanenti angoli sono uguali.*

114. Teor. — *Se due triangoli hanno uguali due angoli ed un lato non comune a codesti due angoli (ed ugualmente disposto rispetto ad essi nei due triangoli) i due triangoli sono uguali.*

Basta infatti notare che, pel n. prec., i due triangoli hanno uguale anche il terzo angolo: e allora si conclude in base al III criterio (n. 107) che i due triangoli sono uguali.

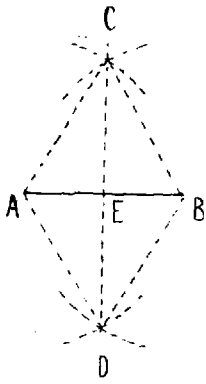
115. Nota. — Di qui e dal n. 107 discende che si può concludere che *due triangoli sono uguali non appena si sappia ch'essi hanno uguali due angoli e un lato*, (purchè questi due angoli e questo lato siano ugualmente disposti nei due triangoli).

Applicazioni e triangoli particolari.

a) Costruzioni con la riga e il compasso.

Come applicazione dei criteri di uguaglianza dei triangoli possiamo anzitutto mostrare in qual modo si possano eseguire alcune costruzioni fondamentali del disegno usando soltanto la riga e il compasso.

116. Probl. — *Determinare il punto medio di un segmento dato.*



Dato un segmento AB, si descrivano le due circonferenze uguali, di centro A e B, e di raggio uguale al dato segmento AB.

Queste due circonferenze si segano in due punti C, D cadenti da bande opposte rispetto alla AB (n. 92). Diciamo che il punto E in cui la CD interseca il segmento AB è il punto medio di questo segmento.

Infatti noi notiamo anzitutto che i triangoli ACD, BCD sono uguali (n. 101), in quanto hanno comune il lato CD ed uguali i lati AB e BC, AD e BD.

Sono quindi uguali gli angoli $\widehat{ACE}$ e $\widehat{BCE}$ e quindi i triangoli AEC, BEC in quanto hanno comune il lato EC e uguali i lati AC e BC e gli angoli $\widehat{ACE}$, $\widehat{BCE}$ (n. 105).

Si conclude di qui che è veramente

$$AE = EB.$$

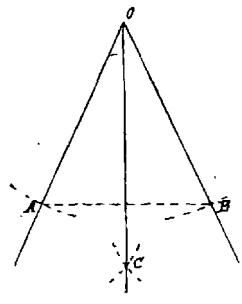
117. Nota. — La costruzione prec. riesce ugualmente, quando il raggio delle due circonferenze uguali di centro A e B si assuma uguale, anzichè ad AB, ad un qualsiasi segmento maggiore della metà di AB (nn. 92, 93).

Notiamo poi che dalla uguaglianza dei triangoli AEC, BEC risulta che gli angoli adiacenti $\widehat{AEC}$, $\widehat{BEC}$ sono uguali, ossia che la retta CD è perpendicolare ad AB.

Codesta retta CD, perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio si dice *asse* del segmento.

118. Probl. — *Bisecare un angolo dato.*

Dato l'angolo $\widehat{O}$, si descriva, centro in O, una circonferenza di raggio arbitrario, la quale interse-



cherà i due lati di $\widehat{O}$ in due punti A, B.

Facendo centro in A e B, col raggio medesimo si descrivano due archi di circonferenza, i quali si incontrino in un punto C.

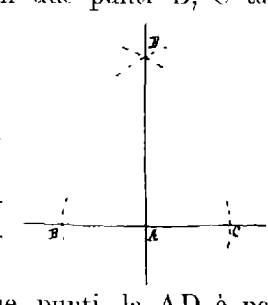
I due triangoli AOC, BOC sono per costruzione uguali, avendo i lati ordinatamente uguali, onde OC è la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ (cfr. il n. 46).

119. Nota. — La costruzione prec. permette anche di *bisecare un arco*, in quanto basta a tale scopo bisecare l'angolo al centro corrispondente.

120. Probl — *Condurre da un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

Bisogna distinguere due casi secondo che il punto dato appartiene o no alla retta data.

1) Sia data la retta a e il punto A su di essa. Descritta, centro in A, una circonferenza di raggio arbitrario, questa interseca la a in due punti B, C tali che A è il punto medio del segmento BC. Allora, centro in B e in C, si descrivano due circonferenze di raggio uguale ad un segmento maggiore di AB. Codeste due circonferenze si intersecano in due punti equidistanti da B e da C (n. 92).

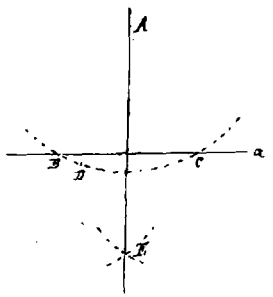


Se D è uno di codesti due punti, la AD è perpendicolare ad a.

Infatti i due triangoli ABD, ACD aventi il lato AD comune e gli altri due lati rispettivamente uguali

sono uguali (n. 101) onde risulta che i due angoli adiacenti $\widehat{BAD}$, $\widehat{CAD}$ sono uguali e quindi retti (n. 48).

2) Data la retta a e il punto A fuori di essa, si prenda un punto D che cada rispetto alla a da banda opposta di A, e, centro in A, si descriva la circonferenza di raggio AD. La circonferenza tracciata interseca in due punti B e C la a (n. 85). Le due circonferenze di centri B e C, e di raggio $BA = CA$ si intersecano oltre che in A in un secondo punto E (che cade rispetto ad a dalla parte opposta di A): e la retta AE è la perpendicolare cercata.

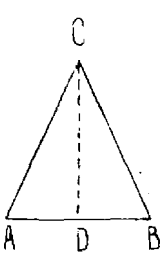


Ciò risulta con un ragionamento analogo a quello del n. 116.

b) Triangoli isosceli.

Le costruzioni precedenti mettono in luce alcune proprietà notevoli dei triangoli isosceli, che qui enunciamo e dimostriamo separatamente.

121. Teor. — *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali e, viceversa, se un triangolo ha due angoli uguali, i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.*



a) Se nel triangolo ABC è

$$AC = BC.$$

si congiunga il vertice C col punto medio D della base, cioè si conduca la *mediana* relativa alla base. Allora i due triangoli ADC, BDC, aventi comune il lato CD e uguali ordinatamente gli altri

due lati, sono uguali (n. 101), talchè avremo

$$\widehat{BAC} = \widehat{ABC}.$$

b) Supponiamo in secondo luogo che nel triangolo ABC sia

$$\widehat{BAC} = \widehat{ABC}.$$

Condotta la bisettrice CD dell'angolo $\widehat{C}$, il triangolo dato resta diviso in due triangoli ADC, BDC che sono uguali, in quanto hanno uguali gli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$ e hanno comune il lato CD, che è, nei due triangoli, ugualmente posto rispetto agli angoli uguali (n. 115). Si conclude di qui

$$AC = BC.$$

122. Dal teor. prec. risulta in particolare che *ogni triangolo equilatero è anche equiangolo* (cioè ha i tre angoli uguali) e viceversa.

Poichè la somma di codesti tre angoli è di 180°, concludiamo che *gli angoli del triangolo equilatero hanno ciascuno l'ampiezza di* 60°.

123. Nota. — Risulta dalla dimostrazione del n. 121 che in un triangolo isoscele la mediana relativa alla base biseca l'angolo al vertice ed è perpendicolare alla base, o, in altre parole:

In un triangolo isoscele coincidono la mediana, la bisettrice e l'altezza dell'angolo al vertice.

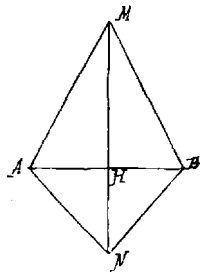
124. Congiungendo in un cerchio gli estremi di una corda AB col centro O otteniamo un triangolo isoscele avente il vertice nel centro. Allora dal n. prec. risultano senz'altro i seguenti tre corollari:

a) *In un cerchio la perpendicolare condotta ad una corda nel suo punto di mezzo passa pel centro, cioè è un diametro.*

b) *Il diametro di un cerchio che dimezza una corda è perpendicolare ad essa.*

c) *Il diametro perpendicolare ad una corda la dimezza.*

125. Dato un segmento AB consideriamo tutti i triangoli isosceli aventi la base AB. Risulta dal n. prec. che i vertici di codesti triangoli si trovano tutti sulla perpendicolare HM ad AB nel suo punto medio.



Viceversa se congiungiamo un qualsiasi punto N di codesta perpendicolare con A e B otteniamo un triangolo ABN, che è isoscele sulla base AB, perchè i due triangoli AHN, BHN, sono uguali in quanto hanno comune il lato HN e uguali i lati AH, e BH e gli angoli $\widehat{AHN}$ e $\widehat{BHN}$ (n. 105).

Questa doppia proprietà della retta HM si esprime dicendo che:

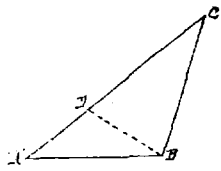
La perpendicolare ad un segmento nel suo punto medio (asse del segmento) *è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi.*

126. In base ai teoremi dei nn. 121, 112 si può stabilire il seguente teorema che per altro (giova avvertirlo) non è necessario per il seguito.

TEOR. — *Se in un triangolo due lati non sono uguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell' angolo opposto al lato minore; e reciprocamente, se due angoli non sono uguali, il lato opposto all' angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore.*

In primo luogo, nel triangolo ABC sia CA > BC: diciamo che è $\widehat{CBA} > \widehat{BAC}$.

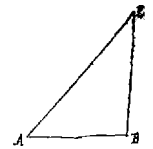
Siccome è CA > BC, sul raggio CA esiste un punto D, interno al segmento CA, tale che è CD = CB.



Poichè D è interno a CA, il raggio BD è interno all'angolo CBA, ed è perciò $\widehat{CBA} > \widehat{CBD}$. Ma il triangolo BCD è per costruzione isoscele, onde risulta (n. 111) $\widehat{CBD} = \widehat{BDC}$; e d'altra parte l'angolo $\widehat{BDC}$ è esterno rispetto al triangolo ABD ed è perciò maggiore dell'interno opposto $\widehat{BAC}$ (n. 112). Abbiamo dunque le tre relazioni

$$\widehat{CBA} > \widehat{CBD} \ , \ \widehat{CBD} = \widehat{BDC} \ , \ \widehat{BDC} > \widehat{BAC}$$

dalle quali risulta che veramente l'angolo $\widehat{CBA}$, opposto al lato AC maggiore di BC, è maggiore dell'angolo $\widehat{BAC}$, opposto al lato BC.



In secondo luogo nel triangolo ABC sia $\widehat{CBA} > \widehat{BAC}$: diciamo che è $AC > BC$.

Non può essere infatti $AC = BC$, giacchè sarebbe in tal caso (n. 121)

$$\widehat{CBA} = \widehat{BAC};$$

nè può aversi $AC < BC$ perchè allora avremmo $\widehat{CBA} < \widehat{BAC}$.

c) *Triangoli rettangoli.*

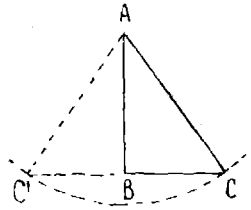
127. Un'altra classe notevole di triangoli è quella dei *triangoli rettangoli,* cioè aventi un angolo retto. Gli altri due angoli saranno acuti e *complementari* (n. 110), cioè tali che la loro somma è un angolo retto (o 90°). I due lati dell'angolo retto si dicono *cateti*, e il terzo lato, opposto all'angolo retto, si dice *ipotenusa.*

128. Teor. — *L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è maggiore di ciascuno dei cateti.*

Dato il triangolo ABC rettangolo in B, diciamo che è

$$AB < AC.$$

Infatti si ribalti il triangolo ABC intorno ad AB in ABC'.



Poichè i due angoli $A\widehat{B}C$, $A\widehat{B}C'$ sono retti, BC' giacerà sul prolungamento di CB; e poichè AC' = AC, la circonferenza di centro A e raggio AC passerà, oltre che per A, anche per C'; cosicchè il segmento CC', in quanto è una corda di codesta circonferenza sarà (n. 79) tutto (tolti gli estremi) interno ad essa. In particolare sarà interno alla detta circonferenza il punto B e avremo veramente

$$AB < AC.$$

129. Il teor. prec. discende anche come corollario dal teor. del n. 126, in quanto l'ipotenusa è opposta all'angolo retto, che è maggiore degli altri due angoli del triangolo rettangolo.

130. Risulta dai nn. 101, 105, 107 che *due triangoli rettangoli sono uguali se hanno ordinatamente uguali:*

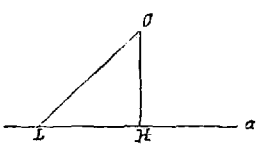
i due cateti;

oppure *un cateto e l'angolo acuto adiacente;*

oppure *un cateto e l'angolo acuto opposto;*

oppure *l'ipotenusa e un cateto.*

131. Data una retta *a* e un punto O fuori di essa, ogni segmento OL congiungente il punto O con un punto L di *a*, distinto dalla perpendicolare OH, si suol chiamare *obliqua* condotta da O alla retta *a*; e il segmento HL compreso fra il *piede* H della perpendicolare e il *piede* L dell'obliqua, si chiama *proiezione dell'obliqua sulla retta a.*



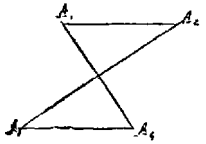
132. L'alunno dimostri come esercizio i seguenti due teoremi:

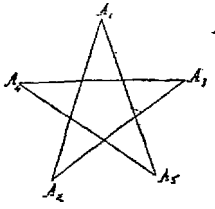
134. Analogamente a quanto si è fatto pel triangolo (n. 95) si definisce la *superficie del quadrangolo* come parte di piano comune ai quattro angoli di esso od anche a quei quattro semipiani che sono limitati dai lati e contengono il quadrangolo.

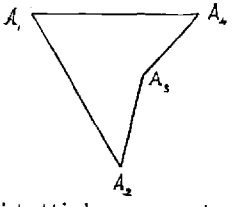
135. In modo analogo al n. 133 si definiscono il poligono a cinque lati o *pentagono,* il poligono a sei lati o *esagono,....,* e, in generale, il poligono ad un numero n qualsiasi di lati.

136. Il concetto di poligono si può estendere come è suggerito dalle unite figure.

Si hanno così poligoni *intrecciati,* vale a dire tali che due lati non consecutivi si intersecano, cioè hanno qualche punto comune: e poligoni *concavi,* cioè tali



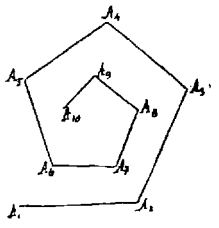




che un lato, almeno, non lascia i vertici tutti da una parte.

Un poligono non intrecciato dicesi, per contrapposto, *sciolto:* e un poligono non concavo (cioè un poligono nel senso del n. 135) si dice *convesso.*

137. Infine un'altra estensione del concetto di poligono si ha considerando le *linee spezzate* o *poligonali,* di cui è dato qualche esempio dalle unite figure.





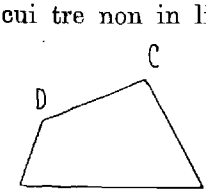
a) *Data una retta e un punto fuori di essa, la perpendicolare abbassata dal punto sulla retta è minore di ogni obliqua condotta dal punto alla retta; e di due oblique condotte dal punto alla retta l'una è maggiore, uguale o minore dell'altra, secondo che la proiezione della prima è maggiore, uguale o minore della proiezione della seconda.*

b) *Due triangoli rettangoli aventi rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto sono uguali.*

Poligoni.

133. Il triangolo non è che la prima e più semplice di tutta una serie di figure *(poligoni)*.

Così, dati nel piano quattro punti A, B, C, D di cui tre non in linea retta, tali che ciascuna delle congiungenti AB, BC, CD, DA lasci gli altri due punti dalla stessa parte, la figura costituita dai quattro punti *(vertici)* e dai quattro segmenti AB, BC, CD, DA *(lati)* si dice poligono a quattro lati, o, più comunemente, *quadrangolo* o *quadrilatero*.



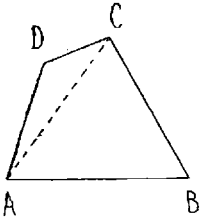
Gli otto angoli adiacenti a coppie ai quattro *angoli del quadrangolo* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ si designano col nome di *angoli esterni*. L'insieme dei lati dicesi *contorno* ed ogni segmento uguale alla somma dei lati si dice *perimetro*.

Il segmento congiungente due vertici *opposti* (cioè non consecutivi) come A e C o B e D si dice *diagonale*.

Il quadrangolo ha due diagonali.

Proprietà perimetriche e somma degli angoli di un poligono.

138. Teor. — *In un quadrangolo ciascun lato è minore della somma degli altri tre.*



Dato il quadrangolo ABCD, per dimostrare che il lato AB è minore della somma BC + CD + DA, si conduca la diagonale AC.

Nel triangolo ABC abbiamo (n. 96)

$$AB < BC + AC.$$

Ma nel triangolo ACD abbiamo parimente

$$AC < CD + DA;$$

cosicchè, se nella prima disuguaglianza sostituiamo ad AC la somma maggiore CD + DA, concludiamo veramente

$$AB < BC + CD + DA.$$

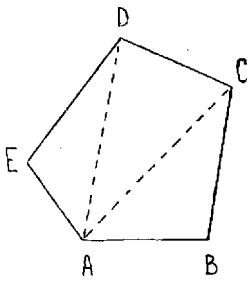
139. In modo analogo e tenendo conto del n. precedente e del n. 96 si dimostra che anche in un pentagono ciascun lato è minore della somma degli altri; e così successivamente si dimostra in generale che: *In un poligono ad un numero* n *qualsiasi di lati ciascun lato è minore della somma dei rimanenti.*

140. Teor. — *In un quadrangolo la somma degli angoli è uguale a due angoli piatti,* ossia a 360°.

Dato un quadrangolo ABCD, si conduca una sua diagonale, p. es. la AC (vedi fig. al n. 138). Il quadrangolo resta diviso in due triangoli ABC, ACD e la somma degli angoli del quadrangolo è uguale alla somma degli angoli di codesti due triangoli. Poichè in ciascuno di codesti triangoli la somma degli angoli

è uguale ad un angolo piatto (n. 110), concludiamo che veramente la somma degli angoli del quadrangolo è uguale a due angoli piatti, ossia a 180×2 gradi.

141. Se invece di un quadrangolo consideriamo un pentagono ABCDE e conduciamo in esso le congiungenti di un vertice A coi vertici non consecutivi C e D *(diagonali)* il pentagono resta diviso in *tre* triangoli, e poichè la somma degli angoli del pentagono è uguale alla somma degli angoli dei tre triangoli concludiamo che essa è uguale a *tre* angoli piatti cioè a 180×3 gradi.

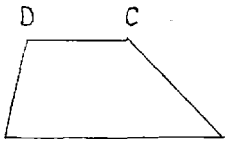


Analogamente, se consideriamo un poligono ad un numero n qualsiasi di lati e conduciamo in esso le diagonali che escono da un vertice, il poligono resta diviso in $n-2$ triangoli, cosicchè abbiamo il

Teor. — *La somma degli angoli di un poligono ad n lati è uguale ad n-2 angoli piatti*, cioè a $180 \times (n-2)$ gradi.

Parallelogrammi.

142. Fra i poligoni ha particolare importanza una classe speciale di quadrangoli, di cui ora ci dobbiamo occupare.

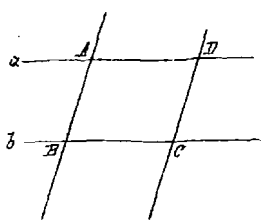


In un quadrangolo si designano col nome di *opposti* due lati non aventi vertici comuni.

Def. — Un quadrangolo in cui due lati opposti sono paralleli dicesi *trapezio*.

I due lati paralleli diconsi *basi* del trapezio.

143. Date due rette a, b parallele intersecate da una trasversale nei punti A, B rispettivamente, se si conduce per un punto D di a, distinto da A, la parallela alla AB, questa incontra la b in un punto C (n. 68) e si ottiene un quadrangolo DCBA, in cui ogni lato è parallelo al lato opposto, e che può quindi considerarsi in due modi come trapezio, prendendo come basi due lati opposti oppure gli altri due.



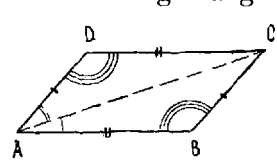
Def. — Ogni quadrangolo in cui i lati opposti sono paralleli dicesi *parallelogramma.*

144. Teor. — *In un parallelogramma:*

1) *gli angoli opposti sono uguali;*

2) *i lati opposti sono uguali.*

Dato infatti un parallelogramma ABCD e condotta una diagonale, p. es. la AC, si noti che gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DCA}$ sono uguali perchè alterni formati dalla trasversale AC colle due parallele AB, DC; e così sono uguali gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAD}$ come alterni formati dalla trasversale AC colle parallele DA, CB (n. 70). Allora i due triangoli ABC, e CDA hanno il lato AC comune e gli angoli adiacenti ordinatamente uguali; perciò sono uguali (n. 107) e di qui si conclude



$$AB = DC \ , \ AD = BC \ , \ \widehat{CBA} = \widehat{ADC};$$

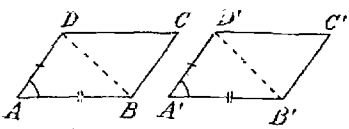
e gli altri due angoli opposti $\widehat{BAD}$, $\widehat{DCB}$ risultano uguali come somme di angoli rispettivamente uguali.

145. Nota. — Risulta dalla dimostrazione precedente che: *Un parallelogramma è diviso da ciascuna sua diagonale in due triangoli uguali.*

146. Cor. — *Due parallelogrammi aventi uguali ordinatamente un angolo e i due lati che lo comprendono sono uguali.*

Sia infatti nei parallelogrammi ABCD, A′B′C′D′

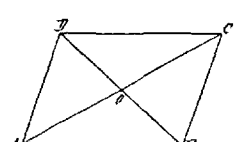
$$\widehat{B'A'D'} = \widehat{BAD}\ ,\ A'B' = AB\ ,\ A'D' = AD.$$



Allora condotte le diagonali BD, B′D′, siccome in ciascun parallelogramma i lati e gli angoli opposti sono uguali (n. 144), avremo pel n. 105 che i triangoli ABD, DBC sono uguali rispettivamente ad A′B′D′, D′B′C′; e i due parallelogrammi saranno sovrapponibili.

147. Notiamo ancora il seguente:

Teor. — *In un parallelogramma le due diagonali si dividono scambievolmente a metà.*



Se O è il punto in cui si segano le due diagonali AC, BD, i due triangoli ABO, CDO sono uguali (n. 107) perchè per quanto si è visto al n. 144

$$AB = CD$$

e poi pel n. 70 è

$$\widehat{OBA} = \widehat{ODC},\ \widehat{BAO} = \widehat{DCO}.$$

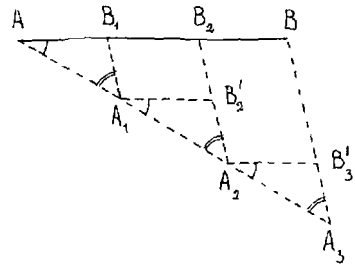
Ne risulta

$$AO = CO,\ BO = DO.$$

148. Come applicazione delle proprietà dei parallelogrammi risolviamo il seguente

Probl. — *Dividere un segmento dato in un numero qualsivoglia di parti uguali.*

Per fissare le idee proponiamoci di dividere il segmento dato AB in *tre* parti uguali.



Sopra una semiretta uscente da uno degli estremi, p. es. da A, e distinta dalla AB, si portino di seguito tre segmenti AA_1, A_1A_2, A_2A_3 uguali ad un segmento arbitrario e, congiunto A_3 con B, pei punti A_1 e A_2 si conducano le parallele alla retta A_3B, fino ad incontrare la AB nei punti B_1 e B_2.

I tre segmenti AB_1, B_1B_2, B_2B, in cui resta diviso il segmento AB, sono uguali.

Per dimostrarlo si conducano per A_1, A_2 le parallele ad AB, fino ad incontrare in B'_2, B'_3 le A_2B_2, A_3B, e si confrontino i triangoli AA_1B_1, $A_1A_2B'_2$, $A_2A_3B'_3$.

Essi sono uguali (n. 122) perchè hanno uguali i lati AA_1, A_1A_2, A_2A_3 per costruzione, gli angoli $\widehat{A_1AB_1}$, $\widehat{A_2A_1B'_2}$, $\widehat{A_3A_2B'_3}$ come corrispondenti rispetto alle parallele AB_1, $A_1B'_2$, $A_2B'_3$ e alla trasversale AA_3 e gli angoli $\widehat{B_1A_1A}$, $\widehat{B'_2A_2A_1}$, $\widehat{B'_3A_3A_2}$ come corrispondenti rispetto alle parallele B_1A_1, B_2A_2, BA_3 e alla trasversale AA_3.

Avremo dunque

$$AB_1 = A_1B'_2 = A_2B'_3.$$

Ma nei parallelogrammi $B_1B_2B'_2A_1$, $B_2BB'_3A_2$ i lati opposti sono uguali, talchè sarà

$$A_1B'_2 = B_1B_2,\ A_2B'_3 = B_2B,$$

onde si conclude

$$AB_1 = B_1B_2 = B_2B.$$

149. Insieme col teor. del n. 144, sussiste anche il teorema inverso. Si ottengono così i seguenti criteri per riconoscere che un quadrangolo è un parallelogramma.

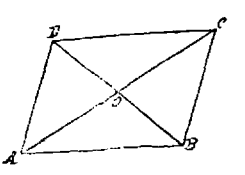
TEOR. — *Un quadrangolo è un parallelogramma:*

1) *se i lati opposti sono uguali;*

2) *se gli angoli opposti sono uguali;*

1) Nel quadrangolo ABCD i lati AB, BC siano uguali rispettivamente a DC, AD.

Occorre dimostrare che codesti segmenti sono a due a due paralleli. Condotta una delle diagonali, p. e. la CA, i due triangoli ABC, CDA sono uguali perchè hanno i tre lati ordinatamente uguali (n. **101**). Allora dall'uguaglianza degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DCA}$, alterni formati dalle AB, CD colla trasversale AC, e dall'uguaglianza degli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAD}$, alterni formati dalle BC, DA con la medesima trasversale, concludiamo (n. 61) che le AB, BC sono rispettivamente parallele alle DC, AD.



2) Gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ siano uguali rispettivamente a $\widehat{C}$, $\widehat{D}$.

Si deve provare che, anche in questo caso, i lati opposti AB, CD, e così anche AD, BC sono paralleli.

Ora ciò risulta dal fatto che le somme degli angoli $\widehat{A} + \widehat{B}$ e $\widehat{C} + \widehat{D}$ sono, per le ammesse ipotesi, uguali, e che d'altra parte queste somme prese insieme, valgono quattro angoli retti (n. 140), onde ciascuna vale due retti; e le due coppie di lati opposti formando ciascuna con una trasversale due angoli coniugati supplementari sono parallele (n. 65).

150. Un altro criterio per riconoscere se un quadrangolo è un parallelogramma, è dato dal seguente

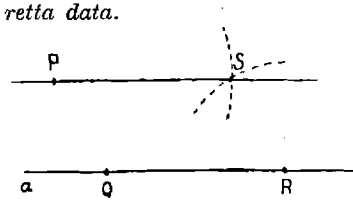
TEOR. *Un quadrangolo è un parallelogramma se ha due lati opposti uguali e paralleli.*

Nel quadrangolo ABCD i due lati opposti AB, DC siano uguali e paralleli (vedi la fig. del n. prec.),

Condotta una delle diagonali, per esempio la AC, i due triangoli ACD, CAB, aventi comune il lato AC e uguali i lati CD e AB per ipotesi, e gli angoli $\widehat{DCA}$ e $\widehat{BAC}$, come alterni rispetto alle parallele DC, AB e alla trasversale AC, sono uguali (n. 105); e quindi sono uguali i lati AD e CB. Ricadiamo così nel caso del n. prec., onde si conclude che il quadrangolo è un parallelogramma.

151. Le proprietà dei parallelogrammi permettono di risolvere *col solo uso della riga e del compasso* il seguente

Probl. — *Condurre da un punto* P *la parallela ad una retta data.*

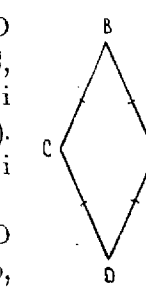


Presi sulla *a* due punti ad arbitrio Q, R, si descriva la circonferenza di centro P e raggio uguale a QR. Siccome nel triangolo PQR il lato PR è minore della somma degli altri due lati PQ e QR, e maggiore della loro differenza (nn. 36, 37), la circonferenza di centro R e raggio uguale a QP intersecherà in due punti la prima circonferenza da noi tracciata (n. 93). Questi due punti cadranno da bande opposte rispetto alla PR. Se S è quello che cade dalla banda opposta di Q, la PS è la parallela cercata.

Infatti il quadrangolo PQRS ha, per costruzione, i lati opposti PQ, SR e PS, QR uguali e perciò è un parallelogramma (n. 149): onde risulta che le rette PS, QR sono parallele.

Rombo, rettangolo e quadrato.

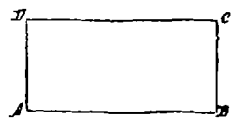
152. Se un parallelogramma ABCD ha uguali due lati consecutivi AB, BC, ha uguali tutti e quattro i lati, perchè i lati opposti sono sempre uguali (n. 144).



Un parallelogramma avente tutti i lati uguali si dice *rombo* o *losanga.*

153. Se in un parallelogramma ABCD un angolo, p. es. quello in A, è retto,

anche l'opposto che gli è uguale (n. 144), cioè l'angolo in C, sarà retto.



Ora in ogni quadrangolo la somma dei quattro angoli è di 360°; cosicchè nel nostro parallelogramma gli altri due angoli in B e D sommati daranno 180° e, poichè sono uguali (n. 144), saranno tutti e due retti. Cioè il parallelogramma ABCD ha tutti gli angoli retti.

Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti dicesi *rettangolo*.

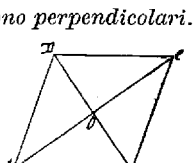
Si può costruire un rettangolo, dati due suoi lati consecutivi, staccando due segmenti uguali ad essi sopra i lati d'un angolo retto, e mandando per gli estremi le parallele ai lati dell'angolo fino ad incontrarsi.

154. Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti e tutti quattro i lati uguali dicesi *quadrato*. Perciò il quadrato è nello stesso tempo rombo e rettangolo. Il quadrato resta definito quando ne è dato il lato; e il quadrato costruito sopra un segmento, dato come lato, si dice « quadrato di esso ».



155. Una proprietà che caratterizza il rombo fra i parallelogrammi è data dai due teoremi seguenti, l'uno *inverso* dell'altro.

156. Teor. — *Nel rombo le diagonali sono perpendicolari.*



Infatti i due triangoli DOC, BOC hanno comune il lato OC e uguali i lati OD, OB e DC, BC; cosicchè per il I criterio sono uguali, (n. 101) e hanno uguali gli angoli $\widehat{DOC}$, $\widehat{BOC}$. Poichè questi sono adiacenti, saranno ciascuno di 90°; e le due diagonali AC, BD sono veramente perpendicolari.

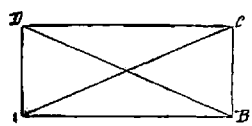
157. Teor. — *Un parallelogramma avente le diagonali perpendicolari è un rombo.*

Supposto che nel parallelogramma ABCD (fig. al n. prec.) le due diagonali siano perpendicolari, ricordiamo che esse si dividono scambievolmente per metà (n. 147); cosicchè i due triangoli rettangoli DOC, BOC aventi i cateti OD, OB uguali e il cateto OC comune saranno uguali (n. 130) e avranno uguali le ipotenuse DC, BC. Risulta di qui che il parallelogramma, avendo uguali due lati consecutivi, è veramente un rombo.

158. Il rettangolo è caratterizzato fra i parallelogrammi della proprietà indicata nei due seguenti teoremi.

Teor. — *Nel rettangolo le diagonali sono uguali.*

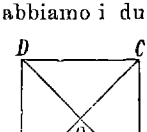
Dato il rettangolo ABCD, si conducano le due diagonali AC, BD. Allora i due triangoli ABC, BAD rettangoli in B, A rispettivamente, hanno il cateto AB comune, e i cateti BC, AD uguali (n. 144). Essi sono quindi uguali (n. 130) ed hanno uguali le ipotenuse AC, BD.



159. Teor. — *Un parallelogramma avente le diagonali uguali è un rettangolo.*

Condotte nel parallelogramma ABCD (fig. del numero prec). le due diagonali, per ipotesi uguali, i due triangoli ABC, BAD hanno il lato AB comune, AC = BD (per ipotesi), BC = AD (n. 144) onde sono uguali, e $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$. Ma questi angoli sono supplementari (n. 71) onde si conclude che essi sono retti, cioè che ABCD è un rettangolo.

160. Come casi particolari dei nn. 156-159 abbiamo i due seguenti teoremi, che caratterizzano, fra i parallelogrammi, il quadrato.



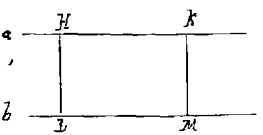
Teor. — a) *Nel quadrato le diagonali sono perpendicolari ed uguali.*

b) *Un parallelogramma avente le diagonali perpendicolari ed uguali è un quadrato.*

Distanza di due rette parallele.

161. Teor. — *Se una retta è parallela ad un'altra, tutti i punti dell'una hanno ugual distanza dall'altra.*

Date le due rette a, b parallele, si abbassino da due punti H e K quali si vogliano della prima le perpendicolari HL, KM alla seconda. Le HL, KM sono parallele fra loro (n. 61) onde il quadrangolo HLMK è un rettangolo, e siccome in ogni parallelogramma i lati opposti sono uguali, avremo



$$HL = KM,$$

cioè tutti i punti di a hanno ugual distanza da b.

162. Le perpendicolari HL, KM, ecc., abbassate dai punti della a sulla b sono pure perpendicolari alla a (n. 72). Perciò i punti della b hanno dalla a la stessa distanza che i punti della a dalla b.

163. Def. — Dicesi *distanza* di due rette parallele la distanza di un punto qualsiasi dell'una retta dall'altra.

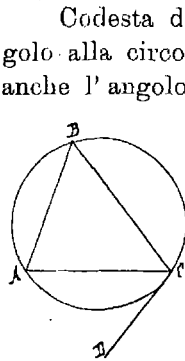
III.

ANGOLI NEL CERCHIO E POLIGONI ISCRITTI E CIRCOSCRITTI

Angoli nel cerchio.

164. Def. — Dato un arco di circonferenza, ogni angolo avente il vertice in un punto dell'arco e i lati passanti per gli estremi di esso, dicesi *angolo alla circonferenza iscritto nel dato arco.*

Codesta definizione si generalizza, chiamando angolo alla circonferenza, iscritto nell'arco dato CBA, anche l'angolo formato dalla corda CA e dalla semiretta tangente al cerchio in uno degli estremi di essa, per esempio in C, e giacente rispetto alla corda da banda opposta dell'arco cconsiderato. Così si dirà iscritto nell'arco CBA tanto l'angolo $A\widehat{B}C$ quanto l'angolo $A\widehat{C}D$.

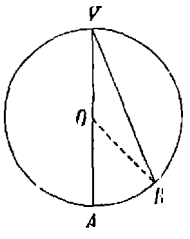


Un angolo alla circonferenza, iscritto in un dato arco, comprende fra i suoi lati l'altro arco di circonferenza aventi i medesimi estremi; dell'angolo dato si dice che *insiste* su questo secondo arco.

165. Teor. — *Ogni angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro che insiste sul medesimo arco.*

Esaminiamo i vari casi possibili:

1.° Dato l'angolo $A\widehat{V}B$ alla circonferenza, di cui il lato AV passi pel centro O, consideriamo l'angolo al centro corrispondente $A\widehat{O}B$. Essendo quest'ultimo angolo esterno rispetto al triangolo OVB, abbiamo (n. 112)



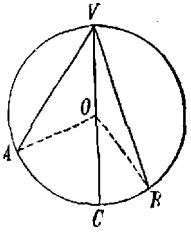
$$A\widehat{O}B = A\widehat{V}B + V\widehat{B}O;$$

ma nel triangolo OVB, isoscele sulla base VB, è

$$A\widehat{V}B = V\widehat{B}O,$$

onde risulta:

$$A\widehat{O}B = 2A\widehat{V}B.$$



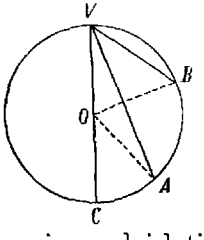
2.° Se l'angolo $A\widehat{V}B$ ha i due lati da parti opposte rispetto al diametro VO, si avrà congiungendo A e B con O,

$$A\widehat{O}C = 2A\widehat{V}C, \quad C\widehat{O}B = 2C\widehat{V}B,$$

e, sommando membro a membro,

$$A\widehat{O}B = 2A\widehat{V}B.$$

3.° Similmente, se i due lati cadono dalla stessa banda rispetto al diametro VC pel vertice, avremo:



$$C\widehat{O}B = 2C\widehat{V}B, \quad C\widehat{O}A = 2C\widehat{V}A$$

e sottraendo membro a membro,

$$A\widehat{O}B = 2A\widehat{V}B.$$

Il teorema vale anche nel caso in cui uno dei lati dell'angolo alla circonferenza sia tangente a questa: lasciamo all'alunno la dimostrazione come esercizio.

166. Cor. — *Tutti gli angoli iscritti in archi uguali o in uno stesso arco, sono uguali.*

Infatti sono uguali alla metà del medesimo angolo o di due angoli al centro uguali (n. 81).

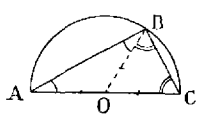
167. Cor. — *In uno stesso cerchio o in cerchi uguali, due angoli alla circonferenza che insistano su archi uguali sono uguali, e viceversa.*

Infatti i corrispondenti angoli al centro, comprendendo archi uguali, sono uguali (n. 81). Analogamente per l'inversa.

168. Cor. — *Ogni angolo iscritto in una semicirconferenza è retto.* — Infatti l'angolo al centro corrispondente è un angolo piatto.

Nota. — Data l'importanza di questa proposizione, daremo di essa anche una dimostrazione diretta.

Sia $\widehat{ABC}$ un angolo iscritto in una semicirconferenza di centro O. Per mostrare che esso è retto, congiungiamo O con B e consideriamo i due triangoli ABO e BCO.



Essi sono entrambi isosceli perchè i raggi OA, OB, OC sono tutti uguali; cosicchè avremo (n. 121)

$$\widehat{ABO} = \widehat{OAB} \quad , \quad \widehat{OBC} = \widehat{BCO}$$

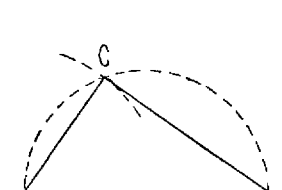
e sommando gli angoli $\widehat{ABO}$, $\widehat{OBC}$ otterremo

$$\widehat{ABC} = \widehat{OAB} + \widehat{BCO}.$$

Ma i tre angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{OAB}$, $\widehat{BCO}$ presi insieme danno 180° (n. 110); cosicchè l'angolo $\widehat{ABC}$ sarà uguale alla metà di 180° cioè a 90°.

169. Probl. — *Costruire un triangolo rettangolo dati l'ipotenusa e un cateto.*

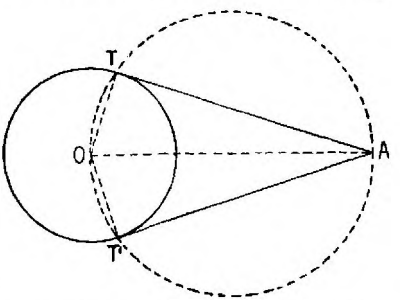
Preso un segmento AB uguale alla ipotenusa prefissata, si descriva su AB come diametro una semicirconferenza e si tagli questa con la circonferenza che ha centro in A e raggio uguale al cateto pre-



ssato. Se C è il punto di intersezione, il triangolo BC soddisfa al problema.

170. Probl. — *Dato un cerchio, condurre da un unto esterno le tangenti ad esso.*

Se O è il cerchio dato e A è il dato punto esterno i descriva la circonferenza che ha per diametro il segmento OA. Se T, T' ono le intersezioni di ssa con la circonferenza data, le rette AT, AT' sono le tangenti cercate, perchè iascuno degli angoli $A\widehat{T}O$, $A\widehat{T'}O$, come scritto in una semicirconferenza, è retto, e sappiamo che la perpendicolare ad un raggio nel suo estremo è tangente al cerchio (n. 87).



Nota. — Le rette per A interne all'angolo (convesso) $T\widehat{A}T'$ sono secanti e le rette per A esterne a odesto angolo sono esterne anche al cerchio.

171. Dall'uguaglianza dei triangoli OAT, OAT', risulta senz'altro il seguente

Cor. — *Condotte ad un cerchio da un punto esterno le due tangenti, i segmenti di esse, compresi fra il punto esterno e i punti di contatto, sono uguali.*

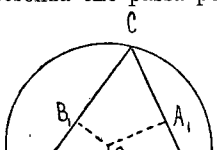
Triangolo e quadrangolo iscritti e circoscritti a un cerchio.

172. Def. — Un poligono (o una poligonale) si dice *iscritto* in un cerchio, se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza; la circonferenza in tal caso si dice *circoscritta* al poligono (alla poligonale).

Un poligono (o una poligonale) si dice *circoscritto* ad un cerchio, se tutti i suoi lati sono tangenti al cerchio, e questo si dice *iscritto* al poligono (o alla poligonale).

173. Probl. — *Circoscrivere una circonferenza ad un triangolo.*

Dato il triangolo ABC, si tratta di descrivere la circonferenza che passa per A, B, C.

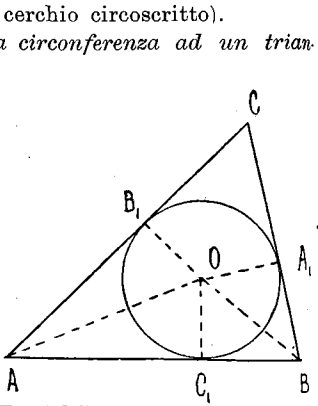


Risulta dal n. 124 *a* che basta innalzare le perpendicolari a due lati AB, BC del triangolo nei rispettivi punti medi C_1, A_1 e considerare il punto d'incontro O di codeste due perpendicolari. È desso il centro del cerchio circoscritto o al triangolo ABC, cioè la circonferenza di centro O e di raggio OA passa anche per B e C.

174. Cor. — *In un triangolo gli assi dei tre lati passano per uno stesso punto* (centro del cerchio circoscritto).

175. Probl. — *Iscrivere una circonferenza ad un triangolo.*

Per iscrivere una circonferenza al triangolo ABC, si conducano le bisettrici di due angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ del triangolo. Diciamo che il punto O, in cui si incontrano codeste due bisettrici [1] è il centro del cerchio iscritto al triangolo.



Infatti, abbassate da O le perpendicolari OA_1, OB_1, OC_1 sui lati BC, CA, AB, notiamo che i due triangoli rettangoli AOB_1, AOC_1, sono uguali (n. 130), in quanto hanno comune l'ipotenusa ed uguali gli angoli acuti in A: sarà quindi

$$OC_1 = OB_1.$$

[1] Che le due bisettrici si incontrino dalla parte di C risulta dal fatto che esse formano colla trasversale AB due angoli coniugati la cui somma, essendo la metà di $\widehat{A} + \widehat{B}$ è, a più forte ragione, minore di due retti (nn. 110, 69).

D' altra parte sono parimenti uguali i triangoli rettangoli BOC_1, BOA_1 in quanto hanno comune l'ipotenusa BO e uguali gli angoli acuti in B; cosicchè sarà

$$OB_1 = OA_1.$$

Ed allora la circonferenza di centro O e raggio OA_1 passa anche per B_1 e C_1; e i lati del triangolo ABC, in quanto sono perpendicolari rispettivamente ai raggi OB_1, OC_1, OA_1 nei loro estremi (n. 87), sono tangenti a codesto cerchio, il quale è dunque il cerchio iscritto in ABC.

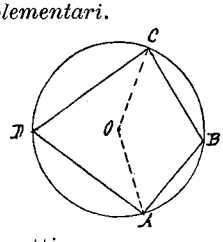
176. Cor. — *In un triangolo le bisettrici dei tre angoli passano per un punto* (centro del cerchio iscritto).

177. Ad un poligono a più di tre lati non si può in generale circoscrivere o iscrivere una circonferenza.

Perchè ciò sia possibile (o, come si suol dire, perchè il poligono sia *inscrivibile* o *circoscrivibile),* il poligono deve soddisfare a particolari condizioni.

Nel caso dei quadrangoli sussistono i due seguenti teoremi.

178. Teor. — *In ogni quadrangolo inscrivibile in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.*

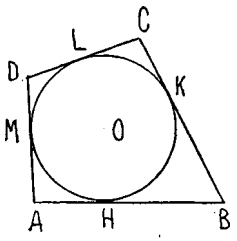


Infatti, considerando un quadrangolo ABCD, iscritto in una circonferenza O, si ha che i due angoli alla circonferenza $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ sono la metà rispettivamente dei due angoli al centro $\widehat{AOC}$ (uno concavo e l'altro convesso o entrambi piatti) la cui somma vale quattro retti. Perciò i due angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ sommati insieme danno due retti.

Poichè la somma di $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ vale quattro retti (n. 140), risulta senz'altro che anche $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ sono supplementari.

179. Nota. — Il teor. *inverso* del prec. è vero anch'esso; cioè *un quadrangolo, in cui gli angoli opposti sono supplementari* (e pel n. 140 basta verificarlo per una coppia) è *inscrivibile in una circonferenza.*

180. Teor. — *In un quadrangolo circoscrivibile ad un cerchio, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.*



Se infatti il quadrilatero ABCD è circoscritto a un cerchio O e sono H, K, L, M rispettivamente i punti di contatto dei lati, avremo (n. 171)

$$AH = AM \ , \ LD = MD$$
$$HB = BK \ , \ CL = KC,$$

e quindi sommando membro a membro

$$AH + HB + LD + CL =$$
$$= AM + MD + BK + KC$$

ossia

$$AB + CD = AD + BC.$$

181. Anche il teor. *inverso* del prec. è vero, cioè: *Un quadrangolo in cui la somma di due lati opposti sia uguale alla somma degli altri due è circoscrivibile ad una circonferenza.*

Poligoni regolari.

182. Def. — Un poligono si dice *regolare* se ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali.

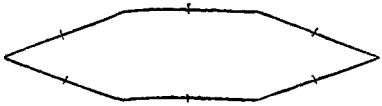
Come esempi di poligoni regolari abbiamo già incontrato il triangolo equilatero e il quadrato.

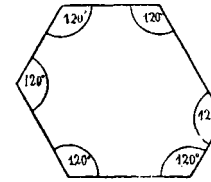
183. Nota. — Giova avvertire come nella definizione di poligono regolare le due condizioni che il poligono sia equilatero ed equiangolo sono entrambe necessarie.

Infatti vi sono poligoni equiangoli, ma non equilateri; e poligoni equilateri, ma non equiangoli.

Per esempio tutti i rettangoli sono equiangoli, ma solo il quadrato è anche equilatero: tutti i rombi sono equilateri, ma solo il quadrato è anche equiangolo.

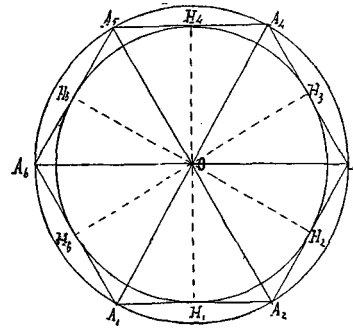
Così si osservino i due esagoni della unita figura, che sono l' uno equilatero, l' altro equiangolo, ma non sono regolari.





184. Ogni poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile, cioè si può ad esso circoscrivere e inscrivere una circonferenza.

La circonferenza iscritta e quella circoscritta sono concentriche. Il loro centro comune si dice *centro* del poligono regolare; il raggio della circonferenza circoscritta e quello della circonferenza iscritta si dicono rispettivamente *raggio* ed *apotema* del poligono.

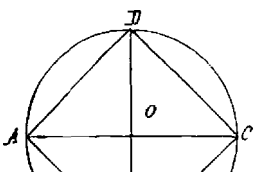


Noi qui ci limiteremo a risolvere alcuni facili problemi.

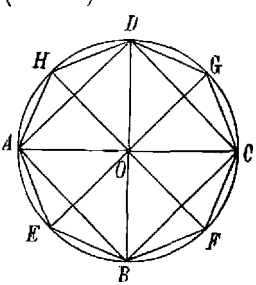
185. Probl. — *Inscrivere in un cerchio dato un quadrato.*

Fissato sulla circonferenza data un punto A come vertice del quadrato, si conducano il diametro AC passante per A e il diametro BD perpendicolare al primo. Condotte le corde AB, BC, CD, DA, notiamo che i quattro triangoli ABO, BCO, CDO, DAO sono rettangoli in O ed isosceli, e di più sono uguali perchè hanno uguali i cateti (n. 130). Perciò sono uguali le ipotenuse AB, BC, CD, DA, e, poichè gli angoli alla

base di un triangolo rettangolo isoscele sono uguali ciascuno a 45°, concludiamo che gli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{DCB}$, $\widehat{ADC}$ sono retti e il quadrilatero ABCD è un quadrato.



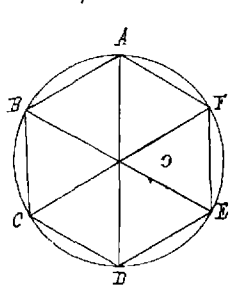
186. Inscritto nel cerchio dato O il quadrato ABCD, si conducano per O i due diametri EG, FH che bisecano gli angoli retti, formati dai due diametri AC, BD e si consideri l'ottagono AEBFCGDH. Poichè gli otto triangoli isosceli AEO, EBO,..., HAO sono uguali (n. 105) concludiamo che l'ottagono ha uguali tutti i lati e tutti gli angoli.



Abbiamo così inscritto nel cerchio dato un *ottagono regolare* e, similmente, potremo inscrivere in esso un *poligono regolare* a 16 lati, e così via.

187. Probl. — *Inscrivere in un cerchio dato un esagono regolare.*

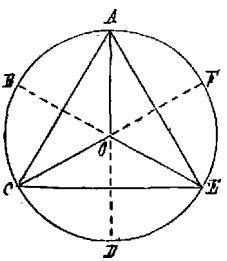
Dato il cerchio O, supponiamo già risoluto il problema; e sia ABCDEF l'esagono cercato. Congiunti i vertici col centro O, ciascuno dei triangoli isosceli OAB, OBC,.... OFA ha l'angolo al vertice (in O) di $\frac{360}{6}$ gradi, cioè di 60°: onde risulta che anche gli angoli alla base, essendo uguali e dovendo insieme sommare a 120° (n. 101), hanno l'ampiezza di 60°.



Si conclude che ciascuno dei triangoli considerati è equiangolo e quindi (n. 122) equilatero e il lato AB dell'esagono è uguale al raggio del cerchio.

Dunque per inscrivere nella circonferenza data O un esagono regolare, basta da un suo qualsiasi punto A (preso ad arbitrio come vertice) condurre le due corde AB, AF uguali al raggio, e dall'altro estremo D del diametro passante per A condurre le altre due corde DB, DE uguali esse pure al raggio, e l'esagono ABCDEF che così risulta è regolare.

188. Cor. — *Il lato dell'esagono regolare inscritto in un cerchio è uguale al raggio del cerchio.*



189. Divisa una data circonferenza in sei parti uguali AB, BC, CD, DE, EF, FA a partire dal punto A assegnato ad arbitrio, gli archi AC, CE, EA, doppi di archi uguali saranno uguali e il poligono ACE sarà un triangolo equilatero. Resta così risoluto il

Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero.*

190. Nota. — Si noti (vedi fig. del n. prec.) che i due triangoli AFO, EFO sono equilateri cosicchè il lato AE del triangolo equilatero iscritto nel cerchio O è perpendicolare al raggio OF nel suo punto medio (n. 107).

Quindi *per avere il lato del triangolo equilatero inscritto in un cerchio basta considerare la corda perpendicolare ad un raggio nel suo punto medio.*

191. Inscritto in una circonferenza O un esagono regolare ABCDEF (fig. al n. 167) si conducano i tre diametri che bisecano gli angoli al centro, formati dai diametri AD, BE, CF. Si divide così la circonferenza in dodici archi uguali, le cui corde determinano un

dodecagono che si dimostra, come al n. 166, essere *regolare.*

Analogamente potremo inscrivere nel cerchio dato un *poligono regolare di 24 lati* e così via.

IV.

POLIGONI EQUIVALENTI

Criteri di equivalenza.

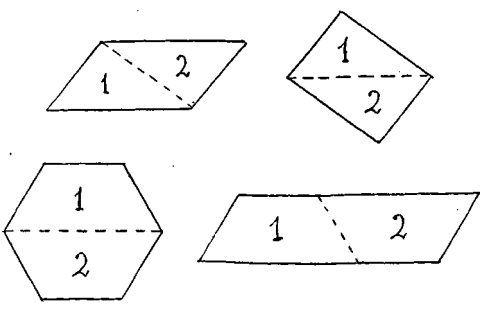
192. Due poligoni possono avere **superficie uguali,** anche senza essere uguali (sovrapponibili). In tal caso si dicono *equivalenti.*

Per riconoscere che due poligoni hanno superficie uguali o sono equivalenti si possono invocare i criteri seguenti:

193. I. *Poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.*

194. II. *Somme di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti.*

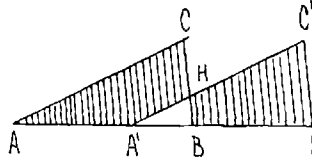
P. es. i due parallelogrammi dell'annessa figura hanno superficie uguali in quanto sono entrambi somme degli stessi triangoli 1, 2.



Così l'esagono e il parallelogramma

della unita figura sono equivalenti in quanto sono entrambi somme degli stessi trapezi 1, 2.

195. III. *Differenze di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti.*



P. es. i due trapezi AA'HC, BB'C'H hanno superficie uguali o, come diciamo, sono equivalenti, in quanto si ottengono *sottraendo* il medesimo triangolo A'BH dai due triangoli uguali ABC, A'B'C'.

Parallelogrammi equivalenti.

196. In un parallelogramma ABCD dicesi *altezza* corrispondente al lato AB, preso come *base*, la distanza di questo lato dal (la retta del) lato opposto.

197. Teor. — *Parallelogrammi di basi uguali e di altezze corrispondenti uguali sono equivalenti.*

Siano ABCD, EFGH due parallelogrammi, le cui basi AB, EF siano uguali e le cui altezze corrispondenti siano uguali.

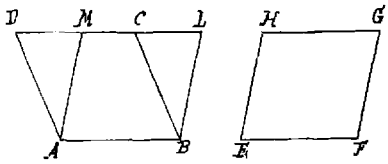
Si trasporti il parallelogramma EFGH sulla base AB e dalla stessa parte rispetto alla AB, da cui cade ABCD; e sia ABLM il parallelogramma uguale ad EFGH che così si ottiene. Basterà dimostrare che ABCD è equivalente ad ABLM (n. 193).

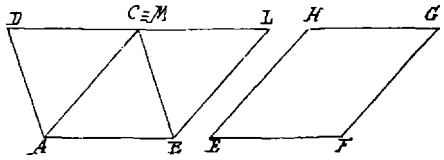
Anzitutto, poichè le LM, CD sono parallele alla AB, e le altezze dei due parallelogrammi relativi al lato comune AB sono uguali, le rette LM e CD coincidono.

Distinguiamo allora tre casi, secondo che i due segmenti LM, CD hanno comune un segmento o un

punto, oppure i detti segmenti sono esterni l'uno all'altro.

Consideriamo, per cominciare, il primo caso e supponiamo, per fissare le idee, che il punto M sia interno al segmento CD e che C sia interno ad ML. Allora, essendo CD uguale a LM, saranno anche uguali le differenze DM, CL: di più l'angolo $\widehat{ADM}$ è uguale a $\widehat{BCL}$, e l'angolo $\widehat{DMA}$ è uguale a $\widehat{CLB}$ (n. 70); se ne conclude che i due triangoli AMD, BLC sono uguali (n. 107), e quindi che i due parallelogrammi ABCD, ABLM si ottengono sommando triangoli uguali al medesimo trapezio ABCM e perciò sono equivalenti.

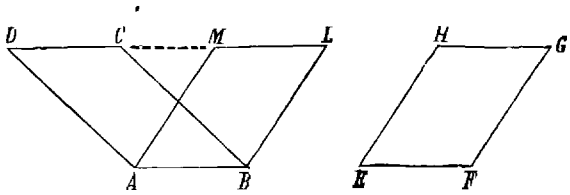




Lo stesso ragionamento vale nel caso particolare in cui il punto M coincida con un estremo del segmento CD, per esempio con C: i due parallelogrammi si ottengono allora sommando triangoli uguali al medesimo triangolo ABC.

Consideriamo infine il caso in cui LM sia esterno a CD: precisamente LM appartenga al prolungamento di DC.

Confrontiamo i due triangoli AMD, BLC. Essi sono uguali, perchè hanno i lati rispettivamente uguali. Invero i lati AD, AM sono rispettivamente uguali a BC, BL come lati opposti di parallelogrammi (n. 144);



e i terzi lati DM, CL sono uguali, perchè si ottengono aggiungendo il medesimo segmento CM rispettivamente ai due segmenti DC, ML, che sono uguali fra loro, in quanto sono uguali entrambi al segmento AB (numero 144).

Se allora noi sottragghiamo dal trapezio ABLD prima l'uno e poi l'altro dei due triangoli uguali AMD e BLC otterremo due poligoni equivalenti fra loro, in quanto sono differenze di poligoni uguali (n. 195). Ma in codesto modo si ottengono appunto i due parallelogrammmi ABLM, ABCD che sono in tal guisa dimostrati equivalenti.

198. Dato un parallelogramma, si può costruire un rettangolo ad esso equivalente o, come si suol dire, *trasformare* il dato parallelogramma in un rettangolo. Basta considerare il rettangolo che ha base ed altezza uguali al dato parallelogramma.

199. Si può dimostrare l'inverso del teor. del n. 197, prendendo le mosse dall'osservazione che *un poligono non può essere equivalente ad una sua parte.*

Si ha così il

Teor. — *Parallelogrammi equivalenti e di basi uguali hanno rispetto a queste altezze uguali.*

200. Analogamente si dimostra il

Teor. — *Quadrati equivalenti sono uguali.*

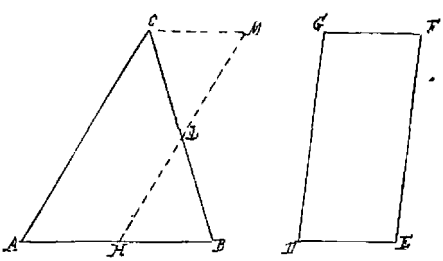
Triangoli equivalenti

Il teorema sull'equivalenza dei parallelogrammi avente le basi e le altezze corrispondenti uguali si estende ai triangoli mercè la seguente proposizione.

201. Teor. — *Un triangolo ed un parallelogramma il quale abbia la stessa altezza e la base metà della base di quello, sono equivalenti.*

Sia ABC un triangolo e sia DEFG un parallelogramma avente la stessa altezza di ABC e tale che DE sia la metà di AB. Diciamo che il triangolo e il parallelogramma sono equivalenti.

Divisa la base AB del triangolo per metà in H, si conduca da H la parallela ad AC, e da C la parallela ad AB: sia M il punto di intersezione di codeste due rette e sia L l'intersezione della HM con BC. I due parallelogrammi AHMC, DEFG avendo ugual base ed uguale altezza sono equivalenti (n. 197). D'altra parte, considerati i due triangoli HBL, MCL, abbiamo che HB è uguale ad MC in quanto è per costruzione HB = AH e per il n. 144 AH = CM; di più gli angoli $B\widehat{H}L$, $L\widehat{B}H$, sono uguali agli angoli $C\widehat{M}L$, $L\widehat{C}M$ rispettivamente (n. 70) cosicchè i due triangoli sono uguali (n. 107). Il triangolo ABC e il parallelogramma AHMC essendo somme di poligoni rispettivamente uguali, sono equivalenti; quindi sono

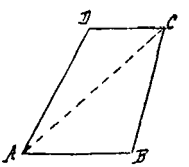


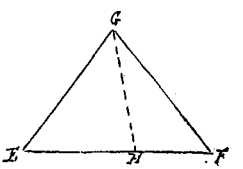
anche equivalenti (n. 193) il triangolo ABC e il parallelogramma DEFG.

202. Teor. — *Triangoli di ugual base ed uguale altezza sono equivalenti.*

Invero due triangoli siffatti sono rispettivamente equivalenti a due parallelogrammi aventi ugual base (metà di quelta dei triangoli) e la stessa altezza (numero prec.) e questi sono equivalenti fra loro (n. 197).

203. Cor. — *Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e di base uguale alla somma delle basi del trapezio.*



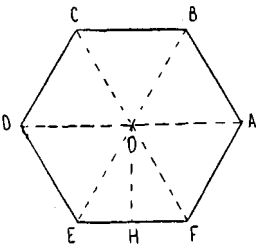


Se la base EF del triangolo EFG è uguale alla somma delle basi del trapezio ABCD prendiamo su EF il punto H tale che sia EH = AB e quindi HF = DC. Condotta allora la diagonale AC del trapezio e il segmento HG, avremo che i triangoli ABC, EHG sono equivalenti perchè hanno basi ed altezze uguali: e che per la medesima ragione sono equivalenti i triangoli DCA, HFG; onde si conclude che veramente il trapezio e il triangolo dati sono equivalenti.

204. Cor. — *La somma di due o più triangoli aventi la stessa altezza è equivalente ad un triangolo avente la stessa altezza e la base uguale alla somma delle basi dei triangoli dati.*

205. Cor. — *Un poligono regolare è equivalente ad un triangolo avente per base il perimetro del poligono e per altezza il suo apotema.*

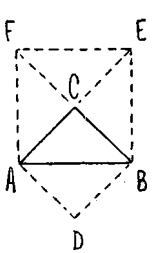
Infatti, congiungendo il centro del poligono coi suoi vertici, dividiamo il poligono stesso in tanti triangoli (isosceli) quanti sono i lati e ciascuno di questi triangoli ha per base un lato del poligono, e l'altezza corrispondente è uguale all'apotema (numeri 184, 86 *b*).



206. Il teor. del n. 202 si inverte facilmente, in base al teor. del n. 199, inverso del teor. del n. 197. Si ha così il

Teor. — *Triangoli equivalenti ed aventi basi uguali hanno altezze uguali.*

Teorema di Pitagora.



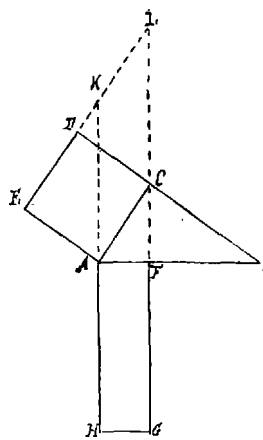
207. Considerato un triangolo rettangolo ABC, isoscele sull'ipotenusa AB ribaltiamolo intorno ad AB in ABD e intorno ai due cateti in ACF e in CBE. L'angolo $\widehat{ECF}$ risulta retto, talchè congiungendo F con E, otteniamo un quinto triangolo FEC uguale ad ABC.

Dal fatto che ciascuno degli angoli alla base di AB è di 45°, risulta che il quadrangolo ABEF è il quadrato della ipotenusa, mentre ADBC è il quadrato del cateto AC. Poichè il primo quadrato è uguale al quadruplo dei triangolo ABC e il secondo quadrato è uguale al doppio dello stesso triangolo si conclude che *in un triangolo rettangolo isoscele il quadrato della ipotenusa è equivalente al doppio del quadrato di un cateto.*

Questa proposizione si generalizza e si ottiene il teorema di PITAGORA, il quale sussiste per ogni qualsiasi triangolo rettangolo. Per dimostrarlo in generale premetteremo come lemma il seguente

208. Teor. — *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sopra un cateto è equivalente al rettangolo contenuto dall'ipotenusa e dalla proiezione di quel cateto sull'ipotennsa.*

Sia il triangolo ABC rettangolo in C: abbassata da C la perpendicolare CF sull'ipotenusa, diciamo che il quadrato di AC è equivalente al rettangolo di AF ed AB.



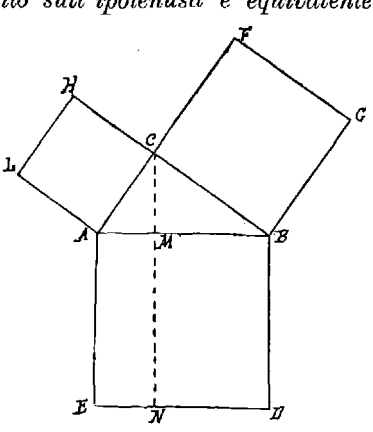
Si costruisca infatti su AC il quadrato ACDE; poi sul prolungamento del segmento CF si prenda il segmento FG uguale ad AB, e si conducano per G la parallela ad FA, per A la parallela ad FG. Codeste due rette si incontreranno in un punto H, perchè sono parallele a due rette AB, FG che si incontrano (n. 68); ed è manifesto che AFGH è il rettangolo di AF e AB.

Ciò premesso, si prolunghino HA ed FC; poichè codeste due rette incontrano la AC, incontreranno anche la retta ED, parallela alla AC, rispettivamente in due punti K, L (n. 68). Allora il parallelogramma ACLK, come compreso fra le stesse due parallele fra cui è compreso il rettangolo AHGF, ha con questo uguale l'altezza relativa ai lati per diritto AH, AK. Diciamo che il parallelogramma e il rettangolo hanno uguali anche le basi AH, AK. Si considerino perciò i due

triangoli AKE, ABC, rettangoli in E, C rispettivamente. In essi sono uguali i cateti AE, AC per costruzione, e gli angoli acuti $K\widehat{A}E$, $B\widehat{A}C$, perchè complementari dello stesso angolo $C\widehat{A}K$. Perciò i due triangoli AKE, ABC sono uguali (n. 130) ed hanno uguali le ipotenuse AK, AB; sono quindi uguali anche AK e AH, e il parallelogramma ACLK e il rettangolo AHGF sono equivalenti (n. 197).

Ma il parallelogramma ACLK ha la base comune col quadrato ACDE, ed è compreso con esso fra le stesse parallele; concludiamo che il quadrato ACDE è equivalente al parallelogramma ACLK (n. 197) e quindi per quanto si è visto dianzi, al rettangolo AHGF.

209. Teor. (di PITAGORA). — *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.*

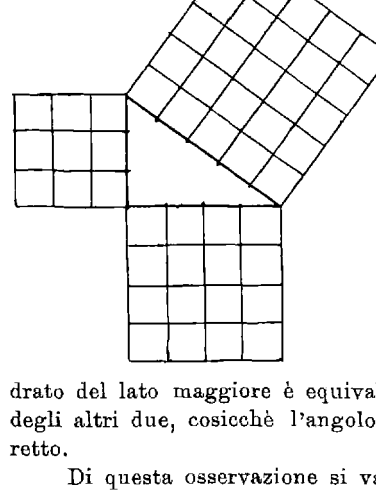


Dato il triangolo ABC rettangolo in C, si costruiscano su AB, BC, CA i quadrati ABDE, BCFG, ACHL, ciascuno da banda opposta del triangolo rispetto alla corrispondente base. Diciamo che il quadrato ABDE è equivalente alla somma dei quadrati BCFG, ACHL. Abbassata infatti da C la perpendicolare CM sull'ipotenusa AC e prolungata fino ad incontrare DE in N, abbiamo (n. prec.) che il quadrato di AC è equivalente al rettangolo AMNE della ipotenusa AB e della proiezione su di essa del cateto AC; così il quadrato di BC è equivalente al

rettangolo MBDN dell'ipotenusa AB e della proiezione MB dal cateto BC su di essa. Concludiamo che la somma dei due indicati rettangoli, cioè il quadrato di AB, è equivalente alla somma dei quadrati di AC e BC.

210. Nota. — Il teorema prec. si inverte in base al n. 200; sussiste cioè il seguente teorema che ci limitiamo ad enunciare.

Teor. (inverso del teorema di Pitagora). — *Se in un triangolo il quadrato costruito sopra un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due l'angolo compreso da questi è retto.*



211. Nota. Si costruisca un triangolo avente i tre lati uguali rispettivamente ai multipli secondo 3, 4, 5 di uno stesso segmento. Costruiti i quadrati sui tre lati e divisi i quadrati come indica la figura, si verifica che essi sono multipli di uno stesso quadrato secondo, 3^2, 4^2, 5^2, cioè secondo 9, 16, 25. Poichè

$$25 = 9 + 16$$

concludiamo che il quadrato del lato maggiore è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due, cosicchè l'angolo opposto al lato maggiore è retto.

Di questa osservazione si valgono i giardinieri, gli zappatori, ecc., per tracciare sul terreno un angolo retto. A tale scopo tendono, per mezzo di tre piuoli, una funicella lunga 12 metri in modo da formare un triangolo avente i tre lati rispettivamente di m. 3, m. 4, m. 5

212. Come applicazione del teor. di Pitagora proponiamo i due seguenti problemi.

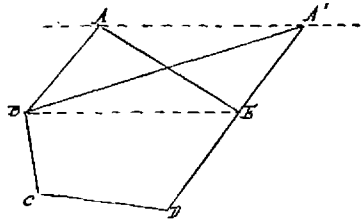
Probl. *a*) — *Costruire il quadrato equivalente alla somma di due o più quadrati dati.*

b) — *Costruire il quadrato equialente alla differenza dei due quadrati dati* [Si ricordi il n. 209].

Trasformazione di poligoni.

213. Probl. — *Costruire un triangolo equivalente ad un poligono dato:* o, come si suol dire: *Trasformare un poligono dato in un triangolo.*

Sia dato il poligono ABCDE. Scelti ad arbitrio tre dei suoi vertici consecutivi E, A, B, per A si conduca la parallela alla diagonale BE e si prolunghi DE fino ad incontrare codesta parallela in A'. Allora il poligono A'BCD ha un lato di meno del primitivo. D'altra parte i due triangoli ABE, A'BE hanno ugual base ed uguale altezza, e sono perciò equivalenti (n 202). Onde risulta che i due poligoni ABCDE, A'BCD, i quali hanno la parte BCDE comune, e le parti residue equivalenti sono equivalenti (n. 194).



Abbiamo così ottenuto un poligono equivalente al primitivo, ma avente un lato di meno.

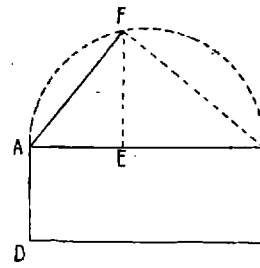
Ripetendo successivamente un numero sufficiente di volte la medesima costruzione, otterremo infine un triangolo equivalente al poligono dato.

214. Probl. — *Trasformare un triangolo in un rettangolo.*

Basta considerare il rettangolo che ha la stessa altezza del triangolo e la base metà (n. 201).

215. Probl. — *Trasformare un rettangolo in un quadrato.*

Dato il rettangolo ABCD, si porti sul lato maggiore AB il lato minore in AE, e descritto su AB, da una banda, la semicirconferenza, si innalzi da E la perpendicolare ad AB fino a incontrare la semicirconferenza in F.



Diciamo che il quadrato di AF è equivalente al rettangolo dato.

Infatti il triangolo AFB è rettangolo in F (n. 168), e in esso il quadrato del cateto AF è equivalente al rettangolo di AB e della proiezione AE di AF su AB (n. 208), cioè al rettangolo dato.

V.

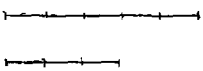
TEORIA DELLA MISURA

Misurazione dei segmenti.

216. Abbiamo veduto come si misuri un segmento in metri, decimetri, centimetri,... (n. 20).

In modo più generale si può misurare un segmento per mezzo di un altro qualsiasi, assunto come *unità*.

Misurare un segmento $\boldsymbol{a}$ per mezzo di un segmento $\boldsymbol{b}$ significa cercare un summultiplo di $\boldsymbol{b}$ che sia pure summultiplo di $\boldsymbol{a}$ o, come si dice comunemente, sia contenuto in $\boldsymbol{a}$ un numero esatto di volte.



Si trovi p. es. che l'n^{mo} summultiplo di $\boldsymbol{b}$ è contenuto esattamente m volte in $\boldsymbol{a}$; si abbia cioè

$$\boldsymbol{a} = m\,\frac{\boldsymbol{b}}{n}.$$

(Nella unita figura è

$$a = 5\,\frac{\boldsymbol{b}}{3}.\ )$$

Noi converremo di scrivere codesta relazione

$$\boldsymbol{a} = \frac{m}{n}\boldsymbol{b}$$

[si legga « a uguale agli m n^{mi} di b] e diremo che $\frac{m}{n}$ è la *misura* di a rispetto all'unità b od anche il *rapporto* di a a b.

Il rapporto di a a b si indica con $a : b$, onde potremo scrivere

$$a : b = \frac{m}{n}.$$

217. Se a è multiplo secondo m di $\frac{b}{n}$ esso è anche multiplo secondo $2m$ di $\frac{b}{2n}$, multiplo secondo $3m$ di $\frac{b}{3n}$, ecc. Ma il valore che si ottiene pel rapporto $a : b$ in base alla definizione precedente è sempre lo stesso, perchè

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n} = \ldots.$$

218. Importa notare esplicitamente come, *dato un segmento b e fissato un numero (intero o frazionario) $\frac{m}{n}$, esiste un segmento ben determinato, che ha rispetto a b la misura $\frac{m}{n}$.*

Per costruire questo segmento basta dividere b in n parti uguali (n. 158) e considerare l' m^{ma} multipla di una di queste parti di b; cioè la grandezza cercata è data dagli

$$m \frac{b}{n},$$

ossia, come si è convenuto di scrivere,

$$\frac{m}{n} b.$$

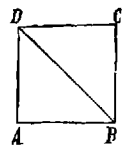
219. Nota. — Dati due segmenti a, b può accadere che non si possa trovare un segmento che sia contenuto esattamente tanto in a quanto in b.

Due segmenti siffatti si dicono *incommensurabili*, mentre si dicono *commensurabili* due segmenti che ammettono un summultiplo comune.

Per esempio *sono incommensurabili il lato e la diagonale di un qualsiasi quadrato.*

Per dimostrare questa asserzione, prendiamo un qualsiasi segmento AB e, costruito su di esso il quadrato ABCD, consideriamone una diagonale, p. e., la BD.

Diciamo che i segmenti AB e BD non hanno summultipli comuni.



Si supponga, invero, che l'm^{mo} summultiplo di AB sia uguale all'n^{mo} summultiplo di BD, cioè

$$\frac{AB}{m} = \frac{BD}{n}.$$

Si avrà allora che se si divide AB in m parti uguali e BD in n parti uguali, le parti di AB risulteranno uguali a quelle di BD.

Condotte nel quadrato di AB le parallele ai lati per i punti di divisione in m parti uguali di due lati consecutivi, otterremo una decomposizione del quadrato di AB in m^2 quadrati uguali.

Analogamente si otterrà una decomposizione del quadrato BD in n^2 quadrati, uguali fra loro e a quelli in cui è decomposto il primo quadrato. Ma, poichè il triangolo ABD è rettangolo ed isoscele, il quadrato di AB è equivalente (n. 207) al doppio del quadrato di AB; ed essendo il quadrato di BD e quello di AB decomposti rispettivamente in n^2, m^2 quadrati tutti uguali fra loro, concludiamo che deve sussistere l'identità aritmetica

$$n^2 = 2m^2,$$

la quale è manifestamente assurda, perchè mentre il secondo membro contiene il fattore primo 2 una volta o un numero dispari di volte, il primo membro non lo può contenere che un numero pari o nullo di volte.

Resta così dimostrato che il lato e la diagonale di un quadrato non hanno nessun summultiplo comune, o, come noi convenimmo di dire, sono incommensurabili.

Ad ogni modo se un segmento a è incommensu-

rabile col segmento b assunto come unità, si può sempre considerare al posto di a un segmento, che ne differisca per un segmento praticamente trascurabile e che sia commensurabile con b.

Per esempio, supponendo di disporre di un doppio-decimetro, graduato in centimetri, millimetri ed anche decimillimetri (sebbene in pratica non si abbiano strumenti di tanta precisione), si costruisca il quadrato di lato uguale ad 1 dm. La diagonale, come abbiamo dianzi dimostrato, è incommensurabile col lato. Tuttavia, adagiando il doppio-decimetro sulla diagonale, troveremo che essa è lunga dm. 1,414, ed, anche ammesso che il quadrato sia stato disegnato colla massima esattezza, sarà impossibile avvertire che la diagonale non è esattamente uguale a 1414 decimillimetri ma ne differisce, in più, per un segmento minore di un decimillimetro: onde praticamente potremo assumere come diagonale del quadrato da noi considerato il segmento lungo dm. 1,414, il quale è commensurabile col lato (lungo 1 dm.).

Nel seguito, quando parleremo di misura o rapporto di due segmenti, intenderemo sempre che essi siano commensurabili.

220. Analogamente a quanto s'è detto pei segmenti (n. 216), si possono misurare gli angoli anche rispetto ad *unità di misura*, diverse dal grado.

Misurazione della superficie di un poligono.

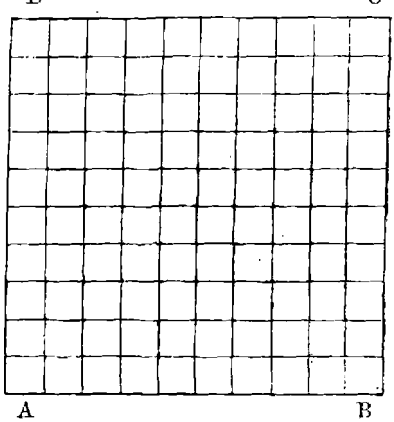
221. Per *misurare* le superficie di un poligono bisogna anzitutto fissare la *unità di misura*.

Solitamente si assume come *unità* il quadrato che ha per lato l'unità di misura dei segmenti. Così

quando si prende come unità delle lunghezze il *metro*, si assume come unità fondamentale per la misura delle superficie il *metro quadrato* cioè la superficie del *quadrato che ha per lato il metro* (1 m.²).

Come unità ausiliari si assumono allora il *decimetro quadrato* (1 dm.²), il *centimetro quadrato* (1 cm²), il *millimetro quadrato* (1 mm.²), e così pure il *decametro quadrato* (1 dam.²), l'*ettometro quadrato* (1 hm.²), il *chilometro quadrato* (1 km.²), cioè la superficie dei quadrati che hanno per lato rispettivamente un decimetro, un centimetro, un millimetro o un decametro, un ettometro, un chilometro (1).

222. Se preso il metro quadrato ABCD, ne dividiamo i due lati AB, BC in decimetri e conduciamo pei 9 punti di divisione segnati su AB le parallele a BC e pei punti di divisione di BC le parallele ad AB, il metro quadrato vien diviso in 100 quadrati, di cui ciascuno ha per lato 1 dm.

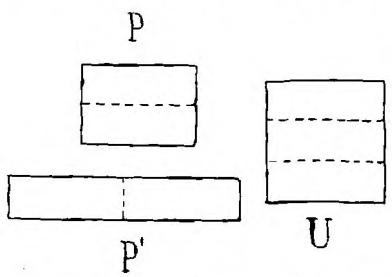


Dunque il metro quadrato contiene esattamente 100 dm.²

Così il decimetro quadrato contiene 100 cm.² e il centimetro quadrato 100 mm.²; onde risulta che il metro quadrato contiene 10 000 cm.² e 1 000 000 mm.²

(1) Per misurare le superficie dei terreni si usano come unità il decametro quadrato e l'ettometro quadrato, che si chiamano, in tal caso, rispettivamente *ara* (1 *a.*) ed *ettara* (1 *ha.*).

223. Analogamente a quanto vale pei segmenti, *misurare* una superficie, p. es., la superficie di un poligono P, per mezzo di una unità U, vuol dire cercare una parte aliquota di U, che sia contenuta un numero esatto di volte in P. Se una certa parte aliquota n^{ma} di U è contenuta esattamente m volte in P si dice che



$$\frac{m}{n}$$

è la *misura* o *area* di P rispetto ad U od anche il *rapporto* di P ad U.

Nell'unita figura l'area di P e l'area di P' rispetto ad U, sono entrambe uguali a $\frac{2}{3}$.

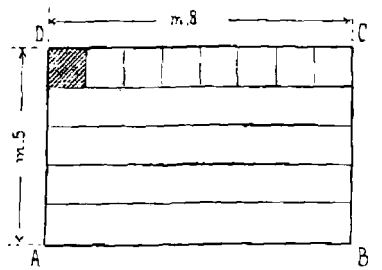
224. La somma $P_1 + P_2$ di due poligoni ha per area la somma delle aree di P_1 e P_2.

225. *Poligoni aventi aree uguali sono equivalenti* e viceversa *poligoni equivalenti hanno aree uguali* (cfr. il postulato enunciato al n. 199).

Regole di misura.

226. La misurazione diretta di un poligono qualsiasi è molto difficile ed anzi, in generale, praticamente impossibile. Perciò è necessario considerare dei casi particolari, per poi ricondurre opportunamente a questi il caso generale.

AREA DEL RETTANGOLO. — Cominciamo dal caso di un rettangolo ABCD, e supponiamo dapprima che ciascuno dei due lati contenga un numero esatto di volte l'unità di misura.



P. es., i lati AB, AD siano rispettivamente di m. 8 e m. 5. Se, dopo aver segnato su AD i metri, conduciamo pei punti di divisione le parallele ad AB, il rettangolo resta diviso in 5 rettangoli uguali. Ciascuno di questi poi è divisibile in 8 quadrati, ognuno dei quali è un metro quadrato. Abbiamo dunque che ABCD contiene 5 volte 8 metri quadrati, cioè la sua area è 40 m².

227. Supponiamo in secondo luogo che i due lati del rettangolo non contengano un numero esatto di metri. Siano essi, p. es., di m. 3,4 e m. 2,6. Ciò vuol dire che i due lati sono rispettivamente di dm. 34 e dm. 26; cosicchè il rettangolo è decomponibile in 34 rettangoli uguali, ciascuno dei quali contiene esattamente 26 dm².

Perciò il rettangolo contiene 34 volte 26 dm². e la sua area è di

dm.² 884

ossia di

m.² 8,84.

Quest'ultimo numero si ottiene moltiplicando fra loro 3,4 e 2,6.

Siccome ciò che si è detto or ora si può ripetere per ogni rettangolo, possiamo enunciare la seguente

Regola. — *Per trovare l'area di un rettangolo si moltiplicano fra loro le lunghezze dei lati* (dimensioni del rettangolo).

228. Nell'applicare la regola precedente bisogna badare che le due dimensioni del rettangolo siano

misurate rispetto alla stessa unità cioè tutte e due in *metri*, o tutte e due in *decimetri* e così via. E l'area risulta allora misurata rispettivamente in *metri quadrati* o in *decimetri quadrati* ecc.

229. Dalla regola del n. 227 risulta quest'altra

Regola — *Data l'area di un rettangolo e una sua dimensione per trovare l'altra si divide l'area per la dimensione che si conosce.*

230. Supponiamo di non conoscere le lunghezze esatte dei lati di un rettangolo ma di averle misurate *con una certa approssimazione*. Con quale approssimazione si può determinare l'area del rettangolo? Riferiamoci per semplicità ad un esempio e supponiamo che le misure approssimate a meno di 1 mm. *per difetto* dei lati del nostro rettangolo R siano

m. 1,256 e m. 6,934.

Ciò vuol dire che uno dei lati è compreso fra m. 1,256 e m. 1,257 e l'altro fra m. 6,934 e m. 6,935; talchè il nostro rettangolo R sarà compreso fra il rettangolo R' avente i lati di

m. 1,256 e m. 6,934

e il rettangolo R'' avente i lati di

m. 1,257 e m. 6,935.

Ora l'area di R'. e quella di R'' sono date rispettivamente (n. prec.), da

m.^{2} 8,709104 e m.^{2} 8,717295;

e quindi l'area di R sarà compresa fra codesti due numeri, cosicchè la parte esatta della misura di R è data dalle cifre comuni ai due numeri suindicati cioè da

m.^{2} 8,7.

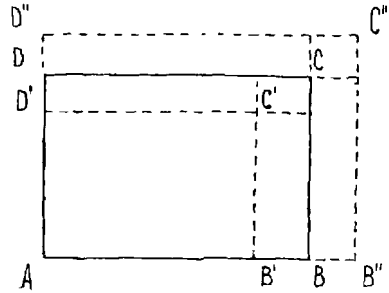
Abbiamo così l'area approssimata di R a meno di 10 dm^2 per difetto. Ma sarebbe *illusorio* il conservare le altre cifre di

m.^{2} 8,709104

in quanto non si può assegnare il limite dell'approssimazione che esse danno.

231. L'esempio precedente mette in luce in qual modo si determinino le cifre esatte dell'area: inoltre esso mostra come partendo dalle misure dei lati approssimate a meno di 1 mm.,

l'area risulti determinata non già coll'approssimazione di 1 mm.², ma con una approssimazione molto minore (nel nostro esempio di 10 dm.²).



Per renderci conto geometricamente di questo fatto, consideriamo il rettangolo ABCD e supponiamo di sostituire ai lati AB, AB di esso rispettivamente certi segmenti minori AB', AD', come appunto si fa quando nelle misure di AB, AD ci fermiamo ad una certa approssimazione. La differenza fra il rettangolo ABCD e il rettangolo A'B'C'D' è data dall'esagono concavo (*gnomone*) B'C'D'DCB; e se a_1 , a_2 sono le misure di AB' , AD' (*misure approssimate* per difetto di AB, AD) ed e_1 , e_2 sono le misure di B'B, D'D (*errori* commessi nella misurazione di AB, AD) l'area di codesto esagono (*errore* che si commette nella determinazione dell'area) è data da

$$a_1e_2 + a_2e_1 + e_1e_2$$

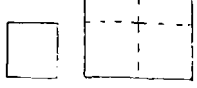
(e non già soltanto dal prodotto e_1e_2 dei due errori lineari).

Analogamente per l'approssimazione per eccesso.

232. Avvertiamo infine che osservazioni analoghe si possono ripetere ogni qual volta si calcoli praticamente un'area (o un volume).

233. QUADRATO. — Il quadrato è un rettangolo avente le due dimensioni uguali. Abbiamo quindi la

Regola. — *Per trovare l'area di un quadrato si moltiplica per sè stessa la lunghezza del lato* o, come si dice, *si fa la seconda potenza o quadrato della lunghezza del lato.*



234. Preso un quadrato qualsiasi, p. es. di mm. 5 di lato e, perciò, di mm.² 25 di area, consideriamo il quadrato di lato *doppio*

ossia di mm. 10 di lato; la sua area è di mm.^{2} 100, ossia è *quadrupla* di quella del quadrato primitivo, come del resto risulta dall'unita figura, in cui abbiamo due quadrati, di cui l'uno ha il lato doppio dell'altro.

Cioè: *se il lato di un quadrato* Q *è doppio del lato di un altro quadrato* Q', *l'area di* Q *è quadrupla di quella di* Q'; *così se il lato di* Q *è multiplo secondo* 3, 4,.... *del lato di un altro quadrato* Q', *il quadrato* Q *è multiplo di* Q' *secondo* 9, 16,....

235. Risulta dal n. 233 la

Regola. — *Data l'area di un quadrato, per trovarne la lunghezza del lato si estrae la radice quadrata dell'area.*

236. PARALLELOGRAMMA. — Poichè un parallelogramma ha la stessa superficie del rettangolo che ha base ed altezza rispettivamente uguali ad esso, (numeri 197 225), troviamo la

Regola. — *Per trovare l'area di un parallelogramma si moltiplicano le lunghezze della sua base e della sua altezza*, o, come si dice brevemente, *si moltiplicano fra loro la base e l'altezza.*

237. Abbiamo di qui quest'altra

Regola. — *Date l'area e la base (o l'altezza) di un parallelogramma, per trovare l'altezza (o la base) si divide l'area per la base (o per l'altezza).*

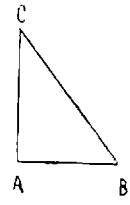
238. TRIANGOLO. — Ricordando che un triangolo è equivalente al rettangolo di altezza uguale e base metà (n. 201) abbiamo subito la seguente

Regola. — *Per trovare l'area di un triangolo si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) della base e dell'altezza.*

239. Se in un triangolo rettangolo si prende come base un cateto, l'altezza è data dall'altro cateto.

Perciò *l'area di un triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto* (delle lunghezze) *dei cateti.*

Risulta di qui che se un triangolo rettangolo ha i cateti rispettivamente doppi tripli, quadrupli,... di un altro, l'area del primo è uguale a 4, 9, 16,... volte l'area del secondo.



240. Dalla regola del n. 238 ricaviamo la seguente

Regola. — *Data l'area di un triangolo e la sua altezza (o la sua base) si trova la base (o l'altezza) moltiplicando per 2 l'area e dividendo il risultato per la base (o per l'altezza).*

241. Indichiamo qui da ultimo, senza darne la dimostrazione, che è alquanto difficile, una formola molto importante per la determinazione dell'area di un triangolo.

Se a, b, c sono le lunghezze dei lati di un triangolo e indichiamo con p il semiperimetro, ossia poniamo

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

l'area S del triangolo è data da

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

242. Esercizio. — L'alunno verifichi la formola precedente nel caso:

a) di un triangolo rettangolo (ricordando il teorema di Pitagora):

b) di un triangolo equilatero.

243. POLIGONI REGOLARI. — Un poligono regolare

è equivalente ad un triangolo avente per base il perimetro del poligono e per altezza il suo apotema (n. 205) cosicchè avremo la

Regola. — *Per trovare l'area di un poligono regolare si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) del perimetro e dell'apotema.*

Abbiamo dunque che per trovare l'area di un poligono regolare di cui si conosca il numero dei lati e la lunghezza del lato bisogna anzitutto determinare la lunghezza dell'apotema.

Indicheremo negli Esercizi, alla fine del libro, i *numeri fissi* moltiplicando pei quali la lunghezza del lato si ottengono le lunghezze degli apotemi dei poligoni regolari più semplici.

244. Nota. La regola, data dianzi per determinare l'area dei poligoni regolari, vale in generale pei *poligoni circoscrittibili a un cerchio,* purchè al posto dell'apotema si assuma il raggio del cerchio iscritto.

245. Trapezio. — Sappiamo che il trapezio è equivalente ad un triangolo avente per base la somma delle basi e per altezza l'altezza del trapezio (n. 203). Avremo quindi la

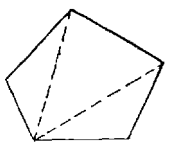
Regola. — *Per trovare l'area di un trapezio si divide per 2 il prodotto (della lunghezza) dell'altezza per la somma (delle lunghezze) delle basi.*

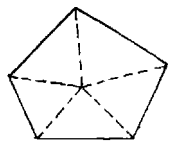
246. Da questa regola si ricavano le regole inverse:

Regola — a) *Per trovare l'altezza di un trapezio, di cui si conoscono l'area e le (lunghezze delle) basi, si divide il doppio dell'area per la somma (delle lunghezze) delle basi.*

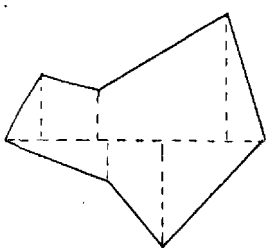
b) *Data l'area di un trapezio e data l'altezza e*

(la lunghezza di) una delle basi, si trova (la lunghezza de) l'altra base, dividendo il doppio dell'area per (la lunghezza de) l'altezza e sottraendo (la lunghezza de) la base data dal quoziente ottenuto.





247. POLIGONI QUALSIANSI. — Per determinare l'area di un poligono qualsivoglia, esso si decompone per lo più in triangoli per mezzo delle diagonali uscenti da un vertice oppure congiungendo un punto interno coi singoli vertici, indi si misurano i vari triangoli così ottenuti e la somma delle aree di essi dà l'area del poligono.



Talvolta invece il poligono si suddivide in trapezi e triangoli rettangoli conducendo in esso una diagonale, detta *base* (possibilmente nel senso della massima dimensione) e abbassando sulla base le perpendicolari dai vertici.

Così per lo più procedono gli Agrimensori nel *rilievo* dei terreni.

Applicazioni del teorema di Pitagora.

248. Applicando il teorema di PITAGORA (n. 209) si può trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscano le lunghezze dei due cateti; come pure, note le lunghezze della ipotenusa e di un cateto, si può trovare la lunghezza dell'altro cateto.

Infatti ricordando che si dice *quadrato* o *seconda potenza* di un numero il prodotto del numero per sè stesso, avremo dal n. 209 che *in un triangolo rettan-*

golo il quadrato della lunghezza dell' ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti.

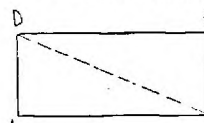
Discendono di qui le due regole seguenti:

Regola. — a) *Per trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze de) i cateti, si estrae la radice quadrata della somma dei quadrati (delle lunghezze) dei cateti.*

b) *Per trovare (la lunghezza di) un cateto di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze de) l' ipotenusa e (de) l' altro cateto, si estrae la radice quadrata della differenza dei quadrati (delle lunghezze) dell' ipotenusa e del cateto noto.*

Le regole precedenti tornano assai spesso utili nelle applicazioni. Qui ci limiteremo a indicare alcuni facili problemi, in cui si trae profitto da esse.

249. DIAGONALE DEL RETTANGOLO. — Un rettangolo ABCD è diviso da una sua diagonale, p. es. la BD, in due triangoli rettangoli (uguali), aventi per cateti due lati consecutivi del rettangolo e per ipotenusa comune la diagonale considerata.



Sia p. es.:

$$AB = \text{cm. } 3{,}5 \quad , \quad AD = \text{cm. } 1{,}2$$

La lunghezza in centimetri della diagonale sarà per la regola a) del n. prec.)

$$\sqrt{3{,}5 \times 3{,}5 + 1{,}2 \times 1{,}2} = 3{,}7$$

cioè cm. 3,7.

Abbiamo dunque che:

La lunghezza della diagonale di un rettangolo è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni.

250. Analogamente ricaviamo dalla regola b) del n. 248 che:

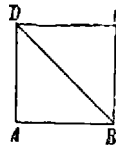
In ogni rettangolo, una delle due dimensioni è uguale alla

radice quadrata della differenza fra il quadrato della diagonale e il quadrato dell'altra dimensione.

251. DIAGONALE DEL QUADRATO. — I triangoli rettangoli in cui un quadrato ABCD è diviso da una diagonale sono isosceli.

Abbiamo perciò che:

La lunghezza della diagonale di un quadrato è uguale alla radice quadrata del doppio del quadrato della lunghezza del lato; e la lunghezza del lato è uguale alla radice quadrata della metà del quadrato della diagonale.

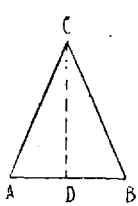


252. Risulta di qui che *per trovare la lunghezza della diagonale di un quadrato, basta moltiplicare la lunghezza del lato per*

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots;$$

e per trovare il lato basta dividere la diagonale per codesto numero.

253. LATO, ALTEZZA E BASE DEL TRIANGOLO ISOSCELE. — Un triangolo ABC isoscele sulla base AB è diviso dall'altezza CD in due triangoli rettangoli uguali, aventi un cateto uguale alla metà della base AB e l'altro uguale all'altezza CD di ABC. Potremo allora valerci delle regole del n. 248 per trovare il lato o l'altezza o la base quando si conoscano gli altri due elementi.



1) Si conoscano in primo luogo la base e l'altezza e si voglia trovare il lato: sia p. es.

$$AB = \text{m. } 10 \quad , \quad CD = \text{m. } 12$$

sarà

$$AD = \text{m. } 5$$

e allora per la regola *a*) del n. 248 la lunghezza in metri del lato AC sarà data da

$$\sqrt{5 \times 5 + 12 \times 12}$$

cioè

$$\text{m. } 13.$$

2) Si conoscano in secondo luogo il lato e la base, e si voglia trovare l'altezza: sia p. es.

$$AB = \text{dm. } 5{,}6 \qquad CD = \text{dm. } 5{,}3.$$

Allora sarà

$$AD = \text{dm. } 2{,}8$$

e per la regola *b*) del n. 248, la lunghezza in decimetri dell'altezza CD sarà data da

$$\sqrt{5{,}3 \times 5{,}3 - 2{,}8 \times 2{,}8}$$

cioè da

dm. 4,5.

3) Infine si conoscano il lato e l'altezza, e si voglia trovare la base.

Se p. es. è

$$AC = \text{cm. } 65 \quad , \quad CD = \text{cm. } 63,$$

avremo, per la regola *b*) del n. 190, che la lunghezza in cm. di AD è data da

$$\sqrt{65 \times 65 - 63 \times 63}$$

ossia da

cm. 16;

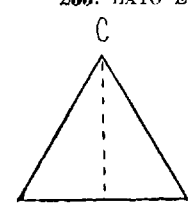
e la base cercata sarà di

cm. 32.

254. Se in un poligono regolare si congiunge il centro con due vertici consecutivi si ottiene un triangolo isoscele, che ha per *base*, *lato* ed *altezza* rispettivamente il *lato*, il *raggio* e l'*apotema* del poligono regolare.

Perciò ricordando il n. prec., avremo che *basterà conoscere due dei tre elementi di un poligono regolare: lato, raggio ed apotema, per trovare il terzo.*

255. LATO E ALTEZZA DI UN TRIANGOLO EQUILATERO. — Un triangolo equilatero ABC è diviso dall'altezza CH in due triangoli rettangoli uguali, in cui l'ipotenusa è doppia di uno dei cateti. L'altro cateto è l'altezza del triangolo equilatero.



Il quadrato di CH sarà equivalente alla differenza dei quadrati di AC e AH. Ma poichè AH è metà di AC il suo quadrato sarà la quarta parte del quadrato di AC: cosicchè avremo che: *In ogni triangolo equilatero il quadrato dell'al-*

lezza è equivalente ai $\frac{3}{4}$ *del quadrato del lato, e quindi il quadrato del lato è equivalente ai* $\frac{4}{3}$ *del quadrato dell'altezza.*

Se p. es. in un triangolo equilatero il lato è di m. 6, l'area in metri quadrati del quadrato dell'altezza sarà

$$\frac{3}{4} \times 6 \times 6 = 27$$

e la lunghezza del lato sarà

$$\text{m. } \sqrt{27} = \text{m. } 5{,}19;$$

così, se l'altezza di un triangolo equilatero è di

cm. 12

l'area del quadrato del lato sarà data in cm.^{2} da

$$\frac{4}{3} \times 12 \times 12 = 192$$

e la lunghezza del lato sarà di

$$\text{cm. } \sqrt{192} = \text{cm. } 13{,}85.$$

256. Siccome l'altezza del triangolo equilatero avente un lato dato è uguale all'apotema dell'esagono regolare che ha il medesimo lato, così *dato il lato di un esagono regolare potremo calcolarne l'apotema e viceversa.*

VI.

PROPORZIONI. POLIGONI SIMILI.

Grandezze geometriche proporzionali.

257. D'or innanzi, parlando di *grandezze geometriche* ci riferiremo ai *segmenti*, *angoli*, *archi*, *superficie*. Più avanti la Geometria solida ci condurrà a nuove specie di grandezze.

Due grandezze appartenenti ad una stessa delle classi suindicate (p. es. due segmenti, o due angoli, ecc.), si dicono *omogenee*.

Le grandezze si designeranno con lettere maiuscole A, B, C,...

258. *Rapporto* di due grandezze omogenee A, B è la misura di A rispetto a B, presa come unità di misura.

Il rapporto di A a B si designa con

$$A : B.$$

259. *Se il rapporto di* A *a* B *è uguale ad* $\frac{m}{n}$, il *rapporto di* B *ad* A *è* $\frac{n}{m}$.

Il rapporto di A a B è maggiore, uguale o minore di 1 secondo che A è maggiore, uguale o minore di B.

260. *Il rapporto di due grandezze omogenee* A, B *è anche dato dal quoto delle misure di* A *e* B *rispetto ad una qualsiasi unità di misura* U.

Consideriamo, p. es., due segmenti a e b e supponiamo che sia

$$a = \text{m. } 3{,}5 \quad , \quad b = \text{m. } 1{,}2.$$

Ciò si può esprimere dicendo che a è uguale a 35 dm. e b a 12 dm., o, in altre parole, la 12ª parte aliquota di b sta esattamente 35 volte in a; cioè

$$a = \frac{35}{12}\, b.$$

Se quindi assumiamo b come unità, la misura di a rispetto a b o il rapporto $a : b$ è uguale a

$$\frac{35}{12}$$

o, ciò che è lo stesso (cfr. n. 217), a

$$\frac{3\,,5}{1\,,2}.$$

261. Def. — Se due grandezze A, B omogenee hanno rapporto uguale al rapporto di altre due grandezze C, D, pure omogenee fra loro, si dice che le quattro grandezze A, B, C, D, sono *in proporzione* o che le due *coppie* A, B e C, D date sono *proporzionali,* e si scrive

$$A : B = C : D.$$

[Si legga « A sta a B come C sta a D »].

262. Per verificare se due coppie A, B e C, D di grandezze sono in proporzione, dobbiamo, per definizione, determinare il rapporto di A e B; se (supposto che A e B siano commensurabili) è $\frac{m}{n}$ il loro rapporto ossia si ha

$$A = \frac{m}{n} B,$$

dovrà essere anche

$$C = \frac{m}{n} D.$$

263. Risulta dal n. 259 che se

$$A : B = C : D,$$

A sarà maggiore o uguale o minore di B secondo che C è maggiore o uguale o minore di D.

264. Ravvicinando i due nn. 260, 262 si ha che: *Per verificare che quattro grandezze* A, B, C, D *sono in proporzione, basta verificare se siano in proporzione* (nel senso insegnato dall'Aritmetica) *le misure di* A *e* B *rispetto ad una qualsiasi unità e le misure di* C e D *rispetto ad una qualsiasi unità.*

265. Nel caso particolare in cui le quattro grandezze A, B, C, D siano tutte omogenee, potremo misurarle rispetto ad una medesima unità di misura, e le quattro misure così ottenute dovranno essere in proporzione.

266. Nella proporzione

$$A : B = C : D$$

le quattro grandezze A, B, C, D si dicono *termini*; ed A e D, B e C si dicono rispettivamente *estremi* e *medi*.

Se $A : B = C : D$

D si dice *quarta proporzionale* dopo A, B, C.

La proporzione

$$A : B = B : C,$$

in cui i medi sono uguali (per il che si richiede che le tre grandezze A, B, C siano omogenee) si dice *proporzione continua*. In tal caso C si dice *terza proporzionale* dopo A e B, e B si dice *media proporzionale* fra A e C.

267. Due classi di grandezze tali che a ciascuna grandezza della prima ne corrisponda *una ed una sola* della seconda, si dicono *direttamente proporzionali* se, prese due grandezze qualsiansi A_1, A_2 della prima classe e le due grandezze corrispondenti B_1, B_2 della seconda classe, si ha sempre che

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2.$$

Si dicono invece *inversamente proporzionali* se prese due grandezze qualsiansi A_1, A_2 della prima classe e le grandezze corrispondenti B_1, B_2 della seconda, si ha sempre che

$$A_1 : A_2 = B_2 : B_1.$$

268. Considerati, p. es., tutti i rettangoli di data altezza $\boldsymbol{h}$, prendiamone due R_1, R_2 di basi rispettivamente $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$. Se per semplicità indichiamo senz'altro con h, h_1, b_2, le lunghezze di codesti segmenti, avremo per definizione che il rapporto $R_1 : R_2$ è dato da (n. 206)

$$\frac{b_1 h}{b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}$$

cioè abbiamo

$$R_1 : R_2 = \boldsymbol{b_1} : \boldsymbol{b_2}.$$

Dunque le superficie dei *rettangoli di data altezza sono direttamente proporzionali alle basi rispettive.*

269. Se invece si considerano i rettangoli che hanno una data area (cioè equivalenti ad un dato rettangolo) e, presine due, sono $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ le loro basi e $\boldsymbol{h_1}$, $\boldsymbol{h_2}$ le altezze rispettive, avremo fra le rispettive dimensioni b_1, b_2, h_1, h_2, (n. 236) l'uguaglianza numerica

$$b_1 h_1 = b_2 h_2,$$

ossia

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_2}{h_1},$$

cioè il rapporto delle due basi è uguale alla reciproca del rapporto delle due altezze; cioè *le basi e le altezze dei rettangoli di data area costituiscono due classi di grandezze inversamente proporzionali.*

Proporzioni dedotte da una data.

270. Insieme con una proporzione sussistono, fra le medesime quattro grandezze, altre proporzioni che si dicono « dedotte » dalla data.

Si hanno cioè i teoremi seguenti:

Teor. — *Se*

$$A : B = C : D,$$

sussistono, insieme colla data, le proporzioni che si ottengono nel modo seguente:

1) invertendo, *cioè,*

$$B : A = D : C;$$

2) componendo, *cioè,*

$$A + B : B = C + D : D;$$

3) dividendo, *cioè, (sotto l' ipotesi* $A > B$ *e, quindi* $C > D$)

$$A - B : B = C - D : D.$$

Siano infatti a, b le misure di A e B rispetto ad una unità di misura U; c, d le misure di C e D rispetto ad una qualsiasi misura U'. Dalla supposta proporzionalità di A, B, C, D discende (n. 264) la proporzione numerica

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

e di qui, in base a noti teoremi di Aritmetica, si ricavano le proporzioni

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d},$$

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d},$$

$$\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d},$$

le quali, pel n. 264, ci dicono appunto che valgono le proporzioni 1), 2), e 3).

271. Teor. — *Se*

$$A : B = C : D$$

e queste quattro grandezze sono omogenee, sussistono, insieme con la data, le proporzioni che si ottengono permutando i medi o gli estremi, *cioè,*

$$A : C = B ; D,$$

$$D : B = C : A.$$

Siano invero a, b, c, d le misure di A, B, C, D rispetto ad una determinata unità (omogenea alle quattro grandezze date).

Avremo, per la supposta proporzionalità di A, B, C, D (nn. 264, 265) la proporzione numerica

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dalla quale discendono, per noti teoremi di Aritmetica, le proporzioni

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

e

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a};$$

e queste due ultime uguaglianze ci dicono appunto (n. 264) che sussistono le proporzioni

$$A : C = B : D,$$

$$D : B = C : A.$$

Costruzioni.

272. Date due grandezze A, B il cui rapporto sia $\frac{m}{n}$ e presa una terza grandezza C qualsivoglia, *vi è una grandezza ben determinata che è quarta proporzionale dopo* A, B, e C. Essa non è altro che la grandezza che ha a C il rapporto $\frac{n}{m}$ (n. 259, 262) cioè la

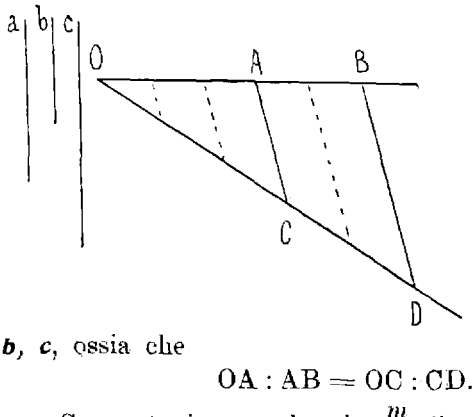
$$\frac{n}{m} \text{ C.}$$

273. Eseguiamo effettivamente questa costruzione nel caso dei segmenti, cioè risolviamo il seguente

Probl. — *Costruire il quarto proporzionale dopo tre segmenti dati* a, b, c.

Prese per un punto O due rette distinte, si prendano sulla prima i due segmenti

$$OA = a. \quad AB = b$$



e sulla seconda il segmento

$$OC = c.$$

Congiunto A con C e condotta per B la parallela BD ad AC diciamo che CD è quarto proporzionale dopo a, b, c, ossia che

$$OA : AB = OC : CD.$$

Supposto invero che sia $\frac{m}{n}$ il rapporto di a a b,

ossia di OA ad AB (nella fig. si è posto $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$) si dividano OA, AB rispettivamente in m, n parti uguali. Le parti di OA riusciranno uguali a quelle di AB o, in altre parole, il segmento OB risulterà diviso in $m + n$ parti uguali.

Condotte allora pei punti di divisione le parallele alla BD e alla AC, il segmento OD resterà diviso in $m + n$ parti uguali (n. 148), di cui m danno il segmento OC e le altre n danno CD. Si mette così in luce che il rapporto di OC a CD è dato da $\frac{m}{n}$, ossia

$$OA : AB = OC : CD.$$

274. Componendo la proporzione $OA : AB = OC : CD$ otteniamo

$$OB : AB = OD : CD.$$

e quindi permutando i medi

$$OB : OD = AB : CD.$$

Possiamo allora enunciare in base al n. prec. il seguente

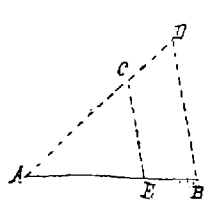
Teor. (di Talete). — *Se i lati di un angolo sono segati da due rette parallele* AC, BD, *le coppie di segmenti intercettati sui due lati sono proporzionali,* cioè, precisamente

$$OA : OC = OB : OD = AB : CD.$$

275. In base a ciò possiamo risolvere anche il seguente

Probl. — *Dividere un segmento dato in parti proporzionali a due segmenti dati.*

Sia da dividere il segmento AB in due parti proporzionale a due segmenti dati a e b.



Condotto per A una semiretta distinta da AB e dalla sua opposta,

si prendano su di essa due segmenti consecutivi AC, CD uguali rispettivamente ai due segmenti a e b.

Congiunto D con B, la parallela per C alla DB incontrerà il segmento AB in un punto interno E, tale che, pel teorema di Talete (n. prec.).

$$AE : EB = AC : CD$$

ossia

$$AE : EB = a : b.$$

276. Nota. — Analogamente si procede per *dividere un segmento dato in parti proporzionali a tre o più segmenti dati.*

277. Notiamo da ultimo che è anche vero l'inverso del teorema di Talete, cioè il

Teor. — *Se due rette segano sui lati di un angolo segmenti ordinatamente proporzionali esse sono parallele.*

I lati dell'angolo $\widehat{O}$ (fig. al n. 273) siano segati da due rette AC, BD in modo che sia

$$OA : OB = OC : OD.$$

Allora le AC, BD sono necessariamente parallele perchè la parallela per B alla AC deve segare sulla semiretta OC il segmento quarto proporzionale dopo OA, OB, OC (n. 273), cioè precisamente OD.

Alla stessa conclusione si arriva supponendo che sia

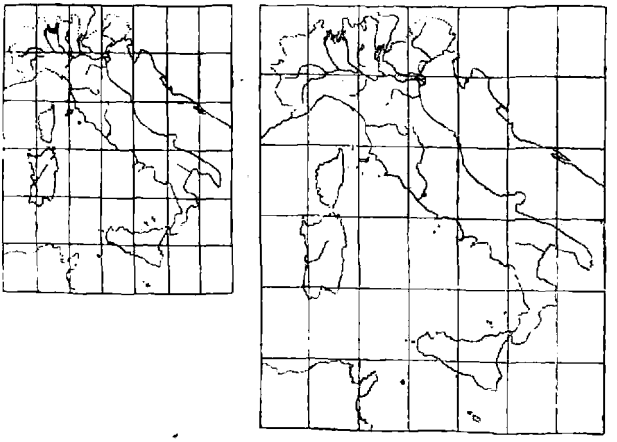
$$OA : AB = OC : CD,$$

giacchè basta comporre per ottenere la proporzione di pocanzi.

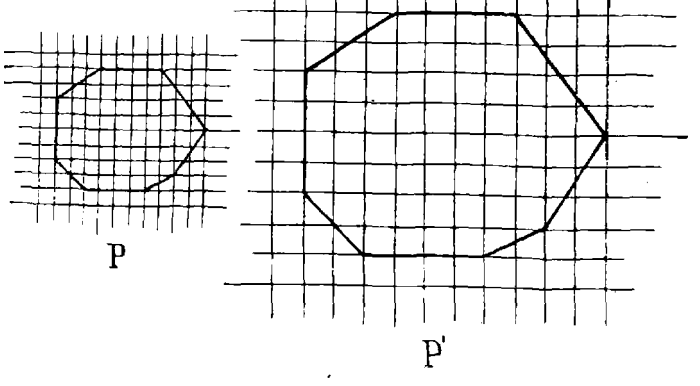
Poligoni simili.

278. Tutti sanno come un disegno si possa riprodurre in dimensioni ingrandite o rimpicciolite.

Per esempio le due annesse cartine rappresentano l'Italia in due *scale* diverse, che stanno fra loro nel rapporto 2 : 3.



Volendo precisare questo concetto, facciamo le seguenti osservazioni. Su di un foglio di carta quadrellata si disegni un poligono P, e, per semplicità,



supponiamo di prendere i vertici di P in punti che siano vertici della quadrellatura.

Dopo ciò si prenda un foglio di carta quadrellata, in cui il lato di ciascun quadrello sia, p. es., doppio, e si eseguiscano su questo foglio le costruzioni analoghe a quelle eseguite dianzi per ottenere P. Otterremo così un poligono P', che si può dire una copia ingrandita di P (nella *scala* 1 : 2).

Precisamente, gli angoli di P' sono ordinatamente uguali a quelli di P e i lati di P' sono ciascuno doppio del lato *corrispondente* di P. Due poligoni siffatti si dicono *simili*.

In generale due poligoni ABC.... HK, A'B'C'....HK', di ugual numero di lati si dicono *simili* se hanno gli angoli ordinatamente uguali e i lati corrispondenti (ossia giacenti intorno agli angoli uguali) in proporzione; cioè se

$$\widehat{A} = \widehat{A'}\ ,\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \ \ldots\ \ \widehat{H} = \widehat{H'}\ ,\ \widehat{K} = \widehat{K'}$$

e

$$AB : A'B' = BC : B'C' = \ldots\ldots = HK : H'K'.$$

279. Se consideriamo i poligoni P e P' della fig. precedente è chiaro che essendo ciascun lato di P' doppio del corrispondente lato di P' anche il perimetro di P' è doppio del perimetro di P; cioè il rapporto dei perimetri di P' e P è uguale al rapporto di due qualsiansi lati corrispondenti dei due poligoni. Ciò vale per ogni coppia di poligoni simili, cioè abbiamo il

Teor. — *Il rapporto dei perimetri di due poligoni simili è uguale al rapporto di una coppia qualsiasi di lati corrispondenti.*

280. Riprendendo ancora i due poligoni P, P' della fig. del n. 278, vediamo che il poligono P è divis

dalla quadrellatura in un certo numero di quadrati e di triangoli rettangoli e il poligono P′ è diviso nello stesso numero di quadrati e di triangoli rettangoli rispettivamente. Di più ciascun quadrato di P′ ha il lato doppio del corrispondente quadrato di P ed ha perciò area quadrupla (n. 234). Lo stesso dicasi dei triangoli rettangoli corrispondenti, in quanto ciascun triangolo rettangolo di P′ ha i cateti rispettivamente doppi dei cateti del corrispondente triangolo di P (n. 239). Risulta di qui che l'area di P′ è quadrupla dell'area di P o, in altre parole, il rapporto di P′ a P è uguale a 4, cioè appunto al quadrato del rapporto di una coppia qualsiasi di lati corrispondenti. Ciò vale in generale, in quanto sussiste il

Teor. — *Il rapporto delle superficie di due poligoni simili è uguale al quadrato del rapporto di una coppia qualsiasi di lati corrispondenti.*

281. Il teor. prec. si può anche enunciare dicendo che *le superficie di due poligoni simili sono proporzionali ai quadrati costruiti su due lati corrispondenti.*

Triangoli simili.

282. Secondo la definizione del n. 248 due triangoli ABC, A′B′C′ si dicono simili quando

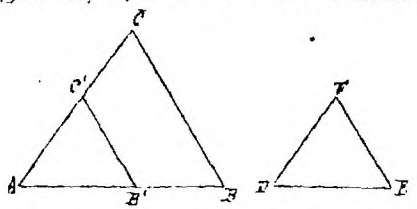
$$\widehat{A} = \widehat{A'}\ ,\ \widehat{B} = \widehat{B'}\ ,\ \widehat{C} = \widehat{C'}$$

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'.$$

Ma per poter concludere che due triangoli sono simili non è necessario verificare tutte e cinque codeste relazioni. Ciò risulta dai seguenti *criteri di similitudine* dei triangoli (nn. 283, 285, 287).

283. I CRITERIO DI SIMILITUDINE. — **Teor.** — *Due triangoli aventi gli angoli ordinatamente uguali, sono simili.*

Siano i due triangoli ABC, DEF, tali che gli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ siano ordinatamente uguali a $\widehat{D}, \widehat{E}, \widehat{F}$.



Per dimostrare che i due triangoli sono simili, dobbiamo far vedere che sono proporzionali i lati che comprendono angoli uguali, p. es. AB, AC, DE, DF. A tale scopo si prendano su AB, AC rispettivamente i punti B', C' tali che sia

$$AB' = DE, \quad AC' = DF.$$

Congiunto B' con C', il triangolo AB'C' risulta uguale a DEF, in quanto sono uguali i lati AB' e DE, AC' e DF e gli angoli $\widehat{B'AC'}$ ed $\widehat{EDF}$ (n. 105).

Allora dalle uguaglianze

$$\widehat{C'B'A} = \widehat{FED}, \quad \widehat{FED} = \widehat{CBA}$$

ricaviamo che sono uguali gli angoli CBA, C'B'A, corrispondenti rispetto alle rette BC, B'C' e alla trasversale AB; onde risulta (n. 63) che codeste due rette sono parallele e quindi, in virtù del teor. di Talete (n. 274), sussiste la proporzione

$$AB : AC = AB' : AC'$$

ossia, essendo $AB' = DE$, $AC' = DF$

$$AB : AC = DE : DF.$$

Analogamente si trova che anche i lati AB, BC sono proporzionali a DE, EF e si conclude che i due triangoli ABC, DEF sono veramente simili.

Nota. — Sappiamo che se un triangolo ha due angoli ordinatamente uguali a due angoli di un altro triangolo, anche i due terzi angoli sono uguali (n. 113). Perciò per poter dire che due triangoli sono simili basterà verificare che due angoli dell'uno sono ordinatamente uguali a due angoli dell'altro.

284. Il teor. prec. ci suggerisce un primo modo di risolvere il seguente

Probl. — *Dato un triangolo* DEF, *costruire un triangolo simile* a DEF *su di un dato segmento* AB, *preso come lato corrispondente a* DE.

A questo scopo si conducano (fig. al n. prec.) per A, B, da una stessa parte della AB, due semirette che formino rispettivamente colle semirette AB, BA due angoli uguali a $\widehat{D}$ ed $\widehat{E}$.

Siccome (n. 110)

$$\widehat{D} + \widehat{E} < 180°,$$

codeste due semirette si incontreranno in un punto C (n. 69) e il triangolo ABC, avendo due angoli ordinatamente uguali a due angoli di DEF, è simile ad esso (n. prec.).

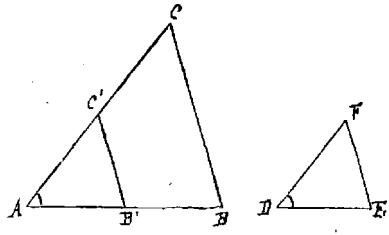
285. II CRITERIO DI SIMILITUDINE. — **Teor.** — *Se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo, e i lati che comprendono questi due angoli sono in proporzione i due triangoli sono simili.*

Siano i triangoli ABC, DEF, in cui si abbia

$$\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$$

$$AB : DE = AC : DF.$$

Diciamo che essi sono simili.



Se è AB = DE, sarà anche per l'ammessa proporzionalità AC = DF (n. 263) e i due triangoli ABC DEF, essendo uguali (n. 105), si potranno senz'altro considerare come simili e aventi fra i lati corrispondenti il rapporto 1.

Se poi AB è diverso da DE si prenda sulla se-

miretta AB il segmento $AB' = DE$ e su AC il segmento $AC' = DF$; e da ultimo si congiunga B' con C'. Otteniamo così un triangolo AB'C' uguale a DEF (n. 105), e siccome è $AC' = DF$, $AB' = DE$, avremo per la supposta proporzionalità

$$AB : AB' = AC : AC'$$

cosicchè, per l'inverso del teorema di Talete (n. 277), concludiamo che le rette B'C', BC sono parallele. Risulta di qui che i due triangoli AB'C' , ABC hanno gli angoli ordinatamente uguali (nn. 70, 113) e sono simili (n. 283). Saranno quindi simili anche ABC e DEF.

286. Risulta di qui un nuovo modo di risolvere il problema del n. 284.

Condotta per A (fig. al n. prec.) da una parte della AB la semiretta che forma con essa un angolo uguale a $\widehat{D}$, si prenda su di essa il segmento $AC' = DF$ e su AB il segmento $AB' = DE$; e infine, congiunto B' con C', si conduca per B la parallela a B'C' fino a incontrare in C la AC'. Il triangolo ABC è simile a DEF (n. prec.).

287. III CRITERIO DI SIMILITUDINE. — **Teor.** — *Se in due triangoli ad ogni lato dell' uno si può far corrispondere un lato dell' altro, in modo che le coppie di lati corrispondenti siano proporzionali, i due triangoli sono simili.*

Siano i due triangoli ABC, DEF, tali che

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD.$$

Diciamo che gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sono rispettivamente uguali a $\widehat{D}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ e quindi i due triangoli sono simili.

Se è $AB = DE$ ne risulta (n. 263) $BC = EF$, $CA = FD$, onde i due triangoli sono uguali (n. 101) e hanno quindi gli angoli ordinatamente uguali.

Se AB non è uguale a DE (e quindi BC, CA non

sono uguali da EF, FD) si prendano (vedi fig. a pag. 124) sulla semiretta AB il segmento AB′ = DE e sulla semiretta AC il segmento AC′ = DF. Congiunto B′ con C′, avremo

$$AB : AB' = AC : AC'$$

cosicchè le rette BC, B′C′ saranno parallele (n. 277) e i due triangoli ABC, AB′C′, avendo gli angoli ordinatamente uguali saranno simili (n. 283).

Avremo perciò che

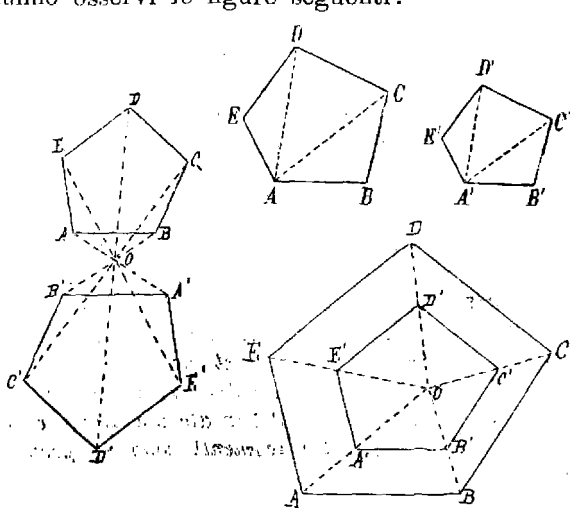
$$AB : AB' = BC : B'C'.$$

Ma per ipotesi

$$AB : DE = BC : EF$$

e per costruzione è AB′ = DE: cosicchè sarà anche (n. 272) B′C′ = EF e i due triangoli AB′C′, DEF, avendo i lati ordinatamente uguali, saranno uguali. Concludiamo di qui che i due triangoli ABC, DEF sono simili.

288. Per la *costruzione di poligoni simili a un dato*, l'alunno osservi le figure seguenti:



Segmenti proporzionali e rettangoli equivalenti. Applicazioni.

289. La teoria delle proporzioni fra segmenti si può mettere in relazione colla teoria della equivalenza fra i poligoni. Il fondamento di codesta relazione è dato dal seguente teorema:

Teor. — *Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo degli estremi è equivalente a quello dei medi.*

Viceversa, se quattro segmenti in un certo ordine sono tali che il rettangolo del primo e del quarto sia equivalente a quello del secondo e del terzo, i quattro segmenti formano una proporzione.

Siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ quattro segmenti tali che

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}$$

e siano m_a, m_b, m_c, m_d le misure rispettive (rispetto ad una qualsiasi unità). Avremo allora fra codeste quattro misure la proporzione (n. 265)

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{m_c}{m_d} ,$$

onde risulta

$$m_a \cdot m_d = m_b \cdot m_c ;$$

e quest'ultima uguaglianza ci dice (n. 227) che l'area del rettangolo di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{d}$ è uguale a quella del rettangolo di $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$; cioè appunto codesti due rettangoli sono equivalenti.

Reciprocamente, se codesti due rettangoli sono equivalenti, le loro aree saranno uguali e avremo (cfr. anche il n. 227)

$$m_a \cdot m_d = m_b \cdot m_c .$$

Di qui si ricava l'uguaglianza

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{m_c}{m_d}$$

e quindi (n. 265) la proporzionalità dei segmenti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$.

290. Si ha in particolare dal teor. prec. che *se tre segmenti sono in proporzione continua, il quadrato del medio è equivalente al rettangolo degli altri due. Viceversa, se tre segmenti sono tali che il quadrato del medio è equivalente al rettangolo degli altri due, i tre segmenti sono in proporzione continua.*

291. In base al numero prec. alcuni teoremi di equivalenza dimostrati nel Cap. IV si traducono in teoremi di proporzionalità, e, viceversa alcuni teoremi sulla proporzionalità di segmenti si traducono in teoremi di equivalenza.

Per esempio, il teor. del n. 208 dà il seguente

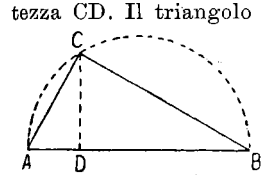
Teor. — *In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sulla ipotenusa stessa.*

Così la costruzione del n. 215 permette di *costruire il segmento medio proporzionale fra due segmenti dati.*

292. Viceversa, dimostreremo ora un teorema di proporzionalità, che si traduce in un utile teorema di equivalenza. Giungeremo così ad una nuova costruzione del quadrato equivalente ad un rettangolo dato e, al tempo stesso, ad una nuova costruzione del medio proporzionale fra due segmenti dati.

Teor. — *In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal piede di codesta altezza.*

Nel triangolo ABC, rettangolo in C, si abbassi da C l'altezza CD. Il triangolo resta così diviso nei due triangoli ADC, CDB, rettangoli entrambi in D, e tali di più che hanno ciascuno un angolo comune col triangolo primitivo ABC; cosicchè i tre triangoli ABC, ADC, CBD hanno gli angoli ordinatamente uguali (n. 113). Allora dal n. 283 discende che



$$AD : DC = DC : DB.$$

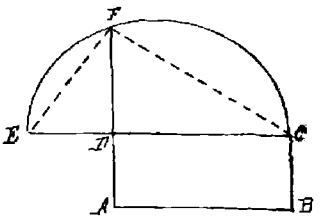
293. Nota. — Data una semicirconferenza di diametro AB, e abbassata da un punto qualsiasi C di essa la perpendicolare CD su codesto diametro, abbiamo, poichè il triangolo ABC è rettangolo in C, che *la distanza di un qualsiasi punto di una semicirconferenza dal suo diametro è media proporzionale fra i due segmenti in cui codesto diametro è diviso dal piede della detta distanza.*

294. In base al n. 290 il teor. del n. 292 si può enunciare: *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo dei due segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal piede di codesta altezza.*

Risulta di qui una nuova costruzione del medio proporzionale fra due segmenti dati e una nuova risoluzione del problema del n. 215. Qui considereremo questo secondo problema, la cui soluzione implica quella del primo.

295. Probl. — *Trasformare un rettangolo in un quadrato.*

Dato il rettangolo ABCD, si prenda sul prolungamento di CD il segmento DE uguale ad AD, e si descriva una semicirconferenza di diametro EC. Prolungato il lato AD, fino a incontrare in F la semicirconferenza, diciamo che il quadrato di DF è equivalente al rettangolo ABCD.



Congiunto, infatti, F con E e C, l'angolo $\widehat{EFC}$ è retto, perchè iscritto in una semicirconferenza (n. 168) e nel triangolo rettangolo ECF il quadrato dell'altezza DF è equivalente (n. prec.) al rettangolo dei due segmenti ED, DC dell'ipotenusa, cioè al rettangolo ABCD.

VII.

LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA E AREA DEL CERCHIO.

Lunghezza della circonferenza.

296. Data una circonferenza, immaginiamo di averne costruito un modello concreto, p. es. mediante un filo di ottone. Se, dopo averlo tagliato in un punto, noi distendiamo il filo su di una retta, otteniamo un segmento c, che noi chiameremo *circonferenza rettificata* o anche *lunghezza della circonferenza*.

Misurando questo segmento, possiamo trovare la *misura* della lunghezza della circonferenza [1].

Ma per avere questa misura non occorre proprio servirsi come dianzi del filo. Infatti si considerino i perimetri dei poligoni iscritti e circoscritti alla circonferenza data. Manifestamente i perimetri dei poligoni iscritti sono minori di c e quelli dei poligoni circoscritti sono maggiori. Di più si vede come codesti poligoni, tanto iscritti che circoscritti, ove abbiano un numero di lati molto grande, finiscono quasi col confondersi colla circonferenza stessa.

Risulta di qui come, misurando il perimetro di un poligono iscritto o circoscritto alla circonferenza, avente

[1] Questa misura si può del resto trovare direttamente servendosi di un metro a nastro comune o meglio ancora di un *metro clinico* (a nastro metallico flessibile).

un numero grandissimo di lati, si ottiene una *misura approssimata* (rispettivamente per difetto o per eccesso) della lunghezza della circonferenza; e l'approssimazione è tanto maggiore quanto più grande è il numero dei lati del poligono considerato.

Se p. es. abbiamo una circonferenza di m. 1 di diametro e consideriamo l'esagono regolare iscritto e il quadrato circoscritto, troviamo (n. 188) che la lunghezza della circonferenza è compresa fra m. 3 e m. 4. Più precisamente, considerando poligoni iscritti e circoscritti ad un grande numero di lati, si trova che la circonferenza di 1 m. di diametro è lunga

m. 3,14

o, se si vuol giungere ai decimillimetri,

m. 3,1416.

Se il diametro anzichè di 1 m., è di 2 m. si trova che la lunghezza della circonferenza è di

m. 6,2832, = m. (3, 1416 × 2);

cioè, quando si raddoppia il diametro, si raddoppia anche la lunghezza della circonferenza.

E così pure se il diametro è di m. 3 o m. 4 o m. 5, ecc., la lunghezza della circonferenza è rispettivamente di

m. 9,4248 = m. (3,1416 × 3)
m. 12,5664 = m. (3,1416 × 4)
m. 15,7080 = m. (3,1416 × 5)

ecc.

Insomma si ha questo fatto importantissimo che *qualunque sia la circonferenza che si considera, il rapporto della lunghezza della circonferenza al diametro è sempre lo stesso* ed è dato da 3,14 o, con maggiore approssimazione, da 3,1416. Possiamo quindi enunciare la seguente

Regola. — *La lunghezza di una circonferenza si ottiene moltiplicando la lunghezza del diametro per il numero fisso* 3,14 o, *se si vuole una maggior precisione,* 3,1416.

Risulta di qui che la lunghezza della *semicirconferenza* si ottiene moltiplicando la lunghezza del *raggio* per 3,14 (o 3,1416).

297. Segue dal n. prec. quest'altra

Regola. — *Il diametro di una circonferenza si ottiene dividendo la lunghezza di essa per il numero* 3,14 *o* 3,1416.

298. Il numero fisso che dà *il rapporto costante della lunghezza della circonferenza a quella del diametro,* si suole indicare in Matematica colla lettera greca π *(pi greco)*; cosicchè, se indichiamo con r la lunghezza del raggio e con c quella della circonferenza, le due regole precedenti sono espresse dalle due formole $c = 2\pi r$, $2r = \frac{c}{\pi}$.

Avvertiamo che (come è stato dimostrato dal LAMBERT nel 1770) la circonferenza rettificata e il diametro sono incommensurabili, cosicchè non si può assegnare il valore esatto di π sotto forma di frazione decimale o ordinaria; ma si può darne un valore approssimato con un'approssimazione grande quanto si vuole. Nella pratica è sufficientemente esatto il valore 3,14 approssimato (per difetto) a meno di 0,01 o al più il valore 3,1416 approssimato (per eccesso) a meno di 0,0001.

299. Determinata la lunghezza di una circonferenza si può agevolmente trovare la lunghezza di un suo arco, che corrisponda ad un angolo al centro di data ampiezza.

P. es. si voglia trovare la lunghezza di un arco di circonferenza di 1 m. di raggio corrispondente ad un angolo al centro di 43°. La lunghezza dell'intera circonferenza è di

$$\text{m. } (2 \times 3{,}14) = \text{m. } 6{,}28;$$

e poichè il grado è la 360ª parte di quattro angoli retti, la lunghezza dell'arco corrispondente all'angolo di 1° sarà di

$$\text{m. } (6{,}28 : 360)$$

e infine la lunghezza dell'arco corrispondente ad un angolo al centro di 43° sarà di

$$\text{m. } \frac{6{,}28 \times 43}{360} = \text{m. } 0{,}75.$$

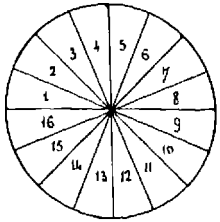
Abbiamo cioè che *la lunghezza dell'arco si trova moltiplicando la lunghezza dell'intera circonferenza per il numero dei gradi del corrispondente angolo al centro e dividendo il prodotto per 360.*

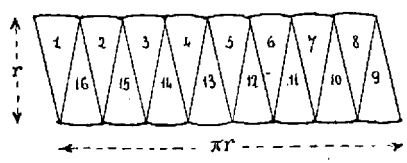
300. Se l'ampiezza dell'angolo al centro è data in gradi minuti e secondi, essa si riduce anzitutto a secondi e poi per avere la lunghezza dell'arco corrispondente si moltiplica la lunghezza della circonferenza per il numero di secondi ottenuto e si divide il prodotto per 1 296 000 (numero dei secondi contenuti in 360°).

Area del cerchio.

301. Sia dato un cerchio C di cui indichiamo con r la lunghezza del raggio.

Per determinarne l'area si divida la circonferenza in 4 parti uguali, poi in 8, in 16 e così via. Se ci fermiamo ad un numero abbastanza grande, ciascuno degli archetti uguali, in cui è divisa la circonferenza, finisce quasi col confondersi con la corda rispettiva.





Allora ritagliamo i settori corrispondenti a codesti archetti, in cui vien diviso il cerchio C, e disponia-

moli come indica l'unita figura, in cui ci siamo limitati a dividere la circonferenza in 16 parti uguali. Otteniamo così una figura, la quale, se gli archetti sono abbastanza piccoli da potersi confondere praticamente colle corde rispettive, si riduce a un parallelogramma, avente per base la semicirconferenza e per altezza il raggio r del cerchio dato.

In base a ciò concludiamo che *la superficie del cerchio è uguale a quella di un parallelogramma avente la base uguale alla lunghezza della circonferenza e l'altezza uguale al raggio.*

Siccome la lunghezza della semicirconferenza si trova moltiplicando il raggio per 3,14 (o 3,1416) e l'area di un parallelogramma si trova moltiplicando la base per l'altezza, avremo la seguente

Regola. — *L'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per 3,14* (o 3,1416).

302. Il risultato del n. prec. si può anche enunciare dicendo (n. 201) che:

La superficie di un cerchio è uguale a quella di un triangolo avente la base uguale alla lunghezza della circonferenza e l'altezza uguale al raggio.

303. Risulta dal n. 301 che se un cerchio C' ha raggio doppio di un altro cerchio C, l'area di C' è quadrupla di quella di C. Così se il raggio di C' è multiplo di quello di C secondo 3,4,..., l'area di C' è multipla di quella di C secondo 9,16,...

304. Dalla regola del n. 301 si ha inversamente quest'altra

Regola. — *Per avere il raggio di un cerchio di cui è data l'area, si divida questa per 3,14* (o 3,1416) *e si estragga la radice quadrata del quoziente ottenuto.*

305. Nota. — Se si indica con A l'area del cerchio e con r il suo raggio, le due regole dei nn. 301 e 304 sono espresse dalle formole

$$A = \pi r^2 \quad , \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} .$$

306. Un'osservazione simile a quella del n. 301 mostra che *la superficie di un settore circolare è uguale a quella di un parallelogramma avente per altezza il raggio del settore e per base la metà della lunghezza dell'arco di circonferenza corrispondente.*





Ossia: *La superficie di un settore circolare è uguale a quella di un triangolo avente per altezza il raggio del settore e per base la lunghezza dell'arco corrispondente.*

Quindi *l'area di un settore circolare si otterrà dividendo per 2 il prodotto (delle lunghezze) del raggio e dell'arco corrispondente.*

307. Del resto, determinata l'area di un cerchio è facile trovar direttamente l'area di un suo settore, che corrisponda ad un angolo al centro di nota ampiezza.

P. es. in un cerchio di dm. 5 di raggio si voglia trovar l'area di un settore corrispondente ad un angolo al centro di 27°.

L'area del cerchio è di

$$\text{dm.}^2\ (5 \times 5 \times 3{,}14) = \text{dm.}^2\ 78{,}50 ;$$

cosicchè un settore corrispondente ad un angolo al centro di 1° avrà l'area di

$$\text{dm.}^2\ (78{,}50 : 360)$$

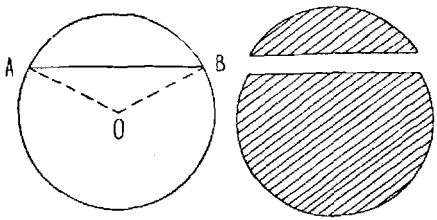
e il settore prefissato avrà l'area di

$$\text{dm.}^2\ \frac{78{,}50 \times 27}{360} = \text{dm.}^2\ 5{,}58.$$

Insomma *l'area di un settore si trova moltiplicando l'area dell'intero cerchio per il numero di gradi del corrispondente angolo al centro e dividendo il prodotto per 360.*

308. Se l'ampiezza dell'angolo al centro è data in gradi, minuti e secondi, si opera similmente a quanto si è detto al n. 300.

309. Nota la regola per trovar l'area del settore, si trova agevolmente quella del segmento circolare.



L'area del segmento circolare minore di un semicerchio si trova sottraendo dall'area del settore (convesso) corrispondente l'area del triangolo isoscele ABO.

L'area dell'altro segmento circolare si trova aggiungendo l'area dello stesso triangolo isoscele a quella del settore (concavo) corrispondente.

VIII.

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO.

Noi ci siamo occupati sin qui di *figure piane*, cioè di figure contenute per intero in un piano. Ora ci occuperemo di figure non contenute ciascuna in un solo piano, cioè di *figure solide*.

La parte della Geometria, che studia la proprietà delle figure solide, dicesi *Geometria solida* o *Stereometria*.

Naturalmente noi qui non potremo rappresentare le figure solide sul foglio del disegno se non in modo prospettico, appunto come una fotografia può dare l'immagine di un dado o di un altro corpo solido qualsiasi.

Rette e piani nello spazio.

310. Nello spazio si possono immaginar condotti infinite rette e infiniti piani.

Come abbiamo convenuto di rappresentare le rette con lettere latine minuscole, così designeremo i piani con lettere greche minuscole α, β,....

L'osservazione diretta ci permette senz'altro di enunciare le seguenti proprietà (*postulati*).

311. Post. — *Due punti determinano una retta* (cfr. n. 6).

312. Post. — *Se una retta congiunge due punti di un piano, tutti i suoi punti appartengono al piano,* o, come si suol dire, *la retta giace sul piano.*

313. Post. — *Tre punti non situati in linea retta determinano un piano.*

Il piano determinato da tre punti A, B, C (non allineati) si chiama il « piano ABC ».

314. Cor. — *Una retta e un punto non appartenente ad essa determinano un piano.*

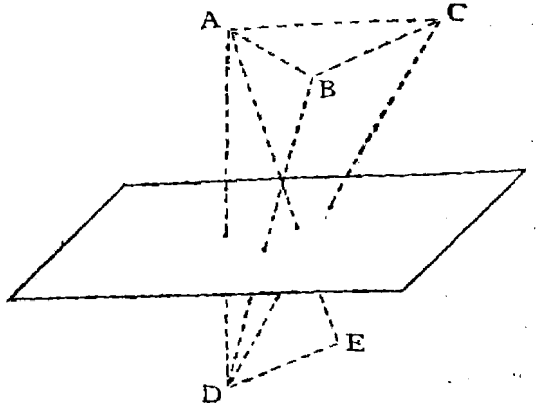
Se, infatti, A è il punto e a è la retta, si scelgano su a due punti distinti B, C; i tre punti non in linea retta A, B, C appartengono ad un piano e ad uno solo (n. prec.), il quale contiene, insieme con A la retta a (n. 312).

Codesto piano si designa con Aa o aA, e si dice che *proietta* da A la retta a.

315. Infine un'osservazione analoga a quella del n. 25, relativa alle divisioni in parti di un piano per mezzo di una sua retta, ci permette di enunciare il seguente

Post. — *Un piano α divide lo spazio in due parti* (dette anche bande, o regioni, o semispazi) *contenenti ciascuna infiniti punti, per modo che:*

un punto dello spazio fuori di α appartiene all'una o all'altra parte;



due punti di una medesima parte, fuori di α, *sono gli estremi di un segmento che non sega il piano;*

due punti di parte diversa (opposta) *sono gli estremi di un segmento che sega il piano* α.

Posizioni relative di due rette nello spazio.

316. Due rette a, b nello spazio possono presentare quanto alla loro reciproca posizione, i seguenti tre casi diversi:

1) Le rette a, b hanno un punto C comune. Allora esse giacciono anche in uno stesso piano, il quale si può individuare prendendo (fuori di C) un punto A su a e un punto B su b e considerando il piano ABC (n. 312). Allora le due rette a, b si dicono *incidenti*.

2) Le rette a, b sono in uno stesso piano e non hanno nessun punto comune. Allora le due rette si dicono *parallele* (cfr. n. 60).

3) Le rette a, b possono essere tali che non esista nessun piano che le contenga tutte e due, onde risulta di conseguenza che le due rette non possono avere nessun punto comune, perchè in tal caso le due rette giacerebbero come vedemmo pocanzi in uno stesso piano.

Due rette a, b tali, che non esista nessun piano che le contenga entrambe, si dicon *sghembe*.

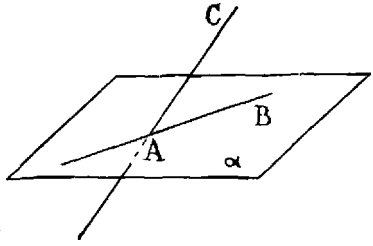
Tali sono, p. es., in un'aula a pianta rettangolare uno spigolo del pavimento ed uno dei due spigoli verticali che non appartengono alla stessa parete del primo.

Posizioni relative di una retta e di un piano nello spazio.

317. Una retta a e un piano α possono trovarsi, l'uno rispetto all'altra, in diverse posizioni che ora enumereremo.

Abbiamo già notato al n. 312 che, se una retta a ha comuni due punti A, B con un piano α, essa giace sul piano.

318. Se invece prendiamo un punto A sul piano α e un punto C fuori di esso, la retta AC ha comune col piano α il solo punto A, perchè se la AC avesse comune con α un secondo punto, oltre A, giacerebbe per intero su α (n. 312) e non potrebbe passare pel punto C esterno ad α.



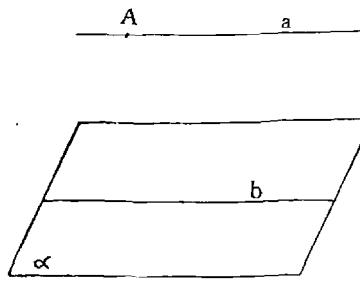
La retta AC e il piano α si dicono allora *secanti* fra loro in A.

319. Può infine accadere che una retta a e un piano α (per quanto si immaginino indefinitamente proseguiti) non abbiano nessun punto comune. Allora la retta a e il piano α si dicono fra loro *paralleli.*

P. es. uno spigolo di un tavolo a piano rettangolare è parallelo al piano del pavimento.

320. Teor. — *Una retta passante per un punto esterno ad un piano e parallela ad una retta di esso è parallela al piano.*

Se la retta a passante pel punto A esterno al piano α è parallela alla retta b di α, il piano delle

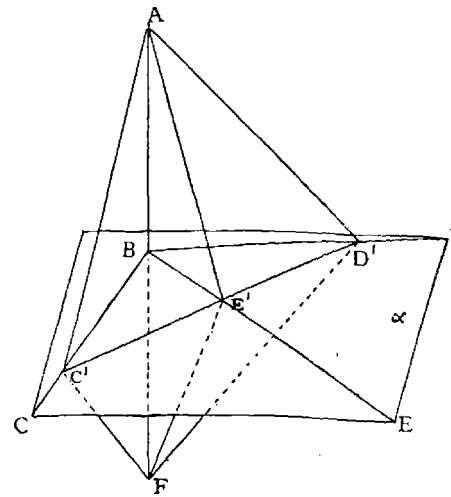


due parallele a, b, distinto da α e contenente la a, ha comune con α i soli punti della retta b, la quale non ha con la a nessun punto comune; onde risulta che la a e α non hanno nessun punto comune, cioè sono paralleli.

Retta e piano perpendicolari.

321. Fra le infinite rette che segano un piano α in un suo punto va considerata in particolare la *perpendicolare*. Per definirla premettiamo il seguente

Teor. — *Se una retta incontra un piano ed è perpendicolare a due rette del piano passanti pel punto di intersezione, è pure perpendicolare a tutte le altre rette del piano, passanti per quel punto di intersezione.*



La retta AB incontri il piano α nel punto B e sia perpendicolare alle due rette BC, BD appartenenti ad α. Condotta su α per B

un'altra qualsiasi retta BE, diciamo che AB è perpendicolare anche a BE.

Infatti, preso sulla BC un punto arbitrario C', sia D' un punto della BD, che cada rispetto alla BE da parte opposta di C', e sia E' il punto, in cui la C'D' incontra la BE. Presi poi sulla AB da parte opposta rispetto a B i due punti A, F tali che AB sia uguale ad FB, si congiungano A ed F con C', D', E'.

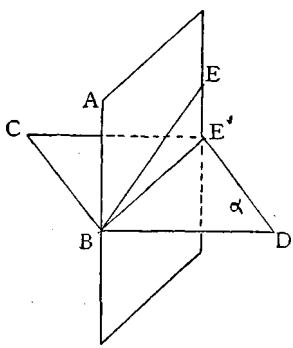
I due triangoli ABC', FBC', rettangoli in B, sono uguali, perchè hanno i cateti AB, FB uguali per costruzione e il cateto BC' comune (n. 130): se ne conclude che sono uguali le ipotenuse AC', FC'. Similmente dall'uguaglianza dei triangoli rettangoli ABD', FBD', che si dimostra in modo analogo, discende che sono uguali le ipotenuse AD', FD'. Allora i due triangoli AD'C', FD'C' hanno il lato D'C' comune e i lati AC', FC' ed AD', FD' ordinatamente uguali; e perciò sono uguali (n. 101), onde risulta l'uguaglianza degli angoli $D\widehat{C'}A$, $D\widehat{C'}F$. Ne discende che i due triangoli AC'E', FC'E', avendo uguali i lati AC', FC' e gli angoli $E\widehat{C'}A$, $E\widehat{C'}F$ e comune il lato C'E', sono uguali (n. 105), e hanno uguali i lati AE', FE'. Consideriamo infine i due triangoli ABE', FBE': essi hanno uguali i lati AB, FB e AE', FE' e comune il lato BE', onde sono uguali (n. 101). Concludiamo che i due angoli adiacenti $A\widehat{BE'}$, $F\widehat{BE'}$ sono uguali, e che quindi la retta AB è perpendicolare alla BE (n. 55).

322. Def. — Una *retta* ed un *piano*, aventi un punto comune, si dicono *perpendicolari*, se tutte le rette giacenti nel piano e passanti per quel punto sono perpendicolari alla retta.

Il piano si dice perpendicolare alla retta e la retta al piano.

Il punto comune alla retta e al piano si dice *piede* della perpendicolare.

Nota. — Secondo quanto è stato dimostrato or ora, per verificare che una retta, avente un punto O comune con un piano, è ad esso perpendicolare, basta verificare che essa è perpendicolare a *due* rette del piano, passanti per O.



323. Teor. *Le perpendicolari ad una retta in un punto giacciono tutte nel piano perpendicolare alla retta nel punto dato.*

Data la retta AB, in un punto B qualsiasi di essa si conducano due perpendicolari BC, BD, e si consideri il loro piano α. Diciamo che ogni altra perpendicolare alla BA in B appartiene a codesto stesso piano.

Sappiamo già (n. prec.) che ogni retta giacente nel piano α e passante per B è perpendicolare alla AB. Per dimostrare che le perpendicolari alla AB in B, giacciono tutte in α, basterà far vedere che ogni retta BE per B, non giacente nel piano α, non è perpendicolare alla AB.

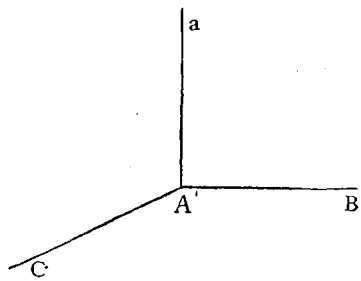
A questo scopo si consideri il piano ABE: esso avendo comune con α il punto B, intersecherà α secondo una retta BE′ distinta da BE; e la BE′, sarà, pel teor. prec., perpendicolare alla AB. Poichè nel piano ABE′ non vi è che una sola perpendicolare alla AB pel punto B (n. 55), concludiamo che la BE non è perpendicolare alla AB.

324. Risulta dal n. prec. che se consideriamo due

rette a, b incidenti in un punto C e fra loro perpendicolari, e facciamo rotare la b intorno alla a tenuta fissa, la b genera il piano perpendicolare ad a in C.

325. Mostriamo *come, dati un punto ed una retta, si possa costruire un piano passante pel punto e perpendicolare alla retta, e come questo piano sia unico.*

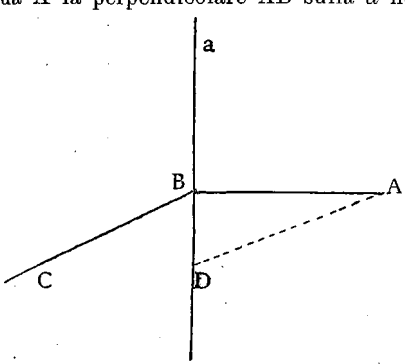
Distinguiamo due casi secondo che il punto dato appartiene alla retta data o è esterno ad essa.



1.° Se il punto dato A giace sulla retta data a, per avere un piano perpendicolare alla a pel punto A, basta considerare il piano di due rette AB, AC, perpendicolari alla a in A (n. 322).

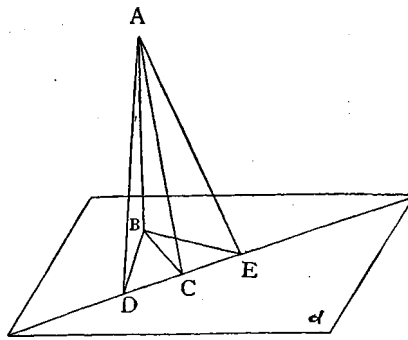
E poichè *tutte* le perpendicolari alla a in A giacciono nel piano ABC (n. 323), questo è l'unico piano perpendicolare alla a in A.

2.° Se il punto dato non giace sulla retta a, si abbassi da A la perpendicolare AB sulla a nel piano Aa, e da B si conduca un'altra retta BC perpendicolare ad a. Il piano ABC è perpendicolare alla a perchè contiene le due rette BA, BC perpendicolari alla a (num. 322).



Se poi si avessero per A due piani perpendicolari alla a, questi non potrebbero incontrare la a in un medesimo punto per quanto si è notato nel primo caso: e d'altra parte essi non possono incontrare la retta a in due punti distinti B, D, perchè altrimenti il triangolo ABD avrebbe due angoli retti, il che è assurdo (n. 110).

326. Teor. — *Se dal piede di una perpendicolare ad un piano si conduce in esso una retta, ogni altra retta del piano, la quale sia perpendicolare a quest'ultima, è perpendicolare al piano delle due prime.*



La retta AB sia perpendicolare al piano α in B; condotta in α la BC, diciamo che ogni perpendicolare alla BC appartenente ad α è perpendicolare al piano ABC.

Se codesta ultima retta passa per B, essa è perpendicolare alle due rette AB e BC e quindi al loro piano (n. 322).

Se invece codesta retta interseca la BC in un punto C, distinto da B, si prendano su di essa da parti opposte rispetto a C due segmenti uguali CD, CE e si congiungano i punti D, C, E con B e con un altro punto A arbitrario di AB. Per dimostrare che la DE, la quale è già per ipotesi perpendicolare alla CB, è perpendicolare al piano ABC, basta provare (n. 322) che essa è perpendicolare alla CA. Per ciò si osservi che la BC è perpendicolare al segmento DE nel suo punto di mezzo, onde risulta che i segmenti BD, BE sono uguali (n. 125). Si considerino allora i due triangoli ABD, ABE, rettangoli in B, i quali hanno il cateto AB comune e i cateti BD, BE uguali. Essi sono perciò uguali (n. 130) ed hanno uguali le ipotenuse AD, AE.

Allora nel triangolo ADE, isoscele sulla base DE, la mediana AC è perpendicolare alla base stessa (n. 123), come appunto volevamo dimostrare.

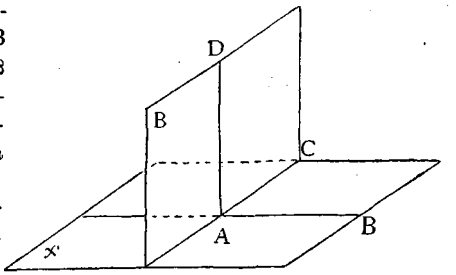
327. Facciamo vedere da ultimo, come applicazione del n. prec., in qual modo, *dati un punto ed un piano, si possa condurre una retta passante pel punto e perpendicolare al piano.*

Vedremo così che codesta perpendicolare è *unica.*

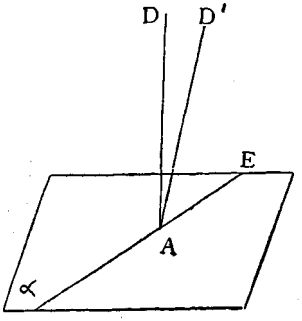
Distinguiamo perciò due casi, secondo che il punto dato giace o no sul piano.

1.° Dato il piano α e il punto A giacente in esso, si

conduca per A in α la retta AB arbitraria e in A si costruisca il piano β perpendicolare alla AB (n. prec.). I piani α, β aventi il punto A comune, si intersecheranno secondo una retta AC.

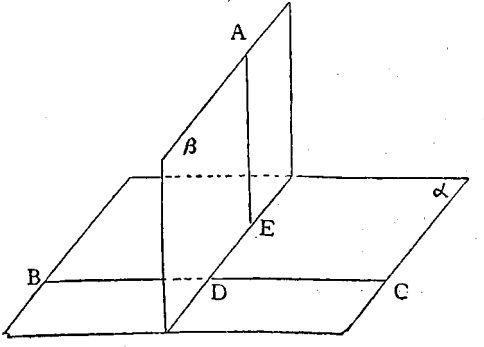


Nel piano β per A si conduca la perpendicolare AD alla AC. Codesta retta AD, come appartenente al piano β perpendicolare alla AB, è perpendicolare essa stessa alla AB, ed essendo perpendicolare anche alla AC è pur perpendicolare al piano α (n. 322).

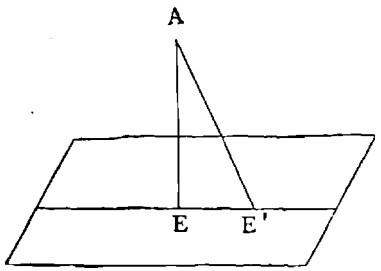


Se poi esistesse per A una seconda perpendicolare AD', ad α, il piano DAD' intersecherebbe α secondo una retta AE, alla quale, per definizione, le rette AD, AD', giacenti con la AB in uno stesso piano, sarebbero tutte e due perpendicolari, il che è assurdo (numero 55).

2.° Dato il piano α, sia A un punto esterno ad esso. Per ottenere una perpendicolare ad α, passante per A, conduciamo nel piano α una retta arbitraria BC e, considerato il piano β passante per A e perpendicolare a BC (n. 325), abbassiamo in esso da A la perpendicolare AE sulla retta intersezione di α e β. La AE è perpendicolare ad α. Se infatti è D l'in-



tersezione di BC e β, abbiamo che pel piede D della perpendicolare BC a β si è condotta in β la DE e per il punto E nel medesimo piano la perpendicolare EA alla DE. Pel teorema del n. prec. la EA è perpendicolare al piano di DE e BC, e cioè al piano α.



Abbiamo poi che per A non può passare una seconda perpendicolare AE' ad α, perchè se questa esistesse distinta dalla AE, il triangolo AEE' avrebbe due angoli retti, il che è assurdo (n. 110).

328. Def. — Dicesi *distanza* di un punto da un piano non passante per esso il segmento della perpendicolare abbassata dal punto sul piano, compreso fra il punto stesso e l'intersezione col piano (*piede* della perpendicolare).

Nota. — Codesta definizione si giustifica osservando che il segmento PQ è minore di ogni altro segmento congiungente P con un punto del piano diverso da Q (n. 128: cfr. n. 132).

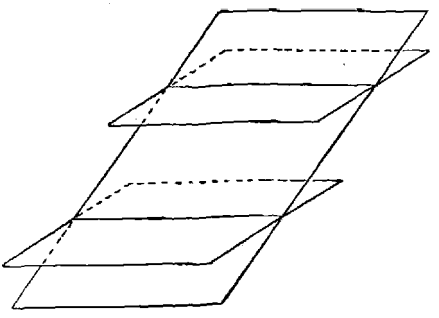
Posizioni relative di due piani nello spazio. Piani paralleli.

329. Due piani α, β, non coincidenti, o *si segano* secondo una retta oppure non hanno nessun punto comune: tali sono, p. es., il piano di un tavolo e il piano del pavimento.

Due piani, non aventi nessun punto comune si dicono *paralleli.*

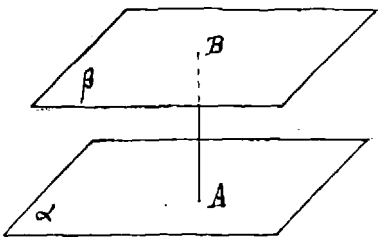
330. Cor. — *Se due piani sono paralleli, tutte le rette dell' uno sono parallele all'altro.*

331. Cor. — *Se un piano sega due piani paralleli, le intersezioni sono parallele.*



Infatti codeste due intersezioni appartengono ad un medesimo piano e non hanno nessun punto comune.

332. Teor. — *Due piani perpendicolari ad una stessa retta in punti distinti sono paralleli.*

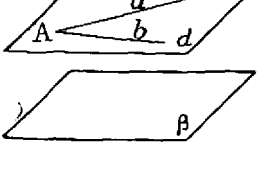


Se infatti due piani α, β, perpendicolari rispettivamente in A, B alla retta AB, si segassero e fosse C un punto della loro intersezione, il triangolo ABC, avrebbe due angoli retti, il che è assurdo (n. 110).

333. Dati un piano β ed un punto A fuori di esso mostriamo *in qual modo si costruisca un piano per* A, *parallelo a* β.

A tale scopo si conducano per A due rette *a, b* parallele a β (n. 320). Il piano *ab* è parallelo a β.

Se infatti il piano *ab* segasse β, la retta intersezione, in quanto giacerebbe su *ab,* o incontrerebbe le due rette *a, b*, o, quanto meno, sarebbe parallela all'una e incontrerebbe l'altra. Se, p. es., incontrasse la *b* in un punto M questo punto dovrebbe trovarsi si-

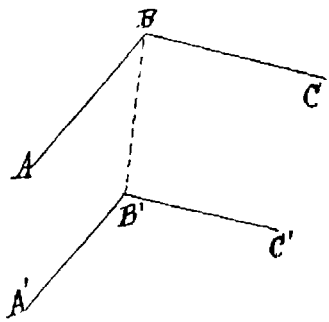


multaneamente sulla retta b e sul piano β, il che è assurdo perchè la b è parallela a β.

334. Nota. — Giova notare che qualunque sia la coppia di rette a, b parallele a β e passanti per A, che si considerano nella costruzione precedente, si ottiene sempre il medesimo piano; cioè: *Per un punto fuori di un piano passa un solo piano parallelo al dato.*

Si supponga infatti, che per un punto A fuori di un piano β, passino due piani α, γ, paralleli a β. Se allora per A si conduce un quarto piano δ che non passi per la retta comune ad α e γ, ma seghi il piano β, questo piano δ sega α e γ secondo due rette che dovrebbero essere entrambe parallele alla retta $\beta\delta$ (n. 331) il che è assurdo (n. 66).

335. Teor. *Se due angoli, non giacenti in uno stesso piano, hanno i lati rispettivamente paralleli, i loro piani sono paralleli.*



L'angolo $A\widehat{B}C$ abbia i lati BA, BC rispettivamente paralleli ai lati B′A′, B′C′ dell'angolo $A'\widehat{B}'C'$, non giacente nel piano ABC.

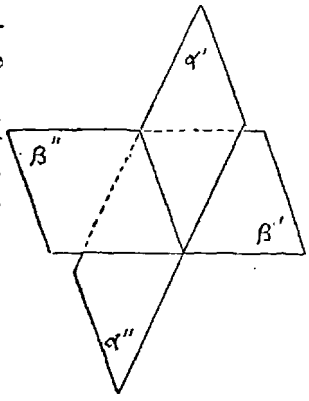
Diciamo che i piani ABC, A′B′C′, sono paralleli.

Infatti le rette BA, BC, in quanto sono rispettivamente parallele a B′A′, B′C′, sono entrambe parallele al piano A′B′C′ (n. 320), e allora risulta dal n. 333 che il piano ABC è parallelo ad A′B′C′.

Diedri e loro sezioni.

336. Due piani α e β, segantisi secondo una retta, dividono lo spazio in quattro parti, ciascuna delle

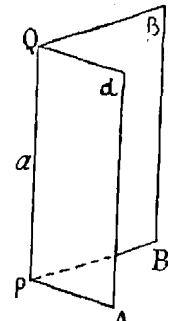
quali è comune a due semispazi limitati l'uno da α e l'altro da β (cfr. il n. 22).



Codeste quattro parti si dicono *regioni diedriche* o *diedri*.

337. Un diedro è determinato da due semipiani α, β, limitati da una medesima retta a; la retta a si dice *costola* o *spigolo* e i due semipiani α, β si dicono *facce* del diedro.

Il diedro si designa con $\widehat{\alpha'\beta}$. Se i punti A, B appartengono rispettivamente alle due facce α, β e se P, Q sono punti dello spigolo, il diedro si designa anche con $\widehat{AaB}$, oppure con $\widehat{APQB}$.



338. Ricordando i nn. 27, 28 l'alunno comprenderà da sè che cosa si intenda per *diedri adiacenti e diedri opposti allo spigolo.*

P. es., nella figura del n. 336 i diedri $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\beta'\alpha''}$ sono adiacenti e e $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\alpha''\beta''}$ sono opposti allo spigolo.

339. Così, in modo analogo a quello tenuto per gli angoli, si definiscono i *diedri concavi* (cfr. n. 24) e i *diedri piatti* (cfr. n. 31).

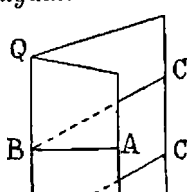
340. Def. — Dato un diedro, dicesi *sezione* di esso l'angolo dei due raggi, secondo cui le due facce del diedro sono segate da un piano non passante per lo spigolo.

In particolare dicesi *sezione normale* ogni sezione, il cui piano sia perpendicolare allo spigolo.

Per avere una sezione normale di un diedro basta innalzare da un punto dello spigolo in ciascuna faccia la perpendicolare ad esso (n. 322).

Infine si dicono *sezioni parallele* di un diedro, quelle i cui piani siano paralleli.

341. — *Sezioni parallele di uno stesso diedro sono uguali.*



Questo teorema si dimostra per mezzo di uguaglianze di triangoli. Ma noi qui, per brevità, ci limiteremo a verificarlo sperimentalmente.

Siano $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ due sezioni parallele di uno stesso diedro $\widehat{\alpha\beta}$.

I lati BA, BC della prima saranno parallele rispettivamente ai lati B'A', B'C' della seconda (n. 331).

Avremo quindi (n. 70)

$$\widehat{QB'A'} = \widehat{QBA}, \quad \widehat{QB'C'} = \widehat{QBC}.$$

Ciò posto, si faccia scorrere il diedro su sè stesso, in modo che scorrano su sè stesse la costola e la faccia β fino a far coincidere B con B'. È chiaro che anche la faccia α scorrerà su sè stessa e che le semirette BC, BA andranno a coincidere con B'C', B'A'. Si ha cioè che l'angolo $\widehat{ABC}$ si sovrapporrà all'angolo $\widehat{A'B'C'}$.

342. Le sezioni normali di uno stesso diedro sono tutte parallele. Perciò dal teor. prec. risulta in particolare che:

Tutte le sezioni normali di uno stesso diedro sono uguali.

343. Osservazione. — Se due diedri sono **uguali**

si verifica sovrapponendoli che le loro sezioni normali sono uguali.

Viceversa se due diedri hanno sezioni normali uguali sono sovrapponibili e quindi uguali.

344. In base al n. prec. e al n. 342 si assume come *misura* di un diedro la misura di una sua qualsiasi sezione normale.

345. Due sezioni di due diedri distinti o dello stesso diedro si dicono « a lati ugualmente inclinati sullo spigolo » o più semplicemente « ugualmente inclinate » se gli angoli formati dai lati dell'una con una medesima semiretta dello spigolo sono rispettivamente uguali agli angoli formati dai lati dell'altra con una medesima semiretta dello spigolo rispettivo.

Ciò premesso, sussiste il seguente teorema che noi ci limitiamo ad enunciare:

Teor. — *In diedri uguali (o nel medesimo diedro) sezioni ugualmente inclinate sono uguali, e, viceversa, se due diedri hanno sezioni ugualmente inclinate uguali, sono uguali.*

Piani perpendicolari.

Proseguendo l'analogia col caso degli angoli, passiamo ad occuparci dei diedri retti, cominciando dalla seguente:

346. Def. — Ogni diedro uguale al suo adiacente dicesi *retto,* e due piani formanti un diedro retto diconsi fra loro *perpendicolari.*

347. Cor. *La sezione normale di un diedro retto è un angolo retto e viceversa.*

Per dimostrare la prima parte, si noti che se un diedro è retto, ossia uguale al suo adiacente (n. prec.) le sezioni normali del diedro dato e del suo adiacente sono uguali (n. 345).

Ma queste due sezioni normali sono angoli adiacenti e perciò sono entrambi retti (n. 48).

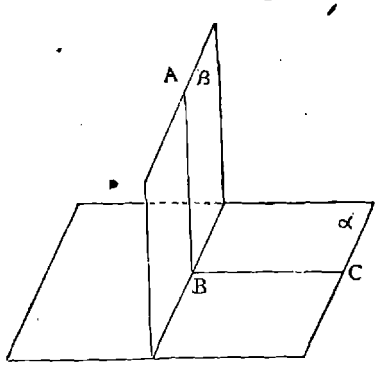
Analogamente si dimostra la proposizione inversa.

Nota. Risulta di qui che l'ampiezza di un diedro retto è 90°.

348. Teor. — *Ogni piano passante per una retta perpendicolare ad un piano è pur esso perpendicolare a questo piano.*

Dato il piano α e la retta AB perpendicolare ad α in B, sia β un qualsiasi piano passante per AB. Diciamo che β è perpendicolare ad α.

Infatti da B nel piano α si innalzi la perpendicolare BC alla intersezione $\alpha\beta$ dei due piani. Poichè la AB è perpendicolare ad α, essa è perpendicolare alla $\alpha\beta$ e alla BC (n. 322): onde risulta che l'angolo $\widehat{ABC}$ è la sezione normale del diedro formato dai due piani: poichè $\widehat{ABC}$ è retto, anche il diedro è retto, ossia i due piani α e β sono perpendicolari.

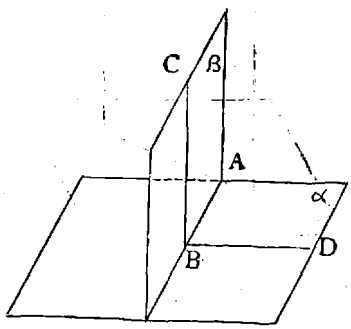


Nota. — Come illustrazione del teor. prec. l'alunno ricordi che i muratori per costruire un muro verticale, cioè perpendicolare ad un suolo orizzontale, dispongono i mattoni secondo il filo a piombo.

349. Mostriamo *come si possa costruire il piano perpendicolare ad un piano dato, lungo una sua retta prefissata.*

Dato il piano α e fissata in esso la retta AB, si conduca in α la perpendicolare alla AB in un suo punto qualsiasi, p. es. la BD, e si costruisca il piano

β, perpendicolare alla BD nel punto B (n. 322). Codesto piano β contiene la retta AB (n. 323); e noi diciamo che esso è perpendicolare ad α.



Se infatti conduciamo in β la BC perpendicolare alla AB, questa retta BC è anche perpendicolare alla BD, perchè giace nel piano β perpendicolare alla BD stessa num. 322); cosicchè si conclude che la BC, perpendicolare alle BA, BD, è perpendicolare al loro piano α: e di qui risulta, in base al n. 310, che il piano β, passante per la BC, è perpendicolare ad α.

350. Nota. — Qualunque sia il punto B che nella precedente costruzione si sceglie per innalzare la perpendicolare alla AB, si ottiene sempre il medesimo piano β, cioè:

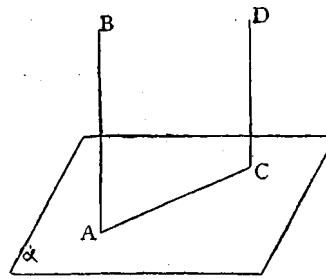
Per una retta prefissata in un piano dato vi è un *solo piano perpendicolare al dato.*

Infatti, condotto in base alla costruzione del n. prec. il piano β perpendicolare ad α lungo la AB, avremo che la sezione normale del diedro retto $\alpha\beta$ è di 90° e che ogni altro piano passante per la AB formerà con α un diedro, la cui sezione normale sarà maggiore o minore di 90°.

351. Cor. — *Le perpendicolari ad un piano nei punti di una sua retta giacciono tutte nel piano perpendicolare al piano dato lungo la retta prefissata.*

352. Teor. — *Due rette perpendicolari ad un piano sono parallele.*

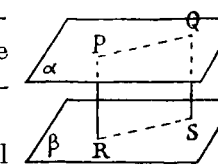
Se le rette AB, CD sono perpendicolari al piano α in A, C rispettivamente, esse sono parallele.



Infatti esse in primo luogo giacciono entrambe nel piano perpendicolare ad α lungo la AC (n. prec.); e d'altra parte non si incontrano perchè sono perpendicolari alla intersezione AC dei due piani (n. 61).

353. Cor. *Se un piano è parallelo ad un altro, tutti i punti dell'uno hanno ugual distanza dall'altro.*

Dati due piani α, β, si abbassino da due punti P, Q di α le perpendicolari PR, QS su β. Diciamo che esse sono uguali.



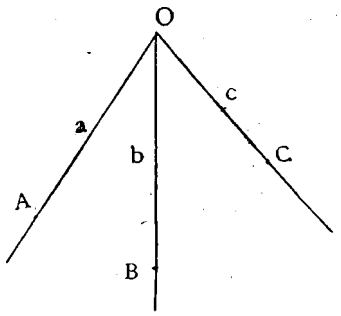
Infatti, condotte le PQ, RS, il quadrangolo PQSR è un parallelogramma, perchè i lati PR, QS sono paralleli come perpendicolari ad uno stesso piano (n. prec.), e i lati PQ, RS sono paralleli come intersezioni di due piani paralleli con uno stesso piano (n. 331).

IX.

ANGOLOIDI E POLIEDRI

Triedri ed angoloidi.

354. Def. La figura costituita da tre semirette a, b, c, uscenti da un punto O, non appartenenti ad uno stesso piano, e dagli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ dicesi *angolo triedro* o semplicemente *triedro* di *vertice* O.



Le semirette a, b, c si dicono spigoli e gli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ si dicono *facce*.

Codesto triedro si designa con « triedro *abc* »; se A, B, C sono tre punti dei tre raggi a, b, c rispettivamente distinti da O, il triedro si designa ancora con $\widehat{O}$ ABC.

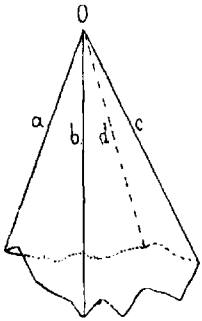
I triedri $A\widehat{bC}$, $B\widehat{cA}$, $C\widehat{aB}$ si dicono *diedri del triedro* e i sei diedri adiacenti si dicono *esterni*.

Se $a_1b_1c_1$ sono i prolungamenti di a, b, c, il triedro $a_1b_1c_1$ si dice *opposto al vertice* al triedro *abc*.

355. L'insieme delle tre facce del diedro dicesi *superficie* di esso.

Si può poi definire il *solido* del triedro come la parte di spazio comune ai tre semispazii limitati dai piani delle facce e contenenti rispettivamente gli spigoli opposti.

356. Per un punto O conduciamo quattro semirette *a, b, c, d,* tali che il piano *ab* lasci *c* e *d* da una stessa parte, il piano *bc* lasci *d* ed *a* da una stessa parte ecc.



Allora la figura costituita dalle quattro semirette *a, b, c, d (spigoli)* e dai quattro angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$, $\widehat{da}$ si dice *angoloide a quattro facce* o *angoloide tetraedro* di *vertice* O. Similmente si definiscono un *angoloide a cinque facce* o *angoloide pentaedro*, *un angoloide a sei facce* o *angoloide esaedro* ecc.

In modo analogo a quello tenuto pei triedri si definiscono anche per un angoloide a più di tre facce la *superficie* e il *solido.*

357. Teor. — *In un angoloide ogni faccia è minore della somma delle altre.*

Verifichiamo per un triedro. Immaginiamo perciò di aver costruito, per esempio in cartoncino, un triedro *abc* (figura alla pagina precedente). Se noi tagliamo il cartoncino lungo uno spigolo, p. e., lungo *b*, e facciamo ruotare la faccia $\widehat{ab}$ intorno ad *a* fino ad adagiarsi su $\widehat{ac}$ e la faccia $\widehat{cb}$ intorno a *c*, in senso opposto, fino ad adagiarsi anche essa sulla $\widehat{ac}$, noi vediamo che le due facce $\widehat{ab}$, $\widehat{cb}$ nella nuova posizione *si ricoprono* in parte onde risulta che la faccia $\widehat{ac}$ è minore della somma delle facce $\widehat{ab}$ e $\widehat{cb}$.

358. Teor. — *In ogni angoloide la somma delle facce è minore di 360°.*

Prendiamo p. es. un ombrellino giapponese. Quando esso è aperto le varie stecche sono tutte in un piano e la somma degli angoli che esse formano a due a due è di 360°. Ma

chiudiamo in parte l'ombrellino, le stecche si dispongono secondo gli spigoli di un certo angoloide. Fra stecca e stecca la carta non resta più tesa come dianzi, cioè gli angoli formati a due a due dalle stecche sono minori di prima, e perciò la loro somma sarà minore di 360°.

Triedri e angoloidi uguali.

359. Come il triangolo ha tre lati e tre spigoli, così il triedro ha anch'esso *sei elementi:* tre facce e tre diedri.

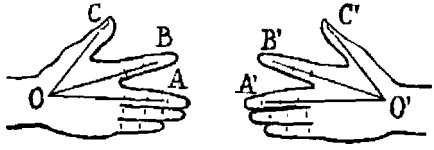
E come accade pei triangoli, se due triedri sono **uguali,** cioè sovrapponibili, hanno ordinatamente uguali i rispettivi sei elementi.

Ma per i triedri si verifica un fatto che non ha il suo analogo nel caso dei triangoli.

Se due triangoli hanno ordinatamente uguali i loro sei elementi (e i criteri di uguaglianza [nn. 101, 105, 107] ci dicono che di codeste sei uguaglianze tre sono superflue) i due triangoli sono sovrapponibili.

Invece per due triedri non basta l'uguaglianza delle sei coppie di elementi omologhi, perchè essi siano sovrapponibili. In altre parole *esistono coppie di triedri che hanno ordinatamente uguali i sei elementi e che pur non sono sovrapponibili.*

Si considerino p. es. i due triedri $\widehat{OABC}$, $\widehat{O'A'B'C'}$, corrispondenti al pollice, all'indice ed al medio della mano destra e della mano sinistra, quali sono rappresentate nell'unita figura, dove si immagina che per entrambe le mani tenute aperte, il pollice sia rialzato sulla palma.



In codesti due triedri abbiamo

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} \quad , \quad \widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'} \quad , \quad \widehat{COA} = \widehat{C'O'A'}$$
$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad , \quad \widehat{B} = \widehat{B'} \quad , \quad \widehat{C} = \widehat{C'}:$$

cionondimeno i due triedri non sono sovrapponibili, nello stesso modo come il guanto della mano destra non si può calzare alla mano sinistra.

I due triedri $\widehat{OABC}$, $\widehat{O'A'B'C'}$ (come appunto la mano destra e la sinistra di uno stesso individuo) si possono riguardare l'uno come l'immagine dell'altro, riflessa da uno specchio piano, e si dicono perciò *simmetrici.*

Ma, come nel comune linguaggio si suol dire che le nostre due mani sono uguali, noi diremo che sono uguali anche i due triedri $\widehat{OABC}$, $\widehat{O'A'B'C'}$.

In generale diremo che sono uguali due triedri sia quando sono sovrapponibili, sia quando sono simmetrici, (cioè tali che l'uno sia sovrapponibile alla immagine dell'altro, riflessa da uno specchio piano).

E se si vogliono distinguere codesti due casi di uguaglianza, due triedri sovrapponibili si dicono *uguali direttamente,* mentre due triedri simmetrici si dicono *uguali inversamente.*

360. In base alla definizione preced. *due triedri uguali hanno ordinatamente uguali le facce e i diedri.*

361. Viceversa si può dimostrare che *se due triedri hanno ordinatamente uguali le facce e i diedri, sono uguali* (*direttamente o inversamente*).

Ed anzi si possono dimostrare, in base al n. **345**, i seguenti teoremi, di cui è manifesta l'analogia coi criteri di uguaglianza dei triangoli (nn. 101, 105, 107):

Dati due triedri, si può concludere che sono uguali, se si sa che hanno rispettivamente uguali:

a) *due facce e il diedro compreso;*

b) oppure *due diedri e la faccia comune;*

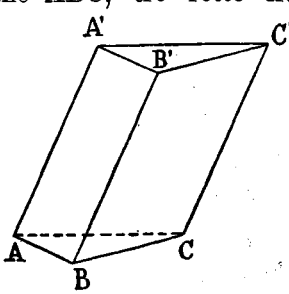
c) oppure *le tre facce;*

d) oppure *i tre diedri.*

362. Le considerazioni del n. 359 e la definizione di *uguaglianza* (diretta e inversa) si estendono senza altro agli angoloidi ad un numero qualsiasi di spigoli.

Prisma.

363. Considerato un triangolo ABC, si conducano per i tre vertici, fuori del piano ABC, tre rette fra loro parallele, e con un piano parallelo ad ABC si seghino codeste tre parallele rispettivamente nei punti A', B', C'.



I tre segmenti A'B', B'C', C'A' risultano paralleli rispettivamente ad AB, BC, CA (n. 331). Cosicchè i quadrilateri ABB'A', BCC'B', CC'A'A sono parallelogrammi perchè hanno i lati opposti paralleli (n. 143).

E allora dal fatto che i tre segmenti A'B', B'C', C'A' sono rispettivamente uguali ad AB, BC, CA (n. 144, 2), concludiamo che il triangolo A'B'C' è uguale ad ABC (n. 101).

La figura ABCC'A'B', costituita da tre parallelogrammi e da due triangoli uguali dicesi *prisma triangolare.*

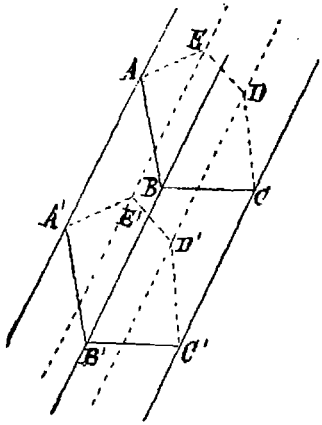
I tre parallelogrammi e i due triangoli dianzi considerati si chiamano *facce* del prisma: i due triangoli si dicono più precisamente *basi* e i parallelogrammi *facce laterali.*

L'insieme delle facce dicesi *superficie* del prisma.

I lati delle facce si chiamano *spigoli* del prisma e i tre spigoli paralleli ed uguali AA', BB', CC' si

dicono più precisamente spigoli *laterali*. Infine si chiama *altezza* del prisma la distanza delle due basi.

364. Similmente si definiscono il *prisma quadrangolare* o *esagonale* ecc.



Considerato un poligono qualsiasi, p. es. un pentagono ABCDE, si conducano per i vertici fuori del piano del poligono cinque rette parallele e si seghino queste rette con un piano parallelo a quello del pentagono dato. Si ottiene così un pentagono A′B′C′D′E che è uguale ad ABCDE.

Per dimostrarlo si noti che i cinque quadrilateri ABB′A′ , BCC′B′ , ... , EAA′E′ sono parallelogrammi in quanto, per costruzione e pel n. 331, hanno i lati opposti paralleli: cosicchè, avendosi che in un parallelogramma i lati opposti sono uguali, sarà

$$A'B' = AB \quad , \quad B'C' = BC \quad , \quad .... \quad , \quad E'A' = EA,$$

e di più, poichè sezioni parallele di uno stesso diedro sono uguali (n. 341), avremo

$$A'\widehat{B'C'} = \widehat{ABC} \quad , \quad B'\widehat{C'D'} = \widehat{BCD} \quad , \quad .... \quad ,$$
$$E'\widehat{A'B'} = \widehat{EAB};$$

onde si conclude che i due pentagoni, avendo ordinatamente uguali i lati e gli angoli, sono uguali (sovrapponibili con una traslazione parallela agli spigoli laterali).

Ciò premesso la figura ABCDEE′A′....D′, costituita da cinque parallelogrammi e da due pentagoni dicesi *prisma pentagonale.*

Analogamente si definiscono i prismi quadrangolari o esagonali ecc.

L'alunno ricordando il n. prec., comprenderà da sè che cosa si intenda per *basi, facce laterali, superficie, spigoli laterali, altezza* del prisma.

365. Cor. — *Gli spigoli laterali di un prisma sono uguali.*

Infatti essi sono uguali a due a due come lati opposti di parallelogrammi (n. 144, 4).

366. Un prisma si dice *retto,* se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi. Un prisma che non sia retto si dice *obliquo.* In un prisma retto gli spigoli laterali sono uguali all'altezza.

367. Un prisma divide lo spazio in due parti, di cui una è la regione di spazio comune ai semipiani limitati dai piani delle facce e contenenti il prisma.

Questa parte di spazio (che è *finita* in quanto non contiene rette intere) dicesi *solido del prisma* o *solido prismatico.*

Parallelepipedo.

368. Def. — Un prisma le cui basi siano parallelogrammi dicesi *parallelepipedo.*

Il parallelepipedo ha otto vertici, dodici spigoli, e sei facce.

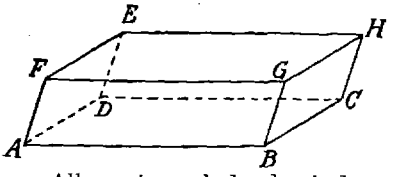
Ogni vertice è comune a tre facce: le altre tre facce passano per un vertice, che si dice *opposto* al primo. Il segmento congiungente due vertici opposti si dice *diagonale.* Ogni parallelepipedo ha quattro diagonali.

369. Teor. — *Le facce opposte di un parallelepipedo sono parallele ed uguali.*

Il prisma quadrangolare ABCDEFGH, di base AC, sia un

parallelepipedo, cioè il quadrangolo ABCD sia un parallelogramma.

Poichè le BC, BG sono parallele alle AD, AF rispettivamente, il piano della faccia BCHG sarà parallelo al piano della faccia ADEF (numero 335) e l'angolo $\widehat{CBG}$ sarà uguale all'angolo $\widehat{DAF}$ (n. 341).



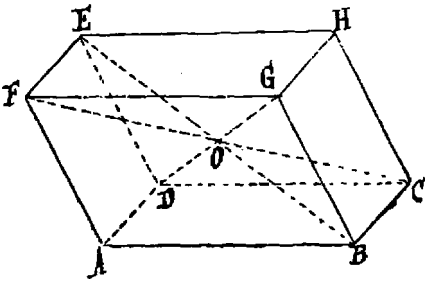
Allora si conclude che i due parallelogrammi ADEF e BCHG, aventi uguali due lati e l'angolo compreso, sono uguali (n. 146).

Nota. — Risulta dal teorema precedente che uno stesso parallelepipedo si può considerare come prisma in tre modi differenti, in quanto si possono assumere come basi due facce opposte qualsiansi.

370. Cor. — *Gli spigoli di un parallelepipedo sono a quattro a quattro paralleli ed uguali* (nn. 370, 144).

371. Cor. — *Le quattro diagonali di un parallelepipedo passano per uno stesso punto che le divide tutte e quattro per metà.*

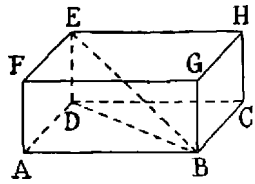
Del parallelepipedo ABCDEFGH si considerino due diagonali quali si vogliano, p. es. le BE, CF.



Poichè i segmenti BC, FE sono uguali e paralleli, il quadrilatero BCEF è un parallelogramma (num. 150) e le due diagonali BE, CF si dimezzano in un punto O (n. 147). Così considerata un'altra diagonale GD, questa giace in uno stesso piano con la BE e la dimezza, cioè passa per il medesimo punto O.

372. Un parallelepipedo retto, le cui basi siano rettangolari, dicesi *parallelepipedo rettangolo.*

Si può costruire un parallelepipedo rettangolo, dati i tre lati concorrenti in un vertice, prendendo per un punto tre rette a due a due perpendicolari, tagliando su di esse a partire dal punto comune tre segmenti uguali ai dati e conducendo per ciascun estremo il piano parallelo al piano delle altre due rette.



Il parallelepipedo così determinato dicesi « parallelepipedo rettangolo contenuto dai tre segmenti dati » o « parallelepipedo rettangolo di essi ».

373. Siano a, b, c le misure di tre spigoli di un parallelepipedo rettangolo ABCDEFGH, concorrenti in un vertice (*dimensioni* del parallelepipedo) e sia precisamente

$$DA = a, \quad DC = b, \quad DE = c.$$

Condotta la diagonale BE del parallelepipedo e la diagonale BD della base, i due triangoli BDE, BAD sono rettangoli in D, A rispettivamente: cosicchè, pel teorema di PITAGORA (n. 209), avremo

$$\overline{BE}^2 = \overline{DB}^2 + c^2$$

$$\overline{DB}^2 = a^2 + b^2$$

e quindi

$$\overline{BE}^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

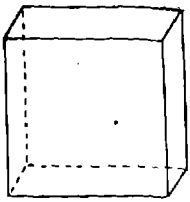
Cioè per trovare la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, si deve estrarre la radice quadrata dalla somma dei quadrati delle dimensioni.

Risulta di qui che:

Le quattro diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono uguali.

374. Se in un parallelepipedo sono uguali tre spigoli concorrenti in un punto sono uguali anche tutti gli altri spigoli (n. 365). Un parallelepipedo siffatto dicesi *romboedro*.

Dicesi poi *cubo* un parallelepipedo rettangolo avente tutti gli spigoli uguali.

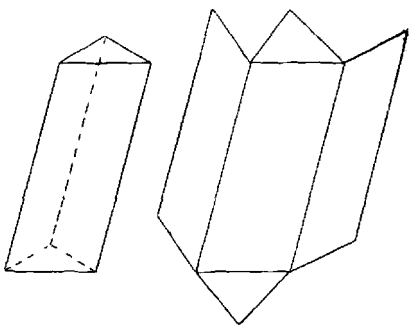


Il cubo ha per facce sei quadrati uguali.

Il cubo resta determinato quando ne è dato il lato; e il cubo costruito sopra un segmento dato come lato si dice « cubo di esso ».

Sviluppo della superficie del prisma.

375. Supponiamo di avere un prisma triangolare di cartoncino ABCC′A′B′ e, tagliatolo, lungo AC, BC, CC′, A′C′, B′C′, distendiamo il cartoncino su di un piano, p. es. sul foglio del disegno. Otteniamo così lo *sviluppo* della superficie del nostro prisma triangolare.

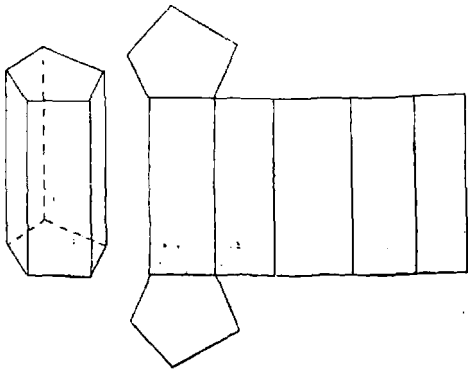


Così possiamo disegnare su di un foglio lo sviluppo di un prisma dato qualsiasi.

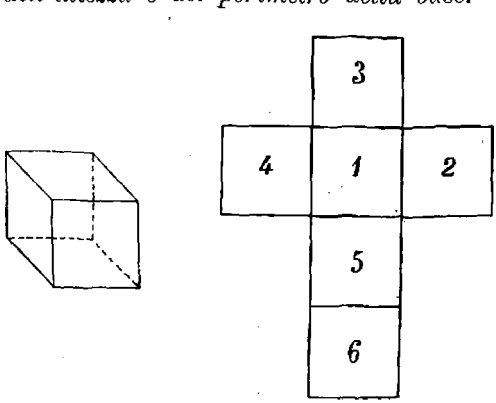
Viceversa, disegnato su di un foglio di cartoncino lo sviluppo di un prisma e ritagliatolo, possiamo con opportune ripiegature, costruire un modello solido del prisma.

376. Se il prisma è retto, le sue facce laterali sono tutte rettangoli di uguale altezza. Perciò lo sviluppo sarà dato dalle due basi e da un rettangolo avente per altezza l'altezza del prisma e per base il perimetro delle basi.

Ricordando la regola per trovare l'area di un rettangolo (n. 227) troviamo la seguente



Regola. — *Per trovare l'area della superficie laterale di un prisma retto si fa il prodotto (delle lunghezze) dell'altezza e del perimetro della base.*

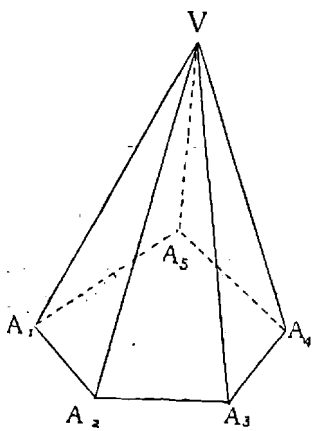


377. Nella figura precedente si ha lo sviluppo della superficie di un cubo.

L'area della superficie (totale) di un cubo si trova moltiplicando per 6 la seconda potenza (della lunghezza) del lato.

Piramide

378. Def. — Dato un poligono, p. es. un pentagono $A_1A_2A_3A_4A_5$ e preso un punto V fuori del piano di esso, la figura costituita dai triangoli A_1A_2V, A_2A_3V,... A_5A_1V e dal poligono $A_1A_2A_3A_4A_5$ dicesi *piramide* di *base* $A_1A_2A_3A_4A_5$ e di *vertice* V. I triangoli nominati diconsi facce laterali della piramide e i lati di essi si dicono *spigoli.*

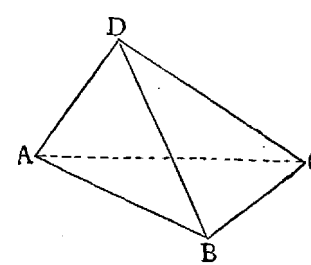


L' insieme delle facce laterali e della base di una piramide si dice *superficie* di essa.

La piramide dianzi considerata, che ha per base un pentagono, dicesi *pentagonale.*

Similmente si possono considerare piramidi *triangolari* o *esagonali* ecc.

Una piramide a base triangolare si dice anche *tetraedro.* Ogni tetraedro si può considerare in quattro modi diversi come piramide, prendendo come base una qualsiasi delle sue quattro facce.



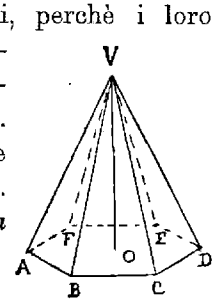
Notiamo che la piramide si può immaginare ottenuta intersecando un angoloide $\widehat{V}$ mediante un piano che seghi tutti gli spigoli di quello.

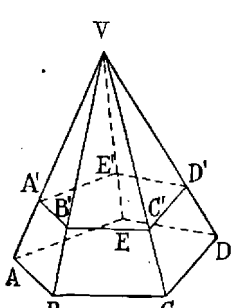
379. Una piramide divide lo spazio in due parti, di cui una è la regione di spazio comune ai semipiani limitati dai piani delle facce e della base e contenenti la piramide.

Questa parte di spazio (che è *finita*) si dice *solido della piramide* e talvolta si chiama anche semplicemente *piramide*.

380. Una piramide, di cui la base sia un poligono regolare e il vertice appartenga alla perpendicolare alla base nel suo centro, dicesi *piramide retta a base regolare*.

Gli spigoli laterali di una piramide retta a base regolare VABCDEF sono tutti uguali, perchè i loro estremi sul piano della base sono equidistanti dal piede O della perpendicolare abbassata dal vertice (nn. 184, 130). Per ciò le facce laterali della piramide sono altrettanti triangoli isosceli uguali. L'altezza comune di essi dicesi *apotema* della piramide.





381. Una piramide ABCDEV, è divisa da un piano parallelo alla base e compreso fra questa e il vertice in due parti, di cui quella dalla parte del vertice è una piramide. L'altra dicesi *tronco di piramide* (a basi parallele).

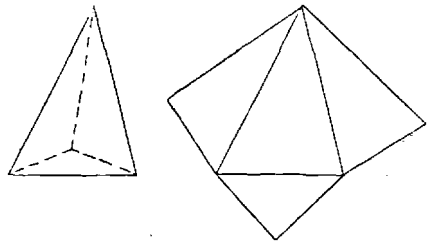
I due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E', aventi gli angoli ordinatamente uguali (n. 341), diconsi *basi* del tronco, e i trapezi ABB'A', BCC'B',.... EAAE' diconsi *facce laterali*. Se la piramide è retta e a base regolare, codeste facce laterali sono

uguali e la loro altezza si dice *apotema* o *lato* del tronco. *Altezza* del tronco è la distanza delle due basi.

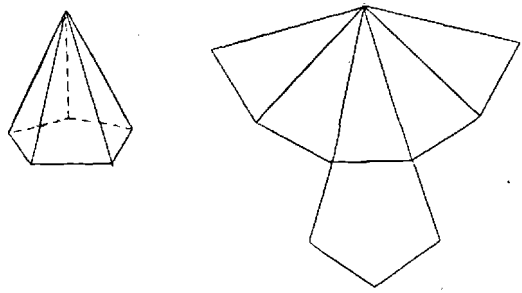
Infine il *solido* del tronco è quella parte del solido della piramide data, che è compresa fra le due basi del tronco.

Sviluppo della superficie della piramide.

382. Lo sviluppo della superficie di una piramide sarà dato dal poligono base e da tanti triangoli aventi a due a due un lato uguale e le basi ordinatamente uguali ai lati della base.



Se la piramide è regolare le facce laterali sono



tutte triangoli isosceli uguali, aventi per altezza l'*apotema* della piramide.

Ora si noti che per trovar l'area della somma di più triangoli di uguale altezza basta moltiplicare la somma delle basi per l'altezza e dividere il prodotto per 2 (n. 238). Giungiamo così alla seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di una piramide regolare è data dal semiprodotto (delle lunghezze) del perimetro della base e dell'apotema.*

383. Lo sviluppo di un tronco di piramide (a basi parallele) sarà dato da due poligoni (basi) e da tanti trapezi (facce laterali) quanti sono i lati delle due basi. Se il tronco appartiene ad una piramide regolare tutti i trapezi sono isosceli ed uguali ed hanno per altezza l'apotema del tronco.

Ricordando la regola che dà l'area di un trapezio (n. 245) troviamo la seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di un tronco di piramide regolare è dato dal semiprodotto (delle lunghezze) dell'apotema e della somma dei perimetri delle basi.*

Poliedri.

384. I prismi e le piramidi sono particolari poliedri.

Def. — Dicesi *poliedro* (convesso) ogni figura costituita da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ognuno dei lati sia comune a due di essi e il piano di ciascuno lasci tutti gli altri da una medesima banda.

I nominati poligoni diconsi *facce* del poliedro e i vertici, i lati e gli angoli rispettivi diconsi *vertici, spigoli* ed *angoli* del poliedro.

I diedri formati da due facce aventi comune uno spigolo e gli angoloidi formati dagli spigoli uscenti da un medesimo vertice, si dicono rispettivamente *diedri* ed *angoloidi* del poliedro.

385. Valgono pei poliedri considerazioni analoghe a quelle dei nn. 359-362.

Così si dicono *uguali* due poliedri sia quando sono sovrapponibili (*uguali direttamente*), sia quando sono simmetrici (*uguali inversamente*) cioè tali che l'uno sia sovrapponibile alla immagine dell'altro, riflessa da uno specchio piano.

In ogni caso *due poliedri uguali hanno ordinatamente uguali le facce e gli angoloidi e quindi gli spigoli e i diedri.*

Viceversa si può dimostrare che *se due poliedri hanno*

ordinatamente uguali le facce e gli angoloidi (e *quindi gli spigoli e i diedri*) *i due poliedri sono uguali* (*direttamente o inversamente*).

Ed anzi sussistono anche pei poliedri *criteri di uguaglianza*, che mostrano come dalla uguaglianza di alcune coppie di facce e di angoloidi discenda di conseguenza la uguaglianza delle altre. Ma noi non ci indugeremo su questo argomento.

Poliedri regolari.

386. Fra i poliedri sono notevoli i *poliedri regolari*.

Dicesi *regolare* un poliedro che abbia tutte le facce regolari ed uguali e tutti gli angoloidi uguali.

Perciò un poliedro regolare ha uguali anche tutti gli spigoli e tutti i diedri.

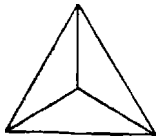
387. *Il cubo è un poliedro regolare.*

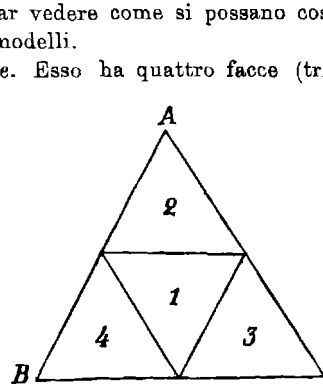
388. Nel piano vi sono poligoni regolari aventi un numero qualsiasi di lati: 3, 4, 5, 6, ecc.

Invece fra i poliedri vi sono, oltre il cubo *o* esaedro regolare, *soltanto altri quattro poliedri regolari,* cioè il *tetraedro regolare,* l'*ottaedro regolare*, il *dodecaedro regolare* e l'*icosaedro regolare.*

Daremo qui di questi quattro poliedri regolari le figure e gli *sviluppi,* in modo da far vedere come si possano costruire in cartoncino i rispettivi modelli.

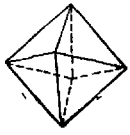
1) *Tetraedro regolare.* Esso ha quattro facce (triangoli

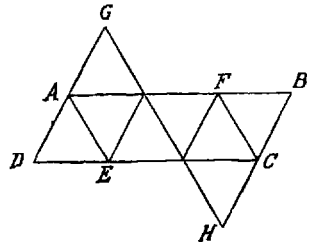




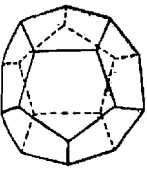
equilateri), quattro vertici e sei spigoli. Gli angoloidi sono triedri.

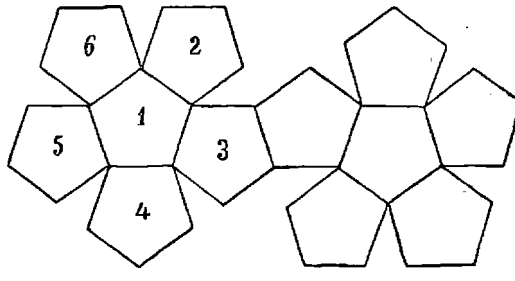
2) *Ottaedro regolare.* Ha otto facce (triangoli equilateri), sei vertici e dodici spigoli. Gli angoloidi sono tetraedri.



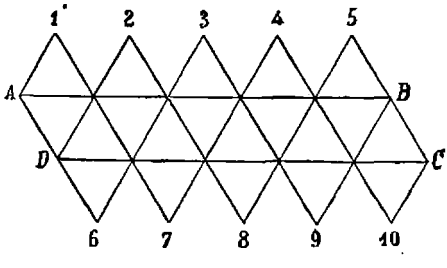


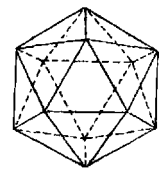
3) *Dodecaedro regolare.* Ha dodici facce (pentagoni regolari), venti vertici e trenta spigoli. Gli angoloidi sono triedri.





5) *Icosaedro regolare.* Ha venti facce (triangoli equilateri), dodici vertici e trenta spigoli. Gli angoloidi sono pentaedri.





X.

MUSURA DEI POLIEDRI

Unità di misura e volume dei poliedri.

389. *I solidi dei poliedri* sono una nuova specie di *grandezze geometriche* (cfr. n. 257).

Per misurare i solidi si assume come *unità* il cubo che ha per spigolo l'unità di misura dei segmenti. Così, in generale, prendendosi come unità delle lunghezze il *metro*, si assume come unità per la misura dei solidi il *metro cubo* cioè *il solido del cubo che ha per spigolo il metro* (1 m.^{3}).

Analogamente a quanto vale pei segmenti e per le superficie, *misurare* un solido, p. es. il solido di un poliedro P, per mezzo di una unità U, vuol dire cercare una parte aliquota di U, che sia contenuta un numero esatto di volte in P. Se una certa parte aliquota di U, p. es. la n^{ma}, è contenuta m volte in P si dice che

$$\frac{m}{n}$$

è la *misura* o *volume* di P rispetto ad U od anche il *rapporto* di P ad U.

390. Scelta come unità dei volumi il metro cubo, si assumono come unità ausiliari il *decimetro cubo*

(1 dm.^{3}) (1), il *centimetro cubo* (1 cm.^{3}), il *millimetro cubo* (1 mm.^{3}), cioè i solidi dei cubi che hanno per spigolo rispettivamente un decimetro, un centimetro, un millimetro, e talvolta anche il *decametro cubo*, l'*ettometro cubo*, ecc.

Se immaginando di avere collocato sul pavimento un metro cubo ne dividiamo tre spigoli concorrenti in un vertice in decimetri e pei punti di divisione conduciamo i piani paralleli alle facce, il metro cubo vien diviso dai nove piani paralleli alle due facce orizzontali in 10 parallelepipedi rettangoli aventi la base di 1 m.^{2} e l'altezza di 1 dm.

Ciascuno poi di questi parallelepipedi è suddiviso dai piani condotti perpendicolarmente alla base in 100 dm.^{3} Cioè il metro cubo contiene esattamente 1000 dm.^{3}

Così il decimetro cubo contiene 1000 cm.^{3} e il centimetro cubo 1000 mm.^{3}; onde risulta che il metro cubo contiene 1 000 000 cm.^{3} e 1 000 000 000 mm.^{3}

391. La misurazione diretta di un solido poliedrico qualsiasi è, in generale, difficilissima e praticamente impossibile. Perciò conviene considerare dei casi particolari, per poi ridurre a questi il caso generale.

Noi qui enumereremo appunto alcune regole pratiche di misura di poliedri.

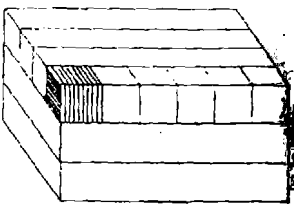
Volume del prisma.

392. VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO.

Consideriamo un parallelepipedo rettangolo P e

(1) È noto che il decimetro cubo è solitamente assunto come unità di misura dei liquidi e in tal caso si chiama più precisamente *litro* (l. l.); e si usano anche i suoi multipli: *decalitro* (10 litri), *ettolitro* (100 litri) e i summultipli: *decilitro* (0,1 di litro), *centilitro* (0,01 di litro).

in primo luogo supponiamo che le tre dimensioni siano ciascuna uguale ad un numero intero di metri. P es. le dimensioni siano di



m. 4, m. 6, m. 3.

Allora si vede dall'unita figura come P si possa dividere in 3 parallelepipedi rettangoli uguali, aventi la stessa base di P e l'altezza di m. 1. Ciascuno di questi è decomponibile in 4 parallelepipedi rettangoli fra loro uguali, alti e larghi 1 m. e lunghi 6 m.

Infine ognuno di questi ultimi parallelepipedi è divisibile in 6 cubi uguali, ognuno dei quali è 1 m.^{3}.

Concludiamo che P contiene esattamente

$$3 \times 4 \times 6$$

metri cubi, cioè il suo volume è di

$$\text{m.}^3\ (3 \times 4 \times 6) = \text{m.}^3\ 72,$$

e si ottiene moltiplicando fra loro le tre dimensioni.

b) Questa stessa regola vale anche nel caso, in cui le dimensioni siano frazionarie.

Siano esse p. es. di

m. 0,12; m. 0,23; m. 0,09.

Possiamo anche dire che le tre dimensioni sono di

cm. 12, cm. 23, cm. 9;

e allora si vede, come pocanzi, che il parallelepipedo contiene esattamente

$$12 \times 23 \times 9$$

centimetri cubi; cioè il suo volume è di

$$\text{cm.}^3\ 2484$$

ossia di

$$\text{cm.}^3\ 0{,}002484$$

E questo stesso numero si sarebbe ottenuto moltiplicando le tre dimensioni del parallelepipedo rettangolo, espresso in metri.

Abbiamo dunque la seguente

Regola. — *Il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto delle misure degli spigoli* (dimensioni del parallelepipedo), o, come si suol dire brevemente, *dal prodotto degli spigoli.*

393. Siccome il prodotto delle due dimensioni della base dà l'area di questa, la regola precedente si può anche enunciare dicendo che il *volume di un parallelepido rettangolo è dato dal prodotto (dell' area) della base per l' altezza.*

394. Qui si presenta una considerazione analoga a quella del n. 230; cioè abbiamo che, quando di un parallelepipedo rettangolo si conoscono le dimensioni soltanto in via approssimata, un errore anche piccolo commesso in ciascuna delle dimensioni implica per il volume un errore relativamente grande. P. es. supponiamo di aver trovato che le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo siano date, a meno di 1 mm. per difetto da

$$\text{mm. } 321\ ,\ \text{mm. } 412,\ ,\ \text{mm. } 701:$$

Siccome si ha

$$321 \times 412 \times 701 = 92\,708\,652$$
$$322 \times 413 \times 702 = 92\,840\,904$$

concludiamo che il volume del parallelepipedo è compreso fra 92 e 93 decimetri cubi: e nulla di più possiamo dire, cosicché, mentre l'approssimazione nella misura delle dimensioni era di 1 mm., qui per il volume si ha un'incertezza di 1 dm.^3.

Notiamo che nel risultato qui ottenuto il numero delle cifre esatte è 2, cioè inferiore di 1 a quello delle cifre note delle dimensioni del parallelepipedo: in altri casi gli è addirittura uguale e in altri ancora gli è inferiore di 2.

Naturalmente nella pratica si dovranno conservare soltanto le cifre esatte, giacchè le altre sono completamente illusorie.

395. Per rendersi conto della grande portata che nel calcolo dei volumi hanno i piccoli errori nella determinazione delle dimensioni si può far qui una considerazione geometrica analoga a quella del n. 231.

396. VOLUME DEL CUBO. Siccome il cubo è un parallelepipedo rettangolo avente le tre dimensioni uguali, risulta dalla regola del n. 392 che *il volume del cubo è dato dalla terza potenza* (della misura) *dello spigolo*.

397. Nota. — Se accanto al cubo che ha lo spigolo a e quindi il volume a^3, consideriamo il cubo di spigolo $2a$, il volume di quest'ultimo sarà

$$(2a)^3 = 8a^3;$$

cioè *quando in un cubo si raddoppia lo spigolo, il volume si moltiplica per* 8.

Così se lo spigolo di un cubo si moltiplica per 3 , 4 , ..., il *volume vien moltiplicato rispettivamente per* 27, 64 , ...

398. Se un cubo ha il volume V, il suo spigolo x deve esser tale che

$$x^3 = \mathrm{V}$$

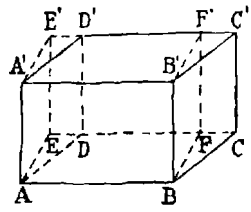
e quindi

$$x = \sqrt[3]{\mathrm{V}};$$

cioè *lo spigolo del cubo di dato volume si trova estraendo la radice cubica del volume.*

399. VOLUME DEL PRISMA RETTO. — La regola enun-

ciata al n. 392 per la determinazione del volume di un parallelepipedo rettangolo si estende al caso di un prisma qualsiasi. Cominciamo qui col dimostrarlo per il prisma retto, e in primo luogo consideriamo un parallelepipedo retto, ABCDD'A'B'C'.



Supposto AB > AD, si abbassino nel piano della base ABCD da A e B le perpendicolari AE , BF sulla DE. Otteniamo così un rettangolo ABFE equivalente al parallelogramma ABCD (n. 198) e perciò avente la stessa area (n. 225), e la figura ABFEE'A'B'F' sarà un parallelepipedo rettangolo, avente la stessa altezza del parallelepipedo dato.

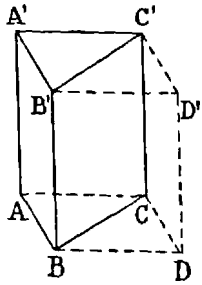
Ora i due prismi retti a basi triangolari ADEE'A'D', BCFF'B'C' hanno ordinatamente uguali tutti i loro elementi, e si possono sovrapporre l'uno all'altro, spostando, p. es., il primo parallelamente a sè stesso fino a portare il vertice A in B.

Risulta di qui che il parallelepipedo rettangolo si può immaginare ottenuto dal parallepipedo retto, tagliando da questo il prisma BCFF'B'C' e portandolo in ADEE'A'D'; cosicchè i solidi dei due parallelepipedi avranno ugual volume.

Tenendo conto del fatto che essi hanno basi equivalenti e altezze uguali e ricordando la regola del n. 392 concludiamo che *il volume di un parallelepipedo retto è dato dal prodotto (dell'area) della base per (la lunghezza de) l'altezza.*

400. Per estendere questa regola al caso di un prisma retto a base triangolare ABCC'A'B', si noti

che esso, come risulta dall'unita figura, si può riguardare come la metà di un parallelepipedo retto avente la stessa altezza e la base doppia di quella del triangolo.



Se b è l'area della base e h l'altezza del prisma triangolare, l'area della base e l'altezza del parallelepipepo sono rispettivamente $2b$ e h, talchè il volume del parallelepipedo sarà (n. prec.)

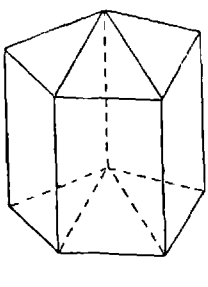
$$2bh$$

e quello del prisma triangolare

$$bh.$$

Abbiamo dunque la regola: *Il volume di un prisma triangolare retto è dato dal prodotto* (*dell'area*) *della base per* (*la lunghezza*) *de l'altezza.*

401. Consideriamo infine un prisma retto qualsiasi, p. es. pentagonale. I piani determinati da uno spigolo laterale fisso e da ciascuno degli altri spigoli laterali dividono il prisma dato in tre prismi retti triangolari, aventi la stessa altezza del dato.



Se h è quest'altezza e b_1, b_2, b_3 sono le aree delle basi dei tre prismi triangolari, i volumi di questi sono dati da

$$b_1h \quad , \quad b_2h \quad , \quad b_3h;$$

e il volume del prisma pentagonale, che è evidentei mente uguale alla somma dei volumi dei tre prismtriangolari, sarà dato da

$$b_1h + b_2h + b_3h$$

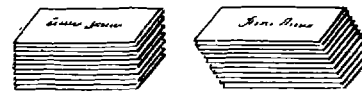
ossia da

$$(b_1 + b_2 + b_3)\, h.$$

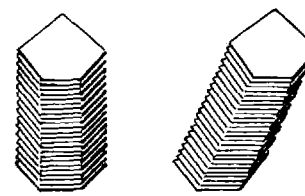
Ma $b_1 + b_2 + b_3$ è l'area della base del prisma pentagonale; onde concludiamo che veramente *il volume di un prisma retto qualsiasi è uguale al prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

402. VOLUME DI UN PRISMA QUALSIASI. Vediamo infine come la medesima regola valga anche per un prisma obliquo.

Consideriamo, p. es. cento carte da visita: esse collocate esattamente l'una sull'altra (come giacciono nella loro scatoletta) formano un parallelepipedo rettangolo. Disponendole invece, come indica l'unita figura, noi otteniamo un parallelepipedo obliquo avente la stessa base e la stessa altezza del primitivo; ed è manifesto che questo nuovo parallelepipedo e il primitivo, essendo formati colle stesse carte da visita, hanno egual volume.



Nello stesso modo, ritagliando in cartoncino sottile un numero sufficiente di poligoni eguali e disponendoli l'uno sull'altro, possiamo costruire il modello di un prisma retto qualsiasi, e disponendoli poi obliquamente (vedi la figura) possiamo, cogli stessi cartoncini, formare un qualsiasi prisma obliquo, avente la stessa base e la stessa altezza del primitivo.



È così reso manifesto, in via intuitiva, che *due prismi qualsiasi, aventi basi ed altezze uguali, hanno lo stesso volume.*

Di qui, ricordando il n. prec., ricaviamo la regola seguente che comprende come casi particolari tutte quelle che abbiamo enunciate prima d'ora (nn. 399-401):

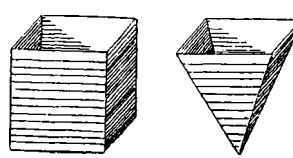
Regola. — *Il volume di un prisma qualsiasi è uguale al prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

403. Risulta di qui la seguente

Regola. — *Dividendo il volume di un prisma qualsiasi per l'area della base o (per l'altezza) si trova l'altezza (o l'area della base).*

Volume della piramide.

404. Sarebbe qui troppo difficile dimostrare la regola per trovare il volume della piramide. Ci limitiamo quindi a suggerire la seguente verifica.



Presa una scatoletta della solita forma di parallelepipedo rettangolo, costruiamo in cartone la superficie laterale di una qualsiasi piramide avente la base e l'altezza uguali a quelle rispettivamente della scatola.

Se, tenendo la piramide colla bocca in alto come un imbuto, la riempiamo tre volte di arena, e ciascuna volta vuotiamo codesta arena nella scatola, verifichiamo che questa si riempie esattamente. Cioè il solido del parallelepipedo rettangolo è triplo di quella della piramide.

Una simile verifica si può eseguire per ogni piramide; cosicchè abbiamo che *il volume di una piramide qualsiasi è uguale a quella di un prisma avente la stessa base della piramide e l'altezza uguale alla terza parte dell'altezza di quella.*

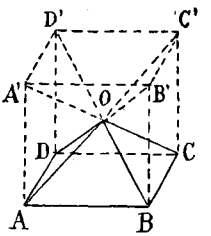
405. Risulta di qui la

Regola. — *Il volume di una piramide è uguale ad un terzo del prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

406. La dimostrazione della regola precedente è, come dicemmo, troppo difficile perchè possiamo esporla qui. Ma vi è un caso particolare, in cui essa si può ritrovar facilmente. Considerato un cubo ABCDD'A'B'C', di cui sia a la misura dello spigolo, abbiamo che il suo volume è dato da (n. 396)

$$a^3.$$

Ora, le quattro diagonali, le quali si intersecano in un punto O, dividono il cubo in sei piramidi rette a base quadrata, fra loro uguali. Perciò una qualsiasi di esse, p. es. la ABCDO, avrà il volume



$$\frac{a^3}{6},$$

che si può scrivere anche

$$\frac{1}{3}\left(a^2 \times \frac{a}{2}\right);$$

cioè appunto il volume della piramide ABCDO è dato dal terzo del prodotto dell'area a^2 della base per l'altezza $\frac{a}{2}$.

407. Avremo ancora dal n. 405 la

Regola. — *Dividendo il triplo del volume di una piramide per l'area della base (o per l'altezza) si ottiene l'altezza (o l'area della base).*

408. VOLUME DEL TRONCO DI PIRAMIDE. — Si può dimostrare (ma per brevità noi rinunciamo a farlo) che *il volume di un tronco di piramide (a basi parallele) è eguale alla somma dei volumi di tre piramidi aventi la stessa altezza del tronco, e per basi rispettive le due basi del tronco e la loro media proporzionale.*

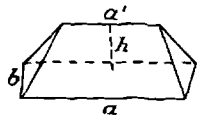
Se h è l'altezza del tronco e b_1, b_2 sono le aree delle due basi, il volume del tronco è uguale a

$$\frac{1}{3}hb_1 + \frac{1}{3}hb_2 + \frac{1}{3}h\sqrt{b_1 b_2}$$

ossia a

$$\frac{1}{3} h \left(b_1 + b_2 + \sqrt{b_1 b_2} \right).$$

409. VOLUME DEI MUCCHI DI GHIAIA. — Due sono le forme che più solitamente si danno ai mucchi di ghiaia.



a) Il *mucchio triangolare* (tronco di prisma triangolare) ha come base un rettangolo di cui indichiamo con a e b le dimensioni, ed ha quattro facce laterali, di cui due triangolari e due trapezoidali.

Se a' è la lunghezza dello spigolo superiore e h è la distanza di questo dal piano di base (altezza del mucchio) il volume è dato da

$$V = \frac{bh}{6} (2a + a').$$

b) Il cosidetto *mucchio piramidale* è limitato in basso e in alto da due rettangoli di lati a, b e a', b' e lateralmente da quattro trapezi. Se h è l'altezza del mucchio il volume è dato da

$$V = \frac{bh}{6} (2a + a') + \frac{b'h}{6} (2a' + a).$$

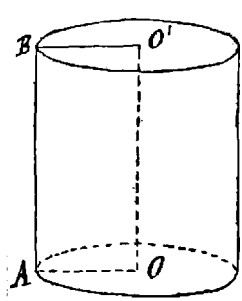
XI.

CILINDRO, CONO E SFERA

Superficie e volume del cilindro.

410. DEFINIZIONE DEL CILINDRO. — Si faccia ruotare un rettangolo ABO'O intorno ad un suo lato OO' fino a quando il lato opposto AB ritorna nella sua posizione iniziale.

La figura descritta in codesto movimento dalla poligonale OABO', si dice *cilindro circolare retto* od anche semplicemente *cilindro,* di *asse* OO'.



I due lati opposti O'B, OA descrivono due cerchi uguali e giacenti i due piani paralleli e perpendicolari alla retta OO' che congiunge i due centri (n. 234).

Codesti due cerchi si chiamano *basi*, e il segmento OA (od O'B) si dice *raggio* del cilindro.

La superficie descritta dal segmento AB si chiama *superficie laterale.* Aggiungendo alla superficie laterale e due basi si ottiene la *superficie totale.*

Il segmento AB, in ciascuna delle infinite posi-

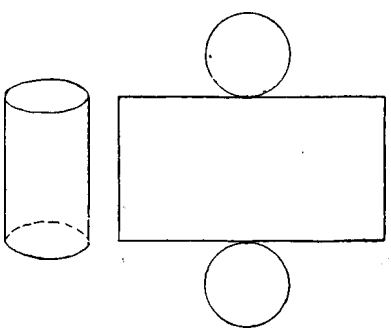
zioni che successivamente occupa, si dice *lato o generatrice* del cilindro.

Infine si chiama *altezza* la distanza delle due basi.

L' altezza del cilindro è uguale al lato.

411. La superficie del rettangolo ABO'O descrive, nel movimento suaccennato, il *solido* del cilindro.

412. AREA DELLA SUPERFICIE DEL CILINDRO. — Immaginiamo di avere un cilindro, costruito in cartoncino. Se dopo averlo tagliato lungo le circonferenze di base e lungo una generatrice, distendiamo il cartoncino sul foglio otteniamo lo *sviluppo* del cilindro,



il quale è costituito da due cerchi (basi) e da un rettangolo, che ha per altezza l' altezza del cilindro primitivo e per base quel lembo, che dianzi era disposto secondo la circonferenza base del cilindro.

Perciò *l' area della superficie laterale del cilindro è uguale all' area del rettangolo avente per altezza quella del cilindro e per base il segmento uguale alla lunghezza della circonferenza base del cilindro.*

Abbiamo quindi (n. 227) la seguente

Regola. — *L' area della superficie laterale di un cilindro si ottiene moltiplicando la lunghezza della circonferenza di base per l' altezza.*

Ricaviamo di qui che, se r è il raggio del cilindro, h l'altezza ed s l'area della superficie laterale (nn. 296, 227) sarà

$$s = 2\pi rh.$$

413. La superficie totale del cilindro si otterrà aggiungendo alla superficie laterale il doppio dell'area della base; cosicchè indicando con S l'area della superficie totale avremo (n. 305):

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r).$$

Di qui discende la

Regola. — *La superficie totale di un cilidro si ottiene moltiplicando la lunghezza della circonferenza di base per la somma dell'altezza e del raggio della base stessa.*

414. Inversamente abbiamo:

$$\frac{s}{h} = 2\pi r$$

ed

$$\frac{s}{2\pi r} = h;$$

cioè: *Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per l'altezza si ottiene la lunghezza della circonferenza della base.*

Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per la lunghezza della circonferenza della base, si ottiene l'altezza.

415. VOLUME DEL CILINDRO. — Giustifichiamo in via intuitiva anche la regola per la determinazione del volume del cilindro.

Dato un cilindro C, iscriviamo in una delle sue basi un poligono P e consideriamo il prisma retto che ha per base codesto poligono e la stessa altezza del cilindro. È chiaro che il volume del prisma è minore di quello del cilindro; e la differenza fra i due solidi è tanto più piccola, quanto più piccola è la differenza fra la superficie del cerchio base del cilindro e quella del poligono P, base del prisma.

Anzi codesta differenza sarà praticamente trascurabile se il poligono P ha un numero tanto grande di lati da potersi sensibilmente confondere col cerchio base del cilindro.

È così reso intuitivamente manifesto che *il volume del cilindro è uguale a quello di un prisma colla medesima altezza, avente per base un poligono che abbia superficie uguale a quella del cerchio base del cilindro.*

Risulta dal teorema precedente e dai nn. 305, 402 che *il volume di un cilindro retto di raggio* r *e altezza* h *è uguale a*

$$V = \pi r^2 h.$$

Regola. — *Il volume del cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza.*

416. Inversamente abbiamo

$$\frac{V}{h} = \pi r^2$$

e

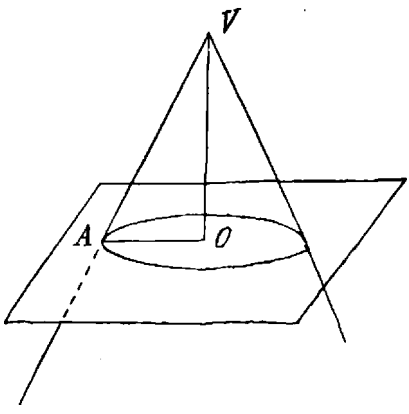
$$\frac{V}{\pi r^2} = h;$$

cioè: *Dividendo il volume del cilindro per l'altezza si ottiene l'area della base.*

Dividendo il volume del cilindro per l'area della base, si ottiene l'altezza.

Superficie e volume del cono.

417. DEFINIZIONE DEL CONO. — Si faccia ruotare un triangolo rettangolo AOV intorno ad un suo cateto OV, fino a ricondurlo nella sua posizione iniziale.



La figura descritta in codesto movimento dalla poligonale VAO si dice *cono circolare retto* o semplicemente *cono di asse* VO, e di *vertice* V.

Il cateto OA descrive un cerchio perpendicolare, nel suo centro, all'asse; codesto cerchio si dice *base* del cilindro.

L'ipotenusa VA, in ciascuna delle infinite posizioni che successivamente assume, dicesi *lato* o *generatrice* o *apotema* del cono e la superficie descritta nel movimento suindicato, da VA si chiama *superficie laterale*. Aggiungendo alla superficie laterale la superficie della base, si ottiene la *superficie totale*.

La distanza VO del vertice V del cono dalla base si dice altezza del cono.

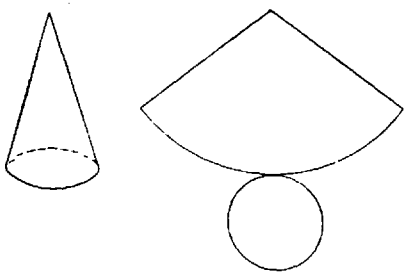
418. La superficie del triangolo rettangolo AOV descrive nel movimento di rotazione il *solido* del cono.

419. Il lato l del cono, il raggio r della base e l'altezza h sono rispettivamente ipotenusa e cateti di uno stesso triangolo rettangolo. Perciò abbiamo (n. 248)

$$l = \sqrt{r^2 + h^2},$$
$$r = \sqrt{l^2 - h^2},$$
$$h = \sqrt{l^2 - r^2}.$$

420. Area della superficie del cono. — Determineremo la superficie del cono per mezzo di un procedimento analogo a quello seguito pel cilindro.

Immaginiamo di avere un cono, costruito in cartoncino. Se, dopo averlo tagliato lungo una generatrice e la circonferenza di base, distendiamo su di un piano il cartoncino, otteniamo lo *sviluppo* del cono, il quale



è costituito da un cerchio (*base*) e da un settore, in cui il raggio è uguale all'apotema del cono e l'arco è il lembo che dianzi era incurvato in modo da formare la circonferenza base del cono.

Perciò *l'area della superficie laterale del cono è uguale a quella di codesto settore circolare, la quale* (n. 306) *è anche uguale alla superficie del triangolo che ha per altezza l'apotema del cono e per base la lunghezza dell'arco ossia anche della circonferenza base del cono.*

Ricaviamo di qui che se r è il raggio della base del cono ed a è l'apotema, la superficie laterale s è data da (nn. 296, 238)

$$s = \frac{2\,\pi\,r \times a}{2} = \pi\,r\,a.$$

E possiamo enunciare la seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di un cono è data dal prodotto* (*delle lunghezze*) *dell'apotema e della semicirconferenza della base.*

L'area della superficie totale del cono si ottiene aggiungendo l'area del cerchio base all'area della su-

perficie laterale; cosicchè, se S rappresenta l'area della superficie totale, avremo

$$S = \pi r a^2 + \pi r^2 = \pi r(a + r).$$

Dunque nella pratica *per avere l'area della superficie totale del cono si moltiplica per* 3,14.... *il prodotto del raggio della base per il raggio stesso aumentato dell'apotema.*

421. Inversamente abbiamo:

$$\frac{s}{a} = \pi r$$

e

$$\frac{s}{\pi r} = a;$$

cioè: *Dividendo l'area della superficie laterale del cono per l'apotema si ottiene la metà della circonferenza della base.*

Dividendo l'area della superficie laterale del cono per la metà della circonferenza della base, si ottiene l'apotema.

422. Volume del cono. — Per determinare il volume del cono, serviamoci di considerazioni intuitive analoghe a quelle usate pel cilindro (n. 415).

Dato un cono C di vertice V, si iscriva nella base un poligono P e si consideri la piramide di base P e vertice V.

È chiaro che il volume di codesta piramide è minore di quello del cono e che la differenza fra i due solidi è tanto più piccola, quanto minore è la differenza fra la superficie della base del cono e quella del poligono iscritto P. Anzi, la differenza fra i due solidi sarà praticamente trascurabile se il poligono P ha un numero così grande di lati da potersi sensibilmente confondere col cerchio base.

È quindi intuitivamente evidente *che il volume del cono è uguale a quello di una piramide colla medesima altezza, avente per base un poligono la cui superficie sia uguale a quella del cerchio base del cono.*

Ricordando la regola per trovare il volume di una piramide abbiamo che il volume V di un cono, di cui siano r e h rispettivamente il raggio della base e l'altezza, è dato da

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$$

e possiano enunciare la

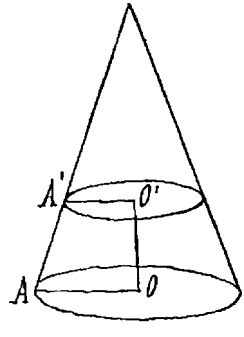
Regola. — *Il volume di un cono si ottiene dividendo per* 3 *il prodotto* (*dell'area*) *della base per l'altezza* (1).

423. Inversamente abbiamo

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

$$\pi r^2 = \frac{3V}{h};$$

cioè: *Dividendo il triplo del volume del cono per l'area della base, si ottiene l'altezza.*



Dividendo il triplo del volume del cono per l'altezza, si ottiene l'area della base.

424. Tronco di cono. — Se, dato un cono, conduciamo un piano parallelo alla base, compreso fra questa e il vertice, il cono vien segato secondo un cerchio e resta diviso in due parti, di cui una è un nuovo cono e l'altra dicesi *tronco di cono* (a basi parallele).

(1) Siccome 3,141 : 3 è esattamente uguale a 1,047, spesso conviene senz'altro moltiplicare il prodotto r^2h per 1,047.

I due cerchi O, O' diconsi *basi* del tronco e la distanza OO' dei loro piani dicesi *altezza* del tronco di cono.

I segmenti AA' di generatrici del cono compresi fra i detti due piani diconsi *apotemi* del tronco di cono.

Si dimostra (cfr. n. 420) che *la superficie laterale del tronco di cono è uguale a quella di un trapezio avente per altezza l'apotema e per basi parallele i segmenti uguali alle lunghezze delle circonferenze basi del tronco.*

Se a è l'apotema ed r_1 , r_2 $(r_1 < r_2)$ sono i raggi delle due basi, l'area della superficie laterale è data da (nn. 296, 245)

$$\pi a\ (r_1 + r_2),$$

e quella della superficie totale da (n. 301)

$$\pi\ [a\ (r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2].$$

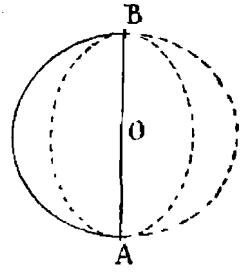
425. Ricorrendo a osservazioni analoghe a quelle del n. 422 o considerando il solido del tronco di cono come differenza dei solidi di due coni, si trova che *il volume del tronco di cono è uguale a quello di un tronco di piramide colla medesima altezza, avente per basi due poligoni, le cui superficie siano uguali a quelle dei due cerchi basi.*

Così, se h è l'altezza del tronco ed r_1 , r_2 sono i raggi delle basi, il volume è dato da (nn. 301, 408)

$$V = \frac{1}{3}\pi h\ (r_1^2 + r_2^2 + r_1\, r_2).$$

Superficie e volume della sfera.

426. DEFINIZIONE DELLA SFERA. — Una semicirconferenza che ruoti intorno al suo diametro, fino a riprendere la sua posizione iniziale, descrive una superficie che si dice *sfera.*



La superficie del semicerchio descrive nello stesso movimento il *solido della sfera,* o *solido racchiuso dalla sfera.*

Se O è il centro della semicirconferenza ed r il

suo raggio, tutti i punti della superficie sferica hanno da O una distanza uguale ad r, ed ogni punto avente da O la distanza r si trova sulla superficie sferica. Ciò esprimiamo dicendo che *la sfera è il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno da* O *la distanza* r.

Il punto O dicesi *centro* della sfera e tutti i segmenti uguali ad r, che congiungono O coi vari punti della sfera, si dicono *raggi*.

427. La superficie sferica divide lo spazio in due parti:

1. il *solido* della sfera o regione (finita) dei punti della sfera e dei punti (*interni*) la cui distanza dal centro è minore del raggio;

2. la regione infinita dei punti (*esterni*) la cui distanza dal centro è maggiore del raggio.

428. Ogni retta passante per il centro O di una sfera, ne incontra la superficie in due punti P e Q, situati da bande opposte rispetto al centro O e aventi da esso una distanza uguale al raggio della sfera.

Il segmento PQ, che è doppio del raggio, si dice *diametro* della sfera.

Tutti i diametri di una sfera sono uguali, perchè sono tutti doppi del raggio.

429. Ogni piano passante pel centro di una sfera si dice *piano diametrale*.

Ogni piano diametrale di una sfera la interseca secondo una circonferenza di raggio uguale al raggio di essa.

430. Un piano diametrale divide il solido della sfera in due parti uguali, dette *emisferi*. Le superficie corrispondenti, pur esse uguali, si dicono *superficie emisferiche*.

431. Data una sfera di centro O e una retta r, non passante per O, si consideri il piano diametrale Or.

In base ai nn. 85, 86 si ottiene il seguente

Teor. — *Una sfera ha comune con una retta due punti o uno o nessuno, secondo che la distanza di essa dal centro della sfera è minore o uguale o maggiore del raggio.*

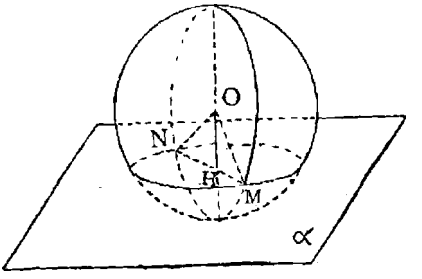
La retta si dice rispettivamente *secante* o *tangente* od *esterna* alla sfera.

432. Similmente dati una sfera e un piano, per studiarne la posizione reciproca, si considerino i piani diametrali della sfera perpendicolari al piano dato. Si dimostra così il seguente

Teor. — *Un piano ha comune con una sfera una circonferenza, o ha comune con essa un sol punto o non ha con essa nessun punto comune, secondo che la sua distanza dal centro della sfera è minore, uguale o maggiore del raggio.*

Il piano si dice rispettivamente *secante, tangente, esterno* alla sfera.

433. Si dimostra facilmente, ed è anche manifesto dalla figura, che fra tutte le circonferenze sezioni piane di una sfera hanno raggio massimo quelle il cui piano passa pel centro (aventi raggio uguale alla sfera).



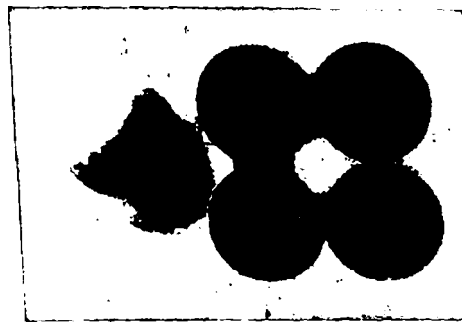
Perciò le sezioni dei piani diametrali si dicono *circonferenze massime* della sfera: le altre diconsi *circonferenze minori*. I cerchi corrispondenti diconsi rispettivamente *cerchi massimi* e *cerchi minori*.

434. AREA DI UNA SUPERFICIE SFERICA. — Il problema di misurare la superficie della sfera è più difficile che gli analoghi problemi pel cilindro e pel cono, perchè la sfera, non si può distendere sopra il piano neppure tagliandola opportunamente, come si è fatto pel cilindro e pel cono. Cioè la sfera non è una *superficie sviluppabile*.

Considerazioni, che sarebbe troppo difficile spiegar qui chiaramente, conducono ad ammettere che *la*

superficie della sfera è uguale al quadruplo di quella del suo cerchio massimo.

Se vogliamo verificare questo fatto possiamo eseguire il seguente esperimento.



Presa una sfera di lamiera, p. es. di ottone, si ritaglino da una lamina piana di ottone di identico spessore quattro dischi circolari di diametro uguale a quello della sfera. Ponendo sui piatti di una bilancia da una parte la sfera e dall'altra i quattro dischi, si verifica che i due pesi sono esattamente uguali: cosicchè concludiamo che la sfera e i quattro dischi hanno anche ugual superficie.

Ricordando la regola per trovar l'area di un cerchio di dato raggio (n. 301) abbiamo, se r è il raggio della sfera ed S l'area della sua superficie,

$$S = 4 \pi r^2$$

e possiamo enunciare la seguente

Regola. — *L'area della superficie di una sfera è uguale al quadruplo del prodotto del quadrato del raggio per* 3,14 (o 3,1416).

435. Inversamente abbiamo

$$r^2 = \frac{S}{4\pi}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Regola. — *Il raggio di una sfera è uguale alla metà della radice quadrata del quoziente dell'area della sfera per* 3,14 (*o* 3,1416).

436. Ricordando allora la regola per misurare la superficie laterale di un cilindro (n. 412) e quella per misurare la superficie del cerchio (n. 301) troviamo la proposizione seguente:

Cor. — *L'area di una sfera è uguale a quella della superficie laterale del cilindro, che ha base uguale al suo cerchio massimo e altezza uguale al suo diametro.*

437. Nota. — Se S è l'area della sfera di raggio r, l'area della sfera di raggio $2r$ è $4S$; così se il raggio si moltiplica per 3 , 4 , ... , l'area della sfera si moltiplica per 9 , 16 , ...

In generale *le superficie di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei raggi.*

438. VOLUME DELLA SFERA. — Passiamo infine a indicare brevemente come si possa ottenere il solido della sfera.

Sulla sfera si prenda un pezzetto piccolissimo di superficie limitato da archetti di circonferenza massima. Congiungendo i vertici di questo pezzetto di superficie sferica col centro otteniamo una piramide che è parte del solido sferico e si può approssimatamente considerare a base piana. Tutto il solido della sfera si può immaginare ottenuto sommando un numero grandissimo di siffatte piramidi e così vediamo che:

Il volume della sfera è uguale al volume di una piramide, in cui la superficie della base è uguale alla superficie della sfera e l'altezza è uguale al raggio di essa.

Di qui, ricordando la regola per trovare il volume di una piramide (n. 405), troviamo che il volume V di una sfera di raggio r è dato da

$$V = \frac{1}{2} 4 \pi r^2 \times r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Poichè la terza potenza di un numero si dice anche suo *cubo*, avremo la seguente

Regola. — *Il volume di una sfera si ottiene moltiplicando il cubo del raggio pei* $\frac{4}{3}$ *di* 3,14 (*o* 3,1416) (1).

439. Inversamente abbiamo

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Regola. — *Dividendo il volume di una sfera pei* $\frac{4}{3}$ *di* 3,14 (*o* 3,1416) *si ottiene il cubo del raggio.*

Per trovare il raggio basterà estrarre la radice cubica del risultato dianzi ottenuto.

440. La formola che dà il volume della sfera (n. 438) si può scrivere

$$V = \pi r^2 \times \frac{4}{3} r;$$

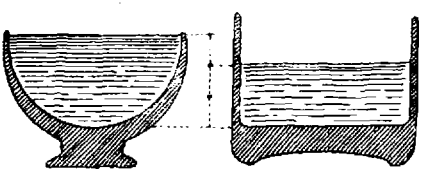
di qui, ricordando la regola per trovare il volume del cilindro (n. 415) concludiamo che:

(1) Siccome $\frac{4}{3} \times 3{,}141$ è uguale a 4,188, basta moltiplicare il cubo del raggio per 4,188 o 4,19.

Il volume della sfera è uguale a quello di un cilindro, avente lo stesso raggio e l' altezza uguale ai $\frac{4}{3}$ *del raggio stesso.*

Di questo importante risultato possiamo suggerire la seguente verifica diretta.

Prendiamo un recipiente emisferico, p. es. una scodella, e un altro recipiente cilindrico avente lo stesso raggio.

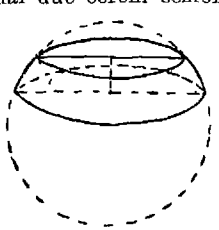


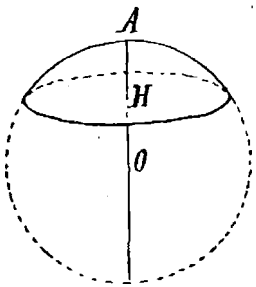
Se dopo avere riempito di acqua la scodella, la vuotiamo nel recipiente cilindrico, verifichiamo che l' acqua vi giunge ad un'altezza che è esattamente due terzi del raggio dei due recipienti.

Verifichiamo, cioè, che il volume dell' emisfero è uguale a quello di un cilindro di raggio uguale a quello dell' emisfero e avente per altezza i due terzi del raggio stesso.

Raddoppiando questo cilindro, troviamo precisamente il risultato suindicato.

441. ZONA E SEGMENTO SFERICO. — **Def.** — Data una sfera e considerati due piani seganti paralleli, la figura costituita dai due cerchi sezioni e dalla parte di sfera compresa fra i due piani paralleli dicesi *segmento sferico*. I due cerchi sezioni diconsi *basi* e la distanza di esse *altezza* del segmento; la congiungente i centri delle due basi (perpendicolare ad esse) dicesi *asse* del segmento. La parte di sfera compresa fra i due piani si chiama superficie laterale del segmento od anche zona sferica. Il solido del segmento sferico si definisce come la parte del solido della sfera che è compresa fra i piani delle due basi.





Se in particolare si immagina che il piano di una delle basi sia tangente alla sfera si ha il segmento sferico ad una sola base o *calotta sferica*.

442. Considerazioni che qui non possiamo spiegare conducono ad assumere come *superficie spianata* della *zona sferica* (o della *calotta*) la superficie laterale del cilindro che ha per altezza l'altezza del segmento sferico corrispondente e per base il cerchio massimo della sfera, cui appartiene la zona (o la calotta).

Perciò se h è l'altezza del segmento ed r è il raggio della sfera, la superficie della zona (o calotta) sarà misurata (n. 412) da

$$2\pi rh.$$

Il solido di un segmento sferico è determinato dal teor. seguente che ci limitiamo ad enunciare:

Il volume di un segmento sferico a due basi è uguale alla semisomma dei volumi di due cilindri aventi la stessa altezza del segmento, e per basi rispettive le basi del segmento, aumentata del volume della sfera avente per diametro l'altezza del segmento.

Se a e b sono i raggi delle due basi, h è l'altezza ed r è il raggio della sfera, il volume del settore è dato, come risulta dal prec. teor., da (n. 415)

$$\frac{1}{2}\left(h \,.\, \pi a^2 + h \,.\, \pi b^2\right) + \frac{4}{3}\,\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3,$$

ossia da

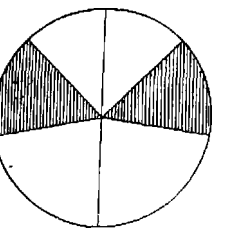
$$\frac{1}{2}\,\pi h\,(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\,\pi h^3.$$

In particolare il volume di un segmento ad una base, appartenente ad una sfera di raggio r e avente l'altezza h e il raggio della base a è dato da

$$\frac{1}{2}\,\pi h a^2 + \frac{1}{6}\,\pi h^3 = \frac{1}{2}\,\pi h\left(a^2 + \frac{1}{3}h^2\right).$$

443. SETTORE SFERICO. — Un'altra figura notevole è il *settore sferico*, il quale si ottiene considerando un settore cir-

colare e immaginando che esso ruoti compiendo un intero giro intorno ad un diametro del suo cerchio.



Il solido del settore sferico è costituito da tutti i punti dello spazio, che rappresentano posizioni assunte successivamente, nel movimento suindicato, dai punti del settore circolare considerato.

Se il settore circolare che si considera corrisponde ad un angolo al centro retto e si fa ruotare intorno ad un lato di questo, il settore sferico è un *emisfero*.

La superficie del settore sferico si ottiene come riunione di una zona colla superficie di due coni (o eventualmente colle superficie di un cono e di un cerchio).

444. Con procedimento analogo a quello del n. 438 si dimostra il teorema seguente:

Il volume di un settore sferico è uguale al volume di una piramide, in cui la superficie della base è uguale alla superficie della zona corrispondente (o della calotta) e l'altezza è uguale al raggio della sfera, cui appartiene il segmento considerato (o la calotta).

Risulta di qui (n. 405) che il volume di un settore sferico di raggio r e altezza h è dato da:

$$\frac{1}{3} r . 2\pi r h = \frac{2}{3} \pi r^2 h .$$

ESERCIZI

N. B. — Gli esercizi seguenti si susseguono a gruppi nello stesso ordine della materia svolta nel testo e in ciascun gruppo sono disposti in ordine di difficoltà crescente. *A capo di ciascun gruppo di esercizi abbiamo segnato in margine l' ultimo numero del testo, la cui conoscenza è necessaria per la risoluzione dei quesiti del gruppo.*

Geometria piana.

[15] **1.** Siano A, B, C tre punti in linea retta e sia M il punto di mezzo di AB. Dimostrare che il segmento CM è uguale alla semisomma o alla semidifferenza dei segmenti CA e CB secondo che il punto C è sul prolungamento di AB o interno al segmento AB.

[42] **2.** Siano OA, OB, OC tre raggi uscenti da un punto e OM la bisettrice di $A\widehat{O}B$. Dimostrare che l'angolo $C\widehat{O}M$ è uguale alla semisomma o alla semidifferenza degli angoli $C\widehat{O}A$, $C\widehat{O}B$, secondo che OC è esterno o interno all'angolo $A\widehat{O}B$.

[44] **3.** Se quattro raggi uscenti da un punto formano quattro angoli consecutivi, tali che il primo sia uguale al terzo e il secondo al quarto, i quattro raggi sono a due a due opposti.

4. Se un raggio di luce è in un piano riflesso da una retta speculare suscettibile di ruotare nel piano intorno al punto di incidenza, quando la retta speculare avrà ruotato di un certo angolo, il raggio riflesso avrà ruotato di un angolo doppio.

5. Un angolo è la 5ª parte del suo adiacente. Qual'è la sua ampiezza? **[54]**

6. Qual'è l'ampiezza di due angoli adiacenti, di cui l'uno è multiplo secondo 5 del summultiplo secondo 4 dell'altro?

7. Un angolo supera di 15'48'' il suo adiacente: qual'è l'ampiezza dell'angolo considerato?

8. Le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari. **[55]**

9. Uno degli angoli interni determinati da due rette parallele con una trasversale è di 68°43'25'': si calcolino gli altri angoli. **[72]**

10. Due rette parallele segate da una terza formano due angoli coniugati di cui l'uno è i $\frac{4}{5}$ dell'altro. Qual parte di retto è ciascuno degli angoli che fa questa secante colle parallele?

11. Due angoli aventi i lati rispettivamente paralleli sono uguali o supplementari.

12. Servendosi di riga e squadra, condurre le tangenti ad un cerchio dato, che sono parallele ad una retta data. [Si ricordino i nn. 61 e 87]. **[87]**

13. Tutte le rette aventi da un punto una distanza data sono tangenti al cerchio che ha per centro il punto dato e per raggio la distanza data.

14. Descrivere una circonferenza di dato diametro che passi per un punto dato A e tocchi una retta data r in un suo punto T. Far vedere come si possono avere due circonferenze soddisfacenti al problema o una o nessuna.

15. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti ad una circonferenza data in un punto dato. **[93]**

16. Costruire un cerchio di raggio dato tangente in un punto assegnato ad un cerchio dato. Discutere le soluzioni.

17. Qual'è il luogo geometrico dei centri dei cerchi, che hanno un dato raggio e toccano esternamente un cerchio dato?

18. Dato un cerchio di raggio r e fissato un segmento $r' < r$, qual'è il luogo dei centri dei cerchi tangenti internamente al cerchio dato.

19. Dato un cerchio di centro C e raggio r_1 , descrivere una circonferenza che tocchi il cerchio dato, passi per un punto dato A e abbia un raggio dato r_2. Quante soluzioni si possono avere? [Il centro della circonferenza cercata si trova sulla circonferenza di centro C e raggio $r_1 + r_2$].

20. Descrivere una circonferenza di raggio r , che tocchi esternamente due cerchi dati l'uno esterno all'altro. [Quali sono le distanze del centro del cerchio cercato dai centri dei due cerchi dati?]

21. Sopra una retta o sopra una circonferenza data determinare i punti che sono centri di cerchi di raggio dato e tangenti ad una data circonferenza. Discussione.

Def. Se due circonferenze si segano in un punto, le tangenti in esso formano quattro angoli; quello fra questi che contiene la superficie comune ai due cerchi (fuso) dicesi *angolo* della due circonferenze.

22. I due angoli di due circonferenze secantisi sono uguali. [Simmetria rispetto alla retta dei centri].

[97] **23.** In un triangolo la somma delle distanze di un punto interno da due vertici è minore della somma dei due lati concorrenti nel vertice opposto. [Se ABC è il triangolo e P è il punto interno, congiunto con A e B, si prolunghi, p. es., AP fino a incontrare in Q il lato BC e poi si osservi che $AQ < AC + CQ$, $PB < PQ + QB$ e quindi ...].

24. In un triangolo la somma dei tre segmenti, che congiungono un punto interno coi tre vertici è minore del perimetro, e maggiore del semiperimetro. [Congiunto il punto interno P coi tre vertici del triangolo ABC, si osservi per la prima parte che (es. prec.) $PA + PB < AC + BC$, $PB + PC$

$<AC+AB$, $PC+PA<AB+BC$ e quindi.... Per la seconda parte si ricordi che (n. 112) $PA+PB>AB$, $PB+PC>BC$, $PC+PA>CA$ e quindi ....].

25. Se sopra i lati AB, BC, CA di un triangolo equilatero si prendono i tre punti D, E, F per modo che sia AD=BE=CF, il triangolo DEF è anch'esso equilatero. [Si confrontino i tre triangoli ADF, BED, CFE]. **[108]**

26. Dato un angolo di vertice O, si prendano su di un lato due segmenti arbitrari OA, OA′ e sull'altro lato i segmenti rispettivamente uguali OB, OB′, e si congiungano A con B′ e A′ con B. Dimostrare:

a) che i due segmenti AB′, A′B hanno un punto H comune:

b) che A′B=AB′;

c) che sono uguali i triangoli AA′H, BB′H;

d) che $\widehat{AOH}=\widehat{BOH}$;

e) che $\widehat{AHO}=\widehat{OHB}$;

Nota. — Questo esercizio dà luogo ad una costruzione per bisecare un angolo, la quale ove non si disponga di una squadra, nè di un compasso, ma solo di una riga graduata, è assai comoda nei problemi di costruzione.

27. In un triangolo una *mediana* (segmento congiungente un vertice col punto medio del lato opposto) è minore della semi somma dei lati concorrenti con essa e maggiore della semidifferenza dei lati medesimi. [Si prolunghi di altrettanto la mediana e si congiunga l'estremo con uno degli estremi del lato, a cui si è condotta la mediana].

28. Costruire un triangolo, dati un lato, l'angolo adiacente e l'una o l'altra delle mediane uscenti dai vertici degli altri due angoli.

29. Costruire un triangolo dati due lati e l'altezza relativa al terzo lato.

30. Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi. Discussione.

Def. Due punti si dicono *simmetrici* rispetto a un punto (*centro di simmetria*) se la loro congiungente è dimezzata da codesto punto.

Due punti si dicono *simmetrici* rispetto ad una retta (asse di simmetria), se appartengono ad una medesima perpendicolare a codesta retta e ne sono equidistanti.

Due figure si dicono *simmetriche* rispetto ad un punto o ad un asse se ciascuna è costituita da tutti e soli i punti simmetrici dei punti dell'altra rispetto al punto o alla retta considerati.

31. I punti simmetrici di un punto P rispetto alle rette uscenti dal punto O, appartengono alla circonferenza di centro O e raggio OP. [Due punti simmetrici rispetto ad una retta per O sono equidistanti da O].

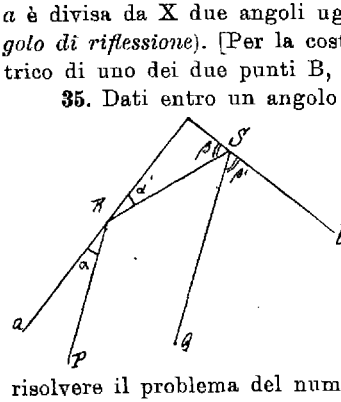
32. La figura simmetrica di un triangolo rispetto ad una retta (o ad un punto) è un triangolo uguale al dato.

33. La figura simmetrica di una circonferenza rispetto ad una retta (o a un punto) è una circonferenza uguale alla primitiva.

Alla considerazione dei punti simmetrici rispetto a una retta si collegano i seguenti problemi, che intervengono nella teoria della riflessione dei raggi luminosi e sonori, e nello studio della deviazione di un punto materiale che urti una superficie elastica (giuoco del bigliardo).

34. Dati, fuori di una retta a e da una stessa banda rispetto ad essa, due punti B e C, si determini su a un punto X, tale cha i due raggi XB, XC formino coi due raggi in cui a è divisa da X due angoli uguali (*angolo di incidenza* e *angolo di riflessione*). [Per la costruzione si consideri il simmetrico di uno dei due punti B, C rispetto ad a....].

35. Dati entro un angolo $\widehat{ab}$ due punti P, Q, costruire una poligonale PRSQ, avente i vertici R, S su a, b rispettivamente, e tale che i due angoli formati da RP, RS con a siano uguali fra loro e i due angoli formati da SR, SQ colla b siano pure uguali fra loro.



[Preso il simmetrico P_1 di P rispetto ad a si cominci col risolvere il problema del numero precedente pei punti P_1, Q e per la retta b].

36. Problema analogo al precedente per il triangolo, pel quadrangolo, pel pentagono....

[Se, dato il triangolo ABC, sono P e Q i termini prefissati della poligonale, si consideri il simmetrico P_1 di P rispetto ad uno dei lati, p. es., a BC e si cominci col risolvere il problema del n. prec. rispetto ai punti P_1 e Q e all'angolo A.

Così, in ogni caso, il problema or ora proposto per un poligono di un certo numero n di lati si riduce al problema analogo per un poligono ad $n-1$ lati, e proseguendo si ricade sul problema del n. 35].

I seguenti problemi si collegano ordinatamente a quelli dei numeri 34-36.

37. Dati due punti B, C fuori di una retta a e da una stessa banda di essa, determinare su a un punto tale che la somma delle sue distanze da B e C sia minore della somma analoga relativa ad ogni altro punto di a.

(Cfr. esercizio n. 34).

38. Dato un angolo e due punti interni ad esso, determinare fra le poligonali a tre lati, che hanno come termini i due punti prefissati e gli altri due vertici sui due lati dell'angolo (poligonali inscritte nell'angolo) quella che ha il perimetro minimo.

(Cfr. esercizio n. 35).

39. Analogo problema per un triangolo, per un quadrilatero, per un pentagono....

(Cfr. esercizio n. 36).

40. In un triangolo due angoli sono uguali rispettivamente a 47°25'16" , 84°13'28". Determinare il terzo angolo. **[110]**

41. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ di un triangolo sapendo che α è triplo e β è quadruplo di γ.

42. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ di un triangolo, sapendo che α è triplo di γ e β è uguale alla sesta parte di γ.

43. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ di un triangolo, sapendo che α è quintuplo di β e β è quadruplo di γ.

44. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ di un triangolo, sapendo che $\gamma - \alpha = 44°$ e $\gamma - \beta = 25°$.

45. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ di un triangolo, sapendo che α supera β di 69° e β supera γ di 51°.

46. In un triangolo un angolo interno è di 72°22'4 e un angolo esterno non adiacente a quello è di 118°4',2. Determinare gli altri due angoli interni.

47. Due triangoli ABC, A'B'C' aventi rispettivamente uguali gli angoli e il perimetro sono uguali. [Sui prolungamenti di BC si prendano $BE = BA$, $CF = CA$: eseguite le analoghe costruzioni sull'altro triangolo, i triangoli EAF, E'F'A' sono uguali perchè $\widehat{E} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ ecc.].

48. La bisettrice e l'altezza condotte da un vertice di un triangolo qualsiasi formano un angolo uguale alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo. [Se α, β sono gli altri due angoli, l'angolo che si considera è $180° - \alpha - \beta$ e quindi l'angolo della bisettrice con ciascuno dei due lati sarà....; inoltre gli angoli dell'altezza con due lati sono uguali rispettivamente a $90° - \alpha$, $90° - \beta$, ...]. Come si deve modificare l'enunciato se si vuole considerare la bisettrice dell'angolo esterno?

[112] **49**. In un triangolo, se si congiunge un punto interno cogli estremi di un lato, l'angolo compreso da codesti due segmenti è maggiore dell'angolo compreso fra gli altri due lati del triangolo. [Si congiuga il punto dato col vertice comune a codesti due lati].

[121] **50**. In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base (cioè i segmenti di codeste bisettrici compresi fra i vertici e i lati opposti) sono uguali.

51. In un triangolo isoscele i segmenti delle bisettrici degli angoli sotto la base compresi fra i vertici e i prolungamenti dei lati opposti sono uguali.

52. In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali (cioè i segmenti congiungenti i punti medi dei lati uguali coi vertici degli angoli opposti) sono uguali.

53. Nel triangolo equilatero le tre mediane (cioè i tre segmenti congiungenti i punti medi dei lati coi vertici opposti) sono uguali.

54. Quanto vale l'angolo al vertice di un triangolo isoscele di cui gli angoli alla base siano di 72°?

55. In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono di 53°21'33''. Determinare l'angolo al vertice.

56. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è di 38°24'18''. Calcolare gli angoli alla base.

57. In un triangolo isoscele l'angolo che forma colla base la perpendicolare abbassata da un estremo di essa sul lato opposto è uguale alla metà dell'angolo al vertice. [Si abbassi dal vertice la perpendicolare sulla base].

58. In un triangolo isoscele la somma degli angoli sotto la base supera di due retti l'angolo al vertice.

59. Determinare coll'uso della riga e del compasso un angolo di 60° [L'angolo del triangolo equilatero....]. |122|

60. Costruire sopra un segmento dato come base un triangolo isoscele, avente l'angolo al vertice quadruplo dell'angolo alla base. (Quanto vale codesto angolo al vertice? Quanto vale l'angolo delle bisettrici di due angoli in un triangolo equilatero?).

61. Descrivere una circonferenza che tocchi un cerchio dato in un suo punto dato A e passi per un punto dato B. Distinguere il caso in cui B è interno da quello in cui è esterno al cerchio dato. [Si noti che AB deve essere una corda della circonferenza che si cerca]. |124|

62. Due corde di un cerchio che si dimezzino scambievolmente sono due diametri. [Se infatti il loro punto di incontro non coincidesse col centro, la congiungente di codesto punto di incontro col centro sarebbe perpendicolare....].

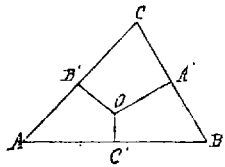
63. Costruire un cerchio di dato centro che tagli sopra una retta data un segmento assegnato.

64. Se una retta incontra due circonferenze concentriche, *i segmenti di essa compresi fra queste sono uguali.*

65. Il diametro perpendicolare ad una corda biseca l'arco che la sottende.

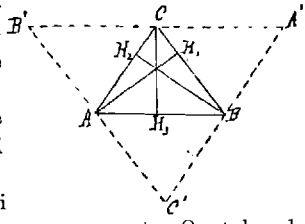
66. Se due seganti di un cerchio sono parallele, gli archi compresi nella striscia sono uguali. [Cfr. es. prec.].

[125]



67. In un triangolo le tre perpendicolari innalzate nei punti medi dei lati si incontrano in un punto equidistante dai tre vertici. [Il punto O comune agli assi dei due segmenti AB e BC è equidistante da A, B e C. In particolare O è equidistante da A e C: ma il luogo dei punti equidistanti da A e C è l'asse del segmento AC (n. 125). Dunque ecc.].

68. In un triangolo le tre altezze passano per uno stesso punto (ortocentro). [Che cosa sono le tre altezze del triangolo dato ABC rispetto al triangolo A'B'C' delle tre parallele condotte pei vertici di ABC ai lati opposti?].



69. Date due coppie di punti A, B e C, D tali che AB = CD trovare un punto O, tale che OA = OB , OC = OD. Discussione.

70. Dati due segmenti uguali AB, CD (purchè non paralleli e diretti nel medesimo verso) si può sempre trovare un punto O, tale che mediante una rotazione intorno ad O, AB si possa portare a coincidere con CD.

71. Luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti.

72. Costruire un cerchio tangente in un dato punto ad un dato cerchio e che passi per un punto prefissato. Discussione.

73. Luogo dei punti che hanno da una circonferenza data una distanza data. Discussione. [Vedi eserc. prec.]

[126]

74. Dati un cerchio e un punto non appartenente alla circonferenza, si considerino i segmenti che vanno dal punto prefissato ai punti della circonferenza. Fra codesti segmenti

1° quello il cui prolungamento passa pel centro è minimo e quello che passa pel centro è massimo;

2° due segmenti sono uguali se i loro estremi sulla circonferenza insieme con l'estremo del segmento minimo (o *massimo*) definiscono archi uguali;

3° due segmenti sono disuguali se i loro estremi insieme con l'estremo del segmento minimo (*o massimo*) danno

archi, minori di una semicirconferenza, disuguali, e precisamente è maggiore quello il cui estremo dà con l'estremo del segmento minimo l'arco maggiore.

Def. — Il minimo dei segmenti condotti da un punto ad una circonferenza si dice *distanza* del punto dalla circonferenza.

75. Sopra una retta data trovare i punti che distano di un dato segmento da una circonferenza fissata. Discussione.

76. Indicando con a, b i cateti di un triangolo rettangolo, con c la ipotenusa e con α, β gli angoli rispettivamente opposti ad a, b, si costruisca il triangolo rettangolo, pel quale è: [127]

1) $a = 6$ cm. , $b = 5$ cm.
2) $a = 6$ cm. , $c = 10$ cm.
3) $b = 5$ cm. , $c = 13$ cm.
4) $a = 7$ cm. , $\beta = 30°$.
5) $c = 12$ cm. , $\alpha = 22\,1/2°$.

77. In un triangolo rattangolo un angolo è di 65°43': Qual'è l'ampiezza dell'altro angolo acuto?

78. Determinare l'ampiezza dell'angolo alla base di un triangolo rettangolo isoscele.

79. In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è doppio dell'altro: qual'è l'ampiezza dei due angoli?

80. Costruire un triangolo rettangolo dato il perimetro ed un angolo acuto. [Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo rettangolo in C che ad esso soddisfa. Prolungato BA di AD = AC, e AB di BE = BC, del triangolo DEC conosciamo il lato DE e gli angoli $E\widehat{D}C$, $C\widehat{E}D$, perchè ecc.].

81. In un triangolo rettangolo la differenza degli angoli acuti è uguale all'angolo compreso dall'altezza e dalla mediana relative all'ipotenusa.

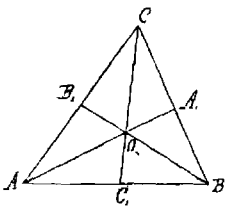
82. Tutti i punti della bisettrice di un angolo sono equidistanti dai due lati; e, viceversa, se un punto ha distanze uguali dai due lati di un angolo, esso si trova sulla bisettrice dell'angolo. Cioè la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati. [132]

83. Determinare il luogo dei punti equidistanti da due rette non parallele.

84. Determinare il luogo dei centri dei cerchi tangenti a due rette non parallele.

85. Dati un cerchio e una retta r descrivere una circonferenza che tocchi il cerchio in un punto A e sia tangente alla retta. [Si noti che la tangente in A al cerchio dato e la retta data debbono essere tangenti al cerchio cercato.... Si ricordi l'eser. prec.].

86. Le bisettrici degli angoli di un triangolo passano per uno stesso punto interno al triangolo, il quale è equidistante dai tre lati. [Si ricordi che la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai due lati (eserc. 82). Di qui risulta che il punto O, comune alle bisettrici di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, è equidistante dalle rette AB, BC, CA. Ma il luogo dei punti equidistanti due lati BC e CA è la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$, onde risulta ecc.].



87. Le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo, colla bisettrice dell'angolo interno non adiacente, si incontrano in un punto esterno al triangolo, pure equidistante dai tre lati. [Cfr. la traccia dell'es. prec.].

88. In uno stesso cerchio o in cerchi uguali, corde equidistanti dal centro sono uguali [Si ricordi il n. 124, *c*].

89. Dati due cerchi concentrici, tutte le corde del maggiore che sono tangenti al minore, sono uguali fra loro.

90. In uno stesso cerchio o in cerchi uguali corde uguali sono equidistanti dal centro. [Si ricordi il n. 124, c].

91. In un cerchio tutte le corde uguali ad un dato segmento sono tangenti ad un cerchio concentrico al dato. [Confrantare es. 13].

92. Se due triangoli rettangoli hanno le ipotenuse uguali, e un cateto del primo è minore di un cateto del secondo, l'altro cateto del primo è maggiore del cateto rimanente del secondo. [Si dimostri per assurdo].

93. Se in cerchi uguali o nello stesso cerchio due corde sono disuguali, la maggiore ha dal centro del rispettivo cerchio distanza minore. [Si tenga conto dell'eserc. prec.].

94. Se in cerchi uguali o nello stesso cerchio due corde non sono equidistanti dai centri dei rispettivi cerchi, la corda

che ha la distanza minore è maggiore. [Si tenga conto dell'eser. 92].

95. Fra tutte le corde che passano per un punto interno ad un cerchio, quella che è perpendicolare al diametro passante per quel punto è la minima. [Infatti ogni altra corda ha dal centro distanza.... Cfr. eserc. prec.].

96. In ogni quadrilatero il perimetro è maggiore della somma delle diagonali e minore del doppio di codesta somma. [133]

[Per la prima parte si osservi che il doppio di ciascuna diagonale è minore del perimetro (n. 96) e quindi....; per la seconda parte si ragioni come nell'es. 24].

97. Costruire un quadrilatero, in cui i lati siano di mm. 30, 25, 40, 30 e la diagonale relativa ai due primi lati sia di mm. 35.

98. Disegnare un poligono a 5 o 6 o 10 lati, condurre tutte le diagonali (congiungenti due vertici non consecutivi) e contare in ciascun caso quante sono. [135]

99. In un poligono la somma dei segmenti che congiungono un punto qualsivoglia coi vertici è maggiore del semiperimetro. [Cfr. es. 96]. [139]

100. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ, δ di un quadrilatero, sapendo che β è doppio, γ triplo e δ quadruplo di α. [140]

101. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ, δ di un quadrilatero, sapendo che β è doppio di α, γ è doppio di β e δ è doppio di γ.

102. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ, δ di un quadrilatero, sapendo che α è doppio di β, β è la terza parte di γ, e δ è la quarta parte della somma di α e β.

103. Calcolare le ampiezze degli angoli α, β, γ, δ di un quadrilatero sapendo che α supera β di 3°, β supera γ di 6° e γ supera δ di 9°.

104. Dimostrare che, avuto riguardo agli angoli concavi, ottusi, retti, acuti si hanno dieci specie di quadrilateri.

105. In ogni quadrilatero convesso: 1.° le bisettrici di due angoli consecutivi si tagliano sotto un angolo uguale alla semisomma degli altri due: 2.° le bisettrici di due angoli opposti si tagliano sotto un angolo uguale alla semidifferenza dei due altri.

106. In ogni quadrilatero intrecciato, la differenza di due angoli opposti è uguale alla differenza degli altri due.

[141] **107.** La somma di tre angoli di un pentagono è uguale a 427°49'15": degli altri due uno è doppio dell'altro. Quanto valgono questi due angoli?

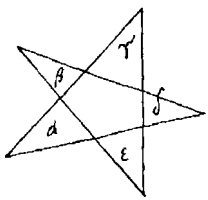
108. Calcolare la somma degli angoli di un poligono a 12 lati o a 30 lati o a 52 lati.

109. In quale poligono la somma degli angoli è di 2340° o di 3240° o di 4320°?

110. In un poligono equiangolo ciascun angolo è di 157,5° (o di 174° o di 175° o di 175,5°). Quanti lati ha il poligono?

111. Un poligono equiangolo ha 36 lati: qual'è l'ampiezza di ciascun angolo interno?

112. L'angolo esterno di un poligono equiangolo è uguale a 12°: quanti lati ha il poligono?



113. La somma degli angoli acuti α, β, γ, δ, ε di un pentagono stellato è uguale a due retti. Quanto vale la somma degli angoli acuti di un ettagono stellato?

[147] **114.** In un trapezio isoscele (cioè avente uguali i due lati non paralleli) le diagonali sono uguali.

115. In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna delle basi sono uguali.

116. Se in un trapezio i due angoli adiacenti ad una base sono uguali, sono uguali anche gli altri due angoli e i lati non paralleli.

117. In un trapezio isoscele i lati non paralleli, prolungati, si incontrano sulla retta congiungente i punti medi delle basi; e codesta retta è perpendicolare alle due basi. [Prolungando i due lati non paralleli si ottengono due triangoli isosceli.... Si ricordi poi il n. 123].

118. Le congiungenti gli estremi di due corde parallele e non uguali di una stessa circonferenza si intersecano sul diametro perpendicolare alle due corde [cfr. l'eserc. prec.].

119. Il segmento congiungente i punti medi delle diagonali di un trapezio è parallelo alle basi ed uguale alla metà

della loro differenza. [Per dimostrare la seconda parte si prolunghi il segmento indicato, si osservi che i due segmenti determinati sui prolungamenti dai lati non paralleli sono uguali ciascuno a...., e si ricordi l'eserc. prec.].

120. In un trapezio la congiungente i punti medi dei due lati non paralleli è parallela alle due basi ed uguale alla loro semisomma. [Pel punto medio di uno dei due lati non paralleli si conduca la parallela all'altro lato fino a incontrare le rette delle due basi e si considerino i due triangoli....].

121. Costruire un parallelogramma dati ne i lati ed una diagonale. [Supposto risoluto il problema, si considerino i due triangoli, in cui il perallelogramma è diviso dalla diagonale data].

122. Se un segmento si muove parallelamente a se stesso in modo che un suo estremo percorra una circonferenza, quale è il luogo descritto dall'altro estremo? [Dal centro della circonferenza si conduca il segmento uguale e parallelo al dato e si congiunga il secondo estremo di questo segmento col secondo estremo del segmento mobile.]

123. Condotte in un triangolo isoscele da un punto della base le parallele ai due lati, la somma dei segmenti di queste comprese fra la base e i lati è uguale al lato del triangolo isoscele.

124. Condotte in un triangolo equilatero per un punto interno le parallele ai tre lati, la somma dei segmenti di queste compresi fra i lati è uguale al doppio del lato del triangolo equilatero.

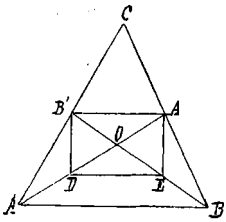
125. In un triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dagli altri due lati non cambia al variare del punto sulla base. [Si confronti codesta somma colla distanza di un estremo della base dal lato opposto.]

126. In un triangolo equilatero la somma delle distanze di un punto interno dei tre lati non varia al variare del punto entro il triangolo. [Vedi eser. precedente].

127. Il segmento congiungente i punti di mezzo di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è uguale alla metà di questo. [Da uno di codesti punti di mezzo si conduce la parallela all'altro lato che si è dimezzato....].

128. In un triangolo le tre mediane passano per uno

stesso punto (baricentro), che divide ciascuna mediana in due parti tali che quella avente un estremo nel vertice è doppia dell'altra. [Condotte le due mediane AA', BB', che si incontrino in O, e divisi per metà i segmenti AO, BO in D, E rispettivamente, si conducano i segmenti B'D, DE, EA', A'B'. I due segmenti B'A', DE come quelli che congiungono i punti di mezzo ai due lati dei triangoli ABC, ABO, aventi comune la base AB sono entrambi paralleli alla AB ed uguali alla metà del segmento AB (eser. prec.): essi sono quindi anche paralleli ed uguali fra loro. Allora il quadrilatero A'B'DE è un parallelogramma ed è DO = OA', EO = OB'. Ma DO = AD, EO = BE; onde risulta AO = 2. OA', BO = 2· OB'. Analogamente si prova che la terza mediana divide una qualsiasi dalle altre due, per es. la AA', per modo che la parte avente per estremo A è doppia dell'altra, onde si conclude ecc.].



[148] **129.** Se in un triangolo due lati sono divisi nel medesimo numero di parti uguali, le congiungenti i punti di divisione che, a partire dal vertice comune, occupano ugual posto, sono parallele al terzo lato.

[150] **130.** Un quadrilatero, in cui le diagonali si dimezzino scambievolmente è un parallelogramma.

[154] **131.** Un quadrilatero equiangolo è un rettangolo.

132. Un quadrilatero equilatero è un rombo.

133. Le bisettrici degli angoli di un quadrilatero formano un quadrilatero, di cui gli angoli opposti sono supplementari. Se il primo quadrilatero è un parallelogramma, il secondo è un rettangolo le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogramma ed uguali alla loro differenza. Se il primo quadrilatero è un rettangolo, il secondo è un quadrato.

134. I segmenti che congiungono i punti medi dei lati consecutivi di un quadrilatero formano un parallelogramma, di cui le diagonali si segano nel punto di mezzo del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali del quadrilatero.

Esaminare sotto quali condizioni il parallelogramma è un rettangolo, una losanga, un quadrato.

135. Dimostrare che tutti i parallelogrammi iscritti in u

rettangolo e aventi i lati paralleli alle diagonali di esso hanno perimetri uguali. [Si dimostri che uno qualsiasi di essi ha perimetro uguale al parallelogramma dato].

136. Se una retta è parallela ad un'altra, tutti i punti dell'una hanno ugual distanza dall'altra *(distanza delle due parallele).*

137. Il luogo dei punti che distano di un segmento assegnato da una retta data e giacciono rispetto ad essa da una banda prefissata, è la parallela alla retta data, che ha da essa una distanza uguale al segmento assegnato e giace dalla banda considerata.

138. Il luogo dei punti del piano che hanno da una retta data una distanza uguale ad un segmento dato è la coppia delle due parallele alla retta data, che giacciono da bande opposte, ed hanno da essa una distanza uguale al segmento dato.

139. Il luogo dei punti del piano che hanno da una retta data una distanza minore di un segmento dato è l'insieme dei punti interni alla striscia compresa fra le due parallele alla retta data, che giacciono da bande opposte ed hanno da essa una distanza uguale al segmento dato: e il luogo dei punti che hanno dalla retta distanza maggiore del segmento dato è l'insieme dei punti esterni alla striscia or ora indicata.

140. Determinare un punto che abbia da due rette date distanze date. Quante soluzioni si hanno?

141. Il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele è una retta parallela alle prime due ed equidistanti da esse *(bisettrice della striscia).*

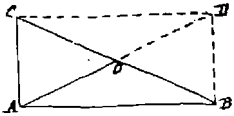
142. Costruire un trapezio rettangolo (cioè avente un angolo retto) in cui l'altezza (distanza delle due basi) sia di mm. 18, la baee maggiore di mm. 40, e l'angolo di codesta base col lato non perpendicolare sia di 45°.

143. Costruire un triangolo dati due lati e l'altezza relativa ad uno di essi.

144. Determinare un punto che abbia da un punto e da una retta dati distanze prefissate. Discussione.

145. Costruire un triangolo conoscendone la base, l'altezza e la mediana relativa alla base.

146. In un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipo- [158]



tenusa è equidistante dai tre vertici.

[Preso OD = AO, si noti che il quadrilatero ABDC è un rettangolo e ha quindi le diagonali uguali; quindi siccome queste mezzano scambievolmente ecc.].

[159] **147.** Un triangolo il cui punto medio di un lato sia equidistante dai vertici è rettangolo ed ha il lato suddetto come ipotenusa.

[160] **148.** Costruire il quadrato che ha per diagonale un segmento dato.

149. Le diagonali della losanga ne bisecano gli angoli e sono fra loro perpendicolari.

150. Un parallelogramma è una losanga

1) se le diagonali sono perpendicolari;

2) se una diagonale biseca uno degli angoli.

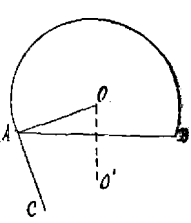
[165] **151.** Qual'è l'ampiezza di un angolo alla circonferenza, il quale insista su di un arco che sia i $\frac{2}{9}$ della circonferenza?

152. Ogni angolo avente il vertice nell'interno di un cerchio è uguale alla semisomma degli angoli al centro corrispondenti agli archi compresi dall'angolo stesso e dal suo opposto al vertice.

153. L'angolo di due secanti di un cerchio, uscenti da un punto esterno ad esso è uguale alla semidifferenza degli angoli al centro corrispondenti ai due archi compresi fra le due secanti.

Def. — Un arco si dice *capace* di un certo angolo, se uno, e quindi tutti gli angoli iscritti in esso, sono uguali all'angolo dato.

154. Sopra un segmento dato come corda descrivere un arco di circonferenza capace di un dato angolo. [Sia AB il dato segmento; da uno dei suoi estremi, p. es. da A, si conduca un raggio AC, tale che l'angolo $\widehat{CAB}$ sia uguale all'angolo dato. Il punto O comune alla perpendicolare al raggio AC nel punto A, e all'asse del segmento AB è il centro dell'arco cercato: infatti ecc.].



155. Il luogo dei punti che giacciono da una banda rispetto ad un segmento dato e da cui codesto segmento si vede sotto un angolo dato è l'arco avente per corda il segmento dato, capace del dato angolo e giacente dalla parte prefissata.

156. Costruire un triangolo rettangolo, date l'ipotenusa e la somma dei cateti. [Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo cercato, rettangolo in B. Prolungato AB di un segmento BD = BC, del triangolo ADC si conoscono i lati AD, AC e l'angolo $\widehat{CDA}$].

157. Costruire un triangolo rettangolo date l'ipotenusa e la differenza dei cateti. (Cfr. es. prec.).

158. Costruire un triangolo dati due lati e l'angolo opposto ad uno di questi.

159. Costruire un triangolo dati un lato, l'altezza ad esso relativa e l'angolo opposto ad esso.

160. Costruire un triangolo dati un lato, la mediana ad esso relativa e l'angolo opposto.

161. Costruire un triangolo rettangolo date l'ipotenusa e l'altezza relativa. Quando è possibile la costruzione? **[168]**

162. Condurre la perpendicolare ad una semiretta nella sua origine senza prolungarla. [Se A è l'origine della semiretta, si conduca A e per un altro punto B della semiretta una circonferenza di cui sia O il centro. Congiunto A coll'altro estremo del diametro BO....].

163. Condurre per un punto una retta la quale abbia una distanza data da un altro punto prefissato.

164. Costruire un triangolo dati un lato e le altezze relative agli altri due lati. [Si ricordi il n. 87]. **[170]**

165. Costruire un triangolo, dati un lato, la mediana ad esso relativa e l'altezza relativa ad un altro lato. [Si ricordi il n. 87].

166. Dati un cerchio e un punto A esterno ad esso, condurre per A una retta, su cui la circonferenza seghi una corda uguale ad un segmento dato, minore del diametro. Quante soluzioni si hanno?

167. L'angolo delle tangenti condotte ad un cerchio da un punto esterno è bisecato dalla congiungente del punto dato col centro. **[171]**

168. Dato un cerchio, se le tangenti condotte ad esso da

due punti A e B sono uguali, i punti A, B sono equidistanti dal centro del cerchio dato.

169. Determinare il luogo dei punti tali che le tangenti condotte da essi ad una circonferenza data sieno uguali ad un dato segmento.

170. Determinare i punti del piano dai quali le tangenti condotte a due circonferenze date sono uguali ad un dato segmento. Discussione.

171. Qual'è il luogo dei punti per cui codeste tangenti riescono maggiori del segmento dato e quale quello per cui sono minori?

172. Il segmento di una tangente ad un cerchio intercetto dalle tangenti per gli estremi di un diametro viene veduto dal centro secondo un angolo retto.

173. Condurre le tangenti comuni a due cerchi. [Se O, O' sono i centri delle due circonferenze supposte disuguali, si descrivano dal centro del cerchio minore i cerchi che hanno per raggio la somma e la differenza dei raggi dei due cerchi dati, e si conducano dall'altro centro le tangenti ai cerchi or ora descritti. Come sono le tangenti comuni ai due cerchi dati rispetto alle tangenti or ora costruite?].

174. La distanza di due circonferenze è di 1 m. e i due raggi sono rispettivamente di m. 0,90 e m. 0,60. Calcolare la lunghezza dei segmenti delle tangenti comuni esterne, compresi fra i punti di contatto.

175. Due circonferenze, i cui raggi sono rispettivamente di m. 3 e m. 1,20, hanno fra i centri la distanza di m. 6,40. Calcolare la lunghezza dei segmenti di tangente interna, compresi fra i punti di contatto.

[172] **176.** Poligoni iscritti in cerchi uguali aventi i lati ordinatamente uguali sono uguali.

177. Un poligono equilatero iscritto in un cerchio è equiangolo.

[178] **178.** Un parallelogramma inscrivibile in una circonferenza è un rettangolo.

179. Un trapezio iscrivibile in una circonferenza è isoscele.

[179] **180.** Ogni rettangolo è iscrivibile in un cerchio.

181. Un trapezio isoscele è sempre iscrivibile (cfr. es.).

182. Ogni parallelogramma circoscrivibile è una losanga. [180]

183. Ogni losanga è circoscrivibile. [181]

184. In un triangolo, la congiungente i piedi di due altezze taglia dal triangolo un quadrilatero iscrivibile.

185. In un triangolo le tre altezze determinano tre quadrilateri iscrivibili.

186. Iscrivere in un cerchio dato un quadrato di cui un lato passi per un punto prefissato dentro il cerchio. Indicare la condizione cui deve soddisfare il punto perchè il problema sia possibile. [Dato dentro il cerchio O il punto M, si iscriva nel cerchio un qualsiasi quadrato ABCD. Se P è un punto in cui la circonferenza di centro O e raggio OM sega uno dei lati di ABCD, per esempio AB, si congiunga O con P e con A. Costruito l'angolo $M\widehat{O}N$, uguale all'angolo $P\widehat{O}A$, si dimostra che la corda MN del cerchio O è lato di un quadrato iscritto nel cerchio. — Il metodo qui indicato consiste, in sostanza, nel costruire una figura uguale a quella richiesta e nel farla poi *ruotare* intorno ad un punto, fino a portarla nella posizione particolare voluta. Codesto metodo, che vale a risolvere tutto un gruppo di problemi, si designa col nome di *metodo* delle *rotazioni*]. [185]

187. Iscrivere in un cerchio un ottagono regolare di cui un lato passi per un punto dato interno al cerchio. [186]

188. Iscrivere in un cerchio un esagono regolare di cui un lato passi per un punto dato interno al cerchio. [187]

189. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero di cui un lato passi per un punto prefissato dentro il cerchio. Indicare la condizione di possibilità ed esaminare il caso in cui il punto dato sia esterno. [189]

190. Servendosi del rapportatore e della riga iscrivere in un cerchio dato un *pentagono regolare*. [Supposto iscritto il pentagono regolare ABCDE, si congiungano i vertici col centro O e si noti che gli angoli $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$, ... $E\widehat{O}A$ sono uguali. Quanto vale ciascuno di essi?].

191. Dati tre segmenti *a*, *b*, *c*, il rettangolo contenuto [195]

dal segmento $a+b$ e da c è equivalente alla somma dei due rettangoli contenuti da a e c e da b e c rispettivamente.

192. Dati due segmenti a, b, il quadrato costruito sulla somma $a+b$ è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su a e b e di due volte il rettangolo contenuto da a e b.

193. Dati due segmenti a, b, tali che a sia maggiore di b il quadrato costruito sulla differenza $a-b$ è equivalente alla somma dei quadrati di a e b, diminuita del doppio del rettangolo di a, b.

194. Se un segmento è diviso in qualsivoglia modo in tre parti, il quadrato costruito sull'intero segmento è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle tre parti e del doppio dei tre rettangoli contenuti da codeste tre parti prese a due a due nei tre modi possibili.

195. Il gnomone (esagono concavo) differenza di due quadrati è equivalente al rettangolo contenuto dalla somma e dalla differenza dei lati dei quadrati. [Si mettano i due quadrati in modo che abbiano comune un angolo].

196. Se per un punto della diagonale di un parallelogramma si conducono le parallele ai lati, dei quattro parallelogrammi, in cui il primitivo resta così diviso, quelli, che non sono attraversati dalla diagonale sono equivalenti.

197. Il dodecagono regolare è equivalente al triplo del quadrato del raggio. [Se A, B, C, D sono quattro vertici consecutivi del dodecagono regolare di centro O, si completi il quadrato AODE del raggio. Basta allora dimostrare che il triangolo OBC è equivalente al pentagono concavo ABCDE. Si prenda il simmetrico E′ di E rispetto a BC e si congiungano E ed E′ con B e C, ed E con O; confrontando i tre triangoli OBE′, OCE′, BCE′ rispettivamente con AEB, DEC, BCE si trova ecc.].

198. Teorema di Pappo. — Un parallelogramma ABDE costruito su di un lato AB di un triangolo ABC, il cui vertice C sia interno alla striscia AE, BD, è equivalente alla somma di due parallelogrammi qualsiasi, costruiti sui lati AC, BC e i cui lati opposti passino rispettivamente per E, D. (Si prolunghino codesti lati opposti ad AC, BC fino ad incontrarsi in F e si conduca la FC fino ad intersecare le AB, ED ecc.).

Nota. — Se l'angolo $A\widehat{B}C$ è retto e i tre parallelogrammi sono quadrati, si ha una nuova dimostrazione del teorema di **Pitagora.**

199. Trasformare un parallelogramma in un altro di cui sono dati i due lati. Discussione.

[Il dato parallelogramma ABCD, si trasformi anzitutto in un parallelogramma avente un lato uguale ad uno dei segmenti dati, descrivendo, centro in A, una circonferenza di raggio uguale a siffatto segmento, ecc.].

200. Trasformare un parallelogramma dato in una losanga di dato lato. Discussione. (Cfr. la traccia dell'es. prec.).

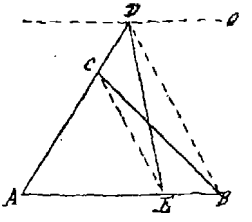
201. I punti medi dei lati di un quadrilatero sono i vertici di un parallelogramma, il quale è equivalente alla metà del quadrilatero. [Si conduca una diagonale e si considerino i due triangoli e i due parallelogrammi che così si ottengono. Si ricordi inoltre l'es. 127]. |201|

202. Le mediane di un triangolo lo dividono in sei triangoli equivalenti. [Si considerino le coppie dei triangoli che hanno come base comune un lato del triangolo e come vertici i punti medi degli altri due]. |202|

203. Congiungendo un qualsiasi punto interno ad un parallelogramma coi vertici, si ottengono quattro triangoli tali che la somma di due tra essi non adiacenti è equivalente alla somma degli altri due. [Si conducano pel punto le parallele ai lati ecc.].

204. Dato un esagono regolare, i cinque segmenti, che congiungono un vertice determinato di esso cogli altri vertici e coi punti medi dei due lati, che formano il vertice opposto al prefissato, dividono l'esagono in sei parti equivalenti. [Se $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ è l'esagono ed A_1 è il vertice prefissato si osservi che il lato A_2A_3 è parallelo alla diagonale A_1A_4 ed uguale alla metà di essa].

205. Trasformare un triangolo dato in un triangolo di data altezza. [Dato il triangolo ABC, per trasformarlo in un triangolo avente un'altezza uguale ad un dato segmento conduciamo la parallela o ad uno dei lati del triangolo, per es. ad AB, alla distanza uguale al segmento dato, e sia D la intersezione con la o di uno degli altri due lati, p. es. di AC,



o del suo prolungamento. Congiunto D con B, si conduca per C la parallela alla DB fino ad incontrare la AB in E.

Diciamo che il triangolo AED, il quale ha evidentemente l'altezza prefissata, è equivalente ad ABC. Invero....].

206. Trasformare un triangolo dato in un triangolo rettangolo di cui è dato un cateto (es. prec.).

207. Dividere un triangolo dato in due parti equivalenti per mezzo di una perpendicolare ad un lato prefissato. [Supposto che il triangolo dato, non sia isoscele, nel qual caso la risoluzione è immediata, una delle due parti in cui esso sarà diviso dalla retta cercata è un triangolo rettangolo che ha un angolo acuto comune col triangolo primitivo. Ma codesto triangolo parimente è equivalente alla metà del triangolo dato (cfr. eser. prec.); quindi ecc.]

208. Trasformare un triangolo in un triangolo di data base. [Cfr. eserc. 205].

209. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele di cui è data l'altezza o la base.

210. Trasformare un triangolo dato in un triangolo di cui son dati un lato ed uno degli angoli adiacenti.

211. Trasformare un triangolo in un triangolo rettangolo di data ipotenusa. [Cfr. eserc. 208 e n. 168].

212. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele di cui i lati uguali siano uguali ad un segmento dato. [Si osservi che l'altezza divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli e si ricordi l'eser. prec.].

213. La somma di più triangoli aventi la stessa base è equivalente al triangolo, che ha la medesima base e l'altezza uguale alla somma delle altezze dei triangoli dati.

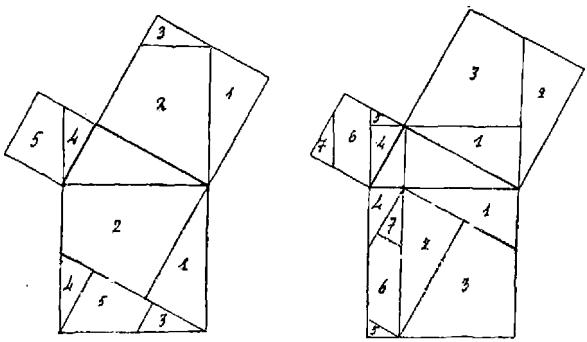
214. La somma delle distanze di un punto interno ad un poligono equilatero dai suoi lati è costante. [Congiunto il punto coi vertici del poligono, questo rimane decomposto in tanti triangoli di ugual base, la cui somma è equivalente per una parte al poligono e per l'altra ad un triangolo che ha per base il lato del poligono, ecc.]. Si esamini quel che accade per un punto esterno.

215. In un trapezio si congiunga il punto medio di uno dei due lati non paralleli coi vertici del lato opposto. Il triangolo racchiuso fra le due congiungenti e il lato indicato è equivalente alla metà del trapezio. [Codesto triangolo vien diviso dalla congiungente i punti medi dei due lati non paralleli in due triangoli aventi per base la semisomma delle basi del trapezio (cfr. es. 120) e per altezza la metà dell'altezza del trapezio]. [204]

216. Congiungendo un punto interno ad un trapezio ed equidistante dai lati paralleli coi vertici del trapezio si ottengono quattro triangoli tali che la somma delle due coppie di triangoli opposti sono equivalenti.

[La somma dei due triangoli aventi per basi le basi del trapezio è equivalente ad un triangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la metà dell'altezza del trapezio, è quindi è equivalente (n. 203) alla metà del trapezio....].

217. Verificare sperimentalmente colla carta le due dimo- [212]



strazioni del teorema di PITAGORA che sono suggerite dalle annesse figure.

218. Se le diagonali di un quadrilatero si incontrano perpendicolarmente, la somma dei quadrati di due lati opposti è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due.

219. Costruire un quadrato equivalente alla somma di due o più quadrati dati.

220. Costruire un quadrato equivalente a 60 volte (od 84

o 47.... volte) un quadrato dato. [Si noti che è $60 = 8^2 - 2^2$; $83 = 8^2 + 4^2 + 2^2$; $47 = 7^2 = 1^2$, ...].

221. Costruire un quadrato eguivalente alla metà di un altro.

222. Dividere un segmento dato in tre parti, tali che le due estreme siano uguali e che la somma dei quadrati di queste sia equivalente al quadrato della parte di mezzo. [In virtù dell'inverso del teorema di PITAGORA si può enunciare il problema: costruire un triangolo rettangolo isoscele di dato perimetro. Si immagini per ciò risoluto il problema; e prolungata l'ipotenusa da una parte e dall'altra di un segmento uguale al cateto, si congiungano gli estremi di questi segmenti col vertice dell'angolo retto. Nel triangolo isoscele, che così si ottiene quanto valgono gli angoli alla base? (n. 110)].

223. Il quadrato dell'altezza del triangolo equilatero è triplo del quadrato della metà del lato [costruito il quadrato dell'altezza si applichi il teorema di Pitagora].

[215] **224**. Trasformare un triangolo in un triangolo rettangolo isoscele. [Che figura costituisce un triangolo rettangolo isoscele insieme col suo simmetrico rispetto alla base?].

225. Trasformare un triangolo in un quadrato.

226. Trasformare un trapezio in un quadrato.

227. Trasformare un quadrato in un rettangolo di data base.

228. Trasformare un quadrato in un triangolo isoscele di data base. [Si ricordino i nn. 215,201].

229. Trasformare un quadrato in un triangolo isoscele di data altezza. [Si ricordino i nn. 215, 200].

[227] **230**. Calcolare l'area di un rettangolo che ha m. 36 di perimetro e un lato doppio del consecutivo.

231. In un rettangolo il perimetro è di cm. 26 e la base supera l'altezza di cm. 3. Qual'è l'area del rettangolo?

232. Calcolare l'area di un rettangolo, avente il perimetro di m. 60 e l'altezza uguale a $^2/_3$ della base.

233. Si vuol seminare a frumento un campo rettangolare, le cui dimensioni sono di m. 294,6 e m. 300,5. Quanta sementa

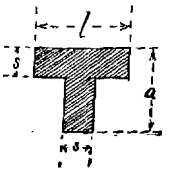
occorrerà, posto che se ne vogliano seminare El. 2,5 per ogni Ea. ?

234. In un appartamento si vogliono tappezzare alcune stanze; la superficie totale da ricoprire è di m.^{2} 120 e i rotoli di carta da parati che si vuol usare hanno m. 12 di lunghezza per m. 0,50 di larghezza e costano L. 3,50 l'uno. Quanti rotoli occorrono e quanto si deve spendere?

235. Di due rettangoli equivalenti l'uno è lungo m. 117 e largo m. 35, l'altro è lungo m. 65: quanto è largo questo secondo rettangolo?

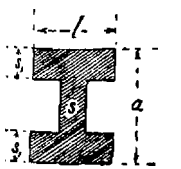
236. Un giardino rettangolare di m. 28,4 di lunghezza e m. 15,8 di larghezza è traversato parallelamente ai lati da una strada nel senso della lunghezza, larga dm. 11,5 e da due sentieri nel senso della larghezza, larghi cm. 95. Qual'è l'area delle strade? Quale quella del terreno coltivato?

237. Un'incisione lunga cm. 84 e alta cm. 64 ha una cornice piana, larga cm. 13. Qual'è la superficie della cornice?



238. Si calcoli l'area della sezione di una trave in ferro a T, posto che le dimensioni siano (vedi figura dove a indica l'altezza, l la larghezza delle ali, s lo spessore dell'anima e dell'ala):

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$l =$ mm.	60	100	180	25	80	140
$a =$ mm.	30	50	90	25	80	140
$s =$ mm.	5,5	8,5	14,5	3,5	9	15



239. Si calcoli l'area della sezione di una trave in ferro a doppio T, posto che le dimensioni siano (vedi figura dove a indica l'altezza, l la larghezza delle ali, s lo spessore dell'anima, s_1 lo spessore delle ali):

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$l =$ mm.	70	90	110	113	116	125
$a =$ mm.	140	200	250	260	270	300
$s =$ mm.	6	7,5	9	9,4	9,7	10,8
$s_1 =$ mm.	9	11,3	13,6	14,1	14,7	16,2

[229] **240**. Qual'è l'altezza di un rettangolo di m.^{2} 19280 se la base è di m. 705,60?

241. Un rettangolo ha l'area di un'ettara, e un lato di m. 285. Qual'è la lunghezza dell'altro lato?

242. Qual'è la base di un rettangolo di m.^{2} 19280, se l'altezza è di m. 352,80?

[234] **243**. Calcolare l'area del quadrato che ha m. 29 di perimetro.

244. Quando con un certo istrumento si è praticamente misurato un segmento e si dice che esso è lungo cm. 13, si intende che la lunghezza del segmento considerato è compresa fra cm. 12,5 e cm. 13,50 .... . Fra quali limiti è compresa l'area del quadrato del segmento anzidetto?

245. Determinare l'area e il lato di un quadrato, la cui diagonale è di m. 3,6.

246. Quante piastrelle quadrate di cm. 20 di lato occorrono per pavimentare un corridoio di 8 m. di lunghezza e di 80 cm. di larghezza?

247. Un quadrato ha il lato di m. 18; quale sarà il lato di un quadrato di superficie doppia?

248. Il lato di un quadrato è di mm. 27 [oppure di cm. 3,8 oppure di m. 2,08]: qual'è il lato del quadrato doppio o quintuplo o metà del dato?

249. Dimostrare geometricamente (per mezzo di un disegno) le identità

1) $a(b+c) = ab + ac$;
2) $a(b-c) = ab - ac$;
3) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$;
4) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$;
5) $(a+b)-b)(a = a^2 - b^2$;
6) $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$;
7) $(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd$;
8) $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$;
9) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
10) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

[236] **250**. Calcolare l'area di un parallelogramma, avente la base di m. 105,75 e l'altezza di m. 86,95.

251. Due lati consecutivi di un parallelogramma sono di m. 14 e m. 5,8; mentre l'angolo compreso è di 45°. Si calcoli l'area del parallelogramma. [L'altezza abbassata da un vertice su di un lato determina un triangolo rettangolo isoscele e quindi....].

252. Trovare l'area di un triangolo avente m. 94,70 di base e m. 137,90 di altezza. **[238]**

253. L'area di una losanga è uguale al semiprodotto delle due diagonali. [Si considerino i triangoli in cui la losanga è divisa dalle dne diagonali].

254. Calcolare l'area di una losanga le cui diagonali sono m. 6 e m. 8.

255. Calcolare l'area di una losanga, in cui la somma delle diagonali sia di m. 553,50 e una diagonale sia uguale ai $^4/_5$ dell'altra.

256. L'area di un quadrilatero è uguale al semiprodotto di una diagonale per la somma delle distanze da questa degli altri due vertici.

257. Qual'è la base di un triangolo di m.^{2} 28728 di area se l'altezza è di m. 42? **[240]**

258. Quali sono la base e l'altezza di un triangolo di m.^{2} 875 di area, se la base è uguale ai $\frac{2}{5}$ dell'altezza?

259. Qual'è l'altezza di un triangolo che ha m. 12 di base ed è equivalente a un altro triangolo, in cui la base è di m. 20 e l'altezza è di m. 6?

260. Qual'è la base di un triangolo isoscele di m. 20 di altezza, equivalente a un triangolo rettangolo di cateti di m. 30 e m. 18?

261. Un triangolo ha l'area di 3 ettare e la base di m. 485,6. Qual'è l'altezza?

262. Trovare l'altezza di un triangolo la cui base è di m. 70, sapendo che la sua superficie è media proporzionale fra quelle di due rettangoli aventi m. 6,50 di altezza e le basi rispettivamente di m. 32.8. e m. 67,70.

263. Calcolare l'area di un trapezio, avente l'altezza di m. 20,15 e le basi di m. 34,25 e m. 62,41. **[245]**

264. Da un rettangolo ABCD di m. 25 lunghezza (AC) su m. 16 di larghezza (BC), si taglia via un triangolo CBE, in

modo che il segmento BE sia uguale al quarto di AB. Qual'è l'area del triangolo? Quale quella del trapezio? Qual'è la lunghezza del segmento CE?

265. In un trapezio, in cui le basi sono di m. 30 e m. 40, l'area è di m.^{2} 700. Si calcoli l'altezza.

266. Calcolare la base minore di un trapezio, in cui l'area è di m.^{2} 200, la base maggiore di m. 18 e l'altezza di m. 12.

267. Determinare l'altezza di un trapezio, in cui l'area è mq. 223,875 e i cui lati paralleli sono rispettivamente di m. 13,5 e di m. 6,4.

268. L'area di un trapezio, che ha due angoli retti è di m.^{2} 300; l'altezza è di m. 9,8 e una delle basi è di m. 20. Calcolare le lunghezza delle due diagonali.

269. L'area di un trapezio è di m.^{2} 542,5 l'altezza è m. 21,7 e la differenza dei due lati paralleli è di m. 11,2. Quali sono codesti due lati?

270. Calcolare le basi e l'altezza di un trapezio di m.^{2} 100, sapendo che la base minore è la metà della base maggiore e l'altezza è uguale a $^1/_5$ della somma delle basi.

271. In un trapezio l'area è di m.^{2} 900 e le due basi e l'altezza stanno fra loro come 2, 3, 4. Quali sono le loro lunghezze?

[246] **272.** Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti siano rispettivamente di cm. 5 e cm. 12.

273. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di cm. 29 e un cateto di cm. 20. Qual'è la lunghezza dell'altro cateto?

274. Verificare che il triangolo, i cui lati sono rispettivamente di cm. 8, cm. 15, cm. 17 è rettangolo. [Si ricordi il n. 190].

275. Calcolare graficamente la radice quadrata di uu numero, p. es. di 194 o 65, ... [Si decomponga il numero nella somma o nella differenza di due quadrati e si tenga conto del n. 248; p. es. $194 = 13^2 + 5^2$, $65 = 9^2 - 4^2$, ...].

276. Qual'è l'altezza del triangolo isoscele che ha la base di m. 12 e il lato di m. 26?

277. Qual'è la diagonale del quadrato il cui lato è di m. 46,75?

278. Qual'è il lato del quadrato, la cui diagonale è di m. 12?

279. Qual'è la diagonale del rettangolo che ha le dimensioni di m. 46 × m. 25?

280. Qual'è il lato della losanga avente le diagonali di m. 6 e m. 8?

281. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale ai $\frac{3}{2}$ dell'altro e l'ipotenusa è lunga m. 30: quali sono le lunghezze dei cateti?

282. La diagonale di un rettangolo è di m. 30, e l'altezza è nguale ai $\frac{3}{4}$ della base. Quali sono le due dimensioni?

283. In un triangolo rettangolo isoscele l'altezza abassata dal vertice dell'angolo retto divide l'ipotenusa in due segmenti di cm. 6 ciascuno. Calcolare l'altezza e il cateto.

284. Una scala deve essere appoggiata a un muro a m. 4 dal piede di esso: quale deve essere la lunghezza della scala perchè essa possa giungere a m. 6 dal suolo?

285. A quale distanza dal piede di un muro deve essere appoggiata una scala di m. 10, perchè essa giunga all'altezza di m. 6?

286. Una scala di m. 7,25 è appoggiata a m. 3,40 dal piede di un muro: a quale altezza giunge?

287. In un cerchio di m. 2,4 di raggio, calcolare la distanza dal centro di una corda di m. 0,60 di lunghezza.

288. A quale distanza dal centro si trova una corda di m. 2,72 in un cerchio di m. 3,65 di raggio?

289. In un cerchio di m. 2,25 di raggio, si dà una corda di m. 3. Calcolare la corda che sottende l'arco metà.

290. In un cerchio di raggio di m. 4,20 si hanno due corde parallele, lunghe rispettivamente m. 3,12 e m. 6,80. Calcolare la distanza delle due corde.

291. Calcolare il perimetro di un trapezio avente due angoli retti, in cui le basi siano di m. 8,5 e m. 12,4 e l'altezza sia di m. 5,2. [Da un vertice della base minore si abbassi l'altezza della base maggiore....].

292. Qual'è l'altezza del triangolo equilatero, che ha il lato di m. 26?

293. Qual'è il lato del triangolo equilatero che ha l'altezza di m. 5,8?

294. Calcolare l'area di una losanga di cui un lato è di m. 3,6 e una delle diagonali è di m. 4,9.

295. L'area del triangolo isoscele che ha la base a e il lato b è uguale ad

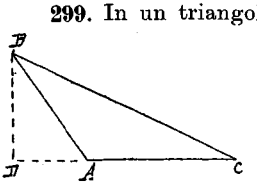
$$\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

296. Gli agrimensori romani assumevano come area del triangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo Erone, come area il numero $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{10}a^2$?

297. L'area di un triangolo equilatero è di m.^{2} 1000. Quale ne è il lato?

298. Qual'è il perimetro di una losanga di m.^{2} 60 d' area, se la diagonale minore è uguale al lato?

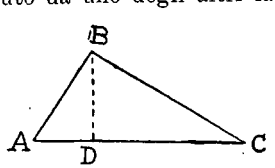
299. In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati e del doppio del rettangolo di uno di questi e dalla proiezione dell'altro su di esso. [Infatti

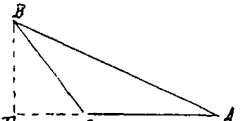


$$(AB)^2=(BD)^2+(DA)^2,$$
$$(DA)^2=(DC)^2+(CA)^2+2(DC)\,.\,(CA)$$

(cfr. eser. 192) ecc.].

300. In un triangolo la somma del quadrato di un lato, opposto ad un angolo acuto. e del doppio del rettangolo contenuto da uno degli altri lati e dalla proiezione su di esso del





terzo lato è equivalente alla somma dei quadrati dei due lati, che contengono l'angolo acuto. [Infatti si ha

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2,$$
$$(AD)^2 + 2(AC) \cdot (DC) = (AC)^2 + (CD)^2 \text{ ecc.}].$$

301. L'apotema di un esagono regolare è di m. 2,80; qual'è il suo perimetro?

302. Qual'è l'ipotenusa di un esagono regolare, che ha m. 120 di perimetro?

303. In una stessa circonferenza o in circonferenze uguali gli archi sono direttamente proporzionali ai rispettivi angoli al centro. [267]

304. In uno stesso cerchio o in cerchi uguali i settori sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro.

305. Il rettangolo contenuto da due segmenti è medio proporzionale fra i quadrati di questi. [269]

306. In un triangolo i rettangoli dei segmenti, in cui le altezze sono divise dal loro punto di incontro sono equivalenti.

307. Se tre rette passanti per un medesimo punto vengono segate con due parallele, si ottengono su queste due coppie di segmenti adiacenti che sono in proporzione. [274]

308. Si notino altre due coppie di segmenti in proporzione cui si dà origine colla costruzione dell'es. prec.

309. Una mediana di un triangolo è il luogo dei punti medi dei segmenti paralleli al lato su cui cade la mediana, intercetti dagli altri due lati.

310. I punti di mezzo delle basi di un trapezio, il punto di incontro delle diagonali e quello dei lati non paralleli sono in linea retta.

311. Se sopra due rette parallele si hanno due terne di punti susseguentisi A, B, C, e A′, B′, C′, tali che

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

le tre rette AA′, BB′, CC′ passano per un medesimo punto o sono parallele.

312. Si inverta analogamente l'esercizio 308.

313. Un triangolo abbia i lati a = m. 25, b = m. 29, c = m. 36 e in esso parallelamente a c siasi condotta una retta su cui a e b intersecano un segmento c' di m. $12\frac{1}{2}$ oppure 8 oppure 26). Che parte dal triangolo primitivo viene segata via da c'?

314. Una retta parallela a un lato di un triangolo deter-

mina su di un secondo lato due segmenti di cm. 28 e cm. 17. Quali sono i segmenti determinati sull'altro lato, la cui lunghezza è di cm. 60?

315. Due lati di un triangolo hanno rispettivamente m. 108, m. 126 di lunghezza: si prenda sul primo lato a partire dal vertice comune una lunghezza di m. 80. Quale lunghezza si deve prendere sul secondo lato perchè la congiungente i due punti di divisione sia parallela al terzo lato?

316. Qual'è l'altezza del triangolo, che si ottiene prolungando i due lati non paralleli di un trapezio isoscele, le cui basi siano di cm. 12 e cm. 20 e l'altezza di cm. 3?

317. Sono date in un cerchio due corde parallele, lunghe rispettivamente cm. 24 e cm. 32 e distanti cm. 4. Calcolare il raggio del cerchio e le distanze delle corde dal centro.

318. Se in due triangoli ABC, A'B'C' gli angoli B, B' sono uguali e gli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$ sono supplementari si ha

$$AB : A'B' = AC : AC'.$$

[Portato il triangolo A'B'C' ad avere il vertice B' sul vertice B di ABC e i lati B'A', B'C' su BA, BC rispettivamente si conduca da A la parallela ad A'C' fino ad incontrare in H la BC, ecc.].

319. La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti, che sono proporzionali agli altri due lati.

320. Se in un triangolo la bisettrice di un angolo esterno incontra il prolungamento del lato opposto, le distanze di codesta intersezione dagli estremi di quel lato sono proporzionali agli altri due lati.

321. I lati di un triangolo hanno rispettivamente 18, 30 e 36 m. di lunghezza. Calcolare i segmenti determinati sui lati delle tre bisettrici.

322. Se un lato di un triangolo è diviso in due parti, le quali siano proporzionali agli altri due lati, la retta, che passa pel punto di divisione del lato e per il vertice dell'angolo opposto, biseca quest'angolo.

323. Se in un triangolo la bisettrice di un angolo esterno incontra il prolungamento del lato opposto, le distanze di codesta intersezione degli estremi di quel lato sono proporzionali agli altri due lati.

324. Dato un triangolo e sul prolungamento di uno de lati un punto, le cui distanze dai due vertici che si trovano sullo stesso lato siano proporzionali agli altri due lati, la retta che congiunge codesto punto col vertice opposto, biseca il relativo angolo esterno.

325. Se C, D sono due punti l'uno interno e l'altro esterno ad un segmento dato AB e sussiste la proporzione

$$AC : BC = AD : BD,$$

da un punto qualsiasi le cui distanze da A, B siano proporzionali ad AC, BC, si vede AB sotto un angolo retto. [Cfr. eser. 322, 324,8].

326. Luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono proporzionali a due segmenti dati (disuguali fra loro). [Eserc. prec.].

327. Dato un segmento di cm. 10 di lunghezza, lo si divida internamente ed esternamente nel rapporto, **[275]**

$$4 : 5 \text{ o } 3 : 8 \text{ o } 7 : 4 \text{ o } 11 : 6$$

328. Dato un segmento di cm. 12 di lunghezza, lo si divida in tre parti che stiano fra loro come

$$2 : 3 : 4 \text{ o } 2 : 4 : 5 \text{ o } 3 : 4 : 6 \text{ o } 3 : 5 : 6.$$

329. Dato un segmento AB della lunghezza di cm. 15, si determinino su di esso due punti X, Y tali che sia

$$AX : XY = 3 : 4 \quad , \quad XY : YB = 6 : 7;$$

oppure

$$AX : XB = 2 : 7 \quad , \quad XY : XB = 1 : 2;$$

oppure

$$AX : XY = 6 : 7 \quad , \quad AX : XB = 9 : 5$$

oppure

$$AY : YB = 8 : 3 \quad , \quad AX : AY = 6 : 7.$$

330. Costruire un triangolo dati un lato c, la somma l degli altri due e il rapporto 3 : 4 di questi. [Se a, b sono i due lati da determinare abbiamo $a : b = 3 : 4$ e quindi $a + b : b = 3 + 4 : 4$; ma $a + b = l$, quindi....].

331. Qual'è il rapporto dei perimetri di due triangoli equilateri, aventi per lato l'uno m. 10, l'altro m. 18? **[279]**

332. Costruire una losanga avente le diagonali di mm. 10 e mm. 25: e poi costruirne una seconda simile alla prima, il cui perimetro sia i $^6/_5$ di quello della prima.

333. I perimetri di due poligoni simili iscritti in due cerchi stanno fra loro come i raggi dei due cerchi.

[281] **334**. Un triangolo ha i lati di m. 12. m. 25, m. 32: quali saranno i lati di un triangolo simili avente l'area quadrupla del primo?

335. Se due triangoli hanno i lati ordinatamente paralleli, e quelli del primo sono doppi dei corrispondenti nell'altro, il primo triangolo è equivalente al quadruplo del secondo.

336. Costruire un esagono regolare di cm. 2 di lato e costruirne un altro concentrico al primo, la cui area sia metà di quella del primitivo.

337. Se quattro segmenti sono in proporzione e i due primi sono lati omologhi di due poligoni simili, e i due ultimi sono lati omologhi di due altri poligoni simili, i quattro poligoni sono in proporzione.

338. Se sui tre lati di un triangolo rettangolo, come lati corrispondenti, sono costruiti tre poligoni simili, il poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui due cateti. [Si tengano presenti anche i nn. 209,270-2].

339. Se sopra i lati e sopra le diagonali di un parallelogramma si costruiscono sei poligoni simili, la somma dei pogoni costruiti sulle diagonali è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui lati. [Si consideri prima il caso dei quadrati, tenendo conto del n. 209: poi si consideri il caso generale ricordando il n. 281].

Tabella degli apotemi e delle aree di alcuni poligoni regolari di m. 1 di lato.

Poligono	Apotema	Area
Triangolo	m. 0,2887	m.² 0,4330
Quadrato	» 0,5000	» 1,0000
Pentagono	» 0,6882	» 1,7205
Esagono	» 0,8660	» 2,5981
Ottagono	» 1,2071	» 4,8284
Decagono	» 1,5388	» 7,6942
Dodecagono . . .	» 1,8660	» 11,1962

340. Se il lato di un poligono regolare di una delle specie indicate nella tabella precedente, è lungo m. 5,62 [oppure m. 0,68] che lunghezza avrà l'apotema? [Servirsi della tabella prec. e del n. 279]. Determinare l'area dello stesso poligono. [Cfr. n. 271].

341. Se l'apotema di un poligono regolare delle specie indicate nella tabella precedente è lungo m. 1 [oppure m. 4,50 o m. 7,20] che lunghezza avrà il lato?

342. Se l'area di un poligono regolare delle specie indicate nella tabella precedente è di m.^{2} 1 [oppure di m.^{2} 5 o di m.^{2} 7,20] che lunghezza avrà il lato?

343. Se due triangoli hanno i lati rispettivamente perpendicolari, essi sono simili. [287]

344. Un triangolo isoscele di cui l'angolo al vertice sia di 36° è diviso dalla bisettrice di un angolo alla base in due triangoli isosceli, di cui uno è simile al primitivo.

345. Costruire un parallelogramma simile a un parallelogramma dato, e avente una diagonale data.

346. Costruire un triangolo, di cui sono dati due angoli e

a) un'altezza; oppure

b) una bisettrice; oppure

c) la proiezione di un lato su di un altro; oppure

d) il perimetro.

[Si risolve il problema col cosidetto *metodo di similitudine* (1). Tralasciando la condizione *a*) o *b*) o *c*) o *d*), si costruisca un qualsiasi triangolo simile o quello cercato e fra i triangoli simili a questo se ne determini uno soddisfacente ulteriore condizione, di cui non si è tenuto conto].

347. Se in un triangolo rettangolo è iscritto un quadrato [con un lato sull'ipotenusa] l'ipotenusa rimane divisa in tre parti, che formano una proporzione continua.

348. In triangoli simili le mediane, le altezze, le bisettrici corrispondenti sono proporzionali ai lati omologhi.

349. Due triangoli che abbiano le mediane proporzionali sono simili.

---

(1) Chi voglia più ampie indicazioni intorno ai metodi cui qui accenniamo, per la risoluzione dei problemi, e intorno alla letteratura che ad essi si riferisce cfr. l'art. VII di E. Baroni nei *Collectanea* di F. Enriques (op. cit.).

350. Due triangoli che abbiano le altezze proporzionali sono simili.

351. Se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che

$$a : b = b : c \text{ e } b : c = c : d$$

e i tre primi a, b, c sono lati di un triangolo, anche b, c, d sono lati di un triangolo e i due triangoli che così si ottengono hanno cinque elementi uguali senza essere uguali (1).

Def. — Si dice *sezione aurea* di un segmento quella parte di esso che è media proporzionale fra l'intero segmento e l'altra parte.

352. In un triangolo isoscele di cui l'angolo al vertice sia di 36°, la base è uguale alla sezione aurea del lato. [Si conduca la bisettrice di un angolo alla base e si ricordi l'es. 344].

353. Se due corde di un cerchio si intersecano, i loro segmenti sono in proporzione (essendo estremi e medi rispettivamente i segmenti di una medesima corda). [Se sono AC, CD le due corde, segantisi in E, si considerino i due triangoli AEC, DEB, i quali sono ecc.].

354. Su di una retta a partire da un suo punto O e da bande opposte rispetto ad esso si prendano due segmenti OA, OD e su di un'altra retta per O e sempre da bande opposte rispetto ad O si prendano i due segmenti OC, CO. Se

$$OA : OB = OC : OD,$$

i quattro punti A, B, C, D appartengono ad una circonferenza. [Se D' è l'ulteriore intersezione della OA colla circonferenza ABC, avremo (es. prec.) $OA : OB = OC : OD'$, e quindi ecc.].

355. Date per uno stesso punto due secanti una circonferenza, i segmenti di esse compresi fra codesto punto e le intersezioni con la circonferenza, sono in proporzione, essendo rispettivamente estremi e medi due segmenti appartenenti ad una stessa secante. [Se AB, CD sono le due secanti, uscenti dal punto E, si considerino i due triangoli EBC, EDA, i quali sono ecc.]

356. Su di una retta, a partire da un suo punto O e dalla medesima banda rispetto ad esso, si prendano due segmenti OA, OD e su di un'altra retta per O e ancora dalla medesima banda rispetto ad O si prendano due segmenti OB, OC. Se

(1) I. Amaldi: *Appunti di Geometria*: Pitagora, Anno II, n. 1, n. 1895-96.

$$OA : OB = OC : OD,$$

i quattro punti A, B, C, D appartengono ad una medesima circonferenza. [Se la D_1 è ulteriore intersecazione della OA colla circonferenza ABC, si ha (es. prec.) $OA : OB = OC : OD_1$, e quindi ecc.].

357. Condotte da un punto esterno ad un cerchio una tangente e una secante, il segmento di tangente compreso tra codesto punto e il punto di contatto è medio proporzionale fra i due segmenti di secante compresi fra quel punto e le due intersezioni con la circonferenza, ossia come si suol dire brevemente, la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la parte esterna. [Se AB è la tangente e se ACD è la secante si considerino i due triangoli ABC, ABD i quali sono ecc.].

358. Presi su d'una retta, a partire da un suo punto O e dalla medesima parte di esso, due segmenti OA, OC e su di un'altra retta per O il segmento OB, medio proporzionale fra OA e OC, la circonferenza passante per A, B, C è tangente in B alla OB.

359. Costruire una circonferenza, la quale passi per due punti dati A, B e sia tangente ad una retta *c*. [Se la AB interseca la *c* in S, ed X è il punto di contatto su *c*, il segmento SX rispetto ad AS, SB è (eserc. 357 e prec.) ecc.].

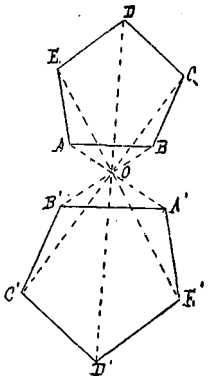
360. Costruire una circonferenza, la quale passi per un punto dato C e sia tangente a due rette date *a*, *b*. [Se *c* è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ab}$ (o della striscia *ab*) e C_1 è il simmetrico di C rispetto a *c*, la circonferenza passa anche per C_1, onde riferendoci all'eserc. prec. ecc.].

361. Circoscrivere ad un cerchio dato, una losanga simile ad una losanga data. [Si consideri la circonferenza iscritta nella losanga data; si ottiene così una figura simile a quella che si vuole determinare. (*Metodo del problema contrario*)].

362. Circoscrivere a un quadrilatero dato ABCD un quadrilatero EFGH simile a un quadrilatero MNPQ. [Supposto che i lati EF, FG, GH, HE passino rispettivamente pei vertici B, C, D, A, gli angoli $\widehat{BFC}$, $\widehat{DHA}$ sono uguali agli angoli $\widehat{N}$, $\widehat{Q}$; onde si possono costruire i cerchi circoscritti ai triangoli BFC, DHA. Siano R, S i punti in cui la diagonale FH incontra codeste due circonferenze; gli angoli $\widehat{EFH}$, $\widehat{EHF}$ sono uguali

rispettivamente agli angoli $\widehat{MNQ}$, $\widehat{MQN}$; onde si conoscono gli archi BR, AS, ecc.].

363. Iscrivere in un quadrilatero dato MNPQ un quadrilatero M′N′P′Q′ simile a un quadrilatero dato ABCD. [Si adoperi il metodo del problema contrario. Circoscritto ad M′N′P′Q′ un quadrilatero A′B′C′D′ simile ad NNPQ, si ottiene una figura simile alla cercata, ecc.].



364. Dato un poligono ABCDE.... e un punto O del suo piano (non appartenente al prolungamento di nessuno dei suoi lati) e considerate le rette OA, OB, OC.... da un punto A′ di OA si conduca la parallela ad AB fino ad incontrare in B′ la OB, da B′ la parallela a BC′ fino a incontrare in C′ la OC, ecc. Si dimostri che il poligono così ottenuto è simile al dato.

Def. — Due poligoni siffatti si dicono *omotetici* e in essi chiamansi omologhi o corrispondenti i vertici allineati col punto O: questo punto dicesi *centro di omotetia*. Si può più in generale considerare la figura *omotetica* di una figura qualsivoglia.

365. Iscrivere in un triangolo dato un altro triangolo i cui lati sieno ordinatamente paralleli a tre rette assegnate. [Si adopri il *metodo d'omotetia*, rientrante nel metodo di similitudine. Costruito un qualsiasi triangolo che abbia i lati paralleli alle rette assegnate, supposte non parallele fra loro, pei vertici di questo si mandino tre rette parallele ai lati del triangolo dato, quindi si trasformi per omotetia, ricordando l'esercizio prec.].

366. La figura omotetica di una circonferenza, è una circonferenza. Date due circonferenze si può considerare una di esse come figura omotetica dell'altra?

367. Iscrivere un quadrato in un triangolo dato. (Il quadrato dicesi *iscritto* se ha un lato sopra un lato del triangolo e gli altri due vertici sopra i lati rimanenti. Si costruisca un quadrato che abbia un lato sulla base del triangolo ed un vertice sopra uno degli altri due lati, quindi ecc.).

368. Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al rettangolo dell' altezza corrispondente al terzo lato e del diametro del cerchio circoscritto. [Abbassata dal vertice A di ABC l'altezza AH e condotto il diametro AD del cerchio circoscritto, si confrontino i due triangoli AHC, ABD, ecc.]. [289]

369. Teor. di Tolomeo. — Se un quadrilatero è iscritto in un cerchio, il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli dei lati opposti. [Dato il quadrilatero ABCD si conduca il segmento DE in modo che l'angolo $A\widehat{D}E$ sia uguale a $B\widehat{D}C$: allora i triangoli AED, ADB sono simili rispettivamente a BCD, EDC; onde risulta che $AD : AE = BD : BC$, $CD : EC = BD : AB$, cioè i rettangoli di AD e BC e AB sono equivalenti ecc.].

370. In un triangolo rettangolo è di m. 4 e l'altezza relativa alla ipotenusa è di m. 3,5. Si calcolino i segmenti in cui l'ipotenusa è divisa dal piede di codesta altezza e l'area del triangolo. [292]

371. In un triangolo rettangolo i segmenti determinati sull'ipotenusa dal piede dell'altezza corrispondente sono di m. 50,4 e m. 14. Si calcoli l'area del triangolo. [Si ricordi il n. 562].

372. Calcolare praticamente la radice quadrata di un numero, p. es. di 357 (cfr. es.). [Si decomponga il numero nel prodotto di due fattori e si tenga conto del n. 291 o 292: per esempio $357 = 17 \times 21$].

373. Ogni corda di un cerchio è media proporzionale fra il diametro e la sua proiezione sul diametro che passa per uno dei suoi estremi.

374. Il raggio di un cerchio è medio proporzionale fra i due segmenti tagliati da due tangenti parallele su di una terza tangente (contati dal punto di contatto). [Cfr. es. 172].

375. Costruire un segmento che sia medio proporzionale fra altri due.

376. Se in un triangolo un lato è medio proporzionale fra uno degli altri due e la sua proiezione su di questo, oppure se una delle altezze è media proporzionale fra i due segmenti che essa determina sul lato rispettivo, il triangolo rettangolo.

[296] **377.** Quale cammino descrivono durante un giorno in un orologio gli estremi della lancetta dei minuti e di quella dei secondi, se esse sono lunghe rispettivamente cm. 14 e mm. 24,5?

378. In quanto tempo un cavallo da corsa che batte m. 12,6 al secondo, percorre un cammino circolare di m. 112 di diametro?

379. Il diametro di una semicirconferenza sia diviso in due parti qualsiasi e su ciascuna di queste si descriva una semicirconferenza. Qual'è la lunghezza della somma di queste due semirconferenze?

380. Se si divide il diametro di una semicirconferenza in tre parti uguali, qual'è la somma delle lunghezze delle semicirconferenze descritte su ciascuna di esse?

Si risponda alla stessa domanda quando si divida il diametro in quattro.... n parti uguali.

381. Quale è il raggio dell'equatore terrestre se la sua lunghezza è di km. 40000?

382. Se, come si suole, si assume come raggio dell'equatore terrestre 860 miglia geografiche e come lunghezza dello equatore stesso 5400 miglia geografiche, vi è accordo fra le due cifre?

383. Quale cammino percorre in un secondo la terra nella sua rivoluzione intorno al sole, se il suo movimento si riguarda circolare ed uniforme? [La distanza della terra al sole è di 150 milioni di kilometri, e l'anno solare è di giorni 365 e $^1/_4$].

384. Quale dev'essere la lunghezza del diametro di una circonferenza, perchè su di essa l'arco di 1′ sia uguale ad 1 mm.?

385. Qual'è il cammino percorso in ogni secondo da un punto dell'equatore terrestre per fatto della rotazione della terra? [Il raggio equatoriale terrestre è di km. 6370]. Quale è il cammino percorso in un giorno?

[300] **386.** La lunghezza l di un arco di circonferenza di raggio r e di ampiezza α è data da

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

[Si ricordi l'eser. 303, dal quale risulta la proporzione

$$l : 2\pi r = \alpha : \ldots .]$$

387. Quale sarà la lunghezza dell'arco della circonferenza lunga m. 3,8, corrispondente all'ampiezza di 47°56'39"? [Cfr. es. prec.].

388. Calcolare l'area del cerchio, la cui circonferenza è di m. 15,79. [301]

389. Qual'è l'area del cerchio che ha m. 7,5 di raggio?

390. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie è di m.^{2} 12,64?

391. In una lamina di latta, avente le dimensioni di cm. 80 e cm. 64, quanti dischi si possono ritagliare di cm. 4 di raggio, se le loro circonferenze debbono essere tangenti? Qual'è in decimetri quadrati l'area della superficie restante?

392. Si è fatta costruire una porta, avente la forma di un rettangolo di m. 4,50 di larghezza per m. 6,50 di altezza, sormontata da un semicerchio: e si è convenuto di dare al legnaiolo L. 45 al m.^{2} e al verniciatore L. 4,05 al m.^{2} per l'esterno, e L. 3 al m.^{2} per l'interno. Quanto costa la porta?

393. Calcolare il raggio del cerchio la cui area è di m.^{2} 22,8906.

394. Si misuri la superficie della figura racchiusa dalle tre semicirconferenze dell'esercizio n. 379, supposte descritte tutte e tre dalla stessa parte del diametro comune. (*Arbelo* = trincetto da calzolaio).

395. Si misuri la superficie racchiusa da due circonferenze di ugual centro e raggi disuguali dati (*Corona circolare*).

396. Qual'è l'area della corona circolare compresa fra due circonferenze concentriche, aventi rispettivamente il raggio di m. 3 e m. 5?

397. Una corona circolare, in cui la circonferenza minore ha m. 12 di diametro, ha un'area di m.^{2} 120. Qual'è il diametro maggiore?

398. Intorno ad una circonferenza di m. 11 di lunghezza, si vuol costruire una corona di m.^{2} 20 di area. Quale sarà la lunghezza della circonferenza esterna?

399. Calcolare l'area della corona compresa fra le circon-

ferenze iscritte e circoscritte al triangolo equilatero di m. 3,464 di lato.

400. Si calcoli l'area del cerchio, sulla cui circonferenza l'arco lungo m. 27,9 ha l'ampiezza di 1115°7'58". [Si tenga conto nell'eserc. 386].

401. L'autore del papiro *Rhind* (1700 av. Cr.) dice che l'area di un cerchio è uguale a quella del quadrato di lato uguale agli $\frac{8}{9}$ del diametro del cerchio considerato. Che differenza dà questa regola rispetto a quella assegnata nel testo (n. 301) per un cerchio di diametro uguale a m. 1? per un cerchio di raggio r?

402. Dato un triangolo rettangolo la superficie del cerchio che ha per diametro la ipotenusa è uguale alla somma dei cerchi che hanno per diametro i cateti. [Si ricordi li teorema di Pitagora e si applichi la formola per l'espressione della superficie di un cerchio].

[308] **403.** Qual'è l'area di un settore di 30° in un cerchio di m. 6,40 di raggio?

404. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual'è la lunghezza dell'arco corrispondente ad un settore di m.² 3,60 di arco?

405. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual'è l'angolo al centro di un settore di m². 4,76?

406. L'area di un cerchio è di m². 2829,44; quella di un suo settore è uguale a quella del triangolo equilatero iscritto nel cerchio. Si calcoli la lunghezza e l'ampiezza dell'arco corrispondente a codesto settore.

407. Qual'è l'area del triangolo a lati curvilinei, determinati da tre circonferenze di cm. 3 di raggio, a due a due tangenti fra loro?

[309] **408.** Dato un cerchio il cui raggio sia di m. 3,2, si calcoli l'area del segmento circolare compreso fra un lato di un esagono regolare iscritto nel cerchio e l'arco (minore di una semicirconferenza) che sottende codesto lato. [Si consideri il segmento come differenza di un settore e di un triangolo].

409. Condotto un diametro AB in un cerchio di raggio uguale a m. 2 e di centro O, si conducano le corde perpendicolari ai raggi OA, OB nei loro punti medi e si calcolino le aree delle tre parti in cui il cerchio è diviso da codeste due corde.

410. Qual'è l'area di un segmento circolare corrispondente ad un angolo al centro di 60° in un cerchio di m. 6 di raggio?

411. In un segmento circolare di m. 2 di raggio e di angolo al centro di 60° si iscriva un cerchio. Qual'è l'area rimanente del segmento?

412. In un quadrato ABCD di m. 3 di lato si descrivano centro in A e C, e con raggio uguale al lato, due archi AC. Calcolare l'area di ciascuna delle tre parti in cui è diviso il quadrato.

413. In un triangolo equilatero ABC di m. 2 di lato si conducano i tre archi che passano per il centro del triangolo e le coppie di vertici. Calcolare l'area del trifolio che così si ottiene. [Si consideri il trifolio come differenza della somma di tre segmenti circolari e il triangolo equilatero].

414. Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo come diametro si descriva la semicirconferenza che cade dalla stessa parte del triangolo e similmente si descrivano le semicirconferenze che hanno per diamerti i cateti e cadono fuori del triangolo. Calcolare l'area totale delle due *lunule* che così si ottengono (*lunule di Ippocrate*) e confrontarla coll'area del triangolo.

[Si consideri la superficie delle due lunule, come differenza fra la somma della superficie del triangolo e dei due semicerchi minori e la superficie del semicerchio maggiore].

415. Divisa una circonferenza in sei parti uguali, e descriva da ciascono di essi come centro e con raggio uguale a quello della circonferenza l'arco interno a questa. Si ottiene così una stella a sei raggi. Quale è l'area di questa stella, se r è il raggio della circonferenza?

Geometria solida.

[376] **416.** Un prisma triangolare retto è alto cm. 12 e gli spigoli della base sono di cm. 15, cm. 9, cm. 8. Si calcoli l'area della superficie laterale.

417. Si calcoli la superficie totale del prisma definito all'eserc. prec. [Si tenga conto del n. 241].

418. I tre spigoli concorrenti in un vertice di un paralelepipedo rettangolo sono lunghi dm. 8, dm. 21, dm. 13. Calcolare l'area della superficie del parallelepipedo.

419. Calcolare l'area della superficie di un cubo di m. 2,5 di spigolo.

420. Si misuri la superficie di un cubo del quale si conosca

a) un lato a ($a =$ m. 4,7; $a =$ m. 1,6);

b) una diagonale d di una faccia ($d = 2\sqrt{2}$);

c) una diagonale e del cubo stesso ($e = 2\sqrt{3}$);

421. Le lunghezze di tre spigoli concorrenti di un paraltelepipedo rettangolo stanno fra loro come $a : b : c$ (dove l'ultimo numero corrisponde all'altezza); e la diagonale della base è uguale a d. Si determini la superficie totale del parallelepipedo. (Esempio:

$$a : b : c = 8 : 15 : 19 \text{ e } d = 23{,}8).$$

[382] **422.** Calcolare l'area della superficie di un tetraedro regolare di dm. 4 di spigolo.

423. Qual'è l'area della superficie laterale di una piramide retta a base triangolare equilatera, in cui lo spigolo di base sia di m. 8 e lo spigolo di m. 10?

424. In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base è di m. 5 e l'apotema è di m. 8: qual'è l'area totale?

425. Qual'è l'area della superficie totale di un tetraedro regolare avente la spigolo di cm. 4?

426. Una piramide retta a base esagonale regolare ha l'apotema di dm. 26 e lo spigolo di base di cm. 48. Si calcolino le aree della superficie laterale e della superficie totale.

427. Una piramide retta a base esagonale regolare ha lo spigolo laterale di dm. 65 e lo spigolo della base di dm. 39. Si calcoli l'altezza e l'area laterale della piramide.

428. Un tronco di piramide retta a base quadrata è alto m. 4 e a gli spigoli delle due basi rispettivamente di m. 3 e m. 5. Qual'è la lunghezza degli spigoli laterali del tronco e dell'altezza delle facce laterali?

429. Calcolare l'area della superficie di un ottaedro regolare di m. 1 di spigolo.

430. Calcolare l'area della superficie di un dodecaedro regolare di m. 3,2 di spigolo.

431. Calcolare l'area della superficie di un icosaedro regolare di m. 1,5 di spigolo.

432. In quale rapporto stanno le superficie di un tetraedro e di un ottaedro regolari, aventi spigoli uguali?

433. In quale rapporto stanno gli spigoli di un tetraedro e di un icosaedro regolari, aventi uguale superficie?

434. Calcolare il volume di una cassa avente le dimensioni di [392]

m. 1.10 × cm. 70 × cm. 60.

435. Calcolare la capacità della medesima cassa, sapendo che lo spessore delle pareti e del coperchio è di cm. 2

436. Un'aula scolastica lunga m. 10, larga m. 5 e alta cm. 350 sarà sufficiente per 50 scolari, se l'igiene richiede per ogni scolaro $m.^3$ 2,3 d'aria?

437. Si vuol costruire un muro lungo m. 16,38, alto m. 2,40 e avente lo spessore di cm. 24. Quanti mattoni occorrono tenuto conto che il mattone usuale ha le dimensioni di

cm. 28 × cm. 14 × cm. 6?

438. Con 100 $dm.^3$ di ferro si deve costruire una sbarra a sezione quadrata di cm. 5 di lato. Quanto sarà lunga la sbarra?

439. Un decimetro cubo di legno di faggio pesa g. 852. Calcolare il peso di una tavola dello stesso legno avente le dimensioni di

m. 4,5 × dm. 3,7 × cm. 6,5.

440. Quanto pesa un dado massiccio di avorio di cm. 4 di spigolo? [Peso specifico dell'avorio 1,9]. [396]

441. Calcolare il volume di un cubo, la cui superficie sia uguale a quella della superficie di un tetraedro regolare di dm. 8,4 di spigolo.

[398] **442.** Calcolare la lunghezza dello spigolo di un cubo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo avente le dimensioni di

m. 140 × m. 28 × m. 25.

[401] **443.** Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero di lato l e d'altezza h. Se ne determinino la superficie totale e il volume. (Esempio: $l = 2$. $h = \sqrt{3}$).

444. L'area della superficie laterale di un prisma retto a base triangolare equilatero è di m.² 3,41; posto che il lato della base è di dm. 13 si calcoli il volume del prisma.

445. Un prisma retto a base esagonale regolare ha il volume di dm.³ 975 e l'altezza di cm. 23. Calcolare il lato della base.

[405] **446.** Qual'è il volume di una piramide triangolare alta m. 2,55, in cui il triangolo di base ha un lato di m. 0,75 e l'altezza relativa di m. 0,80?

447. Qual'è il volume di una piramide retta a base triangolare equilatera, alta m. 5,4 e avente lo spigolo di base di m. 8?

448. Qual'è il volume di una piramide alta m. 4, la cui base è un trapezio avente le basi di m. 3,72 e m. 5,20 e l'altezza di m. 2,13?

449. La grande piramide di Cheope, in Egitto, ha per base un quadrato di m. 230 di lato. Le facce laterali sono triangoli equilateri. Qual'è il volume?

450. Calcolare il volume di un tetraedro regolare di cm. 4 di spigolo.

451. L'apotema di una piramide retta a base esagonale regolare è di cm. 35 e il lato della base è di cm. 21. Si calcoli il volume della piramide.

[408] **452.** Un tronco di piramide ha per base maggiore un triangolo rettangolo: i cateti sono di m. 12 e m. 16: il lato della base minore, corrispondente al primo di codesti cateti di m. 3 e l'altezza è di m. 2,75. Si calcali il volum e del tronco.

453. Le basi di un tronco di piramide retta a base quadrata hanno rispettivamente d.m 9 e dm. 4 di lato e l'altezza del tronco è di dm. 15. Qual'è il volume?

454. Un tronco di piramide retta a base regolare ha per

volume 1 dm.^{3} e per altezza 15 cm. Una delle basi è un quadrato di cm. 6 di lato. Calcolare il lato dell'altra base.

455. Si scava una fossa a forma di tronco di piramide retta a base quadrata, arrovesciata. Il lato dell'apertura è di m. 2,3 e quella del fondo è di m. 1,4 e il volume della terra scavata è di m.^{3} 36,4. Qual'è la profondità della fossa?

456. Calcolare il peso di un blocco di granito avente la forma di un tronco di piramide, avente le basi dm. m.^{2} 3,55 e m.^{2} 0,78 e l'altezza di m. 2,80. La densità del granito è 2,780.

457. Un obelisco in granito ha la forma di un tronco di piramide retta a base quadrata, sormontato da una piccola piramide. La base inferiore ha m. 2,42 di lato, la superiore m. 1,50; l'altezza del tronco è di m. 21,60 e quella della piramide è di m. 1,20. Quanto pesa l'obelisco, se la densità del granito è 2,75?

458. Il fumaiolo in muratura di una fornace ha forma di tronco di piramide retta a base quadrata. Le due basi hanno esternamente il lato di m. 1,40 e m. 0,60 rispettivamente, e internamente i lati di m. 0,44 e m. 0,38. Calcolare il volume della muratura, tenendo conto del fatto che l'altezza del camino è di m. 12,50.

TABELLA delle aree delle superficie e dei volumi dei poliedri regolari di spigolo uguale a m. 1.

	Area	Volume
Tetraedro	m.^{2} 1,7320...	m.^{2} 0,1178...
Cubo	» 6,0000	» 1,0000
Ottaedro	» 3,4141...	» 0,4714...
Dodecaedro	» 20,6457...	» 7,6631...
Icosaedro	» 8,6602...	» 2,1816...

Regola. — Analogamente a quanto si disse in Geometria piana sull'area dei poligoni regolari, l'area di un poliedro regolare di spigolo l si ottiene moltiplicando per l^2 l'area del poliedro regolare omonimo di spigolo uguale ad 1.

Così per avere il volume si moltiplica per l^3 il volume del poliedro regolare omonimo di spigolo 1.

459. Calcolare l'area della superficie di un tetraedro regolare di cm. 7,5 di spigolo.

460. Calcolare l'area della superficie di un ottaedro regolare di cm. 3,2 di spigolo.

461. In quale rapporto stanno gli spigoli di un tetraedro e di un icosaedro regolari aventi uguale superficie?

462. Calcolare il volume di un ottaedro regolare di cm. 7,1 di spigoli.

463. Calcolare il volume di un dodecaedro regolare, di dm. 5.2 di spigolo.

464. Quale spigolo deve avere un tetraedro regolare, affinchè il suo volume sia di 1 dm.^{3}?

465. In quale rapporto stanno i volumi di un cubo e di un icosaedro regolari aventi ugual superficie?

466. In quale rapporto stanno le superficie di un ottaedro e di un dodecaedro regolari aventi ugual volume?

[412] **467.** Qual'è la superficie laterale di un cilindro di m. 4 di diametro e di m. 3,75 di altezza?

468. L'area della base di un cilindro è di m.^{2} 12,59. Qual'è la superficie laterale del cilindro se la sua altezza è uguale a $^3/_2$ del raggio di base?

469. Qual'è la superficie totale di un cilindro, in cui il raggio di m. 0,35 e l'altezza è doppia del diametro della base?

470. Un rettangolo ha le dimensioni di m. 2 e m. 3. In quale rapporto stanno fra loro le superficie laterali dei due cilindri circolari retti generati dal rettangolo, quando ruota intorno all'uno o all'altro di due suoi lati consecutivi?

471. Le superficie sviluppate dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono uguali.

472. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia

uguale alla superficie laterale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

473. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie totale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

474. L'altezza di un cilindro circolare retto è di m. 4 e l'area del rettangolo, che si ottiene segando il cilindro con un piano passante per l'asse è di m.^{2} 26,45. Si calcolino il raggio e l'area della superficie laterale del cilindro.

475. Calcolare l'altezza di un cilindro circolare retto, il cui raggio è di m. 0,5 e la superficie laterale di m.^{2} 13,27. [414]

476. Calcolare l'altezza e il raggio di un cilindro circolare retto, di cui la superficie totale è di m.^{2} 0,758 e la superficie laterale è uguale a $^3/_2$ della base.

477. Calcolare il volume di un cilindro circolare retto alto cm. 9.3 e avente il raggio di cm. 2,5. [415]

478. Qual'è il volume di un cilindro, in cui la circonferenza di base è di m. 3,08 e l'altezza è di m. 1,50?

479. In un pozzo di m. 0,90 di diametro vi è acqua fino a m. 2,50 dal fondo, quanti litri di acqua contiene il pozzo?

480. Un pozzo, compreso il rivestimento in muratura, ha m. 1,86 di diametro e m. 12 di profondità. Qual'è il volume della terra che si è dovuto scavare per costruire il pozzo?

481. In un vaso cilindrico di m. 0,8 di diametro, contenente acqua, si getta una pietra. Qual'è il volume della pietra, se dopo l'immersione, il livello dell'acqua si innalza di m. 0,483?

482. Da un serbatoio cilindrico, avente m. 8,8 di diametro, sgorgano 2 litri d'acqua al secondo. Di quanto si abbassa il livello dell'acqua in tre quarti d'ora?

483. In un pozzo la circonferenza esterna del rivestimento in muratura è di m. 5, la circonferenza interna è di m. 3 e la profondità è di m. 15. Quanto costa il lavoro di muratura, calcolato a L. 18 il metro cubo?

484. Qual'è il peso di un tubo di piombo lungo m. 2,50, avente il diametro interno di m. 0,36 e lo spessore di m.008¿ *La densità del piombo è di* 11,4.

485. Qual'è la pressione in Kg. esercitata sul fondo di

una cisterna cilindrica di 5,75 di diametro dall'acqua, che ha l'altezza di m. 3,4?

486. Si è scavato un pozzo profondo m. 9 e avente il diametro interno di m. 0,90. Quale sarà la cubatura totale del muro di rivestimento, posto che lo spessore di questo sia d cm. 30?

487. Un tubo barometrico ha un diametro interno di mm. 11 e il mercurio vi raggiunge un'altezza di cm. 76. Quanto pesa il mercurio della colonna barometrica se la densità del mercurio è 13,568? Qual'è la pressione atmosferica per cm.^{2}?

488. Per estrarre l'acqua da un pozzo si fa uso di una pompa, il cui tubo ha un diametro interno uguale a d e il cui stantuffo ha una data corsa h. Il diametro del pozzo è D e la profondità H. Dopo quante corse dello stantuffo si vuoterà il il pozzo.

489. I volumi dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono inversameate proporzionali ai lati fissi.

490. Il tubo di una conduttura di acqua ha una sezione di 3 m.^{2} e l'acqua vi scorre colla velocità di m. 1 al secondo. Quanti litri di acqua passano pel tubo in un'ora?

491. Quale sezione ha un tubo per il quale scorrono 300 litri di acqua in un'ora alla velocità di m. 0,6 al secondo?

492. Quale velocità deve avere l'acqua in un tubo cilindrico di cm. 4 di diametro, se in un'ora debbono passare m.^{2} 18?

493. In quanti secondi passano 100 litri di acqua alla velocità di m. 0,9 al secondo per un tubo cilindrico di cm. 2 di diametro?

494. La densità del vapor d'acqua è uguale ai $^5/_8$ di quella dell'aria e un litro d'aria pesa gr. 1,293. Quale sarà il peso del vapore contenuto nel cilindro di una macchina, avente m. 0,50 di diametro e m. 0,80 di lunghezza?

495. Il vapor d'acqua a 100° e alla pressione di una atmosfera occupa un volume 1700 volte maggiore dell'acqua a 0°, che l'ha generato. Quant'acqua a 0° occorre per riempire alla pressione di una atmosfera un cilindro di m. 0,52 di lunghezza su m. 0,52 di diametro?

496. Quanta acqua solleva a ciascun colpo di stantuffo una pompa, in cui il diametro interno del corpo di pompa è di m. 0,16 e l'altezza al di sotto dello stantuffo è di m. 0,46?

497. Qual'è la superficie della base di un cilindro circolare retto, in cui il volume è di $m.^3$ 3,60 e l'altezza di m. 1,50? [416]

498. In un recipiente cilindrico di m. 0,10 di diametro interno si versano Kg. 4,04481 di latte, la cui densità è 1,03. A quale altezza giungerà il liquido?

499. Una botte cilindrica per inaffiare le stade contiene 1800 litri e ha un diametro di 90 cm. Quanto è lunga la botte?

500. Calcolare il raggio interno di un tubo di vetro cilindrico, che pesa 90 giri quando è vuoto e 200 gr. quando vi si introduce una colonna di mercurio di 9 cm., posto che la densità del mercurio è 13,568.

501. Un pluviometro cilindrico ha un diametro di cm. 24. Dopo una pioggia l'acqua di esso, defluendo in un vaso cilindrico di cm. 3 di diametro, vi raggiunge l'altezza di mm. 166. Che altezza avrebbe raggiunto codesta acqua rimanendo nel pluviometro? Quanti ettolitri di acqua sono caduti per chilometro quadrato?

502. Calcolare le dimensioni dei litri per misurare i grani e i liquidi, sapendo che questi due strumenti sono entramb cilindrici, e che l'altezza nel primo è uguale al diametro della base, nel secondo ne è doppia.

503. Dato un cono circolare retto, a quale distanza dalla base dovremo segare il cono con un piano perpendicolare all'asse per ottenere, come sezione, una circonferenza, la cui lunghezza sia $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ di quella della circonferenza di base? [417]

504. La superficie laterale di una piramide circoscritta ad un cono retto è equivalente al triangolo che ha per base il perimetro della base della piramide e per l'altezza l'apotema del cono.

505. Dato un cono circolare retto, a quale distanza dalla base dovremo segare il cono con un piano perpendicolare al-

l'asse per ottenere, come sezione, un cerchio la cui area sia $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{9}$ o $\frac{1}{16}$ dell'area della base? [Si ricordi il n. 270].

506. Il lato di un cono circolare retto è quadruplo del raggio di base e l'altezza è m. 9. Si calcoli la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio, che si ottengono segando il cono con un piano perpendicolare all'asse, condotto a $\frac{1}{5}$ dell'altezza partendo dal vertice.

[419] **507.** Qual'è il lato del cono avente per altezza m. 7 e per raggio della base m. 3?

508. Qual'è l'altezza del cono avente il lato di m. 5 e il raggio di base di m. 5?

509. Calcolare l'area della superficie totale di un cono circolare retto, la cui altezza è di dm. 8 e il raggio di base di dm. 3,5.

[420] **510.** Qual'è la superficie laterale di un cono retto, che ha m. 3 di diametro e m. 5 di lato?

511. Qual'è la superficie laterale di un cono circolare retto che ha m. 9 di raggio e m. 12 di altezza?

512. Qual'è la superficie totale di un cono circolare retto, in cui il lato è di m. 3,75 e il raggio di base è di m. 1,89?

513. Qual'è la superficie totale di un cono, in cui l'altezza è di m. 4 e il lato di m. 5?

514. Un cono circolare retto, alto m. 12.6 ha la circonferenza della base lunga m. 3,49. Si calcolino il lato e la superficie totale del cono.

515. Qual'è la superficie totale di un cono, in cui il lato è di m. 4,50 e la circonferenza di base è di m. 6,25?

516. Quanto pesa il tetto in lamiera di zinco di una torricella, che finisce con un cono di m. 2,70 di diametro e di m. 3 di lato, supposto che la lamiera abbia lo spessore di un millimetro e ricordando che la densità dello zinco è 6,86?

517. Calcolare l'area della superficie del solido generato da un triangolo equilatero che ruota intorno ad un suo lato, la cui lunghezza è di m. 0,36.

518. Le superficie laterali e i solidi dei coni generati

dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ai cateti sono inversamente proporzionali ai cateti fissi.

519. Un cono equilatero (cioè tale che le sue sezioni per l'asse sono triangoli equilateri) ha un'altezza h. Se ne determini prima la superficie laterale, poi la superficie totale.

520. Qual'è il volume di un cono equilatero (cfr. eserc. prec.) di cui sia a l'apotema?

521. Qual'è il lato di un cono avente la superficie laterale di m^2. 30.8 il raggio di base di m. 2,109? [421]

522. Qual'è la circonferenza della base di un cono, in cui la superficie laterale è di $m.^2$ 28 e il lato di m. 7?

523. Qual'è il volume di un cono in cui l'altezza è di m. 5 e il raggio della base di m. 2? [422]

524. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 2,5 e il raggio della base di m. 1,5?

525. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 4,5 e l'altezza è di m. 3,6?

526. In quale rapporto stanno fra loro i volumi di due coni di uguale altezza, le cui basi hanno rispettivamente i diametri di m. 0,56 e m. 1,12?

527. Qual'è il rapporto dei volumi di un cilindro e di un cono, aventi base ed altezze uguali?

528. Quanto costa un pan di zucchero, avente il diametro di base di m. 0,25 e l'altezza di m. 0,50, se il prezzo dello zucchero è di L. 1,60 al Kg. e la sua densità è di 1,20?

529. Una bica di fieno è alta m. 6; la sua parte inferiore è cilindrica ed ha m. 3,80 di altezza e m. 5 di diametro. La parte superiore è conica. Qual'è il volume della bica?

530. Una bica di fieno, di forma conica, misura alla base m. 44 di circuito ed è alta m. 15. Quanti quintali pesa 1 $m.^3$ di fieno pesa due quintali?

531. Un vaso conico, alto cm. 18 e avente il raggio di base di cm. 24 è pieno d'acqua, e quest'acqua si versa in un vaso cilindrico di cm. 10 di diametro. A che altezza giungerà l'acqua?

532. Una lamina quadrata di latta avente il lato di cm. 18, si taglia lungo l'arco di circonferenza avente il centro in un vertice e il raggio uguale al lato della lamina; col settore, che

così si ottiene, si costruisce un cono. Qual'è l'altezza di questo e quale il suo volume?

[423] **533.** Qual'è l'altezza di un cono, in cui il volume è di m.^{3} 4 e la base è di m.^{2} 3,60?

534. Qual'è l'altezza di un cono in cui il volume è di m.^{3} 3,077 e il raggio di base di m. 0,35?

535. Qual'è l'altezza di un cono in cui il volume è di m.^{2} 0,18865 e la circonferenza di base è di m. 1,54?

536. Qual'è il raggio della base di un cono, il cui volume è di m.^{3} 20,944 e l'altezza è di m. 5?

537. Qual'è il diametro della base di un cono di stagno alto m. 0,25 e pesante gr. 19,114? La densità dello stagno è 7,03.

[424] **538.** L'altezza di un tronco di cono è di m. 15 e i raggi delle basi sono di m. 13 e di m. 33. Si calcoli il lato del tronco.

539. Se in un tronco di cono circolare retto i raggi delle basi sono r_1, r_2 ($r_2 > r_1$) ed l è il lato l'altezza h è data da

$$h = \sqrt{l^2 - (r_2 - r_1)^2}.$$

540. Qual'è la superficie laterale di un tronco di cono avente il lato di m. 3 e i raggi delle due basi di m. 2,1 e m. 2,08?

541. Qual'è la superficie totale di un tronco di cono avente l'altezza di m. 0,21 e i diametri delle basi di m. 1,19 e m. 0,91?

542. In un tronco di cono circolare retto il lato è di dm. 9,5, l'altezza è di dm. 6,8 e il raggio della base minore è di cm. 8. Si calcoli l'area della superficie totale del tronco.

543. Le basi di un tronco di cono circolare retto sono di dm.^{2} 42 e dm.^{2} 86; l'apotema del tronco è di dm. 15. Si calcolino l'altezza del tronco e la superficie laterale.

544. Un fumaiolo tronco conico in muratura è alto m. 22; i raggi interno ed esterno della base sono rispettivamente di m. 1 e m. 1,20; quelli dell'apertura superiore sono di m. 0,30 e m. 0,45 rispettivamente. Calcolare la superficie interna e la esterna della muratura.

545. Il tetto di una torre rotonda è formato anzitutto da un tronco di cono, il cui raggio della base inferiore è di m. 2,5 e la cui altezza é di m. 1, mentre poi l'apotema forma col

raggio della base un angolo uguale a mezzo retto: e al disopra del tronco di cono appoggia un cono alto m. 5. Qual'è la superficie del tetto?

546. Qual'è il raggio della base inferiore di un tronco di cono, in cui la superficie laterale è di m.^{2} 24,5, il lato è di m. 1,95 e il raggio della base inferiore è di m. 1,4?

547. Qual'è il volume di un tronco di cono, in cui le due basi hanno l'area rispettivamente di m.^{2} 2,25 e m.^{2} 1,41 e l'altezza è di m. 0,90 ? [425]

548. Qual'è il volume di un tronco di cono, alto m. 2,1, e avente i raggi delle due basi di m. 0,63 e m. 0,42?

549. Calcolare in ettolitri la capacità di un tino alto m. 1,75 e in cui i diametri (interni) del fondo e della bocca sono rispettivamente di m. 1,90 e di m. 1,15.

550. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e l'altezza è doppia della media geometrica dei due raggi. Calcolare il volume del tronco di cono.

551. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e il lato è uguale alla somma dei raggi. Qual'è il volume del tronco di cono?

552. Calcolare il volume del tronco di cono circolare retto, che ha il lato di m. 3,75 e l'altezza di m. 2,5, sapendo che il lato del cono che si è tolto per ottenere il tronco è di m. 1,50.

553. Qual'è l'altezza di un tronco di cono di m.^{3} 84, in cui le due basi sono rispettivamente di m.^{2} 4 e m.^{2} 12?

554. Un recipiente a forma di tronco di cono deve avere il diametro inferiore di m. 0.24 e quello inferiore di m. 0,20 e deve avere la capacità di litri 12. Quale deve essere la sua profondità?

555. Per un punto esterno a una sfera passano infinite tangenti alla sfera le quali costituiscono un cono circolare avente per asse la retta congiungente il punto dato col centro della sfera, e il luogo dei punti di contatto è una circonferenza, sezione del cono perpendicolare all'asse. [433]

556. Se la distanza dei centri di due sfere è maggiore della somma dei raggi, le due sfere non hanno nessun punto

comune e una delle sfere è esterna all'altra (*cioè i punti dell'una sono esterni all'altra*) e se la distanza dei centri di due sfere è minore della differenza dei raggi, le due sfere non hanno nessun punto comune e una di esse è interna all'altra.

557. Se la distanza dei centri di due sfere è uguale alla somma o alla differenza dei raggi, le due sfere hanno comune un punto ed un solo appartenente alla retta dei centri, e nel primo caso le due sfere sono esterne l'una all'altra, nel secondo una delle due sfere è interna all'altra (*salvo il punto comune*).

558. Se la distanza dei centri di due sfere è minore della somma, maggiore della differenza dei raggi, le due sfere hanno comune una circonferenza, il cui piano è perpendicolare alla retta dei centri delle sfere e il cui centro appartiene a codesta retta

559. Qual'è il volume del cubo iscritto in una sfera di $m.^3$ 0.8 di volume?

[434] **560.** Una sfera ha m. 3,08 di raggio: si domanda l'area di un cerchio massimo e quella della sfera.

561. Calcolare il raggio di un cerchio, la cui area sia uguale a quella della superficie di una sfera di raggio di m. 3,6.

562. Qual'è la misura in miglia quadrate della superficie della terra, tenuto conto, che il suo equatore è lungo 5400 miglia geografiche.

563. Calcolare l'area della superficie interna ed esterna di una sfera cava avente lo spessore di cm. 3,5 e avente il diametro esterno di m. 1,05.

564. Una caldaia di forma cilindrica finisce a ciascuna delle sue estremità con un emisfero di cm. 40 di raggio. Il cilindro, avente lo stesso raggio, ha una lunghezza doppia del diametro. Qual'è l'area della superficie esterna della caldaia?

565. L'area di un cerchio minore di una sfera, la cui distanza dal centro è d, è data da $2\pi^2 a$: qual'è la superficie della sfera?

566. Calcolare l'area della superficie della sfera che passa per i vertici di un cubo la cui superficie totale è di $dm.^2$ 53

567. Calcolare il lato di un cilindro circolare retto equilatero (cioè avente il lato uguale al diametro della base) l

cui superficie laterale è uguale a quella di una sfera di m. 0,37 di raggio.

568. Calcolare la differenza fra l'area della superficie totale del cilindro circolare retto equilatero (cfr. es. 520) circoscritto ad una sfera di dm. 4 di raggio e quella della superficie della sfera.

569. Come stanno fra loro la superficie di una sfera, di un cilindro e di un cono, tali che il cilindro e il cono abbiano come altezza il diametro della sfera e come raggio delle basi il raggio della sfera.

570. In che rapporto sta la superficie della Luna a quella della Terra, tenuto conto che la Luna, alla distanza di 60 raggi terrestri dalla Terra, è veduta da questa sotto un angolo di $\frac{1}{2}$ grado?

571. Qual'è lo spessore di una sfera cava, le cui superficie interna ed esterna hanno l'area di m.^{2} 3 e m.^{2} 3,12 rispettivamente?

572. Qual'è il volume di una sfera di m. 0,84 di raggio? **[438]**

573. Qual'è il peso di una palla da bigliardo di avorio avente il diametro di cm. 8, se la densità dell'avorio è di 1,9?

574. Qual'è il volume di una sfera la cui superficie ha un'area di m.^{2} 55,44?

575. Qual'è il volume di una sfera in cui la circonfenza massima è lunga m. 4,62?

576. Qual'è il volume di una sfera, in cui l'area del cerchio massimo è di m^2. 6,16?

577. In quale rapporto stanno fra loro il volume della sfera di raggio r e quello del cilindro avente l'altezza $2r$ e il diametro $2r$? In quale rapporto stanno la superficie della sfera e la superficie totale del cilindro?

578. La densità media della Terra è di 5,44. Qual'è il peso della Terra in milioni di tonnellate? (Diametro terrestre medio = Km. 12735).

579. Qual'è il volume della crosta terrestre, il cui spessore si considera uguale a $\frac{1}{100}$ del raggio?

580. Qual'è il volume dello strato atmosferico che avi-

luppa la Terra, e che si calcola sia uguale a $\frac{1}{60}$ del raggio terrestre?

581. La Terra, il Sole e la Luna, considerati come sfere hanno diametri che stanno fra loro come r, $108r$, $0{,}27r$ e la distanza dei centri della Luna e della Terra è uguale a $60r$. Si domanda:

a) Quante sfere uguali alla Terra si potrebbero formare col Sole?

b) Quante sfere si potrebbero costruire col Sole, le quali fossero uguali alla sfera tangente esternamente tanto alla Terra quanto alla Luna?

582. Qual'è il peso di una palla di legno di m. 0,2 di diametro, per la quale si è verificato che, quando si getta nell'acqua, il livello del liquido segna sulla palla una circonferenza massima?

583. Un cubo ed una sfera hanno entrambi la superficie di $m.^2$ 2,4: qual'è il rapporto dei due volumi?

584. In che rapporto stanno i diametri di due sfere, della stessa sostanza, delle quali l'una pesi il doppio dell'altra?

[439] **585.** Qual'è il raggio di una sfera di $dm.^3$ 173 di volume?

586. Qual'è l'area di una sfera di 1 $m.^3$ di volume?

587. Qual'è l'area di uno dei cerchi massimi di una sfera di $cm.^3$ 14 di volume?

588. Si determini il calibro di un cannone, i cui proiettili sferici di ferro pesano 6 chilogrammi. (Si ricordi che il peso specifico del ferro è 7,25).

589. In un vaso cilindrico di cm. 68 di diametro, riempito in parte di acqua, si buttano 80 palline uguali. Il livello dell'acqua si innalza di cm. 20. Qual'è il diametro di ciascuna pallina?

590. Si fondono tre sfere metalliche aventi il diametro di dm. 2, dm. 8, dm. 4 rispettivamente, per costruirne una sfera unica. Quale sarà il diametro di questa?

591. Una sfera cava ha un raggio esterno di cm. 43 e uno spessore di cm. 4. Quale sarà il raggio di una sfera massiccia, avente il medesime?

592. Con $cm.^3$ 125 di metallo si deve costruire uno sfera cava, il raggio interno sia di cm. 20. Quale sarà la superficie esterna della sfera?

593. Qual'è lo spessore di una bolla di sapone, avente il diametro di cm. 15, ottenuta da una goccia (sferica) di acqua saponata, il cui diametro è di mm. 2?

594. Si è costruita in argento battuto una sfera cava, il cui diametro esterno è doppio dell'interno. Quali sono codesti diametri se il peso della sfera è di Kg. $38^1/_2$? (Si prenda $\pi = \frac{22}{7}$ e si assuma per il peso specifico dell'argento battuto il valore di $10^1/_2$).

595. Qual'è l'area di una calotta appartenente ad una [442]
sfera di m. 2,10 di raggio e avente l'altezza di m. 0,8?

596. Qual'è l'altezza di una calotta di m.^{2} 3 su di una sfera di m. 1 di raggio?

597. La lunghezza della circonferenza della sezione di una sfera in un piano distante dal centro di m. 1,2 è di dm. 5,3. Calcolare l'area della superficie della sfera e della calotta più piccola.

598. Considerando il nostro globo come una sfera di Km. 12,735 di diametro, calcolare:

1.° l'area della superficie della Terra;

2.° l'area della superficie della Zona torrida che ha Km. 5094 di altezza;

3.° l'area della superficie delle Zone glaciali, aventi ciascuna Km. 509 di altezza;

4.° l'area delle due Zone temperate.

599. Posto che la pressione dell'aria su ciascun cm.^{2} è di gr. 1,026, qual'è la forza (calcolata) in Kg.) necessaria per separare due emisferi di Magdeburgo di cm. 6 di raggio?

600. Su di una stessa sfera o su sfere uguali, zone corrispondenti a segmenti sferici di altezze uguali, hanno superficie uguali.

601. Le zone, che due sfere concentriche intercettano sulle sfere passanti pel centro comune di esse, hanno superficie uguali.

602. L'area di una calotta sferica è di m.^{2} 2,85; si domanda l'area della sfera corrispondente, posto che la calotta è alta m. 0,45.

603. Quale altezza si deve dare ad una zona, appartenente ad una sfera di m. 9 di raggio, perchè la sua area sia m.^{2} 169,6464?

604. Su di una sfera ai m. 1,3 di raggio, si considera una zona le cui base maggiore è alla distanza di m. 0,50 dal centro. Si determinino le aree delle due basi, sapendo che l'area della zona è di m.^{2} 12.

605. Data una sfera di m. 1,20 di raggio si conducano da una parte e dall'altra del centro due piani paralleli, distanti ciascuno m. 0,90 dal centro. Qual'è il volume del segmento sferico così determinato?

606. L'altezza di una calotta è di m. 0,25 e il raggio della sfera è di m. 0,84. Qual'è il volume del segmento corrispondente?

607. Qual'è il peso di una palla di legno di 36 cm. di diametro, che gettata nell'acqua vi si immerge per 6. cm.?

608. Una sfera il cui raggio è di cm. 28 gettata nell'acqua a 4° vi si immerge per cm. 35. Qual'è il peso specifico del corpo di cui è costituita la sfera?

609. Una cassula, il cui interno ha forma di calotta ed è fondo m. 12, contiene piena 38 gr. di mercurio (peso specifico = 13,6). Qual'è la superficie interna?

[444] **610.** Un settore circolare avente il raggio di m. 0,60 e l'angolo al centro di 30°, ruota intorno a uno dei suoi lati rettilinei. Calcolare la superficie totale del settore sferico che così si ottiene.

611. Una sfera di m. 1 di raggio è divisa in due calotte da un piano che dista dal centro dm. 4. Calcolare il volume dei segmenti sferici corrispondenti alle due calotte.

Def. — Si dice *fuso sferico* ciascuna delle due parti in in cui una superficie sferica è divisa da due semicirconferenze massime, aventi un centro comune. I due semipiani uscenti da codesto diametro e contenenti le due semicirconferenze massime definiscono due diedri (uno convesso e l'altro concavo) che si dicono i *diedri del fuso*.

612. L'area di un fuso sferico si ottiene moltiplicando l'area della superficie sferica per il rapporto dell'ampiezza del diedro corrispondente al fuso a 360°.

Def. — Si dice *spicchio sferico* la parte di solido sferico compresa fra due semipiani uscenti da uno stesso diametro. Lo spicchio è limitato da un fuso e da due semicerhi massimi. Il diedro dei due semipiani si dice *diedro dello spicchio*.

613. Il volume dello spicchio sferico è dato dal prodotto del volume della sfera per il rapporto dell'ampiezza del diedro dello spicchio a 360°.

614. Qual'è il volume di uno spicchio sferico appartenente ad una sfera di dm. 12 di raggio e corrispondente ad un angolo di 51°39'45"?

615. Qual'è il volume di uno spicchio sferico, appartenente ad una sfera di m.^{3} 1 di volume e corrispondente ad un angolo di 25°?

Misura della capacità delle botti.

Le botti hanno forme diverse. Se si vuole accontentarsi di un'approssimazione molto grossolana, la botte si può considerare come uguale alla somma di due tronchi di cono uguali, uniti dalla parte delle basi maggiori.

Ma si hanno formole pratiche più esatte. Indichiamo con D il diametro massimo (corrispondente alla sezione mediana), con d il diametro minimo (corrispondente ai due fondi) e con l la lunghezza della botte (o distanza dei due fondi).

Allora la capacità della botte è data con sufficiente approssimazione della formola

$$V = 0{,}7854 \times l \times (d + 0{,}56\,(D - d))^2,$$

dove l, d, D vanno misurati in metà e V risulta calcolato in ettolitri.

616. Calcolare la capacità di una botte lunga m. 1,35 e avente i raggi massimo e minimo di cm. 65 e cm. 60.

617. Si ha una botte lunga m. 1,90 e avente i raggi massimo e minimo di m. 0,798 e m. 0,650. Calcolare la capacità, riguardando la botte come somma di due tronchi di cono e applicando la formola suindicata e confrontare i resultati.

INDICE

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE . . . . . PAG. I

INTRODUZIONE . . . . . » V

I. Costruzioni e concetti fondamentali.

Piano, punto e retta. Riga . . . . . » 1
Semirette e segmenti . . . . . » 3
Confronto di segmenti . . . . . » 4
Somma e differenza di segmenti. Multipli e summultipli » 6
Misura di segmenti. Riga quadrata . . . . . » 8
Parti di piano. Angoli . . . . . » 10
Angoli concavi e piatti . . . . . » 12
Confronto di angoli . . . . . » 13
Somma e differenza di angoli. Multipli e summultipli di un angolo . . . . . » 15
Angoli retti, acuti, ottusi . . . . . » 18
Misura degli angoli. Rapportatore . . . . . » 19
Posizioni notevoli di due rette. Squadra:
a) rette perpendicolari . . . . . » 21
b) rette parallele . . . . . » 23
Circonferenza e cerchio. Compasso . . . . . » 30
Diametri e corde. Archi e settori . . . . . » 31
Posizioni relative di una retta e di una circonferenza » 34
Posizioni relative di due cerchi o due circonferenze . » 35

II. Figure poligonali.

Triangoli . . . . . Pag. 40
Relazioni fra i lati di un triangolo . . . . . » 41
Triangoli uguali . . . . . » 43
Criteri d'uguaglianza e costruzione dei triangoli . . » 43
Somma degli angoli di un triangolo . . . . . » 50
Applicazioni e triangoli particolari:
a) Costruzioni con la riga e il compasso . . . » 52
b) Triangoli isosceli . . . . . » 55
c) Triangoli rettangoli . . . . . » 58
Poligoni . . . . . » 59
Proprietà perimetriche e somma degli angoli di un poligono . . . . . » 61
Parallelogrammi . . . . . » 63
Rombo, rettangolo e quadrato . . . . . » 68
Distanza di due rette parallele . . . . . » 70

III. Angoli nel cerchio e poligoni iscritti e circoscritti.

Angoli nel cerchio . . . . . » 72
Triangolo e quadrangolo iscritti e circoscritti a un cerchio . . . . . » 75
Poligoni regolari . . . . . » 78

IV. Poligoni equivalenti.

Criteri di equivalenza . . . . . » 83
Parallelogrammi equivalenti . . . . . » 84
Triangoli equivalenti . . . . . » 87
Teorema di Pitagora . . . . . » 89
Trasformazione di poligoni . . . . . » 93

V. Teoria della misura.

Misurazione dei segmenti . . . . . » 95
Misurazione della superficie di un poligono . . . » 98

Regole di misura . . . . . Pag. 100
Applicazioni del teorema di Pitagora . . . . . » 107

VI. **Proporzioni. Poligoni simili.**

Grandezze geometriche proporzionali . . . . . » 112
Proporzioni dedotte da una data . . . . . » 116
Costruzioni . . . . . » 118
Poligoni simili . . . . . » 120
Triangoli simili . . . . . » 123
Segmenti proporzionali e rettangoli equivalenti — Applicazioni . . . . . » 128

VII. **Lunghezza della circonferenza e area del cerchio.**

Rettificazione della circonferenza . . . . . » 131
Area del cerchio . . . . . » 134

VIII. **Rette e piani nello spazio.**

Rette e piani nello spazio . . . . . » 138
Posizioni relative di due rette nello spazio . . . » 140
Posizioni relative di una retta e di un piano nello spazio . . . . . » 141
Retta e piano perpendicolari . . . . . » 142
Posizioni relative di due piani nello spazio. Piani paralleli . . . . . » 148
Diedri e loro sezioni . . . . . » 150
Piani perpendicolari . . . . . » 153

IX. **Angoloidi e poliedri.**

Triedri ed angoloidi . . . . . » 157
Triedri e angoloidi uguali . . . . . » 159

Prisma . . . . . Pag. 161
Parallelepipedo . . . . . » 163
Sviluppo della superficie del prisma . . . . . » 166
Piramide . . . . . » 168
Sviluppo della superficie della piramide . . . . . » 170
Poliedri . . . . . » 171
Poliedri regolari . . . . . » 172

X. Misura dei poliedri.

Unità di misura e volume dei poliedri . . . . . » 174
Volume del prisma . . . . . » 175
Volume della piramide . . . . . » 182

XI. Cilindro, cono e sfera.

Superficie e volume del cilindro . . . . . » 185
Superficie e volume del cono . . . . . » 188
Superficie e volume della sfera . . . . . » 193

Esercizi.

Geometria piana . . . . . » 202
Tabella degli apotemi e delle aree di alcuni poligoni regolari di m. 1 di lato . . . . . » 236
Geometria solida . . . . . » 246
Tabella delle aree delle superficie e dei volumi dei poliedri regolari di spigolo uguale a m. 1. . . . » 243
Misura della capacità delle botti . . . . . » 263
Indice . . . . . » 267

STAMPATO

NELLA TIPOGRAFIA DI A. CACCIARI

BOLOGNA