Enriques, Federigo and Severi, F.

Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, parte I

Acta Math. **XXXII** (1909), pp. 283-392.

MÉMOIRE SUR LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES

PAR

MM. FEDERIGO ENRIQUES ET FRANCESCO SEVERI

à BOLOGNA à PADOVA

couronné par l'Académie des Sciences de Paris (1907).

I. Introduction.

1. On appelle *surface hyperelliptique* toute surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0$$

qui admet une représentation paramétrique par des *fonctions uniformes quadruplement périodiques* de deux variables

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v). \tag{1}$$

D'après un théorème classique de WEIERSTRASS, on peut construire une surface hyperelliptique F de la façon suivante:

Soient x, y, z trois fonctions analytiques uniformes indépendantes de u, v ayant le caractère de fonctions rationnelles pour toute valeur finie de u, v; si ces fonctions sont quadruplement périodiques aux mêmes périodes, elles seront toujours liées par une équation algébrique

$$F(x, y, z) = 0.$$

Si au lieu de *trois* fonctions quadruplement périodiques, on en considérait $r > 3$, on aurait analoguement une surface hyperelliptique de l'hyperespace S_r, à r dimensions; celle-ci se ramenerait d'ailleurs par une projection à une surface de l'espace ordinaire.

Si, étant donnée une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0,$$

on choisit trois (ou plusieurs) fonctions rationnelles indépendantes

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z),$$

celles-ci seront liées par une nouvelle équation algébrique

$$\Phi(X, Y, Z) = 0,$$

qui représente, ainsi que $F = 0$, une surface hyperelliptique. On peut exprimer cette remarque en disant que »si une surface Φ admet une transformée rationnelle hyperelliptique (F), elle est elle-même hyperelliptique».

En considérant en particulier le cas où la substitution rationnelle soit invertible (par des fonctions rationnelles), on a que »toute transformée birationnelle d'une surface hyperelliptique est elle-même hyperelliptique».

Au point de vue des problèmes dont nous nous occuperons, deux surfaces liées par une correspondance birationnelle nous apparaîtront comme deux surfaces identiques, en tant qu'elles correspondent au même corps de fonctions abéliennes. Ainsi, dans la suite, nous considérerons toujours une surface donnée comme une image projective de la classe à laquelle elle appartient; c'est-à-dire qu'il sera permis de remplacer cette image par une autre quelconque de ses transformées birationnelles.

2. *Premiers caractères des surfaces hyperelliptiques: le diviseur.*

D'après le théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes,[1] étant données les fonctions

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

on peut ramener leurs *périodes primitives à un tableau normal* de la forme

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix} \right.$$

où δ est un entier positif. Cette réduction peut être effectuée par des substitutions linéaires, d'une infinité de manières différentes. Mais on est toujours amené au même valeur de δ. C'est ce que nous allons démontrer. Soit:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix}$$

un tableau quelconque de périodes primitives des f; on a la relation bilinéaire à coefficients entiers:

$$(3) \qquad \sum_{i,\varkappa} c_{i\varkappa} \alpha_i \beta_\varkappa = 0 \qquad (c_{ii} = 0, \; c_{i\varkappa} = -c_{\varkappa i}).$$

[1] Voir les travaux généraux de Weierstrass et de MM. Poincaré et Picard concernant les fonctions abéliennes de genre p; voir en particulier pour $p = 2$ le mémoire classique de M. Appell (Journal de Math., 1891) et la note recente de M. Painlevé (Comptes rendus).

Lorsqu'on veut construire un tableau normal de périodes, on commence à transformer les périodes au moyen d'une transformation linéaire d'ordre 1, telle que la relation bilinéaire entre les périodes transformées

$$\begin{matrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \end{matrix}$$

ait la forme normale:

$$\alpha'_1\beta'_3 - \beta'_1\alpha'_3 + \delta(\alpha'_2\beta'_4 - \beta'_2\alpha'_4) = 0$$

1, δ étant les *diviseurs élémentaires* de la forme (3). On prend ensuite de nouvelles variables

$$\lambda_0 u + \mu_0 v, \qquad \lambda_1 u + \mu_1 v,$$

où les constantes λ, μ sont déterminées de telle sorte que

$$\begin{matrix} \lambda_0\alpha'_1 + \mu_0\beta'_1 = 1 & \qquad \lambda_1\alpha'_1 + \mu_1\beta'_1 = 0 \\ \lambda_0\alpha'_2 + \mu_0\beta'_2 = 0 & \qquad \lambda_1\alpha'_2 + \mu_1\beta'_2 = \frac{1}{\delta}. \end{matrix}$$

Ainsi le nombre δ vient dépendre seulement des diviseurs élémentaires de la forme (3). Comme deux systèmes différents de périodes *primitives* sont toujours liées par une transformation linéaire d'ordre 1, d'après un théorème bien connu de Weierstrass, les formes bilinéaires relatives à ces systèmes, auront les mêmes diviseurs élémentaires; ainsi la valeur de δ est la même quel que soit le système de périodes primitives dont on part, tant que ces périodes ne sont pas liées par des relations singulières à coefficients entiers.

Nous venons de prouver que, *pour des périodes arbitraires*, la réduction des périodes primitives des fonctions f à la forme normale, nous amène à un tableau (2) où *l'entier δ résulte défini sans ambiguité par rapport aux fonctions f*; ce nombre entier est donc un caractère du système de fonctions abéliennes données; nous l'appelerons le *diviseur* de ces fonctions.

Nous dirons aussi qu'une surface F est une *surface hyperelliptique de diviseur* δ, lorsqu'elle admet une représentation paramétrique par des fonctions abéliennes de diviseur δ.

3. *Le rang.* Soit encore un système de fonctions abéliennes

(1) $$x = f_1(u,v), \qquad y = f_2(u,v), \qquad z = f_3(u,v).$$

Un autre caractère de ce système peut être défini de la façon suivante:

A tout point (x,y,z) de la surface F il peut correspondre ou bien un seul couple $u,v)$, ou bien $r > 1$ couples (u,v), incongrus par rapport aux périodes primitives des fonctions f.

Dans le premier cas il y a une correspondance biunivoque entre les points de la surface F et les points (u, v) intérieurs à un prismatoïde de périodes primitives; dans le second cas au contraire on a qu'à tout point (x, y, z) de F correspondent $r > 1$ points intérieurs à ce prismatoïde.

Le nombre $r (\geq 1)$ des points (u, v) intérieurs au prismatoïde des périodes, qui correspondent à un même point (x, y, z) de F, sera désigné dans la suite sous le nom de *rang du système de fonctions* f; on dira aussi que la *surface* F *est hyperelliptique de rang* r.

4. *Surfaces rationnelles et réglées elliptiques.*

D'après les définitions que nous venons de poser, toute surface rationnelle et de même toute surface réglée elliptique, peut être considérée comme une surface hyperelliptique, et cela de différentes façons.

On peut considérer une surface rationnelle (ou une réglée elliptique) F comme un cas de dégénérescence des surfaces hyperelliptiques de rang 1; mais on peut aussi exprimer les coordonnées des points de F par des fonctions abéliennes *non dégénérescentes*, formant un système *de rang* > 1.

Dans la suite nous laisserons de côté les surfaces rationnelles et celles qui peuvent être transformées en des réglées elliptiques; *le nom de surfaces hyperelliptiques ne sera donc pas appliqué aux surfaces de ces familles,* tout au moins lorsqu'il s'agira de surfaces que l'on se donnera à priori.

5. *La surface de Jacobi.*

Dans la théorie des surfaces hyperelliptiques joue un rôle fondamental la *surface que l'on construit* de la façon suivante: Soit

$$f(\xi, \eta) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$$

une courbe de genre deux, et soient (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) deux points variables de f; posons

$$(1) \qquad x = \xi_1 + \xi_2, \qquad y = \xi_1 \xi_2, \qquad z = \eta_1 + \eta_2.$$

D'après le théorème d'inversion de Jacobi, le point (x, y, z) décrit une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0,$$

dont l'équation s'obtient en éliminant $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ entre les (1) et les

$$f(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad f(\xi_2, \eta_2) = 0.$$

A chaque couple de points de la courbe f correspond par les formules (1) un point de la surface F, et réciproquement.

La surface F, ou toute transformée birationnelle de celle-ci, dont les points correspondent (élément par élément) aux couples de points d'une courbe de genre deux, sera désignée dans la suite sous le nom de *surface de Jacobi*.

Remarque. La courbe de genre deux peut dégénérer en se réduisant à un couple de courbes elliptiques; on tombe alors sur la *surface de Jacobi particulière* qui représente les couples de points de ces courbes.

Il y a aussi d'autres dégénérescences possibles de la courbe f, mais ces cas amènent aux surfaces hyperelliptiques dégénérescentes (surfaces rationnelles et réglées elliptiques) que nous venons d'exclure de notre étude (n. 4).

6. *Transformées rationnelles d'une surface hyperelliptique.* Le rôle qui est joué par la surface de Jacobi dans la théorie des surfaces hyperelliptiques, ressortira du théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique admet une transformée rationnelle qui est une surface de Jacobi.

Considérons la surface hyperelliptique Φ qui est représentée par les formules

$$(1) \qquad x = f_1(u,v), \qquad y = f_2(u,v), \qquad z = f_3(u,v),$$

et supposons d'avoir effectuées d'avance sur u, v les substitutions linéaires qui ramènent les périodes des fonctions abéliennes f_1, f_2, f_3 au tableau normal

$$(2) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \dfrac{1}{\delta} & h & g', \end{cases}$$

où le diviseur δ sera un entier positif (n. 2). Entre les parties imaginaires g_1, h_1, g'_1, de g, h, g' on aura l'inégalité

$$(3) \qquad g_1 g'_1 > h_1^2.$$

En désignant par $r (\geq 1)$ le rang des fonctions (1), on aura qu'à un point quelconque (x, y, z) de Φ correspondent r couples (u, v) incongrus par rapport aux périodes (2), soit

$$(4) \qquad (u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots (u_r, v_r).$$

Par rapport au tableau (2) ces couples ne sont pas distincts des couples

$$(5) \qquad \begin{cases} \left(u_1, v_1 + \dfrac{\varkappa}{\delta}\right), \left(u_2, v_2 + \dfrac{\varkappa}{\delta}\right), \ldots \left(u_r, v_r + \dfrac{\varkappa}{\delta}\right), \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \delta - 1. \end{cases}$$

Mais, toutefois, les couples (4), (5), qui sont au nombre de $n = r\delta$, sont distincts par rapport au tableau

$$(6) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Ceci posé, nous allons construire une surface de Jacobi F, en partant d'une courbe f de genre deux dont les intégrales de première espèce aient les périodes normales (6); nous sommes assurés que cette courbe existe d'après l'inégalité (3).

En désignant par $\omega_1(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ les intégrales considérées de f, sommons les valeurs que ω_1, ω_2 prennent en deux points (ξ_1), (ξ_2) de f; on peut regarder ces sommes comme des fonctions du point (X) de la surface F, qui correspond au couple $(\xi_1), (\xi_2)$ de f.

Soit:

$$u(X) = \omega_1(\xi_1) + \omega_1(\xi_2), \qquad v(X) = \omega_2(\xi_1) + \omega_2(\xi_2).$$

Les fonctions u, v seront deux intégrales simples de première espèce attachées à la surface F, et elles auront les périodes primitives (6).

Les coordonnées d'un point de F seront des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u, v ayant les périodes (6).

Or, entre les points de la surface Φ et ceux de F il y a une correspondance $[1, n]$ de façon qu'à un point (x) de Φ répondent n points (X) de F, donnés par les couples (4), (5).

Etant donné un point (X) de F, on a un couple (u, v) par rapport au tableau des périodes (6) et à fortiori par rapport à (2); ainsi par les formules (1) à (X) répond un point (x) de Φ qui résulte une fonction rationnelle de (X).

La surface Φ admet donc une transformée rationnelle qui est la surface de Jacobi F. La proposition énoncée se trouve ainsi justifiée.

Remarque. On reconnaît en cette proposition une expression géométrique du théorème fondamental d'après lequel toute fonction abélienne est une fonction rationnelle des séries Θ.

La propriété que nous venons d'établir peut être énoncée d'une autre façon.

Entre la surface hyperelliptique donnée Φ et la surface de Jacobi F nous avons trouvé une correspondance $[1, n]$ de sorte qu'à un point de Φ répond un groupe G_n de n points de F. Les groupes G_n qu'on obtient sur F en variant le point homologue de Φ, forment une série algébrique ∞^2 qui jouit de la propriété suivante: chaque point de F appartient à *un* groupe de la série, les points du groupe jouant un rôle symétrique par rapport à la détermination de celui-ci.

On exprime cette propriété en disant que les groupes G_n forment sur F une *involution I_n d'ordre n*. On dira aussi que Φ (ou toute autre surface en correspondance birationnelle avec celle-ci) *représente* l'involution I_n, ou qu'elle en est une *image*.

Ces définitions établies, notre résultat peut être exprimé en disant que »toute surface hyperelliptique correspond à une involution I_n appartenant à une surface de Jacobi».

On peut même préciser cet énoncé en tenant compte de la valeur de n; en effet nous avons trouvé

$$n = r\delta,$$

r et δ désignant respectivement le rang et le diviseur de la surface hyperelliptique donnée.

Nous aurons donc le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de diviseur δ et de rang r correspond à une involution d'ordre $r\delta$ appartenant à une surface de Jacobi; la surface donnée est une image de l'involution.

En particulier: *Toute surface hyperelliptique de diviseur et de rang 1 est une surface de Jacobi.*

On a aussi:

Toute surface hyperelliptique de rang r et diviseur δ, correspond à une involution d'ordre r appartenant à une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

II. Les surfaces hyperelliptiques de rang 1.

7. Les surfaces hyperelliptiques de rang 1 ont été étudiées par M. Picard comme des surfaces admettant un groupe permutable ∞^2 de transformations birationnelles en elles-mêmes, c'est pourquoi elles ont reçu le nom de *surfaces de Picard*. Aux propriétés découvertes par M. Picard, M. Humbert a ajouté une étude approfondie de ces surfaces, de façon qu'on en possède maintenant une théorie qui peut être regardée comme complète sous plusieurs points de vue.

Cependant il ne paraîtra pas inutile que nous nous arrêtons à rappeler en ce chapitre les théorèmes fondamentaux qui constituent cette théorie, en les rapprochant au point de vue géométrique, auquel nous nous placerons souvent dans la suite de ces recherches; nous aurons occasion ainsi d'ajouter aux résultats connus quelques résultats nouveaux, qui nous ne semblent pas dépourvus d'interêt.

Nous nous proposons d'abord de construire toutes les surfaces de Picard en partant de la surface de Jacobi (nos 11, 12). Cette construction mettra simplement en lumière les propriétés fondamentales qu'on peut considérer comme caractéristiques pour notre famille de surfaces (nos 13, 14, 16). Enfin elle nous amenera à reconnaître les types, birationnellement distincts, de surfaces hyperelliptiques de rang 1, en classifiant celles-ci d'après leur diviseur δ (n. 30).

8. *Transformations de la surface de Jacobi en elle-même.*

Reprenons la surface de Jacobi F que nous avons définie au n. 5; elle est représentée par les équations

$$x = \xi_1 + \xi_2, \qquad y = \xi_1 \xi_2, \qquad z = \eta_1 + \eta_2,$$
$$f(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad f(\xi_2, \eta_2) = 0,$$

en désignant par $f(\xi, \eta) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$ une courbe de genre deux.

Ainsi que nous l'avons rappelé, la surface F possède deux intégrales simples de première espèce que l'on obtient en sommant les valeurs des intégrales analogues de f, aux points (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) (voir n. 6).
Or il est bien connu que:

La surface de Jacobi F admet deux séries ∞^2 de transformations birationnelles en elle-même, qui forment un groupe mixte.

Ces transformations sont représentées par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} u + u' = \text{const.} \\ v + v' = \text{const.} \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad \begin{cases} u' - u = \text{const.} \\ v' - v = \text{const.} \end{cases}$$

Les transformations (1) s'appellent des *transformations de première espèce*, les (2) des *transformations de seconde espèce;* ce sont là les deux sortes de transformations qui appartiennent à F pour toute valeur des modules; il peut en exister d'autres seulement pour des valeurs particulières de ces modules, ainsi que nous le verrons dans la suite.

Une transformation de première espèce définit sur F une involution de second ordre, les points homologues étant conjugués par rapport à celle-ci.

Le produit de deux transformations de première espèce est une transformation de seconde espèce.

Deux transformations de 2de espèce engendrent par multiplication une nouvelle transformation de 2de espèce; cela revient à dire que les transformations de 2de espèce forment, à elles seules, un *groupe continu* qui est un sous-groupe du groupe mixte renfermant toutes les tranformations (1), (2) de F.

A l'égard de la multiplication des transformations de F ajoutons que: *les transformations de* 2^{de} *espèce sont deux à deux permutables entr'elles.*

Il n'en est plus ainsi généralement pour deux transformations de première espèce.

Enfin rappelons que:

Etant donnés sur F deux points (x), (x'), il existe deux transformations de notre groupe mixte qui font correspondre au premier point le second; l'une de celles ci est une transformation de première espèce, l'autre une transformation de seconde espèce.

Remarque I. Si une transformation de seconde espèce

$$\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

ramène en lui-même un point de la surface, les équations de la transformation seront satisfaites pour $u' = u$, $v' = v$. Il faudra donc que l'on ait $\lambda = \mu = 0$, c'est-à-dire que la transformation soit *l'identité*. Donc:

Une transformation de seconde espèce qui ne soit pas l'identité n'admet aucun point de coïncidence.

Au contraire une transformation de première espèce

$$\begin{cases} u + u' = \lambda \\ v + v' = \mu \end{cases}$$

admet toujours 16 points de coïncidence qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2},$$

ω_1, ω_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v.

Remarque II. Faisons une autre remarque utile pour la suite.

Lorsque un point de F se meut sur un cycle linéaire quelconque σ, le point qui lui correspond au moyen d'une transformation de seconde espèce

$$\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

décrit un cycle σ' homologue à σ. En effet si les paramètres λ, μ aboutissent à zéro par une variation continue, le cycle σ' se réduit au cycle σ.

9. *Transformations de seconde espèce cycliques.*

Tandis que les transformations de première espèce de F sont périodiques (d'ordre 2) il n'en est pas ainsi, en général, pour les transformations de seconde espèce.

Reprenons les équations (2) du n. 8 en les écrivant sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} u' - u \equiv \lambda \\ v' - v \equiv \mu ; \end{cases}$$

et rappelons qu'il est sous-entendu que les congruences se rapportent aux périodes simultanées de u, v. Pour que ces équations représentent une transformation périodique d'ordre n, il faut avoir

$$n\lambda \equiv 0, \qquad n\mu \equiv 0;$$

cela revient à dire que

$$\lambda = \frac{\omega_1}{n}, \qquad \mu = \frac{\omega_2}{n},$$

ω_1, ω_2 désignant un couple de périodes simultanées de u, v.

On obtient ainsi des transformations de la surface de Jacobi F, qui sont périodiques d'ordre n.

En tenant compte du fait que parmi ces transformations il y en a en général qui sont périodiques d'un ordre diviseur de n, au moyen d'une formule connue de Dedekind on reconnait que: *les transformations périodiques d'ordre n (et non moindre que n) sont au nombre de* $n^4\left(1-\frac{1}{\alpha^4}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^4}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma^4}\right)\ldots$ *où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignent les diviseurs premiers de n.*[1]

Remarque. Les transformations périodiques d'ordre n de F en elle-même peuvent être définies de la façon suivante:

Soit G_n un groupe de n points de F et sommons les valeurs des intégrales u, v aux points de G_n; désignons ces sommes par h, k. Il y aura ∞^{2n-2} groupes analogues à G_n qui donnent lieu aux mêmes sommes h, k; ceux-ci formeront une certaine série qu'on pourra désigner par Γ_n. Or parmi les groupes de Γ_n il y en aura un nombre fini (et précisément n^4) qui seront formés par un seul point compté n fois.[2] Eh bien: les transformations périodiques d'ordre n sont définies parmi les transformations de seconde espèce de F, par la propriété de changer un point de coïncidence n-ple de Γ_n en un point analogue.

---

[1] Voir p. e. Castelnuovo, Rend. dell'Istituto Lombardo, s. II, t. XXV, 1892; nº 8.

[2] Voir p. ex. Castelnuovo, loc. cit.

Considérons une transformation périodique de seconde espèce de F, et ses puissances; on obtient un groupe cyclique de transformations qui sont représentées par les formules:

$$(3) \qquad \begin{cases} u' - u \equiv k\dfrac{\omega_1}{n} \\ v' - v \equiv k\dfrac{\omega_2}{n}, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

où ω_1, ω_2 constituent un certain couple de périodes de u, v. On peut même ramener ces formules à une expression plus simple; en effet par des substitutions linéaires convenables effectuées sur les cycles normaux et sur les intégrales u, v, elles se réduisent à la forme

$$(3') \qquad \begin{cases} u' - u \equiv 0 \\ v' - v \equiv \dfrac{k}{n}. \end{cases}$$

Cette réduction s'effectuera de la façon suivante: désignons par ϱ_2 le cycle de F qui correspond aux périodes ω_1, ω_2 et construisons un système normal de cycles $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, renfermant ϱ_2; il suffira de prendre comme nouvelles variables les intégrales de F qui ont les périodes 1, 0 et 0, 1 le long de ϱ_1, ϱ_2.

Il est bon d'ajouter que la construction du système normal de cycles auquel appartient ϱ_2, peut être effectuée en remarquant que la surface F renferme de courbes C de genre deux (n. 20); il suffit alors de ramener le cycle ϱ_2 à un cycle de la surface riemannienne C et de construire ensuite sur celle-ci les retrosections riemanniennes $\varrho_1 \varrho_2, \varrho_3 \varrho_4$.[1]

10. Opérons sur un point quelconque P de F au moyen des transformations (3) ou (3') du n. 9; on a ainsi un groupe de points $G_n = (P, P', P'', \ldots P^{(n-1)})$.

Ce groupe est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points; en conséquence au varier de P, il décrit une *involution cyclique d'ordre n* que nous pouvons désigner par I_n. On obtient le nombre des involutions I_n, en divisant le nombre des transformations périodiques d'ordre n par le nombre des transformations qui ramènent en lui-même tout groupe d'une I_n donnée. Ce dernier nombre est évidemment égal à la fonction $\varphi(n)$ de Gauss.

Il y a donc sur F, $n^3\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(1+\dfrac{1}{\beta^2}\right)\ldots$ *involutions cycliques d'ordre n engendrées par les transformations de seconde espèce* (3), [ou (3')].

Ces involutions cycliques I_n jouissent des *propriétés suivantes:*

[1] Voir le Traité de MM. Picard et Simart (t. I, p. 86) et les remarques de Severi dans son mémoire publié par les Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 7 Gennaio 1906.

a) *Elles sont transformées en elles-mêmes par les transformations de seconde espèce de F.*

b) *Elles sont transformées en elles-mêmes par les transformations de première espèce de F.*

Cette dernière affirmation a besoin d'être justifiée. Soit ω une transformation cyclique de seconde espèce d'ordre n, qui engendre sur F une involution I_n. Il ne subsiste pas que ω soit transformée en elle-même par une transformation quelconque de première espèce π. Mais en multipliant ω par π, on obtient un groupe fini composé par les $2n$ transformations

$$\begin{gathered}\omega,\ \omega^2,\ \ldots\ \omega^{n-1},\ \omega^n = 1\\ \pi,\ \omega\pi,\ \ldots\ \omega^{n-1}\pi\,.\end{gathered}$$

Ces transformations donnent lieu à une involution I_{2n} dont chaque groupe est composé par *deux* groupes de I_n, qui sont échangés l'un en l'autre par chacune des transformations de première espèce

$$\pi,\ \omega\pi,\ \ldots\ \omega^{n-1}\pi\,.$$

Il s'ensuit que I_n est transformée en elle-même par toute transformation de première espèce de F.

c) *Elles n'ont pas des points de coïncidence*, c'est-à-dire que tout point P d'un groupe G_n de I_n est distinct des autres $n-1$.

En effet un point de coïncidence de I_n serait un point uni pour une transformation de seconde espèce, tandis que ces transformations n'ont pas des points unis (voir la remarque I au n. 8).

11. *Construction des surfaces de Picard de diviseur δ.*

Considérons une involution I_δ engendrée par une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, appartenant à une surface de Jacobi F.

Nous allons démontrer que *toute surface F_δ qui représente l'involution I_δ est une surface hyperelliptique de rang 1 — c'est-à-dire une surface de Picard de diviseur δ.*

En désignant par u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F, nous considérerons les sommes des valeurs que u, v prennent aux δ points d'un groupe de I_δ; ces sommes divisées par δ seront désignées par U, V.

Alors U, V seront deux intégrales de première espèce attachées à la surface F_δ; il s'agit:

a) de déterminer les périodes primitives de U, V et de montrer que celles-ci sont

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g'; \end{matrix}$$

b) de prouver que les coordonnées des points de F_δ s'expriment par des fonctions uniformes de U, V; ces fonctions seront de rang 1, puisqu'en tout point de F_δ les intégrales U, V résultent définies sans ambiguité, aux périodes près.

a) Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les quatre cycles de la surface F qui correspondent aux périodes normales, ce que l'on peut représenter par le tableau suivant

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
u	1	0	g	h
v	0	1	h	g'

On peut supposer que les équations de la transformation périodique qui engendre I_δ soient

$$\begin{array}{l} u' - u \equiv 0 \\ v' - v \equiv \dfrac{1}{\delta} \end{array} \quad \bmod \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{array} \right.$$

(voir n. 9).

Ceci posé considérons les cycles $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ de F_δ, correspondant à $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

On peut évaluer les périodes de U, V le long de ces cycles, en rappelant la remarque II du n. 8; d'après cette remarque au cycle σ'_1 décrit par un point P' de F_δ, correspondent sur F des cycles homologues décrits par les δ points homologues $P_1, \ldots P_\delta$; un de ces cycles a été dejà désigné par σ_1.

On trouve ainsi que les périodes de U, V correspondant aux cycles $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ sont celles représentées par le tableau suivant

	σ'_1	σ'_2	σ'_3	σ'_4
U	1	0	g	h
V	0	1	h	g'.

Mais les cycles $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ de F_δ ne sont pas primitifs; c'est là un point délicat qu'il faut mettre en lumière.

A cet effet remarquons que l'on obtient un cycle de F_δ qui n'est pas une combinaison linéaire de $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ par la construction suivante: Considérons les points $P_1, P_2, \ldots P_\delta$ de F qui correspondent à un même point P' de F_δ. Soit Θ_1 une ligne ouverte joignant P_1 à P_2. Tandis que P_1 décrit cette ligne, P_2 parcourira une ligne Θ_2 qui aboutit à $P_3, \ldots, P_\delta$ une ligne Θ_δ qui aboutit à P_1. Eh bien, au chemin ouvert Θ_1 correspond sur F_δ un cycle fermé Θ'; ce cycle parcouru δ fois correspond au cycle

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_\delta$$

de la surface F.

Evaluons les périodes des intégrales U, V correspondant au cycle Θ' de F_δ. Elles correspondent aux valeurs que les intégrales u, v de F prennent le long de Θ_1; la correspondance $(P_1 P_2)$ étant représentée par les équations

$$u' = u$$
$$v' = v + \frac{1}{\delta},$$

ces valeurs sont respectivement

$$0 \text{ et } \frac{1}{\delta}, \text{ mod } \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Nous sommes arrivés à la conclusion que les intégrales U, V de F admettent les périodes simultanées 0, $\frac{1}{\delta}$ par rapport au cycle Θ'; ce cycle compté δ fois donne le couple de périodes $(0, 1)$ et résulte ainsi homologue à σ'_2.

On voit ainsi, ce que nous avons affirmé, que les périodes

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{cases}$$

ne sont pas des périodes primitives pour U, V sur F_δ, puisque ces intégrales admettent les périodes

$$(2) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{cases}$$

correspondant aux cycles

$$(3) \qquad \sigma'_1, \quad \Theta', \quad \sigma'_3, \quad \sigma'_4.$$

On peut prouver au contraire que les périodes (2) sont primitives. A cet effet il faut montrer que tout cycle de F_δ est homologue à une combinaison linéaire à coefficients *entiers* des cycles (3).

Observons d'abord qu'un système de chemins analogues aux chemins Θ_1, $\Theta_2, \ldots \Theta_\delta$, peut être défini sur F pour tout groupe G_δ de l'involution I_δ, et que le cycle Θ' correspondant aux nouveaux chemins sur F_δ, est homologue au chemin Θ' obtenu auparavant, parce qu'il donne encore les valeurs 0, $\frac{1}{\delta}$ pour les intégrales U, V.

Ajoutons que sur F un chemin allant de P_1 à P_{i-1} $(i = 3, 4 \ldots)$ est homologue à la somme du chemin $\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_i$ et d'un cycle linéaire; par conséquent le chemin fermé qui lui correspond sur F_δ est homologue à la somme de $i\Theta'$ et d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des cycles σ'_1, $\sigma'_2 = \delta\Theta'_1$, σ'_3, σ'_4, c'est-à-dire à une combinaison des cycles $\sigma'_1, \Theta', \sigma'_3, \sigma'_4$.

Comme tout cycle linéaire de F_δ a pour correspondant sur F ou bien un cycle linéaire — qui s'exprime au moyen des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — ou bien un chemin ouvert joignant deux points conjugués — qui s'exprime au moyen de ces mêmes cycles et des chemins $\Theta_1, \ldots \Theta_\delta$ — on en conclût que tout cycle de F_δ restera homologue à une combinaison à coefficients entiers des cycles

$$(3) \qquad \sigma'_1, \; \Theta', \; \sigma'_3, \; \sigma'_4.$$

b) Il s'agit maintenant de montrer que les coordonnées des points de F_δ sont des fonctions uniformes de U, V, c'est-à-dire que U, V ne peuvent reprendre les mêmes valeurs, par rapport aux périodes (2), en des points différents de la surface.

Revenons à la définition des intégrales U, V: elles s'obtiennent en divisant par δ les sommes des valeurs des intégrales u, v attachées à F, aux points d'un groupe de I_δ. On a donc

$$\begin{aligned} U &\equiv u \\ V &\equiv v + \frac{\delta - 1}{2\delta} \end{aligned} \quad \bmod \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g'. \end{matrix} \right.$$

Soit U_0, V_0 et U_1, V_1 deux couples de valeurs de U, V, congrus par rapport au tableau (2), et désignons par X_0, X_1 les points correspondants de F_δ; il faut prouver que ceux-ci ne sont pas distincts.

Désignons par x_0 un des δ points de F correspondants à X_0, et par x_1 un des points correspondants à X_1. On aura alors

$$\begin{aligned} U_0 &\equiv u(x_0), & U_1 &\equiv u(x_1) \\ V_0 &\equiv v(x_0) + \frac{\delta - 1}{2\delta}, & V_1 &\equiv v(x_1) + \frac{\delta - 1}{2\delta} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} u(x_0) &\equiv u(x_1) \\ v(x_0) &\equiv v(x_1), \end{aligned}$$

les congruences ayant lieu par rapport au tableau (2). Ces relations peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} u(x_0) &\equiv u(x_1) \\ v(x_0) &\equiv v(x_1) + \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned} \qquad (\varepsilon \text{ entier } \leq \delta)$$

les nouvelles congruences étant considérées par rapport au tableau (1).

Il s'ensuit que x_0 est amené en x_1 par la transformation

$$u' \equiv u$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta},$$

et par conséquent que x_0, x_1 appartiennent à un même groupe de I_δ, ou, enfin, que les points X_0, X_1 ne sont pas distincts.

12. Nous venons de prouver que toute involution cyclique I_δ engendrée sur une surface de Jacobi par une transformation périodique de seconde espèce, est représentée par une surface de Picard. Il est aisé de montrer que, réciproquement, toutes les surfaces de Picard peuvent être obtenues par cette construction.

C'est là une conséquence immédiate de ces faits: a) que par la construction indiquée on obtient des surfaces hyperelliptiques de rang 1 (c'est-à-dire des surfaces de Picard) correspondant à un tableau normal de périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix}$$

qui peut être assigné à priori (en satisfaisant à l'inégalité classique); b) que des surfaces de Picard, correspondant à un même tableau, peuvent être transformées birationnellement l'une dans l'autre.

Ainsi on peut résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème suivant:

Que l'on se donne une surface de Jacobi F et une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, de F; l'involution I_δ engendrée sur F par cette transformation, est représentée par une surface F_δ qui est une surface de Picard de diviseur δ.

Réciproquement, toute surface de Picard F_δ de diviseur δ admet comme transformée rationnelle une surface de Jacobi $F(\delta = 1)$, de façon qu'à un point de F_δ correspondent sur F δ points homologues par rapport à une transformation périodique de seconde espèce et à ses puissances.

Remarque. Au lieu de considérer sur F le groupe cyclique engendré par une transformation périodique

$$u' \equiv u$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta},$$

on peut considérer le groupe engendré par deux transformations

$$u' \equiv u \qquad\qquad u' \equiv u + \frac{1}{\delta}$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta}, \qquad\qquad v' \equiv v.$$

De même que par le premier groupe cyclique on définit sur F une involution I_δ, d'ordre δ, par ce second groupe on définit sur F une involution I_{δ^2}, d'ordre δ^2. Celle-ci vient représentée aussi par une surface de Picard F'. Mais les intégrales de F' admettent les périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \delta g & \delta h \\ 0 & 1 & \delta h & \delta g' \end{matrix}$$

de façon que F' est une nouvelle surface de Jacobi (de diviseur 1).[1]

Il est intéressant de remarquer que la surface de Picard F_δ correspondant à l'involution I_δ, est une transformée rationnelle de la surface de Jacobi F, et qu'il y a entre F', F_δ une correspondance $[1, \delta]$ sans points de diramation sur F'.

On obtient ainsi une construction des surfaces de Picard, en quelque sorte réciproque à celle que nous avons développée au n. 11: *Toute surface de Picard F_δ de diviseur δ, est une transformée rationnelle d'une surface de Jacobi F, qui correspond à une involution d'ordre δ sur F_δ; ainsi F_δ vient représentée sur une surface de Jacobi comptée δ fois sans points de diramation.*

13. *Les surfaces de Picard considérées comme des surfaces qui admettent un groupe de transformations en elles-mêmes.*

D'après notre construction des surfaces de Picard F_δ (n. 11) les propriétés des involutions I_δ appartenant à une surface de Jacobi (propriétés que nous avons indiquées par a), b) au n. 10) se traduisent en les propriétés suivantes.

Toute surface F_δ hyperelliptique de rang 1, admet deux séries ∞^2 de transformations birationnelles en elles-mêmes, qui seront désignées comme des transformations de première et de seconde espèce. Les transformations de première espèce sont périodiques d'ordre 2; celles de seconde forment un groupe continu de transformations permutables.

D'ailleurs, étant donnée la représentation paramétrique de F_δ par les intégrales U, V, les transformations de première et de seconde espèce de F_δ en elle-même, résultent définies par les formules

[1] Il est essentiel de remarquer que, d'après les nn. 2, 3, le diviseur Δ et le rang r de F résultent en effet $\Delta = 1$, $r = 1$, et cela parce qu'en ces définitions on se rapporte toujours à des périodes primitives. Il n'en serait pas ainsi si l'on se rapportait aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}$$

car on aurait alors

$$r = \delta^2.$$

Mais ces périodes ne sont pas primitives puisque les intégrales correspondantes admettent les périodes simultanées $\begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$.

$$U' + U = \text{const.}$$
$$V' + V = \text{const.}$$

et respectivement

$$U' - U = \text{const.}$$
$$V' - V = \text{const.}$$

de même que dans le cas de la surface de Jacobi (n. 8).

Or M. Picard a établi le théorème suivant:

Toute surface algébrique qui admet un groupe continu permutable ∞^2 de transformations birationnelles en elle-même, opérant sur les points de la surface d'une manière transitive, est une surface hyperelliptique de rang 1 ou une dégénérescence (surfaces rationnelles ou réglées elliptiques).

C'est même à cause de ce théorème qu'on a donné aux surfaces en question le nom de *surfaces de Picard.*

L'énoncé qui précède ne diffère de celui de M. Picard que par l'introduction du mot »rang», d'après la definition du n. 3.

14. *Sur les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1. Théorème de M. Picard.*

Les surfaces de Picard F_δ jouissent des propriétés suivantes:

a) Il y a *deux* intégrales simples de première espèce attachées à F_δ; nous les avons désignées par U, V.

b) Il y a *une* intégrale double de première espèce

$$\iint dU\,dV,$$

c'est-à-dire que le genre de F_δ est

$$p_g = 1.$$

En désignant par m l'ordre de F_δ il y aura donc une surface adjointe φ_{m-4} d'ordre $m-4$.

c) La surface φ_{m-4} adjointe à F_δ coupe celle-ci, hors de la courbe double, suivant des *courbes exceptionnelles,* qui peuvent manquer, et que l'on peut toujours faire disparaître par une transformation de la surface.

Outre que par le raisonnement analytique de M. Picard, la propriété c) peut être justifiée géométriquement de la façon suivante. On remarquera d'abord qu'elle subsiste pour la surface de Jacobi $F(\delta = 1)$: en effet en se rapportant au modèle défini au n. 5, l'adjointe φ_{m-4} coupera F suivant la ligne exceptionnelle qui correspond à la g_2^1 de la courbe de genre deux, dont F représente les couples. Mais, d'après la construction du n. 11, la même propriété subsistera pour toute F_δ, quel que soit δ; en effet à une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par son adjointe, répondrait une courbe analogue sur la surface de Jacobi, qui est une transformée rationnelle de F_δ.[1]

Or c'est une circonstance de la plus haute importance que les propriétés a), b), c) des surfaces F_δ suffisent à caractériser la famille de ces surfaces. On a en effet *le théorème de M. Picard* que nous énoncerons sous la forme suivante:

Toute surface d'ordre m et de genre $p_g = 1$, qui possède deux intégrales simples de première espèce et qui n'est pas découpée par son adjointe d'ordre $m-4$ en déhors des courbes exceptionnelles, est une surface hyperelliptique de rang 1.

M. Picard a établi ce théorème en 1885; il est revenu sur le même sujet en 1889 et enfin en 1906 dans le »Traité» écrit en collaboration avec M. Simart.[2]

La dernière démonstration du théorème est particulièrement simple et il suffira de la rappeler ici dans ses grandes lignes; on aura ainsi l'occasion de mettre en lumière explicitement comment les surfaces hyperelliptiques définies par les propriétés a), b), c) peuvent avoir un diviseur $\delta \geq 1$.

En supposant que la surface donnée possède deux intégrales simples de première espèce U, V, celles-ci auront 4 couples de périodes. Effectuons sur ces périodes une substitution linéaire convenable à coefficients entiers, substitution dont le déterminant δ sera ≥ 1, et ajoutons une transformation linéaire sur les intégrales, de façon à ramener les périodes de U, V au tableau

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}$$

Ce tableau correspond à une surface de Jacobi F, que l'on peut supposer dépourvue de courbes exceptionnelles; et il est aisé de reconnaître que la surface donnée F_δ est une transformée rationnelle de F. F_δ se trouve représentée ainsi sur la *surface F comptée δ fois, sans points de diramation.*

Il en résulte (Remarque au n. 12) que F_δ est une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

Il est à remarquer que la condition c) que nous avons énoncée parmi les propriétés caractéristiques de F_δ, joue un rôle essentiel; si on la laisse tomber, F_δ sera encore représentée sur la surface de Jacobi F comptée δ fois, mais on trouvera sur F une courbe de diramation (qui résultera elliptique) à laquelle correspondra une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par son adjointe d'ordre $m-4$.

[1] Voir la note à p. 322.
[2] Voir ce Traité, t. II, p. 453—456.

En ce cas F_δ ne serait pas une surface hyperelliptique. Mais on peut démontrer qu'elle serait une surface elliptique, c'est-à-dire une surface douée d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations en elle-même (ENRIQUES).

15. *Rappel de notions appartenant à la théorie des surfaces algébriques.*

Pour achever le tableau des propriétées des surfaces de Picard, il nous conviendra de rappeler quelques notions empruntées à la théorie géométrique des surfaces algébriques.[1]

D'abord on définit pour toute surface les invariants désignés respectivement par p_a, p_g, $P_i (i = 2, 3 \ldots)$. p_a désigne le *genre numérique:* p_g le *genre géométrique;* P_i le *genre d'ordre* $i (P_1 = p_g)$ c'est-à-dire le nombre des courbes i fois canoniques linéairement indépendantes de la surface.

On a ensuite à considérer le *genre linéaire* (virtuel) $p^{(1)}$, c'est-à-dire une certaine expression arithmétique du genre des courbes canoniques; cette expression sera rapportée à la surface elle-même si celle-ci ne renferme pas des courbes exceptionnelles; dans le cas contraire elle sera rapportée à une surface transformée dépourvue de courbes exceptionnelles; d'après MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES cette transformée existe toujours, si la surface donnée n'appartient pas à la famille des réglées.

L'ordre de la courbe canonique d'une surface n'est pas un invariant de celle-ci; mais si, étant $p_g = 1$, cet ordre est égal à zéro (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles), cette propriété est invariant par rapport aux transformations birationnelles.

En ce cas la surface jouit de propriétés remarquables.

Rapportons-nous à une surface de la classe qui soit dépourvue de courbes exceptionnelles; soit m l'ordre de la surface et π le genre des sections planes; on a toujours

$$m = 2\pi - 2.$$

Sous une forme plus générale: Si l'on a sur cette surface un système linéaire $|C|$ de courbes C de genre π, celles-ci se coupent deux à deux en

$$m = 2\pi - 2$$

points (c'est-à-dire que m est le *degré* du système).

Mais on en a davantage: le groupe des m points communs à deux courbes C est un *groupe canonique* sur chacune de ces courbes.

[1] Voir les travaux de M. NÖTHER et de M. ENRIQUES, ou la note expositive de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES qui se trouve à la fin du »Traité des fonctions algébriques de deux variables» de MM. PICARD et SIMART.

C'est ce qu'on exprime en disant que la *série caractéristique* g_m découpée sur une courbe C par les autres courbes du système, est la *série canonique* de C, ou une partie de celle-ci. Si le système $|C|$ appartient à un système continu non linéaire, les courbes infiniment prochaines à C, contenues dans le système, coupent sur C des groupes de la même série caractéristique; c'est de cette façon que M. Severi définit la série caractéristique sur C, même dans le cas où le système linéaire $|C|$ ait la dimension égal à zéro.

Une surface de genre $p_g = 1$, dont la courbe canonique a l'ordre zéro, a le genre linéaire $p^{(1)} = 1$; elle ne renferme pas des courbes i fois canoniques, quel que soit i, de sorte que:

$$P_i = 1. \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Cette dernière propriété sert à definir la famille des surfaces de genre $p_g = 1$ dont la courbe canonique a l'ordre 0; en effet on a le théorème suivant[1]:

Toute surface dont les genres d'ordre 1 et 4 sont égaux à l'unité

$$(p_g = P_4 = 1)$$

a une courbe canonique d'ordre 0; *le genre numérique de la surface est*

$$p_a = 1 \text{ ou } p_a = -1.$$

16. *Les surfaces de Picard caractérisées par leurs nombres invariants.*

D'après les notions que nous venons de rapporter, on peut transformer le théorème de M. Picard (n. 14) de la façon suivante:

Rappelons d'abord que le nombre des intégrales de première espèce attachées à une surface, est $p_g - p_a$; c'est là un résultat connu auquel ont amené récemment les recherches établies par M. Picard d'un côté, par MM. Severi, Enriques et Castelnuovo de l'autre côté.

Alors les conditions a), b), c) du n. 14 se traduiront par les égalités

$$p_g = 1, \ p_g - p_a = 2, \ P_4 = 1.$$

On aura donc le théorème suivant (qui a été donné par M. Enriques dans le Mémoire cité du Circolo di Palermo):

Les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1 sont exprimées par les égalités

$$p_a = -1, \quad p_g = P_4 = 1.$$

[1] Cfr. Enriques, Rendic. del Circolo mat. di Palermo, 1905 e Rendic. Accademia di Bologna, Decembre 1906.

17. *Courbes appartenant à une surface de Picard: courbes rationnelles.*

On a la proposition suivante:

Une surface de Picard ne saurait renfermer une courbe rationnelle qui ne soit pas exceptionnelle.

Soit

$$F_\delta(x, y, z) = 0$$

une surface de Picard d'ordre m.

Il y a deux intégrales simples de première espèce u, v et l'on a

$$du = \frac{B dx - A dy}{F'_z}, \qquad dv = \frac{B_1 dx - A_1 dy}{F'_z};$$

A, B, A_1, B_1 désignent ici des polynomes liés par l'identité de M. Nöther

$$A B_1 - A_1 B = F'_z \,.\, Q(x, y, z),$$

Q étant le polynome d'ordre $m - 4$ adjoint à F_δ.

Or si F_δ renferme une courbe rationnelle E, on a sur E

$$B\ dx - A\ dy = 0;$$
$$B_1 dx - A_1 dy = 0,$$

et par conséquent

$$A B_1 - A_1 B = 0.$$

Mais comme on peut supposer que E n'ait aucune relation particulière avec les axes coordonnés, on en déduit

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Or, en général, Q coupe F suivant une courbe composée de courbes exceptionnelles et de la courbe canonique, qui, en ce cas est d'ordre zéro. D'après la relation précédente on en déduit que E est une courbe exceptionnelle de F_δ, ce qu'il fallait démontrer.

Convention. — Dans la suite en raisonnant de courbes appartenant à une surface F_δ *nous nous rapporterons toujours à des surfaces dépourvues de courbes exceptionnelles* (*n.* 15); *ces surfaces ne renfermeront donc pas des courbes rationnelles.*

18. *Courbes elliptiques.*

La surface de Picard F_δ peut renfermer une courbe elliptique C; en ce cas C appartient à un faisceau elliptique de courbes analogues, et il y a sur F_δ un second faisceau elliptique de courbes elliptiques.

Supposons que F_δ renferme une courbe elliptique C; si celle-ci appartient à une série continue, le degré de la série sera égal à zéro ($m = 2\pi - 2$); en conséquence C ne saurait appartenir à une série qui ne soit pas un faisceau.

Transformons C par les ∞^2 transformations de seconde espèce de F_δ (n. 13); comme C ne peut admettre que ∞^1 transformations birationnelles en elle-même, on aura ∞^1 courbes transformées de C, qui formeront un faisceau.

Il y aura *une* intégrale simple de première espèce attachée à F_δ, c'est-à-dire une combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ des deux intégrales u, v, qui demeure constante le long des courbes du faisceau; on en déduit que le faisceau est elliptique.

L'intégrale $\lambda u + \mu v$ aura deux périodes distinctes; d'après MM. PICARD et POINCARÉ, à côté de cette intégrale réductible, il y en aura une autre associée, à laquelle correspond un second faisceau elliptique de courbes elliptiques de niveau.

Les deux faisceaux que nous venons de considérer, sont formés par les trajectoires de deux sous-groupes algébriques ∞^1 renfermés dans le groupe des transformations de seconde espèce de F_δ.

Remarque. On voit que la surface de PICARD correspondant à des modules généraux, ne renferme pas des courbes elliptiques.

Parmi les surfaces de Jacobi renfermant des courbes elliptiques, il y a la *surface particulière* dont les points correspondent aux couples de points choisis sur deux courbes de genre un. Cette surface vient caractérisée par la propriété de renfermer *deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques se coupant en un seul point.*

19. *Si une surface de Picard renferme un faisceau irrationnel de courbes, le faisceau est elliptique et les courbes sont de même elliptiques.*

On établit aisément que le faisceau est elliptique, en remarquant qu'il ne peut y avoir qu'*une* intégrale qui demeure constante le long de ses courbes.

On reconnait que ces courbes C sont de genre $\pi = 1$ d'après le n. 15, puisque le faisceau étant irrationnel ne peut avoir des points base (CASTELNUOVO-ENRIQUES), et par conséquent deux courbes C se coupent en $m = 2\pi - 2 = 0$ points.

20. *Courbes de genre deux.*

Nous avons remarqué qu'une surface de Picard F_δ ne renferme pas en général des courbes elliptiques. Au contraire on construit sur F_δ des courbes de genre deux par le procédé suivant:

Considérons sur F_δ un système linéaire complet de courbes K de genre π; ce système $|K|$, qui est l'adjoint de lui-même, aura la dimension $\pi - 2$ (théorème de Riemann-Roch pour la surface F_δ); ainsi en imposant aux courbes K de posséder $h = \pi - 2$ points doubles, on obtiendra un nombre fini de courbes de genre deux, renfermées dans le système $|K|$.

Or toute courbe C de genre deux, appartenant à F_δ et douée de h points doubles, est amenée par les ∞^2 transformations de seconde espèce, en ∞^2 courbes birationnellement identiques; nous allons prouver que ces courbes forment un système, que nous désignerons pas Σ_{h+1}, dont les éléments correspondent d'une façon biunivoque aux points de la surface F_δ.

Comme les points de F_δ correspondent biunivoquement aux transformations du groupe continu qui appartient à la surface (voir le n. 8), il suffira de prouver qu'il y a une seule transformation de seconde espèce amenant une courbe C en un'autre courbe du système Σ_{h+1}; cela revient à dire que: *toute transformation de seconde espèce de F_δ qui laisse invariant la courbe C, se réduit à l'identité.*

Soit en effet

$$(\tau)\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

une transformation de seconde espèce de F_δ qui ramène en elle-même la courbe C. Il s'agit de prouver que

$$\lambda = \mu = 0\,.$$

Considérons sur C la série canonique g_2^1 et désignons par h, k les sommes des valeurs des intégrales u, v, aux points d'un couple de cette série; les points conjugués par rapport à la g_2^1 seront conjugués par rapport à la transformation de première espèce:

$$(\omega)\begin{cases} u + u' = h \\ v + v' = k\,. \end{cases}$$

En multipliant les deux transformations on obtient une transformation de première espèce:

$$(\tau\omega)\begin{cases} u + u' = \lambda + h \\ v + v' = \mu + k\,. \end{cases}$$

Or, d'après le théorème d'Abel, si λ, μ étaient différents de zéro, les points de C conjugués par rapport à $(\tau\omega)$ résulteraient conjugués en une nouvelle g_2^1, qui devrait ainsi exister sur C. Mais comme C renferme une seule série linéaire de seconde ordre, qui est la g_2^1 canonique, on en conclut que

$$\lambda = \mu = 0\,.$$

Remarque. Nous venons de prouver que toute courbe de genre deux sur F_δ, appartient à un système qui est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de seconde espèce, système birationnellement identique à la surface F_δ.

Il est aisé de reconnaître que ce système est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de première espèce. Il suffit à cet effet de rappeler ce que nous avons déjà remarqué, que, étant donnée une courbe de genre deux, C, il y a une transformation de première espèce de F_δ qui laisse invariant la courbe C, et par rapport à laquelle sont conjugués les couples de points de la g_2^1 de C.

21. *Systèmes Σ appartenant à une surface de Jacobi.*

D'après la construction du n. 5, une surface de Jacobi F, dont les points correspondent aux couples d'une courbe f de genre deux, irréductible, renferme toujours des courbes de genre deux irréductibles qui n'ont pas des points doubles (hors de la courbe double de F).

En effet on obtient sur F une telle courbe, en considérant les ∞^1 couples qui ont un point fixe sur f.

Soit C une courbe de genre deux irréductible et dépourvue de points doubles, tracée sur F. Il y a un système $\infty^2\Sigma (= \Sigma_1)$ de courbes analogues, auquel C appartient (n. 20); les courbes C se coupent deux à deux en 2 points, (2 est le *degré* de Σ), et la série caractéristique, découpée sur une C par les courbes infiniment prochaines du même système, est la g_2^1 canonique de C (n. 15). Comme cette série est complète, il s'ensuit que le système Σ n'est pas renfermé en un système continu plus ample de courbes du même ordre.

Il est aisé d'évaluer le nombre des courbes C de Σ qui passent par deux points de F; ce nombre, qu'on appelle l'*indice* de Σ, est égal à 2.

En effet la surface F ne saurait pas renfermer un système de degré 2 et d'indice > 2, sans être rationnelle.

C'est là une conséquence d'un théorème bien connu de MM. HUMBERT et CASTELNUOVO, que M. CASTELNUOVO a mis explicitement en lumière.[1]

En résumant les résultats obtenus, on aura le théorème suivant:

Toute surface de Jacobi, correspondant à une courbe de genre deux irréductible, renferme un système $\infty^2\Sigma$ de courbes de genre deux irréductibles sans points doubles; ce système, qui est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de première et de seconde espèce, a le degré 2 et l'indice 2.

Fait exception la surface de Jacobi particulière renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en un point; c'est la surface correspondant au cas où la courbe de genre deux se décompose en deux courbes elliptiques (n. 5).

[1] Atti della R. Acc. di Torino, 1893.

Remarque. Nous avons vu que, en considérant la surface de Jacobi F qui correspond point par couple à une courbe f de genre deux, on obtient sur F une courbe de genre deux représentant les couples de f qui renferment un même point. On construit de cette façon ∞^1 courbes de genre deux qui ont un point fixe; eh bien, cette série ∞^1 de courbes sera contenue en une série complète ∞^2 qui constituera sur F un système Σ de degré et d'indice 2.

Ainsi que nous le verrons dans la suite, le système Σ obtenu sur F, est le seul système de degré et d'indice 2 appartenant à F, lorsque f a des modules généraux. Pour des modules particuliers il peut y avoir sur F plusieurs systèmes Σ doués des mêmes caractères.

22. Il y a lieu maintenant de montrer que:

L'existence d'un système $\infty^2\Sigma$ de courbes de genre deux, ayant aussi le degré et l'indice égaux à deux, est une propriété caractéristique de la surface de Jacobi.

En effet si une surface F renferme un tel système Σ de courbes C, il est aisé de construire une courbe de genre deux qui correspond couple par point à F.

Considérons les courbes C passant par un point fixe P de F, et choisissons en particulier une de ces courbes $\bar{C}$. Toute C par P coupe $\bar{C}$ en un point hors de P, et par tout point de $\bar{C}$ passe une courbe C qui contient aussi P.

Or par un point quelconque de F il passent deux courbes C renfermant P, qui coupent $\bar{C}$, hors de P, en deux points; réciproquement étant donnés deux points sur $\bar{C}$, ceux-ci détermineront avec P deux courbes C se coupant en un point de F.

De cette façon les points de F viennent correspondre aux couples de points de la courbe $\bar{C}$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Il a été implicitement reconnu, en effectuant la construction précédente, que toute courbe C de Σ est birationnellement identique à la série Γ des C, qui passent par un point P de F.

La correspondance point par couple entre F et Γ est établie de la façon suivante: deux courbes C de Γ se coupent hors de P en *un* point X; réciproquement tout point X appartient à deux courbes C de Γ.

On sait que la variété Γ, de genre deux, renferme une série canonique g_2^1; eh bien, les C de Γ qui forment un couple de cette g_2^1 sont les courbes C *qui ont un contact en* P.

Ainsi la variété Γ vient représentée sur le continuum rationnel constitué par les points infiniment prochains à P à compter deux fois; et il y a 6 *points de diramation,* c'est-à-dire que, parmi les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P, il y en a 6 qui sont constitués par des courbes coïncidentes.

23. *Remarque concernant une certaine dualité.*

D'après une propriété générale établie au n. 20, un système Σ constitué par ∞^2 courbes de genre deux sur une surface F_0 est birationnellement identique à cette surface; cela signifie que si l'on représente les éléments (courbes) de Σ par une surface F', on pourra passer de F à F' par une transformation birationnelle.

Nous allons étudier de plus près la correspondance remarquable entre points et courbes que l'on obtient ainsi, lorsque, F étant une surface de Jacobi, on considère le système Σ de degré et d'indice 2, que nous venons de définir.

On a par construction qu'à tout point de F' correspond sur F *une* courbe C de Σ et réciproquement. Mais si l'on considère les ∞^1 courbes C issues par un point P de F, on aura qu'à ces courbes répondent des points décrivant sur F' une courbe C' que l'on regardera comme homologue au point P. Or les ∞^2 courbes définies ainsi sur F', formeront un certain système Σ', et l'on voit de suite que le degré de Σ' est l'indice de Σ et l'indice de Σ' est le degré de Σ; par conséquent ces nombres sont égaux à 2. Il s'ensuit (n. 15) que le genre des courbes C' est aussi égal à 2; c'est ce qu'on peut reconnaître aisément d'une façon directe, parce que la série des courbes C issues par un point P de F, est birationnellement identique à une courbe quelconque C de la même série. (Remarque au n. 22.)

Le système Σ' de F' étant parfaitement analogue au système Σ de F, ces remarques nous amènent à établir une sorte de *principe de dualité* liant les propriétés des surfaces F, F', ou si l'on aime mieux, liant les propriétés de la surface F et de la variété Σ.

Cette dualité consiste en ce qu'à toute propriété de F répond une propriété corrélative où l'on remplace les points par les courbes d'un système Σ de degré et d'indice 2, et réciproquement.

24. *Autres remarques concernant les courbes de genre deux sur une surface de Jacobi.*

Nous avons remarqué qu'une surface de Jacobi F renferme un système ∞^2 Σ de courbes C de genre deux, sans points doubles. Hors de Σ il y aura d'autres courbes K de genre deux; nous allons montrer que K doit couper les courbes C de Σ en plus que deux points. C'est dire qu'on a le théorème suivant:

Toute courbe K de genre deux coupant les courbes C d'un système Σ en deux points, appartient à ce système.

Pour le démontrer remarquons d'abord que K ne saurait toucher toutes les ∞^2 courbes C, car il s'ensuivrait que les $\infty^1 C$ issues par un point de K n'auraient pas des intersections variables.

Ceci posé, considérons une série $\infty^1 \Gamma$ de C passant par un point P de K et ne touchant pas K.

Si K n'appartient pas à la série Γ, pour tout point M variable sur K il y a *deux* C de la série Σ; réciproquement toute courbe C de Γ coupe K en *un* point variable. Ainsi on obtient une correspondance [1, 2] entre la courbe K et la série algébrique $\infty^1 \Gamma$. Mais la série Γ a le genre deux (puisqu'elle correspond élément par élément à une courbe C de Γ); ainsi la conclusion obtenue vient contredire un théorème connu de WEBER, d'après lequel, étant données deux variétés algébriques ∞^1 de genre deux (ou de genre supérieur à deux) toute transformation entre elles qui soit rationnelle dans un sens, est rationnelle aussi dans le sens inverse.

Cette contradiction prouve que la courbe K appartient à la série Γ des courbes C, c'est-à-dire qu'elle est une courbe C; ce qu'il fallait démontrer.

25. *Système Σ_δ appartenant à une surface de Picard F_δ.*

Considérons maintenant une surface F_δ (de diviseur $\delta > 1$) comme représentant une involution cyclique I_δ, qui appartient à une surface de Jacobi F (n. 11).

Il y a sur F un système $\infty^2 \Sigma$ constitué par des courbes C de genre deux sans points doubles; cherchons les caractères des courbes qui correspondent aux C sur F_δ. D'abord ce seront des courbes de genre deux; mais il est aisé de reconnaître qu'elles aurons $\delta - 1$ points doubles.

En effet à une C sont conjuguées, par rapport à I_δ, $\delta - 1$ courbes du même système Σ, qui coupent la C donnée en $\delta - 1$ couples; à chacune de celles-ci correspond un point double de la courbe homologue à C sur F_δ, courbe que nous désignerons par C_δ.

Or les ∞^2 courbes C_δ que l'on construit analoguement sur F_δ, formeront un système Σ_δ qui (d'après un théorème de M. ENRIQUES) sera renfermé, en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes du même ordre et de genre $\delta + 1$, système constitué par ∞^2 systèmes linéaires dont le degré sera égal à 2δ (n. 15).

Évaluons les caractères du système Σ_δ.

D'abord son degré, c'est-à-dire le nombre des points communs à deux courbes C_δ, sera égal à 2δ.

L'indice de Σ_δ est aussi 2δ. En effet considérons deux points A, B de F_δ; à ceux-ci correspondent sur F deux groupes de points $A_1, A_2, \ldots A_\delta$, $B_1, B_2, \ldots B_\delta$ et il y a $2\delta^2$ courbes C renfermant un point A_s $(s = 1, 2, \ldots)$ et un point $B_t (t = 1, 2, \ldots)$; mais ces $2\delta^2$ courbes C se partagent en 2δ groupes, chaque groupe étant constitué par δC conjuguées par rapport à l'involution I_δ; il s'ensuit qu'il y a sur F_δ 2δ courbes C_δ passant par A et B.

En résumant, *toute surface de Picard, de diviseur* δ, *renferme un système* ∞^2 Σ_δ *de courbes de genre deux irréductibles douées de* $\delta - 1$ *points doubles, système dont le degré et l'indice sont égaux à* 2δ.

Fait exception le cas des surfaces F_δ *renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en* δ *points;* en ce cas F_δ représente une involution I_δ sur une surface de Jacobi particulière (admettant deux faisceaux de courbes elliptiques unisécantes) de sorte que *les courbes du système* Σ_δ *dégénèrent* en des couples de courbes elliptiques choisies dans les deux faisceaux.

Remarque. Néanmoins, même en ce cas, le système $\infty^{\delta+1}$ de courbes de genre $\delta+1$ qui renferme Σ_δ, est composé par des courbes généralement irréductibles.

26. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Jacobi de modules généraux.*

Nous avons reconnu que toute surface de Jacobi générale F, renferme un système continu ∞^2 de courbes de genre deux sans points doubles; ce système, que nous avons appelé Σ, a le degré et l'indice égaux à 2.

Or les groupes de $n(>1)$ courbes C de Σ seront renfermés en un système continu ∞^{n^2+1} de courbes irréductibles, système qu'on pourra désigner par $[nC]$ et que l'on appellera multiple de $\Sigma \equiv [C]$ suivant le nombre n.

Le système $[nC]$ sera aussi transformé en lui-même par les transformations de première et de seconde espèce de la surface; il sera constitué de ∞^2 systèmes linéaires $|nC|$ de genre n^2+1, de degré $2n^2$ et de dimension n^2-1.

Remarque. Il est intéressant pour la suite de montrer que: *tout système* $|nC|$ *est invariant vis-à-vis des transformations cycliques de seconde espèce, d'ordre* n, *de la surface* F.

C'est ce qu'on prouve de la manière suivante: soit π une transformation de seconde espèce, périodique d'ordre n; toute courbe C de Σ est amenée par π, en $n-1$ courbes homologues, qui avec la première forment un certain groupe nC; on obtient ainsi ∞^2 groupes, invariant vis-à-vis de π, et dont deux quelconque n'appartiennent pas au même système linéaire; ces groupes définissent donc les ∞^2 systèmes linéaires complets $|nC|$ de la série $[nC]$, et l'on voit ainsi que tous ces systèmes $|nC|$ sont invariant par rapport à π, C. Q. F. D.

Sans nous arrêter davantage sur cette remarque, rappelons que l'on a le théorème suivant:

Les modules de la surface F *ayant des valeurs générales, toute courbe appartenant à* F *est renfermée en un système* $[nC]$ *de courbes du même ordre.*

C'est là une conséquence immédiate d'un théorème établi par M. Severi.[1]

---

[1] Memorie della R. Accademia della Science di Torino, t. 54, s. II, 1903, nº 23.

Ainsi que nous l'expliquerons tout à l'heure cette propriété correspond aussi à un fait connu de la théorie des fonctions abéliennes.

Il en découle en particulier que *la surface de Jacobi ne renferme en général qu'un seul système de courbes de genre deux sans points doubles.*

27. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Picard de modules généraux.*

Nous nous proposons d'étendre le théorème rappelé ci-dessus aux surfaces F_δ de diviseur $\delta > 1$.

Nous savons que F_δ renferme ∞^2 courbes C_δ de genre deux, qui sont contenues dans un système continu $\infty^{\delta+1}[C_\delta]$ de genre $\delta + 1$ et de degré 2δ, constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Nous voulons établir le théorème suivant:

Toute courbe appartenant à une surface F_δ de modules généraux, est renfermée en un système $[nC_\delta]$ de courbes du même ordre, c'est-à-dire en un système multiple de $[C_\delta]$ suivant un certain nombre n choisi d'une façon convenable.

Nous considérerons F_δ comme représentant une involution cyclique I_δ sur une surface de Jacobi F de modules généraux (n. 11). Les C_δ de F_δ correspondent aux courbes C engendrant le système Σ de F.

Soit K une courbe quelconque de F_δ et $|K|$ le système linéaire complet auquel elle appartient.

A $|K|$ correspond sur F un système linéaire $|K'|$, qui sera contenu totalement dans le système continu $[sC]$, pour une certaine valeur de s; cette valeur a la signification suivante: *le degré de $|K|$ est*

$$\frac{2s^2}{\delta}.$$

Il faut remarquer que $|K'|$ ne sera pas un système linéaire complet; en effet les courbes K' satisfont à la condition d'être transformées en elles-mêmes par la transformation cyclique de seconde espèce π, qui engendre l'involution I_δ; en laissant tomber cette condition on trouvera un système linéaire plus ample $|sC|$ renfermant $|K'|$. La seule chose qu'on peut affirmer, c'est que $|K'|$ est un système linéaire *complet par rapport à l'involution I_δ*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas en $|sC|$ un système lineaire plus ample de $|K'|$ qui soit transformé en lui-même par π et renferme $|K'|$.

Ceci posé, considérons une transformation périodique de seconde espèce, ω, d'ordre s, engendrant une involution cyclique; on peut supposer que ω soit choisie de telle façon qu'il n'y ait pas des puissances communes à π, ω.

Or nous savons que ω transforme en lui-même notre système linéaire complet $|sC|$ ainsi que tout autre système de la série ∞^2 constituant $[sC]$ (n. 26); en outre ω transforme en elle-même l'involution I_δ; par conséquent ω transformera en lui-même le système linéaire $|K'|$ qui, étant renfermé en $|sC|$ est complet par rapport à I_δ.

Passons à la surface F_δ. La transformation ω de F étant permutable avec π, donne lieu à une transformation de seconde espèce $\overline{\omega}$ périodique d'ordre s, sur F_δ; le système linéaire $|K|$ vient transformé en lui-même par $\overline{\omega}$.

On en déduit qu'il y a en $|K|$ des courbes unies par rapport à $\overline{\omega}$, se partageant en un certain nombre de systèmes linéaires; nous considérerons un de ces systèmes $|\overline{K}|$, de dimension ≥ 0.

Soit I_s l'involution cyclique d'ordre s engendrée par $\overline{\omega}$ sur F_δ et soit F_h la surface hyperelliptique (ayant un certain diviseur h) qui représente I_s.

Au système $|\overline{K}|$ de F_δ correspond sur F_h un système linéaire de courbes dont le degré s'obtient de celui de $|\overline{K}|$ en le divisant par s; le degré du système obtenu sur F est donc

$$\frac{2s}{\delta}.$$

Or ce degré doit être un nombre entier pair (voir n. 15), par conséquent *s est divisible par δ.*

En posant

$$s = n\delta$$

on aura donc sur F, que $|K'|$ appartient à $[n\delta C]$, et sur F_δ que $|K|$ appartient totalement à $|nC_\delta|$, C. Q. F. D.

28. *Rapprochement entre les résultats qui précèdent et la théorie des séries Θ. Représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi.*

Il y a lieu de rapprocher les résultats que nous venons d'établir, à quelques théorèmes connus de la théorie des fonctions abéliennes.

Nous commençons à rappeler les notions suivantes sur les *séries Θ* et sur les *fonctions intermédiaires.*

Soit un système de périodes normales

$$(1)\qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{cases}$$

satisfaisant à l'inégalité classique $g_1 g'_1 > h_1^2$, g_1, h_1, g'_1, étant les parties imaginaires des périodes g, h, g'.

On suppose ordinairement que g_1, et par conséquent g'_1, soient positifs, ce qu'on peut toujours obtenir en changeant au besoin les signes de g, h, g' simultanément.

Une *fonction thêta* relative au tableau (1), est définie par les conditions fonctionnelles

$$(2)\qquad \begin{cases} \Theta(u+1,v) = \Theta(u,v+1) = \Theta(u,v) \\ \Theta(u+g,v+h) = \Theta(u,v)e^{-2\pi i l u+\nu} \\ \Theta(u+h,v+g') = \Theta(u,v)e^{-2\pi i l v+\nu'} \end{cases}$$

(l entier; ν, ν' constantes données).

Les conditions d'existence d'une telle fonction reviennent aux conditions de convergence de la série qu'on obtient en développant Θ par la formule de Fourier. On trouve ainsi qu'il doit être $g_1 g'_1 > h_1^2$ et que le nombre entier l doit avoir le signe de g_1, c'est-à-dire, dans notre hypothèse, que $l > 0$.

Le nombre l est *l'ordre* de la fonction Θ.

Les exponentielles

$$e^{-2\pi i l u+\nu}, \quad e^{-2\pi i l v+\nu'}$$

sont les *multiplicateurs* de Θ.

On trouve aisément que les fonctions Θ aux mêmes multiplicateurs (c'est-à-dire rélatives aux mêmes valeurs des constantes ν, ν'), peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants, de l^2 d'entre elles.

On a aussi, d'après un théorème bien connu de M. Poincaré, que deux fonctions Θ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs, incongrus par rapport aux périodes.

Les fonctions Θ peuvent être généralisées en introduisant des fonctions que (d'après une dénomination de Briot et Bouquet) MM. Poincaré et Humbert ont appelées *fonctions intermédiaires.*

Il s'agit des fonctions se reproduisant par l'addition d'une des périodes $1, 0$; $0, 1$; g, h; h, g', à un *multiplicateur* près, qui est une exponentielle de première degré $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$.[1]

En multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle de seconde degré $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, on peut disposer des constantes $a, b, \ldots$ de façon que la nouvelle fonction $\varphi(u,v)$ vérifie les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi(u+1,v) = \varphi(u,v), \quad \varphi(u,v+1) = \varphi(u,v)\,e^{\theta u} \\ \varphi(u+g,v+h) = \varphi(u,v)e^{\lambda u+\mu v+\nu} \\ \varphi(u+h,v+g') = \varphi(u,v)e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'} \end{cases}$$

les $\theta, \lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ étant des constantes.

[1] Voir surtout: Poincaré, American Journal, t. VII, p. 316; Acta math., t. 26, p. 81; Humbert, Journal de Math. s. V, t. V (1899); t. VI (1900), etc.

Pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'il existe entre g, h, g' une relation de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \tag{4}$$

les A, B, C, D, E étant des entiers — premiers entre eux — dépendant des constantes θ, λ, μ, λ', μ'.

Les relations de la forme (4) entre les périodes g, h, g', ont été l'objets de recherches remarquables de M. Humbert et dans la suite nous aurons à les considérer par rapport aux transformations birationnelles d'une surface de Jacobi en elle-même.

Nous distinguerons ces relations d'autres relations singulières (à coefficients entiers) qu'on peut avoir entre les périodes, en les appelant *relations de Humbert.*

En exprimant les constantes θ, λ, μ, λ', μ', en fonction des entiers A, B, C, D, E on a les conditions

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi(u+1, v) & = \varphi(u,v), \ \varphi(u, v+1) = \varphi(u,v)e^{-2\pi i Dku} \\ \varphi(u+g, v+h) & = \varphi(u,v)e^{-2\pi i[lu-(C-Dg)kv]+\nu} \\ \varphi(u+h, v+g') & = \varphi(u,v)e^{-2\pi i[Aku+(l+Bk+Dkh)v]+\nu'} \end{array}\right. \tag{5}$$

où l, k sont deux entiers que M. Humbert appelle les *indices* de la fonction φ.

Lorsque $k = 0$, on tombe sur les fonctions Θ d'ordre l.

Si les périodes g, h, g' sont arbitraires, de sorte que la relation (4) soit une identité ($A = B = C = D = E = 0$), la φ se réduit de même à une fonction Θ d'ordre l, c'est-à-dire que *les fonctions intermédiaires n'existent que pour des valeurs particulières des périodes.*

Les conditions d'existence des fonctions intermédiaires correspondant à une relation de Humbert; le nombre des fonctions linéairement indépendantes qu'on trouve dans un système de fonctions φ aux mêmes multiplicateurs; et enfin le nombre des zéros communs à deux fonctions φ répondant à une même relation singulière, ont été donnés par M. Humbert dans ses mémoires sur les fonctions abéliennes, auxquelles nous renverrons.[1]

Ces notions rappelées, nous allons nous occuper de la représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi, représentation que l'on obtient au moyens des fonctions Θ ou des fonctions intermédiaires.

Soit F la surface de Jacobi relative au tableau (1) et u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F. Si entre les paramètres u, v on pose l'équation

---

[1] Voir en particulier le mémoire dans le Journal de Math., 1900, p. 313.

$$\Theta(u,v)=0,$$

la Θ étant d'ordre l et de multiplicateurs donnés, on obtient une courbe *algébrique* appartenant à un système linéaire ∞^{l^2-1}, car entre les $\Theta(u,v)$ il y en a l^2 linéairement indépendantes. Ce système linéaire à son tour, est contenu totalement dans un système continu de ∞^2 systèmes linéaires analogues, qui sont représentés par l'équation

$$\Theta(u+\lambda,\ v+\mu)=0,$$

renfermant deux paramètres λ, μ. On remarquera que le premier membre de cette équation est encore une fonction thêta de u, v; mais elle a des multiplicateurs différents de ceux qui appartiennent à $\Theta(u,v)$.

Le degré du système continu envisagé, est égal au nombre des zéros communs à deux fonctions Θ d'ordre l, c'est-à-dire à $2l^2$. En se rappelant la relation entre le genre et le degré d'un système continu tracé sur F (n. 15), on trouve que le genre de notre système est

$$\pi=l^2+1.$$

En particulier, lorsque $l=1$, le système continu représenté par l'équation

$$\Theta(u+\lambda,\ v+\mu)=0$$

a la dimension, le degré, le genre égaux à 2, c'est-à-dire qu'il est un système Σ (n. 21).

Comme entre les fonctions thêta d'ordre l et de multiplicateurs donnés, il y a aussi la puissance l^{me} d'une fonction thêta de premier ordre ayant des multiplicateurs convenables, on en conclut que:

Le système continu donné par l'équation

$$\Theta(u+\lambda,\ v+\mu)=0,$$

où la Θ, d'ordre l, renferme l^2 paramètres linéaires et homogènes, est le multiple d'ordre l du système Σ formé par les courbes de zéro des fonctions thêta de premier ordre.

Si l'on ajoute que, pour g, h, g' arbitraires, toute courbe tracée sur F s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta,[1] on tombe de nouveau sur la conclusion déjà établie au n. 26 que: *Sur une surface de Jacobi à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système Σ* (déterminé d'une façon unique) *et de ses multiples.*

---

[1] Humbert, Journal de Math., 1893, p. 371.

Lorsque — pour des valeurs particulières des modules g, h, g' — on trouve sur la surface F plusieurs systèmes Σ différents entre eux, il est aisé de reconnaître que toute courbe d'un de ces systèmes, peut être représentée en égalant à zéro une fonction Θ, pourvu que l'on choisisse convenablement les intégrales normales u, v. Il nous sera permis d'omettre la démonstration de ce fait dont nous n'aurons pas besoin dans la suite.

Supposons maintenant qu'on ait fixé le choix des intégrales normales u, v et qu'il s'agisse d'une surface F à modules particuliers. En égalant à zéro une fonction Θ, on aura une courbe appartenant à un système déterminé $\Sigma \equiv [C]$ ou à son multiple d'ordre $l, [lC]$.

Toute autre courbe L de F sera représentée en égalant à zéro une fonction intermédiaire, soit $\varphi(u,v) = 0$.

C'est là un théorème fondamental de M. Appell[1] qui explique le rôle des fonctions intermédiaires dans l'étude des surfaces de Jacobi à modules particuliers.

On peut ajouter que, si la relation de Humbert correspondant à la fonction φ, d'indices l, k, est

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

le système linéaire complet $|L|$ a la dimension

$$r = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 - 1,$$

le degré $2r + 2$, le genre $r + 2$, et la courbe L coupe en $2l + Bk$ points toute courbe C de Σ.

Le système $|L|$ appartient à une série continue ∞^2 de système linéaires analogues $\varphi(u + \lambda, v + \mu) = 0$.

29. *Représentation des courbes tracées sur une surface F_δ.*

Soit

$$(1) \qquad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix}\right.$$

le tableau des périodes primitives des intégrales normales u, v attachées à une surface F_δ de rang l et diviseur δ quelconque.

On peut construire aisément des fonctions satisfaisant non seulement aux relations générales (2), du n. 28, mais aussi aux relations particulières

$$\Theta(u + 1, v) = \Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u,v)$$

[1] Appell, Journal de Math., 1891, p. 195; Humbert, ibidem, 1893, p. 42—43.

de sorte que les quatre paires de périodes relatives à ces fonctions soient données par le tableau (1).

Nous appelerons Θ_δ les fonctions Θ satisfaisant à cette condition. On obtient en particulier une fonction Θ_δ en considérant le produit

$$\Theta_\delta(u,v) = \Theta(u,v)\Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right)\Theta\left(u,\ v+\frac{2}{\delta}\right)\cdots\Theta\left(u,\ v+\frac{\delta-1}{\delta}\right)$$

où $\Theta(u,v)$ est une fonction thêta relative au tableau

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}\right. \tag{2}$$

Si la fonction $\Theta(u,v)$ est d'ordre l_0, la $\Theta_\delta(u,v)$ est évidemment d'ordre $l=\delta l_0$. Réciproquement, on peut démontrer que *toute fonction thêta vérifiant les relations*

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta(u+1,\ v) &&= \Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u,v) \\ &\Theta(u+g,\ v+h) &&= \Theta(u,v)e^{-2\pi i l u+\nu} \\ &\Theta(u+h,\ v+g') &&= \Theta(u,v)e^{-2\pi i l v+\nu'} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

est d'ordre l multiple de δ.

En effet la dernière de ces relations donne

$$\Theta\left(u+h,\ v+\frac{1}{\delta}+g'\right) = \Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right)e^{-2\pi i l v-2\pi i\frac{l}{\delta}+\nu'}$$

d'où, en vertu de la condition

$$\Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u,v),$$

on tire

$$\Theta\left(u+h,\ v+\frac{1}{\delta}+g'\right) = \Theta(u+h,\ v+g') = \Theta(u,v)e^{-2\pi i l v-2\pi i\frac{l}{\delta}+\nu'}.$$

Il faudra donc qu'il soit

$$e^{-2\pi i\frac{l}{\delta}} = 1,\ \text{c'est-à-dire: } \frac{l}{\delta} = \text{entier.}$$

On trouve aisément, par le même procédé qu'on emploie dans le cas des fonctions Θ générales, que les fonctions Θ_δ — les ν, ν' étant des constantes données — peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires à coefficients constants de $\frac{l^2}{\delta}$ d'entre elles.

Deux fonctions Θ_δ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs incongrus par rapport au tableau (2), tandis qu'elles ont seulement $\frac{2ll'}{\delta}$ zéros incongrus par rapport au tableau (1), car les zéros incongrus par rapport à (2) se distribuent en $\frac{2ll'}{\delta}$ groupes de δ zéros congrus par rapport à (1).

Ceci posé, remarquons qu'au moyen de la correspondance $[1, \delta]$ entre la surface F_δ et la surface de Jacobi F relative au tableau (2), à une courbe C

$$\Theta(u,v) = 0$$

d'un système Σ tracé sur F, répond sur F_δ la courbe C_δ

$$\Theta(u,v)\,\Theta\left(u,\, v + \frac{1}{\delta}\right) \cdots \Theta\left(u,\, v + \frac{\delta - 1}{\delta}\right) = 0$$

appartenant au système Σ_δ homologue de Σ (n. 25).

Lorsque on ne regarde pas comme distincts deux zéros de $\Theta(u,v)$ incongrus par rapport à (2), mais congrus par rapport à (1), on peut aussi représenter la courbe C_δ avec la même équation $\Theta(u,v) = 0$, qui représente la courbe correspondante C.

Il s'ensuit que *sur la surface F_δ les courbes de zéro des fonctions thêta du premier ordre, rélatives au tableau (2), sont de courbes C_δ d'un système Σ_δ.*

Un système linéaire complet $|C_\delta|$ est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u,v) = 0, \tag{4}$$

Θ_δ étant une fonction d'ordre *minimum* δ satisfaisant aux conditions (3) pour des valeurs données des constantes r, r'. Cette fonction renferme $\frac{\delta^2}{\delta} = \delta$ paramètres linéaires et homogènes, de sorte que le système $|C_\delta|$ a la dimension $\delta - 1$. Le degré de ce système est $\frac{2\delta^2}{\delta} = 2\delta$, le genre $\pi = \delta + 1$ (n. 15).

Au varier des multiplicateurs de la fonction Θ_δ on obtient toute courbe C_δ de Σ_δ, c'est-à-dire que ce système est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u + \lambda,\, v + \mu) = 0. \tag{5}$$

Si la fonction Θ_δ envisagée a l'ordre $l = l_0\delta$, on voit aisément que l'équation (4) donne un système linéaire $|l_0 C_\delta|$ et que l'équation (5) donne le système continu complet $[l_0 C_\delta]$.

Ce que nous avons dit des fonctions thêta peut se répéter aussi pour les fonctions intermédiaires.

Une fonction intermédiaire $\varphi_\delta(u,v)$ définie par rapport au tableau (2), c'est-à-dire satisfaisant aux conditions (5) du n. 28, pourra être regardés comme une fonction intermédiaire relative au tableau (1), lorsqu'on aura

$$\varphi_\delta\left(u,\, v+\frac{1}{\delta}\right)=\varphi_\delta(u,\, v)e^{-2\pi i D k u}.$$

On obtient p. ex. une fonction intermédiaire de cette espèce en considérant le produit

$$\varphi(u,\, v)\varphi\left(u,\, v+\frac{1}{\delta}\right)\cdots\varphi\left(u,\, v+\frac{\delta-1}{\delta}\right),$$

$\varphi(u,v)$ étant une fonction intermédiaire relative au tableau (1); et l'on déduit aisément la théorie des fonctions φ_δ de celle des fonctions φ étudiées par M. Humbert.

Le théorème de M. Appell nous dit actuellement que *toute courbe algébrique tracée sur F_δ peut être représentée en égalant à zéro une fonction φ_δ*.

Lorsque les modules g, h, g' de la surface F_δ ou de la surface de Jacobi attachée à F_δ sont généraux, toute fonction φ_δ se réduit à une fonction Θ_δ.

Or, d'après la remarque que toute fonction Θ_δ a un ordre multiple de δ on retrouve ainsi le résultat établi au n. 27, que *sur une surface F_δ à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système $[C_\delta]$ bien déterminé et de ses multiples.*

30. *Surfaces de Picard d'ordre minimum dépourvues de courbes exceptionnelles.*

Les quelques remarques que nous venons d'établir par des voies différentes aux n. 26, 27 et 28, 29, nous amènent à construire des types, projectivement définis, des surfaces de Picard; et ce sera un résultat remarquable que, en exceptant des modules particuliers, on obtiendra ainsi, pour chaque valeur du diviseur δ, les surfaces de Picard d'ordre minimum, parmi celles qui ne renferment pas des courbes exceptionnelles.

Nous avons reconnu qu'à toute surface de Picard F_δ appartient un système Σ_δ renfermé en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes (généralement irrréductibles) de genre $\delta+1$; et nous avons ajouté que le système $\infty^{\delta+1}$ est constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Considérons un quelconque $|C_\delta|$ parmi ces systèmes linéaires $\infty^{\delta-1}$ de genre $\delta+1$ et de degré 2δ.

En supposant $\delta>3(\delta-1\geq 3)$ on pourra transformer F_δ de façon que les courbes du système considéré deviennent des sections planes ou hyperplanes de la surface; on obtiendra ainsi *une surface F_δ d'ordre 2δ appartenant à un espace*

$S_{\delta-1}$ de dimension $\delta - 1$ et cette surface ne renfermera pas des courbes exceptionnelles, puisque le système linéaire qui nous a fourni la transformation n'a pas de points base.

Ajoutons, sans appuyer sur les détails, qu'il est aisé de reconnaître que notre surface d'ordre 2δ ne saurait se réduire à une surface d'ordre δ comptée deux fois.

Faisons maintenant $\delta = 3, 2$. Il suffira alors de considérer le double d'un système linéaire $|C_\delta|$ c'est-à-dire $|2C_\delta|$.

Ce système est de genre

$$\delta + 1 + \delta + 1 + 2\delta - 1 = 4\delta + 1,$$

de degré

$$8\delta$$

et de dimension

$$4\delta - 1.$$

On obtient donc des *surfaces de Picard F_2, F_3 d'ordre 16, 24, qui appartiennent respectivement à un espace S_7, S_{11}, et qui sont dépourvues de courbes exceptionnelles.*

Pour $\delta = 1$ la dimension de $|2C|$ est 3; il semble donc qu'on sera amené à une surface de Jacobi d'ordre 8 sans courbes exceptionnelles. Mais une circonstance particulière se presente; les courbes du système transformant $|2C|$ passant par un point, renferment en conséquence un autre point, qui est conjugué au premier en une transformation de première espèce, bien définie par la condition de laisser invariant le système $|2C|$.

Ainsi la surface d'ordre 8 que l'on construit se réduit à une surface de quatrième ordre (de Kummer) comptée deux fois.

Il faut donc considérer un système linéaire $|3C|$ qui a le genre 10, le degré 18 et la dimension 9. On en est amené à une *surface de Jacobi d'ordre 18 en un espace S_9, qui est dépourvue de courbes exceptionnelles.*

Il est bien entendu qu'en projetant les surfaces appartenant à des hyperespaces, que nous venons de construire, on obtiendra des surfaces de l'espace ordinaire, qui seront dépourvues de courbes exceptionnelles et aurons le même ordre que les surfaces données, si l'on a projeté par des points extérieurs.

En projetant par des points de la surface l'ordre en est abaissé, mais des courbes exceptionnelles prennent naissance.

III. Classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi.

31. *Invariants des involutions appartenant à une surface de Jacobi.*

D'après les remarques développées dans le n. 6, étant donnée une surface hyperelliptique Φ, on peut toujours construire une surface de Jacobi F transformée rationnelle de Φ; on aura entre Φ, F une correspondance $[1, n]$, de telle sorte qu'aux points de Φ correspondront les groupes G_n de n points d'une certaine involution I_n sur F. La surface Φ est une *image* de l'involution I_n. Ainsi le problème de déterminer les familles, birationnellement distinctes, de surfaces hyperelliptiques, se trouve ramené à l'étude et à la classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi F.

Et nous supposerons toujours que F ne renferme pas des courbes exceptionnelles, puisque ces courbes, si elles existent, peuvent être éliminées par une transformation de la surface.

Ajoutons les remarques suivantes:

1) Toute involution I_n donnée sur F (soit toute surface — image de I_n — dont F est une transformée rationnelle) a le genre géométrique

$$p_g \leq 1.$$

En effet, si l'on fait abstraction des courbes exceptionnelles, il ne peut pas exister sur Φ des courbes canoniques d'ordre > 0, car à une courbe canonique de Φ devrait correspondre une courbe faisant parti d'une courbe canonique de F.[1]

Cette remarque prouve même davantage, c'est-à-dire que (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles) Φ ne saurait renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, et par conséquent, en désignant par P_i ses genres d'ordre $i = 2, 3, \ldots$, on aura

$$P_i \leq 1.$$

2) Le genre numérique d'une involution appartenant à F, ne saurait descendre au dessous de -1, soit

$$p_a \geq -1.$$

En effet si l'on avait $p_a < -1$, la surface pourrait être ramenée birationnellement à une réglée dont la section plane aurait le genre $-p_a$; alors aux génératrices de celle-ci correspondraient sur F les courbes d'un faisceau irrationnel, de genre $-p_a > 1$; mais un tel faisceau ne saurait appartenir à une surface de Jacobi (n. 19).

[1] Enriques, Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche (Memorie dell'Acc. di Torino, s. III, t. 44, 1893). Cap. VI. — Voir aussi Severi, Rendiconti dell'Ist. Lombardo, s. II, t. 36, 1903.

Ces remarques nous amènent à établir une distinction des involutions qui peuvent appartenir à F, d'après les valeurs des caractères invariants.

On pourra avoir des involutions irrégulières (c'est-à-dire des involutions représentées par des surfaces irrégulières) et des involutions régulières; nous désignerons en tous cas, par $d(\geq 0)$ l'irrégularité d'une involution appartenant à F, ou de la surface qui en est l'image; d sera donc la différence $p_g - p_a$ entre le genre géométrique et le genre numérique de Φ.

Or trois cas seront possibles:

$$d = 2, \quad d = 1, \quad d = 0.$$

Si $d = 2$ les inégalités $p_g \leq 1$, $p_a \geq -1$, ne peuvent être satisfaites qu'en faisant

$$p_g = 1, \qquad p_a = -1;$$

et, comme il n'y a pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on tombe sur des surfaces Φ hyperelliptiques de rang 1; ainsi que nous l'avons remarqué ces surfaces représentent des involutions engendrées sur F par des transformations cycliques de 2[de] espèce (n. 12).

Si $d = 1$, on peut supposer à priori

$$p_g = 1, \qquad p_a = 0,$$

ou

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1;$$

mais la première hypothèse doit être écartée parce qu'il n'existe pas des courbes canoniques d'ordre > 0;[1] on aura donc

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1.$$

On tombe alors sur des *surfaces elliptiques,* douées d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations birationnelles en elles-mêmes;[2] parmi ces surfaces on pourra rencontrer des surfaces qui se ramènent à des réglées elliptiques, et des surfaces irréductibles à des réglées; on peut distinguer les deux cas d'après la valeur du genre d'ordre 12, P_{12}; on a

$$P_{12} = 0 \qquad (P_4 = P_6 = 0)$$

dans le premier cas; et $P_{12} > 0$, et ici donc $P_{12} = 1$, dans le second.[3]

---

[1] Cfr. Enriques »Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1$» Atti Accad. di Bologna (9 Dec. 1906).

[2] Cfr. Enriques »Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero» Circolo Matematico di Palermo (5 Marzo 1905).

[3] Ibidem.

Si enfin $d = 0$, on aura

$$p_g = p_a = 0$$

ou

$$p_g = p_a = 1 .$$

Dans le premier cas on pourra considérer le bigenre P_2; si

$$P_2 = 0$$

la surface est rationnelle (Castelnuovo).[1]

L'hypothèse $P_2 > 0$, jointe à nos inégalités $P_i \leq 1$ $(i = 2, 3, \ldots)$, ne peut être satisfaite que pour des surfaces réductibles à un type connu, pour lesquelles

$$P_2 = 1 , \quad P_3 = 0 \quad (P_{2i} = 1 , \quad P_{2i+1} = 0).$$

Les résultats de cette discussion viennent résumés par le tableau suivant, où nous indiquons les valeurs possibles des caractères invariants qui appartiennent à une surface hyperelliptique quelconque (soit les caractères des involutions qui peuvent appartenir à F):

a) $d = p_g - p_a = 2$, $p_a = -1$, $p_g = 1$ $(P_i = 1;\ i = 2, 3, \ldots)$ (*surfaces hyperelliptiques de rang 1* — n. 16);

b) $d = p_g - p_a = 1$

$$p_a = -1 , \ p_g = 0 \begin{cases} P_{12} = 0 \ (\textit{réglées elliptiques}) \\ P_{12} = 1 \ (\textit{surfaces elliptiques} \text{ non réductibles à des réglées}) \end{cases}$$

c) $d = p_g - p_a = 0$

$$p_g = p_a = 0 \begin{cases} P_2 = 0 \ (\textit{surfaces rationnelles}) \\ P_2 = 1 , \ P_3 = 0 . \end{cases}$$

$$p_g = p_a = P_2 = 1 \ (P_i = 1;\ i, = 3, 4 \ldots).$$

Ces résultats sont obtenus *à priori* d'après les théorèmes de classification établis récemment dans la théorie des surfaces algébriques; il y a lieu maintenant de les retrouver à posteriori en classifiant les involutions qui peuvent appartenir à une surface de Jacobi F, d'après deux points de vue différents:

1) d'après le *nombre des transformations de seconde espèce* de F qui les ramènent en elles-mêmes;

2) d'après le *nombre de leurs coïncidences.*

Chacun de ces points de vue nous fournira ainsi un critérium pour reconnaître si une involution donnée sur F, appartient à l'une ou à l'autre des familles que nous venons de déterminer.

---

[1] »Sulle superficie di genere zero» Memorie della Società italiana delle Scienze (1896).

Remarque. Les résultats auxquels nous serons amenés subsistent de même pour les involutions appartenant à une surface de Picard de diviseur quelconque.

32. *Les involutions classifiées d'après leurs transformations en elles-mêmes.* Plaçons nous d'abord au premier point de vue.

Soit donc I_n une involution donnée sur la surface de Jacobi F, Φ une surface image de I_n.

L'involution I_n (soit la surface Φ qui la représente) pourra être regulière ou irrégulière, son irrégularité $d(\geq 0)$ étant exprimée par la différence $p_g - p_a$ entre son genre géométrique et son genre numérique.

Or nous allons démontrer le théorème suivant:

Une involution appartenant à F sera irrégulière ou régulière, suivant qu'il existe ou qu'il n'existe pas une infinité (continue) de transformations de seconde espèce qui la transforment en elle-même.

Considérons d'abord une involution I_n régulière; nous prouverons qu'il ne peut exister qu'un nombre fini (tout au plus) de transformations de seconde espèce par rapport auxquelles I_n jouit de la propriété d'invariance.

Soient u, v deux intégrales indépendantes de première espèce, attachées à la surface F; évaluons les sommes des valeurs qu'elles prennent aux n points d'un groupe $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de I_n.

Soit

$$\Sigma u(x_i) \equiv u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_n) \equiv h$$
$$\Sigma v(x_i) \equiv v(x_1) + v(x_2) + \cdots + v(x_n) \equiv k.$$

En faisant varier le groupe $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, h, k demeurent constantes, autrement elles fourniraient des intégrales de Φ (tandis que le nombre de celles-ci est $d = 0$).

Or une transformation de 2^{de} espèce de F est donnée par les formules

$$u(y) \equiv u(x) + a$$
$$v(y) \equiv v(x) + b.$$

Si cette substitution doit transformer en elle-même l'involution I_n, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma u(y_i) \equiv \Sigma u(x_i) + na \equiv h \\ \Sigma v(y_i) \equiv \Sigma v(x_i) + nb \equiv k \end{cases}$$

(les congruences subsistant toujours par rapport aux périodes de u, v); il suit

$$na \equiv 0$$
$$nb \equiv 0,$$

et par conséquent a et b ne sauraient recevoir qu'un *nombre fini* de valeurs, distinctes par rapport aux périodes.

Supposons au contraire que l'involution I_n soit irrégulière. Si elle était transformée en elle-même par un nombre fini de transformations de 2^{de} espèce, elle serait transportée en ∞^2 involutions distinctes par les ∞^2 transformations de 2^{de} espèce; et, comme le groupe formé par les transformations est transitif, on aurait ainsi une série continue d'involutions *irrégulières* jouissant de la propriété que les groupes de la série qui passent par un point donné de F, *remplissent la surface.*

Cette conclusion est absurde; en effet M. Severi a montré[1] que si l'on a sur une surface une série continue d'involutions irrégulières, les groupes de celles-ci qui renferment un point donné, appartiennent tous à une même *courbe* algébrique (variable dans un faisceau irrationnel).

Partant on arrive à la conclusion que »toute involution régulière de F est transformée en elle-même par un nombre fini de transformations de 2^{de} espèce» et réciproquement. C. Q. F. D.

33. Mais on peut en dire davantage.

En effet il est aisé de prouver que »si une involution I_n donnée sur la surface F, a l'irrégularité $d = 2$ elle demeure invariant par rapport aux ∞^2 transformations de 2^{de} espèce de F, et réciproquement».

Soit Φ une surface image de I_n. D'après le n. 31 on a

$$p_g = 1, \qquad p_a = -1.$$

En outre Φ ne renferme pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0 (n. 31). On en conclût que Φ est une surface hyperelliptique de rang 1, admettant un groupe ∞^2 de transformations birationnelles en elle-même (n. 16). Entre Φ, F il y a une correspondance algébrique $[1, n]$ dépourvue de courbe de diramation; et à toute transformation birationnelle de Φ en elle-même répondent n transformations de 2^{de} espèce distinctes de F.[2]

Ainsi I_n vient transformée en elle-même par les ∞^2 transformations; en particulier il y a parmi celles-ci n transformations qui laissent invariant chaque groupe de I_n, et engendrent l'involution au sens du n. 10.

La proposition réciproque s'établit de suite. Si I_n est transformée en elle-même par les ∞^2 transformations de 2^{de} espèce de F, la surface Φ — image

[1] *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica S. III, t. XII, 1905).

[2] Cfr. Enriques »Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse (n. 5)» Circolo di Palermo — 14 Maggio 1905.

de I_n — admet ∞^2 transformations en elle-même; par conséquent elle a les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$, et l'irrégularité $d = 2$.

Que l'on rapproche maintenant le résultat obtenu à celui du n. 32; un raisonnement par exclusion nous permet de conclure que:

Toute involution irrégulière donnée sur F admet ∞^2 ou ∞^1 transformations de 2^de^ espèce en elle-même, suivant que son irrégularité est

$$d = 2 \quad \text{ou} \quad d = 1.$$

Le cas $d = 2$ nous ramène aux surfaces hyperelliptiques de rang 1.

Le cas $d = 1$ nous ramène à des surfaces elliptiques[1] de genre numérique $p_a = -1$ et par conséquent de genre géométrique $p_g = 0$; parmi ces surfaces nous verrons qu'il existe des surfaces qui se laissent transformer en des réglées elliptiques (cas de dégénérescence) et aussi en *des surfaces elliptiques non réductibles à des réglées.*

34. *Les involutions classifiées d'après leurs coïncidences.*

Nous allons nous placer maintenant au second des points de vue dont nous avons parlé au n. 31.

Dans une involution I_n de F, il peut exister des groupes G_n, constitués de n points qui ne sont pas tous distincts entre eux, c'est-à-dire renfermant des *coïncidences.* Or trois cas pourront se présenter.

35. *Premier cas.*

L'involution I_n possède une infinité de coïncidences, c'est-à-dire une courbe K de points de coïncidence. En ce cas nous allons prouver que *I_n est rationnelle ou peut être représentée par une surface réglée elliptique.*

Désignons par m l'ordre de la surface F, et par π le genre de ses sections planes; on aura (F ne renfermant pas des courbes exceptionnelles).

$$m = 2\pi - 2.$$

Soit

$$h(> 0)$$

l'ordre de la courbe K, et D l'ordre de la courbe décrite par les $n-1$ points conjugués à un point (x) qui décrit une section plane de F.

---

[1] On appelle ainsi les surfaces admettant un groupe elliptique de transformations en elles-mêmes. Après MM. Picard et Painlevé ces surfaces ont été étudiées, notamment dans le cas $p_g = 0$, par M. Enriques (Circolo di Palermo — Marzo 1905 — l. c.).

Considérons sur la surface Φ, image de I_n, les courbes C correspondant aux sections planes de F.

Les courbes C se couperont deux à deux en $D + m$ points, chaque point commun à deux C répondant à un point commun aux sections planes homologues de F, ou bien à un groupe G_n de I_n dont un point appartient à la première de ces sections, et un autre point (conjugué au premier) appartient à la seconde.

Les courbes C auront le genre effectif π, ce genre étant égal à celui des sections de F; mais elles aurons un certain nombre de points doubles variables qui prennent naissance de la façon suivante: la courbe, d'ordre D, conjuguée à une section plane de F, rencontre cette section en D points; de ceux-ci, h tombent sur la courbe de coïncidence K; les autres $D - h$ se partagent en $\frac{D-h}{2}$ couples de points conjugués par rapport à I_n; eh bien à ces couples correspondent $\frac{D-h}{2}$ points doubles de la courbe C, homologue à la section considérée de F.

Or la série des courbes C sur Φ est rationnelle; par conséquent [1] elle appartient à un système linéaire $|C|$. Le genre Π et le degré M auront respectivement les valeurs suivantes:

$$\Pi = \pi + \frac{D-h}{2}$$

$$M = m + D = 2\pi - 2 + D.$$

Pourtant on a ($h > 0$)

$$M > 2\Pi - 2.$$

D'après un théorème de MM. Castelnuovo-Enriques [2] cela suffit pour que la surface Φ soit rationnelle ou puisse être ramenée à une surface réglée irrationnelle, qui, dans notre cas, serait une réglée elliptique, son genre numérique ne pouvant pas descendre au-dessous de -1 (n. 31).

36. *Deuxième cas.*

Il n'existe pas des coïncidences de l'involution I_n.

D'après une formule de M. Severi, on peut alors évaluer le genre numérique de la surface Φ image de I_n, qui se trouve en correspondence $[1, n]$ avec F; puisqu'il n'y a pas sur Φ des points de diramation, on trouve que ce genre numérique est

$$p_a = -1.$$

Relativement au genre géométrique, on pourra distinguer deux hypothèses:

---

[1] Enriques, Rendiconti di Palermo, t. X, 25 Agosto 1895.

[2] Annali di Matematica, s. III, t. 6, p. 165; 1901.

$$p_g = 1 \quad \text{ou} \quad p_g = 0.$$

Dans l'hypothèse $p_g = 1$ il y aura sur Φ une courbe canonique d'ordre zéro (n. 31) et par suite la surface résultera une surface hyperelliptique de rang 1.

Examinons ensuite l'hypothèse $p_g = 0$. La surface Φ sera une *surface elliptique* qui ne saurait pas être ramenée à une réglée.

C'est ce que l'on peut reconnaître en raisonnant par absurde. Si une surface réglée est en correspondance $[1, n]$ avec F, aux génératrices de la première surface ne sauraient répondre sur F des courbes réductibles en n parties rationnelles; partant sur une courbe homologue à une des génératrices sus-nommées, ou sur une composante irréductible de cette courbe, il y aurait des points de coïncidence.

Ajoutons que la surface elliptique Φ renferme deux faisceaux de courbes elliptiques, un parmi ceux faisceaux étant elliptique, l'autre rationnel. Cette propriété, qui découle immédiatement de la construction de la surface Φ, s'accorde avec la circonstance que nous avons reconnue au n. 31, que les plurigenres de Φ ne peuvent surpasser 1.

37. *Troisième cas — L'involution I_n possède un nombre fini de coïncidences. —*

En ce cas il ne peut y avoir qu'un nombre fini de transformations de la surface F, qui laissent invariant I_n, puisque ces transformations doivent échanger entre eux les points de coïncidences. Il s'ensuit (n. 32) que Φ est régulière, et l'on a

$$p_g = p_a = 0$$

ou

$$p_g = p_a = 1.$$

En le premier cas le bigenre P_2 aura l'une des valeurs suivantes:

$$P_2 = 0$$

ou

$$P_2 = 1;$$

et lorsque $P_2 = 0$ on tombe sur des surfaces rationnelles.

38. *Involutions appartenant à une surface régulière de genres 1.*

Il nous sera utile pour la suite de considérer les involutions, et notamment les involutions de couples de points, appartenant à une surface régulière de genres

$$1 (p_a = p_g = P_2 = 1).$$

En classifiant ces involutions, on tombera toujours sur des surfaces régulières et on aura les trois cas possibles

$$p_a = p_g = P_2 = 0 \text{ (cas rationnel)}$$
$$p_a = p_g = 0, \qquad P_2 = 1, \qquad (P_3 = 0)$$
$$p_a = p_g = P_2 = 1 .$$

Nous voulons montrer par un exemple que les deux derniers cas peuvent se presenter, tous deux, effectivement.

A cet effet considérons une surface F_8 intersection complète de trois quadriques dans un espace à 5 dimensions S_5. Il peut arriver que F_8 soit transformée en elle-même par une homographie involutoire de cet espace, et cette homographie pourra appartenir à l'une de trois espèces suivantes:

1) homologie;

2) homographie douée d'une droite de points unis qui ne coupe pas F, et d'un S_3 de points unis;

3) homographie douée de deux plans de points unis, qui ne coupent pas F.

Or l'homographie transformant F en elle-même donne lieu à une involution I_2 sur F. Eh bien, cette involution représente une surface rationnelle dans le premier cas; elle représente une surface de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$ dans le second cas; enfin elle représente une surface de genres $p_a = p_g = 0$ et $P_2 = 1$, dans le troisième cas.

Nous allons justifier ces assertions en laissant de côté le premier cas, qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté, puisqu'il suffit de répéter le raisonnement du n. 35.

En nous plaçant d'abord dans le cas 2), considérons les sections découpées sur F par les hyperplans renfermant l'axe de l'homographie. A ces sections répondrons sur la surface image de I_2 ∞^3 courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points; on en déduit que cette surface est birationnellement identique à une surface générale du quatrième ordre

$$(p_a = p_g = P_2 = 1).$$

Dans le cas 3) considérons les sections découpées sur F par les hyperplans qui renferment l'un ou l'autre parmi les deux plans de points unis. A ces courbes répondrons sur la surface image de I_2 des courbes de genre 3, qui donneront lieu à deux systèmes ∞^2 de degré 4; les courbes de l'un système couperont toute courbe de l'autre système en 4 points formant sur cette courbe un groupe de la série canonique g_4^2. Pourtant les deux systèmes seront adjoint l'un à l'autre et l'on aura $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ C. Q. F. D.

Il est à remarquer qu'entre les cas 1) 2) 3) il y a le critérium de distinction suivant: dans le cas 2) l'involution donnée sur F a un nombre fini de coïncidences, dans le cas 3) l'involution n'a pas du tout de coïncidence; on en a au contraire une infinité dans le cas 1).

Or cette remarque peut être généralisée. Toute involution de couples de points donnée sur une surface régulière, F, de genres 1, peut être engendrée par une homographie sur une surface F', transformée de F, appartenant à un hyperespace convenable. On peut donc répéter pour F' les considérations que nous venons de développer ci-dessus.

On arrive ainsi, à la conclusion suivante:

Etant donnée une surface régulière de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, on peut y avoir trois sortes d'involutions de couples de points:

1) *involutions rationnelles* $(p_a = P_2 = 0)$;

2) *involutions de genres* 1 $(p_a = p_g = P_2 = 1)$;

3) *involutions de genre* 0 *et de bigenre* 1, *dépourvues de courbes bicanoniques d'ordre* > 0 $(p_a = p_g = P_3 = 0,\ P_2 = 1)$.

On a une infinité de coïncidences dans le cas 1), *un nombre fini* > 0 *de coïncidences dans le cas* 2), *point de coïncidences dans le cas* 3).

IV. Théorème fondamental au sujet des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$.

39. Soit F une surface hyperelliptique de rang 1 $(p_g = 1,\ p_a = -1)$. Nous avons déjà établi une distinction entre les involutions I_n qui peuvent appartenir à F, suivant qu'il existe une courbe de coïncidence, ou bien qu'il y a seulement un nombre fini $N > 0$ de points de coïncidence, ou qu'il n'y en a pas du tout $(N = 0)$.

Nous allons considérer dans la suite les involutions I_n qui possèdent un nombre fini $N (\geq 0)$ de coïncidences.

Parmi ces involutions nous avons déjà considéré en particulier celles qui sont engendrées par des transformations cycliques de seconde espèce de $F (N = 0)$; ce sont des involutions représentées par des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1, ou brièvement des *involutions de rang 1*.

Or une involution I_n étant donnée sur F, deux cas peuvent se présenter:

1) il peut arriver que chaque groupe G_n de I_n soit composé par un certain nombre $r (\geq 1)$ de groupes G_δ de $\delta (> 1)$ points $(n = r\delta)$, de façon que les groupes G_δ engendrent une involution I_δ de rang 1; en ce cas on dira que *l'involution I_n est composée par la I_δ*;

2) au contraire il se peut que les groupes de I_n ne soient pas composés par des groupes d'une involution de rang 1.

La même distinction peut être établie aussi de la façon suivante:

On se trouve dans le cas 1) s'il existe des transformations de 2[de] espèce qui transforment en lui-même chaque groupe de I_n; au contraire le cas 2) correspond à l'hypothèse que de telles transformations n'existent pas.

Il y a lieu maintenant d'établir un critérium qui nous permettra de reconnaître plus aisément si une involution I_n donnée sur F est composée par une involution de rang 1.

Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les n points d'un groupe G_n de I_n; d'après une locution déjà établie, deux quelconques parmi ces points sont dits *conjugués* par rapport à I_n. Si I_n est composée par une involution $I_\delta (\delta > 1)$ de rang 1, il y a en G_n des points conjugués par rapport à I_n, p. ex. les points x_1, x_2, qui sont aussi conjugués par rapport à I_δ.

Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante: toute transformation de 2[de] espèce de F amène les points x_1, x_2 en des points conjugués par rapport à I_n.

En effet l'involution I_δ est transformée en elle-même par les transformations de 2[de] espèce, et, comme I_n est composée par I_δ, deux points conjugués par rapport à I_δ sont aussi conjugués par rapport à I_n.

Maintenant il y a lieu de remarquer qu'il subsiste la proposition réciproque suivante.

Que l'on ait sur F une involution I_n; si deux points x_1, x_2, conjugués par rapport à celle-ci, sont transformés en des points conjugués, par toute transformation de 2[de] espèce, l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Nous allons démontrer ce théorème.

Considérons une transformation de 2[de] espèce, π, de F, choisie d'une façon générale; elle amenera le point x_1 en un point x'_1 et sera définie par la correspondance de ces deux points, de façon qu'on pourra la désigner en écrivant

$$\pi = (x_1 x'_1).$$

Le point x_1 appartient à un groupe G_n de I_n dont les points sont désignés par $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

Or d'après notre hypothèse, la transformation π qui amène x_1 en x'_1, amène x_2 en un point x'_2 qui est conjugué à x'_1 par rapport à I_n. Il pourra arriver aussi que d'autres points de G_n, p. ex. $x_3, \ldots x_\delta$, soient transformés par π en des points $x'_3, \ldots x'_\delta$, conjugués à x'_1, et que cela arrive d'ailleurs quel que soit la transformation de 2[de] espèce π.

Les points $x_1, x_2, \ldots x_\delta$ formeront en G_n un groupe G_δ qui se trouve défini de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

a) le groupe G_δ est déterminé à partir du point x_1, que l'on peut faire varier sur F;

b) le groupe G_δ est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points $x_1, x_2, \ldots x_\delta$, puisqu'on a

$$\pi = (x_1 x'_1) = (x_2 x'_2) = \cdots = (x_\delta x'_\delta).$$

Il suit que G_δ décrit, au varier de x_1, une involution I_δ par laquelle I_n résulte composée. Mais comme I_δ est transformée en elle-même par les transformations de 2[de] espèce, elle est une involution de rang 1 (n. 32). Ainsi notre proposition se trouve établie.

40. En ce qui suit nous allons supposer que l'involution I_n douée de $N \geq 0$ points de coïncidence, que nous considérons sur la surface F, ne soit pas composée par une involution $I_\delta (\delta > 1)$ de rang 1. Ce n'est pas là une restriction essentielle que nous imposons à I_n, puisque cette condition pourra toujours être remplie en remplaçant la surface donnée par une autre surface de Picard.

Ceci posé, nous nous proposons d'établir que l'involution I_n est engendrée par n transformations birationnelles de la surface surface F en elle-même, transformations formant un groupe d'ordre n. Plus clairement nous disons que, si l'on considère les n points $x_1, x_2, \ldots x_n$ d'un groupe variable de I_n, chacun de ceux-ci dépend rationnellement de l'un des autres; p. ex. $x_2 \ldots x_n$ sont des fonctions rationnelles de x_1.

Pour arriver à cette conclusion fondamentale, nous poursuivons l'étude de l'involution I_n, en rappelant nos hypothèses fondamentales:

1) que I_n soit douée d'un nombre fini $N \geq 0$ de points de coïncidence;

2) que I_n ne soit pas composée par une involution $I_\delta (\delta > 1)$ de rang 1.

Considérons sur F un système continu complet Σ de courbes C (de genre $\pi \geq 2$) sans points-base, choisi d'ailleurs d'une façon quelconque, et construisons le système des courbes K (*conjuguées* aux C) qui sont définies de la façon suivante:

tandis qu'un point décrit une courbe C, les $n-1$ points conjugués décrivent une courbe K, que l'on dit conjuguée à la première.

Nous nous proposons d'établir que chaque courbe K se décompose en $n-1$ courbes, birationnellement identiques à la courbe C dont elle prend naissance. Cette conclusion, qui nous permettra de démontrer aisément le théorème fondamental que nous avons en vue, sera établie par un procédé de réduction à l'absurde. Nous supposerons d'abord que les courbes K soient (généralement) irréductibles et nous montrerons que cette hypothèse contredit à l'hypothèse 2). Ensuite nous examinerons le cas où les K seraient réductibles, mais le nombre de leurs composantes irréductibles serait $< n-1$ et nous en tirerons la même conclusion.

41. Adoptons les hypothèse 1) 2) du n. préc. et supposons en outre que la courbe K conjuguée à une courbe C (choisie d'une façon générale en Σ), soit irréductible. Il y aura sur K une involution γ^1_{n-1} de genre π (π étant le genre de C); deux points conjugués par rapport à γ^1_{n-1} — c'est-à-dire deux points appartenant à un même groupe de cette série — seront conjugués aussi par rapport à l'involution I_n.

Considérons les transformations de 2^{de} espèce de la surface F en elle-même. On pourra supposer: ou bien que ces transformations changent la série des courbes K en elle-même; ou bien qu'elles changent une courbe K en une nouvelle courbe $\overline{K}$ qui n'est pas conjuguée à une courbe C de notre système Σ.

Si la série des courbes K est transformée en elle-même, c'est-à-dire si une courbe K est transformée en une autre courbe K, l'involution γ^1_{n-1} considerée sur la première courbe, se transformera dans l'involution γ^1_{n-1} qui vient définie analoguement (par rapport à I_n) sur la seconde courbe; en effet s'il n'en était pas ainsi on trouverait qu'une courbe K, en tant qu'elle peut correspondre à une infinité de courbes analogues par les ∞^2 transformations de 2^{de} espèce, renferme une infinité continue d'involutions irrationnelles γ^1_{n-1}, ce qui contredit à un théorème connu de MM. Painlevé, Humbert et Castelnuovo.

Il suit de cette remarque que, si la série des courbes K est transformée en elle-même par les transformations de 2^{de} espèce de F, deux points situés sur une courbe K et conjugués par rapport à I_n (c'est-à-dire appartenant à un même groupe de I_n) seront amenés par toute transformation de 2^{de} espèce, en des points conjugués de même par rapport à I_n; d'après le critérium établi au n. 39 cela signifie que l'involution I_n est une involution de rang 1, ou qu'elle est composée par une involution de rang 1, ce qui contredit à notre hypothèse 2).

Nous devons donc supposer qu'une transformation de 2^{de} espèce (choisie d'une façon générale) change une courbe K en une nouvelle courbe $\overline{K}$ qui n'est pas conjugués à une courbe C de notre système Σ.

Construisons alors la courbe L conjuguée à $\overline{K}$ par rapport à I_n, c'est-à-dire la courbe engendrée par les $n-1$ points conjugués à un point variable sur $\overline{K}$.

La courbe $\overline{K}$ correspondant à K en une transformation de 2^{de} espèce π, on peut faire varier $\overline{K}$ tout en tenant fixe K pourvu qu'on laisse varier π, et d'une façon continue on peut réduire ainsi $\overline{K}$ à K, tandis que π se réduit à la transformation identique.

Or, lorsque $\overline{K}$ variant d'une façon continue se réduit à K, la courbe L conjuguée à $\overline{K}$ variera aussi et devra se réduire à la courbe conjuguée à K, c'est-à-dire à la courbe composée $(n-2)\ K + C$.

Il s'agit de voir comment cette réduction est possible.

Supposons d'abord que la courbe L, qui tend à la limite $(n-2)K+C$, soit irréductible.

Envisageons un groupe de points de I_n dont un point se trouve sur $\overline{K}$; nous voulons désigner par x_2 ce point, et par $x_1, x_3, \ldots x_n$ les $n-1$ points conjugués qui appartiennent à L.

Si, ainsi que nous l'avons supposé, L est irréductible, on peut échanger entre eux les points x_1, x_3, en faisant décrire un cycle au point x_2 sur $\overline{K}$; il est sous-entendu que l'on envisage $\overline{K}$ comme une surface de Riemann.

Or $\overline{K}$ se réduit d'une façon continue à K; le cycle décrit sur $\overline{K}$ par x_2 se réduit à un cycle sur K, qui est d'ailleurs une surface de Riemann identique à $\overline{K}$.

En force d'un *postulat de continuité* qu'on a le droit d'appliquer ici, il doit donc arriver le fait suivant: considérons un groupe de points $x_1, x_2, \ldots x_n$ de I_n, et supposons que le premier point appartienne à la courbe C, et les autres $n-1$ points à la courbe conjuguée K; on peut faire décrire au point x_2 sur K un tel cycle que x_1 se change avec x_3.

Comment ce fait est-il possible?

Suivons par la pensée le mouvement du point x_2 qui décrit un cycle sur K, et suivons de même le chemin qui vient décrit par un point x_3 conjugué à x_2 et situé sur la même courbe K.

Pour que x_3 se change en x_1, il faut qu'il passe de la courbe K à la courbe C, et ce passage ne peut avoir lieu que par l'un des points communs à C, K. Or x_3 coïncidera avec l'un, A, de ces points, lorsque x_2 occupera la position A' d'un des points conjugués sur K; mais si on continue le mouvement de x_2 au delà de A', où se trouvera la continuation du chemin décrit par x_3? appartiendra-t-elle à K, ou bien se trouvera-t-elle sur C?

Pour éclaircir ce point, remarquons que lorsque x_2 décrit un cycle en passant par A', il y a toujours un chemin décrit par x_3 qui lui correspond et qui est situé en totalité sur K; une autre branche de la même fonction algébrique (correspondant à l'involution I_n) est la branche x_1 qui se meut sur C; pour que le chemin de x_3 se continue, en passant par A, sur C, il faut donc que cette branche x_1 aboutisse de même à A lorsque x_2 atteind A', c'est-à-dire que les deux branches x_3 et x_1 se réunissent en A; mais cela signifie qu'en A doit tomber un *point de coïncidence* de l'involution I_n.

Or cette conclusion contredit à notre hypothèse 1). En effet s'il n'y a qu'un nombre fini de points de coïncidence de I_n, une courbe C choisie d'une façon générale en Σ, n'en renferme pas.

On en déduit que la courbe L ne saurait être irréductible. Cette courbe sera donc composée et parmi ses composantes il y en aura une, que nous pouvons désigner par X, qui renfermera un seul point x_1 parmi les conjugués à x_2; en effet si x_1 décrivait une courbe renfermant un autre parmi ses points conjugués, p. ex. x_3, il y aurait sur K un cycle de x_2 auquel correspondrait un échange entre x_1, x_3, et on en conclurait, comme avant, qu'il y aurait sur C des points de coïncidence.

Nous venons de reconnaître que L se décompose, et précisement qu'il y a une de ses composantes (X) qui est décrite simplement par le point x_1 conjugué au point x_2, se mouvant sur $\bar{K}$. Lorsque $\bar{K}$ se réduit par continuité à K, X se réduira à C.

En effet on pourrait se douter seulement que X se réduise à $C+\theta$, θ désignant une *courbe fondamentale*, lieu des points conjugués à un *point fondamental* de I_n appartenant à K; mais une analyse approfondie porte à exclûre cette hypothèse.

Ce n'est pas qu'on ne puisse supposer *à priori* que toutes les courbes K aient communs des points fondamentaux de I_n, qui serait multiples pour les K, mais il est aisé de reconnaître que si l'on transforme un point fondamental en une courbe exceptionnelle, cette courbe ne fait pas partie de la K envisagée comme limite de $\bar{K}$, et en conséquence la courbe θ conjugué à la courbe exceptionnelle, ne fait pas partie de la courbe limite de X, qui est simplement C et non $C+\theta$.

Ceci posé, rappelons-nous que le système Σ des C est un système continu complet; on en déduira que la courbe X, qui en variant par continuité se réduit à une C, appartient elle-même à ce système Σ. Mais cette conséquence entraîne que la courbe $\bar{K}$, transformée d'une courbe K par une transformation de 2[de] espèce, soit le lieu décrit par un point conjugué à une courbe C, et par conséquent qu'elle appartienne au même système des K. Ce système sera donc invariant par rapport aux transformations de 2[de] espèce si, ainsi que nous l'avons supposé, les K sont irréductibles; c'est là une conclusion qui contredit à l'hypothèse 2) du n. 40, ainsi que nous l'avons remarqué.

On en conclût que *les courbes K ne sont pas irréductibles.*

42. Il faut analyser maintenant les différentes hypothèses qu'on peut faire au sujet de la décomposition des courbes K. On peut supposer:

ou bien que K se décompose en un certain nombre $h < n-1$ de composantes $K_1, \ldots K_h$;

ou bien qu'elle se décompose en $n-1$ composantes.

Si c'est le premier cas qui a lieu, il y aura une partie irréductible de K, soit p. ex. K_1, qui renferme une involution irrationnelle $\gamma^1{}_r (r > 1)$ dont chaque groupe est constitué par r points conjugués de I_n.

Nous pourrons maintenant répéter pour les K_1, le raisonnement que nous avons développé avant au sujet des K.

Nous transformons les K_1 par les transformations de 2[de] espèce. Si les courbes transformées sont des courbes K_1 du même système, il s'ensuit que l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Il faut donc supposer que la courbe $\overline{K}_1$, transformée d'une K_1, n'appartienne pas au système de celle-ci. Maintenant $\overline{K}_1$ peut varier par continuité se réduisant à K_1; la courbe L conjuguée à $\overline{K}_1$ se réduit alors à la courbe conjuguée à K_1, c'est-à-dire à la courbe

$$(r - 1)K_1 + K_2 + \cdots + K_h + C.$$

Considérons un groupe de points $x_1, x_2, \ldots x_n$ de I_n dont un point x_2 est situé sur $\overline{K}_1$, et un point x_1 est sur C. Lorsque x_2 décrit un cycle sur K_1, il n'est pas possible échanger x_1 avec un autre point x_3, du groupe, n'existant pas sur C des points de coïncidence. Mais d'un autré côté, à cause de raisons de continuité, cet échange devrait se présenter comme possible si un échange analogue a lieu sur L, c'est-à-dire si la courbe L est irréductible ou si elle ne renferme pas une composante (décrite simplement par le point x_1) qui se réduit à C lorsque $\overline{K}_1$, se réduit à K_1.

On en conclût que L est réductible et renferme une composante appartenant au système complet Σ des C; et il s'ensuit que $\overline{K}_1$, est une partie de la courbe conjugué à une C et qu'elle appartient au même système que K_1, c'est-à-dire que le système des K_1 est invariant par rapport aux transformations de 2[de] espèce. C'est là une conclusion absurde, ainsi que nous l'avons déjà remarqué.

Cet absurde prouve que *la courbe K conjuguée à une C par rapport à I_n, se décompose en $n - 1$ parties décrites simplement par les $n - 1$ points conjugués à celui qui se meut sur C, et par conséquent birationnellement identiques à C.*

43. Il est aisé maintenant d'achever la démonstration du théorème que nous avons en vue.

Supposons que Σ soit du type envisagé aux nn. 21, 25 et considérons en Σ les ∞^1 courbes C passant par un point x_1; les courbes conjuguées à ces C se décomposent en $n - 1$ parties $C', \ldots C^{(n-1)}$, qui passent respectivement par les points $x_2, \ldots x_n$ du groupe de I_n déterminé par x_1.

Or un point quelconque P de la surface F appartient à un nombre fini de courbes C par x_1, courbes qui, se coupant en ce point, servent à le déterminer; aux C par P correspondent des C' par x_2 se coupant en un point conjugué P' qui se meut avec P et résulte ainsi dépendre rationnellement de P.

On voit d'ailleurs que cette correspondance rationnelle fait correspondre au point x_1, le point x_2.

On arrive ainsi à la conclusion suivante:

Toute involution I_n appartenant à une surface hyperelliptique F de rang 1 et satisfaisant aux hypothèses 1), 2) du n. 40, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même; ces transformations amènent un point quelconque de la surface F respectivement en ses $n-1$ conjugués par rapport à I_n.

44. *Théorème fondamental.*

Le théorème que nous venons d'établir peut être énoncé sous une autre forme comme une propriété fondamentale des surfaces hyperelliptiques.

D'après les nn. 6, 35 toute surface hyperelliptique Φ de rang $r(>1)$ et de diviseur δ, correspond à une involution I_n d'ordre $n=r\delta$ appartenant à une surface de Jacobi F, et possédant un nombre fini $N\geq 0$ de points de coïncidence (les surfaces rationnelles et les réglées elliptiques étant laissées de côté d'après le n. 4). Lorsque $\delta=1$ l'involution I_n remplit les conditions 1) 2) demandées par le théorème précédent. Si au contraire $\delta>1$ l'involution I_n résulte composée par une involution I_δ de rang 1; cette involution I_δ vient représentée par une surface de Picard F_δ, et l'on a sur F_δ une involution I_r d'ordre r dont les groupes correspondent aux points de la surface Φ, et qui remplit les mêmes conditions 1) 2).

On a donc le théorème fondamental suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r>1$ et de diviseur δ correspond à une involution engendrée par un groupe de r transformations birationnelles sur une surface de Picard F_δ.

C'est ce qu'on peut exprimer aussi de la façon suivante:

Soit $\Phi(x,y,z)=0$ une surface hyperelliptique, et supposons que, les x, y, z étant des fonctions abéliennes de deux paramètres u, v, il arrive qu'à tout groupe de valeurs de x, y, z, correspondent r couples (u,v) incongrus par rapport aux périodes primitives, soit:

$$(u_1, v_1),\quad (u_2, v_2), \dots (u_r, v_r);$$

en ce cas les u, v seront liées par $r-1$ substitutions linéaires

$$\left.\begin{aligned} u_i &= a_i u_1 + b_i v_1 + c_i \\ v_i &= d_i u_1 + e_i v_1 + f_i \end{aligned}\right\} \qquad i=2,3,\dots r$$

dont les coefficients ne dépendent pas de x, y, z.

Ces substitutions, ajoutée la substitution identique, forment un groupe d'ordre r; et les constantes a_i, b_i, d_i, e_i, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes.

V. Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.

45. *Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.* D'après le théorème fondamental du n. 44, la détermination des familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques, se trouve ramenée à celle des groupes finis de transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique de rang 1 en elle-même.

On se rattache ainsi à la théorie des transformations des fonctions abéliennes de genre 2, théorie qui a pris naissance dans les Notes classiques de HERMITE (1855)[1] et qui a été développée successivement par les recherches de MM. FROBENIUS, WEBER, HURWITZ, WILTHEISS, HUMBERT,[2] ce dernier ayant considéré les transformations dans toute leur généralité, ainsi que nous aurons lieu de le rappeler dans la suite.

Rappelons d'abord le résultat auquel on est amené dans le cas où les modules sont arbitraires.

Soit F une surface de Jacobi, et u, v les integrales normales de 1[re] espèce attachées à F. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la substitution linéaire

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta$$

établisse une transformation rationnelle de la surface F en elle-même, de sorte que les coordonnées du point (u', v') soient des fonctions rationnelles des coordonnées du point (u, v), est que u', v' augmentent d'une des périodes simultanées, lorsque u, v augmentent d'une telle période. Soit

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

le tableau des périodes normales des intégrales u, v: alors la condition précédente peut s'exprimer sous forme analytique en écrivant les relations:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 g + a_2 h & \mu &= b_0 + b_3 g + b_2 h \\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g' & \mu' &= b_1 + b_3 h + b_2 g' \\ \lambda g + \mu h &= d_0 + d_3 g + d_2 h & \lambda h + \mu g' &= c_0 + c_3 g + c_2 h \\ \lambda' g + \mu' h &= d_1 + d_3 h + d_2 g' & \lambda' h + \mu' g' &= c_1 + c_3 h + c_2 g' \end{aligned}\right.$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont 16 *entiers caractéristiques* de la transformation.

[1] Comptes rendus de l'Academie des Sciences, t. XL.
[2] Journal de mathématiques (1899—1900—1901—1903—1904—1906).

Si l'on veut exprimer que la transformation est birationnelle, on doit supposer que la valeur du déterminant (*degré* de la transformation):

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

soit égale à ± 1.[1]

En éliminant les constantes λ, λ', μ, μ' entre les équations (1), on a les relations

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0 \\ \text{(B)} & gha_3 + gg'a_2 + h^2 b_3 + hg'b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g'd_2 - d_1 = 0 \\ \text{(C)} & gha_3 + gg'b_3 + h^2 a_2 + hg'b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g'b_0 - c_0 = 0 \\ \text{(D)} & h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0. \end{array}$$

Si les périodes g, h, g' sont arbitraires, ces relations se réduisent à des identités et l'on tombe sur les transformations

$$u' = \pm u + \text{const.}$$
$$v' = \pm v + \text{const.}$$

de 1[re] et de 2[de] espèce.

Nous les appelerons les *transformations ordinaires* de la surface F en elle-même, car *elles existent sur F pour toute valeur des modules.*

Si au lieu de considérer une surface de Jacobi, on se rapporte à une surface de Picard F_δ de diviseur $\delta > 1$, on arrive de même à la conclusion que, pour des modules arbitraires, cette surface ne saurait admettre d'autres transformations en elle-même que les *transformations ordinaires*:

$$u' = \pm u + \text{const.}$$
$$v' = \pm v + \text{const.}$$

Or parmi ces transformations, celles qui sont (périodiques) de 2[de] espèce nous amènent à des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1 (n. 11), ainsi donc les seules transformations correspondant à des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, seront les transformations de 1[re] espèces, que l'on peut toujours réduire à la forme

$$u' = -u, \qquad v' = -v.$$

[1] Il faut toujours prendre la valeur $+1$, lorsque, ainsi que nous le supposons, on a entre les parties imaginaires des périodes, l'inégalité classique $g_1 g'_1 > h_1^2$. Voir Humbert, Journal de Math., 1900, p. 291.

On en déduit le théorème suivant:

Il n'y a d'autres surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, dépendant de trois modules arbitraires, que des surfaces régulières de rang $r = 2$. Ces surfaces peuvent être représentées en exprimant les coordonnées de leurs points par des fonctions hyperelliptiques paires, d'ailleurs arbitraires. Elles se partagent en une infinité de familles birationnellement distinctes, d'après la valeur du nombre entier δ qui en est le diviseur.

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$ ont été l'objet d'études classiques (Kummer, Weber, Humbert); le cas $\delta > 1$ a appelé récemment l'attention de MM. Traynard et Remy.

46. *Surfaces de* Kummer. Nous allons considérer d'abord les surfaces régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$; s'il n'y aura ici rien d'essentiel à ajouter aux résultats connus, nous aurons au moins l'occasion de développer la méthode que nous employerons dans la suite pour étudier les cas nouveaux qui se présentent pour $r > 2$.

Remarquons d'abord que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$, correspond à une involution de couples de points appartenant à une surface de Jacobi et représentée sur celle-ci par

$$(2) \qquad u + u' = \lambda, \qquad v + v' = \mu$$

(λ, μ constantes).

Ceci posé considérons sur F le système fondamental Σ constitué de ∞^2 courbes C de genre 2, se coupant deux à deux en 2 points (n. 21).

Nous allons supposer d'abord que les C soient irréductibles, ce qui est le cas général.

Le système Σ est transformé en lui-même par toute involution du type (2). Ainsi si l'on se donné une involution I_2 de ce type, il y aura ∞^2 couples de courbes C conjuguées par rapport à I_2. Construisons une surface Φ image de I_2, dont les points correspondent *sans exception* aux couples de cette involution. Aux courbes C répondront sur Φ des courbes K; chaque K représentera deux C conjuguées par rapport à I_2.

Il est aisé de reconnaître que deux courbes K se coupent en 4 points, puisque deux couples de courbes C sur F ont communs 8 points (qui se partagent ici en 4 couples de I_2). De même on voit que les courbes K (dont le genre est 2 comme celui des C) ont un point double variable; en effet toute K renferme un point double correspondant au couple de I_2 qui est commun aux deux C homologues à K et conjuguées entr'elles par rapport à I_2.

La surface Φ étant régulière, c'est-à-dire dépourvue d'intégrales simples, on aura d'après une remarque de M. Humbert, que les ∞^2 courbes K, tracées sur Φ, appartiennent à un système linéaire sans points base, de courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points.

On peut même supposer que les courbes de ce système ∞^3 soient les sections planes de la surface Φ. En effet il est aisé de reconnaître que, étant excepté le cas de la surface de Jacobi particulière associée à une courbe réductible, les courbes K passant par un point de Φ ne renferment pas en conséquence d'autres points variables avec celui-là, et par suite on peut toujours transformer la surface choisie comme image de I_2, de façon que courbes K viennent coupées par des plans.

Alors la surface Φ sera du quatrième ordre à sections planes de genre trois (c'est-à-dire dépourvue de courbes multiples); les ∞^2 courbes K qui répondent aux C de F, seront les sections découpées sur Φ par les plans tangents.

En outre Φ aura des points doubles qu'on déterminera de la façon suivante:

Il y a sur F 16 points de coïncidence de l'involution I_2 qui tombent dans les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2},$$

ω_1 et ω_2 désignant un couple de périodes simultanées des intégrales u, v.

A chacun de ces points correspond un point de Φ dont nous allons calculer la multiplicité.

A cet effet considérons le système linéaire $|K|$ formé par les sections planes de Φ. A ce système correspond sur F un système linéaire auquel appartiennent les ∞^2 couples de courbes $C + C'$ de Σ, conjuguées par rapport à l'involution I_2; système linéaire qu'on pourra désigner par

$$|D| = |C + C'|.$$

Ceci posé, considérons les ∞^1 couples de courbes $C + C'$ qui passent par un point uni P de I_2. Il a lieu de rappeler que les ∞^1 courbes C par P forment une série d'éléments de genre 2, et que dans cette série il y a *une* g^1_2, qui est constituée par les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P; on en conclût que, les ∞^1 couples $C + C'$ formant aussi une g^1_2, sont constituées de courbes tangentes en P.

Il s'ensuit que le système linéaire ∞^2 des courbes D passant par P, a en P un point-base double, de sorte que deux courbes de ce système se coupent hors de P en $8 - 4 = 4$ points mobiles. Par conséquent aux courbes D par P correspondent sur Φ des courbes de $|K|$ par un point P', se coupant deux à deux hors de P' en $^4/_2 = 2$ points mobiles; ainsi donc P' est un point double de Φ.

On reconnaît aisément qu'il s'agit d'un point double conique, parce que toute courbe D, arbitrairement choisie parmi celles qui passent par P, a en P deux branches distinctes, auxquelles correspondent deux branches distinctes de la section plane homologue de Φ, et parce que d'un autre côté le cône tangent à Φ en P' correspond élément par élément au domaine de P sur F et il est en conséquence irréductible.

Nous venons de reconnaître qu'aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F, répondent 16 *points doubles coniques de* Φ.

Il y a lieu maintenant de rappeler le principe de dualité que nous avons établi au n. 23.

Le système Σ des courbes C constitue une variété ∞^2 d'éléments, birationnellement identique à la surface F, et transformée en elle-même par l'involution I_2; aux couples de C conjuguées correspondent les sections de Φ par les plans tangents, qui forment une variété identique à la surface Φ elle-même.

Il y aura donc 16 courbes C de coïncidence, transformées en elles-mêmes par I_2, auxquelles répondront 16 *plans singuliers qui touchent* Φ *suivant des coniques.*

On trouvera d'ailleurs aisément que: toute courbe C de coïncidence renferme 6 points de coïncidence de I_2 (puisqu'une g_2^1 sur une courbe de genre deux a justement 6 coïncidences); par dualité tout point de coïncidence appartiendra à 6 courbes C de coïncidence.

Deux C de coïncidence se couperont en 2 points de coïncidence, et réciproquement deux points de coïncidence appartiendront à 2 courbes C de coïncidence, etc.

Ces propriétés se réflechissent en des propriétés analogues des 16 points doubles et des 16 plans tangents suivant des coniques de la surface Φ; on a ainsi les propriétés bien connues des points et des plans singuliers d'une *surface de Kummer*.

Ces propriétés trouvent leur expression la plus simple en une représentation symbolique qui a été introduite par M. Humbert, et qui est la suivante.

Considérons les deux séries de nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad \text{et} \quad 1',\ 2',\ 3',\ 4',$$

et désignons par α, β, γ, δ les nombres de la première série pris suivant un ordre quelconque, et analoguement par α', β', γ', δ' les nombres de la seconde série.

On peut représenter les 16 plans singuliers de Φ par

$$\alpha\alpha', \alpha\beta', \ldots, \beta\alpha', \beta\beta', \ldots,$$

et les 16 points doubles par

$$(\alpha\alpha'), (\alpha\beta'), \ldots, (\beta\alpha'), (\beta\beta'), \ldots,$$

de façon que

1) les six plans singuliers par les points $(\alpha\alpha')$ soient $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$, $\alpha'\delta$ etc.;

2) corrélativement les six points doubles appartenant au plan $\alpha\alpha'$ soient $(\alpha\beta'), (\alpha\gamma'), (\alpha\delta'), (\alpha'\beta), (\alpha'\gamma), (\alpha'\delta)$ etc.

Remarque. Ce même symbolisme sert à représenter la configuration des points et des courbes de coïncidence de l'involution I_2 sur F.

47. *Cas de dégénérescence.* Nous venons d'établir le théorème connu qu'on peut énoncer de la façon suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$ est birationnellement identique à une surface de Kummer du quatrième ordre, douée de 16 points doubles et de 16 plans tangents suivant des coniques, qui forment la configuration bien connue.

Il y a pourtant un cas d'exception, dans lequel la surface de Kummer Φ se réduit à une quadrique double Q, douée d'une courbe de diramation.

C'est le cas où l'on part d'une surface de Jacobi qui représente les couples de deux courbes elliptiques.

Alors les courbes C de Σ sont réductibles; chacune se compose d'une courbe elliptique C_1 et d'une courbe elliptique C_2 se coupant en un point; et C_1 et C_2 appartiennent respectivement à deux faisceaux elliptiques. Si l'on construit, comme avant, une surface Φ image de I_2, on trouve sur Φ deux faisceaux linéaires de courbes elliptiques K_1, K_2, homologues aux C_1, C_2 respectivement; une K_1 et une K_2 se coupent en 2 points. Or les ∞^2 courbes $K_1 + K_2$ seront renfermées en un système ∞^3 de courbes K de genre 3, se coupant deux à deux en 4 points; mais il est aisé de voir:

1) que les K sont des courbes hyperelliptiques, puisqu'elles sont coupées en 2 points par les courbes du faisceau $|K_1|$ ou par les courbes de $|K_2|$;

2) que par conséquent les courbes K passant par un point de Φ passent par un point conjugué, deux points étant conjugués lorsqu'ils sont communs à une K_1 et à une K_2;

3) qu'à cause de cette circonstance la surface transformée de Φ ayant comme sections planes les courbes K, se réduit à une quadrique double Q, ainsi que nous l'avons énoncé.

Quant à la courbe de diramation sur Q, on voit d'abord qu'elle est d'ordre 8, coupant les droites des deux systèmes (génératrices et directrices) de la quadrique également en 4 points.

Il y a sur F 16 points de coïncidence de I_2, et il y a 4 courbes de coïncidence C_1 et 4 C_1, qui se coupent en ces 16 points.

Or aux 4 C_1 répondent 4 droites, soit 4 génératrices de Q, aux 4 C_2 quatres directrices de la même quadrique. Eh bien, il est aisé de reconnaître que ces 8 droites forment la courbe de diramation de la surface Q, regardée comme une image double de Φ.

48. *La surface hyperelliptique* ($r=2$, $\delta=1$) *représentée sur un plan double.* La surface de Kummer peut être projetée par un de ses points doubles sur un plan; on peut la transformer ainsi en un *plan double*, c'est-à-dire en une surface de la forme

$$z^2 = f(x,y);$$

la courbe de diramation du plan doubles,

$$f = 0,$$

se compose de 6 droites tangentes à une même conique C.

En cette représentation se trouve renfermé aussi le cas particulier que nous venons de considérer; il correspond à une dégénérescence de la conique C, considérée comme enveloppe, c'est-à-dire au *cas où* $f=0$ *se compose de deux ternes de droites passant respectivement par deux points.*

49. *La surface du quatrième ordre hyperelliptique caractérisée par ses points doubles.* Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r=2$ et de diviseur $\delta=1$, peut être transformée en une surface de Kummer du 4^{me} ordre à 16 points doubles et 16 plans singuliers; fait exception le cas particulier où la surface de Kummer se réduit à une quadrique double.

Or il y a lieu de rappeler que »toute surface du quatrième ordre possédant 16 points doubles, possède aussi 16 plans tangents suivant des coniques, plans qui forment avec les 16 points la configuration de Kummer, que nous avons définie».

C'est là une conséquence immédiate de ce fait, que en projetant la surface donnée Φ par un de ses 16 points doubles sur un plan double, on a sur celui-ci une courbe de diramation douée de 15 points doubles, qui se décompose en 6 droites. En effet il suit de cette remarque que pour chacun des 16 points doubles de Φ il passe 6 plans tangents suivant des coniques, renfermant chacune 6 points doubles; et partant il y a 16 plans singuliers.

Or la configuration formée par ces plans en union aux 16 points doubles de Φ, jouit des propriétés connues de la configuration de Kummer, propriétés que l'on peut exprimer au moyen du symbolisme de M. HUMBERT, et qui découlent, de la propriété fondamentale établie, savoir que:

il y a 6 plans singuliers par chaque point double.	il y a 6 points doubles sur chaque plan singulier.

Ceci posé, considérons la série des surfaces du quatrième ordre (de Kummer) douées de 16 points doubles. Cette série est ∞^3 et elle est *irréductible*; ainsi toute surface Φ dépend exclusivement de *trois modules*.

En supposant ce point bien établi, il en résulte que toute surface Φ est une surface hyperelliptique de rang $r=2$ et de diviseur $\delta=1$.

Partant, si l'on se donne une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 points doubles, il doit être possible de construire une surface de Jacobi F dont Φ est une transformée rationnelle, et telle que les coordonnées de ses points s'expriment par celles des points de Φ à l'aide d'une racine carrée.

Nous allons montrer comment on peut effectuer cette construction. Celà signifie que nous nous proposons le problème suivant:

Etant donnée une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 points doubles et par conséquent aussi de 16 plans tangents suivant des coniques (points et plans formant la configuration de Kummer), il s'agit d'exprimer les coordonnées des points de Φ par des fonctions Θ de deux paramètres.

Ce problème peut être résolu par le procédé qui suit.

Soit

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation homogène de la surface donnée.

Considérons une forme algébrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

de degré pair $2n$, que nous allons déterminer dans la suite, et construisons dans l'espace à 4 dimensions $(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5)$ la surface F qui est définie par

$$y_1 = x_1^n, \quad y_2 = x_2^{n-1} x_1, \quad y_3 = x_3^{n-1} x_1, \quad y_4 = x_4^{n-1} x_1, \quad y_5 = \sqrt{f}.$$

Cette *surface est* représentée sur la *surface double Φ; la courbe de diramation* est donnée par $f=0$; toutefois il faut retrancher de l'intersection de $f=0$, $\Phi=0$, les parties qui comptent doubles.

Nous tâcherons de déterminer f de façon que la surface double Φ ne possède d'autres points de diramation que ses 16 points doubles, et nous montrerons qu'en ce cas la surface F est une surface hyperelliptique de rang 1 (ainsi donc, d'après nos hypothèses, une surface de Jacobi).

Il y a lieu de supposer d'abord que f ne renferme pas comme facteur une forme algébrique des x à une puissance supérieure à la première.

Ceci posé considérons l'intersection de $f = 0$, $\Phi = 0$:

1) Si parmi les composantes de cette courbes il y en a une comptée $2s$ fois, cette composante ne fait pas partie de la courbe de diramation; s'il y a une composante comptée $2s + 1$ fois, celle-ci doit être comptée comme si elle était simple.

2) Si $f = 0$ renferme un point double, O, de Φ, et si toute droite du cône tangent par O a, en O, s intersections avec $f = 0$, il arrive que le domaine du point O sur Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite de Φ, lorsque s est impair; au contraire si s est pair, ce même domaine ne constitue pas une courbe de diramation de Φ.

Cette remarque se ramène à la première en effectuant une transformation birationnelle de l'espace (x), de façon que le point O soit transformé en une courbe.

3) La surface F peut être réductible en deux parties dont chacune soit représentée simplement sur Φ. En ce cas il n'y a pas des points de diramation sur la surface double Φ.

Ceci posé, rappelons les propriétés de la configuration de Kummer appartenant à Φ. On sait qu'il y a des tétraèdres de Rosenhaim se composant de 4 plans tangents suivant des coniques, qui renferment dans leur ensemble les 16 points doubles de la surface.

On peut supposer d'avoir pris un tétraèdre de Rosenhaim comme tétraèdre fondamental pour le système des coordonnées auxquelles nous nous rapportons, soit

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

Posons

$$f = x_1 x_2 x_3 x_4$$

et considérons la surface F définie par les équations

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2 x_1, \quad y_3 = x_3 x_1, \quad y_4 = x_4 x_1, \quad y_5 = \sqrt{f}. \tag{3}$$

Comme $f = 0$ est tangent à Φ suivant les 4 coniques situées dans les plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

on voit que ces coniques ne sont pas des courbes de diramation de la surface double Φ, leurs points étant des points critiques apparents.

Au contraire $f = 0$ a en chaque point double de Φ une multiplicité 1 ou 3, et n'a aucun contact particulier avec les droites du cône tangent à Φ en ce point; ainsi donc le domaine de tout point double de Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il s'ensuit d'abord que la surface F décrite par le point (y) est irréductible.

Evaluons les genres de F.

D'abord on aura

$$p_g = P_2 = P_3 \ldots = 1;$$

c'est là une conséquence immédiate de ce qu'aux sections planes de Φ correspondent sur F des courbes de genre 5 se coupant deux à deux suivant de groupes canoniques de 8 points. Aux courbes de diramation infiniment petites constituées par les domaines des points doubles de Φ, répondrons sur la surface F, ou sur une transformée de celle-ci, des points simples ou des courbes exceptionnelles.[1]

Pour calculer le genre numérique p_a de F, nous considérerons l'invariant de ZEUTHEN-SEGRE

$$I = 12 p_a - p^{(1)} + 9$$

où (étant $P_i = 1$) le genre linéaire

$$p^{(1)} = 1.$$

La valeur de cet invairant pourra être déduite de celle qui appartient à l'invariant analogue de Φ, qui est

$$I' = 20.$$

On sait que l'invariant I' peut être évalué de la façon suivante:

Considérons un faisceau de sections planes C de la surface Φ. Elles sont de genre $\pi = 3$ et il y a $n = 4$ points-base, partant

$$I' = \delta - n - 4\pi = \delta - 16;$$

δ désigne ici le nombre des courbes C douées d'un point double, mais les sections planes C qui passent par un point double de Φ comptent deux fois dans ce nombre.

Ainsi on a

$$\delta = 2 \cdot 16 + \delta',$$

où $\delta' = 4$ est la classe de la surface, et on retrouve la valeur de I':

$$I' = 20.$$

Aux courbes C correspondent sur F des courbes K de genre $\Pi = 5$; formant

[1] Autrement ces courbes seraient des courbes canoniques proprement dites (ENRIQUES »Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche» Accad. Torino Mem. 1893, VI) tandis que F ne renferme pas de telles courbes ($P_i = 1$).

un faisceau qui a $N = 8$ points-base. On aura

$$I = \varDelta - N - 4\Pi = \varDelta - 28,$$

où $\varDelta$ désigne le nombre des courbes K de notre faisceau qui sont douées d'un point double.

Or, parmi ces courbes K, il y en a d'abord $\delta' = 4$ douées chacune de 2 points doubles, correspondant au point double de la courbe homologue C; en second lieu il y a 16 K correspondant aux C qui passent par les points doubles de Φ, et douées chacune d'un point double tombant en un point simple de F (ou d'une surface transformée de celle-ci). Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \varDelta &= 2 \cdot 4 + 16 = 24 \\ I &= -4 \qquad\qquad (= 12 p_a + 8) \\ p_a &= -1. \end{aligned}$$

On conclût que la surface F, ayant les genres

$$p_a = -1, \quad p_g = P_4 = 1,$$

est une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16).

Ainsi notre problème se trouve résolu, au moins théoriquement. En effet il est aisé d'exprimer les coordonnées des points de Φ en renversant les formules (3), ce qui se fait rationnellement; en suite il faudra construire les deux intégrales simples de première espèce u, v attachées à F; les coordonnées des points de Φ seront des fonctions hyperelliptiques de u, v.

50. *Surfaces hyperelliptiques de diviseur* $\delta > 1$. Passons maintenant aux surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$.

Toute surface Φ de cette espèce correspond à une involution I_2 sur une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

L'involution I_2 est engendrée par une transformation de 1^{re} espèce:

$$\begin{aligned} u + u' &\equiv \lambda \\ v + v' &\equiv \mu, \end{aligned}$$

par rapport aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g'. \end{matrix}$$

Par conséquent on a, comme pour $\delta = 1$, 16 points de coïncidence de I_2 qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \quad \frac{\mu + \omega_2}{2}. \qquad (\omega_1, \omega_2 \text{ périodes simultanées})$$

Or il y a sur F_δ un système ∞^2 de courbes C_δ de genre 2, douées de $\delta - 1$ points doubles, se coupant deux à deux en 2δ points. Ce système est invariant par rapport à toute involution I_2 de 1re espèce.

Aux couples de courbes C_δ conjuguées par rapport à I_2, correspondent, sur une surface Φ image de I_2, des courbes de genre 2, se coupant deux à deux en 4δ points et douées de $2\delta - 1$ points doubles. La surface Φ étant régulière, ces courbes seront renfermées dans un même système linéaire $\infty^{2\delta+1}$ de genre $2\delta + 1$ et de degré 4δ.

On peut supposer que Φ soit transformée en une surface de l'espace $S_{2\delta+1}$ de telle façon que ses sections hyperplanes soient les courbes de genre 2 que nous venons de nommer.

Alors Φ sera une surface d'ordre 4δ, dont les sections hyperplanes sont des courbes canoniques; elle aura 16 points doubles correspondant aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F_δ.

Il y aura en outre 16 hyperplans singuliers touchant Φ suivant des courbes rationnelles normales d'ordre 2δ; ces hyperplans correspondent aux 16 courbes C_δ qui sont transformées en elles-mêmes par I_2.

Les points et les hyperplans singuliers de la surface Φ en $S_{2\delta+1}$ formeront une configuration qui pourra être représentée par le même symbolisme de M. Humbert, que nous avons adopté pour la configuration de Kummer. Ce symbolisme exprime en effet les propriétés fondamentales suivantes: tout hyperplan singulier renferme 6 points doubles, deux hyperplans ont communs (outre que $\delta - 1$ points simples de la surface) deux points doubles et correlativement. A ce symbolisme on est aussi amené par la représentation paramétrique de la surface. C'est ce qu'on exprimera en disant que ces points et ces hyperplans forment une *configuration semblable* à celle de Kummer.

Ainsi nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ peut être transformée en une surface d'ordre 4δ à sections de genre $2\delta + 1$ en $S_{2\delta+1}$, surface possédant 16 points doubles et 16 hyperplans singuliers qui la touchent suivant des courbes rationnelles normales d'ordre 2δ; ces 16 points et ces 16 hyperplans singuliers forment une configuration semblable à celle de Kummer pour $\delta = 1$. C'est pourquoi on dira aussi que Φ est une *surface de Kummer généralisée*.

Remarque. Il est aisé de reconnaître que pour $\delta > 1$ la surface Φ ne dégénère pas en une surface double, même dans le cas auquel donne naissance une courbe de genre 2 réductible.

51. *La surface hyperelliptique d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$ caractérisée par ses points et ses hyperplans singuliers.* Nous venons de prouver que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ peut être transformée en une surface d'ordre 4δ de $S_{2\delta+1}$, douée de 16 points doubles et de 16 hyperplans singuliers, qui touchent la surface suivant des courbes rationnelles d'ordre 2δ formant une configuration semblable à celle de Kummer.

Il y a lieu d'établir la proposition réciproque suivante, qui est d'ailleurs analogue à celle que nous avons établie pour $\delta = 1$.

Toute surface $\Phi_{4\delta}$ d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$, douée de 16 points doubles et de 16 hyperplans singuliers formant une configuration semblable à celle de Kummer, est une surface hyperelliptique de rang 2 et de diviseur δ.

Il suffit de répéter ici la démonstration que nous avons développée pour $\delta = 1$. On construira ainsi une surface F représentée sur $\Phi_{4\delta}$ comptée deux fois, où il y aura 16 points de diramation qui tomberont en les 16 points doubles; il s'ensuivra que la surface F aura le genre géométrique $p_g = 1$ et le genre numérique $p_a = -1$. Comme il n'y aura pas d'ailleurs des courbes pluricanoniques, F sera une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16). Quant à son diviseur il est aisé de reconnaître qu'il aura la valeur δ, ou tout au moins qu'il sera $\leq \delta$.

La surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ peut être caractérisée aussi d'une autre façon remarquable. Rappelons d'abord que le système linéaire des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$ correspond à un système linéaire de F_δ auquel appartiennent les couples de courbes $C_\delta + C'_\delta$ conjuguées par rapport à l'involution I_2, système qu'on peut désigner par $|C_\delta + C'_\delta|$.

Or ce système est renfermé dans un système linéaire complet $|2C_\delta|$ qui a la dimension $4\delta - 1$.

On peut supposer que le système $|2C_\delta|$ soit découpé sur F_δ par les hyperplans d'un espace $S_{4\delta-1}$. Alors l'involution I_2 sera engendrée par une homographie de cet espace, homographie qui laisse invariant la surface F_δ.

Parmi les hyperplans de $S_{4\delta-1}$, il y en a $\infty^{2\delta+1}$ découpant sur F_δ les courbes du système $|C_\delta + C'_\delta|$; ce sont des hyperplans doubles pour notre homographie involutoire. Il y aura donc une seconde série $\infty^{2\delta-3}$ de hyperplans doubles coupant sur F_δ $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies par rapport à I_2.

Ces $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies forment un système linéaire qui a 16 points-base, tombant en les 16 points doubles de I_2.

En correspondance à ces courbes on a sur $\Phi_{4\delta}$ un système linéaire de courbes passant par les 16 points doubles de la surface, et telles que comptées deux fois appartiennent au système complet double de celui qui est découpé par les hyperplans. En se rappelant que ce système double est découpé tout entier par les quadriques de $S_{2\delta+1}$,[1] on voit que les courbes nommées ci-dessus sont

[1] Cfr. Enriques »Ricerche . . .» l. c. (§ V, 5.)

des courbes de contact de $\infty^{2\delta-3}$ quadriques passant par les 16 points doubles de la surface.

Ainsi donc:

Toute surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ *de* $S_{2\delta+1}$ $(\delta > 1)$ *possède* $\infty^{2\delta-3}$ *quadriques passant par ses 16 points doubles, qui la touchent suivant une courbe d'ordre* 4δ.

Réciproquement toute surface d'ordre 4δ *de* $S_{2\delta+1}$ *à sections de genre* $2\delta+1$, *possédant 16 points doubles et une quadrique tangente suivant une courbe d'ordre* 4δ *qui passe par ces points, est une surface hyperelliptique.*

En effet en désignant par $x_i (i = 1, 2, \dots 2\delta + 2)$ les coordonnées homogènes des points de la surface, et étant $f(x_i) = 0$ l'équation de la quadrique considérée, on voit que la surface

$$y_i = x_i, \quad y_{2\delta+3} = \sqrt{f}$$

est une surface hyperelliptique de rang 1

$$(p_a = -1, \; p_g = P_4 = 1).$$

Maintenant une question se pose: l'existence de quadriques tangentes qui passent par les 16 points doubles de la surface $\Phi_{4\delta}$, ne serait-elle une conséquence de ce que la surface possède 16 points doubles?

S'il en est ainsi les surfaces hyperelliptiques $\Phi_{4\delta} (p_a = p_g = P_2 = 1)$ seraient caractérisées tout simplement par la propriété d'avoir 16 points doubles, ainsi que celà arrive pour $\delta = 1$.

Nous croyons qu'on doit répondre par l'affirmative à la demande posée dessus. Cependant pour établir ce beau théorème, il faudrait pouvoir calculer en général le nombre des modules dont dépendent les différentes familles de surfaces de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, familles qui se distinguent d'après la valeur d'un entier.[1]

Or c'est là une question délicate qui demeure en suspens.

Partant nous nous bornerons à remarquer que:

Toute surface d'ordre 8 de S_5, *ayant les sections hyperplanes de genre 5, et possédant 16 points doubles, est une surface hyperelliptique.*

C'est ce qui découle d'un compte de modules, qui se fait ici d'une façon immédiate. En effet les surfaces d'ordre 8 dont il est question, sont chacune intersection complète de trois quadriques, c'est-à-dire surfaces-base d'un réseau; un tel réseau dépend de 19 invariants (modules de la surface-base); 16 points doubles entraînent autant de conditions, ce qui réduit à 3 le nombre des modules.

52. *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre* $(\delta > 1)$. Les surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ ont été l'objet de plusieurs

[1] Cfr. Enriques »Ricerche ...« l. c. (§ III, 6.)

Notes et d'un Mémoire de M. TRAYNARD,[1] qui en se plaçant dans les premiers cas $\delta = 2, 3, 4$, a étudié notamment les surfaces d'ordre 4 que l'on obtient par projection des surfaces $\Phi_{4\delta}$ considérées ci-dessus.

D'autres remarques concernant ces mêmes surfaces ont été faites par M. REMY,[2] qui en particulier a rencontré toute une série dénombrable de surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$, se ramenant à des surfaces d'ordre 4 douées de 15 points doubles.

A notre point de vue la question de déterminer les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre (de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$), peut être traitée de la façon suivante.

Il s'agit de déterminer les types projectivement distincts de surfaces du quatrième ordre, qui résultent d'une transformation birationnelle, en partant d'une surface donnée $\Phi_{4\delta}$.

Or le système linéaire transformant pourra être découpé sur $\Phi_{4\delta}$ par des variétés d'un certain ordre y, se comportant dans les 16 points doubles de la surface comme si ceux-ci étaient des points multiples d'ordre $x_i (i = 1, \ldots 16)$. La dimension d'un tel système est

$$2\delta y^2 + 1 - \sum_{i=1}^{16} x^2_i,$$

et son degré est

$$4\delta y^2 - 2\sum x^2_i;$$

en égalant ce degré à 4, ou la dimension à 3, on tombe sur l'équation arithmétique

$$2\delta y^2 - \sum x^2_i = 2.$$

On peut avoir aussi d'autres surfaces du quatrième ordre transformées de $\Phi_{4\delta}$, qui ne sont pas obtenues par un système transformant multiple du système des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$, tel que le système que nous venons de considérer.

En tous cas, en rappelant le théorème du n. 27 concernant les surfaces de Picard, il est aisé de reconnaître que, si les modules sont arbitraires, le système découpé sur la surface du quatrième ordre par les quadriques, sera représenté sur $\Phi_{4\delta}$ par un système découpé par des variétés ayant dans les points doubles une certaine multiplicité, et n'ayant d'ailleurs des courbes-base.

Ainsi donc on tombe sur la discussion arithmétique de l'équation

$$2\delta y^2 - \sum_{i=1}^{16} x^2_i = 8.$$

[1] Comptes rendus: 1904, I p. 339, II p. 718: 1905, I p. 218, 931. Annales de l'École normale 1907, pg. 77.

[2] Comptes rendus: 1906, I p. 768, II p. 767. Bulletin de la Soc. Math. de France: 1907, p. 53.

La question de déterminer toutes les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de diviseur $\delta > 1$, dans le cas de modules arbitraires, se ramène à la discussion de cette équation de Pell généralisée. Il faut néanmoins tenir compte de certaines inégalités qui expriment l'irréductibilité du système transformant considéré, et qui, dans un cas particulier, ont été étudiées de près par M. Remy.

53. *Quelques remarques au sujet du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique.* Soit une famille de surfaces algébriques dépendant de trois modules; si ces surfaces sont hyperelliptiques de rang $r > 1$, elles seront des surfaces régulières de rang $r = 2$, birationnellement identiques à des surfaces de Kummer généralisées, c'est-à-dire, à des $\Phi_{4\delta}$ pour une valeur convenable de δ.

Ainsi donc *la question de reconnaître si une surface donnée (dépendant de trois modules) est hyperelliptique de rang $r > 1$, se ramène à celle de reconnaître l'identité birationnelle de notre surface avec un type de surfaces, qui vient caractérisé à un point de vue invariant par l'existence d'un certain groupe de courbes* (le groupe qui correspond à celui des points doubles et des courbes de contact des hyperplans singuliers de $\Phi_{4\delta}$).

Partant, après avoir reconnu que les genres de la surface donnée sont tous égaux à $1 (p_a = p_g = P_2 = 1)$, il s'agira d'exprimer que la surface renferme un certain groupe de courbes rationnelles (de degré -2).

Or d'après un théorème de M. Severi, qu'il a récemment complété, toutes les courbes appartenant à une surface régulière, peuvent être obtenues par addition et soustraction en partant d'un nombre fini de systèmes linéaires. Par ce procédé *la question posée se ramène à la discussion arithmétique d'un système d'équations quadratiques.*

Ces remarques suffisent à montrer quel est en général le caractère du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique de rang $r > 1$. On serait amené toujours à des discussions analogues, dans le cas de surfaces régulières correspondant à des Θ dont les modules satisfont à des relations particulières.

Lorsqu'il s'agit de surfaces irrégulières, la question devient beaucoup plus simple et, comme nous aurons lieu de le montrer, on arrive à définir les surfaces hyperelliptiques irregulières par les valeurs de certains caractères invariants.

VI. Surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$.

54. D'après les nn. 31, 36 toute surface hyperelliptique irrégulière de rang $r > 1$, est une surface elliptique de genres

$$p_g = 0, \quad p_a = -1$$

renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

Le théorème fondamental que nous avons établi au n. 44, permet de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, et cette analyse, en laquelle nous avons été précedés par MM. Bagnera et de Franchis, amène à trouver toutes les surfaces elliptiques renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

De notre côté, et d'une façon indépendante de ces recherches, nous avons établi la classification des surfaces hyperelliptiques irrégulières en tâchant de démontrer directement la réciproque de la proposition du n. 36; il s'ensuit que les surfaces hyperelliptiques irrégulières correspondent aux valeurs

$$r = 2, 3, 4, 6$$

du rang r, et qu'elles peuvent être définies d'après les valeurs de leurs plurigenres.

On a ainsi le théorème fondamental suivant.

Toute surface de genre arithmétique $p_a = -1$ et dont le genre et les plurigenres géométriques ont les valeurs 0, 1, est une surface hyperelliptique. Le tableau des familles différentes correspondantes à ces hypothèses, se trouvera indiqué en détail au n. 57.

55. *Rappel de quelques notions concernant les surfaces elliptiques.* Il faut rappeler d'abord quelques propriétés des surfaces elliptiques de genre $p_g = 0$.[1]

Il y a sur toute surface de cette famille un faisceau elliptique de courbes C de genre $\pi > 0$, et un faisceau rationnel de courbes elliptiques K; une courbe C et une courbe K se coupent en un certain nombre n de points, et ce nombre vient appelé le *déterminant* de la surface. Nous considérerons en particulier le cas $\pi = 1$, qui nous interesse ici.

Toute surface elliptique de genre $p_g = 0$ et de déterminant n, peut être représentée sur un cylindre elliptique, multiple suivant le nombre n,

$$\varphi(x, y) = 0;$$

[1] Cfr. Enriques, Rendiconti del circolo mat. di Palermo, 1905.

il y aura sur φ une courbe de diramation formée par les courbes

$$z = a_1, \ z = a_2, \dots \ z = a_t,$$

à compter respectivement suivant les ordres

$$s_1, \ s_2, \dots \ s_t.$$

Si la surface elliptique doit renfermer un faisceau elliptique de courbes C de genre 1, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{s_i - 1}{s_i} = 2,$$

et par suite l'on tombera nécessairement sur un des cas suivants:

a) $$t = 4, \ s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2, \ n = 2\delta$$

(δ étant un entier *à priori* quelconque).

La surface ainsi définie dépend de *deux modules* c'est-à-dire du module de φ et du rapport anharmonique $(a_1 a_2 a_3 a_4)$. Les valeurs de ses genres et de ses plurigenres sont données par la formule de Enriques (l. c. § 8):

$$P_m = 1 + m(t-2) - \sum_{i=1}^{t} \varrho_i,$$

où ϱ_i est un entier satisfaisant aux conditions

$$\frac{m}{s_i} \leq \varrho_i < \frac{m}{s_i} + 1$$

et où l'on prend $P_m = 0$ lorsque le second membre de la formule résulte négatif. On obtient ainsi

$$p_a = -1, \ P_{2i+1} = 0, \ P_{2i} = 1.$$

Réciproquement ces valeurs suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même de savoir que

$$p_a = -1, \ p_g = 0, \ P_2 = P_4 = 1.$$

En effet étant $p_a = -1$, $p_g = 0$, on a une surface elliptique dont les plurigenres peuvent être calculés d'après la formule citée d'Enriques. Or si $P_2 = t - 3 = 1$, il suit $t = 4$; et si $P_4 = 1$, étant $s_i \geq 2$, il suit

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2.$$

b) $$t = 3, \ s_1 = s_2 = s_3 = 3, \ n = 3\delta.$$

La surface ainsi définie dépend d'un module, c'est-à-dire du module de φ (les courbes C sont en ce cas équianharmoniques).

On a

$$p_a = -1, \; P_{3i+1} = P_{3i+2} = 0, \; P_{3i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces dont il est question. Il suffit même que l'on ait

$$p_a = -1, \; P_3 = 1, \; P_8 = 0,$$

car d'après la formule habituelle on en déduit $t = s_1 = s_2 = s_3 = 3$.

c) $$t = 3, \; s_1 = 2, \; s_2 = s_3 = 4, \; n = 4\delta.$$

La surface ainsi définie — renfermant un faisceau de courbes harmoniques C — dépend d'un module. On a

$$p_a = -1, \; P_{4i+1} = P_{4i+2} = P_{4i+3} = 0, \; P_{4i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il est question. Il suffit même que l'on ait

$$p_a = -1, \; P_6 = P_{10} = 0, \; P_4 = 1.$$

d) $$t = 3, \; s_1 = 2, \; s_2 = 3, \; s_3 = 6, \; n = 6\delta.$$

La surface ainsi définie — renfermant comme dans le cas b) un faisceau de courbes équianharmoniques — dépend aussi d'un module. On a

$$p_a = -1, \; P_{6i+1} = P_{6i+2} = \cdots = P_{6i+5} = 0, \; P_{6i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants caracterisent les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même que l'on ait:

$$p_a = -1, \; P_2 = P_3 = P_{14} = 0, \; P_6 = 1.$$

Dans ce cas la discussion relative est peut-être moins simple et par suite nous l'exposons ici brièvement.

Étant $P_2 = 0$ et par suite $p_g = 0$, il s'agit d'une surface elliptique. La relation $P_2 = 0$ amène $t = 3$, tandis que la relation $P_6 = 1$ donne

$$\alpha) \qquad s_i \geq 3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ou

$$\beta) \qquad s_1 = 2, \; s_2 \geq 3, \; s_3 \geq 6.$$

Ceci posé, remarquons que $P_4 = 0$, car s'il était $P_4 > 0$, étant $P_6 = 1$, on aurait $P_2 = 1$. La relation $P_4 = 0$ jointe aux α) β), donne respectivement.

$$\alpha') \quad s_1 = s_2 = s_3 = 3, \text{ ou } \alpha'') \quad s_1 = s_2 = 3, \ s_3 \geq 4,$$
$$\beta') \quad s_1 = 2, \ s_2 = 3, \ s_3 \geq 6.$$

Comme les valeurs α') α'') donnent $P_3 = 1$, la relation $P_3 = 0$ rend possible seulement l'hypothèse β'). Enfin la relation $P_{14} = 0$ nous montre qu'il doit être $s_3 = 6$.

56. *Construction d'une surface de Picard représentée sur une surface elliptique multiple renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.* Soit $\Phi(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface elliptique d'ordre m — douée de singularités ordinaires — appartenant à un des types a) b) c) d) envisagés au n. préc., et soit $X(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface r-adjointe d'ordre $r(m-4)$ attachée à Φ, où $r (= 2, 3, 4, 6)$ est l'indice du premier plurigenre différent de zéro.

Envisageons la surface F représentée par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ u^r = X(x, y, z), \end{cases}$$

x, y, z, u étant les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions. Nous prouverons que les courbes coupées sur F par les hyperplans parallèles à la droite u, sont des courbes *irréductibles* se coupant deux à deux suivant des groupes *canoniques*.

Ce résultat étant établi, on aura à considérer une correspondance $(1, r)$ entre les surfaces irréductibles Φ, F; dans cette correspondance il n'y a pas de points de coïncidence, car la $X = 0$ ne coupe la $\Phi = 0$ hors de la ligne double de Φ, et par suite sur la surface le radical $\sqrt[r]{X(x, y, z)}$ ne présente aucun point de *diramation effective.* D'après une formule de M. Severi [1] on pourra pourtant calculer le genre numérique p_a de F; on trouve ainsi $p_a = -1$. Comme la F vient renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre zéro — transformées des courbes pluricanoniques de Φ — elle sera ou bien une surface elliptique de genre $p_g = 0$, ou bien une surface ayant les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$ et la courbe canonique d'ordre zéro. La première hypothèse s'écarte tout de suite en se rappelant que F renferme un système linéaire dont la série caractéristique est canonique; on en déduit que F est une surface hyperelliptique de rang 1, c'est-à-dire une surface de Picard (ou de Jacobi).

[1] Rendiconti del R. Ist. Lombardo, (2), t. 36, 1903.

D'après la définition du rang, r désignera le rang de la surface hyperelliptique Φ.

Il s'agit maintenant d'établir que les sections hyperplanes de F, sont irréductibles, et de déterminer leurs mutuelles intersections. Soit $z = z_0$ un hyperplan parallèle à la droite u et envisageons la courbe gauche Γ, qui est représentée par les équations:

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi(x, y, z_0) = 0, \\ u^r = X(x, y, z_0).\end{array}\right. \tag{2}$$

Considérons le faisceau $|\Gamma|$ coupé sur le cylindre $\Phi(x, y, z_0) = 0$ par le faisceau de surfaces

$$u^r = \lambda X(x, y, z_0).$$

Pour $\lambda = 0$ on obtient la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$, que nous désignerons par C, à compter r fois, et les génératrices à l'infini du cylindre, formant un groupe que nous désignerons par I, dont chacune doit être comptée $r(m-5)$ fois. Pour $\lambda = \infty$ on obtient le groupe H formé par les couples de génératrices qui coïncident avec les génératrices doubles du cylindre, dont chacune doit être comptée r fois. On en tire que les courbes

$$rC + r(m-5)I,\ rH \tag{3}$$

appartiennent totalement au faisceau $|\Gamma|$. Comme ces courbes n'ont pas des parties communes, si le faisceau $|\Gamma|$ est réductible, en vertu d'une proposition connue de MM. Noether et Enriques, toute courbe Γ sera composée par un certain nombre $h > 1$ de parties irréductibles Δ, formant une involution d'ordre h dans un faisceau $|\Delta|$; celui-ci sera linéaire puisque sur le cylindre on n'a pas des faisceaux irrationnels différents du faisceau des génératrices. Les courbes (3) donneront des éléments multiples de cette involution. Il s'ensuit que r est égal à un multiple hl de h $(r = hl,\ r > l)$, et que les courbes $lC + l(m-5)I$, lH sont des courbes Δ.

Pourtant les groupes coupés par ces courbes sur une section plane C_1 du cylindre seront équivalents. Or la courbe $lC + l(m-5)I$ coupe sur une C_1 un groupe équivalent à la section sur C_1 d'une courbe d'ordre $l(m-4)$, et la courbe lH rencontre C_1 suivant les $2d$ couples coïncidant dans les d points doubles de C_1, à compter chacune l fois. On en tire aisément que le multiple d'ordre l du groupe coupé par une droite sur une section plane de notre surface Φ, est équivalent à un groupe l-canonique.

Cette conclusion est absurde, car le plurigenre P_l de Φ résulterait > 0, tandis qu'on a supposé que P_r soit le premier plurigenre non nul. Partant $h = 1$ et les courbes (2) sont irréductibles.

Il nous reste à montrer que les plans parallèles à la droite u coupent sur la courbe Γ des groupes canoniques. La courbe Γ étant l'intersection complète d'une surface d'ordre m, $\Phi(x, y, z_0) = 0$, et d'une surface d'ordre $r(m-4)$, $u^r = X(x, y, z_0)$, on pourra couper sur Γ la série canonique au moyen des surfaces — adjointes à Γ — d'ordre $(r+1)(m-4)$ ayant la multiplicité $s_1 + s_2 - 2$ en tout point s_1-ple pour $\Phi = 0$ et s_2-ple pour $u^r = X$ (Noether).

Pour plus de clarté nous développerons le raisonnement dans le cas de $r = 2$.

Comme dans le sommet O_∞ du cylindre on a $s_1 = m$, $s_2 = 2m - 10$, les surfaces d'ordre $3(m-4)$ adjointes à Γ, auront en O_∞ un point multiple d'ordre $3(m-4)$ et par suite elles seront des cylindres ayant le sommet O_∞. A tout point double de la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$ correspond un point P quadruple par rapport à Γ: deux branches de Γ étant tracées sur une nappe du cylindre et deux branches sur l'autre. On en tire que les cylindres adjoints à Γ doivent passer doublement par tout point P, c'est-à-dire qu'ils doivent être des cylindres biadjoints au cylindre Φ.

Il est maintenant nécessaire de bien fixer le comportement de ces cylindres en O_∞. La courbe Γ passe par ce point avec la multiplicité $2m(m-5)$ et y possède m tangentes distinctes, qui sont les génératrices à l'infini du cylindre Φ. On voit aisément qu'en correspondance de chacune de ces tangentes, Γ possède un point $2(m-5)$-ple et $m-5$ points doubles successifs, qui tombent en des points doubles de la surface $u^r = X$. On en tire que les cylindres adjoints à Γ passent simplement par chacun de ces points, c'est-à-dire qu'en correspondance de chacune des m tangentes ils ont avec Γ la multiplicité d'intersection $2(m-5)(3m-11)$.

Or les conditions définissant un cylindre adjoint à Γ, sont satisfaites en prenant le cylindre formé par $X = 0$, par le plan à l'infini compté $m-5$ fois et par un plan passant par O_∞; on en conclut que ce plan coupe sur Γ un groupe canonique.

Lorsque r prend une quelconque des valeurs restant (3, 4, 6) on voit analoguement qu'une surface d'ordre $(r+1)(m-4)$ adjointe à Γ, est formée par le cylindre $X = 0$, augmenté du plan à l'infini compté $m-5$ fois et d'un plan arbitraire passant par O_∞; et l'on arrive en conséquence à la même conclusion que ci-dessus.

En nous résumant et en rappelant que les surfaces hyperelliptiques de rang

1 sont caracterisées par les valeurs $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ des invariants (n. 16), on peut énoncer le théorème suivant:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface irrégulière Φ soit hyperelliptique, peuvent être exprimées en disant que la surface a le genre numérique $p_a = -1$ et que ses plurigenres P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ prennent les valeurs $0, 1$.

En désignant par r le rang de Φ, on a $r = 1, 2, 3, 4, 6$, et ces différents cas sont caractérisés par les valeurs suivantes des genres et des plurigenres:

$$p_a = -1 \left\{ \begin{array}{l} r = 1,\ p_g = P_4 = 1 \\ r = 2,\ p_g = 0,\ P_2 = P_4 = 1 \\ r = 3,\ P_8 = 0,\ P_3 = 1 \\ r = 4,\ P_6 = P_{10} = 0,\ P_4 = 1 \\ r = 6,\ P_2 = P_3 = P_{14} = 0,\ P_6 = 1. \end{array} \right.$$ [1]

57. *Détermination de la valeur du diviseur δ appartenant aux surfaces hyperelliptiques irrégulières. — Types des substitutions linéaires sur u, v qui correspondent à ces surfaces.* — En nous appuyant sur le théorème établi au n. préc. nous pouvons déterminer aisément toutes les classes distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, ce qui revient à calculer les valeurs qu'on peut donner à leur diviseur δ. On retrouvera ainsi sous une autre forme, les résultats d'une classification établie directement par MM. BAGNERA et DE FRANCHIS.[2]

Désignons par δ le diviseur de la surface hyperelliptique F de rang 1, représentée, d'après le n. préc. sur la surface r-ple Φ, de rang r. Aux deux faisceaux de courbes elliptiques de Φ, correspondent sur F deux faisceaux de courbes elliptiques, c'est-à-dire qu'il y a deux intégrales *elliptiques* u, v attachées à F.

Les groupes de r points de F correspondant aux points de Φ, ne peuvent pas être ramenés en eux-mêmes par une transformation de 2me espèce de la surface, car autrement on pourrait construire une autre surface F' de rang 1 représentée sur la surface r'-ple Φ (r' étant un diviseur de r), et cela de façon qu'il n'y ait pas sur Φ des points de diramation, de sorte que le plurigenre $P_{r'}$ de Φ, aurait la valeur $P_{r'} = 1$, tandis que P_r est le premier plurigenre non nul.

On en tire que l'involution I_r image de Φ, est engendrée sur F par un groupe G_r de transformations birationnelles de F en elle-même (n. 44), et que le diviseur de Φ est égal au diviseur δ de F.

Les transformations de G_r seront représentées par des substitutions de la forme

---

[1] Nous avons déjà publié ce résultat dans les Atti della R. Acc. dei Lincei (séance du 5 janvier 1908).

[2] Atti della R. Acc. dei Lincei, 21 Avril 1907; nº 5.

$$(4) \qquad u' = u + k, \quad v' = \mu v, \quad (\mu = -1, \; e^{\frac{2\pi i}{3}}, \; e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \; i),$$

$u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, étant les faisceaux elliptiques de F qui correspondent respectivement au faisceau elliptique et au faisceau rationnel de Φ. Il s'ensuit que G_r est un groupe cyclique (et l'on retrouve ainsi que $r = 2, 3, 4, 6$).

Quant à la constante k, elle devra être déterminée de façon que rk, et non $r'k$ $(r' < r)$, soit une période de l'intégrale elliptique u; autrement G_r renfermerait une transformation non identique

$$u' = u, \quad v' = \mu v$$

et il y aurait la courbe de coïncidence $v(\mu - 1) = 0$, c'est-à-dire que I_r serait représentée par une réglée.

Ceci posé examinons les différents cas correspondants aux valeurs de r.

Premier cas: $r = 2$. Le groupe G_r est engendré par la substitution

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{2}, \quad v' = -v$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a par suite sur F la transformation birationnelle

$$T) \quad u' = u, \quad v' = -v$$

qui possède une courbe de coïncidence $(v = 0)$. Pourtant sur toute courbe $u =$ const., la T donne une série linéaire g_2^1 douée de 4 coïncidences. Comme la courbe de coïncidence de la T est composée par un certain nombre y de courbes $v = \text{const.}$ — parmi lesquelles la $v = 0$ — en désignant par x le nombre des intersections de deux courbes $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$, nous aurons nécessairement

$$xy = 4$$

et par suite

$$x = 1, \; y = 4; \quad x = 2, \; y = 2; \quad x = 4, \; y = 1.$$

a) $x = 1$, $y = 4$. La surface F est alors la surface de Jacobi qui correspond à une courbe de genre deux décomposée en deux courbes elliptiques, et par conséquent on a le tableau des périodes

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & g'. \end{array}$$

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{2}, \quad v' = -v$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r=2$, $\delta=1$.

b) $x=y=2$. On a sur F deux faisceaux dont les courbes se coupent en deux points. Démontrons que la F a le diviseur 2. Soit en effet

$$\begin{array}{c|cccc} u & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ v & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array}$$

le tableau des périodes normales des intégrales u, v, les indices 1, 3 et 2, 4 étant associés.

L'involution J_2 engendrée sur F en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux, sera représentée par une substitution de 2[me] espèce de la forme

$$u' = u + \frac{\omega_1}{2}, \quad v' = v + \frac{\theta_1}{2},$$

car le premier couple $(\omega_1\,\theta_1)$ des périodes normales peut être choisi arbitrairement. Comme J_2 est identique à une surface de diviseur 1 — la surface des couples de points de deux courbes elliptiques — on pourra conclure que le tableau

$$\begin{array}{cccc} \frac{\omega_1}{2} & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \\ \frac{\theta_1}{2} & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array}$$

doit se rapporter à une surface de diviseur 1, et par suite que

$$\frac{\omega_1}{2}\theta_3 - \omega_3\frac{\theta_1}{2} + \omega_2\theta_4 - \omega_4\theta_2 = 0.$$

Cette relation montre que notre surface F a le diviseur $\delta=2$.

De la forme des périodes de la surface de Jacobi représentant J_2, on tire que les périodes normales de u, v, sur la surface F, au moyen d'une substitution linéaire sur u, v, peuvent se réduire à la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{2} & g'. \end{array}$$

On voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = -v$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique Φ de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 2$.

c) $x = 4$, $y = 1$. Sur la surface F qui se rapporte à ce cas, considérons l'involution J_4 qu'on obtient en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux $u =$ const., $v =$ const.; cette involution peut aussi être engendrée par un groupe Γ_4 de transformations de 2^{me} espèce qui ramènent en elle-même la courbe de coïncidence de la transformation T et par suite la transformation T elle-même.

En multipliant T par les transformations de Γ_4 on engendre un groupe Γ_8 formé par des transformations permutables involutoires.

En substituant à T la transformation S, dépourvue de coïncidences, nous obtiendrons un groupe Δ_8 en isomorphisme oloédrique avec Γ_8. Sur la courbe $v = 0$ qui reste invariant vis-à-vis des transformations de Δ_8, ce groupe donne lieu à un groupe Δ'_8 engendrant une involution elliptique γ^1_8. Comme Δ'_8 est isomorphe à Δ_8, Δ'_8 renfermera 7 transformations involutoires de 2^{me} espèce sur $v = 0$, tandis que sur une courbe elliptique on ne trouve que 3 de telles transformations. — On en conclut que le cas c) est impossible.[1]

Deuxième cas: $r = 3$. Le groupe G_3 est donné par

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{3}, \quad v' = \varepsilon v \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a la transformation

$$T) \quad u' = u, \quad v' = \varepsilon v,$$

possédant une courbe de coïncidence, dont fait partie la $v = 0$. Sur toute courbe $u =$ const., T donne une série g^1_3, douée de 3 points triples. En désignant par y le nombre des courbes $v =$ const. qui forment la courbe de coïncidence de T, et par x le nombre des points communs à $u =$ const., $v =$ const., on a par suite

[1] On peut construire aisément des surfaces pour lesquelles $x = 4$, $y = 1$ et qui renferment des groupes du type Γ_8; telle est p. ex. la surface de Jacobi correspondant au tableau $\begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{Bmatrix}$. Mais sur cette surface on n'a pas des transformations involutoires sans coïncidences du type

$$u' = u + \text{const.}, \quad v' = -v.$$

$$xy = 3$$

d'où

$$x = 1, \quad y = 3; \quad x = 3, \quad y = 1.$$

d) $x = 1$, $y = 3$. Le faisceau $v = \text{const.}$ sera équianharmonique et l'on aura le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & \varepsilon. \end{array}$$

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{3}, \quad v' = \varepsilon v$$

engendre sur F une involution I_3 identique à une surface elliptique pour laquelle $r = 3$, $\delta = 1$.

e) $x = 3$, $y = 1$. Comme dans le cas b), on voit que le tableau des périodes relatives à F, se réduit au diviseur 1 en ajoutant la troisième partie d'une période, et l'on en tire que F a le diviseur 3. On voit aussi comme en b) que le tableau correspondant à F peut être mis sous la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3}, \end{array}$$

et par suite que F possède la transformation

$$u' = u + \frac{1}{9}, \quad v' = \varepsilon v,$$

qui engendre une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = \delta = 3$.

Troisième cas: $r = 4$. Le groupe G_4 est donné par

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{4}, \quad v' = iv;$$

la transformation

$$T) \quad u' = u, \quad v' = iv$$

donne sur toute courbe $u = \text{const.}$ une g_4^1 douée de 2 points 4-ples et de 2 points doubles. Les deux points 4-ples peuvent varier en $y \geq 1$ courbes $v = \text{const.}$; on a la condition

$$xy = 2$$

et par suite

$$x = 1, \quad y = 2; \quad x = 2, \quad y = 1.$$

f) $x = 1$, $y = 2$. On a le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & i. \end{array}$$

La substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = i\,v$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4$, $\delta = 1$.

g) $x = 2$, $y = 1$. On tombe sur une surface du type b) correspondant au tableau:

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ & & & & \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{2} & g'. \end{array}$$

Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être harmonique, on peut poser $g' = \frac{i+1}{2}$, et alors on voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{8}, \quad v' = i\,v$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4$, $\delta = 2$.

Qautrième cas: $r = 6$. En suivant la marche habituelle on trouve sur les courbes $u = \text{const.}$ une g_6^1 douée d'un point 6-ple, de deux points 3-ples et de trois points doubles. Le point 6-ple décrit la courbe $v = 0$, qui, par conséquent, vient couper toute courbe $u = \text{const.}$ en un seul point. Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être équianharmonique, on aura le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{array}$$

et la substitution $u' = u + \frac{1}{6}$, $v' = -\varepsilon v$ engendrera sur F une involution représentée par une surface elliptique pour laquelle $r = 6$, $\delta = 1$.

En résumant, on peut former le tableau suivant qui donne *les valeurs du rang r, du diviseur δ et du déterminant $n (= r\delta)$ ainsi que les périodes et les substitutions linéaires sur u, v, qui correspondent aux surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$.*

r	δ	n	Périodes	Substitutions sur u, v
2	1	2	$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g' \end{Vmatrix}$	$u' = u + \frac{1}{2}, \quad v' = -v$
2	2	4	$\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{Vmatrix}$	$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = -v$
3	1	3	$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{Vmatrix}$	$u' = u + \frac{1}{3}, \quad v' = \varepsilon v$
3	3	9	$\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3} \end{Vmatrix}$	$u' = u + \frac{1}{9}, \quad v' = \varepsilon v$
4	1	4	$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{Vmatrix}$	$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = i v$
4	2	8	$\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1+i}{2} \end{Vmatrix}$	$u' = u + \frac{1}{8}, \quad v' = i v$
6	1	6	$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{Vmatrix}$	$u' = u + \frac{1}{6}, \quad v' = -\varepsilon v$

VII. Surfaces hyperelliptiques admettant une représentation paramétrique propre par des fonctions Θ irréductibles.

58. — *Quelques remarques au sujet des surfaces admettant une représentation paramétrique par des fonctions hyperelliptiques irréductibles.* — Nous avons reconnu d'abord que les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ se réduisent, pour des valeurs arbitraires des modules, aux surfaces régulières de rang 2 (surface de Kummer et ses généralisations pour $\delta > 1$).

Pour des valeurs particulières des modules, il se présente d'autres surfaces hyperelliptiques correspondant à des surfaces de Jacobi (ou de Picard) qui admettent des transformations birationnelles en elles-mêmes outre que les transformations ordinaires de 1[re] et de 2[me] espèce.

Le problème général de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, peut être traité en procédant de la façon suivante:

On déterminera d'abord toutes les surfaces de rang 1 admettant des transformations birationnelles en elles-mêmes; à tout groupe fini de transformations correspond une involution qui en est engendrée; celles parmi ces involutions qui ne sont pas rationnelles ou représentée par des réglées, nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dont le rang est égal à l'ordre du groupe.

Or il y a lieu à distinguer deux cas:

1) celui où il s'agit d'involutions appartenant à une surface de Jacobi associée à une courbe de genre 2 *irréductible;*

2) le cas où il s'agit d'involutions sur une surface de Jacobi associée à une courbe *réductible.*

Étant donnée une surface hyperelliptique de rang r, correspondante à une involution du type (1), on dira que la *représentation paramétrique* de la surface est obtenue *par des fonctions hyperelliptiques de rang r irréductibles.* En ce cas il est impossible de remplacer les fonctions hyperelliptiques de u, v, qui fournissent notre représentation, par des fonctions elliptiques $p_1(au+bv)$, $p_2(cu+dv)$, lorsque, bien entendu, on construit la surface de rang 1, F, correspondante à Φ, au moyen des *périodes primitives* des fonctions qui donnent la représentation de Φ (voir le n. 12).

Lorsqu'on envisage la périodicité par rapport à un tableau non primitif, la représentation de Φ peut devenir réductible. Il y a lieu d'éclaircir cette remarque par un exemple. Considérons les deux tableaux

$$\alpha)\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{matrix}\right. \qquad \beta)\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 2g & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2g' \end{matrix}\right. .$$

D'après la remarque du n. 12, la surface de Jacobi F correspondant à α) représente une involution sur la surface de Jacobi F' correspondant à β); et tandis que F est associée à une courbe de genre 2 irréductible, F' est associée à une courbe réductible. Pourtant une surface hyperelliptique Φ qui admet une représentation irréductible (de rang r) par rapport à α), admet aussi une représentation réductible (de rang $4r$) par rapport à β).

Dans la suite nous nous rapporterons au cas (1), *en supposant aussi pour simplicité,* $\delta = 1$.

En se rappelant le résultat établi tout à l'heure pour les surfaces hyperelliptique irrégulières, on voit que les types ayant $\delta = 1$ amènent à des représentations réductibles.

Suivant notre programme il s'agira de classifier les surfaces de Jacobi (associées à des courbes irréductibles) qui admettent des transformations non ordinaires en elles-mêmes. Et on pourra laisser de côté les transformations cycliques de la forme:

$$u' = u + k, \quad v' = \mu v,$$

parce que celles-ci amènent à des surfaces hyperelliptiques irrégulières où à des involutions sur de telles surfaces, et, lorsque $\delta = 1$, elles correspondent à des cas de réductibilité de la représentation paramétrique.

En d'autres termes *nous aurons à étudier les groupes appartenant à une surface de Jacobi attachée à une courbe de genre 2 irréductible et ne renfermant pas des transformations sans points unis.*[1]

Remarque. — Les involutions régulières engendrées sur une surface de rang 1 par des groupes renfermant des transformations singulières sans points unis, restent partant exclues de notre étude. Elles amènent à des surfaces régulières de genre $p_g = 0$ et de bigenre $P_2 = 1$, qui ont été objet des recherches de MM. Bagnera et De Franchis.[2]

59. *Transformations d'une surface de Jacobi en elle-même: transformations de* Hermite *et de* M. Humbert. — Soit F une surface de Jacobi correspondante au tableau de périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

L'analyse des cas où il y a des transformations birationnelles non ordinaires de F en elle-même, nous ramène à considérer les relations fondamentales (A), (B), (C), (D), du n. 45, savoir

$$\text{(A)} \quad g^2 a_3 + g h (a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g (a_0 - d_3) + h (b_0 - d_2) - d_0 = 0$$

$$\text{(B)} \quad g h a_3 + g g' a_2 + h^2 b_3 + h g' b_2 + g a_1 + h (b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0$$

$$\text{(C)} \quad g h a_3 + g g' b_3 + h^2 a_2 + h g' b_2 - g c_3 + h (a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0$$

$$\text{(D)} \quad h^2 a_3 + h g' (a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h (a_1 - c_3) + g' (b_1 - c_2) - c_1 = 0.$$

[1] Que »toute transformation cyclique sans points unis se ramène à la forme $u' = u + k$, $v' = \mu v$» c'est une conséquence immédiate du théorème de M. Hamburger sur les substitutions linéaires homogènes; il suffit de se rapporter au cas où l'équation caractéristique a la racine 1.

[2] Rendiconti dei Lincei, 21 avril 1907, n° 6; Comptes rendus, 4 novembre 1907.

Nous avons dit que ces relations se réduisent à des identités pour des valeurs arbitraires de g, h, g', et on tombe alors sur les transformations ordinaires de F.

Si les relations (A), (B), (C), (D) ne sont pas des identités, on dira que les périodes g, h, g' sont liées par des *relations entières*, qui doivent se réduire au plus à *trois* distinctes.

Une relation entière peut se présenter quelque fois sous la forme particulière

$$A g + B h + C g' + D(h^2 - g g') + E = 0.$$

On démontre que si les (A), (B), (C), (D) ne sont pas identiques, les périodes sont liées au moins par une telle relation singulière.[1]

Au moyen des 16 entiers caractéristiques, M. Humbert a composé deux autres entiers l, k, qu'il a appelés les *indices* de la transformation, et qui jouent un rôle fondamental dans la théorie. Rappelons ici la définition de ces nombres.

Des relations (A), (B), (C), (D) on tire aisément la relation

$$[(a c)_{03} + (a c)_{12}] g + [(b c)_{12} - (a d)_{03} - (a d)_{12}] h + [(d b)_{03} + (d b)_{12}] g' + \\ + [(a b)_{03} + (a b)_{12}] (h^2 - g g') + [(c d)_{03} + (c d)_{12}] = 0,$$

où l'on a posé

$$(a c)_{03} = a_0 c_3 - a_3 c_0, \quad (a c)_{12} = a_1 c_2 - a_2 c_1, \text{ etc.}$$

Eh bien, si les coefficients (entiers) de cette relation ont un facteur commun — se réduisant à zéro lorsque la relation devient identique — ce facteur s'appelle *l'indice* k de la transformation.

Après avoir divisé par ce facteur (s'il est différent de zéro), la relation se présente sous la forme

$$A g + B h + C g' + D(h^2 - g g') + E = 0,$$

A, B, C, D, E étant des entiers premiers entre eux.

Le second indice l est défini par

$$l = (a d)_{03} + (a d)_{12}$$

et entre les deux indices de la transformation birationnelle, on a la relation

$$1 = l^2 + B k l + (A C + D E) k^2.$$

En particulier, lorsque $k = 0$, on tombe sur les *transformations de Hermite* (d'ordre 1), caractérisées par les relations

[1] Humbert, Journal de Math., 1900, p. 330.

$$(1)\quad \begin{cases} (ac)_{03}+(ac)_{12}=(bd)_{03}+(bd)_{12}+(ab)_{03}+(ab)_{12}=(cd)_{03}+(cd)_{13}=0 \\ (bc)_{03}+(bc)_{12}=(ad)_{03}+(ad)_{12}=1. \end{cases}$$

La classe des transformations de Hermite comprend les transformations ordinaires de 1re et de 2de espèce: mais pour des valeurs particulières des modules on a aussi des *transformations singulières de Hermite*.

Les transformations correspondantes à $k \neq 0$ sont toujours singulières et nous les appelerons *transformations de Humbert.*[1]

60. Revenons au cas général d'une transformation d'indices l, k arbitraires. Nous allons former une combinaison de l, k ayant une signification géométrique remarquable.

Le système Σ représenté par

$$\Theta(u+\varrho,\ v+\sigma)=0,$$

où Θ est une fonction thêta de 1r ordre et ϱ, σ sont des paramètres (n. 28), est changé par la transformation birationnelle envisagée, en un système Σ analogue, de degré 2 et de genre 2. L'équation des courbes de ce dernier système s'obtiendra en transformant la fonction Θ au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + \alpha \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + \beta, \end{aligned}$$

qui répresente notre correspondance birationnelle. On obtient ainsi l'équation

$$\varphi(u+\varrho,\ v+\sigma)=0,$$

où φ est une fonction intermédiaire d'indices l, k (n. 28).[2]

En appliquant une formule donnée par M. Humbert (J. d. M., 1900, p. 313) on trouve que les fonctions Θ, φ ont $2l+Bk$ zéros communs, et par suite on peut énoncer la proposition suivante:

Une transformation birationnelle d'indices l, k, attachée à la relation singulière

$$Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E=0,$$

change le système Σ formé par les courbes de niveau zéro des fonctions Θ du 1r ordre, en un système analogue formé par les courbes de niveau zéro des fonctions intermé-

[1] M. Humbert réserve seulement à ces transformations la dénomination de »singulières».
[2] Humbert, J. de M., 1900, p. 311.

diaires d'indices l, k; et ces dernières courbes coupent une des premières en $2l+Bk$ *points.*

En particulier si $k=0$, et par suite $l=1$, les courbes transformées coupent les courbes primitives en 2 points. Il s'ensuit qu'elles appartiennent au système Σ donné (n. 24).

On arrive à la même conclusion en se rappelant que *les transformations de Hermite sont caractérisées par la condition de changer une fonction thêta en une fonction analogue.*

61. — *Sur la représentation paramétrique d'une surface hyperelliptique par des fonctions* Θ. — Envisageons sur la surface de Jacobi F une involution (régulière) I_r engendrée par les transformations birationnelles d'un groupe G_r, et soit Φ une surface hyperelliptique image de I_r.

Supposons d'abord que les r transformations de G_r soient des transformations de Hermite, ou brièvement que G_r soit un *groupe de Hermite.*

Alors, en tenant compte du fait que les transformations de G_r changent en lui-même un système Σ fixé, on construit aisément un système linéaire irréductible $|D|$, appartenant totalement au multiple d'ordre l de Σ, de telle façon que toute courbe D soit changée en elle-même par G_r, c'est-à-dire que $|D|$ appartient à l'involution I_r. Si, comme on peut le supposer sans restriction, le système linéaire $|\Gamma|$ de Φ correspondant à $|D|$, est *simple,* on peut transformer birationnellement la surface Φ, de telle sorte que $|\Gamma|$ résulte le système des sections planes (ou hyperplanes) de la surface transformée, que nous désignerons encore par Φ.

Comme par un choix convenable des intégrales u, v, les courbes du système Σ viennent être représentées en égalant à zéro les fonctions Θ du 1^r^ ordre, le système $|D|$ viendra représenté par une équation de la forme

$$\lambda_0\Theta_0(u,v)+\lambda_1\Theta_1(u,v)+\cdots+\lambda_d\Theta_d(u,v)=0, \tag{2}$$

les Θ_i étant des fonctions thêta d'ordre l.

En désignant par $(x_0, x_1, \ldots . x_d)$ les coordonnées homogènes d'un point variable sur Φ, on pourra donc poser

$$\varrho x_i=\Theta_i(u,v) \qquad (i=0,1,2,\ldots d). \tag{3}$$

Pour des valeurs données des variables x les équations précédentes admettront seulement un nombre *fini* de solutions incongrues (u,v), car deux courbes D arbitraires se coupent en un nombre fini de points.

On remarquera que quelqu'une des solutions susdites pourra ne varier pas avec les x, lorsque le système $|D|$ ait des points-base.

Faisons maintenant le raisonnement réciproque. Soit Φ une surface hyperelliptique de rang r représentée par les formules (3), les Θ_i étant des fonctions d'ordre l telles que les équations (3) aient un nombre fini de solutions pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point de Φ. Au système linéaire $|\Gamma|$ coupé sur Φ par les plans (ou hyperplans), répond sur F le système linéaire $|D|$, représenté par (2). Comme le système $|D|$ appartient à l'involution I_r dont les groupes répondent aux points de Φ, toute courbe D sera changée en elle-même par les transformations du groupe G_r engendrant I_r. Il s'ensuit qu'une, T, de ces transformations change une courbe C de Σ en une courbe C_0 telle que les courbes lC, lC_0 appartiennent au même système continu. On en tire que C_0 coupe en deux points C et par suite (n. 24) que T change en lui-même le système Σ. On arrive pourtant à la conclusion que G_r est un groupe de Hermite. Donc:

Toute surface hyperelliptique de rang r, répondant à une involution engendrée par un groupe de Hermite G_r, se laisse représenter au moyen des fonctions Θ, par des formules du type

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

ces équations admettant seulement un nombre fini de solutions incongrues (u, v), pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point variable sur la surface. — Réciproquement, toute surface hyperelliptique admettant une telle représentation, répond à un groupe de Hermite.

Nous exprimerons brièvement ces propriétés en disant que *les surfaces répondant à des groupes de Hermite sont caractérisées par la condition d'admettre une* ***représentation propre*** *par des fonctions thêta.*

Si, au contraire, la surface Φ répond à un groupe G_r de Humbert (formé par des transformations de Humbert), aux sections planes de Φ répondront sur F des courbes D n'appartenant pas totalement à un système $l\Sigma$; mais on pourra toujours ajouter aux courbes du système linéaire $|D|$ une courbe fixe H, de telle sorte que les courbes $H + D$ appartiennent totalement à un système $l\Sigma$. Le système réductible $H + |D|$ sera représenté par une équation du type (2) et par suite la Φ admettra une représentation du type (3); mais *dans le cas actuel les équations* (3) *posséderont un nombre infini de solutions fixes, répondant aux points de la courbe fixe H, et un nombre fini de solutions variables avec les x.*

On dira par conséquent que *toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une* ***représentation impropre*** *par des fonctions Θ.*

Comme toute courbe tracée sur F peut être représentée d'une façon complète en égalant à zéro une fonction intermédiaire, dans le cas actuel le système $|D|$ pourra toujours être représenté par une équation du type

$$\lambda_0 \varphi_0(u, v) + \lambda_1 \varphi_1(u, v) + \cdots + \lambda_d \varphi_d(u, v) = 0,$$

les φ étant des fonctions intermédiaires n'ayant deux à deux qu'un nombre fini de zéros communs. Donc:

Toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une représentation propre par des fonctions intermédiaires.

62. — *Quelques propriétés des transformations d'une surface de Jacobi en elle-même.* — Considérons une surface de Jacobi admettant une transformation birationnelle en elle-même

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} u' = \lambda u + \mu v + \alpha \\ v' = \lambda' u + \mu' v + \beta. \end{cases}$$

En multipliant cette transformation T par les transformations de 2$^{\mathrm{de}}$ espèce, on obtient la série continue ∞^2 de transformations analogues

$$(1) \qquad \begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + h \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + k \end{aligned}$$

(où h, k sont des paramètres).

En transformant T par la transformation de 2$^{\mathrm{de}}$ espèce

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} u' = u + \gamma \\ v' = v + \delta \end{cases}$$

on obtient la transformation $S^{-1}TS$

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + \alpha - (\lambda - 1)\gamma - \mu\delta \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + \beta - \lambda'\gamma - (\mu' - 1)\delta, \end{aligned}$$

transformation qui appartient à la même série ∞^2 (1) et peut être identifiée avec une transformation arbitraire de cette série, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \mu \\ \lambda' & \mu' - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cette condition analytique se traduit en ce qu'il y a un nombre fini > 0 de solutions des congruences:

$$(\lambda - 1)\, u + \mu v \equiv -\alpha$$
$$\lambda' u + (\mu' - 1)\, v \equiv -\beta,$$

c'est-à-dire que T possède un nombre fini > 0 de points unis.

Ainsi donc:

Toute transformation T de F, ayant un nombre fini de points unis, vient transformée par les transformations de 2^{de} espèce en des transformations semblables formant une série ∞^2; cette même série peut être obtenue en multipliant T par les transformations de 2^{de} espèce.

Remarque. — Dans la série ∞^2 considérée, il y aura une transformation, semblable à T, qui aura le point uni $u = v = 0$, de sorte que la substitution sur u, v se réduit homogène.

Si T est une transformation périodique d'ordre n, toutes les transformations semblables auront la même période; parmi celles-ci il y en a une qui laisse invariant le point $u = v = 0$, et qui peut se réduire à la forme suivante

$$u' = \varepsilon^r u, \qquad v' = \varepsilon^s v \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$$

(u, v étant des intégrales convenables non normales).

Une autre remarque qui se rattache à ce qui précède est la suivante.

Etant donnée sur F une transformation birationnelle T possédant des points unis, il y aura des transformations ordinaires qui ramènent T en elle-même; ce seront les transformations de 1^{re} et de 2^{de} espèce qui font correspondre à un point uni de T un point uni de la même transformation.

Cette propriété peut être reconnue aisément au point de vue géométrique. Soient A, B deux points unis distincts ou coïncidants de T, et soit S la transformation de 1^{re} ou de 2^{de} espèce portant A en B. La transformée de S par T sera une transformation de la même espèce que S, faisant correspondre B à A, et par suite ne différera pas de S; il s'ensuit que S, T sont échangeables, et par conséquent que S transforme T en elle-même.

63. — *Transformations hermitiennes.* — Les propriétés que nous venons d'étudier se rapportent de même aux différentes sortes de transformations singulières qui peuvent appartenir à une surface de JACOBI. Tâchons maintenant de caractériser au point de vue géométrique les transformations hermitiennes.

Soit T une telle transformation de la surface F. Après avoir multipliée T par une transformation de 2^{de} espèce convenable, on peut supposer toujours qu'elle possède un point uni P. Fixons un système Σ de courbes C appartenant à F et envisageons la variété H formée par les ∞^1 courbes C issues par P.

Comme T transforme en lui-même le système Σ, on aura entre les éléments (courbes) de la variété H une transformation birationnelle, et par suite l'on aura une transformation analogue entre les points de la courbe de genre deux attachée a F (n. 22). Ainsi donc:

Toute transformation hermitienne d'une surface de Jacobi correspond à une transformation birationnelle de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Réciproquement à toute transformation de cette courbe correspond une série, en général ∞^2, *de transformations hermitiennes de la surface de Jacobi.*

64. — *Aperçu sur les surfaces hyperelliptiques de diviseur* $\delta > 1$. En ce qui précède nous nous sommes rapportés aux surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta = 1$ et par suite à la surface de Jacobi.

Il y a lieu d'étendre les considérations établies, aux surfaces de diviseur $\delta > 1$.

Etant donné sur F une transformation birationnelle

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta$$

on exprime tout d'abord $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ au moyen des périodes par des relations qu'on obtient des relations (1) du n. 45 en changeant a_1, b_1, c_1, d_1 respectivement en

$$\frac{a_1}{\delta}, \ \frac{b_1}{\delta}, \ \frac{c_1}{\delta}, \ \frac{d_1}{\delta}.$$

On arrivera ainsi aux relations entières analogues aux relations (A), (B), (C), (D).

Les transformations birationnelles existant sur F se partageront en deux familles: *transformations de Hermite,* qui changent entre elles les fonctions Θ_δ (n. 29) et *transformations de Humbert* qui changent une fonction Θ_δ en une fonction intermédiaire φ_δ.

Les considérations relatives à la représentation d'une surface hyperelliptique de rang r au moyen des fonctions thêta ou intermédiaires, s'étendent sans aucune difficulté aux surfaces de rang r et diviseur $\delta > 1$. On a une représentation *propre* par des fonctions Θ_δ seulement pour les surfaces répondant à des groupes de Hermite; tandis que pour les surfaces répondant aux groupes de Humbert, on a une représentation propre par des fonctions φ_δ.

Ceci posé, on peut reconnaître que toute surface hyperelliptique admettant une représentation propre par des fonctions Θ_δ irréductibles correspond à une courbe de genre 2 possédant des transformations en elle-même.

En somme la détermination de ces surfaces hyperelliptiques, se ramène à celle des involutions I_δ appartenant à une surface de JACOBI et invariant par rapport à un groupe de transformations de celle-ci.

Le rang étant > 2 on trouverait que δ ne peut recevoir qu'un nombre fini de valeurs.

Mais nous laisserons de côté cette discussion pour nous borner au cas $\delta = 1$; la remarque qui précède montre d'ailleurs comment cette analyse serait à compléter, et que les types qui se présentent pour $\delta > 1$ se rattachent étroitement à ceux que nous nous proposons de classifier, où $\delta = 1$.

65. — *La classification des surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des Θ irréductibles, ramenée à l'analyse des courbes de genre 2 qui possèdent un groupe de transformations en elles-mêmes.* — Nous nous proposons de classifier les surfaces hyperelliptiques (régulières) de rang $r > 1$ et de diviseur $\delta = 1$, admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles.

En laissant de côté le cas $r = 2$ (ch. V), ces surfaces correspondent à des surfaces de JACOBI singulières admettant un groupe G_r de transformations en elles-mêmes, transformations possédant chacune un nombre fini de points unis, et correspondantes à des transformations analogues de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Il s'agit donc de classifier les groupes G_r satisfaisant aux conditions établies.

Remarquons d'abord que parmi les transformations de G_r il peut y avoir une seule transformation ordinaire (de première espèce), parce que le produit de deux transformations de 1re espèce donnerait une transformation de 2de espèce, et le groupe G_r n'en renferme pas (étant $\delta = 1$).

Il s'ensuit que si le groupe G_r renferme des transformations à période pair $2p$, $2q$, ..., les puissances d'ordre p, q, ... de celles-ci, donneront lieu à une même transformation de 1re espèce. En effet chacune de ces puissances est une transformation périodique d'ordre 2 douée de points unis en nombre fini, et par conséquent elle est une transformation ordinaire de 1re espèce.

On voit aussi que si G_r renferme une transformation de 1re espèce π, celle-ci est échangeable avec les autres transformations du groupe, car les transformées de π en G sont des transformations périodiques d'ordre 2.

Enfin si à côté de π il y a en G_r une transformation T à période impair p, la transformation $T\pi$ sera à période $2p$, et sa puissance d'ordre p sera π.

Ces remarques faites, considérons la courbe f de genre 2, qui est associée à F.

Nous allons démontrer que f admet un groupe de transformations isomorphe à G_r.

Il faut distinguer deux cas:

a) Il peut arriver que les transformations de G_r aient sur F un même point uni O.

En ce cas considérons parmi les courbes de genre 2 d'un système Σ appartenant à F, celles qui passent par O. On aura une série ∞^1 de courbes qui correspondent élément par élément à f; et cette série sera invariant par rapport à G_r. Il s'ensuit que le groupe G_r de F correspond à un groupe isomorphe engendré sur f par les transformations homologues à celles de G_r.

b) Supposons au contraire que les transformations de G_r n'aient pas sur F un point uni commun.

Toute transformation de G_r appartient à une série ∞^2 de transformations périodiques du même ordre, que l'on obtient en multipliant la transformation donnée par les ∞^2 transformations de 2^{de} espèce.

Dans la série ∞^2 des transformations périodiques nommées dessus, il y en a une admettant un point uni O arbitrairement choisi sur F. De cette façon aux r transformations de G_r on peut faire correspondre r transformations périodiques du même ordre, admettant un même point uni O. Ces transformations engendreront un groupe G'_r isomorphe à G_r.

C'est là une conséquence du fait que deux transformations quelconques de G_r ne donnent jamais pour produit une transformation de 2^{de} espèce.

Partant on en déduit le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique (régulière) de rang $r > 1$ et de diviseur 1, admettant une représentation propre par des $\Theta(u, v)$ irréductibles, correspond à une courbe de genre 2 possédant un groupe de r transformations en elle-même, et ce groupe est isomorphe à celui formé par les substitutions linéaires sur u, v, qui laissent invariant les Θ.

Réciproquement, si l'on se donne une courbe de genre 2 admettant un groupe G'_r de transformations en elle-même, la surface de Jacobi correspondante admettra un ou plusieurs groupes G_r isomorphes à G'_r; chacun de ceux-ci donne lieu à une involution, et, en écartant les cas où l'on tombe sur des involutions rationnelles ou représentées par des réglées, on aura autant de types de surfaces hyperelliptiques satisfaisant aux conditions demandées.

66. *Courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes.* D'après le n. 65 nous sommes ramenés à l'analyse des courbes de genre 2 admettant des transformations birationnelles singulières en elles-mêmes.

Cette analyse a été l'objet d'une étude de M. Bolza,[1] dont il nous conviendra de rappeler les résultats.

---

[1] »On binary sextics with linear transformations into themselves» (American Journal of Math. t. X, 1888).

Soit une courbe de genre 2

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0;$$

φ est un polynome d'ordre 5 ou 6, qui peut être remplacé par une forme homogène d'ordre 6 en posant $x = \frac{\xi}{\eta}$; l'équation $\varphi = 0$ représente les 6 points de diramation de f.

Il s'agit de classifier les équations $\varphi = 0$ qui admettent un groupe de transformations linéaires en elles-mêmes. Or d'après le théorème de M. Jordan concernant la classification des groupes linéaires, un groupe qui laisse invariant $\varphi = 0$ pourra être:

a) un groupe cyclique d'ordre 2, 3, 4, 5, 6;

b) un groupe diédrique d'ordre 4, 6, 12;

c) un groupe tetraédrique d'ordre 12, ou un groupe octaédrique (exaédrique), d'ordre 24;

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les points de diramation de f, racines de $\varphi = 0$.

Il pourra arriver que $\varphi = 0$ admette une transformation linéaire en elle-même qui soit périodique d'ordre 2, de façon que sur les 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6 il se produise une substitution de la forme:

$$(12)\ (34)\ (56) \tag{1}$$

ou bien de la forme

$$(11)\ (22)\ (34)\ (56). \tag{2}$$

En ce dernier cas il y aura aussi les transformations linéaires

$$\begin{matrix} (12)\ (36)\ (45) \\ (12)\ (35)\ (46) \end{matrix} \tag{3}$$

qui engendrent un groupe diédrique 3) d'ordre 4, auquel appartient la substitution 2).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 3 engendré par

$$(123)\ (456), \tag{4}$$

il y aura aussi les transformations d'ordre 2

$$\begin{matrix} (14)\ (26)\ (35) \\ (16)\ (25)\ (34) \\ (15)\ (24)\ (36), \end{matrix} \tag{5}$$

engendrant un groupe diédrique 5) d'ordre 6, qui renferme 4).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 4 engendré par

6) $$(1\,1)\ (2\,2)\ (3\,4\,5\,6),$$

il y a un groupe octaédrique 7) de 24 substitutions linéaires qui ramènent $\varphi = 0$ en elle-même.

Dans ce groupe sont renfermées 6 substitutions d'ordre 4 analogues à 6) et leurs 3 carrées d'ordre 2 et du type 2), 8 substitutions d'ordre 3, et 6 substitutions d'ordre 2 et du type 1). Il y a:

8) un sous-groupe tetraédrique d'ordre 12 renfermant les 8 substitutions d'ordre 3 et les 3 substitutions d'ordre 2 et du type 2);

9) un sous-groupe de celui-ci, diédrique d'ordre 4, renfermant les 3 involutions nommées;

enfin des sous-groupes diédriques d'ordre 4, 6 appartenant aux types 3), 5), et leurs sous-groupes cycliques.

Si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 5 telle que

10) $$(1\,1)\ (2\,3\,4\,5\,6),$$

il n'y a que le groupe cyclique d'ordre 5 engendré par cette transformation.

Enfin si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 6, telle que

11) $$(1\,2\,3\,4\,5\,6),$$

outre le groupe cyclique engendré par celle-ci, il y aura 6 substitutions d'ordre 2 telles que

12) $$\begin{matrix} (1\,4)\ (2\,3)\ (5\,6);\ldots\ldots. \\ (1\,1)\ (4\,4)\ (2\,6)\ (3\,5);\ldots\ldots, \end{matrix}$$

qui engendrent un groupe diédrique d'ordre 12.

Dans ce groupe sont renfermés des sous-groupes diédriques d'ordre 4, 6, semblables aux types 3), 5), et un sous-groupe diédrique d'ordre 6 renfermant les substitutions

13) $$\begin{matrix} (1\,3\,5)\ (2\,4\,6) \\ (1\,1)\ (4\,4)\ (2\,6)\ (3\,5);\ldots\ldots. \end{matrix}$$

En résumant il y a 13 types différents de groupes de substitutions linéaires qui laissent invariant une forme φ d'ordre 6, mais cette forme ne donne lieu qu'à 6 types différents.

Nous allons écrire, d'après M. Bolza, les formes normales de φ correspondantes à ces types, en distinguant en chaque cas les groupes de transformations qui laissent invariant la courbe

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0,$$

et en indiquant à côté de chaque type le tableau des périodes normales appartenant à la courbe f.

On aura donc les types suivants:

I) $$\varphi = \xi^6 + \alpha\xi^4\eta^2 + \beta\xi^2\eta^4 + \eta^6$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 4 engendré par les transformations

$$x' = -x,\ y' = y;\ x' = -x,\ y' = -y;\ x' = x,\ y' = -y;$$

b) un sous-groupe d'ordre 2 de celui-ci, outre que $(x' = x,\ y' = -y)$, p. ex.

$$(x' = -x,\ y' = y).$$

Ces groupes correspondent au groupe 1) sur les racines de $\varphi = 0$.

Le tableau normal des périodes de f est

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g', \end{matrix}$$

où

$$h = \frac{1}{2}.$$

II) $$\varphi = \xi(\xi^5 + \eta^5)$$

ou

$$\varphi = x(x^5 + 1).$$

La courbe f admet

a) un groupe cyclique d'ordre 10

$$x' = \varepsilon x,\quad y' = e^{\frac{\pi i}{5}} y; \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

b) un sous-groupe d'ordre 5 de celui-ci.

Ces groupes correspondent également à un groupe 10) opérant sur les racines de $\varphi = 0$.

Périodes normales de f:

$$g = 1 - \varepsilon^4,\ \ h = -\varepsilon^2 - \varepsilon^4,\ \ g' = \varepsilon.$$

III) $$\varphi = \xi\eta(\xi^4 + \alpha\xi^2\eta^2 + \eta^4)$$

ou

$$\varphi = x(x^4 + \alpha x^2 + 1).$$

Périodes normales de f:

$$g = g',\ \ h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet

a) un groupe d'ordre 8 qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique engendré par les trois involutions qui laissent invariant $\varphi = 0$ opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme le groupe 3);

b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 4

$$(x' = -x,\ \ y' = \pm i y)$$

qui correspond au groupe 2) sur les racines de $\varphi = 0$.

IV) $$\varphi = \xi^6 + \alpha\xi^3\eta^3 + \eta^6$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^3 + 1;$$

$$12 g g' + 1 = 0,\ \ h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet

a) un groupe d'ordre 12 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 6 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 5);

b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 6, correspondant au groupe cyclique d'ordre 3 de $\varphi = 0$ (type 4):

$$\left(x' = \varepsilon x,\ \ y' = -y;\ \ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

c) un sous-groupe de b) d'ordre 3.

V) $$\varphi = \xi^6 + \eta^6,$$

ou, en changeant η en $i\eta + \varphi = \xi^6 - \eta^6$, d'où l'on tire

$$\varphi = x^6 - 1.$$

On a les périodes

$$g = g' = \frac{i}{2\sqrt{3}}, \quad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 12 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 12);

b) un sous-groupe de a) d'ordre 12, qui correspond au groupe cyclique d'ordre 6 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ (type 11);

c) deux sous-groupes cycliques de b), d'ordre 6, engendrés par

$$x' = -\varepsilon x, \quad y' = \pm y \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

d) un sous-groupe d'ordre 12 de a), qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique, d'ordre 6, opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme 13)

$$\begin{pmatrix} x' = \varepsilon x, \ y' = \pm y; & x' = \varepsilon^2 x, \quad y' = \pm y; & x' = x, \ y' = \pm y \\ x' = \dfrac{1}{x}, \quad y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; \ x' = \dfrac{\varepsilon}{x}, & y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; & x' = \dfrac{\varepsilon^2}{x}, \ y' = \dfrac{\pm iy}{x^3} \end{pmatrix}.$$

La courbe f admet aussi d'autres groupes renfermés en a) et appartenant aux types I), III), IV).

VI) $$\varphi = \xi\eta(\xi^4 + \eta^4) \text{ ou bien } \varphi = \xi\eta(\xi^4 - \eta^4),$$

ou respectivement

$$\varphi = x^5 + x, \quad \varphi = x^5 - x;$$

$$g = g' = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}, \quad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 48 en isomorphisme diédrique avec le groupe octaédrique de 24 substitutions linéaires, qui laissent invariant $\varphi = 0$ (type 7); et les sous-groupes suivants;

b) groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec un groupe tetraédrique de 12 substitutions linéaires (type 8);

c) groupe cyclique d'ordre 8 correspondant à un groupe 6) sur les racines de $\varphi = 0$:

$$\left(x' = ix, \ y' = \sqrt{i}y; \quad \sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{2}}\right),$$

d) groupe d'ordre 8 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 4 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme 9).

En outre il y a en a) des sous-groupes des types I), III), IV).

67. *Comment on passe des groupes de la courbe de genre 2, à ceux de la surface de Jacobi associée.* Etant donnée une courbe f appartenant à l'un des types I), . . ., VI), à chaque groupe de transformations de f on peut faire correspondre au moins un groupe de transformations de la surface de Jacobi F associée à f, et cela de la façon suivante: remplaçons tout couple de f par le point homologue F; à toute transformation de f, considérée comme opérant sur les couples de la courbe, répondra ainsi une transformation de F; pourtant on aura sur F un groupe de transformations isomorphe à celui de f, et qui laisse invariant le point homologue à la g_2^1 de f.

Réciproquement, si l'on a un groupe de transformations de F, qui laissent invariant un même point uni O de la surface, on peut toujours considérer une courbe f associée à F de façon qu'au point O corresponde la g_2^1 de f; cette courbe f admet un groupe de transformations isomorphe au groupe de F (n. 65), et celui-ci prendra naissance du groupe de f, par la construction précédente.

Cependant il peut arriver qu'à un groupe de f (appartenant à un des types que nous avons analysés) correspondent plusieurs groupes de F, isomorphes entre eux, mais birationnellement distincts; dans ce cas il y aura des groupes de F n'admettant pas des points unis communs à toutes leurs transformations. Ce cas ne saurait donc se présenter lorsqu'il s'agit de groupes cycliques, car toute transformation cyclique T de la surface F, associée à une courbe f irréductible, a des points unis (n. 58), qui sont unis aussi pour les puissances de T.

D'après ces remarques, nous aurons lieu d'analyser les types différents de groupes de F, qui peuvent correspondre à un même groupe de f, lorsqu'il s'agit d'un groupe qui n'est pas cyclique.

Mais parmi les groupes de F il y en a qui donnent lieu à des involutions représentées par des surfaces réglées; ce sont là des cas de surfaces hyperelliptiques que nous devons écarter d'après le n. 4.

Nous commençons par l'examen de ces cas.

68. *Cas à écarter.* En premier lieu considérons le cas I, b).

On obtient sur F une transformation périodique d'ordre 2, qui admet une courbe de points unis; en effet ce sont des points unis pour cette transformation les ∞^1 points de F qui représentent les couples de l'involution elliptique engendrée sur f par la transformation

$$x' = -x, \quad y' = y.$$

Ainsi le cas I, b) nous amène à une involution qui ne correspond pas à une surface hyperelliptique proprement dite (n. 4).

Or les groupes I, a); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), renferment tous un sous-groupe d'ordre 2 du type I, b); partant les involutions correspondantes à ces groupes possèdent un nombre infini de coïncidences, et amènent à des surfaces qu'on peut transformer en des réglées (n. 35). On en conclut que les cas I); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a) sont à écarter.

Nous venons d'écarter une première série de cas qui nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes. Pour ce qui concerne les autres types, on reconnait d'abord aisément qu'ils correspondent à des involutions ayant un nombre fini de coïncidences, et par suite régulières (n. 37).

Mais on verra que les cas cycliques II) et VI, c) donnent lieu à des involutions rationnelles et pour cette raison doivent être écartés ainsi que les précédents.

A cet effet il faut calculer la valeur du genre $p_a = p_g$ appartenant à chacune des involutions que nous venons de construire sur F.

Ce calcul peut être fait de deux manières différentes: on peut calculer le p_a, ou bien le p_g; nous savons que les deux valeurs sont égales.

Pour calculer le p_a on peut procéder de la manière suivante.

Soit Φ une surface représentant une involution donnée sur F. Considérons un faisceau de courbes appartenant à Φ et le faisceau homologue sur F; en considérant dans chaque faisceau les courbes douée d'un point double, on pourra évaluer les invariants de ZEUTHEN-SEGRE de Φ, F; celui de Φ se trouvera exprimé par celui de F, et d'après la formule connue on en tirera la valeur du genre numérique p_a de Φ.[1]

Ce calcul présente une seule difficulté remarquable: c'est qu'aux points de coïncidence de l'involution donnée sur F, correspondent des points singuliers et il s'agit de reconnaître combien de fois les courbes du faisceau considéré sur Φ, qui passent par ces points, doivent être comptées parmi celles qui ont un point double (il est sous entendu que le faisceau dont on parle n'a pas comme points-base ces points singuliers).

La difficulté que nous venons de signaler se ramène d'ailleurs à la question suivante: étant donné sur F un système linéaire de courbes appartenant à l'involution, reconnaître quelles singularités acquièrent les courbes du système lorsque on leur impose de passer par des points de coïncidence.

---

[1] Ce procédé fournit en général la relation entre les genres numériques de deux surfaces en correspondance [1 n], c'est-à-dire la formule de M. SEVERI que nous employerons dans les ch. suivants.

Nous aurons lieu de traiter en détail cette question qui se rattache à la construction effective des surfaces hyperelliptiques que nous venons de classifier. Nous verrons alors que les types III, b); IV, b); V, d); VI, b), d) nous amènent à des surfaces de genre $p_a = 1$.

Ce même procédé de construction nous a fait découvrir que les surfaces correspondantes aux types II) et VI, c) sont rationnelles. Mais sans répéter ici cette construction qui nous amène en somme à un résultat négatif, nous verrons que ce résultat peut être établi plus simplement aussitôt que l'on ait reconnu que $p_a = p_g = 0$.

A cet effet on peut s'appuyer sur une simple remarque de MM. Bagnera et de Franchis, remarque qui permet d'évaluer le p_g des surfaces Φ.

Cette remarque consiste en ce que s'il y a une integrale double de première espèce attachée à Φ, cette intégrale devra se réduire à $\int\int du\, dv$ lorsqu'on exprime les coordonnées des points de Φ par des fonctions rationnelles des points de F, et par conséquent par des fonctions hyperelliptiques de u, v. Il s'ensuit que si l'involution (cyclique) représentée par Φ est engendrée par la transformation

$$u' = \alpha u + \beta v$$
$$v' = \gamma u + \delta v,$$

le déterminant Jacobien de cette transformation sera

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ceci posé, il suffit de reconnaître la forme des substitutions linéaires sur u, v engendrant les involutions des différents types considérés sur F.

Envisageons d'abord le cas II, b).

La courbe

$$y^2 = x(x^5 + 1)$$

possède deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\,dx}{y}, \quad v = \int \frac{dx}{y}.$$

Par la substitution

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^3 y \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)$$

qui transforme la courbe en elle-même, les intégrales u, v viennent changées en

$$u' = \varepsilon^4 u, \quad v' = \varepsilon^3 v.$$

La même substitution subissent les sommes donnant lieu aux intégrales attachées à la surface de Jacobi F, qui correspond à la courbe. Comme le déterminant de cette substitution est $\varepsilon^2 \neq 1$, on en conclut que la surface Φ correspondante à l'involution du type II, b) a le genre $p_g = 0$.

Par conséquent il en est de même de la surface correspondante au type II, a), qui représente une involution appartenante à la surface II, b).

Envisageons maintenant le cas VI, c).

La courbe

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

possède les deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\,dx}{y}, \quad v = \int \frac{dx}{y},$$

et par la substitution

$$x' = ix, \quad y' = \sqrt{i}\,y$$

il vient

$$u' = \frac{1}{\sqrt{i}}\,u, \quad v' = \sqrt{i}\,v,$$

de sorte que le déterminant de la substitution est -1. On en déduit que l'involution cyclique d'ordre 8 correspondante au type VI, c), a $p_g = 0$.

Le procédé que nous avons rapidement exquissé nous amène à la conclusion que les involutions correspondantes aux cas II) et VI, c) ont le genre

$$p_a = p_g = 0.$$

Nous allons prouver en outre que leur bigenre n'est pas $P_2 = 1$, de sorte que, d'après le n. 31, on pourra conclure que ces involutions sont rationnelles.

Posons-nous d'abord dans le cas II, b), et en supposant $P_2 = 1$, construisons une surface Φ image de l'involution, qui ne possède pas des courbes exceptionnelles.

Étant $P_2 = 1$, il y aura sur Φ deux systèmes linéaires $|C|$, $|C'|$, sans points-base, adjoint l'un à l'autre, auxquels correspondent sur F deux systèmes linéaires renfermés dans le même système complet; on a donc

$$|5\,C| = |5\,C'|$$

et par suite

$$P_5 = 1.$$

Cette conclusion est absurde attendu que la surface Φ, ayant $p_g = 0$ et étant dépourvue de courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on doit avoir (n. 31)

$$P_5 = 0.$$

Maintenant on peut affirmer aussi que la surface correspondant au cas II, a), est rationnelle. En effet cette surface vient représentée par une involution de couples de points appartenant à la surface qui correspond au cas II, b); et, d'après M. CASTELNUOVO, toute involution sur une surface rationnelle est rationnelle.

Considérons enfin le cas VI, c).

La surface Φ vient représentée par une involution de couples de points, I_2, appartenant à la surface régulière Φ' qui correspond au cas III, b); et il est aisé de remarquer qu'il y a sur Φ' des coïncidences correspondant à la g_2^1 de f. D'après le n. 38 on conclut donc que cette involution I_2 est rationnelle, puisqu'elle ne saurait avoir $P_2 = 1$.

En résumant les résultats obtenus nous dirons que les cas I); II); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), c) *correspondent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes, qui sont écartées de notre étude.*

69. — *Genres des surfaces hyperelliptiques correspondantes aux types qui ne sont pas dégénérescentes.* — En calculant la valeur du déterminant des substitutions linéaires périodiques d'ordre 3, 4 qui forment les groupes III, b); IV, b); V, d); VI, b), d), on reconnaît que ces types nous amènent à des surfaces de genre $p_g = 1$. Ainsi donc nous pouvons énoncer dès à présent la conclusion suivante qui sera établie à posteriori dans la suite:

Les cas III, b); IV, b); V, d); VI b), d), *correspondent à des surfaces hyperelliptiques de genres*

$$p_a = p_g = 1 \qquad (P_2 = 1).$$

Parmi ces cas nous avons déjà remarqué que les groupes cycliques [tels que III), IV)] correspondent chacun à un type bien déterminé d'involution sur la surface de JACOBI F, involution possédant un point uni pour toutes les transformations du groupe.

Il reste à classifier les types qu'on peut appeler *bi-diédriques* et *bi-tetraédriques,* c'est-à-dire les types correspondants à des groupes bidiédriques d'ordre 8 (VI, d) et 12 (V, d) et les types correspondants à des groupes bi-tetraédriques (VI, b).

70. — *Analyse des groupes bi-diédriques et bi-tetraédriques, d'ordre* 8, 24, *appartenant à une surface de Jacobi.* — Considérons une surface F correspondante au cas VI). On aura sur F plusieurs types de groupes G_8 et G_{24} isomorphes au groupe bi-diédrique d) et au groupe bi-tetraédrique b) de f. Tâchons de construire ces types.

Un groupe G_8 se trouvant en isomorphisme diédrique avec un G_4 engendré par deux involutions échangeables (Vierergruppe), on pourra l'engendrer par deux transformations cycliques d'ordre 4, U_1, U_2, qui ne seront pas échangeables, mais dont l'une transformera l'autre en son inverse; U_1^2, U_2^2 donneront lieu à la même transformation K, qui sera une transformation ordinaire de 1re espèce de la surface F. On peut supposer que dans la correspondance point par couple entre la surface F et la courbe f, K réponde à la g_2^1 de f.

Ceci posé, rappelons-nous que la transformation K possède 16 coïncidences (n. 46). En ayant égard aux propriétés des points unis de la transformation périodique d'ordre 4 qui résulte définie sur f, on déduit aisément, au moyen de considérations qu'on trouvera développées en détail au n. 84, qu'une transformation hermitienne donnant pour carré K, laisse invariant quatre coïncidences de K et distribue les autres coïncidences en six cycles de 2de ordre.

Soient P, Q, R, S les points unis de la transformation U_1. Comme U_2 doit transformer U_1 en son inverse, U_2 changera en lui-même le groupe P, Q, R, S.

Il y aura donc à distinguer quatre hypothèses:

1) La transformation U_2 laisse invariant P. Alors toutes les transformations du groupe G_8 engendré par U_1, U_2, ont en commun le point uni P et par suite elles laissent invariant la variété ∞^1 — birationnellement identique à f (n. 21) — formée par les courbes C passant par P et appartenant à un système Σ quelconque. Le groupe G_8 vient correspondre ainsi, au moyen de la correspondance point par couple entre F, f, au groupe bi-diédrique d).

Dans ce cas on voit de plus (n. 92) que U_2 laisse aussi invariant les autres points unis Q, R, S de U_1.

2) Les couples (P, Q) (R, S) donnent deux cycles de 2de ordre de la transformation U_2. Un groupe G_8 de ce type existe effectivement.

En effet pour le construire il suffit de considérer les substitutions U_1, U_2 génératrices du type 1) et de poser

$$U'_1 \equiv U_1, \qquad U'_2 \equiv U_2 A,$$

A étant la transformation de 2de espèce qui fait correspondre Q à P.

Nous désignerons par G'_8 le groupe engendré par U'_1, U'_2 en réservant le symbole G_8 pour le type 1).

3) Les couples (P, R) (Q, S) donnent deux cycles de U_2. On obtient le groupe G''_8 correspondant à ce cas, en prenant pour substitutions génératrices

$$U''_1 \equiv U_1, \qquad U''_2 \equiv U_2 B,$$

B étant la transformation de 2^{de} espèce qui amène P en R.

4) Les couples (P, S) (Q, R) donnent deux cycles de U_2. On obtient le groupe G'''_8 correspondant, en posant

$$U'''_1 \equiv U_1, \qquad U'''_2 \equiv U_2 C,$$

où C est la transformation de 2de espèce qui fait correspondre S à P.

On a ainsi à priori sur la surface F 4 types de groupes bi-diédriques formés par des transformations hermitiennes.

Une analyse plus approfondie, que nous renvoyons à un autre chapitre de ce mémoire, nous montrera que les quatre points unis P, Q, R, S de la transformation U_1, se distribuent en deux couples (P, Q) (R, S), de sorte que les points d'un couple jouissent des mêmes propriétés et ils se comportent de la même façon par rapport aux points de l'autre couple.

On verra ainsi que les types G''_8, G'''_8 ne sont pas distincts. On aura donc en définitive *trois types de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi-diédriques d'ordre* 8 *de la surface* F [cas VI)].

Il est aisé maintenant de construire sur F les différents types de groupes G_{24} isomorphes au groupe bi-tetraédrique VI, b) de f.

On partira de la remarque que tout groupe G_{24} renferme un sous-groupe invariant bi-diédrique G_8.

Or donnons-nous sur F un groupe bi-diédrique appartenant à l'un des types que nous venons de définir, et tâchons de construire un groupe bi-tetraédrique qui le renferme comme sous-groupe invariant.

On aura les cas suivants:

1) Le groupe bi-diédrique donné est le G_8 du type 1), dont toutes les substitutions laissent invariant les points P, Q, R, S.

Dans ce cas le G_{24} cherché échangera entr'eux les points P, Q, R, S suivant un groupe de substitutions G_r, qui se trouve en isomorphisme mériédrique avec G_{24}. Comme au G_8 correspond en cet isomorphisme la transformation identique, on aura $r = 3$, et par conséquent le groupe $G_r = G_3$ sur (P, Q, R, S) sera cyclique d'ordre 3, et laissera invariant un point parmi les quatre: p. ex. le point P.

Il s'ensuit que le groupe G_{24} a sur F un point uni que l'on peut supposer correspondant à la g^1_2 de f; on a ainsi un premier type bien défini de groupe bi-tetraédrique.

2) Le groupe bi-diédrique donné est le groupe $G_8^{(j)}$ du type j) où $j = 2, 3, 4$.

Les trois substitutions

$$U_1^{(j)}, \quad U_2^{(j)}, \quad U_1^{(j)}\, U_2^{(j)},$$

(d'ordre quatre) existant en $G_8^{(j)}$ possèdent trois groupes de 4 points unis, qui n'ont pas des points communs.

Sur le groupe des quatre coïncidences restant de la transformation K, les substitutions de $G_8^{(j)}$ produisent un groupe diédrique G_4.

Les mêmes quatre points devront être échangés entr'eux par le groupe bi-tetraédrique cherché — que nous désignerons par $G_{24}^{(j)}$ — suivant les substitutions d'un groupe tetraédrique G_{12}, qui renferme G_4 comme sous-groupe invariant.

Or ce groupe G_{12} résulte ainsi bien déterminé, et l'on en déduit que le groupe $G_{24}^{(j)}$ résulte aussi bien déterminé.

On en conclut qu'il y a tant de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi-tetraédriques, que de surfaces distinctes correspondantes aux groupes bi-diédriques, c'est-à-dire qu'il y aura sur F (cas VI) *trois types différents de groupes bi-tetraédriques d'ordre* 24, *amenant à des surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes.*

71. — *Groupes bi-diédriques d'ordre* 12. — La courbe f appartenant au type V), elle admet un groupe de transformations en elle-même V, d), c'est-à-dire un groupe G_{12} bi-diédrique d'ordre 12.

Combien de groupes isomorphes à G_{12} peut-il y avoir sur la surface de Jacobi F associée à f?

Il est aisé de répondre à cette question en remarquant que G_{12} admet un sous-groupe invariant G_6 cyclique d'ordre 6; en effet dans le groupe diédrique d'ordre 6 qui est en isomorphisme émi-édrique avec G_{12}, il y a un sous-groupe invariant d'ordre 3, et à celui-ci correspond en G_{12} un G_6 du type IV, b).

Ceci posé remarquons encore que le G_6 du type IV, b) donne lieu à un groupe de transformations de F ayant *un seul* point uni qui correspond à la g_2^1 de f; il s'ensuit qu'un groupe d'ordre 12 de F renfermant un tel sous-groupe invariant, a un point uni (invariant par rapport à toutes les transformations du groupe). En rappelant ce que nous avons dit au n. 67 on en conclut que:

Sur une surface F associée à la courbe f (cas V) *il y a un seul type de groupe bi-diédrique d'ordre* 12, *en considérant comme identiques deux groupes amenant à des surfaces hyperelliptiques en correspondance birationnelle entre elles.*

72. — *Résumé et programme de l'étude qui suit.* — En résumant les résultats obtenus nous énoncerons le théorème suivant:

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ et de diviseur $\delta = 1$, admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles, sont des surfaces régulières de genres $p_a = p_g = P_2 = \cdots = 1$. Elles se partagent en 11 familles birationnellement distinctes, correspondantes à des groupes de transformations d'une courbe de genre 2 en elle-même. Ces familles sont indiquées par le tableau suivant:

surfaces dépendantes de trois modules:

I) $r = 2$ (*surface de Kummer*);

surfaces dépendantes d'un module:

II) $r = 3$ (*groupe cyclique d'ordre* 3);

III) $r = 4$ (*groupe cyclique d'ordre* 4);

IV) $r = 6$ (*groupe cyclique d'ordre* 6);

surfaces n'ayant pas de modules:

V, VI, VII) $r = 8$ (*groupes bi-diédriques d'ordre* 8);

VIII) $r = 12$ (*groupe bi-diédrique d'ordre* 12);

IX, X, XI) $r = 24$ (*groupes bi-tetraédriques d'ordre* 24).

Les nombres I—XI (qui n'ont rien à faire avec ceux employés avant dans la classification des courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes), nous servirons dans la suite pour désigner les différents types de surfaces hyperelliptiques que nous nous proposons d'étudier en détail.

Pour chaque type nous allons construire une surface projectivement définie (dépendant suivant les cas de modules arbitraires), à laquelle toute surface hyperelliptique du type donné peut être ramenée par une transformation birationnelle.

Les surfaces modèles que nous allons construire pour $r > 2$, seront des surfaces d'ordre $2r$ appartenant à des espaces S_{r+1} de dimension > 3, et seront caractérisées par certaines configurations de points singuliers et de hyperplans ayant un certain contact suivant des courbes rationnelles.

Il sera aisé d'ailleurs de projeter de telles surfaces dans l'espace ordinaire, et même d'en abaisser l'ordre (jusqu'à 4). Cependant les surfaces d'ordre plus élevé d'un hyperespace, auxquelles nous nous rapportons, sont en général les plus simples de leur classe à ce point de vue, que leur configuration caractéristique jouit de la plus grande symétrie possible.