Enriques, Federigo and Amaldi, U.

Nozioni di geometria [ad uso delle scuole complementari]

Zanichelli, Bologna, 1910. (Edizioni successive varie rielaborate.)

FEDERIGO ENRIQUES e UGO AMALDI

NOZIONI
DI
GEOMETRIA
AD USO
DELLE SCUOLE COMPLEMENTARI

TERZA EDIZIONE
(7ª RISTAMPA)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

Bologna - Coop. Tip. Azzoguidi - 5-1921

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Queste Nozioni di Geometria *sono informate agli stessi criteri teorici e pratici, cui si ispirano i nostri* Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Tecniche, *ma rispondono più specificamente al carattere particolare ed alle esigenze delle* Scuole Complementari, *cui sono destinate.*

Anche qui coordinammo l'opera nostra al duplice scopo di suscitare e svolgere, per una parte, le facoltà immaginative delle alunne, per l'altra di educare queste alle costruzioni e alle misure. Ma la Scuola Complementare, a differenza della Scuola Tecnica, la quale per la grande maggioranza degli alunni rappresenta l'ultimo stadio di istruzione scolastica, ha come necessario complemento la Scuola Normale, in cui la Geometria sarà ripresa e svolta secondo i criteri razionali. Perciò credemmo opportuno imprimere a queste Nozioni un carattere e un assetto più decisamente sperimentale o, meglio detto, operativo.

Movendo dall'uso degli strumenti del disegno, abbiamo preparato e giustificato la definizione di ogni nuova figura colla effettiva costruzione di essa e da questa abbiamo in generale desunto le prime proprietà geometriche.

Alla scoperta *delle proprietà successive e meno semplici abbiamo sistematicamente guidato le alunne con facili* *esperienze; e riteniamo della massima importanza didattica che l' Insegnante curi di far individualmente ripetere nella scuola siffatte verifiche sperimentali, che, oltre l' efficacia dimostrativa, offrono spesso il non trascurabile vantaggio di costituire un ottimo sussidio mnemonico per le regole costruttive e di misura.*

Abbiamo conservato la solita distinzione tipografica di parti in carattere ordinario e parti in carattere minuto. Le prime, che (giova avvertirlo) costituiscono da sole un tutto organico ben connesso, corrispondono, nella nostra valutazione, al minimo sviluppo sufficiente del programma. Spetta alla prudenza e al senno dell' Insegnante di decidere, a seconda delle attitudini della scolaresca, sulla convenienza di valersi, in tutto o in parte, delle aggiunte in carattere minuto.

Solo avvertiamo che, tenendo conto dei Programmi vigenti, abbiam fatto stampare in carattere minuto le costruzioni fondamentali con riga e compasso; *ma noi condividiamo le vedute espresse nell' ordine del giorno del II Congresso di "Mathesis" (Padova, 1902) relativo all' opportunità di trasportare i rudimenti di Disegno Geometrico dal programma di Disegno a quello di Geometria.*

I programmi delle tre classi delle Complementari sono rispettivamente svolti nei Capitoli I-IV (pagg. 1-51), V-X (pagg. 58-103), XI-XIV (pagg. 118-172); nella prima parte, tenuto conto della scarsa maturità con cui, nell' ordinamento vigente, sogliono giungere le alunne alla Scuola Complementare, cercammo di usare una forma, per quanto ci fu possibile, piana e quasi diremmo famigliare: un po' più rapida procede la redazione nella seconda *parte e più ancora nella terza, dove accanto a ciascuna regola di misura indicammo la relativa espressione in simboli letterali.*

A ciascuna delle tre parti suindicate segue una numerosa serie di esercizi, molti dei quali sono facilissimi e tali da poter essere vantaggiosamente proposti nella scuola, a illustrazione e commento immediato della lezione orale. Essi si susseguono a gruppi, nell'ordine stesso della corrispondente materia del testo; e in ciascun gruppo, contrassegnato in margine dall'ultimo numero del trattato a cui si riferiscono, sono disposti in ordine di difficoltà crescente.

Attendiamo dagli Insegnanti quelle osservazioni e quei consigli che suggeriti dalla esperienza della Scuola, ci permettano di migliorare l'opera nostra; intanto ringraziamo vivamente il Prof. ARMANDO BARBIERI *della R. Scuola Normale di Modena, che, dopo aver letto il manoscritto, ci ha indicato qualche opportuna modificazione.*

Bologna-Modena, Aprile 1910.

F. ENRIQUES - U. AMALDI.

Avvertenza alla terza edizione. - *Rivedemmo con cura questo trattatello e, grazie sopratutto alle osservazioni e ai suggerimenti comunicatici dal Prof.* TOMMASO VANNINI *della R. Scuola Normale di Verona, vi arrecammo numerosi ritocchi, allo scopo di renderne più chiara e più facile la redazione.*

F. E. - U. A.

I.

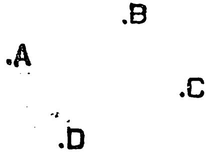
SEGMENTI ED ANGOLI
RIGA, RIGA GRADUATA, RAPPORTATORE

Piano, punto, retta.

1. Distendiamo un foglio di carta da disegno su di un tavolo ben spianato e levigato. Sarà questo il **piano** sui cui noi disegneremo.

Intorno a noi abbiamo altri *piani*: la lavagna, su cui disegneremo col gessetto, il pavimento della scuola, le pareti. E, così ancora, la superficie di uno specchio, la superficie di un lago ecc. servono tutte a farci capire « che cos'è un *piano* ».

2. Con un lapis, ben acuminato, si possono segnare sul foglio del disegno quanti **punti** si vogliono. Per distinguerli l'uno dall'altro segneremo accanto a ciascuno di essi una lettera maiuscola e li chiameremo « punto A », « punto B », punto « C », ecc.



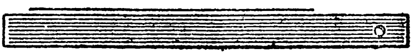
3. Se pieghiamo su se stesso il nostro foglio di carta e poi di nuovo lo distendiamo sul tavolo, la traccia della ripiegatura ci dà l'immagine di una **linea retta** o, come diremo per semplicità, di una **retta.**

Altre immagini di rette vediamo continuamente intorno a noi: tali sono p. es. lo spigolo di un tavolo, un filo sottile ben teso, un raggio di sole che da un forellino entri in una stanza buia, ecc.

Le alunne avran visto più volte come i decoratori di stanze, per tracciare una retta su di una parete da decorare, tendano, aderente a questa, una funicella intrisa di nerofumo, e, dopo averla leggermente allontanata dal muro pel suo mezzo, la abbandonino a sè in modo che battendo sulla parete vi lasci la sua traccia.

Così i giardinieri per segnare il bordo di un sentiero *rettilineo* tendono uno spago fra due picchetti infissi nel terreno.

4. Per *disegnare una retta* sul foglio si usa solitamente una RIGA.



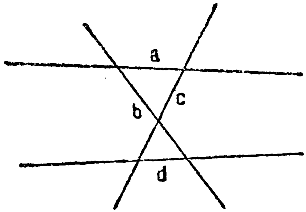
Appoggiata la riga sul foglio si fa scorrere lungo uno dei suoi orli la punta del lapis o della penna o del tiralinee. La traccia che così si ottiene sul foglio sarà più o meno lunga secondo la lunghezza della riga e l'ampiezza del foglio. Ma noi penseremo la retta **illimitata nei due sensi,** cioè indefinitamente proseguita nell'uno e nell'altro senso.

Per poter prolungare la retta quanto occorre, penseremo il piano **illimitato.**

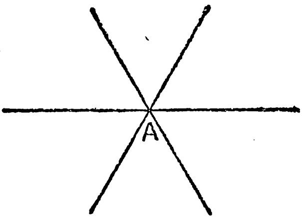
E perciò se il nostro foglio è troppo piccolo per il disegno che vogliamo eseguire, gliene incolleremo accanto un altro, da quella parte, in cui ci sarà più comodo.

5. Sul nostro piano, usando la riga, possiamo di-

segnare quante rette vogliamo. Per distinguerle, segneremo accanto a ciascuna una lettera minuscola e le chiameremo « retta *a* », « retta *b* », « retta *c* »...



6. Nel piano, per un punto A, possiamo, per mezzo della riga, *condurre* quante rette vogliamo.

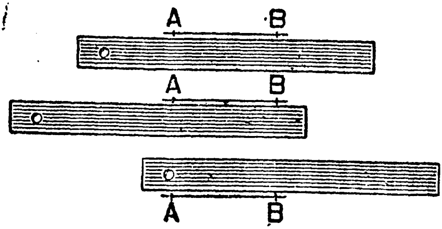


Ma preso un altro punto B *non possiamo condurre che una sola retta che passi per* A *e* B; cioè *due punti determinano una retta.*

Ciò si può verificare osservando che, se fra i due medesimi punti A e B tendiamo sul foglio due fili, p. es. puntando in A e B due spilli, i due fili si adagiano l'uno sull'altro.

La retta che passa per due punti A, B si dice « retta AB ».

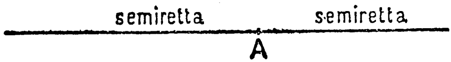
Nota. — Per condurre la retta AB si può adagiare la riga sul foglio in vari modi (vedi l'unita figura). Ma se la riga è esatta si deve sempre ottenere la medesima retta. Si ha così un modo per *verificare la riga.*



Semirette e segmenti.

7. Su di una retta possiamo segnare quanti punti vogliamo.

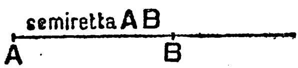
L'unita figura mostra che *ogni punto* A *di una retta la* **divide in due parti**, ciascuna delle quali è



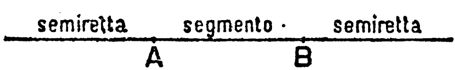
illimitata in un sol senso. Ciascuna delle due parti nelle quali una retta è divisa da un suo punto **A** si chiama **semiretta** o **raggio** di *origine* A.

Le due semirette in cui una retta è divisa da un suo punto si dicono l'una il *prolungamento* dell'altra.

La semiretta che ha per origine il punto A e passa per il punto B si dice « semiretta AB ».



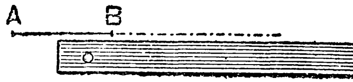
8. Si vede analogamente dall'annessa figura che *una retta è divisa da due suoi punti* A, B *in tre parti.*



Delle tre parti nelle quali una retta è divisa da due suoi punti A, B, la parte intermedia si dice « **segmento** AB »; e le altre due parti sono (n. prec.) due semirette (*prolungamenti del segmento* AB).

Il segmento AB si dice anche *distanza* dei due punti A, B.

I punti A, B chiamansi *estremi* del segmento AB; e i punti della retta AB compresi fra A e B diconsi *interni* al segmento.



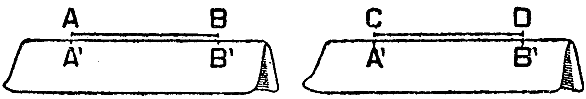
Dato sul foglio un segmento AB, se si vuol *prolungarlo,* p. es. dalla parte di B, si adopra la riga (n. 4), appoggiandola sul foglio in modo che il suo orlo collimi con una parte di AB.

Confronto di segmenti.

9. Due segmenti possono essere **uguali.**

Dati due segmenti AB, CD, per verificare se essi siano uguali, si ripieghi su se stessa una strisciolina di carta e adagiato l'orlo rettilineo della ripiegatura sul segmento AB, si segnino su di esso i due punti A′, B′ che coincidono con A, B rispettivamente.

Dopo ciò si trasporti codesta strisciolina di carta in guisa che il punto A′ vada a coincidere con C e



l'orlo A′B′ della ripiegatura si adagi sulla semiretta CD. Se allora il punto B′ va a coincidere con D concludiamo che i segmenti AB, CD sono uguali; e scriveremo

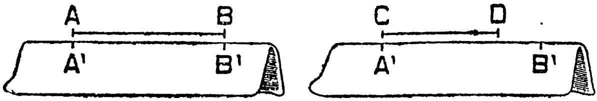
$$AB = CD \quad \text{o} \quad CD = AB.$$

In caso contrario i due segmenti sono *disuguali;* e precisamente se B′ va a cadere fra C e D diremo

che AB è *minore* di CD e che CD è *maggiore* di AB e scriveremo

$$AB < CD \quad , \quad CD > AB.$$

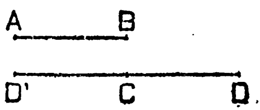
Se invece B′ va a cadere sul prolungamento di CD (cioè in un punto *esterno* a CD) diremo che AB



è *maggiore* di CD e che CD è *minore* di AB e scriveremo

$$AB > CD \quad , \quad CD < AB.$$

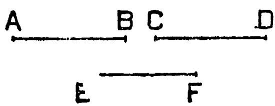
10. *Data una retta e un punto C su di essa, si possono determinare sulla retta due segmenti aventi un estremo in C e uguali ad un segmento dato AB.*



Basta trasportare, come dianzi, il segmento AB sulla retta a partire da C, dall'una e dall'altra parte di questo punto.

11. Si verifica senz'altro che:

Segmenti uguali ad uno stesso segmento sono uguali fra loro, cioè se



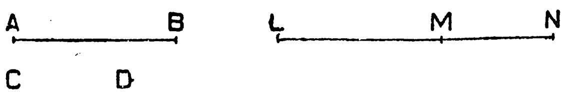
$AB = CD$ od $EF = CD$

si ha

$$AB = EF.$$

Somma e differenza di segmenti. Multipli e sottomultipli.

12. Somma di due o più segmenti. — Per *som-*

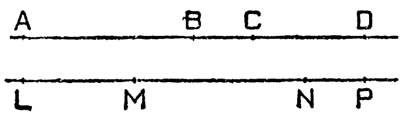


mare due segmenti AB, CD si portino su di una retta, servendosi come al n. 9 di una strisciolina di carta, due segmenti *consecutivi* LM, MN rispettivamente uguali ad AB, CD. Il segmento LN si dice *somma* di AB e CD (*addendi* o *parti*) e si scrive

$$LN = AB + CD.$$

Analogamente si trova la *somma di tre o più segmenti.*

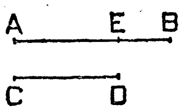
13. In ogni caso, *anche se si cambia l'ordine in cui si prendono i segmenti da sommare, si ottiene sempre come somma il medesimo segmento.*



Si guardi p. e. l'unita figura dove si è preso

$$LM = CD,\ MN = AB,\ NP = BC.$$

14. Differenza di due segmenti. — Per *sottrarre* da un segmento AB un segmento minore CD si prenda su AB a partire da A il segmento AE uguale a CD. Il segmento EB si dice *differenza* di AB e CD e si scrive



$$EB = AB - CD.$$

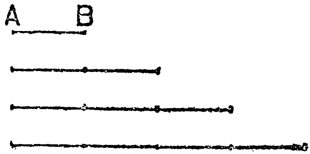
Similmente AE si dirà differenza di AB ed EB e si scriverà

$$AE = AB - EB.$$

15. Si verifica senz'altro che: *Sommando a segmenti uguali segmenti uguali, si ottengono segmenti uguali.*

Sottraendo da segmenti uguali segmenti uguali, si ottengono segmenti uguali.

16. Multipli e sottomultipli di un segmento. — Dato un segmento AB, la *somma* di due segmenti uguali ad AB dicesi *segmento doppio* di AB, o *multiplo di* AB *secondo* 2. Così le somme di tre, quattro, cinque... segmenti uguali ad AB diconsi rispettivamente *multipli di* AB *secondo* 3, 4, 5,...



I multipli di AB si indicano con 2AB, 3AB, 4AB,...

17. Si segni un segmento AB sull'orlo rettilineo di una strisciolina di carta. Ripiegando questa su se stessa in modo che B vada a coincidere con A, dividiamo il segmento AB in due *parti* uguali, ciascuna delle quali si dice *metà* di AB (od anche *sottomultiplo* o *parte aliquota* di AB secondo 2).

Ripiegando ancora la strisciolina di carta, possiamo dividere il segmento AB in 4 parti uguali e poi in 8 e così via.

Similmente, ripiegando opportunamente, possiamo dividere il segmento AB in 3 parti uguali, ecc.

In ogni caso, quando AB è diviso in un certo numero di parti uguali, ciascuna di queste si dice *parte aliquota* o *sottomultiplo* di AB.

Questi diversi sottomultipli si indicano con

$$\frac{AB}{2}, \frac{AB}{3}, \frac{AB}{4}, ...$$

Si legga « una metà di AB », « un terzo di AB », « un quarto di AB », ecc.

18. *Se due segmenti sono uguali, sono pure rispet-*

tivamente uguali i loro multipli secondo 2, *o* 3, *o* 4,... *e così pure le loro metà, i loro terzi, i loro quarti,* ecc.

Misurazione dei segmenti. Riga graduata.

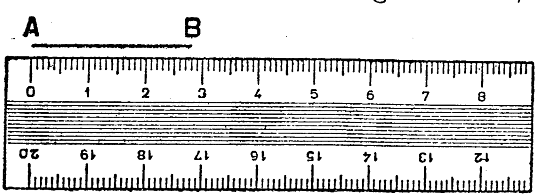
19. Nel disegno, per confrontare segmenti (n. 9), trasportarli (n. 10), sommarli (n. 12), ecc., si adopera solitamente, invece della strisciolina di carta ripiegata di cui noi ci servimmo dianzi, una RIGA GRADUATA.

Si hanno righe graduate di varia lunghezza; ma la più usata nel disegno è il *doppio-decimetro.*

Il doppio-decimetro è una piccola riga, di cui lo spigolo è diviso (*graduato*) in venti tratti uguali fra loro, e numerati da 0 a 20, ognuno dei quali è un *centimetro,* cioè la centesima parte aliquota del *metro,* che, come sappiamo fino dalle Scuole elementari, è l'*unità di misura fondamentale delle lunghezze.*

Ciascuno poi di codesti 20 centimetri è diviso in dieci parti uguali o *millimetri* e talvolta ogni millimetro è suddiviso per metà.

20. Per misurare un segmento AB, si appoggi il doppio decimetro sul foglio in modo che lo spigolo graduato collimi colla retta AB e l'estremo A coincida collo 0 della graduazione. Se l'altro estremo B coincide con una delle divisioni della graduazione, p. es.



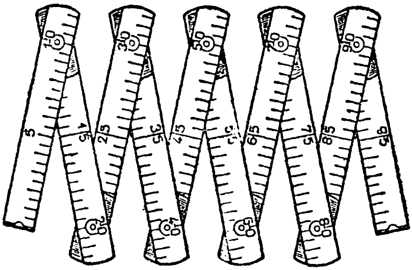
colla 28ª (escluso la 0), si dice che 28 mm. è la *misura* (o *lunghezza*) del segmento AB.

Se poi B non coincide con alcuna divisione, sarà compreso fra due divisioni successive, p. es. fra la 28ª e la 29ª: allora si dirà che 28 mm. è la *misura* (o *lunghezza*) *approssimata* per difetto (a meno di 1 mm.) di AB, e 29 mm. è la *misura approssimata* per eccesso del segmento dato.

Se in questo secondo caso si volesse conoscere in modo più preciso la lunghezza del segmento AB, bisognerebbe poter disporre di una riga graduata, a graduazione più minuta: ma, come già dicemmo, le righe graduate che si usano nel disegno sono, tutt'al più, suddivise in mezzi millimetri.

21. Nella pratica per misurare le lunghezze si usano, invece delle righe graduate del disegno, altri strumenti.

Il venditore di stoffe usa un regolo di legno lungo un metro e suddiviso, per mezzo di intaccature, in decimetri e centimetri.



Il legnaiolo per misurare p. es. la lunghezza di una tavola, adopra un metro pieghevole, costituito da dieci regoletti di legno, connessi l'uno all'altro a pernio e lunghi ciascuno, fra i due pernii, 1 dm.

Il sarto si serve di un nastro lungo un metro e mezzo, cioè 15 dm. o infine 150 cm.

E per misurare la lunghezza di un viale, di un muro, di una cancellata ecc. si adopra un *decametro* a nastro, cioè un nastro

lungo 10 m., che si tiene avvolto entro una custodia di cuoio, intorno ad un pernio girevole per mezzo di una piccola manovella.

In ogni caso i metri usati nella pratica sono uguali al *metro-campione*, il quale è segnato sullo spigolo di un regolo di platino, che si conserva dal 1799 negli Archivi dello Stato Francese a Parigi, ed è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, secondo le determinazioni della Commissione geodetica francese nominata dall'Assemblea Nazionale nel 1790.

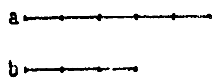
22. Per misurare le grandi lunghezze che si presentano nella pratica (p. es. la lunghezza di una strada) si considerano altre unità ausiliari: il *decametro* (1 *dam.*), che è uguale a 10 m., *l'ettometro* (1 *hm.*), uguale a 100 m., il *chilometro* (1 *km.*), uguale a 1000 m.

23. Misurazione dei segmenti rispetto ad una unità qualsiasi. — Abbiamo veduto come si misuri un segmento in metri, decimetri, centimetri,...

In modo più generale si può misurare un segmento per mezzo di un altro qualsiasi, assunto come *unità*.

Misurare un segmento a per mezzo di un segmento b significa trovare un sottomultiplo di b che sia pure sottomultiplo di a o, come si dice comunemente, sia contenuto in a un numero esatto di volte.

Si trovi p. es. che il 3° summultiplo di b è contenuto esattamente 5 volte in a; si abbia cioè



$$a = 5\,\frac{b}{3},$$

o, come si suole scrivere

$$a = \frac{5}{3}\,b.$$

[Si legga « a uguale a cinque terzi di b »].

Allora si dice che $\frac{5}{3}$ è la « *misura* di a rispetto all'unità di misura b ».

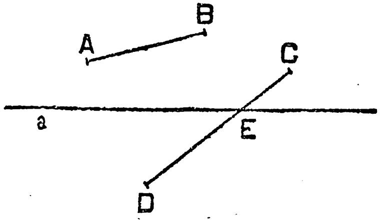
Parti di piano. Angoli.

24. Se sul foglio tracciamo una retta a e lo tagliamo lungo di questa, il foglio resta diviso in due parti.

Così *il piano,* pensato come una superficie illimitata, *vien* **diviso** *da una retta* a, *tracciata su di esso, in* **due parti.**

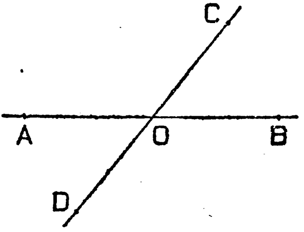
Codeste due parti si dicono **semipiani.**

25. Se si è diviso il piano con una retta a in due semipiani e si prendono due punti A, B in uno stesso semipiano il segmento AB giace tutto in quel semipiano. Se invece si prende un punto C in un semipiano e un punto D nell'altro, il segmento CD attraversa, o come si dice, *sega* la a in un punto E.



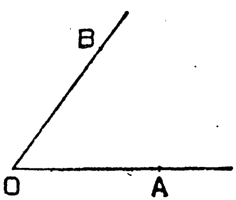
La parte CE di CD giace in un semipiano e la parte ED nell'altro.

26. *Se per un punto* O *del piano conduciamo due rette* AB, CD, *vediamo che il piano vien* **diviso in quattro parti.**



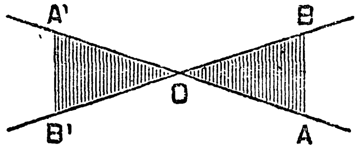
Ciascuna delle quattro parti nelle quali il piano è diviso da due rette passanti per un punto O si chiama **regione angolare** o semplicemente **angolo.**

Un *angolo* è limitato da due semirette OA OB aventi la stessa origine O. L'angolo si designa con $A\widehat{O}B$; il punto O si dice *vertice* e le semirette OA, OB *lati* dell'angolo.

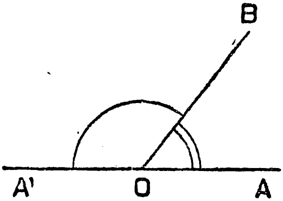


27. Dato un angolo $A\widehat{O}B$ si conducano i prolungamenti OA′, OB′ dei due lati. Queste due semirette determinano

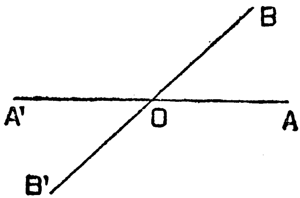
un angolo $\widehat{A'OB'}$, che si dice *opposto al vertice* all'angolo dato $\widehat{AOB}$.



28. Se invece, dato un angolo $\widehat{AOB}$, si conduce il prolungamento di un solo lato, p. es. il prolungamento OA′ di OA, si ottiene un angolo $\widehat{BOA'}$ che si dice *adiacente* di $\widehat{AOB}$.



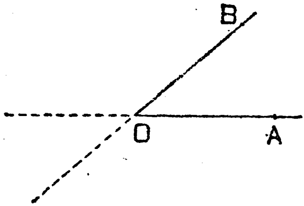
29. Guardando l'unita figura, vediamo che *un qualsiasi angolo* $\widehat{AOB}$ *ha un solo angolo opposto al vertice e due angoli adiacenti,* cioè $\widehat{BOA'}$ e $\widehat{B'OA}$.



Questi due ultimi angoli sono opposti al vertice fra loro.

Angoli concavi e piatti.

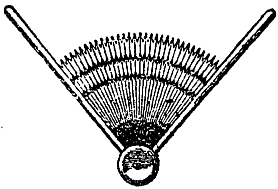
30. Dato un angolo $\widehat{AOB}$, le due semirette OA, OB dividono il piano in due parti di cui una è l'angolo $\widehat{AOB}$ e l'altra è l'insieme dei due angoli adiacenti ad esso e dell'opposto al vertice. Per brevità, anche questa seconda parte di piano si chiama *angolo.*

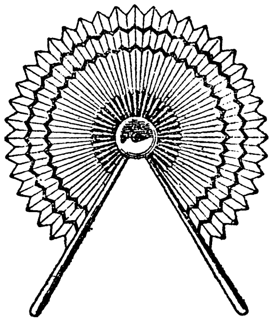


Per distinguerla dalla prima, si dice *angolo concavo* $\widehat{AOB}$, mentre l'altra parte si dice *angolo convesso* $\widehat{AOB}$.

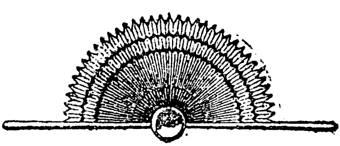
Vediamo sulla figura, che se consideriamo l'angolo $\widehat{AOB}$ convesso, i prolungamenti dei lati sono fuori dell'angolo convesso $\widehat{AOB}$ (*esterni*); se invece consideriamo l'angolo $\widehat{AOB}$ concavo, i prolungamenti dei lati sono dentro l'angolo concavo $\widehat{AOB}$ (*interni*).

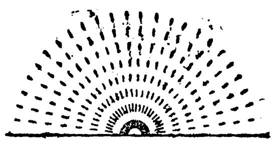
31. Un ventaglio giapponese, secondo che è o quasi chiuso o quasi del tutto aperto, ci dà l'idea di un angolo convesso o concavo.





Se poi l'apriamo a metà, in modo che le due stecche si dispongano in linea retta, otteniamo l'im-





magine di un angolo, in cui i due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro, e che perciò non si può dire nè convesso nè concavo.

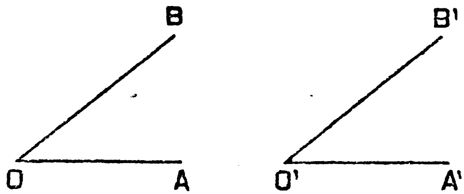
Un angolo nel quale i due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro si dice *piatto*.

32. Avvertenza. — D'or innanzi, quando nomineremo un « angolo $\widehat{AOB}$ » senza dire nulla di più, intenderemo parlare dell'angolo $\widehat{AOB}$ convesso.

Confronto di angoli.

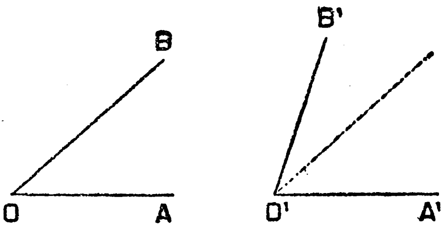
33. Due angoli possono essere **uguali.**

Per verificare se due angoli dati $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ sono uguali, si trasporti l'angolo $\widehat{AOB}$, p. es., ritagliandolo in carta o ricalcandolo in lapis su carta trasparente, sull'altro angolo $\widehat{A'O'B'}$, facendo coincidere il vertice O con O′ e il lato OA con O′A′. Se il lato OB va a cadere precisamente su O′B′, i due angoli sono *uguali* e scriveremo



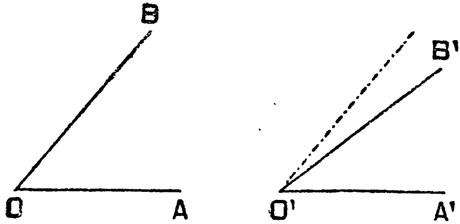
$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} \quad \text{o} \quad \widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}.$$

In caso contrario i due angoli sono *disuguali;* e, precisamente, se il lato OB va a cadere internamente ad $\widehat{A'O'B'}$, l'angolo $\widehat{AOB}$ è *minore di* $\widehat{A'O'B'}$ e $\widehat{A'O'B'}$ è *maggiore* di $\widehat{AOB}$; e noi scriveremo



$$\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'} \quad , \quad \widehat{A'O'B'} > \widehat{AOB}.$$

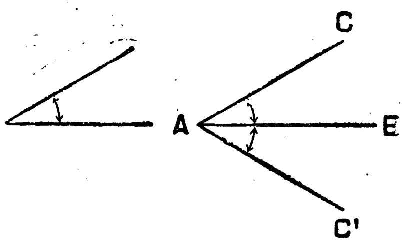
Se poi infine il lato OB cade esternamente ad $\widehat{A'O'B'}$, l'angolo $\widehat{AOB}$ è *maggiore* di $\widehat{A'O'B'}$, e $\widehat{A'O'B'}$ è *minore* di $\widehat{AOB}$: ciò si scrive



$$\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'} \quad \text{o} \quad \widehat{A'O'B'} < \widehat{AOB}.$$

34. Ritagliando un angolo di carta o disegnandolo su carta trasparente, si verifica che:

Data sul piano una semiretta AB *si possono condurre per* A *due semirette* AC, AC′, *che formino con* AB *due angoli* $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAC'}$, *uguali ad un angolo dato.* Questi due angoli giacciono da parti opposte del lato comune AB.



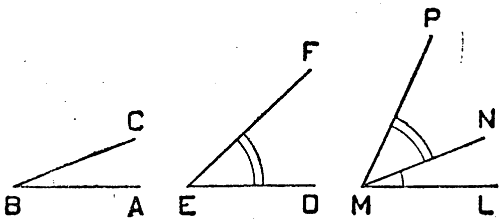
35. Si verifica ancora che:

a) *Angoli uguali ad uno stesso angolo sono uguali fra loro.*

b) *Due angoli piatti qualsiansi sono uguali fra loro.*

Somma e differenza di angoli. Multipli e sottomultipli di un angolo.

36. Somma di due o più angoli. — Per *sommare*



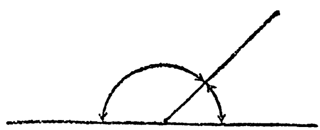
due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$, si portino a partire da una semiretta ML e da una parte di essa, due angoli *consecutivi* $\widehat{LMN}$, $\widehat{NMP}$, uguali rispettivamente ai dati. (Ciò si può fare ritagliando gli angoli dati o ricalcandoli su carta trasparente).

L'angolo $\widehat{LMP}$ così ottenuto dicesi *somma* di $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ (*addendi* o *parti*) e si scrive

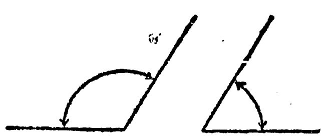
$$\widehat{LMP} = \widehat{ABC} + \widehat{DEF}.$$

In modo analogo si definisce la *somma di tre o più angoli.*

37. *La somma di due angoli adiacenti* (n. 28) *è un angolo piatto.*

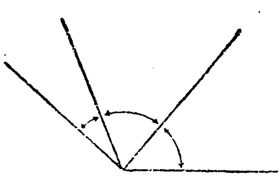


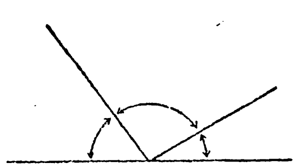
38. Due angoli si dicono *supplementari* se la loro somma è un angolo piatto.

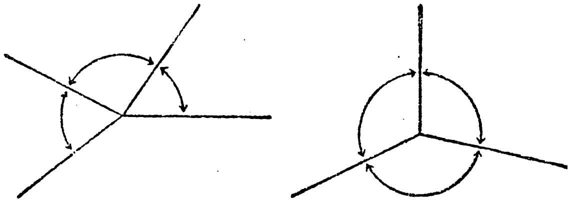


Un angolo e un suo adiacente sono supplementari.

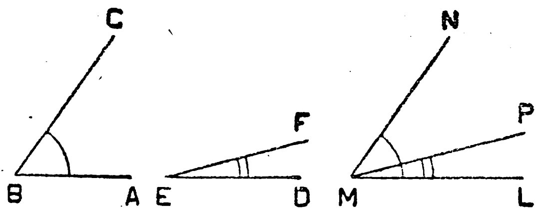
39. La somma di più angoli convessi (n. 30) può essere uguale a un angolo convesso o piatto o concavo od anche a due angoli piatti (*angolo di un giro*).







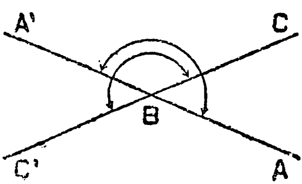
40. Differenza di due angoli. — Per trovare la *differenza* di due angoli disuguali $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ o, come si suol dire, per *sottrarre* dall'angolo maggiore $\widehat{ABC}$ il minore $\widehat{DEF}$ si prenda un angolo $\widehat{LMN}$ uguale al maggiore, cioè ad $\widehat{ABC}$, e si porti il minore in $\widehat{LMP}$.



L'angolo $\widehat{PMN}$ si dice *differenza* di $\widehat{ABC}$ e $\widehat{DEF}$; e si scrive

$$\widehat{PMN} = \widehat{ABC} - \widehat{DEF}.$$

41. Ritagliando degli angoli di carta si verifica che: *Se a due angoli uguali si sommano o si sottraggono angoli uguali, si ottengono angoli uguali.*



42. Preso sul foglio del disegno un angolo $\widehat{ABC}$, se ne disegni l'opposto al vertice $\widehat{A'BC'}$.

Se si ritagliano i due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'BC'}$, si ve rifica che essi possono sovrapporsi esattamente, cioè sono uguali.

Del resto che questi due angoli sono uguali si può vedere anche in un altro modo.

Siccome tutti gli angoli piatti sono uguali (n. 35), avremo che l'angolo piatto $\widehat{ABA'}$ che contiene C è uguale all'angolo piatto $\widehat{CBC'}$ che contiene A'. (Nella fig. precedente codesti due angoli sono segnati da freccie). Se allora sottragghiamo da tutti e due lo stesso angolo $\widehat{CBA'}$ otteniamo differenze uguali (n. prec.); cioè sono uguali i due angoli opposti al vertice $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'BC'}$.

Abbiamo dunque che:

Angoli opposti al vertice sono uguali fra loro.

43. Multipli e sottomultipli di un angolo. — Dato un angolo $\widehat{AOB}$, la somma di due angoli uguali ad esso si dice *angolo doppio* di $\widehat{AOB}$ (o *multiplo* di $\widehat{AOB}$ *secondo* il numero 2).

Così le somme di tre o quattro o cinque... angoli uguali ad $\widehat{AOB}$ si dicono *multipli* di $\widehat{AOB}$ secondo 3, o 4, o 5,...

I multipli di $\widehat{AOB}$ si indicano con

$$2\,\widehat{AOB}\ ,\ 3\,\widehat{AOB}\ ,\ 4\,\widehat{AOB},\ldots$$

44. Dato un angolo $\widehat{AOB}$, dopo averlo ritagliato o ricalcato in lapis su carta trasparente, si ripieghi su se stesso in modo che i due lati si sovrappongano l'uno all'altro. La ripiegatura dà una semiretta, che divide l'angolo $\widehat{AOB}$ in due parti uguali.

Codesta semiretta si chiama *bisettrice* dell'angolo e ciascuna delle due parti si dice *metà* di $\widehat{AOB}$.

In ogni caso, quando $\widehat{AOB}$ è diviso in un certo numero di parti uguali, ciascuna di queste si dice *parte aliquota* o *sottomultiplo* dell'angolo dato.

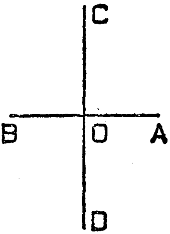
Codeste diverse parti aliquote si rappresentano con

$$\frac{\widehat{AOB}}{2}, \frac{\widehat{AOB}}{3}, \frac{\widehat{AOB}}{4}, \ldots$$

45. *Se due angoli sono uguali, sono pure rispettivamente uguali i loro doppi, i loro tripli, ecc. e così pure le loro metà, i loro terzi, ecc.*

Angoli retti, acuti, ottusi.

46. Disegnata sul foglio una retta AB e preso su di essa un punto O, si pieghi il foglio in modo da far combaciare le due semirette OA e OB.



Disteso ancora il foglio, la ripiegatura ottenuta dà una retta CD, la quale divide per metà ciascuno dei due angoli piatti $\widehat{AOB}$.

Avremo quindi

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB} \text{ e } \widehat{BOD} = \widehat{DOA}.$$

Ma siccome $\widehat{AOC}$ e $\widehat{BOD}$ sono opposti al vertice, anch'essi sono uguali (n. 42); cosicchè sono uguali fra loro tutti e quattro gli angoli

$$\widehat{AOC}, \widehat{COB}, \widehat{BOD}, \widehat{DOA}$$

in cui il piano è diviso dalle rette AB, CD.

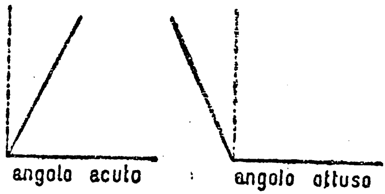
Ciascuno di codesti quattro angoli si dice *retto;* cioè si dice *angolo retto* la metà di un angolo piatto.

47. *Ogni angolo retto è uguale al suo supplementare;* ossia *il supplementare di un angolo retto è pur esso un angolo retto.*

48. Come sono uguali fra loro tutti gli angoli

piatti (n. 35), così *tutti gli angoli retti sono uguali*, perchè sono ciascuno metà di un angolo piatto (n. 45).

49. Un angolo minore di un angolo retto si dice *acuto;* un angolo maggiore di un retto si dice *ottuso*.



Se due angoli sono supplementari ma non retti, uno di essi è acuto e l'altro ottuso.

Misurazione degli angoli. Rapportatore.

50. Per misurare gli angoli si assume come unità fondamentale la 90ma parte aliquota dell'angolo retto, la quale si chiama *grado* e si scrive 1°.

Se un angolo è multiplo di un grado secondo un certo numero, p. es. secondo il numero 27, si dice che « la *misura* o *ampiezza* dell'angolo dato è di 27 gradi » e si scrive « 27° ».

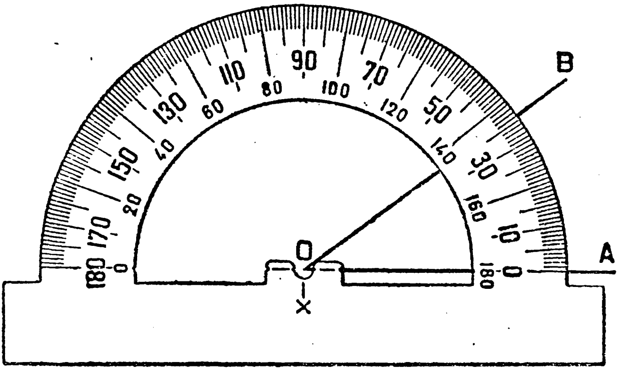
Si dirà quindi che l'ampiezza di un angolo retto è di 90° e quella di un angolo piatto di 180°.

51. Per misurare un angolo, che non sia multiplo esatto di un grado, si prendono come unità ausiliarie il *minuto* che è la 60ma parte aliquota di 1° e il *secondo* che è la 60ma parte aliquota del minuto, ossia la 3600ma parte aliquota di 1°.

Un minuto si scrive « 1′ » e un secondo « 1″ ».

Così si dirà p. es. che la ampiezza di un angolo è 35° 26′ 13″, cioè 35 gradi 26 primi 13 secondi, se l'angolo è uguale alla somma di 35 angoli uguali ad un grado, più 26 angoli uguali ad un minuto, più 13 angoli uguali ad un secondo.

52. Nel disegno per misurare gli angoli, come pure per confrontarli (n. 33), sommarli (n. 36), ecc., si usa il SEMICIRCOLO GRADUATO O RAPPORTATORE che è rappresentato nell' unita figura.



L'orlo curvo esterno del rapportatore è suddiviso in 180 intervalli per mezzo di tante intaccature rettilinee, le quali prolungate passano tutte per il punto medio O dell' orlo rettilineo interno, e corrispondono alla divisione in 180 gradi dell' angolo piatto che ha il vertice in codesto punto O e i lati su codesto orlo rettilineo. Le divisioni del rapportatore sono numerate di 10 in 10 tanto in un senso quanto nell'altro, affinchè si possano misurare gli angoli in entrambi i sensi.

Per misurare un angolo $\widehat{AOB}$ col rapportatore si adagia questo sull' angolo, come è indicato dalla precedente figura, e la graduazione numerata permette subito di assegnare l' ampiezza in gradi di $\widehat{AOB}$.

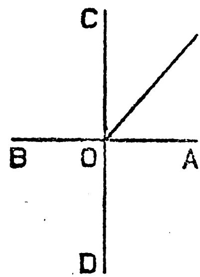
Per es. nel caso della figura l' ampiezza di $\widehat{AOB}$ è di 36°.

II.

POSIZIONI NOTEVOLI DI DUE RETTE. SQUADRA

Rette perpendicolari.

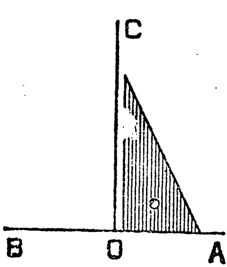
53. Due rette AB, CD che, segandosi in un punto O, dividono il piano in quattro angoli retti, si dicono fra loro *perpendicolari*.



Ogni retta passante per O e diversa dalla CD forma colla AB angoli adiacenti disuguali e non è quindi perpendicolare alla AB o, come si dice, *è obliqua*.

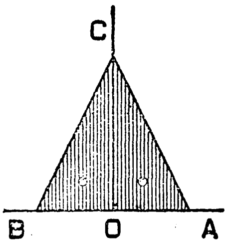
Vedíamo così che: *Per un punto* O *di una retta* AB *passa una sola perpendicolare alla* AB.

54. Per condurre per un punto O di una retta AB la perpendicolare alla AB basta, come vedemmo al numero 46, ripiegare il foglio in modo da far combaciare le due semirette in cui la retta AB è divisa da O.



Nel disegno solitamente si adopera la SQUADRA, come indica l'unita figura.

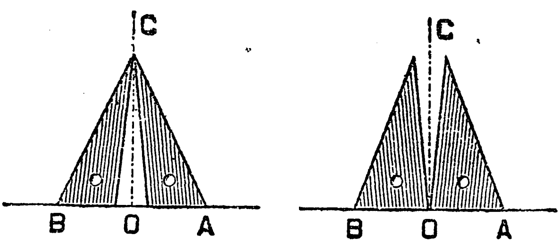
Gli angoli AOC e $\widehat{BOC}$, entrambi retti, sono uguali; perciò se ribaltiamo la squadra sul foglio dall'altra parte della OC, essa deve sovrapporsi esattamente all'angolo $\widehat{BOC}$.



Abbiamo così un modo per *verificare* se la squadra sia esatta.

Quando si sia verificata *una volta* la squadra, si è sicuri che tutte le costruzioni che si eseguiranno con essa riusciranno esatte.

55. Nell'unita figura abbiamo esempio di squadre inesatte o, come si dice, *false*.

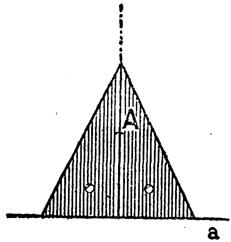


56. La squadra si può usare anche per condurre per un punto dato A una retta che sia perpendicolare ad una retta data *a*, non passante per A.

Basta perciò fare scorrere la squadra sul foglio, con uno spigolo dell'angolo retto lungo la retta *a*, finchè l'altro spigolo vada a combaciare col punto A (vedi la fig. della pag. seg.).

La traccia di questo ultimo spigolo dà la perpendicolare cercata.

Il segmento di perpendicolare compreso fra A e il suo incontro con la retta *a* (*piede* della perpendicolare) dicesi *distanza* del punto A dalla retta *a*.

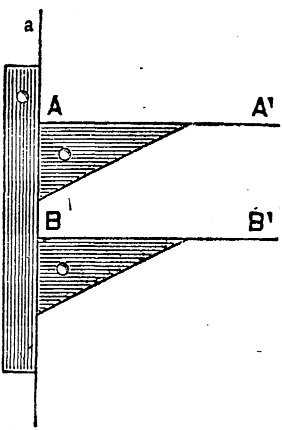


57. *Data una retta* a, *per un punto* A *fuori di essa, passa una sola perpendicolare alla retta* a.

Ciò si verifica come indica l'unita figura; cioè ribaltando la squadra (supposta esatta) intorno alla perpendicolare ottenuta al n. prec.

Rette parallele.

58. Con la riga disegniamo sul foglio una retta *a*, e, tenendo ferma la riga lungo la *a*, collochiamo sul foglio la squadra col vertice dell'angolo retto in un punto A della *a* e uno spigolo appoggiato esattamente alla riga, in modo da poter condurre per A la perpendicolare AA′ alla *a* (n. 54).



Se, tenendo sempre ferma la riga, facciamo scorrere lungo di essa la squadra, vediamo che tutti i punti dello spigolo, che prima era lungo la AA′, si allontanano ugualmente dalla AA′, e lo stesso accade manifestamente di ogni punto dei prolungamenti di codesto spigolo; cosicchè la perpendicolare BB′ alla *a* in un punto B diverso da A giace tutta da una stessa parte della retta AA′ e perciò non la può mai incontrare.

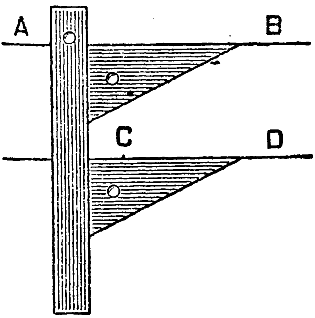
Le rette AA′, BB′ si diranno *parallele.*

In ogni caso due rette si diranno *parallele,* se giacciono in uno stesso piano e non hanno nessun punto comune.

59. Da quanto abbiamo visto pocanzi risulta anzitutto che:

Tutte le perpendicolari ad una retta sono parallele fra loro.

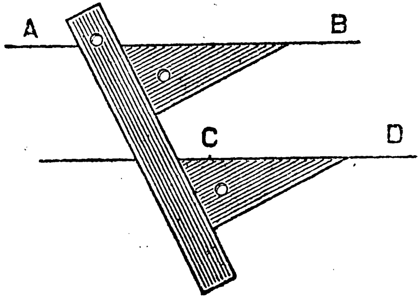
60. In secondo luogo il n. 58 ci insegna come con la riga e la squadra si possa *condurre per un punto* C *una retta parallela ad una retta data* AB, *non passante per* C.

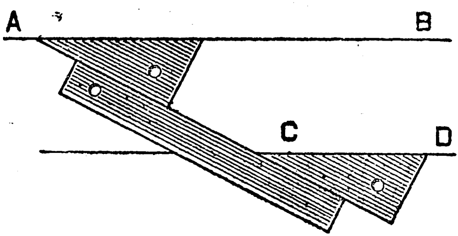


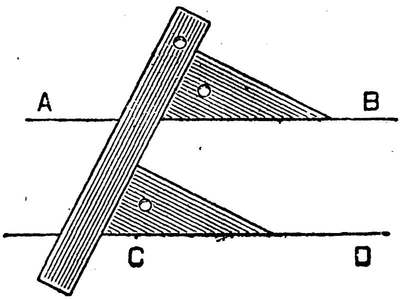
A questo scopo si collochi la squadra sul foglio con uno spigolo dell'angolo retto lungo la AB e, fatta combaciare la riga collo spigolo della squadra perpendicolare alla AB, si faccia scorrere la squadra, tenendola a contatto della riga, finchè lo spigolo che prima era sulla AB passi per C.

La CD sarà parallela alla AB.

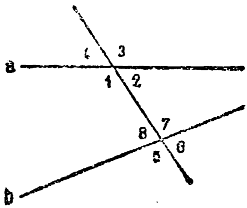
61. È importante osservare che la stessa costruzione si può eseguire anche appoggiando sulla retta AB lo spigolo della squadra opposto all'angolo retto (vedi le unite figure), e si ottiene per C una retta parallela alla AB, *qualunque sia l'ampiezza dell'angolo della squadra, che si è fatto scorrere lungo la riga.*





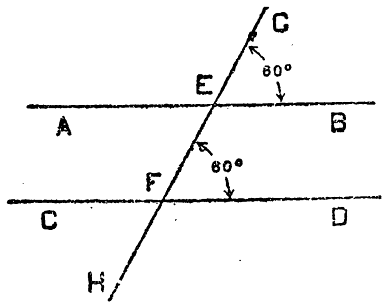


62. Ora sarà comodo dar dei nomi agli otto angoli che due rette *a, b* del piano formano con una terza retta *c,* che le seghi entrambe, o, come diremo, con una *trasversale.*



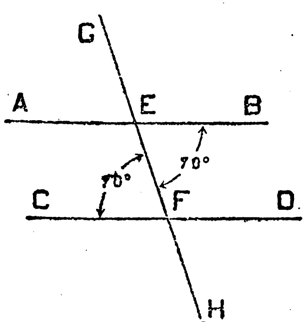
Riferiamoci alla figura qui unita. Gli angoli 2 e 6 si dicono *corrispondenti;* così si dicono *corrispondenti* gli angoli 3 e 7 oppure 4 e 8 o infine 1 e 5.

Invece gli angoli 2 e 8 o 1 e 7 si dicono *alterni interni,* e gli angoli 3 e 5 o 4 e 6 *alterni esterni.*



63. Servendoci di queste denominazioni, e ricordando l'osservazione del n. 61 possiamo enunciare la seguente regola per verificare se due rette sono parallele: *Due rette le quali formino con una trasversale due angoli corrispondenti uguali sono parallele.*

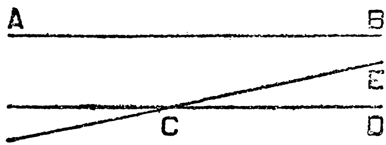
64. Invece della regola precedente, si può servirsi di quest'altra: *Due rette le quali formino con una trasversale due angoli alterni uguali, sono parallele.*



P. es. date le AB, CD e la trasversale GH, gli angoli alterni interni $\widehat{FEB}$, $\widehat{EFC}$ siano entrambi di 70°. Allora l'opposto al vertice di $\widehat{EFC}$, cioè $\widehat{HFD}$, è anch'esso di 70° (n. 42); cosicchè abbiamo che sono uguali gli angoli corrispondenti $\widehat{FEB}$, $\widehat{HFD}$, e perciò le AB, CD sono parallele (n. prec.).

65. Per un punto C fuori di una retta AB noi sappiamo condurre, con la riga e la squadra, una parallela alla AB; e, come abbiamo visto ai nn. 60, 61 questa costruzione si può eseguire in diversi modi. Ma basta osservare la figura per vedere che si deve sempre ottenere la medesima parallela.

Invero se CD è la parallela alla AB che abbiamo trovato usando in un certo modo la riga e la squadra (p. es. come si è detto al n. 60) noi vediamo che ogni altra retta per C, diversa dalla CD, quando sia prolungata abbastanza, finisce col passare dall'altra parte della AB e perciò la sega in un punto, cioè non è ad essa parallela.

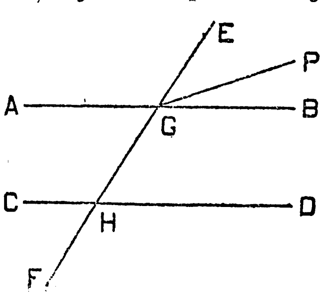


Abbiamo dunque che:

Vi è una sola retta passante per un punto e parallela ad una retta (non passante per quello).

66. Disegnate sul foglio due rette parallele e condotta una loro traversale qualsiasi, si verificano ritagliando la carta, le seguenti proposizioni: *Se due rette sono parallele, esse formano con una traversale qualsiasi:*

1) *angoli corrispondenti uguali;* 2) *angoli alterni uguali.*



Ciò si può anche *dimostrare* nel modo seguente.

Siano le due rette parallele AB, CD intersecate dalla trasversale EF nei punti G, H rispettivamente.

1) Scelti due qualsivogliano angoli corrispondenti per esempio $\widehat{BGE}$ e $\widehat{DHG}$, diciamo che essi sono uguali.

Supposto che siano disuguali, potremo condurre per G, dalla stessa parte di GB rispetto alla EF, la semiretta GP tale che l'angolo $\widehat{PGE}$ sia uguale a $\widehat{DHG}$. Allora le rette GP e CD, che con la trasversale EF formano angoli corrispondenti uguali sono parallele (n. 63), e pel punto G passano le due rette distinte GB, GP entrambe parallele alla CD, il che non può essere (n. 65). Abbiamo dunque veramente che gli angoli $\widehat{BGE}$, $\widehat{DHG}$ non possono essere disuguali.

2) Diciamo che gli angoli alterni, per esempio $\widehat{BGE}$ $\widehat{FHC}$, sono uguali.

Infatti essendo uguali gli angoli corrispondenti $\widehat{BGE}$, $\widehat{DHG}$, l'angolo $\widehat{BGE}$ sarà di conseguenza uguale anche all'opposto al vertice di $\widehat{DHG}$ (n. 42), cioè ad $\widehat{FHC}$.

67. Risulta dal n. prec. che:

Se due rette sono parallele, ogni perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra.

III.

CIRCONFERENZA E CERCHIO. COMPASSO

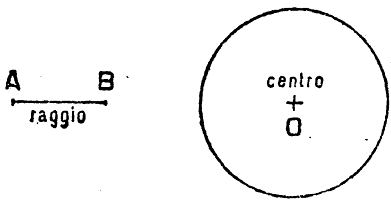
Definizioni.

68. Puntato sul foglio con uno spillo in un punto O il capo di un filo, fissiamo al filo, ad una certa distanza da O, la punta del lapis.

Se col lapis, tenendo ben teso il filo, giriamo intorno al punto O, fino a tornare alla posizione di partenza, otteniamo sul foglio una **linea chiusa** i cui punti hanno tutti la stessa distanza da O.

Questa linea si dice una *circonferenza*.

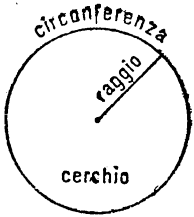
Cioè dati un punto O ed un segmento AB, si dice *circonferenza* di *centro* O e *raggio* AB, la *linea* dei punti che hanno da O distanza uguale ad AB.



Nel disegno, per descrivere una circonferenza, si usa un COMPASSO, di cui una punta è sostituibile con una matita o con un tiralinee.

69. Come risulta dalla figura, la circonferenza divide il piano in due parti:

1.° il *cerchio* o regione piana dei punti (*interni*) la cui distanza da O è minore del raggio;



2.° la regione piana dei punti (*esterni*) la cui distanza da O è maggiore del raggio.

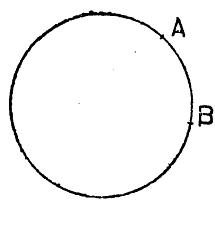
La circonferenza e il cerchio si designano, indicandone il centro e il raggio, e, quando non siavi possibilità di equivoco, indicando soltanto il centro.

70. *Due circonferenze o due cerchi aventi ugual raggio sono* **uguali**, come si verifica sovrapponendoli.

Diametri e corde. Archi e settori.

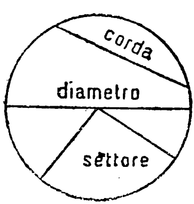
71. Segnato un punto A su di una circonferenza, questa, diversamente da quanto accade per la retta, non resta divisa in due parti, perchè la circonferenza è una **linea chiusa.**

Ma se invece sulla circonferenza segniamo due punti A, B, essa resta divisa in *due* parti, che si chiamano *archi* (di circonferenza).



72. Un segmento AB, avente gli estremi sulla circonferenza, si dice *corda*.

Ad ogni arco AB del cerchio corrisponde una corda che si dice *sottesa* dall'arco.



Le corde passanti pel centro si chiamano *diametri*.

73. *I diametri di un cerchio sono tutti uguali,* perchè sono doppi del raggio (n. 18).

74. Condotta una corda di un cerchio, noi, esaminando la figura, vediamo che *i punti di una corda, tolti gli estremi, sono tutti interni al cerchio.*

75. Due raggi OA, OB di un cerchio, lo dividono in due parti, che si chiamano *settori* circolari.

I due angoli $\widehat{AOB}$, l'uno convesso e l'altro concavo, si dicono *angoli al centro.*

A ciascun arco AB e a ciascun settore ABO *corrisponde* un determinato angolo al centro.

76. In modo simile a quello tenuto per i segmenti (n. 9) e per gli angoli (n. 33), si possono confrontare due archi (o settori) di una stessa circonferenza (o cerchio) o di circonferenze (o cerchi) uguali; e si può verificare se essi siano uguali o, in caso contrario, quale sia il *maggiore* e quale il *minore.*

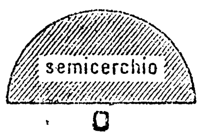
Così si verifica che:

In una stessa circonferenza o cerchio e in circonferenze o cerchi uguali, ad archi o settori uguali corrispondono angoli al centro uguali, e ad archi o settori disuguali corrispondono angoli al centro disuguali nello stesso senso, e viceversa.

Nota. — Perciò, nel costruire un rapportatore, basta dividerne in 180 parti uguali la semicirconferenza esterna.

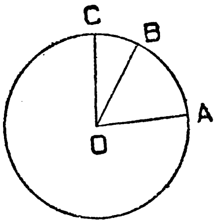
77. In particolare sono uguali i due archi in cui una circonferenza è divisa da un suo diametro e che corrispondono ad angoli al centro piatti; perciò codesti archi diconsi *semicirconferenze.*

Così sono uguali i due settori in cui un cerchio



è diviso da un suo diametro; e per questa ragione essi diconsi *semicerchi*.

78. È anche manifesto in qual modo *si sommino* due o più archi o settori (della stessa circonferenza o cerchio o di circonferenze o cerchi uguali) e come si *sottragga* da un arco o settore un altro arco o settore (della stessa circonferenza o cerchio o di circonferenze o cerchi uguali).



79. Risulta senz' altro dalla figura che: *All'arco o settore somma di due o più archi o settori corrisponde un angolo al centro che è la somma degli angoli al centro corrispondenti ai singoli addendi.*

Analogamente per la differenza.

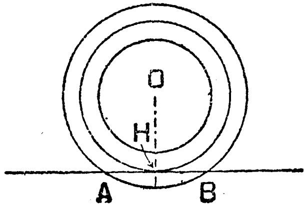
Posizioni relative di una retta e di una circonferenza.

80. Per le costruzioni col compasso è importante esaminare qui le posizioni relative di una retta e una circonferenza e di due circonferenze fra loro.

Cominciamo dal considerare una retta e una circonferenza.

Data una retta e preso un punto O *qualsiasi* fuori di essa, abbassiamo da O la perpendicolare OH sulla retta.

Se con centro in O descriviamo una circonferenza di raggio minore della distanza OH di O dalla retta, vediamo che la circonferenza e la retta non hanno



nessun punto comune, ossia, come si suol dire, *la retta è esterna alla circonferenza.*

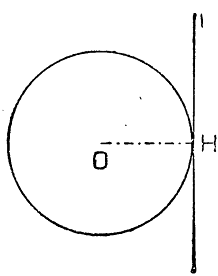
Se invece, mantenendo il centro in O, prendiamo un raggio maggiore di OH, vediamo che la circonferenza *attraversa* due volte la retta, ossia *la circonferenza e la retta si segano in due punti.*

Se infine conduciamo la circonferenza di centro O che ha per raggio OH (distanza di O dalla retta) vediamo che la circonferenza e la retta hanno comune soltanto il punto H o, come si suol dire, sono *tangenti* in H.

Insomma abbiamo che:

Una circonferenza e una retta non hanno punti comuni se la retta ha dal centro distanza maggiore del raggio; sono tangenti, se la distanza della retta dal centro è uguale al raggio; si segano in due punti, se la distanza della retta dal centro è minore del raggio.

81. Se nell'estremo H di un raggio di un cerchio O, conduciamo la perpendicolare ad OH, questa perpendicolare avrà da O la distanza OH e perciò sarà tangente al cerchio.

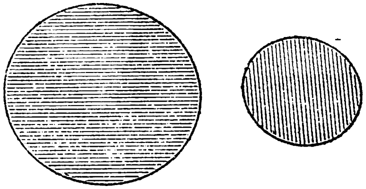


Abbiamo cioè che: *La perpendicolare ad un raggio di un cerchio nel suo estremo è tangente al cerchio.*

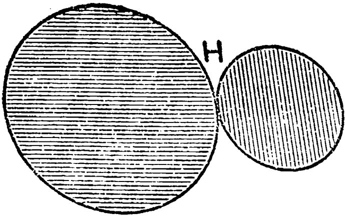
Posizioni relative di due cerchi o due circonferenze.

82. Per vedere le varie posizioni relative, in cui possono trovarsi nel piano due cerchi, ritagliamone due in carta e posiamoli sul piano.

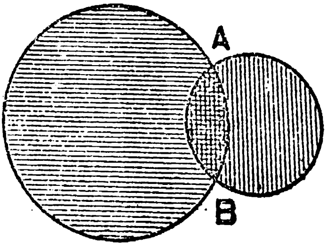
Essi possono anzitutto *non avere nessun punto comune* o come, si suol dire, *essere esterni l'uno all'altro.*



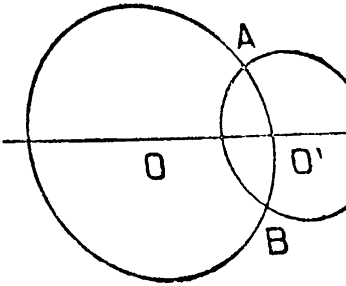
Avvicinando i due cerchi, possiamo portarli in tale posizione che abbiano comune un solo punto H del contorno e nessun altro all'infuori di questo. Allora i due cerchi e le due circonferenze si diranno *tangenti fra loro esternamente* nel punto H (*punto di contatto*).



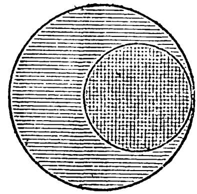
83. Movendo ancora l'un cerchio verso l'altro, avremo dapprima che *essi si ricopriranno fra loro in parte;* ed allora è manifesto che i due contorni, cioè le circonferenze relative si attraversano o, come si suol dire, *si segano l'una con l'altra in due punti* A, B.



Questi due punti A, B *giacciono da parti opposte della retta* OO′ *che congiung i due centri.* Infatti se si piega il foglio lungo la ret OO′ in modo da far combaciare i due semipiani, le due semicirconferenze da una parte si sovrappongono esattamente alle altre due e perciò i due punti A e B vanno a coincidere.

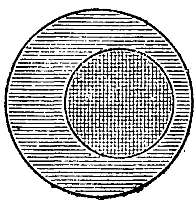


84. Riprendendo i due cerchi possiamo spostarli ancora l'uno verso l'altro finchè il minore sia tutto interno al cerchio maggiore e la circonferenza del primo abbia comune colla circonferenza del secondo un solo punto K (*punto di contatto*).



Allora si dice che *il cerchio (o la circonferenza) minore è tangente internamente al cerchio (o alla circonferenza) maggiore* [1].

Da ultimo, spostando ancora un poco il cerchio minore, possiamo far sì che, pur restando il cerchio minore interno all'altro, le due circonferenze non abbiano più alcun punto comune. Allora si dice senz'altro che il cerchio minore è *interno* all'altro.



85. Le osservazioni precedenti ci permettono di concludere che:

Due circonferenze nel piano: o non hanno punti comuni (e sono l'una esterna all'altra oppure la minore è interna alla maggiore);

o sono tangenti in un punto (esternamente oppure internamente);

o si segano in due punti situati da parti opposte della retta dei centri.

---

[1] È chiaro che se i due cerchi sono uguali e si portano a toccarsi internamente, si sovrappongono esattamente.

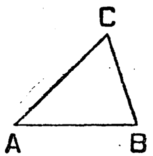
IV.

TRIANGOLI E POLIGONI

Triangoli.

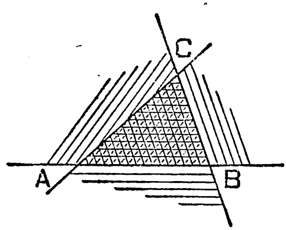
86. Prendiamo nel piano tre punti A, B, C non giacenti su di una retta.

I tre angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ sono tali che ogni punto comune a due di essi è interno anche al terzo.



Si veda la seconda delle unite figure dove ciascuno dei tre angoli è tratteggiato, cosicchè la regione dei punti comuni ai tre angoli risulta coperta da un tratteggio triplo.

87. Dati tre punti A, B, C, non in linea retta, dicesi *triangolo* ABC la figura costituita dai punti comuni ai tre angoli (convessi) $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$.



Si può anche dire, che dati tre punti A, B, C, non in linea retta, chiamasi triangolo la parte di piano limitata dall' insieme dei tre segmenti AB, BC, CA.

I tre angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ diconsi *angoli del triangolo* e i loro vertici *vertici del triangolo*.

I tre segmenti AB, BC, CA chiamansi *lati* del triangolo; l' insieme dei lati dicesi *contorno* del triangolo e la loro somma *perimetro*.

88. Talvolta, se non vi è pericolo di confusione, il *contorno del triangolo* si dice anche semplicemente *triangolo*.

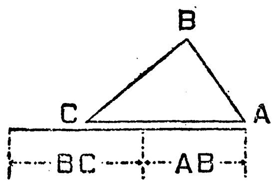
89. Dato un triangolo ABC, spesso ad uno dei suoi lati si dà il nome di *base*, come se si pensasse il triangolo appoggiato su codesto lato.

Preso p. es. come base il lato AB, si dice *altezza* relativa ad esso la distanza (n. 56) del vertice *opposto* C dalla retta AB: e importa notare che il piede di codesta altezza (cioè il punto di incontro dell'altezza colla retta AB) può benissimo cadere su uno dei prolungamenti del lato AB.

Ciascuno dei tre lati del triangolo si può prendere come base. Corrispondentemente il triangolo ha tre altezze (per lo più fra loro disuguali).

Relazioni fra i lati di un triangolo.

90. Disegnato sul foglio un triangolo ABC, distendiamo un filo lungo i lati AB e BC da A a C. Se lo stesso tratto di filo si distende sulla semiretta AC a partire da A, esso ricopre il lato AC e ne sopravanza una parte.

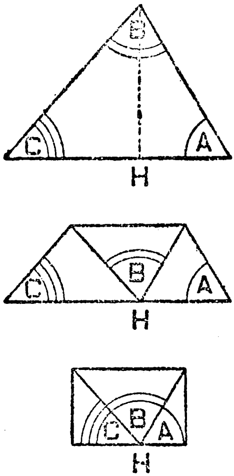


Lo stesso si può ripetere anche per il lato AB e per il lato BC, cosicchè abbiamo che: *In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.*

Somma degli angoli di un triangolo.

91. Ritagliato nella carta un triangolo ABC, guardiamo quale sia il suo lato maggiore [1].

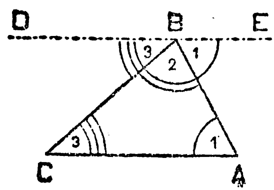
[1] Questa verifica si può compiere anche se AB non è il lato maggiore, purchè non sia adiacente ad un angolo ottuso.



Se, come nella nostra figura, codesto lato è AC, abbassiamo da B la perpendicolare BH su AC, servendoci della squadra (n. 56) o piegando la carta in modo che la piega passi per B e il lato AC si ripieghi su se stesso (n. 46).

Se allora pieghiamo le tre punte del triangolo in maniera che i tre vertici risultino riuniti in H, vediamo che la somma dei tre angoli del triangolo dà un angolo piatto ossia 180°. Poichè questa verifica si può ripetere per ogni triangolo, abbiamo che: *In ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due retti ossia a* 180°.

Ciò si può anche provare (*dimostrare*) senza ricorrere alla verifica indicata or ora.



Dato un triangolo ABC, si conduca per un vertice, p. es. per B, la parallela DE al lato opposto AC.

Allora gli angoli $\widehat{BCA}$, $\widehat{DBC}$ sono uguali come alterni (interni) formati dalla trasversale BC colle due parallele DE, CA (n. 66); e così pure sono uguali gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABE}$, come alterni (interni) formati dalla trasversale AB colle stesse due parallele.

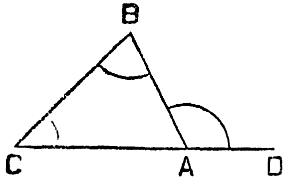
Perciò la somma dei tre angoli del triangolo sarà uguale a

$$\widehat{DBC} + \widehat{CBA} + \widehat{ABE},$$

cioè appunto a 180°.

92. La proprietà del n. prec. si può anche enunciare dicendo che: *In un triangolo ciascun angolo è supplementare della somma degli altri due.*

Ma in un triangolo ABC un angolo $\widehat{BAC}$ è anche supplementare di ciascun suo adiacente, p. es. $\widehat{DAB}$.



Ora gli angoli adiacenti degli angoli di un triangolo si dicono *angoli esterni.*

Valendoci di questa definizione, potremo dire che: *In un triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due interni che non sono adiacenti ad esso.*

93. Siccome la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a 180°, avremo che:

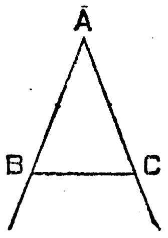
a) *Se in un triangolo un angolo è retto, gli altri due sommati insieme danno* 90° *o,* come si dice, *sono complementari.*

b) *Se in un triangolo un angolo è ottuso, gli altri due sono entrambi acuti.*

Triangoli particolari e applicazioni.

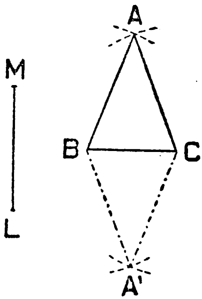
a) Triangoli isosceli.

94. Se sui lati di un angolo di vertice A si prendono due segmenti uguali AB e AC e si congiunge B con C, si ottiene un triangolo ABC avente uguali i lati AB, AC. Questo triangolo si dice *triangolo isoscele* di *base* BC.



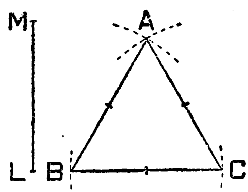
L'angolo $\widehat{BAC}$ opposto alla base si dice *angolo al vertice* e gli altri due angoli del triangolo si chiamano *angoli alla base.*

95. Siccome in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo, così nel triangolo isoscele la somma dei due lati uguali è maggiore della base; e quindi *in un triangolo isoscele ciascuno dei due lati uguali è maggiore della metà della base.*



96. Per disegnare su di una data base BC un triangolo isoscele avente gli altri due lati uguali ad un segmento prefissato LM (maggiore della metà di BC) si descrivano col compasso le circonferenze di centro B e C e di raggio uguale ad LM. Codeste due circonferenze si segano in due punti A, A′, giacenti da parte opposta della BC (n. 83), i quali congiunti con B e C danno due triangoli isosceli aventi la base BC e gli altri due lati uguali ad LM.

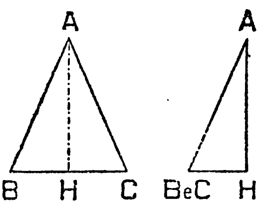
97. Se nella precedente costruzione prendiamo LM = BC, otteniamo dalle due parti di BC due triangoli ciascuno dei quali ha tutti e tre i lati uguali.



Un triangolo avente tutti e tre i lati uguali si dice *equilatero*.

Nota. — Un triangolo che non sia equilatero nè isoscele, che, cioè, abbia i tre lati disuguali, si dice *scaleno*.

98 Ritagliato in carta un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, cioè tale che sia



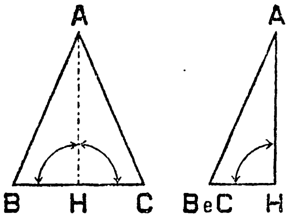
AB = AC,

pieghiamolo su se stesso in modo che i due lati uguali vadano a coincidere. Allora i due angoli alla base si ricoprono esattamente l'un l'altro. Verifichiamo così che: *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali*.

99. Siccome un triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualunque suo lato, preso come base, avremo che tutti e tre i suoi angoli sono uguali. Poichè la loro somma è uguale a 180° (n. 91), ciascuno di essi sarà la terza parte di 180°. Cioè *gli angoli del triangolo equilatero sono uguali ciascuno a* 60°.

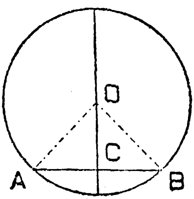
100. Inversamente al risultato del n. 98, abbiamo che: *Un triangolo avente due angoli uguali è isoscele,* ed ha uguali i lati opposti agli angoli uguali. Ciò si verifica ripiegando il triangolo come si è fatto pocanzi.

101. Quando come al n. 98, si ripiega su se stesso un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, facendo combaciare i due lati uguali AB, AC, si vede anzitutto che la ripiegatura AH divide per metà la base BC e l'angolo al vertice o, come si suol dire, è *bisettrice* e *mediana,* relativamente all'angolo al vertice. In secondo luogo, poichè i due angoli $\widehat{AHC}$, $\widehat{AHB}$, fra loro adiacenti, si sovrappongono esattamente e perciò sono retti (n. 46), vediamo che la AH è perpendicolare alla base BC, ossia è l'*altezza* relativa al vertice.



Abbiamo cioè che:

In ogni triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana ed altezza.



102. Possiamo applicare questa proposizione alle corde di un cerchio.

Se AB è una corda di un cerchio O, congiungendo A e B con O, si ottiene un triangolo ABO isoscele sulla base AB. Applicando ad esso la proposizione precedente troviamo che:

a) *Il diametro di un cerchio che divide una corda per metà è perpendicolare ad essa.*

b) *Il diametro perpendicolare ad una corda la divide per metà.*

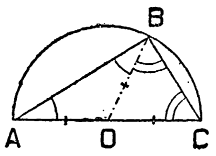
c) *In un cerchio la perpendicolare condotta ad una corda nel suo punto di mezzo passa pel centro, cioè è un diametro.*

b) Angoli al cerchio.

103. Data una semicirconferenza, ogni angolo avente il vertice sulla semicirconferenza e i lati passanti per gli estremi di essa dicesi *iscritto nella semicirconferenza.*

104. *Gli angoli iscritti in una semicirconferenza sono tutti retti.*

Sia $\widehat{ABC}$ un angolo iscritto in una semicirconferenza di centro O. Per mostrare che esso è retto, congiungiamo O con B e consideriamo i due triangoli ABO e BCO.



Essi sono entrambi isosceli perchè i raggi OA, OB, OC sono tutti uguali; cosicchè avremo (n. 98)

$$\widehat{ABO} = \widehat{OAB} \quad , \quad \widehat{OBC} = \widehat{BCO}$$

e sommando gli angoli $\widehat{ABO}$, $\widehat{OBC}$ otterremo

$$\widehat{ABC} = \widehat{OAB} + \widehat{BCO}.$$

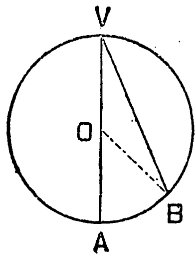
Ma i tre angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{OAB}$, $\widehat{BCO}$ presi insieme danno 180° (n. 91); cosicchè l'angolo $\widehat{ABC}$ sarà uguale alla metà di 180°, cioè a 90°.

105. Dato un arco di circonferenza, ogni angolo avente il vertice sull'arco e i lati passanti per gli estremi di esso, dicesi *angolo alla circonferenza iscritto nel dato arco.*

Un angolo alla circonferenza, iscritto in un dato arco, comprende fra i suoi lati l'altro arco di circonferenza avente i medesimi estremi; dell'angolo dato si dice che *insiste* su questo secondo arco.

106. *Ogni angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro che insiste sul medesimo arco.*

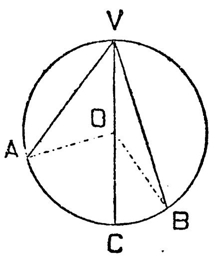
Esaminiamo i vari casi possibili:



1.° Dato l'angolo $\widehat{AVB}$ alla circonferenza, di cui il lato AV passi pel centro O, consideriamo l'angolo al centro corrispondente $\widehat{AOB}$. Essendo quest'ultimo angolo esterno rispetto al triangolo OBV, abbiamo (n. 92),

$$\widehat{AOB} = \widehat{AVB} + \widehat{VBO};$$

ma nel triangolo OVB, isoscele sulla base VB, è



$$\widehat{AVB} = \widehat{VBO},$$

onde risulta:

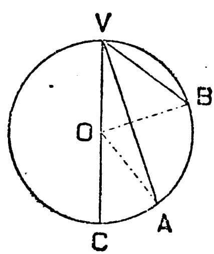
$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AVB}.$$

2.° Se l'angolo $\widehat{AVB}$ ha i due lati da parti opposte rispetto al diametro VO, si avrà congiungendo A e B con O,

$$\widehat{AOC} = 2\widehat{AVC} \quad , \quad \widehat{COB} = 2\widehat{CVB},$$

e, sommando membro a membro,

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AVB}.$$



3.° Similmente se i due lati cadono dalla stessa banda rispetto al diametro VC pel vertice, avremo:

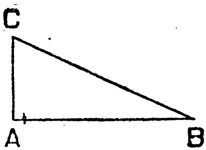
$$\widehat{COB} = 2\widehat{AVB} \quad , \quad \widehat{COA} = 2\widehat{CVA}$$

e sottraendo membro a membro,

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AVB}.$$

c) Triangoli rettangoli.

107. Se, disegnato un angolo retto di vertice A, congiungiamo un punto B di un suo lato con un punto C dell'altro, otteniamo un triangolo avente l'angolo in A di 90°.

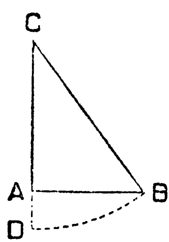


Un triangolo avente un angolo retto si dice *rettangolo*.

I due lati AB, AC che comprendono l'angolo retto si dicono *cateti* e l'altro lato, opposto all'angolo retto, si dice *ipotenusa*.

108. Come abbiamo già notato al n. 93, i due angoli in B e in C adiacenti all'ipotenusa sono acuti e complementari, cioè danno per somma 90°.

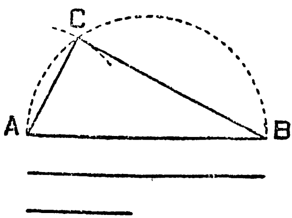
109. Dato un triangolo ABC rettangolo in A, si riporti l'ipotenusa CB sulla semiretta CA a partire da C, ponendo in C una punta del compasso e descrivendo l'arco BD. Il punto D cade sul prolungamento di CA, cosicchè si vede che la ipotenusa è maggiore del cateto CA. Similmente si verifica che anche il cateto BA è minore dell'ipotenusa. E poichè la stessa verifica si può compiere per ogni triangolo rettangolo, potremo dire che:



In ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

110. Ricordando la proposizione del n. 104 possiamo risolvere il seguente

Probl. — *Costruire un triangolo rettangolo dati l'ipotenusa e un cateto.*

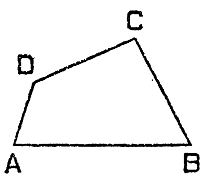


Preso un segmento AB uguale alla ipotenusa prefissata, si descriva su AB come diametro una semicirconferenza e si tagli questa con la circonferenza che ha centro in A e raggio uguale al cateto prefissato. Se C è il punto di intersezione, il triangolo ABC soddisfa al problema.

Poligoni.

111. Il triangolo non è che la prima e più semplice di tutta una serie di figure, che si chiamano *poligoni.*

Così, dati nel piano quattro punti A, B, C, D di cui tre non in linea retta, tali che ciascuna delle congiungenti AB, BC, CD, DA lasci gli altri due punti dalla stessa parte, la figura costituita dai punti comuni ai quattro angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{DAB}$ si dice poligono a quattro lati, o, più comunemente, *quadrangolo* o *quadrilatero.*



Si può anche dire che il quadrangolo ABCD è la parte di piano limitata dall'insieme dei quattro segmenti AB, BC, CD, DA.

I punti A, B, C, D diconsi *vertici* e i segmenti AB, BC, CD, DA *lati* del quadrangolo.

Gli otto angoli adiacenti a coppie ai quattro *angoli del quadrangolo* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ si designano col nome di *angoli esterni.* L'insieme dei lati dicesi *contorno* ed ogni segmento uguale alla somma dei lati si dice *perimetro*.

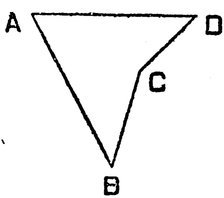
Il segmento congiungente due vertici *opposti* (cioè non consecutivi) come A e C o B e D si dice *diagonale*.

Il quadrangolo ha due diagonali.

112. Similmente si definiscono:

il	poligono	a	5	lati	o	*pentagono*
»	»	»	6	»	o	*esagono*
»	»	»	7	»	od	*ettagono*
»	»	»	8	»	od	*ottagono*
»	»	»	9	»	od	*ennagono*
»	»	»	10	»	o	*decagono* ecc.

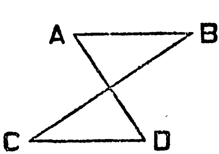
113. Si può estendere il concetto di poligono, quale è stato dato or ora, considerando poligoni *concavi*, cioè tali che la retta di qualche lato non lasci tutti i vertici da una stessa parte, mentre tuttavia non accade mai che due lati, non consecutivi, si seghino a vicenda.

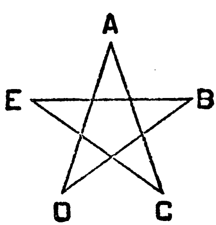


Per es. il quadrangolo ABCD è concavo perchè la retta CD lascia da parte opposta i vertici A e B.

Un poligono soddisfacente alle condizioni della nostra prima definizione dicesi *convesso*. E noi quando nel seguito parleremo di poligoni senz'altra indicazione, intenderemo parlare di poligoni convessi.

114. Si possono anche considerare *contorni poligonali in-*

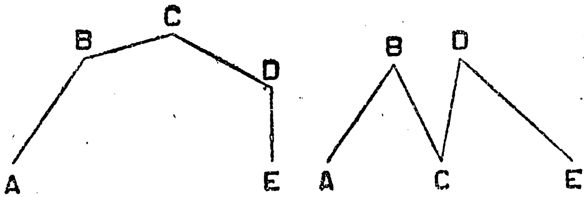




trecciati, vale a dire tali che due lati non consecutivi si intersecano, cioè hanno qualche punto comune. (Vedi fig. alla pag. prec.).

Un contorno poligonale non intrecciato dicesi, per contrapposto, *sciolto*.

115. Infine si considerano anche le *linee spezzate* o *poligonali* di cui è dato qualche esempio dalle unite figure.



Relazioni fra i lati di un poligono. Somma degli angoli di un poligono.

116. Nello stesso modo in cui si è verificato che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due (n. 90), si verifica che anche:

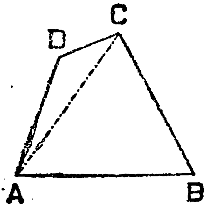
In un poligono qualsiasi ciascun lato è minore della somma dei rimanenti.

117. Abbiamo visto che in tutti i triangoli la somma dei tre angoli è uguale a 180° (n. 91).

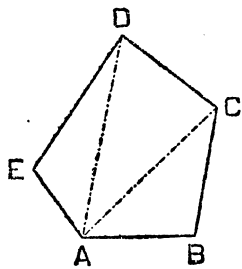
Ora vedremo che in un quadrangolo la somma degli angoli non è più di 180°, ma è sempre la stessa, qualunque sia il quadrangolo che si considera; e così la somma degli angoli cambia da un quadrangolo a un pentagono, da un pentagono a un esagono ecc.; ma è la stessa in tutti i pentagoni e così in tutti gli esagoni, ecc.

Prendiamo anzitutto un quadrangolo ABCD.

Condotta una sua diagonale, p. es. la AC, il quadrangolo resta diviso in due triangoli ABC, ACD e la somma degli angoli del quadrangolo è uguale alla somma degli angoli di codesti due triangoli. Poichè in ciascuno di codesti triangoli la somma degli angoli è uguale a 180° (n. 91), concludiamo che *la somma degli angoli del quadrangolo è uguale a* 180 × 2 *gradi,* cioè 360°.



Se invece di un quadrangolo consideriamo un pentagono ABCDE e conduciamo in esso le congiungenti di un vertice A coi vertici non consecutivi C e D (*diagonali*) il pentagono resta diviso in *tre* triangoli, e poichè la somma degli angoli del pentagono è uguale alla somma degli angoli dei tre triangoli, concludiamo che essa è uguale a 180 × 3 *gradi,* cioè 540°.

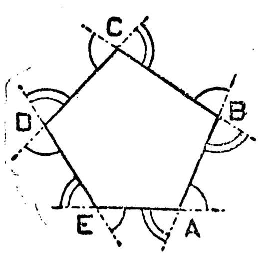


Analogamente si trova che *la somma degli angoli*

per un *esagono* è 180 × 4 *gradi,*
» » *ettagono* » 180 × 5 »
» » *ottagono* » 180 × 6 »

e così via.

Abbiamo in tal modo che:
La somma degli angoli di un poligono qualsiasi è uguale a tante volte 180°, *quanti sono i lati meno due.*

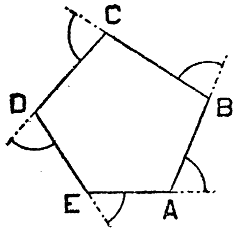


118. In un poligono gli angoli adiacenti agli angoli interni si dicono *esterni*. Perciò ad ogni angolo interno corrispondono due

angoli esterni, fra loro opposti al vertice (n. 29) e quindi uguali (n. 42).

Per determinare un angolo esterno basta prolungare uno dei lati del poligono.

In un poligono, p. es. in un pentagono ABCDE, prolunghiamo i vari lati in un medesimo senso, come mostra la unita figura.



Otteniamo così cinque angoli esterni che sommati ai cinque angoli interni danno cinque angoli piatti, cioè 180×5 gradi.

Ma gli angoli interni danno insieme 180×3 gradi; cosicchè risulta che gli angoli esterni da soli danno per somma 180×2 gradi, cioè 360°.

Allo stesso risultato si arriva per un quadrangolo, per un esagono, per un ettagono ecc.

Cioè: *In ogni poligono la somma degli angoli esterni, che si ottengono prolungando tutti i lati in un medesimo senso, è uguale a 360°.*

ESERCIZI SUI CAPITOLI I-V

(Prima Classe)

N. B. — Gli esercizi si susseguono a gruppi nello stesso ordine della materia svolta nel testo e in ciascun gruppo sono disposti in ordine di difficoltà crescente.

A capo di ciascun gruppo di esercizi abbiamo segnato in margine l'ultimo numero del testo, la cui conoscenza è necessaria per la risoluzione dei quesiti del gruppo.

[8] **1.** Dati sul foglio più punti A, B, C, D, si disegnino, servendosi della riga: la *retta* AB, la *semiretta* AC, il *segmento* CD,...

20] **2.** Si disegnino due segmenti lunghi cm. 2 e cm. 3,5 e la loro somma.

3. Si disegnino due segmenti lunghi cm. 7,3 e cm. 3,9 e la loro differenza.

4. Si disegnino un segmento lungo cm. 2,3 e il suo quintuplo.

5. Si disegnino un segmento lungo cm. 13,5 e il suo terzo.

52] **6.** Qual'è l'ampiezza di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ di retto?

7. Di quanti gradi si gira un soldato che fa « *fianco dest* » o « *fianco sinist* » o « *dietro front* »?

8. Qual'è l'ampiezza dell'angolo che colla direzione del Nord forma una banderuola girevole intorno a un pernio verticale, quando il vento soffia da Est o da Sud-Ovest o da Nord o da Nord-Nord-Est? [Valersi di un piccolo disegno].

9. Che angolo formano le lancette di un orologio alle 1^h, alle 3^h, alle 4^h, alle 6^h, alle 12^h, alle $3^h30'$, alle $5^h10'$?

10. Si disegnino col rapportatore due angoli di $19°$ e $27°$ e la loro somma.

11. Si disegnino col rapportatore tre angoli di $39°$, $43°$, $83°$ e la loro somma.

12. Si disegnino col rapportatore due angoli di $73°$ e $39°$ e la loro differenza.

13. Si disegnino col rapportatore un angolo di $21°$ e il suo triplo.

14. Si disegnino col rapportatore un angolo di $72°$ e il suo terzo.

15. Un angolo è la quinta parte del suo adiacente. Qual'è la sua ampiezza?

16. Qual'è l'ampiezza di due angoli adiacenti, di cui l'uno è multiplo secondo 5 del summultiplo secondo 4 dell'altro?

17. Un angolo supera di $35° 48'$ il suo adiacente: qual'è l'ampiezza dell'angolo considerato? (1).

18. Qual'è l'ampiezza del supplementare dell'angolo di $57°$?

19. Qual'è l'ampiezza del supplementare dell'angolo di $120° 46'$?

20. Qual'è l'ampiezza del supplementare della somma di due angoli di $37°$ e $45°$?

21. Qual'è l'ampiezza del supplementare della somma di due angoli di $37° 51'$ e $42° 38'$?

22. Chiamando *complementari* due angoli la cui somma

(1) Veramente la teoria dei numeri *complessi* fa parte del programma di II classe; ma crediamo che già in primo anno, *se la scolaresca non è troppo immatura*, si possa proporre qualche problema, che implichi facili operazioni sulle ampiezze in gradi, minuti e secondi.

sia di un angolo retto, si trovi l'ampiezza del complementare di 50°, 30°, 70°, 25°, 13°, 89°, $7\,{}^1/_2{}^\circ$, 45°, $36\,{}^1/_4{}^\circ$, $30\,{}^1/_4{}^\circ$.

23. Qual'è l'ampiezza di un angolo che sia doppio del suo complementare?

24. Un angolo è uguale a $\frac{2}{5}$ del suo complementare. Quali sono le ampiezze dell'angolo e del suo complementare?

[53] **25.** Disegnati un angolo $\widehat{ABC}$ di 42° e il suo adiacente, si determini l'ampiezza dell'angolo delle bisettrici dei due angoli considerati.

26. Le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

[67] **27.** Disegnate due rette parallele (con riga e squadra) si conduca (servendosi del rapportatore) una trasversale che con una delle parallele formi un angolo di 35° e per ciascuno degli altri sette angoli si segni la relativa ampiezza.

28. Uno degli angoli interni determinati da due rette parallele con una trasversale è di 68°43′25″: si calcolino gli altri angoli.

29. Due rette parallele sono segate da una terza retta in modo che ciascuna di esse forma colla trasversale due angoli adiacenti di cui l'uno è i $\frac{4}{5}$ dell'altro. Qual parte di retto è ciascuno degli angoli che fa questa secante colle parallele?

[89] **30.** Si disegni col doppio decimetro e il rapportatore un triangolo ABC in cui sia

$$AB = \text{mm. } 50 \quad , \quad AC = \text{mm. } 40 \quad , \quad \widehat{BAC} = 55^\circ$$

e si misurino la lunghezza di BC e le ampiezze di $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$.

31. Si disegni col doppio decimetro e il rapportatore un triangolo ABC, in cui sia

$$AB = \text{mm. } 45 \quad , \quad \widehat{CBA} = 75^\circ \quad , \quad \widehat{BAC} = 55^\circ$$

e si misurino BC e CA.

32. Si disegni col doppio decimetro e il compasso un triangolo ABC in cui sia

$$AB = \text{mm. } 60 \quad , \quad BC = \text{mm. } 55 \quad , \quad CA = \text{mm. } 43$$

e si misurino col rapportatore le ampiezze dei tre angoli.

33. In un triangolo due angoli sono di 87° e 45°. Qual'è [91]
l'ampiezza del terzo angolo?

34. In un triangolo due angoli sono uguali rispettivamente a 47°25′16″ , 84°13′28″. Determinare il terzo angolo.

35. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triàngolo, sapendo che $\widehat{A}$ è triplo di $\widehat{B}$ e $\widehat{B}$ è quadruplo di $\widehat{C}$.

36. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{A}$ è triplo di $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ è uguale alla sesta parte di C.

37. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{A}$ è quintuplo di $\widehat{B}$ e $\widehat{B}$ è quadruplo di $\widehat{C}$.

38. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{C} - \widehat{A} = 44°$ e $\widehat{C} - \widehat{B} = 25°$.

39. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{A}$ supera $\widehat{B}$ di 69° e $\widehat{B}$ supera $\widehat{C}$ di 51°.

40. In un triangolo un angolo interno è di 72° e un an- [92]
golo esterno, non adiacente a quello, è di 118. Determinare le ampiezze degli altri due angoli interni.

41. In un triangolo un angolo interno è di 71°29′,4 e un angolo esterno, non adiacente a quello, è di 118°4′,2. Determinare gli altri due angoli interni.

42. Col doppio decimetro e il rapportatore si disegni un [101]
triangolo isoscele di mm. 37 di base e avente gli angoli alla base di 32°.

43. Col doppio decimetro e il rapportatore si disegni un triangolo isoscele avente la base di cm. 2,8 e l'angolo al vertice di 26°.

44. Col doppio decimetro e il rapportatore si disegni un triangolo isoscele la cui altezza sia di cm. 4,3 e l'angolo al vertice di 62°.

45. Col doppio decimetro e il rapportatore si disegni un

triangolo isoscele avente l'altezza di mm. 6,2 e ciascun angolo alla base di 55°.

46. Si disegni su di una base di mm. 12 un triangolo isoscele di mm. 10 e se ne misuri l'altezza.

47. Quanto vale l'angolo al vertice di un triangolo isoscele di cui gli angoli alla base siano di 72°?

48. In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono di 53°21′33°. Determinare l'angolo al vertice.

49. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è di 42°. Quali sono le ampiezze degli angoli alla base?

50. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è di 38°24′18″. Calcolare gli angoli alla base.

51. Un triangolo isoscele ha un angolo al vertice di 36°28′; qual'è l'ampiezza dell'angolo esterno formato da uno dei lati uguali col prolungamento della base?

[106] 52. Qual'è l'ampiezza dell'angolo iscritto in un arco che sia $\frac{3}{4}$ di circonferenza?

53. Qual'è l'ampiezza di un angolo alla circonferenza, il quale insista su di un arco che sia i $\frac{2}{9}$ della circonferenza?

54. Qual'è l'ampiezza dell'angolo iscritto in un arco che sia gli $\frac{11}{12}$ di una circonferenza?

[110] 55. Si disegni un triangolo rettangolo, di cui i cateti siano di cm. 5 e cm. 12, oppure di cm. 8 e cm. 15, e si misuri col doppio decimetro la rispettiva ipotenusa.

56. Si disegni un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa sia lunga cm. 3,7 e un cateto cm. 3,5. Si misuri col doppio decimetro l'altro cateto.

57. Si disegni un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di cm. 2,5 e un cateto di cm. 0,7. Si misuri col doppio decimetro l'altro cateto.

58. Su di un segmento di mm. 3,2 preso come base si costruisca un triangolo rettangolo isoscele. [Si può servirsi dei nn. 101 e 104; oppure si può notare che l'ampiezza dell'angolo alla base è di 45° e allora adoprando il rapportatore....

59. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è di 39°: qual'è l'ampiezza dell'altro angolo acuto?

60. In un triangolo rettangolo un angolo è di 65°43': qual'è l'ampiezza dell'altro angolo acuto?

61. Determinare l'ampiezza dell'angolo alla base di un triangolo rettangolo isoscele.

62. In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è doppio dell'altro: qual'è l'ampiezza dei due angoli?

63. Disegnare un poligono a 5 o 6 o 10 lati, condurre [117]
tutte le diagonali (congiungenti due vertici non consecutivi) e contare in ciascun caso quante sono.

64. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ di un quadrangolo, sapendo che $\widehat{B}$ è doppio, $\widehat{C}$ triplo e $\widehat{D}$ quadruplo di $\widehat{A}$.

65. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ di un quadrangolo, sapendo che $\widehat{B}$ è doppio di $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ è doppio di $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ è doppio di $\widehat{C}$.

66. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ di un quadrangolo, sapendo che $\widehat{A}$ è doppio di $\widehat{B}$, $\widehat{B}$ è la terza parte di $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ è la quarta parte della somma di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$.

67. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ di un quadrangolo sapendo che $\widehat{A}$ supera $\widehat{B}$ di 3°, $\widehat{B}$ supera $\widehat{C}$ di 6° e $\widehat{C}$ supera $\widehat{D}$ di 9°.

68. La somma di tre angoli di un pentagono è uguale a 427°49'15": degli altri due uno è doppio dell'altro. Quanto valgono questi due angoli?

69. Calcolare la somma degli angoli di un poligono a 12 lati o a 30 o a 52 lati.

70. In quale poligono la somma degli angoli è di 2340° o di 3240° o di 4320°?

71. Un poligono equiangolo ha 36 lati: qual'è l'ampiezza di ciascun angolo esterno?

72. L'angolo esterno di un poligono equiangolo è uguale a 12°: quanti lati ha il poligono?

73. In un poligono equiangolo ciascun angolo è di 174° (o di 157,5° o di 175° o di 175,5°). Quanti lati ha il poligono?

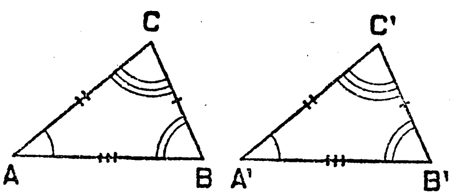
V.

UGUAGLIANZA DEI TRIANGOLI E DEI POLIGONI

Triangoli uguali.

119. Due triangoli possono essere **uguali.**

Per verificare se due triangoli dati ABC, A′B′C′ siano uguali, si prova, ritagliandone uno in carta e collocandolo opportunamente sull'altro, se essi siano *sovrapponibili* esattamente.



Se accade che A′B′C′ si possa collocare su ABC in modo che i tre vertici A′, B′, C′ del primo vadano proprio a cadere su A, B, C rispettivamente, diremo che i due triangoli sono uguali e scriveremo

$$ABC = A'B'C'.$$

Allora i lati A′B′, B′C′, C′A′, di A′B′C′ vanno a sovrapporsi esattamente ai lati AB, BC, CA di ABC; cioè fra gli *elementi* (*lati* ed *angoli*) dei due triangoli si hanno le seguenti sei uguaglianze:

$$AB = A'B' \ , \ BC = B'C' \ , \ CA = C'A',$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \ , \ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \ , \ \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}.$$

120. Viceversa, per poter concludere che due triangoli sono uguali non occorre proprio verificare tutte e sei le precedenti uguaglianze fra elementi, ma basta constatarne alcune.

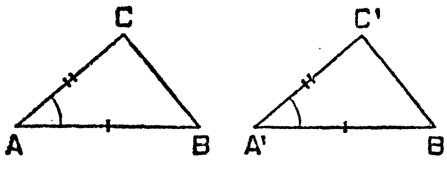
Sussistono invero i seguenti tre *Criteri di uguaglianza dei triangoli.*

121. I° Criterio d'uguaglianza dei triangoli. — *Si può affermare che due triangoli sono uguali, se si è verificato che essi hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso.*

Siano due triangoli ABC, A'B'C' tali che sia

$$AB = A'B' \ , \ AC = A'C' \ , \ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

Per verificare che i due triangoli sono uguali, ritagliamo A'B'C' e portiamolo su ABC, sovrapponendo l'angolo $\widehat{A'}$ all'angolo uguale $\widehat{A}$, in modo che la semiretta A'B' si disponga sulla semiretta AB. Siccome, per ipotesi, i segmenti AB, AC sono uguali rispettivamente ad A'B', A'C', i punti B', C' andranno a coincidere proprio con B, C rispettivamente e quindi i due triangoli si ricopriranno esattamente e avremo



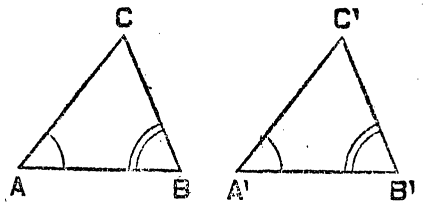
$$BC = B'C' \ , \ \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'} \ , \ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$

122. Risulta dal criterio precedente che:

a) *Si può affermare che due triangoli isosceli* (n. 94) *sono uguali, quando si è verificato che hanno rispettivamente uguali l'angolo al vertice e il lato.*

b) *Si può affermare che due triangoli rettangoli sono uguali, quando si è verificato che hanno rispettivamente uguali i cateti* (n. 48).

123. II° Criterio d'uguaglianza. — *Si può affermare che due triangoli sono uguali, se si è verificato che hanno rispettivamente uguali due angoli e un lato, ugualmente disposti.*



1.° Esaminiamo in primo luogo il caso in cui si sa essere uguali due angoli e il lato comune.

Siano cioè ABC, A'B'C' due triangoli tali che

$$AB = A'B' \ , \ \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \ , \ \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$

Per verificare che i due triangoli sono uguali, ritagliamo A'B'C' e portiamolo su ABC in modo che il lato A'B' si sovrapponga al lato uguale AB e il vertice C' cada da quella stessa parte di AB da cui cade C.

Allora, siccome gli angoli $\widehat{C'A'B'}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono uguali rispettivamente a $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ABC}$, la semiretta A'C' andrà a coincidere con AC e la semiretta B'C' con BC, talchè il punto C' cadrà precisamente in C.

È così verificato che i due triangoli A'B'C', ABC sono sovrapponibili esattamente.

2.° Supponiamo in secondo luogo che siano rispettivamente uguali due angoli e il lato opposto ad uno di essi: sia p. es. nei due triangoli ABC, A'B'C'

$$\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \ , \ \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \ , \ AC = A'C'.$$

Allora, poichè in ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a 180° (n. 91) e sappiamo già che i nostri due triangoli hanno due angoli uguali, possiamo senz'altro concludere che saranno uguali anche i terzi angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{A'C'B'}$. E i due triangoli, avendo rispettivamente uguali i lati AC, A'C' e gli angoli adiacenti, saranno uguali per quanto si è visto nel 1° caso considerato.

124. Risulta da questo secondo criterio che:

a) *Si può affermare che due triangoli rettangoli sono uguali, se si è verificato che hanno uguali rispettivamente un angolo acuto e l'ipotenusa.*

b) *Si può affermare che due triangoli rettangoli sono uguali, se si è verificato che hanno uguali rispettivamente un cateto e l'angolo acuto adiacente.*

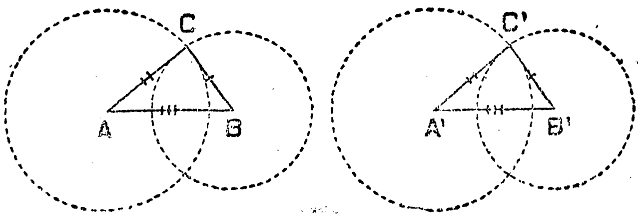
125. III° Criterio d'uguaglianza. — *Si può affermare che due triangoli sono uguali, se si è verificato che hanno uguali rispettivamente i tre lati.*

Dati i due triangoli ABC, A'B'C', in cui si è verificato che è

$$AB = A'B' \ , \ BC = B'C' \ , \ CA = C'A',$$

diciamo che i due triangoli sono uguali.

Si descrivano col compasso le due circonferenze



che hanno i centri A e B e passano per C e similmente le due circonferenze di centri A′ e B′ e passanti per C′.

Le due prime circonferenze si segano in C e in un altro punto da parte opposta rispetto alla AB (n. 83); così le altre due circonferenze si segano in C′ e in un altro punto situato da banda opposta rispetto alla A′B′.

Ora, essendo

$$A'C' = AC \quad , \quad B'C' = BC,$$

le due circonferenze di centri A′, B′, sono rispettivamente uguali alle circonferenze di centri A, B (n. 70).

Ritagliamo allora la figura costituita dal triangolo A′B′C′ e dalle due circonferenze A′, B′ e portiamola sull' altra figura analoga, in modo che il segmento A′B′ si adagi su AB e il triangolo A′B′C′ cada rispetto alla AB dalla stessa parte di ABC.

Le due circonferenze A′, B′ andranno a coincidere con le circonferenze A, B rispettivamente uguali e il punto C′ di intersezione di A′, B′ cadrà necessariamente nel punto C, comune alle circonferenze A, B e giacente con C′ dalla stessa parte di AB.

Si verifica in tal modo che i due triangoli sono sovrapponibili e quindi uguali.

Poligoni uguali.

126. Ciò che abbiamo detto pei triangoli al n. 119, si può ripetere per i poligoni, aventi più di tre lati.

Due poligoni, aventi lo stesso numero di lati, possono essere **uguali.**

Si verifica se essi siano uguali, provando se si possano sovrapporre esattamente l' uno all' altro.

Due poligoni uguali hanno ordinatamente uguali i lati e gli angoli, compresi fra lati uguali.

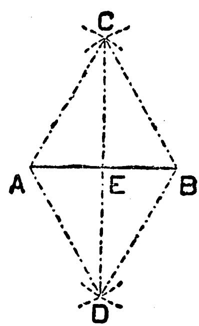
Costruzioni con la riga e il compasso.

Come applicazione dei criteri di uguaglianza dei triangoli (nn. 121-125) possiamo mostrare in qual modo si possano eseguire le costruzioni fondamentali del disegno *usando soltanto la riga e il compasso* (e senza servirsi della riga graduata, della squadra e del rapportatore).

127. Probl. — *Determinare il punto medio di un segmento dato.*

Dato un segmento AB, si descrivano le due circonferenze uguali, di centro A e B, e di raggio uguale al dato segmento AB.

Queste due circonferenze si segano in due punti C, D cadenti da bande opposte rispetto alla AB (n. 83). Diciamo che il punto E in cui la CD interseca il segmento AB è il punto medio di questo segmento.



Infatti notiamo anzitutto che i triangoli ACD, BCD sono uguali (n. 125), in quanto hanno comune il lato CD ed uguali i lati AC e BC, AD e BD.

Sono quindi uguali gli angoli $\widehat{ACE}$ e $\widehat{BCE}$, e quindi i triangoli AEC, BEC in quanto hanno comune il lato EC e uguali i lati AC e BC e gli angoli $\widehat{ACE}$, $\widehat{BCE}$ (n. 121).

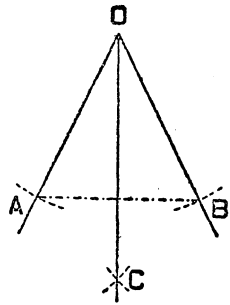
Si conclude di qui che è veramente

$$AE = EB.$$

128. Nota. — La costruzione prec. riesce ugualmente quando il raggio delle due circonferenze uguali di centro A e B si assuma uguale, anzichè ad AB, ad un qualsiasi segmento maggiore della metà di AB.

Notiamo poi che dalla uguaglianza dei triangoli AEC, BEC risulta che gli angoli adiacenti $\widehat{AEC}$, $\widehat{BEC}$ sono uguali, ossia che la retta CD è perpendicolare ad AB (n. 58).

Codesta retta CD, perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio si dice *asse* del segmento.



129. Probl. — *Bisecare un angolo dato.*

Dato l'angolo $\widehat{O}$, si descriva, centro in O, una circonferenza di raggio arbitrario, la quale intersecherà i due lati di $\widehat{O}$ in due punti A, B.

Facendo centro in A e B, con raggio maggiore della metà di AB, si descrivano due archi di circonferenza, i quali si incontrino in un punto C.

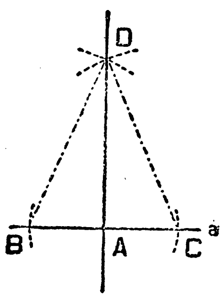
I due triangoli AOC, BOC sono per costruzione uguali, avendo i lati ordinatamente uguali (n. 125), onde OC è la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$.

130. Nota. — La costruzione precedente permette anche di *bisecare un arco,* in quanto basta a tale scopo bisecare l'angolo al centro corrispondente (n. 76).

131. Probl. — *Condurre da un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

Bisogna distinguere due casi secondo che il punto dato appartiene o no alla retta data.

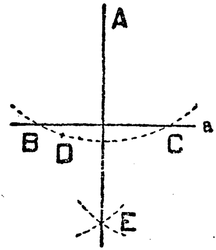
1) Sia data la retta a e il punto A su di essa. Descritta, centro in A, una circonferenza di raggio arbitrario, questa interseca la a in due punti B, C, tali che A è il punto medio del segmento BC. Allora, centro in B e in C, si descrivano due circonferenze di raggio uguale ad un segmento maggiore di AB. Codeste due circonferenze si intersecano in due punti (n. 83) equidistanti da B e da C, perchè i raggi delle due circonferenze sono uguali.



Se D è uno di codesti due punti la AD è perpendicolare ad a.

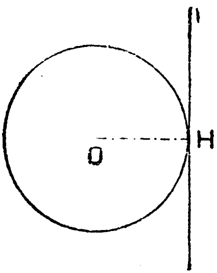
Infatti i due triangoli ABD, ACD, aventi il lato AD comune e gli altri due lati rispettivamente uguali, sono uguali (n. 125) onde risulta che i due angoli adiacenti $\widehat{BAD}$, $\widehat{CAD}$ sono uguali e quindi retti (n. 46).

2) Data la retta a e il punto A fuori di essa, si prenda un punto D che cada rispetto alla a da banda opposta di A e, centro in A, si descriva la circonferenza di raggio AD. La circonferenza tracciata interseca in due punti B e C la a. Le due circonferenze di centri B e C, e di raggio BA = CA si intersecano oltre che in A in un secondo punto E (che cade rispetto ad a dalla parte opposta di A): e la retta AE è la perpendicolare cercata.



Ciò risulta senz'altro dal n. 128.

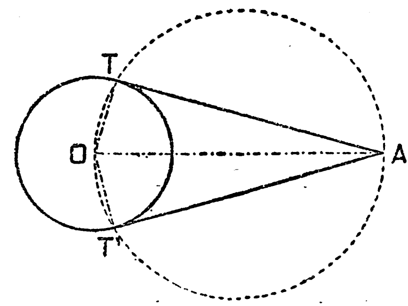
132. Probl. — *Data una circonferenza, condurre la tangente in un suo punto.*



Basta condurre per il dato punto H la perpendicolare al raggio OH (n. 81).

133. Probl. — *Dato un cerchio, condurre da un punto esterno le tangenti ad esso.*

Se O è il cerchio dato e A è il dato punto esterno, si descriva la circonferenza che ha per diametro il segmento OA. Se T, T' sono le intersezioni di essa con la circonferenza data, le rette AT, AT' sono le tangenti cercate, perchè ciascuno degli angoli $\widehat{ATO}$, $\widehat{AT'O}$, come iscritto in una semicirconferenza, è retto (n. 104), e sappiamo che la perpendicolare ad un raggio nel suo estremo è tangente al cerchio (n. 81).

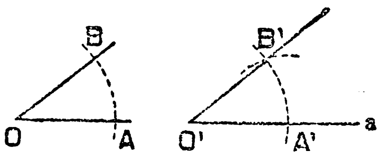


134. — Nella figura prec. i triangoli AOT, AOT' sono uguali, perchè se pieghiamo il foglio lungo la retta OA, i punti T, T' vanno a coincidere (cfr. n. 83) e i due triangoli si sovrappongono esattamente. Perciò sono uguali i segmenti AT, AT': cioè:

Condotte ad un cerchio da un punto esterno le due tangenti, i segmenti di esse, compresi fra il punto dato e i punti di contatto, sono uguali.

185. Probl. — *Costruire sopra una semiretta data e da una banda assegnata rispetto ad essa, un angolo uguale ad un angolo dato* (trasporto dell'angolo).

Dati la semiretta *a* d'origine O' e un angolo di vertice O, con centro in O e raggio arbitrario, si descriva un arco che intersechi in A, B i due lati dell'angolo dato. Allora centro in O' si descriva la circonferenza di raggio uguale ad OA, la quale intersechi *a* nel punto A', e dal punto A' come centro, e con apertura di compasso uguale ad AB si tagli la circonferenza di centro O', dalla banda prefissata rispetto ad *a*, nel punto B'. L'angolo $\widehat{A'O'B'}$ è uguale all'angolo dato $\widehat{AOB}$.

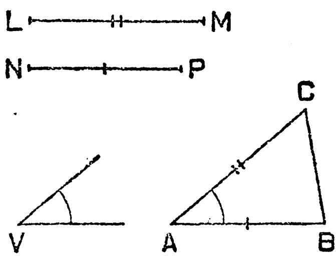


Infatti i due triangoli isosceli ABO, A'B'O' hanno uguali per costruzione le basi AB, A'B' e i lati AO, A'O' (e BO, B'O') e quindi sono uguali (n. 125) ed hanno uguali gli angoli al vertice.

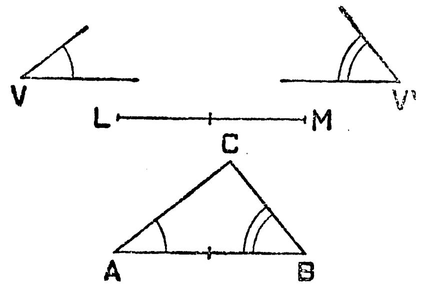
186. Probl. — *Costruire un triangolo che abbia due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali a due segmenti e ad un angolo dati;* o come si dice solitamente: *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo compreso.*

Siano prefissati i lati LM, NP e l'angolo $\widehat{V}$.

Costruito un angolo $\widehat{A}$ uguale a $\widehat{V}$, sui lati di questo si prendano i segmenti AB, AC uguali ad LM, NP rispettivamente. Il triangolo ABC soddisfa al problema.



187. Probl. — *Costruire un triangolo che abbia due angoli e il lato comune ad essi* *uguali rispettivamente a due angoli e ad un segmento prefissati;* o, come si dice solitamente: *Costruire un triangolo, dati due angoli e il lato comune.*

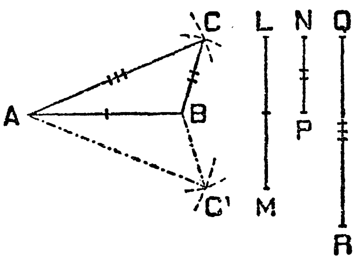


Dati il segmento LM e gli angoli $\widehat{V}, \widehat{V'}$, per costruire un triangolo avente un lato e due angoli adiacenti uguali ordinatamente ad LM, $\widehat{V}, \widehat{V'}$, si prenda un segmento AB uguale ad LM e per A, B si conducano da una stessa banda rispetto alla AB, due semirette le quali formino colle semirette AB, BA due angoli uguali rispettivamente a $\widehat{V}, \widehat{V'}$. Se le due semirette dianzi condotte si incontrano in un punto C, il triangolo ABC soddisfa al problema.

Nota. — Perchè codeste due semirette si incontrino è necessario e sufficiente che la somma dei due angoli $\widehat{V}, \widehat{V'}$ sia minore di 180°. (Si ricordi il n. 91).

138. Probl. — *Costruire un triangolo avente i lati rispettivamente uguali a tre segmenti dati;* o come si dice solitamente: *Costruire un triangolo dati i tre lati.*

Se sono LM, NP, QR i tre segmenti dati, prendiamo come base del triangolo un segmento AB = LM.



Se la circonferenza di centro A e raggio QR e la circonferenza di centro B e raggio NP, hanno un punto comune C, che non sia sulla retta AB, si conducano i segmenti AC e BC; e il triangolo ABC soddisfarà alle condizioni volute, perchè

$$AB = LM, \; BC = NP, \; CA = QR.$$

Nota. — Affinchè le due circonferenze suindicate si seghino bisogna (e basta) che *ciascuno dei tre segmenti dati sia minore della somma degli altri due.* Si ricordi il n. 90.

139. — Se è disegnato sul foglio un triangolo, potremo *copiarlo* servendoci di una qualsiasi delle tre costruzioni indi cate nei nn. 136, 137, 138.

Se poi vogliamo *copiare* un poligono qualsiasi, prima lo *decomporremo* in triangoli conducendo per un vertice tutte le possibili diagonali, e poi, copieremo i triangoli così ottenuti l'uno accanto all'altro, come si trovano nel poligono dato.

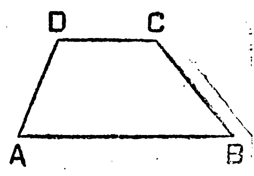
VI.

PARALLELOGRAMMI

Trapezio. Parallelogramma.

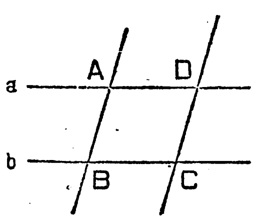
Ancora come applicazione dei criteri d'uguaglianza dei triangoli (nn. 121-125) studiamo una classe speciale di quadrangoli che fra i poligoni hanno una particolare importanza.

140. In un quadrangolo si designano col nome di *opposti* due lati non aventi vertici comuni. Un quadrangolo in cui due lati opposti sono paralleli dicesi *trapezio*.



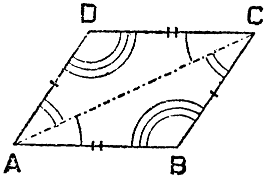
I due lati paralleli diconsi *basi* del trapezio.

141. Date due rette a, b parallele intersecate da una trasversale nei punti A, B rispettivamente, se si conduce per un punto D di a, distinto da A, la parallela alla AB, questa incontra la b in un punto C e si ottiene un quadrangolo ABCD, in cui ogni lato è paral-



lelo al lato opposto, e che può quindi considerarsi in due modi come trapezio, prendendo come basi due lati opposti oppure gli altri due.

Ogni quadrangolo in cui i lati opposti sono paralleli dicesi *parallelogramma*.



142. Ritagliamo dal foglio un parallelogramma ABCD e poi tagliamolo lungo una sua diagonale AC. Esso resta diviso in due triangoli ABC, CDA, che si possono esattamente sovrapporre.

Verifichiamo così che il lato AB è uguale a DC, il lato BC è uguale ad AD, l'angolo $\widehat{CBA}$ è uguale ad $\widehat{ADC}$. Perciò anche gli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{DCB}$ sono uguali come somme di angoli uguali (n. 41).

Abbiamo cioè che:

In un parallelogramma:

1) *i lati opposti sono uguali;*

2) *gli angoli opposti sono uguali;*

3) *ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli uguali.*

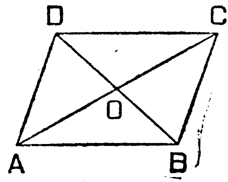
Ciò si può anche dimostrare, senza ritagliar la carta, e ricordando le proprietà delle parallele e i criteri di uguaglianza dei triangoli.

Condotta infatti nel parallelogramma ABCD la diagonale AC, si noti che gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DCA}$ sono uguali perchè alterni formati dalla trasversale AC colle due parallele AB, DC (n. 66); e così sono uguali gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAD}$ come alterni formati dalla trasversale AC colle parallele DA, CB. Allora i due triangoli ABC, e CDA hanno il lato AC comune e gli angoli adiacenti ordinatamente uguali; perciò sono uguali (n. 123) e di qui come pocanzi si conclude

$$AB = DC, \quad AD = BC$$
$$\widehat{CBA} = \widehat{ADC}, \quad \widehat{BAD} = \widehat{DCB}.$$

143. Notiamo ancora che:

In un parallelogramma le due diagonali si dividono scambievolmente per metà.



Se O è il punto in cui si segano le due diagonali AC, BD, i due triangoli ABO, CDO sono uguali (n. 123) perchè per quanto si è visto or ora è

$$AB = CD$$

e poi pel n. 66 è

$$\widehat{OBA} = \widehat{ODC},\ \widehat{BAO} = \widehat{DCO}.$$

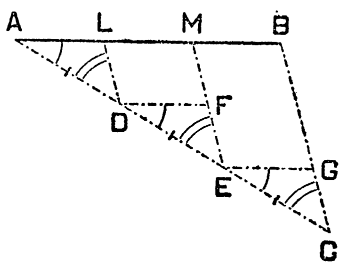
Ne risulta

$$AO = CO,\ BO = DO.$$

144. Le proprietà dei parallelogrammi conducono a risolvere il seguente:

Probl. — *Dividere un segmento dato in un numero assegnato qualsivoglia di parti uguali.*

Per fissare le idee proponiamoci di dividere il segmento dato AB in *tre* parti uguali.



Sopra una semiretta uscente da uno degli estremi, p. es. da A, e distinta dalla AB, si portino di seguito tre segmenti AD, DE, EC uguali ad un segmento arbitrario e, congiunto C con B, pei punti D ed E si conducano le parallele alla retta CB, fino ad incontrare la AB nei punti L ed M.

I tre segmenti AL, LM, MB, in cui resta diviso il segmento AB, sono uguali.

Per dimostrarlo si conducano per D, E le parallele ad AB, fino ad incontrare in F, G le ME, BC, e si confrontino i triangoli ADL, DEF, ECG.

Essi sono uguali (n. 123) perchè hanno uguali i lati AD, DE, EC per costruzione, gli angoli $\widehat{DAL}$, $\widehat{EDF}$, $\widehat{CEG}$, come corrispondenti rispetto alle parallele AL, DF, EG e alla trasversale AC e gli angoli $\widehat{ADL}$, $\widehat{DEF}$, $\widehat{ECG}$ come corrispondenti rispetto alle parallele LD, ME, BC e alla trasversale AC (n. 66).

Avremo dunque

$$AL = DF = EG.$$

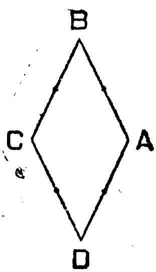
Ma nei parallelogrammi DFML, EGBM i lati opposti sono uguali, talchè sarà

$$DF = LM, \ EG = MB$$

onde si conclude

$$AL = LM = MB.$$

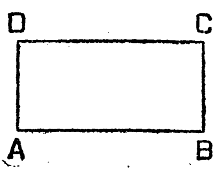
Rombo, rettangolo, quadrato.



145. Se un parallelogramma ABCD ha uguali due lati consecutivi AB, BC, ha uguali tutti e quattro i lati, perchè i lati opposti sono sempre uguali (n. 142).

Un parallelogramma avente tutti i lati uguali si dice *rombo* o *losanga.*

146. Se in un parallelogramma ABCD un angolo, p. es. quello in A, è retto, anche l'opposto che gli è uguale (n. 142), cioè l'angolo in C, sarà retto.

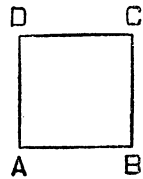


Ora in ogni quadrangolo la somma dei quattro angoli è di 360°; cosicchè nel nostro parallelogramma gli altri due angoli in B e D sommati daranno 180° e, poichè sono uguali (n. 142), saranno tutti e due retti. Cioè il parallelogramma ABCD ha tutti gli angoli retti.

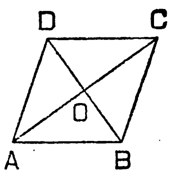
Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti dicesi *rettangolo.*

Si può costruire un rettangolo, dati due suoi lati consecutivi, staccando due segmenti uguali ad essi sopra i lati d'un angolo retto, e conducendo per gli estremi la parallele ai lati dell'angolo fino ad incontrarsi.

147. Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti e tutti e quattro i lati uguali dicesi *quadrato*. Perciò il quadrato è nello stesso tempo rombo e rettangolo. Il quadrato resta definito quando ne è dato il lato; e il quadrato costruito sopra un segmento, dato come lato, si dice « quadrato di esso ».

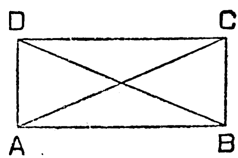


148. *Nel rombo le diagonali sono perpendicolari.*

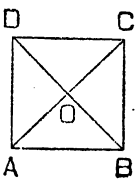


Infatti i due triangoli DOC, BOC hanno comune il lato OC e uguali i lati OD, OB (n. 148) e DC, BC; cosicchè per il III criterio sono uguali e hanno uguali gli angoli $\widehat{DOC}$, $\widehat{BOC}$. Poichè questi sono adiacenti, saranno ciascuno di 90°; e le due diagonali AC, BD sono veramente perpendicolari.

149. *Nel rettangolo le diagonali sono uguali.*



Si noti, infatti, che i due triangoli rettangoli ABC, BAD hanno il cateto AB comune e i cateti AD e BC uguali (n. 142); cosicchè pel I criterio, sono uguali e hanno uguali le ipotenuse.

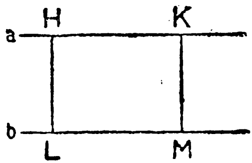


150. *Nel quadrato le diagonali sono perpendicolari ed uguali.*

Distanza di due parallele.

151. Dalle proprietà dei parallelogrammi ricaviamo una osservazione importante.

Date le due rette *a, b,* parallele fra loro, prendiamo su una di esse, p. es. sulla *a,* due punti qual-



siansi H e K e da essi abbassiamo le perpendicolari HL, KM sulla *b.* Queste due perpendicolari sono parallele (n. 59) e siccome sono parallele anche le *a, b,* il quadrangolo HLMK sarà un parallelogramma (precisamente un rettangolo) e avrà uguali i due lati opposti HL, KM (n. 142), cioè le distanze di H e K dalla retta *b.* Ma H e K sono due punti qualsiansi di *a*; cosicchè concludiamo che:

Se due rette sono parallele, tutti i punti dell' una hanno ugual distanza dall' altra.

Codesta distanza si dice *distanza delle due parallele.*

152. In un trapezio dicesi *altezza* la distanza delle rette delle due basi (n. 140).

Dato un parallelogramma ABCD, talvolta se ne prende un lato, p. es. AB, come *base.* Allora dicesi *altezza* relativa a codesta base la distanza della retta AB dalla retta DC del lato opposto. Nel parallelogramma si hanno due altezze.

Nel rettangolo, fissata la base, l' altezza è uguale ai due lati perpendicolari alla base.

VII.

POLIGONI REGOLARI

153. Un poligono si dice *regolare* se ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali.

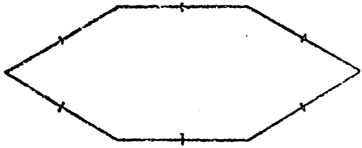
Per esempio sono poligoni regolari il triangolo equilatero (n. 99) e il quadrato (n. 147).

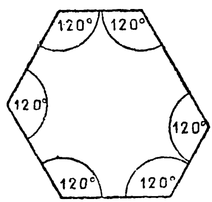
154. Se un triangolo ha i tre lati uguali (è *equilatero*) ha uguali anche gli angoli (è *equiangolo*) (n. 99).

Ma un poligono a quattro o cinque o più lati può benissimo essere equilatero senza essere equiangolo; come pure può essere equiangolo senza essere equilatero.

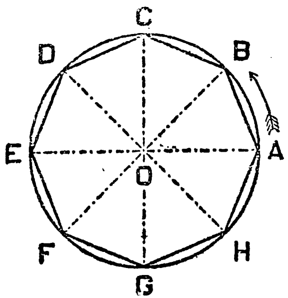
Per esempio, un rombo è equilatero (n. 145), ma, se non è un quadrato, non è equiangolo; così un rettangolo è equiangolo (n. 146), ma, se non è quadrato, non è equilatero.

Così si osservino i due esagoni della unita figura.





155. Se una circonferenza di centro O è divisa in un certo numero di archi uguali, p. es. in 8: AB, BC, CD,.... e conduciamo le rispettive corde, otteniamo



un poligono, che nel caso della nostra figura è un ottagono. *Codesto poligono è regolare.*

Se infatti facciamo girare la figura intorno al centro O del cerchio in modo da portare A in B, il vertice B andrà in C, C in D,... ed H in A; cosicchè ciascun lato del poligono si sovrapporrà al lato successivo e ciascun angolo all'angolo successivo. Verifichiamo così che sono uguali tutti i lati e tutti gli angoli, vale a dire che il poligono è regolare.

156. Un poligono, i cui vertici si trovino tutti su di una circonferenza, si dice *iscritto* nella circonferenza. Viceversa la circonferenza si dice *circoscritta* al poligono.

Il centro O e il raggio OA (od OB, od OC, ecc.) della circonferenza circoscritta ad un poligono regolare si dicono *centro* e *raggio* del poligono regolare.

157. Se conduciamo i raggi che passano pei vertici di un poligono regolare, questo resta diviso in tanti triangoli isosceli aventi per vertice comune il centro O e per basi i lati del poligono.

Codesti triangoli isosceli sono tutti uguali, perchè hanno le basi uguali e i lati uguali (n. 125).

Perciò i loro angoli al vertice sono uguali; e siccome la loro somma è di 360°, così l'ampiezza in gradi di ciascuno di essi si otterrà dividendo 360 per il numero dei lati del poligono regolare considerato.

Nel caso della figura precedente, in cui abbiamo un ottagono, l'ampiezza di ciascuno degli otto angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$,... $\widehat{HOA}$ sarà di $\frac{360}{8}$ gradi cioè di 45°.

Così indichiamo qui gli angoli al centro corrispondenti ai lati di alcuni poligoni regolari:

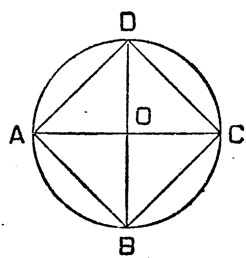
triangolo equilatero	120°
quadrato	90°
pentagono	72°
esagono	60°

158. L'altezza dei triangoli isosceli AOB, BOC,... si dice *apotema* del poligono regolare. In altre parole si dice *apotema* di un poligono regolare la distanza dei lati dal centro.

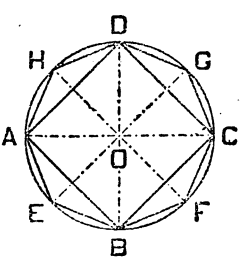
159. Ciò premesso risolviamo alcuni facili esercizi.

Probl. — *Iscrivere in una circonferenza data un quadrato.*

Fissato sulla circonferenza data un punto A come vertice del quadrato, si conducano il diametro AC passante per A e il diametro BD perpendicolare al primo. Condotte le corde AB, BC, CD, DA, notiamo che i quattro angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$ sono retti e perciò uguali. Saranno quindi uguali anche gli archi corrispondenti AB, BC, CD, DA (n. 76) e il quadrangolo ABCD sarà un quadrato (n. 155).



160. Iscritto nel cerchio dato O il quadrato ABCD, si conducano per O i due diametri EG, FH, che bisecano gli angoli retti, formati dai due diametri AC, BD.

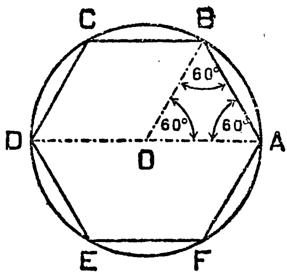


La circonferenza resta divisa in otto archi uguali; cosicchè l'ottagono AEBFCGDH sarà regolare (n. 155).

Similmente potremo iscrivere successivamente un poligono regolare a 16 lati, a 32 lati, ecc.

161. Prob. — *Iscrivere in una circonferenza un esagono regolare.*

Per iscrivere in una circonferenza O un esagono regolare, notiamo che, se AB è un suo lato, il triangolo isoscele AOB

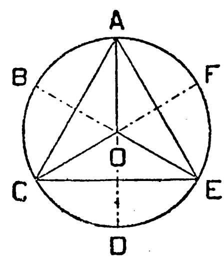


ha l'angolo al vertice in O di 60° (n. 157): onde risulta che anche gli angoli alla base, essendo uguali e dovendo insieme sommare a 120° (n. 91), hanno ciascuno l'ampiezza di 60°, cosicchè il triangolo AOB è equiangolo e quindi equilatero (n. 99).

Cioè *il lato dell'esagono regolare è uguale al suo raggio.*

Allora per iscrivere nella circonferenza data O un esagono regolare, basta far centro in un suo qualsiasi punto A (preso come vertice) e con un'apertura di compasso uguale al raggio OA segare la O in due punti B, F; e poi eseguire la stessa costruzione facendo centro nell'altro estremo D del diametro passante per O.

162. Divisa una data circonferenza in sei parti uguali, AB, BC, CD, DE, EF, FA a partire dal punto A assegnato ad arbitrio, gli archi AC, CE, EA, doppi di archi uguali, saranno uguali, e il poligono ACE sarà un triangolo equilatero. Resta così risoluto il



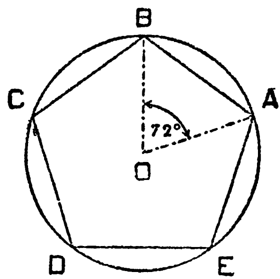
Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero.*

163. Iscritto in una circonferenza O un esagono regolare ABCDEF si conducano i tre diametri che bisecano gli angoli al centro, formati dai diametri AD, BE, CF. Si divide così la circonferenza in dodici archi uguali, le cui corde determinano un dodecagono *regolare* (n. 155).

Analogamente potremo iscrivere nel cerchio dato un *poligono regolare di 24 lati* e così via.

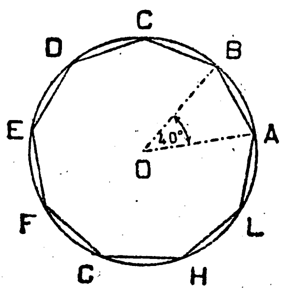
164. — Per iscrivere in una circonferenza O un *pentagono regolare* ci serviremo, oltre che del compasso e della riga, anche del rapportatore.

Con questo strumento si descriva nel cerchio O un angolo



al centro $\widehat{AOB}$ di 72.° Come $\widehat{AOB}$ è la quinta parte di 360°, così l'arco AB è la quinta parte della circonferenza. Presi gli archi BC, CD, DE uguali ad AB, risulta uguale ai precedenti anche EA e il pentagono ABCDE è regolare.

Similmente per iscrivere nella circonferenza O un *ennagono regolare,* cioè un poligono regolare a nove lati, si determina col rapportatore un angolo al centro di 40°, ecc.



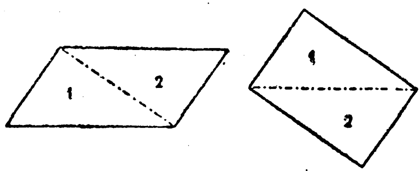
VIII.

MISURA DEI POLIGONI

Poligoni equivalenti.

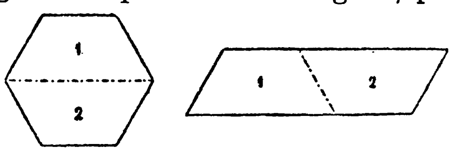
165. Due poligoni possono aver **ugual superficie** anche senza essere uguali (sovrapponibili).

P. e. i due parallelogrammi dell'annessa figura

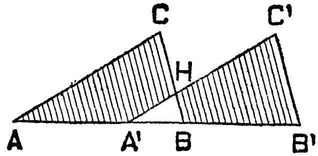


hanno ugual superficie, perchè sono tutti e due *somme* degli stessi triangoli 1, 2.

Similmente hanno ugual superficie l'esagono e il parallelogramma qui accanto disegnati, perchè sono



somme di trapezi uguali. E infine hanno superficie uguale i due trapezi tratteggiati AA′HC, BB′C′H, perchè si ottengono *sottraendo* il medesimo triangolo A′BH dai due triangoli uguali ABC, A′B′C′.



166. Due poligoni aventi ugual superficie si dicono *equivalenti*.

167. Abbiamo allora che:

I. *Poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.*

II. *Somme di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti.*

III. *Differenze di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti.*

Misurazione di un poligono.

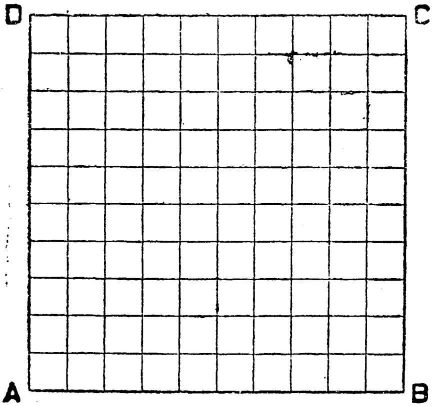
168. Per *misurare* un poligono bisogna anzitutto fissare la *unità di misura.*

Solitamente si assume come *unità* il quadrato che ha per lato l'unità di misura dei segmenti. Così, quando si prende come unità delle lunghezze il *metro,* si assume come unità fondamentale per la misura delle superficie il *metro quadrato* cioè il *quadrato che ha per lato il metro* (1 m.^{2}).

Come unità ausiliari si assumono allora il *decimetro quadrato* (1 dm.^{2}), il *centimetro quadrato* (1 cm.^{2}), il *millimetro quadrato* (1 mm.^{2}), e così pure il *decametro quadrato* (1 dam.^{2}), l'*ettometro quadrato* (1 hm.^{2}), il *chilometro quadrato* (1 km.^{2}), cioè i quadrati che hanno per lato rispettivamente un decimetro, un centimetro, un millimetro o un decametro, un ettometro, un chilometro (1).

169. Se preso il metro quadrato ABCD, ne dividiamo i due lati AB,BC in decimetri e conduciamo pei 9 punti di divisione segnati su AB le parallele a BC e pei punti di divisione di BC le parallele ad AB,

(1) Per misurare le superficie dei terreni si usano, com'è ben noto, come unità il decametro quadrato e l'ettometro quadrato, che si chiamano, in tal caso, rispettivamente *ara* (1 *a.*) ed *ettara* (1 *ha.*).



il metro quadrato vien diviso in 100 quadrati, di cui ciascuno ha per lato 1 dm.

Dunque il metro quadrato contiene esattamente 100 dm.^{2}

Così il decimetro quadrato contiene 100 cm.^{2} e il centimetro quadrato 100 mm.^{2}; onde risulta che il metro quadrato contiene 10 000 cm.^{2} e 1 000 000 mm^2.

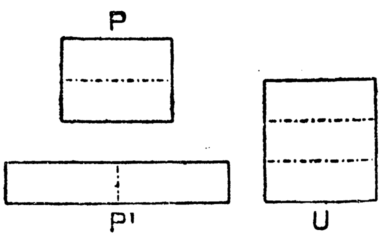
170. *Misurare un poligono* P vuol dire trovare quante volte il poligono P contenga il metro quadrato, o il decimetro quadrato, o il centimetro quadrato,...

Se p. es. P contiene esattamente 23 dm.^{2} si dice che la *misura* o *area* di P è dm.^{2} 23.

Si può anche dire che l'area di P è m.^{2} 0,23, o cm.^{2} 2300, o dam.^{2} 0,0023, o mm.^{2} 230 000, ecc.

171. Misurazione rispetto ad una unità qualsiasi. — Si può misurare un poligono P rispetto ad un qualsiasi altro, preso come *unità*.

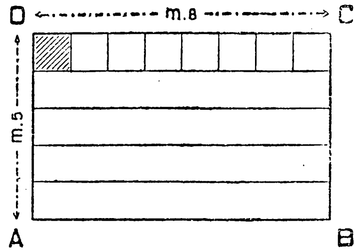
Misurare P rispetto ad un qualsiasi poligono U vuol dire trovare una parte aliquota di U che sia contenuta esattamente in P.



Se, come accade pel rettangolo P (o P') dell'unita figura, la 3^a parte di U, è contenuta esattamente 2 volte in P, si dice che la *misura* di P (o P') rispetto ad U è $\frac{2}{3}$.

Area del rettangolo e del quadrato.

172. Per trovare l'area di un rettangolo ABCD, supponiamo dapprima che ciascuno dei due lati contenga un numero esatto di volte l'unità di misura.



P. es., i lati AB, AD siano rispettivamente di m. 8 e m. 5.

Se, dopo aver segnato su AB i metri, conduciamo pei punti di divisione le parallele ad AB, il rettangolo resta diviso in 5 rettangoli uguali. Ciascuno di questi poi è divisibile in 8 quadrati, ognuno dei quali è un metro quadrato. Abbiamo dunque che ABCD contiene 5 volte 8 metri quadrati, cioè la sua area è 40 $m.^2$

173. Supponiamo in secondo luogo che i due lati del rettangolo non contengano un numero esatto di metri. Siano essi, per es., di m. 3,4 e m. 2,6. Ciò vuol dire che i due lati sono rispettivamente di dm. 34 e dm. 26; cosicchè il rettangolo è decomponibile in 34 rettangoli uguali, ciascuno dei quali contiene esattamente 26 dm^2.

Perciò il rettangolo contiene 34 volte 26 $dm.^2$ e la sua area è di

$$dm.^2 (34 \times 26) = dm.^2\ 884$$

ossia di

$$m.^2\ 8{,}84.$$

Quest'ultimo numero si ottiene moltiplicando fra loro 3,4 e 2,6.

Siccome ciò che si è detto or ora si può ripetere per ogni rettangolo, possiamo enunciare la seguente

Regola. — *Per trovare l'area di un rettangolo si moltiplicano fra loro le lunghezze dei lati* (dimensioni del rettangolo).

Se con S indichiamo l'area del rettangolo e con h, k le misure dei lati, possiamo scrivere

$$S = h \times k.$$

174. Nota. — Nell'applicare la regola precedente bisogna badare che le due dimensioni del rettangolo siano misurate rispetto alla stessa unità cioè tutte e due in *metri*, o tutte e due in *decimetri* e così via. E l'area risulta allora misurata rispettivamente in *metri quadrati* o in *decimetri quadrati*, ecc.

175. Dalla regola del n. **173** risulta quest'altra

Regola. — *Data l'area di un rettangolo e una sua dimensione, per trovare l'altra si divide l'area per la dimensione che si conosce.*

Cioè

$$k = \frac{S}{h}.$$

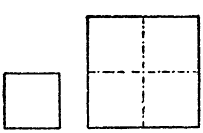
176. Il quadrato è un rettangolo avente le due dimensioni uguali. Abbiamo quindi la

Regola. — *Per trovare l'area di un quadrato si moltiplica per se stessa la lunghezza del lato* o, come si dice, *si fa la seconda potenza o quadrato della lunghezza del lato.*

Indicando con S, l rispettivamente l'area e il lato avremo

$$S = l^2.$$

177. Preso un quadrato qualsiasi, p. es. di mm. 5 di lato e, perciò, di mm.^{2} 25 di area, consideriamo il quadrato di lato *doppio* ossia di mm. 10 di lato; la sua area è di mm.^{2} 100, ossia è *quadrupla* di quella del quadrato primitivo, come del resto risulta dall' unita figura, in cui abbiamo due quadrati, di cui l'uno ha il lato doppio dell'altro.



Cioè: *se il lato di un quadrato Q è doppio del lato di un altro quadrato Q', l'area di Q è quadrupla di quella di Q'; così se il lato di Q è multiplo secondo 3, 4,... del lato di un altro quadrato Q', il quadrato Q è multiplo di Q' secondo 9, 16,...*

178. Risulta dal n. 176 la

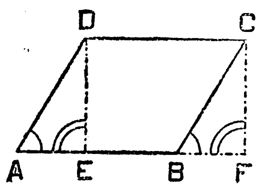
Regola. — *Data l'area di un quadrato, per trovarne la lunghezza del lato si estrae la radice quadrata dell'area.*

Cioè

$$l = \sqrt{S}.$$

Area del parallelogramma.

179. Per trovare l'area di un dato parallelogramma ABCD, prendiamo anzitutto come base uno dei lati maggiori, p. es. AB; e nel caso particolare che il parallelogramma dato sia un rombo, prendiamo come base un lato qualsiasi. Poi sulla retta della base AB abbassiamo dai due vertici C e D le perpendicolari CF, DE, in modo da ottenere il rettangolo EFCD, il quale ha la stessa altezza del parallelogramma e la base EF uguale a DC e quindi anche alla base AB del parallelogramma.



I due triangoli AED, BFC sono uguali come si verifica ritagliando la figura in carta.

Ciò del resto si dimostra facilmente (n. 122), osservando che i due triangoli sono rettangoli ed hanno uguali i cateti ED, FC, come lati opposti del rettangolo (n. 142), e i cateti AE, BF, che si ottengono sottraendo il segmento EB dai segmenti uguali AB, EF.

Così vediamo che il parallelogramma dato e il rettangolo EFCD si ottengono riunendo allo stesso trapezio EBCD, in due posizioni diverse, due triangoli uguali, per modo che hanno ugual superficie, o, come si dice, sono equivalenti (n. 167).

Perciò l'area del parallelogramma sarà uguale a quella del rettangolo, la quale si ottiene moltiplicando la lunghezza di EF per quella di DE (n. 173).

Poichè EF è uguale alla base AB del parallelogramma e DE ne è l'altezza, otteniamo la seguente

Regola. — *Per trovare l'area di un parallelogramma si moltiplicano le lunghezze della sua base e della sua altezza*, o, come si dice brevemente, *si moltiplicano fra loro la base e l'altezza* (cfr. n. 174).

Indicando con S l'area e con b, h le lunghezze della base e dell'altezza rispettivamente, avremo

$$S = b \times h.$$

180. Abbiamo di qui quest'altra

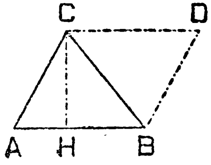
Regola. — *Date l'area e la base (o l'altezza) di un parallelogramma, per trovare l'altezza (o la base) si divide l'area per la base (o per l'altezza).*

Cioè

$$h = \frac{S}{b} \quad , \quad b = \frac{S}{h}.$$

Area del triangolo.

181. Dato un triangolo ABC, da due vertici B e C conduciamo le parallele ai rispettivi lati opposti AC e AB, fino ad incontrarsi nel punto D.



Otteniamo così un parallelogramma ABDC, il quale è diviso dalla diagonale BC in due triangoli uguali (n. 142). Poichè uno di questi è ABC, questo triangolo è la metà del parallelogramma; e noi per trovare l'area ABC dovremo dividere per 2 l'area di ABDC.

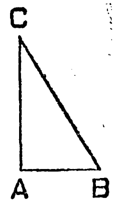
Poichè questo parallelogramma ha la stessa base e la stessa altezza del triangolo, troviamo la seguente

Regola. — *Per trovare l'area di un triangolo si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) della base e dell'altezza.* (Si ricordi il n. 174).

Se indichiamo con S l'area e con b, h le lunghezze della base e dell'altezza rispettivamente, avremo

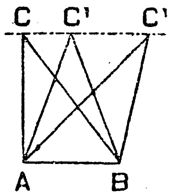
$$S = \frac{b \times h}{2}.$$

182. Se in un triangolo rettangolo si prende come base un cateto, l'altezza è data dall'altro cateto.



Perciò *l'area di un triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto* (delle lunghezze) *dei cateti.*

183. Risulta dalla regola del n. 181 che due triangoli aventi uguali le basi e le altezze hanno aree uguali e quindi sono equivalenti. Cioè:



Triangoli di ugual base ed uguale altezza sono equivalenti.

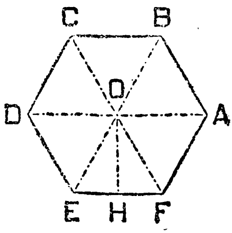
184. Dalla regola del n. 181 ricaviamo la seguente

Regola. — *Data l'area di un triangolo e la sua altezza (o la sua base) si trova la base (o l'altezza) moltiplicando per 2 l'area e dividendo il risultato per la base (o per l'altezza).*

Cioè

$$b = \frac{2S}{h} \quad , \quad h = \frac{2S}{b}.$$

185. Se vogliamo costruire un triangolo doppio o triplo o quadruplo, di un dato, basta costruire un triangolo avente la stessa altezza del dato e la base doppia o tripla o quadrupla...



Si consideri allora un poligono regolare ABCDEF e si congiunga il centro O coi vertici. Il poligono resta diviso in tanti triangoli isosceli quanti sono i lati, e questi triangoli, tutti uguali fra loro, hanno per base il lato e per altezza l'apotema del poligono (nn. 157, 158).

Il poligono è equivalente alla somma di codesti triangoli, ossia, per quanto si disse or ora, ad un triangolo avente per base il perimetro e per altezza l'apotema del poligono.

Abbiamo così la

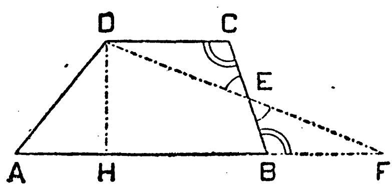
Regola. — *Per trovare l'area di un poligono regolare si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) del perimetro e dell'apotema.* (Si ricordi il n. 174).

Cioè, se indichiamo con S l'area del poligono regolare e con p, a le lunghezze del perimetro e dell'apotema rispettivamente, avremo

$$S = \frac{p \times a}{2}.$$

Area del trapezio.

186. Nel trapezio ABCD congiungiamo il punto medio E dal lato BC col vertice D. Se tagliamo via dal trapezio il triangolo ECD e lo portiamo in EBF, vediamo che il trapezio è equivalente al triangolo AFD, che ha la stessa altezza DH del trapezio e la base AF uguale alla somma delle due basi AB, CD; cioè:



Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e di base uguale alla somma delle basi del trapezio.

187. Di qui, ricordando la regola del n. 181, ricaviamo la seguente:

Regola. — *Per trovare l'area di un trapezio si divide per*

2 il prodotto (della lunghezza) dell'altezza per la somma (delle lunghezze) delle basi. (Si ricordi il n. 174).

Indichiamo con h l'altezza del trapezio, con b, b' le lunghezze delle basi e con S l'area. Avremo

$$S = \frac{h \times (b + b')}{2}.$$

188. Da questa regola si ricavano le regole inverse:

Regola. — a) *Per trovare l'altezza di un trapezio, di cui si conoscono l'area e le (lunghezze delle) basi, si divide il doppio dell'area per la somma (delle lunghezze) delle basi.*

Cioè

$$h = \frac{2S}{b + b'}.$$

b) *Data l'area di un trapezio e data l'altezza e la lunghezza di una delle basi, si trova (la lunghezza de) l'altra base, dividendo il doppio dell'area per (la lunghezza de) l'altezza e sottraendo (la lunghezza de) la base data dal quoziente ottenuto.*

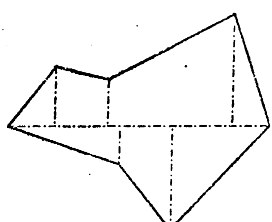
Cioè

$$b + b' = \frac{2S}{h} \quad , \quad b = \frac{2S}{h} - b'.$$

Area di un poligono qualsiasi.

189. Per determinare l'area di un poligono qualsivoglia, esso si decompone per lo più in triangoli per mezzo delle diagonali uscenti da un vertice, oppure congiungendo un punto interno coi singoli vertici; indi si misurano i vari triangoli così ottenuti e la somma delle aree di essi dà l'area del poligono.

Talvolta invece il poligono si suddivide in trapezi e triangoli rettangoli conducendo in esso una diagonale detta *base* (possibilmente nel senso della massima dimensione) e abbassando sulla base le perpendicolari dai vertici.



Così per lo più procedono gli agrimensori nel *rilievo* dei terreni.

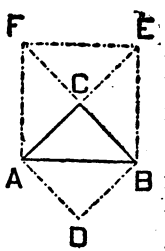
IX.

TEOREMA DI PITAGORA E SUE APPLICAZIONI

Teorema di Pitagora.

190. Se di un triangolo rettangolo si conoscono le lunghezze dei due cateti, si può agevolmente trovare la lunghezza dell'ipotenusa; come pure, note le lunghezze dell'ipotenusa e di un cateto, si può trovare la lunghezza dell'altro cateto.

Per giungere alle regole che insegnano a far questo, dobbiamo premettere un'osservazione geometrica.

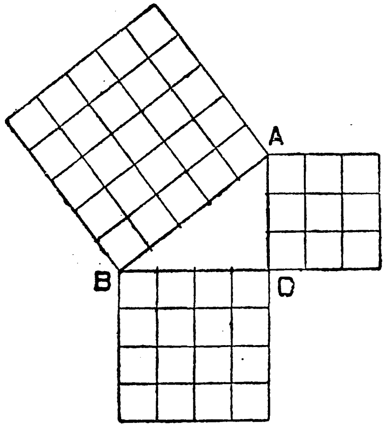


191. Consideriamo dapprima un triangolo rettangolo ABC, *isoscele sull'ipotenusa* AB, e ribaltiamolo intorno ad AB in ABD e intorno ai due cateti in ACF e in CBE. L'angolo $\widehat{ECF}$ risulta retto, talchè congiungendo F con E, otteniamo un quinto triangolo FEC uguale ad ABC.

Dal fatto che ciascuno degli angoli acuti di ABC è di 45°, risulta che il quadrangolo ABEF è il quadrato dell'ipotenusa AB, mentre ADBC è il quadrato del cateto AC. Poichè il primo quadrato è uguale al quadruplo del triangolo ABC e il secondo quadrato è uguale al doppio dello stesso triangolo si conclude che *in un triangolo rettangolo isoscele il quadrato della ipotenusa è equivalente al doppio del quadrato di un cateto.*

In secondo luogo, si costruisca un triangolo rettangolo, i cui cateti siano rispettivamente lunghi

cm. 3 e cm. 4.



Si verifica col doppio decimetro che l'ipotenusa è lunga esattamente cm. 5. (Nell'unita figura abbiamo per comodità ridotto alquanto le dimensioni).

Costruiti i quadrati dei cateti e dell'ipotenusa, avremo che le aree rispettive sono (n. 176)

$$\text{cm.}^2\ 9,\ \text{cm.}^2\ 16,\ \text{cm.}^2\ 25$$

e poichè

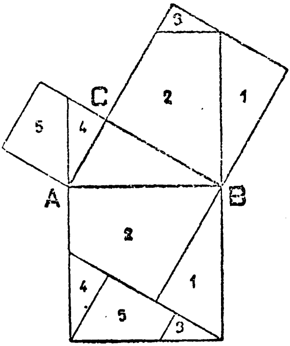
$$9 + 16 = 25$$

concludiamo che *il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti.*

Abbiamo verificato che questa relazione vale per due triangoli rettangoli diversi. Nasce quindi il sospetto che essa valga anche per *ogni* triangolo rettangolo.

Per verificare che così è veramente, prendiamo un triangolo rettangolo qualsiasi e costruiamo sull'ipotenusa e sui due cateti i rispettivi quadrati.

Se ritagliamo il quadrato dell'ipotenusa nei due trapezi 2 e 5 e nei tre triangoli 1, 3 e 4 indicati



dall'unita figura, vediamo che, come risulta dalla figura stessa, codeste cinque parti in cui è diviso il quadrato dell'ipotenusa si possono disporre sui quadrati dei cateti, in modo da ricoprirli esattamente.

Poichè questa verifica si può ripetere per ogni triangolo rettangolo, abbiamo il seguente resultato (*teorema di* PITAGORA):

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

192. Ricordando che si dice *quadrato* o *seconda potenza* di un numero il prodotto del numero per se stesso, avremo dal n. prec. che *in un triangolo rettangolo il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti.*

Se indichiamo con a, b, c le lunghezze rispettivamente della ipotenusa e dei due cateti avremo

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Discendono di qui le due regole seguenti:

Regola. — a) *Per trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze de) i cateti, si estrae la radice quadrata della somma dei quadrati (delle lunghezze) dei cateti.*

Cioè

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

b) *Per trovare (la lunghezza di) un cateto di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze) de l'ipotenusa e (de) l'altro cateto, si estrae la radice quadrata della differenza dei quadrati (delle lunghezze) dell'ipotenusa e del cateto noto.*

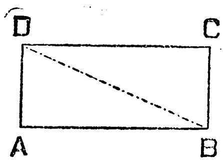
Cioè

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Applicazioni del teorema di Pitagora.

Le regole del n. prec. tornano assai spesso utili nelle applicazioni. Qui ci limiteremo a indicare alcuni facili problemi, in cui si trae profitto da esse.

193. Diagonale del rettangolo. — Un rettangolo ABCD è diviso da una sua diagonale, p. e. la BD, in due triangoli rettangoli (uguali), aventi per cateti due lati consecutivi del rettangolo e per ipotenusa comune la diagonale considerata.



Sia p. e.:

$$AB = \text{cm. } 3{,}5 \quad , \quad AD = \text{cm. } 1{,}2.$$

La lunghezza in centimetri della diagonale sarà per la regola a) del n. 192

$$\sqrt{3{,}5 \times 3{,}5 + 1{,}2 \times 1{,}2} = 3{,}7$$

cioè cm. 3,7.

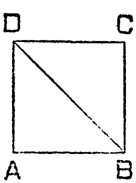
Abbiamo dunque che:

La lunghezza della diagonale di un rettangolo è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni.

194. Analogamente ricaviamo dalla regola b) del n. 192 che:

In ogni rettangolo, una delle due dimensioni è uguale alla radice quadrata della differenza fra il quadrato della diagonale e il quadrato dell' altra dimensione.

195. Diagonale del quadrato. — I triangoli rettangoli in cui un quadrato ABCD è diviso da una diagonale sono isosceli.



Abbiamo perciò che:

La lunghezza della diagonale di un quadrato è uguale alla radice quadrata del doppio del quadrato della lunghezza del lato; e la lunghezza del lato è uguale alla radice quadrata della metà del quadrato della diagonale.

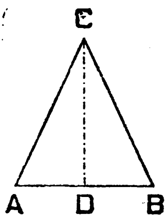
Cioè, se indichiamo con l, d le lunghezze del lato e della diagonale rispettivamente, abbiamo

$$d^2 = 2l^2$$

e quindi

$$d = \sqrt{2l^2} \quad , \quad l = \sqrt{\frac{d^2}{2}}.$$

196. Lato, altezza e base del triangolo isoscele. — Un triangolo ABC isoscele sulla base AB è diviso dall'altezza CD in due triangoli rettangoli uguali, aventi un cateto uguale alla metà della base AB e l'altro uguale all'altezza CD di ABC. Potremo allora valerci delle regole del n. 192 per trovare il lato o l'altezza o la base quando si conoscano gli altri due elementi.



1) Si conoscano in primo luogo la base e l'altezza e si voglia trovare il lato: sia p. es.

$$AB = m.\ 10 \quad , \quad CD = m.\ 12$$

sarà

$$AD = m.\ 5$$

e allora per la regola *a*) del n. 192 la lunghezza in metri del lato AC sarà data da

$$\sqrt{5 \times 5 + 12 \times 12}$$

cioè

$$m.\ 13.$$

2) Si conoscano in secondo luogo il lato e la base, e si voglia trovare l'altezza: sia p. es.

$$AB = dm.\ 5{,}6 \quad , \quad AC = dm.\ 5{,}3.$$

Allora sarà

$$AD = dm.\ 2{,}8$$

e per la regola *b*) del n. 192, la lunghezza in decimetri dell'altezza CD sarà data da

$$\sqrt{5{,}3 \times 5{,}3 - 2{,}8 \times 2{,}8}$$

cioè da

$$\text{dm. } 4{,}5.$$

3) Infine si conoscano il lato e l'altezza, e si voglia trovare la base.

Se p. es. è

$$AC = \text{cm. } 65 \quad , \quad CD = \text{cm. } 63,$$

avremo, per la regola *b*) del n. 192, che la lunghezza in cm. di AD è data da

$$\sqrt{65 \times 65 - 63 \times 63}$$

ossia da

$$\text{cm. } 16\,;$$

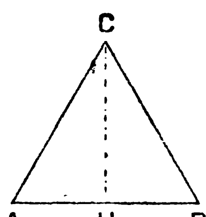
e la base cercata sarà di

$$\text{cm. } 32.$$

197. Se in un poligono regolare si congiunge il centro con due vertici consecutivi, si ottiene un triangolo isoscele, che ha per *base, lato* ed *altezza* rispettivamente il *lato,* il *raggio* e l'*apotema* del poligono regolare.

Perciò ricordando il n. prec., avremo che *basterà conoscere due dei tre elementi di un poligono regolare, lato, raggio ed apotema, per trovare il terzo.*

198. LATO E ALTEZZA DI UN TRIANGOLO EQUILATERO. — Un triangolo equilatero ABC è diviso dall'altezza CH in due triangoli rettangoli uguali in cui l'ipotenusa è doppia di uno dei cateti. L'altro cateto è l'altezza del triangolo equilatero.



Il quadrato di CH sarà equivalente alla differenza dei quadrati di AC e AH. Ma poichè AH è metà di AC il suo quadrato sarà la quarta parte del quadrato di AC, cosicchè avremo che: *In ogni triangolo equilatero il* *quadrato dell' altezza è equivalente ai* $\frac{3}{4}$ *del quadrato del lato, e quindi il quadrato del lato è equivalente ai* $\frac{4}{3}$ *del quadrato dell' altezza.*

Se p. es. in un triangolo equilatero il lato è di m. 6, l'area in metri quadrati del quadrato dell'altezza sarà

$$\frac{3}{4} \times 6 \times 6 = 27$$

e la lunghezza del lato sarà

$$\text{m. } \sqrt{27} = \text{m. } 5{,}19;$$

così, se l'altezza di un triangolo equilatero è di

cm. 12

l'area del quadrato del lato sarà data in cm.^{2} da

$$\frac{4}{3} \times 12 \times 12 = 192$$

e la lunghezza del lato sarà di

$$\text{cm. } \sqrt{192} = \text{cm. } 13{,}85.$$

In ogni caso, indicando con l, h le lunghezze del lato e dell'altezza del triangolo equilatero, avremo

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

ossia

$$l^2 = \frac{l^2}{4} + h^2$$

e quindi

$$\frac{3l^2}{4} = h^2 \quad , \quad l^2 = \frac{4h^2}{3}.$$

Di qui si ricava

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \quad , \quad l = \sqrt{\frac{4h^2}{3}}.$$

199. Siccome l'altezza del triangolo equilatero avente un lato dato è uguale all'apotema dell'esagono regolare che ha il medesimo lato, così *dato il lato di un esagono regolare potremo calcolarne l'apotema e viceversa.*

X.

LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA E AREA DEL CERCHIO

Lunghezza della circonferenza.

200. Data una circonferenza, immaginiamo di averne costruito un modello concreto, p. es. mediante un filo di ottone. Se, dopo averlo tagliato in un punto, noi distendiamo il filo su di una retta, otteniamo un segmento c, che noi chiameremo *circonferenza rettificata*.

Misurando questo segmento, troveremo la *lunghezza della circonferenza* [1].

Ma per avere questa misura non occorre proprio servirsi come dianzi del filo. Infatti si considerino i perimetri dei poligoni iscritti e circoscritti alla circonferenza data. Manifestamente i perimetri dei poligoni iscritti sono minori di c e quelli dei poligoni circoscritti sono maggiori. Di più si vede come codesti poligoni, tanto iscritti che circoscritti, ove abbiano un numero di lati molto grande, finiscono quasi col confondersi colla circonferenza stessa.

Risulta di qui come, misurando il perimetro di un poligono iscritto o circoscritto alla circonferenza, avente

[1] Questa misura si può del resto trovare direttamente servendosi di un metro a nastro comune ò meglio ancora di un *metro clinico* (a nastro metallico flessibile).

un numero grandissimo di lati, si ottiene un *valore approssimato* (rispettivamente per difetto o per eccesso) *della lunghezza della circonferenza;* e l'approssimazione è tanto maggiore quanto più grande è il numero dei lati del poligono considerato.

Se p. es. abbiamo una circonferenza di m. 1 di diametro e consideriamo l'esagono regolare iscritto e il quadrato circoscritto, troviamo (n. 161) che la lunghezza della circonferenza è compresa fra m. 3 e m. 4. Più precisamente, considerando poligoni iscritti e circoscritti ad un grande numero di lati, si trova che la circonferenza di 1 m. di diametro è lunga

m. 3,14

o, se si vuol giungere ai decimillimetri,

m. 3,1416.

Se il diametro, anzichè di 1 m., è di 2 m., si trova che la lunghezza della circonferenza è di

$$\text{m. } 6{,}2821 = \text{m. } (3{,}1416 \times 2);$$

cioè, *quando si raddoppia il diametro, si raddoppia anche la lunghezza della circonferenza.*

E così pure se il diametro è di m. 3 o m. 4 o m. 5, ecc., la lunghezza della circonferenza è rispettivamente di

$$\text{m. } 9{,}4248 = \text{m. } (3{,}1416 \times 3)$$
$$\text{m. } 12{,}5864 = \text{m. } (3{,}1416 \times 4)$$
$$\text{m. } 15{,}7080 = \text{m. } (3{,}1416 \times 5)$$

ecc.

Insomma si ha questo fatto importantissimo che *qualunque sia la circonferenza che si considera, il rapporto della lunghezza della circonferenza a quella del diametro è sempre lo stesso* ed è dato da **3,14** o, con maggiore approssimazione, da 3,1416. Possiamo quindi enunciare la seguente

Regola. — *La lunghezza di una circonferenza si ottiene moltiplicando la lunghezza del diametro per il numero fisso* 3,14 o, *se si vuole una maggior precisione,* 3,1416.

Risulta di qui che *la lunghezza della semicirconferenza si ottiene moltiplicando la lunghezza del raggio per* 3,14 (o 3,1416).

Il numero fisso 3,14 (o 3,1416) che dà *il rapporto costante della lunghezza della circonferenza a quella del diametro,* si suole indicare in Matematica colla lettera greca π *(pi greco).*

Se indichiamo con c, r le lunghezze della circonferenza e del raggio rispettivamente, abbiamo

$$c = 2r \times \pi.$$

201. Segue dal n. prec. quest'altra

Regola. — *La lunghezza del diametro di una circonferenza si ottiene dividendo la lunghezza di essa per il numero* 3,14 *o* 3,1416.

Cioè

$$2r = \frac{c}{\pi}.$$

202. Determinata la lunghezza di una circonferenza si può agevolmente trovare la lunghezza di un suo arco, che corrisponda ad un angolo al centro di data ampiezza.

P. es. si voglia trovare la lunghezza di un arco di circonferenza di 1 m. di raggio corrispondente ad un angolo al centro di 43°. La lunghezza dell'intera circonferenza è di

$$\text{m. } (2 \times 3,14) = \text{m. } 6,28;$$

e poichè il grado è la 360^{a} parte di quattro angoli retti, la lunghezza dell'arco corrispondente dell'angolo di 1° sarà di

$$\text{m. } (6{,}28 : 360)$$

e infine la lunghezza dell'arco corrispondente ad un angolo al centro di 43° sarà di

$$\text{m. } \frac{6{,}28 \times 43}{360} = \text{m. } 0{,}75.$$

Abbiamo cioè che *la lunghezza dell'arco si trova moltiplicando la lunghezza dell'intera circonferenza per il numero dei gradi del corrispondente angolo al centro e dividendo il prodotto per 360.*

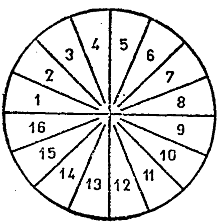
203. Se l'ampiezza dell'angolo al centro è data in gradi, minuti e secondi, essa si riduce anzitutto a secondi; e poi per avere la lunghezza dell'arco corrispondente si moltiplica la lunghezza della circonferenza per il numero di secondi ottenuto e si divide il prodotto per 1 296 000 (numero dei secondi contenuti in 360°).

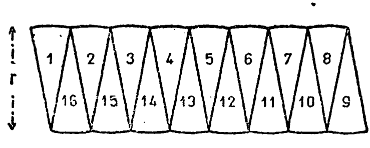
Area del cerchio.

204. Sia dato un cerchio C di cui indichiamo con r la lunghezza del raggio.

Per determinarne l'area, si divida la circonferenza in 4 parti uguali, poi in 8, in 16 e così via. Se ci fermiamo ad un numero abbastanza grande, ciascuno degli archetti uguali, in cui è divisa la circonferenza, finisce quasi col confondersi con la corda rispettiva.

Allora ritagliamo i settori corrispondenti a codesti archetti, in cui vien diviso il cerchio C, e disponiamoli come indica l'unita figura, in cui ci siamo limi





tati a dividere la circonferenza in 16 parti uguali. Otteniamo così una figura, la quale, se gli archetti sono abbastanza piccoli da potersi confondere praticamente colle corde rispettive, si riduce a un parallelogramma, avente per base la semicirconferenza rettificata e per altezza il raggio r del cerchio dato.

In base a ciò concludiamo che *l'area del cerchio è uguale a quella di un parallelogramma avente la base uguale alla semicirconferenza rettificata e l'altezza uguale al raggio.*

Siccome la lunghezza della semicirconferenza (numero 200) si trova moltiplicando il raggio per 3,14 (o 3,1416) e l'area di un parallelogramma (n. 179) si trova moltiplicando la base per l'altezza, avremo la seguente

Regola. *L'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per* 3,14 (o 3,1416).

Cioè, se S indica l'area del cerchio di raggio r,

$$S = \pi \times r^2.$$

205. Il risultato del n. prec. si può anche enunciare dicendo (n. 181) che:

L'area di un cerchio è uguale a quella di un triangolo avente la base uguale alla circonferenza rettificata e l'altezza uguale al raggio.

206. Risulta dal n. 204 che se un cerchio C′ ha raggio doppio di un altro cerchio C, l'area di C′ è quadrupla di quella di C. Così se il raggio di C′ è multiplo di quello di C secondo 3,4,..., l'area di C′ è multipla di quella di C secondo 9,16,... (Cfr. n. 177).

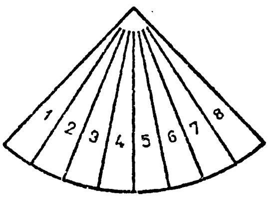
207. Dalla regola del n. 204 si ha inversamente quest'altra

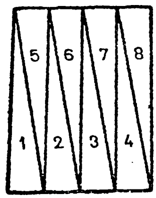
Regola. — *Per avere il raggio di un cerchio di cui è data l'area, si divida questa per* 3,14 (o 3,1416) *e si estragga la radice quadrata del quoziente ottenuto.*

Cioè

$$r^2 = \frac{S}{\pi} \quad , \quad r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

208. Un' osservazione simile a quella del n. 204 mostra che *l'area di un settore circolare è uguale a quella di un parallelogramma avente per altezza il raggio del settore e per base la metà del corrispondente arco di circonferenza rettificato.*





Ossia: *L'area di un settore circolare è uguale a quella di un triangolo avente per altezza il raggio del settore e per base il corrispondente arco di circonferenza rettificato.*

Quindi *l'area di un settore circolare si otterrà dividendo per 2 il prodotto (delle lunghezze) del raggio e dell' arco corrispondente.*

Cioè, se r, l rappresentano le lunghezze del raggio e dell' arco, l' arco S del settore è dato da

$$S = \frac{r \times l}{2}.$$

209. Del resto, determinata l' area di un cerchio è facile trovar direttamente l' area di un suo settore, che corrispond ad un angolo al centro di nota ampiezza.

P. es. in un cerchio di dm. 5 di raggio si voglia trov l'area di un settore corrispondente ad un angolo al centro di 2

L' area del cerchio è di

$$\text{dm.}^2\ (5 \times 5 \times 3{,}14) = \text{dm.}^2\ 78{,}50;$$

cosicchè un settore corrispondente ad un angolo al centr 1° avrà l' area di

$$\text{dm.}^2\ (78{,}50 : 360)$$

e il settore prefissato avrà l'area di

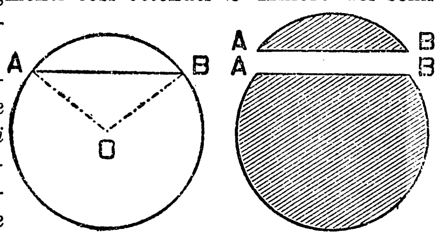
$$\text{dm.}^2\ \frac{78{,}50 \times 27}{360} = \text{dm.}^2\ 5{,}58.$$

Insomma *l'area di un settore si trova moltiplicando l'area dell'intero cerchio per il numero di gradi del corrispondente angolo al centro e dividendo il prodotto per* 360.

210. Se l'ampiezza dell'angolo al centro è data in gradi, minuti e secondi, si opera similmente a quanto si è detto al n. 203.

211. Un cerchio O è diviso da una corda AB (non passante pel centro) in due parti, ciascuna delle quali si dice *segmento circolare.*

Uno dei due segmenti così ottenuti è minore del semicerchio e l'altro è maggiore.



L'area del segmento circolare minore di un semicerchio si trova sottraendo dall'area del settore (convesso) corrispondente l'area del triangolo isoscele ABO.

L'area dell'altro segmento circolare si trova aggiungendo l'area dello stesso triangolo isoscele a quella del settore (concavo) corrispondente.

ESERCIZI SUI CAPITOLI V-X

(Seconda Classe)

[139] **74.** Disegnare un triangolo i cui lati siano di mm. 13, mm. 17, mm. 23.

75. Copiare la figura del n. 119 del testo.

76. Si ha un cerchio di mm. 20 di raggio. Si prenda un punto che disti di mm. 35 dal centro e si conducano da esso le tangenti al cerchio.

77. Copiare la figura del n. 125 del testo.

78. Disegnare un quadrangolo, i cui lati siano di mm. 30, 25, 40, 30 e la diagonale relativa ai due primi lati sia di mm. 35.

[140] **79.** Si disegni un trapezio ABCD in cui sia la base AB di mm. 35, il lato BC di mm. 26, l'angolo in A di 70° e quello in B di 36°. Si misuri l'altra base CD e l'altro lato AD.

80. Costruire un trapezio rettangolo (cioè avente due angoli retti) in cui l'altezza (distanza delle due basi) sia di mm. 18, la base maggiore di mm. 40, e l'angolo di codesta base col lato non perpendicolare sia di 45°. Si misurino l'altra base e i lati.

81. Si disegni un trapezio isoscele (cioè avente uguali i lati non paralleli) in cui sia la base AB di mm. 46, l'altra base di mm. 22 e l'altezza di mm. 16. Si misuri il lato.

[141] **82.** Si disegni un parallelogramma avente due lati di mm. 40 e mm. 60 e l'angolo compreso di 50°, e si misurino le diagonali e gli angoli chè esse formano fra loro e coi lati,

83. Si disegni un parallelogramma ABCD in cui sia AB = mm. 50, BC = mm. 35, AC = mm. 40 e si misurino gli angoli di esso.

84. Qual'è l'ampiezza degli angoli di un parallelogramma, [142]
di cui un angolo sia di 30° o di 39° o di 120° o di 160°?

In ciascun caso si verifichi col rapportatore la risposta, disegnando effettivamente un opportuno parallelogramma.

85. Si disegni un rombo di mm. 38 di lato e avente un [150]
angolo di 60°. Quali saranno le ampiezze degli altri angoli?

86. Si disegni un rombo di mm. 40 di lato e avente un angolo di 50°. Si dica quale sarà l'ampiezza degli altri tre angoli e si misurino col doppio decimetro le due diagonali.

87. Si disegni un rombo avente le diagonali di mm. 28 e mm. 96 e si misurino, col doppio decimetro e il rapportatore il lato e le ampiezze degli angoli.

88. Si disegni un rombo di mm. 34 di lato e avente una diagonale di mm. 30. Si misurino l'altra diagonale e gli angoli.

89. Si disegni una stella a cinque punte (*Stella d'Italia*) formata con 5 rombi uguali di mm. 25 di lato, aventi un vertice comune e un lato comune a due a due. Che ampiezza dovrà avere l'angolo nel vertice comune?

90. Si disegni un rettangolo avente i lati di mm. 40 e mm. 60. Si misurino col doppio decimetro e il rapportatore, la lunghezza delle diagonali, e gli angoli acuti dei due triangoli rettangoli uguali, in cui il rettangolo è diviso da una diagonale.

91. Si disegni un rettangolo avente la diagonale di mm. 60 e un lato di mm. 25 e si misurino l'altro lato e gli angoli formati da una diagonale coi lati.

92. Si disegni un rettangolo, i cui lati siano di mm. 35 e mm. 70 e si misurino gli angoli formati dalle due diagonali.

93. Si disegni il quadrato che ha la diagonale di mm. 36 (cfr. n. 150).

[164] **94.** Qual'è l'ampiezza dell'angolo del decagono regolare?

95. Qual'è l'ampiezza dell'angolo esterno del pentagono regolare.

96. Perchè si può costruire un pavimento con mattonelle, tutte uguali, a forma di triangoli equilateri o di quadrati o di esagoni regolari?

97. Si può costruire un pavimento con mattonelle tutte uguali a forma di pentagoni regolari?

98. Per costruire un pavimento si possono adoperare delle mattonelle tutte uguali a forma di ottagoni regolari e delle altre mattonelle fra loro uguali, quadrate, aventi lo stesso lato degli ottagoni. Perchè?

99. Per costruire un pavimento si possono combinare dei dodecagoni regolari uguali con dei triangoli equilateri uguali di ugual lato: perchè?

100. Calcolare l'area di un rettangolo che ha m. 36 di
[174] perimetro e un lato doppio del consecutivo.

101. In un rettangolo il perimetro è di cm. 26 e la base supera l'altezza di cm. 3. Qual'è l'area del rettangolo?

102. Calcolare l'area di un rettangolo, avente il perimetro di m. 60 e l'altezza uguale ai $^2/_3$ della base.

103. Si vuol seminare a frumento un campo rettangolare le cui dimensioni sono di m. 294,6 e m. 300,5. Quanta sementa occorrerà, posto che se ne vogliano seminare hl. 2,5 per ogni ha.?

104. In un appartamento si vogliono tappezzare alcune stanze; la superficie totale da ricoprire è di m.^{2} 120 e i rotoli della carta da parati che si vuol usare hanno m. 12 di lunghezza per m. 0,50 di larghezza e costano L. 3,50 l'uno. Quanti rotoli occorrono e quanto si deve spendere?

105. Si vuol pavimentare con mattonelle di cemento una stanza lunga m. 4,50 e larga m. 3,75. Quanto si spenderà se il prezzo pattuito coll'imprenditore è, compresa la mano d'opera, di L. 5,60 al m.^{2}?

106. Si vuol coprire di *linoleum* il pavimento di una stanza di m. 5,80 $\times$ m. 4,20, lasciando scoperto, per collocarvi una stufa, un rettangolo di cm. 80 $\times$ cm. 55. Quanto si spenderà, se il costo del *linoleum,* compresa la messa in opera è di L. 3,50 al m.^{2}?

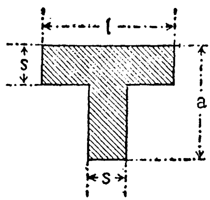
107. Si vogliono intonacare le pareti e il soffitto di una cucina lunga m. 4, larga m. 3,75 e alta m. 3,50 e di più si vogliono verniciare ad olio le pareti fino all'altezza di m. 1,60. Quanto si spenderà se il prezzo pattuito per l'intonaco è di L. 0,35 al m.^{2} e quello per la verniciatura è di L. 0,70 al m.^{2}?

108. Una tavola rettangolare è lunga m. 1,50 e larga m. 1,20. Quanti dm.^{2} di tela cerata occorrono per ricoprirla, se per fissare con borchie la copertura agli orli occorre che essa sopravanzi da tutte e quattro le parti di 3 cm.?

109. Si vuol piantare a frutteto un campo rettangolare lungo m. 7,60 e largo m. 2,70. Quanti alberi da frutta al più vi si potranno piantare se si vuole che vi sia un albero ad ogni 16 m.^{2} almeno?

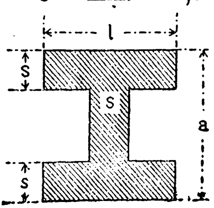
110. Un giardino rettangolare di m. 28,4 di lunghezza e m. 15,8 di larghezza è traversato parallelamente ai lati da una strada nel senso della lunghezza, larga dm. 11,5, e da due sentieri nel senso della larghezza, larghi cm. 95. Qual'è l'area delle strade? Quale quella del terreno coltivato?

111. Un'incisione lunga cm. 84 e alta cm. 64 ha una cornice piana, larga cm. 13. Qual'è la superficie della cornice?



112. Si calcoli l'area della sezione di una trave in ferro a T, posto che le dimensioni siano (vedi figura dove a indica l'altezza, l la larghezza delle ali, s lo spessore dell'anima e dell'ala):

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
l = mm.	60	100	180	25	80	140
a = mm.	30	50	90	25	80	140
s = mm.	5,5	8,5	14,5	3,5	9	15



113. Si calcoli l'area della sezione di una trave in ferro a doppio T, posto che le dimensioni siano (vedi figura dove a indica l'altezza, l la larghezza delle ali, s lo spessore dell'anima, s_1 lo spessore delle ali):

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$l =$ mm.	70	90	110	113	116	125
$a =$ mm.	140	200	250	260	270	300
$s =$ mm.	6	7,5	9	9,4	9,7	10,8
$s_1 =$ mm.	9	11,3	13,6	14,1	14,7	16,2

[175] **114.** Qual'è l'altezza di un rettangolo di m.^{2} 19280 di area, se la base è di m. 705,60?

115. Un campo rettangolare ha l'area di un'ettara, e un lato di m. 285. Qual'è la lunghezza dell'altro lato?

116. Qual'è la base di un rettangolo di m.^{2} 19280, se l'altezza è di m. 352,80?

117. Di due rettangoli equivalenti l'uno è lungo m. 117 e largo m. 35, l'altro è lungo m. 65: quanto è largo questo secondo rettangolo?

[176] **118.** Calcolare l'area del quadrato che ha m. 29 di perimetro.

119. Quando con un certo istrumento si è praticamente misurato un segmento e si dice che esso è lungo cm. 13, si intende che la lunghezza del segmento considerato è compresa fra cm. 12,5 e cm. 13,50. Fra quali limiti è compresa l'area del quadrato del segmento anzidetto?

120. Quante piastrelle quadrate di cm. 20 di lato occorrono per pavimentare un corridoio di 8 m. di lunghezza e di 80 cm. di larghezza?

121. Ciascuno scacco di una scacchiera ha cm. 3,8 di lato. Qual'è l'area della scacchiera? [Si ricordi che su ciascun lato si hanno 8 scacchi].

122. Si vuol inghiaiare una piazza quadrata di m. 78 di lato. Quanto si spende se si è convenuto coll'imprenditore il prezzo di L. 0,15 al m.^{2}?

123. Quanti m.^{2}, dam.^{2}, hm.^{2}, km.^{2} sono contenuti in un miglio geografico quadrato, se la lunghezza del miglio geografico è di m. 7420 (o più esattamente m. 7420,44)?

[177] **124.** Un quadrato ha il lato di m. 18; quale sarà il lato di un quadrato di superficie doppia?

125. Il lato di un quadrato è di mm. 27 [oppure di cm.

3,8 oppure di m. 2,08]: qual'è il lato del quadrato doppio o quintuplo o metà del dato?

126. Calcolare l'area di un parallelogramma, avente la base di m. 105,75 e l'altezza di m. 86,95. [179]

127. Un parallelogramma ha base doppia dell'altezza e la somma della base e dell'altezza è di m. 3,75. Qual'è l'area del parallelogramma?

128. Le vetrate alle finestre di una chiesa sono formate ciascuna da 25 rombi di vetro rosso e 36 rombi di vetro azzurro e ciascun rombo ha cm. 12 di lato e cm. 8 di altezza. Quanti m.^{2} di vetro rosso e quanti di vetro azzurro si sono adoperati per le vetrate di otto finestre?

129. Un parallelogramma di m.^{2} 16,92 d'area ha la base di m. 7,20. Qual'è l'altezza? [180]

130. Un parallelogramma di m.^{2} 20,02 ha l'altezza di m. 3,25. Qual'è la base?

131. Trovare l'area di un triangolo avente m. 94,70 di base e m. 137,90 di altezza. [181]

132. L'area di un rombo è uguale al semiprodotto delle sue diagonali. [Si considerino i triangoli in cui il rombo è diviso dalle sue diagonali].

133. Calcolare l'area di un rombo le cui diagonali sono m. 6 e m. 8.

134. Calcolare l'area di un rombo, in cui la somma delle diagonali sia di m. 535,50 e una diagonale sia uguale ai $^4/_5$ dell'altra.

135. L'area di un quadrangolo è uguale al semiprodotto di una diagonale per la somma delle distanze da questa degli altri due vertici.

136. Qual'è la base di un triangolo di m.^{2} 28728 di area se l'altezza è di m. 42? [184]

137. Quali sono la base e l'altezza di un triangolo di m.^{2} 875 di area, se la base è uguale ai $\frac{2}{5}$ dell'altezza?

138. Qual'è l'altezza di un triangolo che ha m. 12 di base ed è equivalente a un altro triangolo, in cui la base è di m. 20 e l'altezza è di m. 6?

139. Qual'è la base di un triangolo isoscele di m. 20 di altezza, equivalente a un triangolo rettangolo di cateti di m. 30 e m. 18?

140. Un campo triangolare ha l'area di 8 ettare e la base di m. 485,6. Qual'è l'altezza?

[185] ## Tabella degli apotemi e delle aree di alcuni poligoni regolari di m. 1 di lato.

Poligono	Apotema	Area
Triangolo.	m. 0,2887	m.² 0,4330
Quadrato	» 0,5000	» 1,0000
Pentagono	» 0,6882	» 1,7205
Esagono.	» 0,8660	» 2,5981
Ottagono	» 1,2071	» 4,8284
Decagono	» 1,5388	» 7,6942
Dodecagono . . .	» 1,8660	» 11,1962

La tabella precedente serve per trovare l'apotema o l'area di un poligono regolare di una delle specie indicate nella prima colonna, che ha un lato di lunghezza data qualsiasi. Per aver l'apotema basta moltiplicare la lunghezza del lato (in metri) per l'apotema del corrispondente poligono di m. 1 di lato. Per avere l'area (in m.²) basta moltiplicare il quadrato della lunghezza (in m.) del lato per l'area del corrispondente poligono di m. 1 di lato.

[187] **141.** Calcolare l'area di un trapezio, avente l'altezza di m. 20,15 e le basi di m. 34,25 e m. 62,41.

142. Un fanale a gas è formato da otto vetri di forma trapezoidale connessi da un'intelaiatura metallica. I quattro vetri inferiori sono più grandi e hanno le due basi di cm. 55 e cm. 60 e sono alti cm. 45. Gli altri quattro hanno le basi di cm. 55 e cm. 50 e sono alti cm. 25. Qual'è l'area totale degli otto vetri?

143. Da un rettangolo ABCD di m. 25 di lunghezza (AB) su m. 16 di larghezza (BC), si taglia via un triangolo CBE, in modo che il segmento BE sia uguale al quarto di AB. Qual'è l'area del triangolo? Quale quella del trapezio? [188]

144. In un trapezio, in cui le basi sono di m. 30 e m. 40, l'area è di m.^{2} 700. Si calcoli l'altezza.

145. Determinare l'altezza di un trapezio, la cui area è m.^{2} 228,875 e i cui lati paralleli sono rispettivamente di m. 13,5 e di m. 6,4.

146. Calcolare la base minore di un trapezio, in cui l'area è di m.^{2} 200, la base maggiore di m. 18 e l'altezza di m. 12.

147. L'area di un trapezio è m.^{2} 542,5, l'altezza è m. 21,7 e la differenza dei due lati paralleli è m. 11,2. Quali sono codesti due lati?

148. Calcolare le basi e l'altezza di un trapezio di m.^{2} 0,2916 di area, sapendo che la base minore è la metà della base maggiore e l'altezza è uguale al doppio della somma delle basi. [Si ricordi che l'area si trova moltiplicando la somma delle basi per la metà dell'altezza].

149. Dati due quadrati, costruire il quadrato equivalente alla loro somma. [191]

150. Dato un quadrato, costruire il quadrato equivalente al triplo del dato.

151. Dati due quadrati, costruire il quadrato equivalente alla loro differenza.

152. Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti siano rispettivamente di cm. 5 e cm. 12. [192]

153. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di cm. 29 e un cateto di cm. 20. Qual'è la lunghezza dell'altro cateto?

154. Verificare colla squadra o il rapportatore che il triangolo, i cui lati sono rispettivamente di cm. 8, cm. 15, cm. 17 è rettangolo.

155. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale ai $\frac{3}{2}$ dell'altro e l'ipotenusa è lunga m. 30: quali sono le lunghezze dei cateti?

156. Una scala deve essere appoggiata ad un muro a m. 4 dal piede di esso: quale deve essere la lunghezza della scala perchè essa possa giungere a m. 6 dal suolo?

157. A quale distanza dal piede di un muro deve essere appoggiata una scala di m. 10, perchè essa giunga all'altezza di m. 8?

158. Una scala di m. 7,25 è appoggiata a m. 3,40 dal piede di un muro: a quale altezza giunge?

159. Qual'è il lato del rombo avente le diagonali di m. 6 e m. 8?

160. Calcolare il perimetro di un trapezio avente due angoli retti, in cui le basi siano di m. 8,5 e m. 12,4 e l'altezza sia di m. 5,2. [Da un vertice della base minore si abbassi l'altezza sulla base maggiore...].

161. L'area di un trapezio rettangolo (che, cioè ha due angoli retti) è di m.^{2} 300; l'altezza è di m. 9,8 e una delle basi è di m. 20. Calcolare le lunghezze delle due diagonali.

162. Calcolare, eseguendo un disegno e servendosi di un doppio decimetro la radice quadrata di 194 o 65 o 113.... [Si decomponga il numero nella somma o nella differenza di due quadrati e si tenga conto del n. 192: p. es. $194 = 13^2 + 5^2$, $65 = 9^2 - 4^2$,...].

[193] **163.** Qual'è la diagonale del rettangolo che ha le dimensioni di m. 46 $\times$ m. 52?

[194] **164.** La diagonale di un rettangolo è di m. 30, e l'altezza è uguale ai $\frac{3}{4}$ della base. Quali sono le due dimensioni?

[195] **165.** Qual'è la diagonale del quadrato il cui lato è di m. 46,75?

166. Qual'è il lato del quadrato, la cui diagonale è di m. 12?

167. Qual'è l'area di un quadrato, il cui lato è di cm. 36?

168. Due lati consecutivi di un parallelogramma sono di m. 14 e m. 5,8; mentre l'angolo compreso è di 45°. Si calcoli l'area del parallelogramma. [L'altezza abbassata da un vertice su di un lato determina un triangolo rettangolo isoscele e quindi...].

169. Qual'è l'altezza del triangolo isoscele che ha la base di m. 12 e il lato di m. 26? [196]

170. In un triangolo rettangolo isoscele l'altezza abbassata dal vertice dell'angolo retto divide l'ipotenusa in due segmenti di cm. 6 ciascuno. Calcolare l'altezza e il cateto.

171. Calcolare l'area di un rombo di cui un lato è di m. 3,6 e una delle diagonali è di m. 4,9.

172. In un cerchio di m. 2,4 di raggio, calcolare la distanza del centro da una corda di m. 0,60 di lunghezza.

173. A quale distanza dal centro si trova una corda di m. 2,72 in un cerchio di m. 3,65 di raggio?

174. In un cerchio di m. 2,25 di raggio, si dà una corda di m. 3. Calcolare la corda che sottende l'arco metà.

175. In un cerchio di raggio di m. 4,20 si hanno due corde parallele, lunghe rispettivamente m. 3,12 e m. 6,80. Calcolare la distanza delle due corde.

176. L'area del triangolo isoscele che ha la base a e il lato b è uguale ad

$$\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

177. Qual'è l'altezza del triangolo equilatero, che ha il lato di m. 26? [198]

178. Qual'è il lato del triangolo equilatero che ha l'altezza di m. 5,8?

179. L'area di un triangolo equilatero è di m.^{2} 1000. Quale ne è il lato?

180. Qual'è il perimetro di un rombo di m.^{2} 60 di area se la diagonale minore è uguale al lato?

181. Gli agrimensori romani assumevano come area del triangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}a^2$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo Erone, come area il numero $\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{10}a^2$?

182. L'apotema di un esagono regolare è di m. 2,80; qual'è il suo perimetro? [199]

183. Qual'è l'apotema di un esagono regolare, che ha m. 120 di perimetro?

[200] **184.** Il diametro di una moneta d'oro da 100 lire è di mm. 35. Quale ne è la lunghezza dell'orlo?

185. Trovare la lunghezza dell'orlo di una moneta d'oro da 20 o 10 o 5 lire, sapendo che i diametri rispettivi sono di mm. 21, mm. 19, mm. 17.

186. Quanti chilometri ha percorso un ciclista se le ruote della sua bicicletta, aventi il diametro di cm. 72 hanno compiuto 3250 giri?

187. In un orologio da tasca le lancette dei minuti, delle ore e dei secondi sono lunghe rispettivamente mm. 19, mm. 9, mm. 6. Qual'è il cammino che l'estremo di ciascuna di esse descrive in 12 ore?

188. Si vuole attaccare una frangia all'orlo di un tavolino rotondo di cm. 60 di diametro. Quanti metri di frangia occorreranno?

189. In quanto tempo un cavallo da corsa che batte m. 12,6 al secondo, percorre un cammino circolare di m. 112 di diametro?

190. Qual'è il cammino percorso in ogni secondo da un punto dell'equatore terrestre per fatto della rotazione della terra? (Il raggio equatoriale terrestre è di km. 6370). Quale è il cammino percorso in un giorno?

191. Quale cammino percorre in un secondo la terra nella sua rivoluzione intorno al sole, se il suo movimento si riguarda circolare ed uniforme? (La distanza dalla terra al sole è di 150 milioni di chilometri, e l'anno solare è di giorni 365 e $^1/_4$).

192. Il diametro di una semicirconferenza sia diviso in due parti qualsiasi e su ciascuna di queste si descriva una semicirconferenza. Quale è la lunghezza della somma di queste due semicirconferenze?

193. Se si divide il diametro di una semicirconferenza in tre parti uguali, qual'è la somma delle lunghezze delle semicirconferenze descritte su ciascuna di esse?

Si risponda alla stessa domanda quando si divida il diametro in quattro..., in n parti uguali.

[201] **194.** Quale è il raggio dell'equatore terrestre se la sua lunghezza è di km. 40000?

195. Se, come si suole, si assume come raggio dell'equatore terrestre 860 miglia geografiche e come lunghezza dello equatore stesso 5400 miglia geografiche, vi è accordo fra le due cifre?

196. Quale dev'essere la lunghezza del diametro di una [203]
circonferenza, perchè su di essa l'arco di 1' sia uguale ad 1 mm.?

197. Quale sarà la lunghezza dell'arco della circonferenza lunga m. 3,8, corrispondente all'ampiezza di 47°56'39''? [Cfr. prec. es.].

198. Calcolare l'area del cerchio, la cui circonferenza è [204]
di m. 15,79.

199. Qual'è l'area del cerchio che ha m. 7,5 di raggio?

200. In una lamina di latta, avente le dimensioni di cm. 80 e cm. 64, quanti dischi circolari si possono ritagliare di cm. 4 di raggio, se le loro circonferenze debbono essere tangenti? Qual'è in decimetri quadrati l'area della superficie restante?

201. Si è fatta costruire una porta, avente la forma di un rettangolo di m. 4,50 di larghezza per m. 6,50 di altezza, sormontata da un semicerchio: e si è convenuto di dare al legnaiolo L. 45 al $m.^2$ e al verniciatore L. 4,35 al $m.^2$ per l'esterno, e L. 3 al $m.^2$ per l'interno. Quanto costa la porta?

202. Si misuri la superficie della figura racchiusa dalle tre semicirconferenze dell'esercizio n. 192, supposte descritte tutte e tre dalla stessa parte del diametro comune (*Arbelo* = trincetto da calzolaio).

203. Si misuri la superficie racchiusa da due circonferenze di ugual centro e raggi disuguali dati (*Corona circolare*).

204. Qual'è l'area della corona circolare compresa fra due circonferenze concentriche, aventi rispettivamente il raggio di m. 3 e m. 5?

205. Calcolare l'area della corona compresa fra le circonferenze iscritte e circoscritte al triangolo equilatero di m. 3,464 di lato.

206. Si calcoli l'area del cerchio, sulla cui circonferenza l'arco lungo m. 27,9 ha l'ampiezza di 115°7'58''. [Si tenga conto dei nn. 202-203].

207. L'autore del papiro *Rhind* (1700 av. Cr.) dice che l'area di un cerchio è uguale a quella del quadrato di lato uguale agli $\frac{8}{9}$ del diametro del cerchio considerato. Che differenza dà questa regola rispetto a quella assegnata nel testo (n. 204) per un cerchio di diametro uguale a m. 1? per un cerchio di raggio r?

208. Dato un triangolo rettangolo la superficie del cerchio che ha per diametro la ipotenusa è uguale alla somma dei cerchi che hanno per diametro i cateti. [Si ricordi il teorema di Pitagora e si applichi la formola per l'espressione della superficie di un cerchio].

[207] **209.** Qual'è il raggio di un cerchio, la cui area è di m.^{2} 12,64?

210. Calcolare il raggio del cerchio la cui area è di m.^{2} 22,8906.

211. Una corona circolare, in cui la circonferenza minore ha m. 12 di diametro, ha un'area di m.^{2} 120. Qual'è il diametro maggiore?

212. Entro una circonferenza di m. 12,56 di lunghezza, si vuol costruire una corona di m.^{2} 7,0336 di area. Quale sarà la lunghezza della circonferenza interna?

[210] **213.** Qual'è l'area di un settore di 30° in un cerchio di m. 6,40 di raggio?

214. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual'è la lunghezza dell'arco corrispondente ad un settore di m.^{2} 3,60 di area?

215. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual'è l'angolo al centro di un settore di m.^{2} 4,76?

216. L'area di un cerchio è di m.^{2} 2827,44; quella di un suo settore è uguale a quella del triangolo equilatero iscritto nel cerchio. Si calcoli la lunghezza e l'ampiezza dell'arco corrispondente a codesto settore.

217. Qual'è l'area del triangolo a lati curvilinei, determinato da tre circonferenze di cm. 8 di raggio, a due a due tangenti esternamente fra loro?

[211] **218.** Dato un cerchio il cui raggio sia di m. 3,2, si calcoli l'area del segmento circolare compreso fra un lato di un esagono regolare iscritto nel cerchio e l'arco (minore di una

semicirconferenza) che è sotteso da codesto lato. [Si consideri il segmento come differenza di un settore e di un triangolo].

219. Condotto un diametro AB in un cerchio di raggio uguale a m. 2 e di centro O, si conducano le corde perpendicolari ai raggi OA, OB nei loro punti medi e si calcolino le aree delle tre parti in cui il cerchio è diviso da codeste due corde.

220. Qual'è l'area di un segmento circolare corrispondente ad un angolo al centro di 60° in un cerchio di m. 6 di raggio?

221. Qual'è l'area del segmento circolare di cm. 24 di raggio corrispondente all'angolo al centro di 120°?

222. In un segmento circolare di m. 2 di raggio e di angolo al centro di 60° si iscriva un cerchio. Qual'è l'area rimanente del segmento?

223. Si iscriva un cerchio in un segmento circolare di cm. 25 di raggio e corrispondente ad un angolo al centro di 90°. Qual'è l'area rimanente del segmento?

224. In un quadrato ABCD di m. 3 di lato si descrivano centro in A e C e con raggio uguale al lato, i due archi BD. Calcolare l'area di ciascuna delle tre parti in cui è diviso il quadrato.

225. In un triangolo equilatero ABC di m. 2 di lato si conducano i tre archi che passano per il centro del triangolo e le coppie di vertici. Calcolare l'area del trifolio che così si ottiene. [Si consideri il trifolio come differenza della somma di tre segmenti circolari e il triangolo equilatero].

226. Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo come diametro si descriva la semicirconferenza che cade dalla stessa parte del triangolo e similmente si descrivano le semicirconferenze che hanno per diametri i cateti e cadono fuori del triangolo. Calcolare l'area totale delle due *lunule* che così si ottengono *(lunule di Ippocrate)* e confrontarla coll'area del triangolo.

[Si consideri la superficie delle due lunule, come differenza fra la somma della superficie del triangolo e dei due semicerchi minori e la superficie del semicerchio maggiore].

227. Divisa una circonferenza in sei parti uguali, si descriva da ciascuno di essi come centro e con raggio uguale a quello della circonferenza l'arco interno a questa. Si ottiene così una stella a sei raggi. Quale è l'area di quella stella, se r è il raggio della circonferenza?

XI.

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

212. Noi ci siamo occupati sin qui di *figure piane*, cioè di figure contenute per intero in un piano (*Geometria piana*). Ora ci occuperemo di figure non contenute ciascuna in un solo piano, cioè di *figure solide.*

La parte della Geometria, che studia la proprietà delle figure solide, dicesi *Geometria solida* o *Stereometria.*

Naturalmente noi qui non potremo rappresentare le figure solide sul foglio del disegno se non in modo prospettico, appunto come una fotografia può dare l'immagine di un dado o di un altro corpo solido qualsiasi.

Rette e piani nello spazio.

213. Nello **spazio** si possono pensare quanti piani si vogliono. P. es. nell'aula della scuola noi vediamo il piano del tavolo, il piano della lavagna, i piani delle pareti e del pavimento, ecc.

Per distinguere un piano dall'altro in Geometria si usa designarli ciascuno con una lettera greca minuscola: α (*alfa*), β (*beta*), γ (*gamma*), ecc.

214. Anche nello spazio: *Due punti determinano una retta* (cfr. n. 6).

215. *Se una retta congiunge due punti di un piano, tutti i suoi punti appartengono al piano,* o, come si suol dire, *la retta giace sul piano.*

216. Per un punto A possiamo condurre quanti piani vogliamo: ed anche preso un secondo punto B, si possono condurre quanti piani si vogliono, che passino tanto per A quanto per B.

P. es., una porta, fissata al muro per mezzo di due cardini, si può aprire e chiudere. Ma se, chiudendo il chiavistello, fissiamo la porta in un terzo punto, la porta non si può più muovere. Vediamo così che se, insieme coi punti A e B, si prende un terzo punto C, fuori della retta AB, pei tre punti A, B, C si può condurre un piano ed uno soltanto. Abbiamo cioè che:

Tre punti non situati in linea retta determinano un piano.

Il piano determinato da tre punti A, B, C (non allineati) si chiama il « piano ABC ».

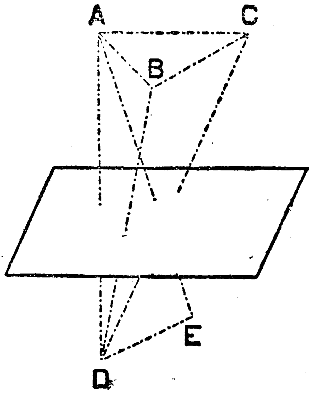
217. Risulta di qui che:

Una retta e un punto non appartenente ad essa determinano un piano.

Se, infatti, A è il punto e *a* è la retta, si scelgano su *a* due punti distinti B, C: i tre punti non in linea retta A, B, C appartengono ad un piano e ad uno solo (n. prec.), il quale contiene, insieme con A la retta *a* (n. 215).

218. Infine notiamo che:

Un piano **divide** *lo spazio* **in due parti.**



Queste parti si chiamano i due *semispazi* relativi al piano considerato.

Ogni punto dello spazio, non appartenente al piano dato, si trova nell'uno o nell'altro semispazio: e due punti, fuori del piano, sono gli estremi di un segmento, il quale sega o no il piano, secondo che i due punti si trovano da parti opposte o dalla stessa parte rispetto al piano.

Posizioni relative di due rette nello spazio.

219. Due rette *a, b* nello spazio possono essere, l'una rispetto all'altra, nelle seguenti tre posizioni diverse:

1) Le rette *a, b* possono avere un punto C comune. Allora ésse giacciono anche in uno stesso piano, il quale si può determinare prendendo (fuori di C) un punto A su *a* e un punto B su *b* e considerando il piano ABC (n. 216). Allora le due rette *a, b* si dicono *incidenti.*

2) Le rette *a, b* possono essere in uno stesso piano e non avere nessun punto comune. Allora le due rette si dicono *parällele* (cfr. n. 58).

3) Le rette *a, b* possono infine essere tali che non esista nessun piano che le contenga tutte e due, onde risulta di conseguenza che le due rette non possono avere nessun punto comune, perchè in tal caso le due rette giacerebbero come vedemmo pocanzi in uno stesso piano.

Due rette *a*, *b* tali che non esista nessun piano che le contenga entrambe si dicono *sghembe*.

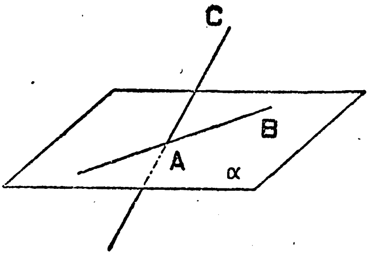
Tali sono p. es., in un'aula a pianta rettangolare uno spigolo del pavimento ed uno dei due spigoli verticali che non appartengono alla stessa parete del primo.

Posizioni relative di una retta e di un piano dello spazio.

220. Una retta *a* e un piano α possono trovarsi, l'uno rispetto all'altra, in diverse posizioni che ora enumereremo.

1) Anzitutto la retta *a* può giacere nel piano α (cfr. n. 215).

2) Se prendiamo un punto A sul piano α e un punto C fuori di esso, la retta AC ha comune col piano α il solo punto A, perchè se la AC avesse comune con α un secondo punto, oltre A, giacerebbe per intero su α (n. 215) e non potrebbe passare pel punto C esterno ad α.



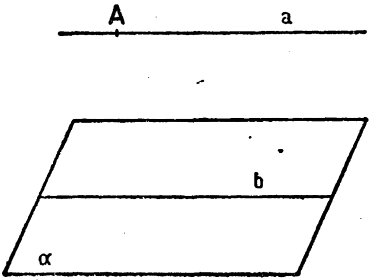
La retta AC e il piano α si dicono allora *secanti* fra loro in A.

3) Può infine accadere che una retta *a* e un piano α (per quanto si immaginino indefinitamente proseguiti) non abbiano nessun punto comune. Allora la retta *a* e il piano α si dicono fra loro *paralleli*.

P. es. uno spigolo di un tavolo a piano rettangolare è parallelo al piano del pavimento.

221. — *Una retta passante per un punto esterno ad un piano e parallela ad una retta di esso è parallela al piano.*

Se la retta a passante pel punto A esterno al piano α, è parallela alla retta b di α, il piano delle due parallele a, b, distinto da α e contenente la a, ha comune con α i soli punti della retta b, la quale non ha con la a nessun punto comune: onde risulta che la a e α non hanno nessun punto comune, cioè sono paralleli.

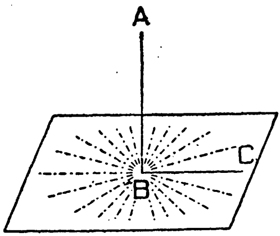


Retta e piano perpendicolari.

222. Preso un angolo retto $\widehat{ABC}$, facciamolo ruotare intorno ad un suo lato AB, tenuto fisso.

Il lato BC, nel muoversi descrive un piano, che si dice *perpendicolare* ad AB. Cioè:

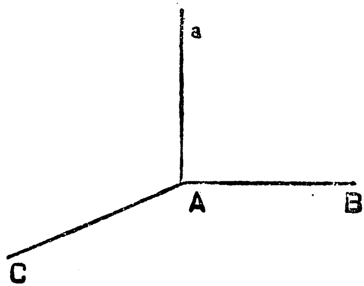
Una *retta* ed un *piano* aventi comune un punto, si dicono *perpendicolari,* se tutte le rette giacenti nel piano e passanti per quel punto sono perpendicolari alla retta.



Il piano si dice perpendicolare alla retta e la retta al piano.

Il punto comune alla retta e al piano si dice *piede* della perpendicolare.

223. Se in un punto A di una retta a si conducono due rette perpendicolari ad essa, AB, AC, ogni altra retta passante per A e giacente nel piano ABC è perpendicolare alla a; cioè il piano ABC è perpendicolare alla a.

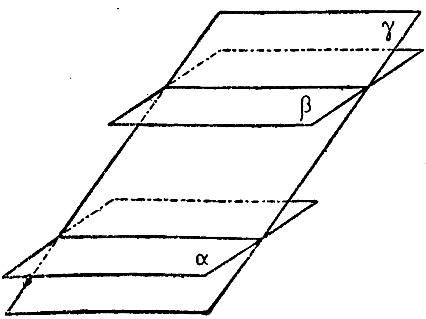


Cioè, per verificare che una retta, avente un punto A comune con un piano, è ad esso perpendicolare, basta verificare che essa è perpendicolare a *due* rette del piano, passanti per A.

Posizioni relative di due piani nello spazio. Piani parelleli.

224. Due piani α, β, non coincidenti, o *si segano* secondo una retta oppure non hanno nessun punto comune: tali sono p. es. il piano di un tavolo e il piano del pavimento.

Due piani, non aventi nessun punto comune si dicono *paralleli*.

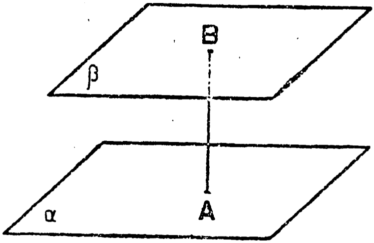


225. *Se due piani sono paralleli, tutte le rette dell'uno sono parallele all'altro.*

226. *Se un piano sega due piani paralleli, le intersezioni sono parallele.*

Infatti codeste due intersezioni appartengono ad un medesimo piano e non hanno nessun punto comune.

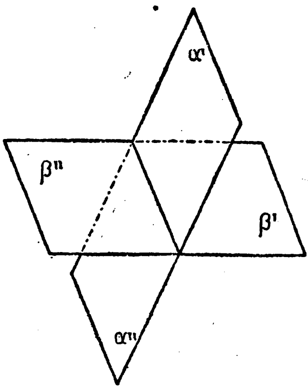
227. *Due piani perpendicolari ad una stessa retta in punti distinti sono paralleli.*



Se infatti due piani α, β perpendicolari rispettivamente in A, B alla retta AB, si segassero e fosse C un punto della loro intersezione, il triangolo ABC, avrebbe due angoli retti, il che è assurdo (n. 91).

Diedri e loro sezioni.

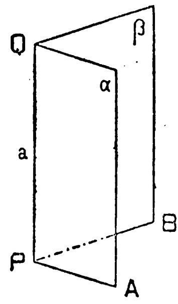
228. Due piani α e β, segantisi secondo una retta, **dividono** lo spazio **in quattro parti,** ciascuna delle quali è comune a due semispazi limitati l'uno da α e l'altro da β (cfr. il n. 26).



Codeste quattro parti si dicono *regioni diedriche* o *diedri.*

229. Un diedro è determinato da due semipiani α, β, limitati da una medesima retta *a;* la retta *a* si dice *costola* o *spigolo* e i due semipiani α, β si dicono *facce* del diedro.

Il diedro si designa con $\widehat{\alpha\beta}$. Se i punti A, B appartengono rispettivamente alle due facce α, β e se P, Q sono punti dello spigolo, il diedro si designa anche con $\widehat{AaB}$, oppure con $\widehat{APQB}$.



230. Ricordando i nn. 27, 28, l'alunna comprenderà da sè che cosa si intenda per *diedri adiacenti* e *diedri opposti allo spigolo.*

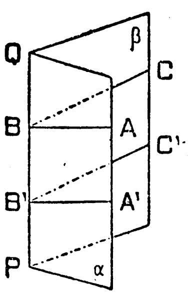
P. es. nella figura del n. 228 i diedri $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\alpha'\beta''}$ sono adiacenti e $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\alpha''\beta''}$ sono opposti allo spigolo.

231. Così, in modo analogo a quello tenuto per gli angoli, si definiscono i *diedri concavi* (cfr. n. 30) e i *diedri piatti* (cfr. n. 31).

232. Dato un diedro, dicesi *sezione* di esso l'angolo delle due semirette, secondo cui le due facce del diedro sono segate da un piano non passante per lo spigolo.

In particolare dicesi *sezione normale* ogni sezione, il cui piano sia perpendicolare allo spigolo.

Per avere una sezione normale di un diedro basta innalzare da un punto dello spigolo in ciascuna faccia la perpendicolare ad esso (n. 223).



Infine si dicono *sezioni parallele* di un diedro, quelle i cui piani siano paralleli.

233. *Sezioni parallele di uno stesso diedro sono uguali.*

Siano $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ due sezioni parallele di uno stesso diedro $\widehat{\alpha\beta}$.

I lati BA, BC della prima saranno paralleli rispettivamente ai lati $B'A'$, $B'C'$ della seconda (n. 226).

Avremo quindi (n. 66)

$$Q\widehat{B'}A' = Q\widehat{B}A, \qquad Q\widehat{B'}C' = Q\widehat{B}C.$$

Ciò posto, si faccia scorrere il diedro su se stesso, in modo che scorrano su se stesse la costola e la faccia β fino a far coincidere B con B'. È chiaro che anche la faccia α scorrerà su se stessa e che le semirette BC, BA andranno a coincidere con $B'C'$, $B'A'$. Si ha cioè che l'angolo $A\widehat{B}C$ si sovrapporrà all'angolo $A'\widehat{B'}C'$.

234. Le sezioni normali di uno stesso diedro sono tutte parallele. Perciò dal teor. prec. risulta in particolare che:

Tutte le sezioni normali di uno stesso diedro sono uguali.

235. Se due diedri sono **uguali,** si verifica sovrapponendoli che le loro sezioni normali sono uguali.

Viceversa se due diedri hanno sezioni normali uguali sono sovrapponibili e quindi uguali.

Perciò volendo *misurare* un diedro si assume come sua *misura* l'ampiezza della rispettiva sezione normale.

Piani perpendicolari.

236. Ogni diedro avente per sezione normale un angolo retto si dice *diedro retto;* e due piani formanti un diedro retto diconsi fra loro *perpendicolari.*

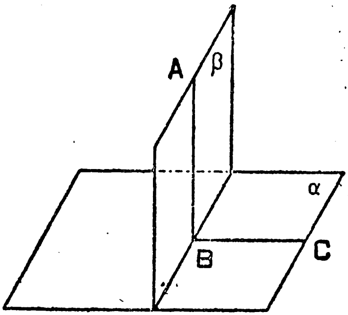
237. L'ampiezza di un diedro retto è di 90°.

238. *Ogni piano passante per una retta perpendi-*

colare ad un piano è pur esso perpendicolare a questo piano.

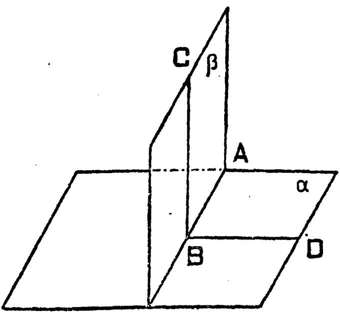
Dati il piano α e la retta AB perpendicolare ad α in B, sia β un qualsiasi piano passante per AB. Diciamo che β è perpendicolare ad α.

Infatti da B nel piano α si innalzi la perpendicolare BC alla intersezione αβ dei due piani. Poichè la AB è perpendicolare ad α, essa è perpendicolare alla αβ e alla BC (n. 222): onde risulta che l'angolo $\widehat{ABC}$ è la sezione normale del diedro formato dai due piani: poichè $\widehat{ABC}$ è retto, anche il diedro è retto, ossia i due piani α e β sono perpendicolari.



239. Come illustrazione del risultato prec. si ricordi che i muratori per costruire un muro verticale, cioè perpendicolare ad un suolo orizzontale, dispongono i mattoni secondo il filo a piombo (*retta verticale,* cioè perpendicolare al piano orizzontale).

240. Se un piano β è perpendicolare ad un piano α lungo una retta AB, l'ampiezza del diedro $\widehat{\alpha\beta}$ è di 90°. Cioè:

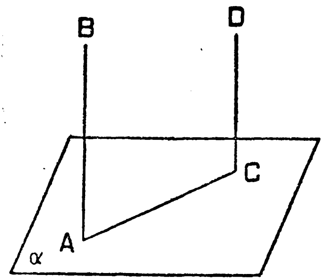


Per una retta prefissata in un piano dato vi è un solo piano perpendicolare al dato.

241. Risulta di qui che:

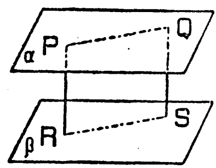
Due rette AB, CD

perpendicolari ad un piano sono fra loro parallele.



Infatti esse anzitutto giacciono entrambe nel piano perpendicolare ad α lungo la AC; e d'altra parte non s'incontrano perchè sono perpendicolari alla intersezione AC dei due piani (n. 59).

242. *Se un piano è parallelo ad un altro, tutti i punti dell'uno hanno ugual distanza dall'altro.*



Dati due piani paralleli α, β, si abbassino da due punti P, Q di α le perpendicolari PR, QS su β. Diciamo che esse sono uguali.

Infatti, condotte le PQ, RS, il quadrangolo PQRS è un parallelogramma, perchè i lati PR, QS sono paralleli come perpendicolari ad uno stesso piano (n. prec.), i lati PQ, RS sono paralleli come intersezioni di due piani paralleli con uno stesso piano (n. 226). Perciò i due lati opposti PR, QS sono uguali (n. 142).

243. Il segmento di perpendicolare compreso fra due piani paralleli si dice loro *distanza.*

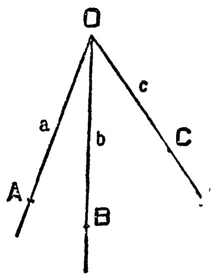
XII.

ANGOLOIDI E POLIEDRI

Triedri e angoloidi.

244. Date per un punto O tre semirette *a, b, c* non giacenti in un piano, restano fissati tre piani *ab, bc, ca,* i quali, presi a due a due, determinano tre diedri $\widehat{b}, \widehat{c}, \widehat{a}$. Codesti tre diedri sono tali che ogni punto comune a due di essi è interno anche al terzo (cfr. n. 86).

245. Def. — Date tre semirette *a, b, c* uscenti da un punto O e non appartenenti ad uno stesso piano, dicesi *angolo triedro,* o semplicemente *triedro abc,* la figura costituita dai punti comuni ai tre diedri determinati dai tre piani *ab, bc, ca* presi a due a due.



Le semirette *a, b, c* si dicono *spigoli,* gli angoli $\widehat{ab}, \widehat{bc}, \widehat{ca}$ si dicono *facce,* e il punto O *vertice* del diedro. Se A, B, C sono tre punti dei tre spigoli *a, b, c* rispettivamente, distinti da O, il triedro si designa anche con $\widehat{OABC}$.

I diedri $A\widehat{b}C$, $B\widehat{c}A$, $C\widehat{a}B$ si dicono *diedri del triedro.*

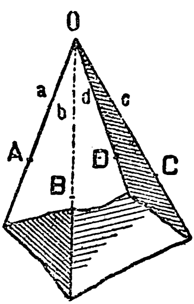
Se a_1, b_1, c_1 sono i prolungamenti di a, b, c, il triedro $a_1b_1c_1$ si dice *opposto al vertice* del triedro abc.

246. L'insieme delle tre facce del triedro dicesi *superficie* di esso.

I punti del triedro non giacenti sulla superficie diconsi *interni;* mentre i punti che non sono interni nè giacciono sulla superficie si dicono *esterni.*

Nota. — Il triedro si può anche definire come la parte di spazio comune ai tre semispazii limitati dai piani delle facce e contenenti rispettivamente gli spigoli opposti.

247. Per un punto O conduciamo quattro semirette a, b, c, d, tali che il piano ab lasci c e d da una stessa parte, il piano bc lasci d ed a da una stessa parte, ecc.



Allora la figura costituita dai punti comuni ai quattro diedri $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{d}$ si dice *angoloide a quattro facce* o *angoloide tetraedro* (di *vertice* O, di *spigoli* a, b, c, d e così via). Similmente si definiscono gli *angoloidi a cinque facce* o *angoloidi pentaedri, gli angoloidi a sei facce* o *angoloidi esaedri* ecc.

248. *In un angoloide ogni faccia è minore della somma delle altre.*

Verifichiamolo per un triedro. Immaginiamo perciò di aver costruito, per esempio in cartoncino, un triedro abc. Se noi tagliamo il cartoncino lungo uno spigolo, p. e., lungo b, e facciamo ruotare la faccia $\widehat{ab}$ intorno ad a fino ad adagiarsi su $\widehat{ac}$ e la faccia $\widehat{cb}$ intorno a c, in senso opposto, fino ad adagiarsi anche essa sulla $\widehat{ac}$, noi vediamo che le due facce $\widehat{ab}$, $\widehat{cb}$ nella nuova posizione *si ricoprono* in parte, onde risulta che la faccia $\widehat{ac}$ è minore della somma delle facce $\widehat{ab}$ e $\widehat{cb}$.

249. *In ogni angoloide la somma delle facce è minore di 360°.*

Prendiamo p. es. un ombrellino giapponese. Quando esso è aperto, le varie stecche sono tutte in un piano e la somma degli angoli che esse formano a due a due è di 360°. Ma se chiudiamo in parte l'ombrellino, le stecche si dispongono secondo gli spigoli di un certo angoloide. Fra stecca e stecca la carta non resta più tesa come dianzi, cioè gli angoli formati a due a due dalle stecche sono minori di prima, e perciò la loro somma sarà minore di 360°.

Triedri e angoloidi uguali.

250. Come il triangolo ha tre lati e tre spigoli, così il triedro ha anch'esso *sei elementi:* tre facce e tre diedri.

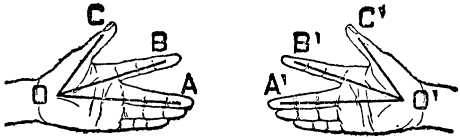
E come accade pei triangoli, se due triedri sono **uguali,** cioè sovrapponibili, hanno ordinatamente uguali i rispettivi sei elementi.

Ma per i triedri **si verifica un** fatto che non si incontra nel caso dei triangoli.

Se due triangoli hanno ordinatamente uguali i loro sei elementi (e i criteri di uguaglianza [nn. 121, 123, 125] ci dicono che di codeste sei uguaglianze tre sono superflue) i due triangoli sono sovrapponibili.

Invece per due triedri non basta l'uguaglianza delle sei coppie di elementi omologhi, perchè essi siano sovrapponibili, cioè *esistono coppie di triedri che hanno ordinatamente uguali i sei elementi e che pur non sono sovrapponibili.*

Si considerino p. es. i due triedri $\widehat{OABC}$, $\widehat{O'A'B'C'}$, corrispondenti al pollice, all'indice ed al medio della mano destra e della mano sinistra, quali sono rappre-



sentate nell'unita figura, dove si immagina che per entrambe le mani, tenute aperte, il pollice sia rialzato sulla palma.

In codesti due triedri abbiamo

$$A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B' \quad , \quad B\widehat{O}C = B'\widehat{O'}C' \quad , \quad C\widehat{O}A = C'\widehat{O'}A'$$
$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad , \quad \widehat{B} = \widehat{B'} \quad , \quad \widehat{C} = \widehat{C'}:$$

cionondimeno i due triedri non sono sovrapponibili, per la stessa ragione per cui il guanto della mano destra non si può calzare alla mano sinistra.

I due triedri $\widehat{OABC}$, $\widehat{O'A'B'C'}$ (come appunto la mano destra e la sinistra di uno stesso individuo) si possono riguardare l'uno come l'immagine dell'altro, riflessa da uno specchio piano, e si dicono perciò *simmetrici*.

Ma, come nel comune linguaggio si suol dire che le nostre due mani sono uguali, noi diremo che sono uguali anche i due triedri $\widehat{OABC}$, $\widehat{O'A'B'C'}$.

Cioè diremo che sono *uguali* due triedri sia quando sono *sovrapponibili,* sia quando sono *simmetrici,* (cioè tali che l'uno sia sovrapponibile alla immagine dell'altro, riflessa da uno specchio piano).

E se si vogliono distinguere codesti due casi di uguaglianza, due triedri sovrapponibili si dicono *uguali direttamente,* mentre due triedri simmetrici si dicono *uguali inversamente.*

251. Per quanto si è detto or ora *due triedri uguali hanno ordinatamente uguali le facce e i diedri.*

252. Viceversa si può dimostrare che *se due triedri hanno ordinatamente uguali le facce e i diedri, sono uguali (direttamente* o *inversamente).*

Ed anzi si possono dimostrare, i seguenti teoremi, di cui è manifesta l'analogia coi criteri di uguaglianza dei triangoli (nn. 121, 123, 125):

Dati due triedri, si può concludere che sono uguali, se si sa che hanno rispettivamente uguali:

a) *due facce e il diedro compreso;*

b) oppure *due diedri e la faccia comune;*

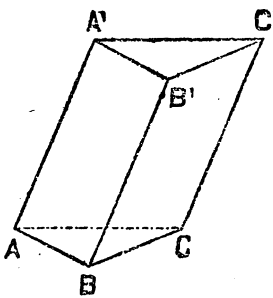
c) oppure *le tre facce;*

d) oppure *i tre diedri.*

253. Per la uguaglianza degli angoloidi si può ripetere ciò che si è detto ai nn. 250-252 per i triedri.

Prisma.

254. Considerato un triangolo ABC, si conducano per i tre vertici, fuori del piano ABC, tre rette fra loro parallele, e con un piano parallelo ad ABC si seghino codeste tre parallele rispettivamente nei punti A′, B′, C′.



I tre segmenti A′B′, B′C′, C′A′ risultano paralleli rispettivamente ad AB, BC, CA (n. 226). Cosicchè i quadrangoli ABB′A′, BCC′B′, CAA′C′ sono parallelogrammi perchè hanno i lati opposti paralleli (n. 140).

E allora dal fatto che i tre segmenti A′B′, B′C′, C′A′ sono rispettivamente uguali ad AB, BC, CA (n. 142,1), concludiamo che il triangolo A′B′C′ è uguale ad ABC (n. 125).

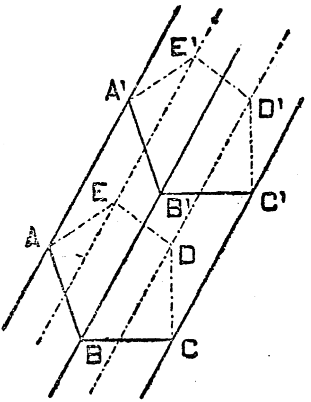
Ciò premesso la figura ABCC′A′B′ costituita dai punti comuni ai sei triedri di vertici $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$, dicesi *prisma triangolare.* Si può anche dire che codesto prisma è la parte di spazio limitata dai parallelogrammi ABB′A′, BCC′B′, CAA′C′ e dai due triangoli ABC, A′B′C′.

I tre parallelogrammi ABB′A′, BCC′B′, CAA′C′ e i due triangoli ABC, A′B′C′ si chiamano *facce* del prisma: i due triangoli si dicono più precisamente *basi* e i parallelogrammi *facce laterali.*

L'insieme delle facce dicesi *superficie* del prisma.

I lati delle facce si chiamano *spigoli* del prisma e i tre spigoli paralleli ed uguali AA′, BB′, CC′ si dicono più precisamente spigoli *laterali.* Infine si chiama *altezza* del prisma la distanza dei piani delle due basi (n. 243).

255. Similmente si definiscono il *prisma quadrangolare,* o *pentagonale,* o *esagonale,* ecc.



Considerato, p. e., un pentagono ABCDE, si conducano per i vertici, fuori del piano del poligono, cinque rette parallele e si seghino queste rette con un piano parallelo a quello del pentagono dato. Si ottiene così un pentagono A′B′C′D′E′ che è uguale ad ABCDE.

La figura ABCDEE′A′... D′, costituita dai punti comuni ai dieci triedri, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, ..., $\widehat{D'}$, $\widehat{E'}$ dicesi *prisma pentagonale.*

Ricordando quanto si è detto al n. prec. si comprende facilmente che cosa si intenda per *basi, facce laterali, superficie, spigoli laterali, altezza* di un prisma qualsiasi.

256. *Gli spigoli laterali di un prisma sono uguali.*

Infatti essi sono uguali a due a due come lati opposti di parallelogrammi (n. 142,1).

257. Un prisma si dice *retto,* se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi. Un prisma che non sia retto si dice *obliquo.*

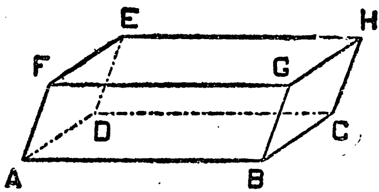
In un prisma retto gli spigoli laterali sono uguali all'altezza.

Nota. — Sono da notare in modo particolare i ***prismi retti a basi regolari.***

Parallelepipedo.

258. Un prisma le cui basi siano parallelogrammi dicesi *parallelepipedo.*

Il parallelepipedo ha otto vertici, dodici spigoli, e sei facce, ciascuna delle quali è un parallelogramma.



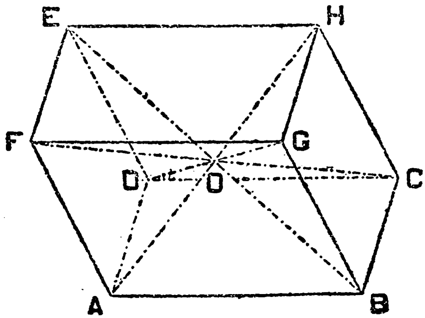
Ogni vertice è comune a tre facce: le altre tre facce passano per un vertice che si dice *opposto* al primo. Il segmento congiungente due vertici opposti si dice *diagonale.* Ogni parallelepipedo ha quattro diagonali.

259. *Le facce opposte di un parallelepipedo sono parallele ed uguali.*

Perciò uno stesso parallelepipedo si può considerare come prisma in tre modi differenti, in quanto si possono assumere come basi due facce opposte qualsiansi.

260. *Gli spigoli di un parallelepipedo sono a quattro a quattro paralleli ed uguali.*

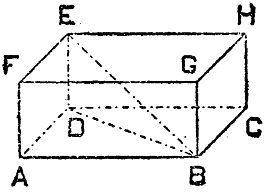
261. *Le quattro diagonali di un parallelepipedo*



passano per uno stesso punto che le divide tutte quattro per metà.

262. Un parallelepipedo retto, le cui basi sieno rettangoli, dicesi *parallelepipedo rettangolo.*

Si può costruire un parallelepipedo rettangolo, dati i tre lati concorrenti in un vertice, prendendo per un punto tre rette a due a due perpendicolari, tagliando su di esse a partire dal punto comune tre segmenti uguali ai dati e conducendo per ciascun estremo il piano parallelo al piano delle altre due rette.



Le lunghezze dei tre spigoli concorrenti in un vertice si dicono *dimensioni* del parallelepipedo rettangolo.

263. Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo (vedi fig. al n. prec.) siano

$$DA = h \quad , \quad DC = k \quad , \quad DE = l.$$

Vogliamo trovare la lunghezza d della diagonale BE.

Perciò osserviamo che, se si conduce la diagonale BD della base, i triangoli DBC, BED sono rettangoli rispettivamente in C e D. Avremo perciò (n. 192)

$$\overline{DB}^2 = h^2 + k^2 \quad , \quad d^2 = \overline{DB}^2 + l^2$$

e quindi

$$d^2 = h^2 + k^2 + l^2,$$

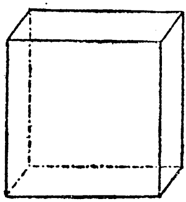
ossia

$$d = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}.$$

Cioè *per trovare la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, si deve estrarre la radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni.*

264. Se in un parallelepipedo sono uguali tre spigoli concorrenti in un punto, sono uguali anche tutti gli altri spigoli (n. 260). Un parallelepipedo siffatto dicesi *romboedro.* Esso ha per facce sei rombi.

Dicesi poi *cubo* un parallelepipedo rettangolo avente tutti gli spigoli uguali.



Il cubo ha per facce sei quadrati uguali.

Il cubo resta determinato quando ne è dato il lato.

Dal n. prec. risulta che se l e d sono rispettivamente la lunghezza dello spigolo e quello della diagonale del cubo, si ha

$$d^2 = 3l^2 \quad , \quad l^2 = \frac{d^2}{3}$$

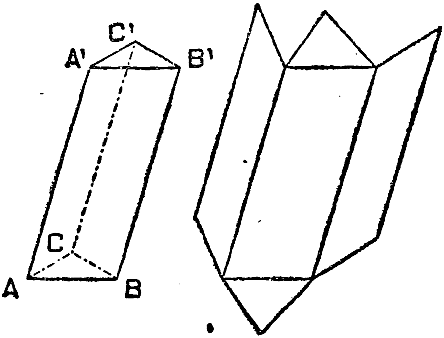
e quindi

$$d = \sqrt{3l^2} \quad , \quad l = \sqrt{\frac{d^2}{3}}.$$

Cioè *per trovare la lunghezza della diagonale di un cubo si deve estrarre la radice quadrata del triplo del quadrato della lunghezza dello spigolo; e per trovare la lunghezza dello spigolo si deve estrarre la radice quadrata della terza parte del quadrato della lunghezza della diagonale.*

Sviluppo della superficie del prisma.

265. Supponiamo di avere un prisma triangolare di cartoncino ABCC′A′B′ e, tagliatolo lungo AC, BC,

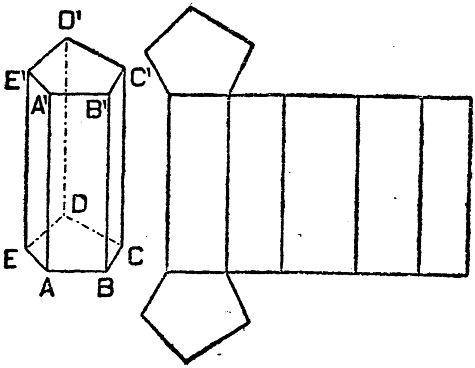


CC', A'C', B'C', distendiamo il cartoncino su di un piano, p. es. sul foglio del disegno. Otteniamo così lo *sviluppo* della superficie del nostro prisma triangolare.

Così possiamo disegnare su di un foglio lo sviluppo di un prisma dato qualsiasi.

Viceversa, disegnato su di un foglio di cartoncino lo sviluppo di un prisma e ritagliatolo, possiamo con opportune ripiegature, costruire un modello solido del prisma.

266. Se il prisma è retto, le sue facce laterali sono tutte rettangoli di uguale altezza. Perciò lo sviluppo sarà dato dalle due basi e da un rettangolo



avente per altezza l'altezza del prisma e per base il perimetro delle basi.

Ricordando la regola per trovare l'area di un rettangolo (n. 173) troviamo la seguente

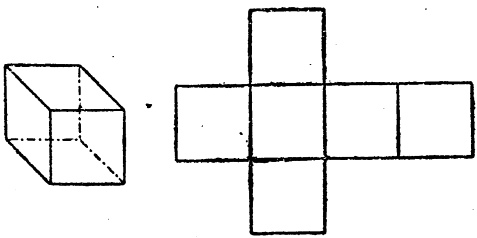
Regola. *Per trovare l'area della superficie laterale di un prisma retto si fa il prodotto (delle lunghezze) dell'altezza e del perimetro della base.*

Per trovare l'area della superficie totale di un prisma si dovrà aggiungere all'area della superficie laterale il doppio di quella della base.

Cioè se indichiamo con p il perimetro della base, con h l'altezza del prisma, con S_l, S_t le aree delle superficie laterale e totale, e infine con B l'area della base, avremo:

$$S_l = p \times h \quad , \quad S_t = S_l + 2B.$$

267. Nell'annessa figura si ha lo sviluppo della superficie di un cubo.



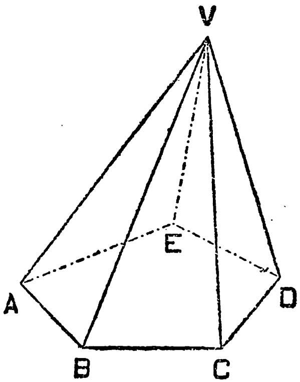
L'area della superficie (totale) di un cubo si trova moltiplicando per 6 la seconda potenza (della lunghezza) del lato.

Se indichiamo con l la lunghezza dello spigolo del cubo e con S l'area della superficie, potremo scrivere

$$S = 6l^2.$$

Piramide.

268. Dato un poligono, per esempio un pentagono ABCDE, e preso un punto V fuori del piano di esso, la figura costituita dai punti dell'angoloide $\widehat{V}$ABCDE che giacciono da quella parte del piano del poligono da cui cade V dicesi *piramide* VABCDE di *vertice* V e *base* ABCDE.



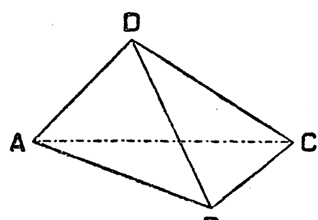
I triangoli VAB, VBC,....., VEA diconsi *facce* (laterali) e il loro insieme *superficie laterale* della piramide. Aggiungendo alla superficie laterale la base si ottiene la *superficie totale*.

I lati delle facce e della base diconsi *spigoli* della piramide.

La distanza del vertice dal piano della base (n. 222) dicesi *altezza* della piramide.

Si possono considerare piramidi aventi la base di quanti lati si vogliono.

Una piramide a base triangolare si dice anche *tetraedro*. Ogni tetraedro si può considerare in quattro modi diversi come piramide, prendendo come base una qualsiasi delle sue quattro facce.



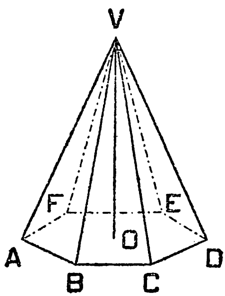
Notiamo che la piramide si può immaginare ottenuta intersecando un angoloide $\widehat{V}$ mediante un piano che seghi tutti gli spigoli di quello.

269. Nota. — Una piramide VABCDE si può anche considerare come la regione di spazio comune ai sei angoloidi

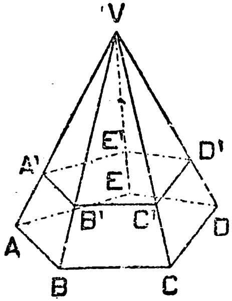
$$\widehat{V}\,,\ \widehat{A}\,,\ \widehat{B}\,,\ \widehat{C}\,,\ \widehat{D}\,,\ \widehat{E}.$$

270. Una piramide, di cui la base sia un poligono regolare e il vertice appartenga alla perpendicolare alla base nel suo centro, dicesi *piramide retta a base regolare*.

Gli spigoli laterali di una piramide retta a base regolare $\widehat{V}$ABCDEF sono tutti uguali, perchè i loro estremi sul piano della base sono equidistanti dal piede O della perpendicolare abbassata dal vertice (nn. 157, 158; n. 122, *b*). Perciò le facce laterali della piramide sono altrettanti triangoli isosceli uguali. L'altezza comune di essi dicesi *apotema* della piramide.



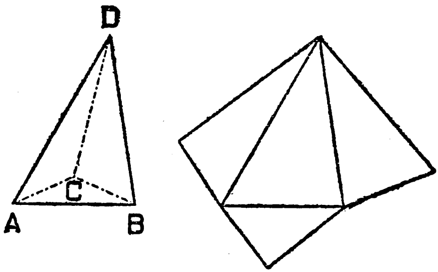
271. Una piramide ABCDEV, è divisa da un piano parallelo alla base e compreso fra questa e il vertice, in due parti, di cui quella dalla parte del vertice è una piramide. L'altra dicesi *tronco di piramide* (a basi parallele).



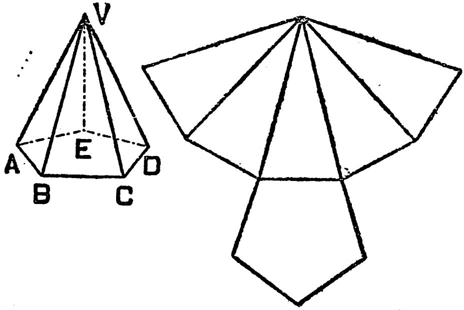
I due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E', aventi gli angoli ordinatamente uguali (n. 233), diconsi *basi* del tronco, e i trapezi ABB'A', BCC'B',..... EAA'E' diconsi *facce laterali*. Se la piramide è retta e a base regolare, codeste facce laterali sono uguali e la loro altezza si dice *apotema* o *lato* del tronco. *Altezza* del tronco è la distanza delle due basi.

Sviluppo della superficie della piramide.

272. Lo sviluppo della superficie di una piramide sarà dato dal poligono base e da tanti triangoli aventi a due a due un lato uguale e le basi ordinatamente uguali ai lati della base.



Se la piramide è retta a base regolare, le facce laterali sono tutte triangoli isosceli uguali, aventi per altezza l'*apotema* della piramide.



Ora si noti che per trovar l'area della somma di più triangoli di uguale altezza basta moltiplicare la somma delle basi per l'altezza e dividere il prodotto per 2 (n. 181). Giungiamo così alla seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di una piramide retta a base regolare è data dal semiprodotto (delle lunghezze) del perimetro della base e dell'apotema.*

Cioè indicando con p ed a le lunghezze del perimetro e dell'apotema e con S_l l'area della superficie laterale, avremo

$$S_l = \frac{p \times a}{2};$$

e se B, S_t indicano le aree della base e della superficie totale avremo

$$S_t = S_l + B.$$

273. Lo sviluppo di un tronco di piramide (a basi parallele) sarà dato da due poligoni (basi) e da tanti trapezi (facce laterali) quanti sono i lati delle due basi. Se il tronco appartiene ad una piramide regolare tutti i trapezi sono isosceli ed uguali ed hanno per altezza l'apotema del tronco.

Ricordando la regola che dà l'area di un trapezio (n. 187) troviamo la seguente

Regola. *L'area della superficie laterale di un tronco di piramide retta a base regolare è dato dal semiprodotto (delle lunghezze) dell'apotema e della somma dei perimetri delle basi.*

Cioè se indichiamo con p e p' le lunghezze dei perimetri delle due basi, con a l'apotema, con S_l l'area della superficie laterale avremo

$$S_l = \frac{(p + p') \times a}{2};$$

e se B, B' sono le aree delle due basi, ed S_t quella della superficie totale, sarà

$$S_t = S_l + B + B'.$$

Poliedri.

274. I prismi e le piramidi sono particolari poliedri.

Dicesi *superficie poliedrica* (convessa) ogni figura costituita da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ognuno dei lati sia comune a due di essi e il piano di ciascuno lasci tutti gli altri da una medesima banda.

I nominati poligoni diconsi *facce* e i vertici, i lati e gli angoli rispettivi diconsi *vertici, spigoli* ed *angoli* della superficie poliedrica.

Gli spigoli uscenti da un medesimo vertice determinano un angoloide; e la figura costituita dai punti comuni a tutti gli angoloidi così determinati dicesi *poliedro.*

Si può anche dire che un poliedro è la parte di spazio limitata da una superficie poliedrica.

Un poliedro si designa nominandone i vertici.

275. Si possono ripetere pei poliedri le osservazioni fatte ai nn. 250-252 pei triedri.

Così si dicono *uguali* due poliedri sia quando sono sovrapponibili (*uguali direttamente*), sia quando sono simmetrici (*uguali inversamente*), cioè tali che l'uno sia sovrapponibile alla immagine dell'altro, riflessa da uno specchio piano.

In ogni caso *due poliedri uguali hanno ordinatamente uguali le facce e gli angoloidi e quindi gli spigoli e i diedri.*

Viceversa si può dimostrare che *se due poliedri hanno ordinatamente uguali le facce e gli angoloidi (e quindi gli spigoli e i diedri) i due poliedri sono uguali (direttamente o inversamente).*

Ed anzi sussistono anche pei poliedri *criteri di uguaglianza,* che mostrano come dalla uguaglianza di alcune coppie di facce e di angoloidi discenda di conseguenza la uguaglianza delle altre. Ma noi non ci indugeremo su questo argomento.

Poliedri regolari.

276. Fra i poliedri sono notevoli i *poliedri regolari.*

Dicesi *regolare* un poliedro che abbia tutte le facce regolari ed uguali e tutti gli angoloidi uguali.

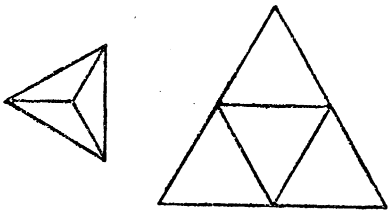
Perciò un poliedro regolare ha uguali anche tutti gli spigoli e tutti i diedri.

277. *Il cubo è un poliedro regolare.*

278. Nel piano vi sono poligoni regolari aventi un numero qualsiasi di lati: 3, 4, 5, 6, ecc. (nn. 159-164). *Invece fra i poliedri vi sono, oltre il cubo o esaedro regolare, soltanto altri quattro poliedri regolari,* cioè il *tetraedro regolare,* l'*ottaedro regolare,* il *dodecaedro regolare* e l'*icosaedro regolare.*

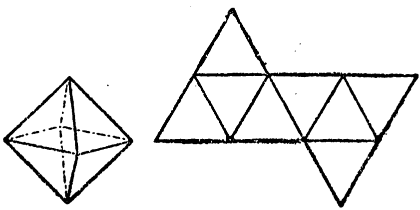
Al n. 267 abbiamo dato lo sviluppo del cubo. Qui daremo le figure e gli *sviluppi* degli altri quattro poliedri regolari, in modo da far vedere come si possano costruire in cartoncino i rispettivi modelli.

1) *Tetraedro regolare.* Esso ha quattro facce

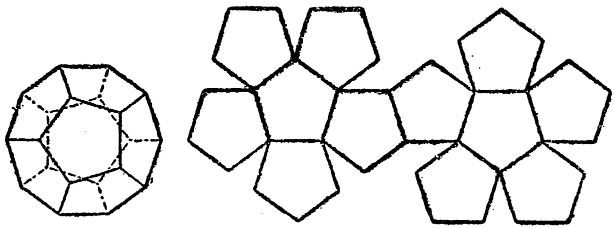


(triangoli equilateri), quattro vertici e sei spigoli. Gli angoloidi sono triedri.

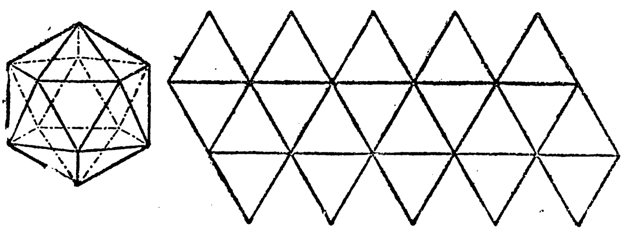
2) *Ottaedro regolare.* Ha otto facce (triangoli equilateri), sei vertici e dodici spigoli. Gli angoloidi sono tetraedri.



3) *Dodecaedro regolare.* Ha dodici facce (pentagoni regolari), venti vertici e trenta spigoli. Gli angoloidi sono triedri.



4) *Icosaedro regolare.* Ha venti facce (triangoli equilateri), dodici vertici e trenta spigoli. Gli angoloidi sono pentaedri.



XIII.

MISURA DEI POLIEDRI

Unità di misura e volume dei poliedri.

279. Per misurare i poliedri si assume come *unità* il cubo che ha per spigolo l'unità di misura dei segmenti. Così, in generale, prendendosi come unità delle lunghezze il *metro*, si assume come unità fondamentale per la misura dei poliedri il *metro cubo* cioè *il cubo che ha per spigolo il metro* (1 $m.^3$).

Si assumono poi come unità ausiliari il *decimetro cubo* (1 $dm.^3$) (1), il *centimetro cubo* (1 $cm.^3$), il *millimetro cubo* (1 $mm.^3$), cioè i cubi che hanno per spigolo rispettivamente un decimetro, un centimetro, un millimetro, e talvolta anche il *decametro cubo* (1 $dam.^3$), l'*ettometro cubo* (1 $hm.^3$), ecc.

Se, immaginando di avere collocato sul pavimento un metro cubo, ne dividiamo tre spigoli concorrenti in un vertice in decimetri e pei punti di divisione conduciamo i piani paralleli alle facce, il metro cubo vien diviso dai nove piani paralleli alle due facce orizzon-

(1) È noto che il decimetro cubo è solitamente assunto come unità di misura dei liquidi e in tal caso si chiama più precisamente *litro* (1. l.) e si usano anche i suoi multipli: *decalitro* (10 litri = 1 dal.), *ettolitro* (100 litri = 1 hl.) e i sottomultipli: *decilitro* (0,1 di litro = 1 dl.), *centilitro* (0,01 di litro = 1 cl.).

tali in 10 parallelepipedi rettangoli aventi la base di 1 m.^{2} e l'altezza di 1 dm.

Ciascuno poi di questi parallelepipedi è suddiviso dai piani condotti perpendicolarmente alla base in 100 dm.^{3} Cioè il metro cubo contiene esattamente 1000 dm.^{3}

Così il decimetro cubo contiene 1000 cm.^{3} e il centimetro cubo 1000 mm.^{3}; onde risulta che il metro cubo contiene 1 000 000 cm.^{3} e 1 000 000 000 mm.^{3}

280. Similmente a quanto vale per i segmenti (n. 20) o per i poligoni (n. 170), *misurare* un poliedro P vuol dir trovare quante volte P contenga il metro cubo, o il decimetro cubo, o il centimetro cubo, ecc.

Se p. es. P contiene 45 cm.^{3} (e non 46 cm.^{3}), si dice che la *misura* o *volume* di P è cm.^{3} 45. Si può anche dire che il volume di P è dm.^{3} 0,045 o m.^{3} 0,000045 ecc.

281. Misurazione rispetto ad una unità qualsiasi. — Si può misurare un poliedro P rispetto ad un qualsiasi altro preso come unità.

Misurare P rispetto ad un qualsiasi altro U preso come unità vuol dir trovare una parte aliquota di U, che sia contenuta esattamente in P. Se p. es. la 5ª parte di U sta 4 volte in P, si dice che

$$\frac{4}{5}$$

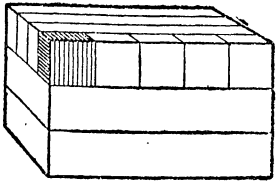
è la *misura* di P rispetto all'unità U.

282. La misurazione diretta di un poliedro qualsiasi è, in generale, difficilissima e praticamente impossibile. Perciò conviene considerare dei casi particolari, per poi ridurre a questi il caso generale.

Noi qui enumereremo appunto alcune regole pratiche di misura di poliedri.

Volume del prisma.

283. Volume del parallelepipedo rettangolo. — Consideriamo un parallelepipedo rettangolo P e in primo luogo supponiamo che le tre dimensioni siano ciascuna uguale ad un numero intero di metri. P. es. le dimensioni siano di



$$m.\ 4,\ m.\ 6,\ m.\ 3.$$

Allora si vede dall' unita figura come P si possa dividere in 3 parallelepipedi rettangoli uguali, aventi la stessa base di P e l' altezza di m. 1. Ciascuno di questi è decomponibile in 4 parallelepipedi rettangoli fra loro uguali, alti e larghi 1 m. e lunghi 6 m.

Infine ognuno di questi ultimi parallelepipedi è divisibile in 6 cubi uguali, ognuno dei quali è 1 m.^{3}.

Concludiamo che P contiene esattamente

$$3 \times 4 \times 6$$

metri cubi, cioè il suo volume è di

$$m.^3\ (3 \times 4 \times 6) = m.^3\ 72,$$

e si ottiene moltiplicando fra loro le tre dimensioni.

b) Questa stessa regola vale anche nel caso in cui le dimensioni siano frazionarie.

Siano esse p. es. di

$$m.\ 0{,}12;\ m.\ 0{,}23;\ m.\ 0{,}09.$$

Possiamo anche dire che le tre dimensioni sono di

$$cm.\ 12,\ cm.\ 23,\ cm.\ 9;$$

e allora si vede, come pocanzi, che il parallelepipedo contiene esattamente

$$12 \times 23 \times 9$$

centimetri cubi; cioè il suo volume è di

$$\text{cm.}^3\ 2484$$

ossia di

$$\text{m.}^3\ 0{,}002484.$$

E questo stesso numero si sarebbe ottenuto moltiplicando le tre dimensioni del parallelepipedo rettangolo, espresse in metri.

Abbiamo dunque la seguente

Regola. — *Il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto delle misure degli spigoli* (dimensioni del parallelepipedo), o, come si suol dire brevemente, *dal prodotto degli spigoli.*

Cioè, se h, k, l sono le tre dimensioni, avremo

$$V = h \times k \times l.$$

284. Siccome il prodotto delle due dimensioni della base dà l'area di questa (n. 173), la regola precedente si può anche enunciare dicendo che il *volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

Se h è l'altezza e B l'area della base, la regola precedente si esprime scrivendo

$$V = B \times h.$$

285. Volume del cubo. — Siccome il cubo è un parallelepipedo rettangolo avente le tre dimensioni uguali, risulta dalla regola del n. 283 che *il volume del cubo è dato dalla terza potenza* (della misura) *dello spigolo.*

Cioè $V = l^3.$

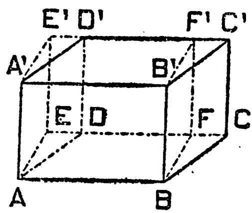
286. Preso un cubo, p. es. di cm. 3 di spigolo, il suo volume è di cm.^{3} 27. Il cubo che ha lo spigolo doppio, cioè di cm. 6, ha il volume di cm.^{3} 216, cioè appunto 8 volte maggiore del cubo dato: cioè *quando in un cubo si raddoppia lo spigolo, il volume si moltiplica per* 8.

Così se lo spigolo di un cubo si moltiplica per 3, 4, ..., *il volume vien moltiplicato rispettivamente per* 27, 64, ...

287. Se di un cubo si conosce il volume, risulta dalla regola del n. 284 che *(la lunghezza del) lo spigolo si trova estraendo la radice cubica del volume:*

$$l = \sqrt[3]{V.}$$

288. Volume del prisma retto. — La regola enunciata al n. 283 per la determinazione del volume di un parallelepipedo rettangolo vale anche per un prisma qualsiasi.



Cominciamo qui col dimostrarlo per il prisma retto, e in primo luogo consideriamo un parallelepipedo retto ABCDD'A'B'C'.

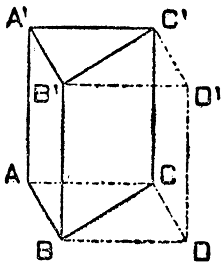
Supposto AB maggiore o almeno uguale di AD, si abbassino nel piano della base ABCD da A e B le perpendicolari AE, BF sulla DC. Otteniamo così un rettangolo ABFE equivalente al parallelogramma ABCD e perciò avente la stessa area (n. 179), e la figura ABFEE'A'B'F' sarà un parallelepipedo rettangolo, avente la stessa altezza del parallelepipedo dato.

Ora i due prismi retti a basi triangolari ADEE'A'D', BCFF'B'C' hanno ordinatamente uguali tutti i loro elementi, e si possono sovrapporre l'uno all'altro, spostando, p. es., il primo parallelamente a se stesso fino a portare il vertice A in B.

Risulta di qui che il parallelepipedo rettangolo si può immaginare ottenuto dal parallelepipedo retto, tagliando da questo il prisma BCFF'B'C' e portandolo in ADEE'A'D'; cosicchè i due parallelepipedi avranno ugual volume.

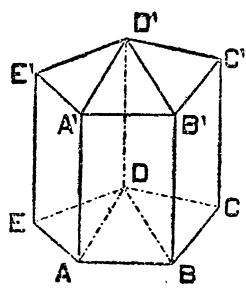
Ma il volume del parallalepipedo rettangolo si ottiene (n. 284) moltiplicando l'area della base ABFE per l'altezza; e d'altra parte codesta base ABFE ha la stessa area della base ABCD del parallelepipedo retto e di più i due parallelepipedi hanno la stessa altezza.

Perciò concludiamo che *il volume di un parallelepipedo retto è dato dal prodotto (dell'area) della base per (la lunghezza de) l'altezza.*



289. Per estendere questa regola al caso di un prisma retto a base triangolare ABCC'A'B', si noti che esso, come risulta dall'unita figura, si può riguardare come la metà di un parallelepipedo retto avente la stessa altezza e la base *doppia* di quella del prisma triangolare.

Perciò *il volume di questo sarà dato appunto dal prodotto (dell'area) della relativa base per (la lunghezza dell') altezza.*



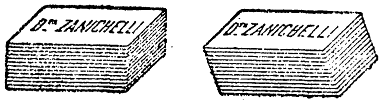
290. Consideriamo infine un prisma retto qualsiasi, p. es. pentagonale. I piani diagonali, determinati da uno spigolo laterale fisso e da ciascuno degli altri spigoli laterali dividono il prisma dato in tre prismi retti triangolari, la cui altezza è quella stessa del dato e le tre basi, sommate, danno la base del prisma primitivo.

Il volume di questo si otterrà sommando i volumi dei tre prismi triangolari.

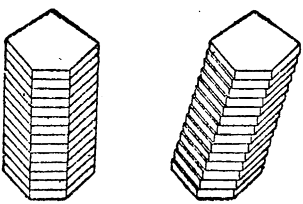
Ma evidentemente otterremo lo stesso resultato, prendendo addirittura l'area della base del prisma dato e moltiplicandola per la relativa altezza.

291. VOLUME DI UN PRISMA QUALSIASI. — Vediamo infine come la medesima regola valga anche per un prisma obliquo.

Consideriamo, p. es. cento carte da visita: esse collocate esattamente l'una sull'altra



(come giacciono nella loro scatoletta) formano un parallelepipedo rettangolo. Disponendole invece, come indica l'unita figura, noi otteniamo un parallelepidedo obliquo avente la stessa base e la stessa altezza del primitivo; ed è manifesto che questo nuovo parallelepipedo e il primitivo, essendo formati colle stesse carte da visita, hanno egual volume.



Nello stesso modo, ritagliando in cartoncino sottile un numero sufficiente di poligoni eguali e disponendoli l'uno sull'altro, possiamo costruire il modello di un prisma retto qualsiasi, e disponendoli poi obliquamente (vedi la figura) possiamo, cogli stessi cartoncini, formare un qualsiasi prisma obliquo, avente la stessa base e la stessa altezza del primitivo.

È così reso manifesto, in via intuitiva, che *due prismi qualsiansi, aventi basi ed altezze uguali, hanno lo stesso volume.*

Di qui, ricordando il n. prec., ricaviamo la regola seguente che comprende come casi particolari tutte quelle che abbiamo enunciate prima d'ora (nn. 283-291):

Regola. — *Il volume di un prisma qualsiasi è uguale al prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

Se indichiamo con h l'altezza, con B l'area della base e con V il volume del prisma, la regola precedente si esprime scrivendo

$$V = B \times h.$$

292. Risulta di qui la seguente

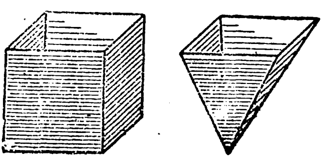
Regola. — *Dividendo il volume di un prisma qualsiasi per l'area della base o (per l'altezza) si trova l'altezza (o l'area della base).*

Cioè

$$h = \frac{V}{B} \quad , \quad B = \frac{V}{h}.$$

Volume della piramide.

293. Per trovare una regola che insegni a calcolare il volume di una piramide, possiamo eseguire la seguente verifica.



Presa una scatoletta della solita forma di parallelepipedo rettangolo, costruiamo in cartone la superficie laterale di una qualsiasi piramide avente la base e l'altezza rispettivamente uguali a quelle della scatola.

Se tenendo la piramide colla bocca in alto come un imbuto, la riempiamo di arena, e ne versiamo il contenuto nella scatola per tre volte, verifichiamo che la scatola si riempe esattamente. Cioè verifichiamo che il volume del parallelepipedo rettangolo è triplo di quello della piramide.

Una simile verifica si può eseguire per ogni piramide; cosicchè abbiamo che *il volume di una piramide qualsiasi è uguale alla terza parte di quello di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.*

294. Risulta di qui e dal n. 291 la

Regola. — *Il volume di una piramide è uguale ad un terzo del prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

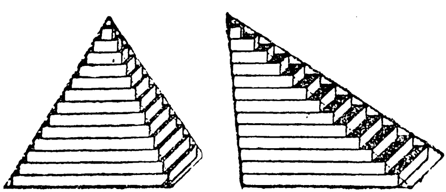
Cioè, indicando con h, B, V rispettivamente l'altezza, l'area della base, il volume della piramide

$$V = \frac{B \times h}{3}.$$

295. Alla regola del n. precedente si può giungere anche ricorrendo ad un'altra osservazione, analoga a quella fatta al n. 291 per confrontare i prismi.

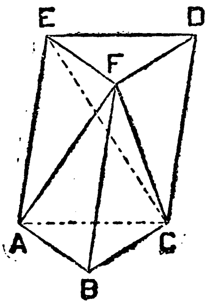
Immaginiamo di costruire un modello di piramide, p. es. a base quadrata, per mezzo di tanti pezzi di cartone quadrati, opportunamente ritagliati e posti l'uno sull'altro.

Naturalmente il modello apparirà tanto più prossimo al vero, quanto più sottile sarà il cartone usato. Ora l' unita figura mostra come in-



clinando in un senso o nell'altro la stessa pila di pezzi di cartone si possa ottenere il modello di qualsiasi altra piramide che abbia la stessa base e la stessa altezza di quella di prima; e in tal modo ci convinciamo in via intuitiva che *due piramidi quali si vogliano, aventi basi ed altezze uguali, hanno lo stesso volume.*

Ciò premesso, prendiamo un prisma triangolare ABCDEF. Il piano ACF lo divide nella piramide ABCF



avente base ed altezza uguali al prisma dato, e nella piramide quadrangolare ACDEF. Quest' ultima è divisa alla sua volta dal piano ECF nelle due piramidi triangolari ACEF ed EFDC, la seconda delle quali ha anch'essa base ed altezza uguali al prisma. Di qui discende intanto che le due piramidi ABCF, EFDC hanno lo stesso volume. Quanto poi alla terza piramide ACEF, essa ha la base ACE uguale alla faccia ECD della piramide EFDC (n. 142,3), e il vertice opposto comune con essa; onde risulta che anch'essa ha volume uguale a codesta piramide EFDC, e quindi alla ABCD.

Si conclude di qui che *il volume del prisma è triplo di quello della piramide* ABCD *che ha la stessa base e la stessa altezza di esso.* Ricordando che se B ed h designano l'area della base e l'altezza del prisma ABCDEF (e quindi della piramide ABCD) il volume del prisma è $B \times h$ (n. 291) troviamo che il volume V della piramide triangolare ABCD è dato da

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$

E la stessa regola si estende subito a una piramide qualsiasi, p. es. a una piramide a base pentagonale. Conducendo per uno spigolo laterale i piani che vanno agli spigoli opposti si divide la piramide in tre piramidi triangolari che hanno la stessa altezza h della piramide data. Se B_1, B_2, B_3 sono le arèe delle loro basi, i volumi sono rispettivamente

$$\frac{1}{3} B_1 \times h \quad , \quad \frac{1}{3} B_2 \times h \quad , \quad \frac{1}{3} B_3 \times h.$$

Il volume V della piramide pentagonale è dato dalla somma di questi tre volumi, cioè da

$$V = \frac{1}{3} B_1 \times h + \frac{1}{3} B_2 \times h + \frac{1}{3} B_3 + h,$$

e si può anche scrivere

$$V = \frac{1}{3} (B_1 + B_2 + B_3) \times h.$$

Ma $B_1 + B_2 + B_3$ è l'area B della base della data piramide, cosicchè si trova

$$V = \frac{1}{3} B \times h;$$

cioè vale veramente in ogni caso la regola del n. prec.

296. Avremo ancora dal n. 294 la

Regola. — *Dividendo il triplo del volume di una piramide per l'area della base (o per l'altezza) si ottiene l'altezza (o l'area della base).*

Cioè
$$h = \frac{3V}{B} \quad , \quad B = \frac{8V}{h}.$$

297. Volume del tronco di piramide. — Ci limitiamo ad enunciare la seguente

Regola. — *Per trovare il volume di un tronco di piramide (a basi parallele) si addizionano le aree delle basi colla radice quadrata del loro prodotto, e la somma si moltiplica per l'altezza e si divide per 3.*

Se per brevità si indicano con B, B' le aree delle basi, con h l'altezza e con V il volume del tronco, si può esprimere la regola precedente, scrivendo

$$V = \frac{(B + B' + \sqrt{BB'}) \times h}{8}.$$

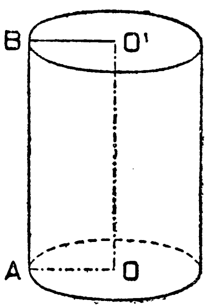
XIV.

CILINDRO, CONO E SFERA

Cilindro.

298. Definizione del cilindro. — Si faccia ruotare un rettangolo ABO′O intorno ad un suo lato OO′ fino a quando il lato opposto AB ritorna nella sua posizione iniziale.

La figura descritta in codesto movimento dai punti del rettangolo ABO′O si dice *cilindro circolare retto* od anche semplicemente *cilindro*, di *asse* OO′.



I due lati opposti O′B, OA descrivono due cerchi uguali e giacenti in due piani paralleli e perpendicolari alla retta OO′ che congiunge i due centri (n. 222).

Codesti due cerchi si chiamano *basi*, e il segmento OA (od O′B) si dice *raggio* del cilindro.

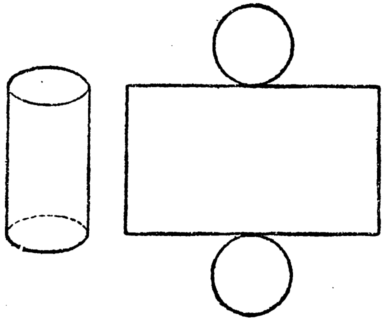
La superficie descritta dal segmento AB si chiama *superficie laterale*. Aggiungendo alla superficie laterale le due basi si ottiene la *superficie totale*.

Il segmento AB, in ciascuna delle infinite posizioni che successivamente occupa, si dice *lato* o *generatrice* del cilindro.

Infine si chiama *altezza* la distanza dei piani delle due basi (n. 243).

L'altezza del cilindro è uguale al lato.

299. Area della superficie del cilindro. — Immaginiamo di avere un cilindro, costruito in cartoncino. Se dopo averlo tagliato lungo le circonferenze di base e lungo una generatrice, distendiamo il cartoncino sul foglio, otteniamo lo *sviluppo* del cilindro, il quale



è costituito da due cerchi *(basi)* e da un rettangolo, che ha per altezza l'altezza del cilindro primitivo e per base quel lembo, che dianzi era disposto secondo la circonferenza base del cilindro.

Perciò *l'area della superficie laterale del cilindro è uguale all'area del rettangolo avente per altezza quella del cilindro e per base la circonferenza base del cilindro rettificata.*

Abbiamo quindi (n. 173) la seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di un cilindro si ottiene moltiplicando la lunghezza della circonferenza di base per l'altezza.*

La superficie totale si ottiene aggiungendo alla superficie laterale il doppio dell'area della base.

Se per brevità indichiamo con r il raggio della base, con h l'altezza, con S_l l'area della superficie laterale del cilindro e con π il solito numero fisso 3,14 (o 3,1416) la prima parte della regola precedente si potrà scrivere

$$S_l = 2\pi rh.$$

Se poi S_t indica l'area della superficie totale abbiamo

$$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

ossia

$$S_t = 2\pi r(h + r).$$

300. Risulta dalla regola del n. prec. che:

a) *Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per l'altezza si ottiene la lunghezza della circonferenza della base.*

Cioè

$$2\pi r = \frac{S_l}{h}.$$

b) *Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per la lunghezza della circonferenza della base, si ottiene l'altezza.*

Cioè

$$h = \frac{S_l}{2\pi r}.$$

301. Volume del cilindro. — Dato un cilindro C, iscriviamo in una delle sue basi un poligono P e consideriamo il prisma retto che ha per base codesto poligono e la stessa altezza del cilindro. È chiaro che il volume del prisma è minore di quello del cilindro; e la differenza fra i due volumi sarà tanto più piccola, quanto più piccola sarà la differenza fra il cerchio base del cilindro e il poligono P, base del prisma.

Anzi codesta differenza sarà praticamente trascurabile se il poligono P ha un numero tanto grande di lati da potersi sensibilmente confondere col cerchio base del cilindro.

È così reso manifesto che *il volume del cilindro è uguale a quello di un prisma colla medesima altezza,* *avente per base un poligono che abbia superficie uguale a quella del cerchio base del cilindro.*

Avremo dunque pel n. 291 la

Regola. — *Il volume del cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza.*

Se si indica con V il volume del cilindro potremo scrivere

$$V = \pi r^2 h.$$

302. Risulta dalla regola del n. prec. che:

a) *Dividendo il volume del cilindro per l'altezza si ottiene l'area della base.*

Cioè

$$\pi r^2 = \frac{V}{h}.$$

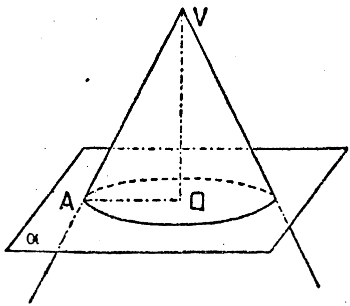
b) *Dividendo il volume del cilindro per l'area della base si ottiene l'altezza.*

Cioè

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Cono.

303. Definizione del cono. — Si faccia ruotare un triangolo rettangolo AOV intorno ad un suo cateto OV, fino a ricondurlo nella sua posizione iniziale.



La figura descritta in codesto movimento dai punti del triangolo VAO si dice *cono circolare retto* o semplicemente *cono di asse* VO, e di *vertice* V.

Il cateto OA descrive un cerchio perpendicolare, nel suo centro, all'asse (n. 222); codesto cerchio si dice *base* del cilindro.

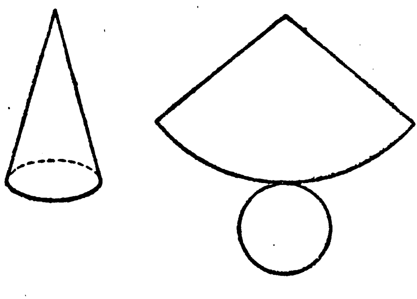
L'ipotenusa VA, in ciascuna delle infinite posizioni che successivamente assume, dicesi *lato* o *generatrice* o *apotema* del cono e la superficie descritta, nel movimento suindicato, da VA si chiama *superficie laterale*. Aggiungendo alla superficie laterale la superficie della base, si ottiene la *superficie totale*.

La distanza VO del vertice V del cono dal piano della base si dice *altezza* del cono.

304. Il lato l del cono, il raggio r della base e l'altezza h sono rispettivamente ipotenusa e cateti di uno stesso triangolo rettangolo. Perciò abbiamo (n. 192)

$$l = \sqrt{r^2 + h^2},$$
$$r = \sqrt{l^2 - h^2},$$
$$h = \sqrt{l^2 - r^2}.$$

305. Area della superficie del cono. — Immaginiamo di avere un cilindro, costruito in cartoncino. Se, dopo averlo tagliato lungo una generatrice e la circonferenza di base, distendiamo su di un piano il cartoncino, otteniamo lo *sviluppo* del cono, il quale è costituito da un cerchio *(base)* e da un settore, in cui il raggio è uguale all'apotema del cono e l'arco è il lembo che dianzi era incurvato in modo da formare la circonferenza base del cono.



Perciò *l'area della superficie laterale del cono è uguale a quella di codesto settore circolare, la quale* (n. 208) *è anche uguale alla superficie del triangolo che ha per altezza l'apotema del cono e per base la circonferenza base del cono rettificata.*

Troviamo così la seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di un cono si ottiene dividendo per 2 il prodotto (delle lunghezze) dell'apotema e della circonferenza della base.*

L'area della superficie totale si ottiene aggiungendo l'area del cerchio base all'area della superficie laterale.

Se, per brevità, indichiamo con r il raggio della base, con a l'apotema, e con S_l, S_t le aree delle superficie laterale e totale del cono, possiamo scrivere

$$S_l = \frac{2\pi r \times a}{2}$$

ossia

$$S_l = \pi r a$$

ed

$$S_t = \pi r a + \pi r^2$$

ossia

$$S_t = \pi r(a + r).$$

306. Dalla regola del n. prec. ricaviamo che:

a) *Dividendo il doppio dell'area della superficie laterale del cono per l'apotema si ottiene la lunghezza della circonferenza della base.*

Cioè

$$2\pi r = \frac{2S_l}{a}.$$

b) *Dividendo il doppio dell'area della superficie laterale del cono per la lunghezza della circonferenza della base, si ottiene l'apotema.*

Cioè

$$a = \frac{2S_l}{2\pi r}.$$

307. Volume del cono. — Dato un cilindro C di vertice V, si iscriva nella base un poligono P e si consideri la piramide di base P e vertice V.

È chiaro che il volume di codesta piramide è minore di quello del cono e che la differenza fra i due volumi sarà tanto più piccola, quanto minore sarà la differenza fra la superficie della base del cono e quella del poligono iscritto P. Anzi, la differenza sarà praticamente trascurabile se il poligono P ha un numero così grande di lati da potersi sensibilmente confondere col cerchio base.

È quindi evidente *che il volume del cono è uguale a quello di una piramide della medesima altezza, avente per base un poligono la cui superficie sia uguale a quella del cerchio base del cono.*

Così, ricordando la regola per trovare il volume di una piramide (n. 294), giungiamo alla seguente

Regola. — *Il volume di un cono si ottiene dividendo per 3 il prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

Se indichiamo con V il volume e con h l'altezza del cono potremo scrivere (si ricordi il n. 204)

$$V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}.$$

308. Inversamente, dalla regola del n. prec. ricaviamo che:

a) ***Dividendo il triplo del volume del cono per l'area della base, si ottiene l'altezza.***

Cioè

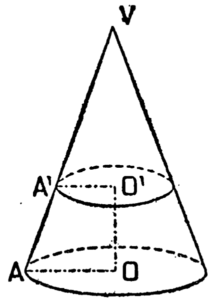
$$h = \frac{3V}{\pi r^2}.$$

b) *Dividendo il triplo del volume del cono per l'altezza, si ottiene l'area della base.*

Cioè

$$\pi r^2 = \frac{3V}{h}.$$

309. Tronco di cono. — Se, dato un cono, conduciamo un piano parallelo alla base, compreso fra questa e il vertice, il cono vien segato secondo un cerchio e resta diviso in due parti, di cui una è un nuovo cono e l'altra dicesi *tronco di cono* (a basi parallele).



I due cerchi O, O' diconsi *basi* del tronco e la distanza OO' dei loro piani dicesi *altezza* del tronco di cono.

I segmenti AA' di generatrici del cono compresi fra i detti due piani diconsi *apotemi* del tronco di cono.

Qui ci limitiamo ad enunciare le due regole seguenti, delle quali gioverà notare la analogia con quelle dei nn. 273, 297, che danno la superficie laterale e il volume di un tronco di piramide regolare.

310. Regola. — a) *L'area della superficie laterale di un tronco di cono (a basi parallele) si ottiene dividendo per 2 il prodotto dell'apotema e della somma delle lunghezze delle circonferenze delle due basi.*

b) *Per trovare il volume di un tronco di cono (a basi parallele) si addizionano le aree delle basi alla radice quadrata del loro prodotto, e la somma si moltiplica per l'altezza e si divide per 3.*

Dato un tronco di cono, indichiamone, per brevità, con r, r' i raggi delle due basi, con a ed h l'apotema e l'altezza, con S_l, V l'area della superficie laterale e il volume. Allora potremo scrivere, ricordando le regole per la misura della circonferenza e del cerchio (nn. 200, 204):

$$S_l = \frac{(2\pi r + 2\pi r')\,a}{2}$$

ossia

$$S_l = \pi (r + r')\,a$$

e

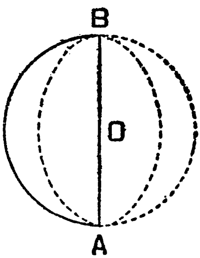
$$V = \frac{h\left(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \times \pi r'^2}\right)}{3}$$

ossia

$$V = \frac{h\pi(r^2 + r'^2 + rr')}{3}.$$

Sfera.

311. Definizione della sfera. — I punti di una semicirconferenza che ruoti intorno al suo diametro, fino a riprendere la sua posizione iniziale, descrivono una superficie che si dice *superficie sferica.*



I punti del semicerchio descrivono nello stesso movimento la *sfera* o *solido racchiuso dalla superficie sferica.*

Se O è il centro della semicirconferenza ed r il suo raggio, tutti i punti della superficie sferica hanno da O una distanza uguale ad r, ed ogni punto avente da O la distanza r si trova sulla superficie sferica. Ciò esprimiamo dicendo che *la superficie sferica è il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno da* O *la distanza* r.

Il punto O dicesi *centro* della sfera e tutti i segmenti uguali ad r, che congiungono O coi vari punti della sfera si dicono *raggi.*

312. La superficie sferica divide lo spazio in due parti:

1° la *sfera* o regione (finita) dei punti della superficie sferica e dei punti *(interni)* la cui distanza dal centro è minore del raggio;

2° la regione infinita dei punti *(esterni)* la cui distanza dal centro è maggiore del raggio.

313. Ogni retta passante per il centro O di una sfera, ne incontra la superficie in due punti P e Q, situati da bande opposte rispetto al centro O e aventi da esso una distanza uguale al raggio della sfera.

Tutti i diametri di una sfera sono uguali, perchè sono tutti doppi del raggio.

314. Ogni piano passante pel centro di una sfera si dice *piano diametrale.*

Ogni piano diametrale di una sfera la interseca secondo una circonferenza di raggio uguale al raggio di essa.

315. Un piano diametrale divide la sfera in due parti uguali, dette *emisferi.* Le parti corrispondenti, pur esse uguali, della superficie sferica, si dicono *superficie emisferiche.*

316. *Data una sfera, una retta la interseca in due punti o la tocca in un punto o non ha con essa nessun punto comune, secondo che la distanza della retta dal centro è maggiore, uguale o minore del raggio della sfera.*

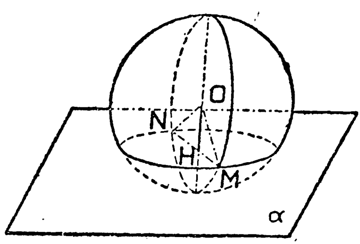
Ciò si vede considerando il piano diametrale della sfera che passa per la retta data e osservando in codesto piano la posizione della retta rispetto alla circonferenza, in cui il piano sega la sfera (n. 81).

La retta si dice rispettivamente *secante* o *tangente* o *esterna* alla sfera.

317. *Data una sfera, un piano la sega secondo una circonferenza o la tocca in un punto o non ha con essa nessun punto comune, secondo che la distanza del piano dal centro della sfera è maggiore, uguale o minore del raggio.*

Ciò si può vedere considerando i piani diametrali della sfera perpendicolari al piano dato, e ricordando il n. 80. Il piano si dice rispettivamente *secante, tangente, esterno* alla sfera.

318. Si dimostra facilmente, ed è anche manifesto dalla figura, che fra tutte le circonferenze sezioni piane di una sfera, hanno raggio massimo quelle il cui piano passa pel centro (aventi raggio uguale alla sfera). Perciò le sezioni dei piani diametrali si dicono *circonferenze massime* della

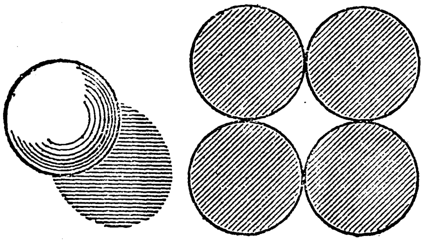


sfera: le sezioni di piani non passanti pel centro diconsi *circonferenze minori.* I cerchi corrispondenti diconsi rispettivamente *cerchi massimi* e *cerchi minori.*

319. Area di una superficie sferica. — Il problema di misurare la superficie della sfera è più difficile che gli analoghi problemi pel cilindro e pel cono, perchè la sfera, non si può distendere sopra il piano neppure tagliandola opportunamente, come si è fatto pel cilindro e pel cono (nn. 299, 305). Cioè la superficie sferica non è *sviluppabile.*

Considerazioni, che sarebbe troppo difficile spiegar qui chiaramente, conducono ad ammettere che la *superficie della sfera è uguale al quadruplo di quella del suo cerchio massimo.*

Se vogliamo verificare questo fatto possiamo eseguire il seguente esperimento:



Presa una sfera di lamiera, p. es. di ottone, si ritaglino da una lamina piana di ottone di identico spessore quattro dischi circolari di diametro uguale a quello della sfera. Ponendo sui piatti di una bilancia da una parte la sfera e dall'altra i quattro dischi, si verifica che i due pesi sono esattamente uguali: cosicchè concludiamo che la sfera e i quattro dischi hanno anche ugual superficie.

Ricordando la regola per trovar l'area di un cerchio di dato raggio (n. 204), possiamo enunciare la seguente

Regola. — *L'area della superficie di una sfera è uguale al quadruplo del prodotto del quadrato del raggio per* 3,14 (*o* 3,1416).

Se indichiamo con S l'area della superficie sferica e con r il raggio, avremo (n. 204)

$$S = 4\pi r^2.$$

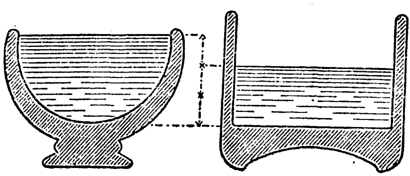
320. Inversamente abbiamo quest'altra

Regola. — *Dividendo l'area della superficie di una sfera per il quadruplo di* 3,14 (*o* 3,1416) *si ottiene il quadrato del raggio, onde basterà estrarre la radice quadrata del risultato per avere il raggio stesso.*

Cioè

$$r^2 = \frac{S}{4\pi} \quad , \quad r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}.$$

321. Volume della sfera. — Per trovare il volume di una sfera, prendiamo un recipiente emisferico, p. es. una scodella, e un altro recipiente cilindrico avente lo stesso raggio.



Se dopo aver riempito di acqua la scodella, la vuotiamo nel recipiente cilindrico, verifichiamo che l'acqua vi giunge ad una altezza che è esattamente uguali ai due terzi del raggio dei due recipienti.

Verifichiamo, cioè, che il volume dell'emisfero è uguale a quello di un cilindro di raggio uguale a quello dell' emisfero e avente per altezza i due terzi del raggio stesso.

Raddoppiando questo cilindro, troviamo il volume della sfera, cioè:

Il volume della sfera è uguale a quello di un cilindro, avente lo stesso raggio e l'altezza uguale ai $\frac{4}{3}$ *del raggio stesso.*

Ora indicando con r la lunghezza del raggio della sfera e con π il solito numero 3,14 (o 3,1416), l'area della base del cilindro or ora definito è (n. 204)

$$\pi r^2$$

e l'altezza è $\frac{4}{3}r$, cosicchè il volume del cilindro, e quindi anche della sfera, sarà (n. 301)

$$\pi r^2 \times \frac{4}{3} r$$

ossia

$$\frac{4}{3} \pi r^3.$$

Poichè la terza potenza di un numero si dice anche suo *cubo,* avremo la seguente

Regola. — *Il volume di una sfera si ottiene moltiplicando il cubo del raggio pei* $\frac{4}{3}$ di 3,14 (*o* 3,1416) [1].

Indicando con V il volume della sfera di raggio r, la regola prec. si esprime scrivendo

$$V = \frac{4}{3} \pi \times r^3.$$

322. Inversamente abbiamo la

---

[1] Siccome $\frac{4}{3} \times 3{,}141$ è uguale a 4,188, basta moltiplicare il cubo del raggio per 4,188 o 4,19.

Regola. — *Dividendo il volume di una sfera pei $\frac{4}{3}$ di 3,14 (o 3,1416) si ottiene il cubo del raggio.*

Per trovare il raggio basterà estrarre la radice cubica del risultato dianzi ottenuto.

Cioè abbiamo

$$r^3 = \frac{V}{\frac{4}{3}\pi}, \text{ e quindi } r = \sqrt[3]{\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}}.$$

323. Il volume

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

di una sfera di raggio r si può immaginare ottenuto, moltiplicando

$$4\pi r^2$$

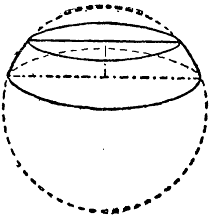
per $\frac{1}{3}$ r. Ricordando che $4\pi r^2$ è l'area della superficie della sfera (n. 319), troviamo che il *volume di una sfera si ottiene moltiplicando l'area della superficie per $\frac{1}{3}$ del raggio, ossia dividendo per 3 il prodotto dell'area della superficie per il raggio.*

Cioè

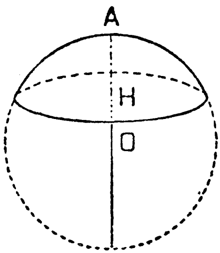
$$V = \frac{1}{3} r \times S = \frac{r \times S.}{3}$$

324. A questa stessa regola si giunge direttamente colle seguenti osservazioni.

Sulla sfera si prenda un pezzetto piccolissimo di superficie limitato da archetti di circonferenza massima. Congiungendo i vertici di questo pezzetto di superficie sferica col centro, otteniamo una piramide che è parte del solido sferico e si può approssimatamente considerare a base piana. Tutto il solido della sfera si può immaginare ottenuto sommando un numero grandissimo di siffatte piramidi e così vediamo come esso abbia lo stesso volume di un'unica piramide avente la base uguale alla superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio Di qui appunto risulta la regola del n. prec.



325. ZONA E SEGMENTO SFERICO. — **Def.** — Data una sfera e considerati due piani seganti paralleli, la figura costituita dai due cerchi sezioni e dalla parte di sfera compresa fra i due piani paralleli dicesi *segmento sferico.* I due cerchi sezioni diconsi *basi* e la distanza dei loro piani *altezza* del segmento; la congiungente i centri delle due basi (perpendicolare ad esse) dicesi *asse* del segmento. La parte di superficie sferica compresa fra i due piani si chiama superficie laterale del segmento od anche *zona sferica.*



Se in particolare si considera una delle due parti in cui la sfera è divisa da un piano secante qualsivoglia, si ha il *segmento sferico ad una sola base,* il quale è limitato dal cerchio base e da una *calotta sferica.*

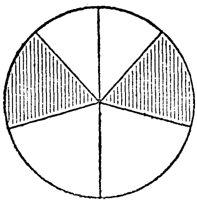
Altezza (o *saetta*) di un segmento sferico ad una base (o della relativa calotta) è quel segmento della perpendicolare al cerchio base nel suo centro, che è compreso fra codesta base e la calotta.

Per la determinazione dell'area della zona vale la seguente

Regola. — *L'area di una zona (o calotta) sferica si ottiene moltiplicando la sua altezza per la lunghezza della circonferenza massima della sfera cui essa appartiene.*

Quindi se S_l indica l'area della zona, h l'altezza ed r il raggio della sfera si ha

$$S_l = 2\pi r \times h.$$



326. SETTORE SFERICO. — Un'altra figura notevole è il *settore sferico,* il quale si ottiene considerando un settore circolare e immaginando che esso ruoti compiendo un intero giro intorno ad un diametro del suo cerchio.

Il settore sferico è costituito da tutti i punti che rappresentano posizioni assunte successivamente, nel movimento suindicato, dai punti del settore circolare considerato.

Se il settore circolare che si considera corrisponde ad un angolo al centro retto e si fa ruotare intorno ad un lato di questo, il settore sferico è un *emisfero*.

La superficie del settore sferico si ottiene come riunione di una zona colla superficie laterale di due coni (o eventualmente colle superficie di un cono e di un cerchio).

327. Per la determinazione del volume di un settore sferico vale la seguente

Regola. — *Il volume di un settore sferico si ottiene moltiplicando l'area della zona corrispondente per* $\frac{1}{3}$ *del raggio.*

Se V è il volume, S_l l'area della superficie laterale, r il raggio, avremo

$$V = \frac{1}{3} r \times S_l.$$

ESERCIZI SUI CAPITOLI XI-XIV

(Terza Classe)

[266] **228.** Un prisma triangolare retto è alto cm. 12 e gli spigoli della base sono di cm. 15, cm. 9, cm. 8. Si calcoli l'area della superficie laterale.

229. Si calcoli la superficie totale di un prisma retto a base rettangolare alto m. 0,75 e avente la base di cm. 23 $\times$ cm. 18.

230. I tre spigoli concorrenti in un vertice di un parallelepipedo rettangolo sono lunghi dm. 8, dm. 11, dm. 13. Calcolare l'area della superficie del parallelepipedo.

231. Un lattoniere deve costruire un tubo di lamiera di zinco a sezione quadrata di cm. 15 di lato e lungo m. 2,25. Quanti dm.^{2} di lamiera occorreranno, se per la saldatura si debbono contare 2 cm. in più?

232. Calcolare l'area della superficie di un cubo di m. 2,5 di spigolo.

233. Quanti cm.^{2} di carta dorata occorrono per rivestire un cubo di 15 cm. di spigolo?

234. Si misuri la superficie di un cubo del quale si conosca:

a) un lato a ($a =$ m. 4,7; $a =$ m. 1,6);
b) una diagonale d di una faccia ($d = 2\sqrt{2}$);
c) una diagonale e del cubo stesso ($e = 2\sqrt{3}$).

[272] **235.** Calcolare l'area della superficie di un tetraedro regolare di dm. 4 di spigolo (cfr. n. 198).

236. Qual'è l'area della superficie laterale di una piramide retta a base triangolare equilatera, in cui lo spigolo di base sia di m. 8 e lo spigolo laterale di m. 10?

237. Qual'è l'area della superficie totale di un tetraedro regolare avente lo spigolo di cm. 4?

238. In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base è di m. 5 e l'apotema è di m. 8: qual'è l'area totale?

239. Una tenda da campo ha forma di piramide retta a base quadrata, di cui il lato di base è di m. 2,75 e l'altezza di ciascuna faccia è di m. 3,50. Di quanti m.^{2} è la superficie della tenda?

240. Una piramide retta a base esagonale regolare ha l'apotema di dm. 26 e lo spigolo di base di cm. 48. Si calcolino le aree della superficie laterale e della superficie totale.

241. Una piramide retta a base esagonale regolare ha lo spigolo laterale di dm. 65 e lo spigolo della base di dm. 39. Si calcoli l'altezza e l'area laterale della piramide.

242. Un tronco di piramide retta a base quadrata è alto m. 4 e ha gli spigoli delle due basi rispettivamente di m. 3 e m. 5. Qual'è la lunghezza degli spigoli laterali del tronco e dell'altezza delle facce laterali?

Tabella delle aree delle superficie dei poliedri regolari di spigolo uguale a m. 1

Poliedro	Superficie
Tetraedro regolare .	m.^{2} 1,7320...
Cubo	» 6,0000...
Ottaedro regolare . .	» 3,4141...
Dodecaedro regolare	» 20,6457...
Icosaedro regolare .	» 8,6602...

Analogamente a quanto si disse in Geometria piana (pag. 110) sull'area dei poligoni regolari, l'area (in m.^{2}) di un poliedro regolare di spigolo l (dato in m.) si ottiene moltiplicando per il quadrato l^2 di l l'area del poliedro regolare omonimo di spigolo uguale ad 1.

243. Calcolare l'area della superficie di un ottaedro regolare di m. 1 di spigolo.

244. Calcolare l'area della superficie di un dodecaedro regolare di m. 3,2 di spigolo.

245. Calcolare l'area della superficie di un icosaedro regolare di m. 1,5 di spigolo.

246. In quali rapporti stanno gli spigoli di un ottaedro e di un icosaedro regolari aventi ugual superficie?

[280] **247.** Quanto pesa 1 cm.^{3} di mercurio se il peso specifico del mercurio è di 13,59?

248. Quanto pesa un m.^{3} d'aria, se il suo peso specifico è di $\frac{1}{773}$?

249. Quante tonnellate pesa una nave che sposta 8000 m.^{3} d'acqua?

250. Un pallone, pesante kg. 300, ha la capacità di m.^{3} 1000. Quando esso sia gonfiato con un gas il cui peso specifico sia uguale alla metà di quello dell'aria al livello del mare, quale forza ascensionale avrà appunto a codesto livello?

251. Quanti ettolitri contiene 1 m.^{3}?

[283] **252.** Quanti litri di petrolio contiene una delle solite latte, che hanno come base un quadrato di cm. 24 di lato e sono alte cm. 35?

253. Calcolare il volume di una cassa avente le dimensioni di

$$\text{m. } 1{,}10 \times \text{cm. } 70 \times \text{cm. } 60.$$

254. Calcolare la capacità della medesima cassa, sapendo che lo spessore delle pareti e del coperchio è di cm. 2.

255. Un'aula scolastica lunga m. 10, larga m. 5 e alta cm. 350 sarà sufficiente per 50 scolari, se l'igiene richiede per ogni scolaro m.^{3} 2,3 d'aria?

256. Si vuol costruire un muro lungo m. 16,38, alto

m. 2,40 e avente lo spessore di cm. 24. Quanti mattoni occorrono, tenuto conto che il mattone usuale ha le dimensioni di

$$\text{cm. } 28 \times \text{cm. } 14 \times \text{cm. } 6?$$

257. Con 100 dm.^{3} di ferro si deve costruire una sbarra a sezione quadrata di cm. 5 di lato. Quanto sarà lunga la sbarra?

258. Un decimetro cubo di legno di faggio pesa g. 852. Calcolare il peso di una tavola dello stesso legno avente le dimensioni di

$$\text{m. } 4{,}5 \times \text{dm. } 3{,}7 \times \text{cm. } 6{,}5.$$

259. Un pilastro alto m. 3,5 ha per base un quadrato di cm. 35. Qual'è il suo volume?

260. Quanti m.^{3} di terra si devono asportare per scavare una cantina lunga m. 7, larga m. 4,50 e alta m. 2,60?

261. Quanto pesa un cubo di ferro di cm. 8 di spigolo se 1 cm.^{3} di ferro pesa g. 7,8? [285]

262. Quanto pesa un cubo di arenaria di m. 0,80 di spigolo se un cm.^{3} di arenaria pesa g. 2,4?

263. Quanto pesa un dado massiccio di avorio di cm. 4 di spigolo? (Peso specifico dell'avorio 1,9).

264. Calcolare il volume del cubo, la cui superficie sia uguale a quella della superficie di un tetraedro regolare di dm. 3,4 di spigolo.

265. Calcolare la lunghezza dello spigolo di un cubo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo avente le dimensioni di

$$\text{m. } 140 \times \text{m. } 25 \times \text{m. } 26.$$

266. Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero di lato l e d'altezza h. Se ne determinino la superficie totale e il volume. (Esempio: $l = 2$, $h = \sqrt{3}$). [290]

267. L'area della superficie laterale di un prisma retto a base triangolare equilatera è di m.^{2} 3,41; posto che il lato della base è di dm. 13 si calcoli il volume del prisma.

268. Un prisma retto a base esagonale regolare ha il volume di dm.^{3} 975 e l'altezza di cm. 23. Calcolare il lato della base.

[294] 269. Qual'è il volume di una piramide triangolare alta m. 2,55, in cui il triangolo di base ha un lato di m. 0,75 e l'altezza relativa di m. 0,80?

270. Qual'è il volume di una piramide retta a base triangolare equilatera, alta m. 5,4 e avente lo spigolo di base di m. 8?

271. Qual'è il volume di una piramide alta m. 4, la cui base è un trapezio avente le basi di m. 3,72 e m. 5,20 e l'altezza di m. 2,13?

272. La grande piramide di Cheope, in Egitto, ha per base un quadrato di m. 230 di lato. Le facce laterali sono triangoli equilateri. Qual'è il volume?

273. Calcolare il volume di un tetraedro regolare di cm. 4 di spigolo.

274. L'apotema di una piramide retta a base esagonale regolare è di cm. 35 e il lato della base è di cm. 21. Si calcoli il volume della piramide.

[297] 275. Un tronco di piramide ha per base maggiore un triangolo rettangolo, i cui cateti sono di m. 12 e m. 16: il lato della base minore, corrispondente al primo di codesti cateti è di m. 8 e l'altezza è di m. 2,75. Si calcoli il volume del tronco.

276. Le basi di un tronco di piramide retta a base quadrata hanno rispettivamente dm. 9 e dm. 4 di lato e l'altezza del tronco è di dm. 15. Qual'è il volume?

277. Un tronco di piramide retta a base regolare ha per volume 1 dm.^{3} e per altezza 15 cm. Una delle basi è un quadrato di cm. 6 di lato. Calcolare il lato dell'altra base.

278. Si scava una fossa a forma di tronco di piramide retta a base quadrata, arrovesciata. Il lato dell'apertura è di metri 2,3 e quella del fondo è di m. 1,4 e il volume della terra scavata è di m.^{3} 36,4. Qual'è la profondità della fossa?

279. Calcolare il peso di un blocco di granito avente la forma di un tronco di piramide, avente le basi di m.^{2} 3,55 e m.^{2} 0,78 e l'altezza di m. 2,80. La densità del granito è 2,780.

280. Un obelisco di granito ha la forma di un tronco di piramide retta a base quadrata, sormontato da una piccola piramide. La base inferiore ha m. 2,42 di lato, la superiore m. 1,50; l'altezza del tronco è di m. 21,60 e quella della

piramide è di m. 1,20. Quanto pesa l'obelisco, se la densità del granito è 2,78?

281. Il fumaiolo in muratura di una fornace ha forma di tronco di piramide retta a base quadrata. Le due basi hanno esternamente il lato di m. 1,40 e m. 0,60 rispettivamente, e internamente i lati di m. 0,44 e m. 0,38. Calcolare il volume della muratura, tenendo conto del fatto che l'altezza del camino è di m. 12,50.

Tabella dei volumi dei poliedri regolari di spigolo uguale a m. 1

Poliedro	Volume
Tetraedro regolare .	$m.^3$ 0,1178...
Cubo.	» 1,0000...
Ottaedro regolare . .	» 0,4714...
Dodecaedro regolare	» 7,6631...
Icosaedro regolare .	» 2,1816...

Per avere il volume di un poliedro regolare di spigolo l si moltiplica per l^3 il volume del poliedro regolare omonimo di spigolo 1.

Si avverta che se la lunghezza l del lato si prende in *metri* il volume risulta in m^3.

282. Calcolare il volume di un tetraedro regolare di cm. 7,5 di spigolo.

283. Calcolare il volume di un ottaedro regolare di cm. 3,2 di spigolo.

284. Calcolare il volume di un ottaedro regolare di cm. 7,1 di spigolo.

285. Calcolare il volume di un dodecaedro regolare di dm. 5,2 di spigolo.

286. Quale spigolo deve avere un tetraedro regolare, affinchè il suo volume sia di 1 $dm.^3$?

287. In quale rapporto stanno gli spigoli di un tetraedro regolare e di un cubo aventi ugual volume?

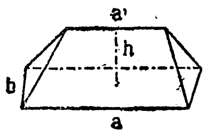
288. In quale rapporto stanno i volumi di un cubo e di un icosaedro regolare aventi ugual superficie?

289. In quale rapporto stanno le superficie di un ottaedro e di un dodecaedro regolari aventi ugual volume?

Misura del volume dei mucchi di ghiaia.

Due sono le forme che più solitamente si danno ai mucchi di ghiaia.

a) Il *mucchio triangolare* (tronco di prisma triangolare) ha come base un rettangolo di cui indichiamo con a, b, le dimensioni, ed ha quattro facce laterali, di cui due triangolari e due trapezoidali.



Se a' è la lunghezza dello spigolo superiore e h è la distanza di questo dal piano di base *(altezza del mucchio)* il volume è dato da

$$V = \frac{hb}{6}(2a + a').$$

b) Il cosidetto *mucchio piramidale* è limitato in basso e in alto da due rettangoli di dimensioni a, b e a', b' e lateralmente da quattro trapezi (tronco di una piramide a base rettangolare e avente il vertice sulla perpendicolare alla base nel suo centro). Se h è l'altezza del mucchio il volume è dato da

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a') + \frac{b'h}{6}(2a' + a).$$

290. Calcolare il volume di un mucchio triangolare di ghiaia, in cui la base ha le dimensioni di m. 2 e m. 0,80, lo spigolo superiore è di m. 1,20 e l'altezza di m. 0,45.

291. Calcolare il volume di un mucchio piramidale di ghiaia in cui la base e la faccia superiore hanno le dimensioni di m. 4,50 $\times$ m. 3,20 e di m. 3,90 $\times$ m. 2,70 e l'altezza è di cm. 40.

292. Qual'è la superficie laterale di un cilindro di m. 4 [29
di diametro e di m. 3,75 di altezza?

293. L'area della base di un cilindro è di m.^{2} 12,56. Qual'è la superficie laterale del cilindro se la sua altezza è uguale ai $^3/_2$ del raggio di base?

294. Qual'è la superficie totale di un cilindro in cui il raggio è di m. 0,35 e l'altezza è doppia del diametro della base?

295. Un rettangolo ha le dimensioni di m. 2 e m. 3. In quale rapporto stanno fra loro le superficie laterali dei due cilindri circolari retti generati dal rettangolo, quando ruota intorno all'uno o all'altro di due suoi lati consecutivi?

296. Le aree delle superficie laterali dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono uguali.

297. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie laterale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

298. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie totale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

299. L'altezza di un cilindro circolare retto è di m. 4 e l'area del rettangolo, che si ottiene segando il cilindro con un piano passante per l'asse è di m.^{2} 26,45. Si calcolino il raggio e l'area della superficie laterale del cilindro.

300. Calcolare l'altezza di un cilindro circolare retto il [30
cui raggio è di m. 0,5 e la superficie laterale di m.^{2} 13,27.

301. Calcolare l'altezza e il raggio di un cilindro circolare retto, di cui la superficie totale è di m.^{2} 0,758 e la superficie laterale è uguale ai $^3/_2$ della base.

302. Calcolare il volume di un cilindro circolare retto [30
alto cm. 9,3 e avente il raggio di cm. 2,5.

303. Qual'è il volume di un cilindro, in cui la circonferenza di base è di m. 3,08 e l'altezza è di m. 1,50?

304. In un pozzo di m. 0,90 di diametro vi è acqua fino a m. 2,50 dal fondo. Quanti litri di acqua contiene il pozzo?

Un pozzo, compreso il rivestimento in muratura, ha m. 1,86 di diametro e m. 12 di profondità. Qual'è il volume della terra che si è dovuto scavare per costruire il pozzo?

306. In un vaso cilindrico di m. 0,8 di diametro, contenente acqua, si getta una pietra. Qual'è il volume della pietra, se dopo l'immersione, il livello dell'acqua si innalza di m. 0,483?

307. Da un serbatoio cilindrico, avente m. 8,8 di diametro, sgorgano 2 litri d'acqua al secondo. Di quanto si abbassa il livello dell'acqua in tre quarti d'ora?

308. In un pozzo la circonferenza esterna del rivestimento in muratura è di m. 5, la circonferenza interna è di m. 3 e la profondità è di m. 15. Quanto costa il lavoro di muratura, calcolato a L. 18 il metro cubo?

309. Qual'è il peso di un tubo di piombo lungo m. 2,50, avente il diametro interno di m. 0,36 e lo spessore di m. 0,008? La densità del piombo è di 11,4.

310. Qual'è la pressione in kg. esercitata sul fondo di una cisterna cilindrica di m. 5,75 di diametro dall'acqua, che ha l'altezza di m. 3,4?

311. Si è scavato un pozzo profondo m. 9 e avente il diametro interno di m. 0,90. Quale sarà la cubatura totale del muro di rivestimento, posto che lo spessore di questo sia di cm. 30?

312. Un tubo barometrico ha un diametro interno di mm. 11 e il mercurio vi raggiunge un'altezza di cm. 76. Quanto pesa il mercurio della colonna barometrica se la densità del mercurio è 13,568? Qual'è la pressione atmosferica per $cm.^2$?

313. I volumi dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono inversamente proporzionali ai lati fissi.

314. Il tubo di una conduttura di acqua ha una sezione di 3 $m.^2$ e l'acqua vi scorre colla velocità di m. 1 al secondo. Quanti litri di acqua passano pel tubo in un'ora?

315. Quale sezione ha un tubo per il quale scorrono 300 litri di acqua in un'ora alla velocità di m. 0,6 al secondo?

316. Quale velocità deve avere l'acqua in un tubo cilindrico di cm. 4 di diametro, se in un'ora debbono passare $m.^3$ 18?

317. In quanti secondi passano 100 litri di acqua alla veocità di m. 0,9 al secondo per un tubo cilindri co di cm. 2 di diametro?

318. La densità del vapor d'acqua è uguale ai $^5/_8$ di quella dell'aria e un litro d'aria pesa gr. 1,293. Quale sarà il peso del vapore contenuto nel cilindro di una macchina, avente m. 0,50 di diametro e m. 0,80 di lnnghezza?

319. Il vapor d'acqua a 100° e alla pressione di una atmosfera occupa un volume 1700 volte maggiore dell'acqua a 0°, che l'ha generato. Quant'acqua a 0° occorre per riempire di vapore a 100° e alla pressione di una atmosfera un cilindro di m. 0,52 di lunghezza su m. 0,52 di diametro?

320. Quanta acqua solleva a ciascun colpo di stantuffo una pompa, in cui il diametro interno del corpo di pompa è di m. 0,16 e l'altezza al di sotto dello stantuffo è di m. 0,46?

321. La ruota di ghisa di un volano ha forma di un cilindro cavo, i cui raggi sono di m. 1,8 e m. 2 e l'altezza è di cm. 30. Quanto pesa codesta ruota se il peso specifico della ghisa è di 7,5?

322. Qual'è la superficie della base di un cilindro circolare retto, in cui il volume è di $m.^3$ 3,60 e l'altezza di m. 1,50? [302]

323. In un recipiente cilindrico di m. 0,40 di diametro interno si versano kg. 4,04481 di latte, la cui densità è 1,03. A quale altezza giungerà il liquido?

324. Una botte cilindrica per inaffiare le strade contiene 1800 litri e ha un diametro di 90 cm. Quanto è lunga la botte?

325. Calcolare il raggio interno di un tubo di vetro cilindrico, che pesa 90 gr. quando è vuoto e 200 gr. quando vi si introduce una colonna di mercurio di 9 cm., posto che la densità del mercurio è 13,568.

326. Un pluviometro cilindrico ha un diametro di cm. 24. Dopo una pioggia l'acqua di esso, defluendo in un vaso cilindrico di cm. 3 di diametro vi raggiunge l'altezza di mm. 166. Che altezza avrebbe raggiunto codesta acqua rimanendo nel pluviometro? Quanti ettolitri di acqua sono caduti per chilometro quadrato?

327. Calcolare le dimensioni dei litri per misurare i grani e i liquidi, sapendo che questi due recipienti sono entrambi cilindrici, e che l'altezza nel primo è uguale al diametro della base, nel secondo ne è doppia.

[303] **328.** Dato un cono circolare retto, a quale distanza dalla base dovremo segare il cono con un piano perpendicolare all'asse per ottenere, come sezione, una circonferenza, la cui lunghezza sia $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ di quella della circonferenza di base?

329. La superficie laterale di una piramide circoscritta ad un cono retto è equivalente al triangolo che ha per base il perimetro della base della piramide e per l'altezza l'apotema del cono.

330. Dato un cono circolare retto, a quale distanza dalla base dovremo segare il cono con un piano perpendicolare all'asse per ottenere, come sezione, un cerchio la cui area sia $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{9}$ o $\frac{1}{16}$ dell'area della base. [Si ricordi il n. 206].

[304] **331.** Il lato di un cono circolare retto è quadruplo del raggio di base e l'altezza è m. 9. Si calcoli la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio, che si ottengono segando il cono con un piano perpendicolare all'asse, condotto a $\frac{1}{5}$ dell'altezza partendo dal vertice.

332. Qual'è il lato del cono avente per altezza m. 7 e per raggio della base m. 3?

333. Qual'è l'altezza del cono avente il lato di m. 6 e il raggio di base di m. 5?

[305] **334.** Calcolare l'area della superficie totale di un cono circolare retto, la cui altezza è di dm. 8 e il raggio di base di dm. 3,5.

335. Qual'è la superficie laterale di un cono retto, che ha m. 3 di diametro e m. 5 di lato?

336. Qual'è la superficie laterale di un cono circolare retto che ha m. 9 di raggio e m. 12 di altezza?

337. Qual'è la superficie totale di un cono circolare retto, in cui il lato è di m. 3,75 e il raggio di base è di m. 1,89?

338. Qual'è la superficie totale di un cono, in cui l'altezza è di m. 4 e il lato di m. 5?

339. Un cono circolare retto, alto m. 12,6, ha la circonferenza di base lunga m. 3,49. Si calcolino il lato e la superficie totale del cono.

340. Qual'è la superficie totale di un cono, il cui lato è di m. 4,50 e la circonferenza di base è di m. 6,25?

341. Quanto pesa il tetto in lamiera di zinco di una torricella, che finisce con un cono di m. 2,70 di diametro e di m. 3 di lato, supposto che la lamiera abbia lo spessore di un millimetro e ricordando che la densità dello zinco è 6,86?

342. Calcolare l'area della superficie del solido generato da un triangolo equilatero che ruota intorno ad un suo lato, la cui lunghezza è di m. 0,36.

343. Le superficie laterali e i volumi dei coni generati dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ai cateti sono inversamente proporzionali ai cateti fissi.

344. Un cono equilatero (cioè tale che le sue sezioni per l'asse sono triangoli equilateri) ha un'altezza *h*. Se ne determini prima la superficie laterale, poi la superficie totale.

345. Qual'è il lato di un cono avente la superficie laterale di m.^{2} 30,8 e il raggio di base di m. 2,109? **[306]**

346. Qual'è la circonferenza della base di un cono, in cui la superficie laterale è di m.^{2} 28 e il lato di m. 7?

347. Qual'è il volume di un cono in cui l'altezza è di m. 5 e il raggio della base di m. 2? **[307]**

348. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 2,5 e il raggio della base di m. 1,5?

349. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 4,5 e l'altezza è di m. 3,6?

350. In quale rapporto stanno fra loro i volumi di due coni di uguale altezza, le cui basi hanno rispettivamente i diametri di m. 0,56 e m. 1,12?

351. Qual'è il rapporto dei volumi di un cilindro e di un cono, aventi base ed altezza uguali?

352. Quanto costa un pan di zucchero, avente il diametro di base di m. 0,25 e l'altezza di m. 0,50, se il prezzo dello zucchero è di L. 1,60 al kg. e la sua densità è di L. 1,20?

353. Una bica di fieno è alta m. 6; la sua parte inferiore è cilindrica ed ha m. 3,80 di altezza e m. 5 di diametro. La parte superiore è conica. Qual'è il volume della bica?

354. Una bica di fieno, di forma conica, misura alla base m. 44 di circuito ed è alta m. 15. Quanti quintali pesa se 1 m.^{3} di fieno pesa due quintali?

355. Un vaso conico, alto cm. 18 e avente il raggio di base di cm. 24 è pieno d'acqua, e quest'acqua si versa in un vaso cilindrico di cm. 10 di diametro. A che altezza giungerà l'acqua?

356. Qual'è il volume di un cono equilatero (cfr. eserc. 344), di cui sia a l'apotema?

357. Una lamina quadrata di latta avente il lato di cm. 18, si taglia lungo l'arco di circonferenza avente il centro in un vertice e il raggio uguale al lato della lamina; col settore, che così si ottiene, si costruisce un cono. Qual'è l'altezza di questo e quale il suo volume?

[308] **358.** Qual'è l'altezza di un cono, in cui il volume è di m.^{3} 4 e la base è di m.^{2} 3,60?

359. Qual'è l'altezza di un cono in cui il volume è di m.^{3} 3,077 e il raggio di base di m. 0,35?

360. Qual'è l'altezza di un cono in cui il volume è di m.^{2} 0,18865 e la circonferenza di base è di m. 1,54?

361. Qual'è il raggio della base di un cono, il cui volume è di m.^{3} 20,944 e l'altezza è di m. 5?

362. Qual'è il diametro della base di un cono di stagno alto m. 0,25 e pesante gr. 19,114? La densità dello stagno è 7,03.

[310] **363.** L'altezza di un tronco di cono è di m. 15 e i raggi delle basi sono di m. 13 e di m. 33. Si calcoli il lato del tronco.

364. Se in un tronco di cono circolare retto i raggi delle basi sono r_1, r_2 ($r_2 > r_1$) ed l è il lato, l'altezza h è data da

$$h = \sqrt{l^2 - (r_2 - r_1)^2}.$$

365. Qual'è la superficie laterale di un tronco di cono avente il lato di m. 8 e i raggi delle due basi di m. 2,1 e m. 2,08?

366. Qual'è la superficie totale di un tronco di cono avente l'altezza di m. 0,21 e i diametri delle basi di m. 1,19 e m. 0,91?

367. In un tronco di cono circolare retto il lato è di dm. 9,5, l'altezza è di dm. 6,8 e il raggio della base minore è di cm. 8. Si calcoli l'area della superficie totale del tronco.

368. Le basi di un tronco di cono circolare retto sono di dm.^{2} 42 e dm.^{2} 86; l'apotema del tronco è di dm. 15. Si calcolino l'altezza del tronco e la superficie laterale.

369. Un fumaiolo tronco conico in muratura è alto m. 22; i raggi interno ed esterno della base sono rispettivamente di m. 1 e m. 1,20; quelli dell'apertura superiore sono di m. 0,30 e m. 0,45 rispettivamente. Calcolare la superficie interna e la esterna della muratura.

370. Il tetto di una torre rotonda è formato anzitutto da un tronco di cono, il cui raggio della base inferiore è di m. 2,5, e la cui altezza è di m. 1, mentre poi l'apotema forma col raggio della base un angolo uguale a mezzo retto: o al disopra del tronco di cono appoggia un cono alto m. 5. Qual'è la superficie del tetto?

371. Qual'è il raggio della base superiore di un tronco di cono, in cui la superficie laterale è di m.^{2} 24,5, il lato è di m. 1,95 e il raggio della base inferiore è di m. 1,4?

372. Qual'è il volume di un tronco di cono, in cui le due basi hanno l'area rispettivamente di m.^{2} 2,25 e m.^{2} 1,41 e l'altezza è di m. 0,90?

373. Qual'è il volume di un tronco di cono, alto m. 2,1, e avente i raggi delle due basi di m. 0,63 e m. 0,42?

374. Calcolare in ettolitri la capacità di un tino alto m. 1,75 e in cui i diametri (interni) del fondo e della bocca sono rispettivamente di m. 1,90 e di m. 1,15.

375. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e l'altezza è doppia della media geometrica di due raggi. Calcolare il volume del tronco di cono.

376. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e il lato è uguale alla somma dei raggi. Qual'è il volume del tronco di cono?

877. Calcolare il volume del tronco di cono circolare retto, che ha il lato di m. 3,75 e l'altezza di m. 2,5, sapendo che il lato del cono che si è tolto per ottenere il tronco è di m. 1,50.

878. Qual'è l'altezza di un tronco di cono di m.^{3} 84, in cui le due basi sono rispettivamente di m.^{2} 3 e m.^{2} 12?

879. Un recipiente a forma di tronco di cono deve avere il diametro inferiore di m. 0,24 e quello superiore di m. 0,20 e deve avere le capacità di litri 12. Quale deve essere la sua profondità?

[314] **880.** Qual'è il volume del cubo iscritto in una sfera di m.^{3} 0,8 di volume?

[319] **881.** Una sfera ha m. 3,08 di raggio: si domanda l'area di un cerchio massimo e quella della sfera.

882. Calcolare il raggio di un cerchio, la cui area sia uguale a quella della superficie di una sfera di raggio di m. 3,6.

883. Qual'è la misura in miglia quadrate della superficie della Terra, tenuto conto, che il suo equatore è lungo 5400 miglia geografiche.

884. Calcolare l'area della superficie interna ed esterna di una sfera cava avente lo spessore di cm. 3,5 e avente il diametro esterno di m. 1,05.

885. Una caldaia di forma cilindrica finisce a ciascuna delle sue estremità con un emisfero di cm. 40 di raggio. Il cilindro, avente lo stesso raggio, ha una lunghezza doppia del diametro. Qual'è l'area della superficie esterna della caldaia?

886. Posto che la pressione dell'aria su ciascun cm.^{2} è di gr. 1,026, qual'è la forza (calcolata in kg.) necessaria per separare due emisferi di Magdeburgo di cm. 6 di raggio?

887. L'area di un cerchio minore di una sfera, la cui distanza dal centro è d, è data da $2\pi a^2$: qual'è la superficie della sfera?

888. Calcolare l'area della superficie della sfera che passa per i vertici di un cubo la cui superficie totale è di dm.^{2} 53.

889. Calcolare il lato di un cilindro circolare retto equilatero (cioè avente il lato uguale al diametro della base) la cui superficie laterale è uguale a quella di una sfera di m. 0,57 di raggio.

390. Calcolare la differenza fra l'area della superficie totale del cilindro circolare retto equilatero (cfr. es. prec.) circonscritto ad una sfera di dm. 4 di raggio e quella della superficie della sfera.

391. Come stanno fra loro la superficie di una sfera, di un cilindro e di un cono, tali che il cilindro e il cono abbiano come altezza il diametro della sfera e come raggio delle basi il raggio della sfera.

392. Qual'è lo spessore di una sfera cava, le cui superficie interna ed esterna hanno l'area di $m.^2$ 3 e $m.^2$ 3,12 rispettivamente?

393. Qual'è il volume di una sfera di m. 0,84 di raggio? [321]

394. Qual'è il peso di una palla da bigliardo di avorio avente il diametro di cm. 8, se la densità dell'avorio è di 1,9?

395. Qualè il volume di una sfera la cui superficie ha un'area di $m.^2$ 55,44?

396. Qual'è il volume di una sfera in cui la circonferenza massima è lunga m. 4,62?

397. Qual'è il volume di una sfera, in cui l'area del cerchio massimo è di $m.^2$ 6,16?

398. In quale rapporto stanno fra loro il volume della sfera di raggio r e quello del cilindro avente l'altezza $2r$ e il diametro $2r$? In quale rapporto stanno la superficie della sfera e la superficie totale del cilindro?

399. La densità media della Terra è di 5,44. Qual'è il peso della Terra in milioni di tonnellate? (Diametro terrestre medio = km. 12735).

400. Qual'è il volume della crosta terrestre, il cui spessore si considera uguale a $\frac{1}{100}$ del raggio?

401. Qual'è il volume della strato atmosferico che avviluppa la Terra, e che si calcola sia uguale a $\frac{1}{60}$ del raggio terrestre?

402. Se indichiamo con d il diametro della Terra, il Sole e la Luna, considerati come sfere, hanno diametri che sono uguali a $108d$, $0{,}27d$ e la distanza dei centri della Luna e della Terra è uguale a $60d$. Si domanda:

a) Quante sfere uguali alla Terra si potrebbero formare col Sole?

b) Quante sfere si potrebbero costruire col Sole, le quali fossero uguali alla sfera tangente esternamente tanto alla Terra quanto alla Luna?

403. Qual'è il peso di una palla di legno di m. 0,2 di diametro, per la quale si è verificato che, quando si getta nell'acqua, il livello del liquido segna sulla palla una circonferenza massima?

404. Un cubo ed una sfera hanno entrambi la superficie di $m.^2$ 2,4: qual'è il rapporto dei due volumi?

405. In che rapporto stanno i diametri di due sfere della stessa sostanza, delle quali l'una pesi il doppio dell'altra?

406. Qual'è il raggio di una sfera di $dm.^3$ 173 di volume?

407. Qual'è l'area di una sfera di 1 $m.^3$ di volume?

408. Qual'è l'area di uno dei cerchi massimi di una sfera di $cm.^3$ 14 di volume?

409. Si determini il calibro di un cannone, i cui proiettili sferici di ferro pesano 6 chilogrammi. (Si ricordi che il peso specifico del ferro è 7,25).

410. In un vaso cilindrico di cm. 68 di diametro, riempito in parte di acqua, si buttano 80 palline uguali. Il livello dell'acqua si innalza di cm. 20. Qual'è il diametro di ciascuna pallina?

411. Si fondono tre sfere metalliche aventi il diametro di dm. 2, dm. 8, dm. 4 rispettivamente, per costruirne una sfera unica. Quale sarà il diametro di questa?

412. Una sfera cava ha un raggio esterno di cm. 43 e uno spessore di cm. 4. Quale sarà il raggio di una sfera massiccia, avente il medesimo volume?

413. Con $cm.^3$ 125 di metallo si deve costruire una sfera cava, il cui raggio interno sia di cm. 20. Quale sarà la superficie esterna della sfera?

414. Qual'è lo spessore di una bolla di sapone, avente il diametro di cm. 15, ottenuta da una goccia (sferica) di acqua saponata, il cui diametro è di mm. 2?

415. Si è costruita in argento battuto una sfera cava, il cui diametro esterno è doppio dell'interno. Quali sono codesti diametri se il peso della sfera è di kg. $38\,{}^1/_2$? (Si prenda $\pi = \frac{22}{7}$ e si assuma per il peso specifico dell'argento battuto il valore di $10\,{}^1/_2$).

416. Qual'è l'area di una calotta appartenente ad una sfera di m. 2,10 di raggio e avente l'altezza di m. 0,8? [325]

417. Qual'è l'altezza di una calotta di m.^{2} 3 su di una sfera di m. 1 di raggio?

418. La lunghezza della circonferenza della sezione di una sfera in un piano distante dal centro di m. 1,2 è di dm. 5,3. Calcolare l'area della superficie della sfera e della calotta più piccola.

419. Considerando il nostro globo come una sfera di km. 12735 di diametro, calcolare:

1.° l'area della superficie della Terra;

2.° l'area della superficie della Zona torrida che ha km. 5094 di altezza;

3.° l'area della superficie delle Zone giaciali, aventi ciascuna km. 509 di altezza;

4.° l'area delle due Zone temperate.

420. Su di una stessa sfera o su sfere uguali, zone corrispondenti a segmenti sferici di altezze uguali, hanno superficie uguali.

421. Le zone, che due sfere concentriche intercettano sulle sfere passanti pel centro comune di esse, hanno superficie uguali.

422. L'area di una calotta sferica è di m.^{2} 2,85; si domanda l'area della sfera corrispondente, posto che la calotta è alta m. 0,45.

423. Quale altezza si deve dare ad una zona, appartenente ad una sfera di m. 9 di raggio, perchè la sua area sia m.^{2} 169,6464?

424. Su di una sfera di m. 1,3 di raggio, si considera una zona la cui base maggiore è alla distanza di metri 0,50 dal centro. Si determinino, le aree delle due basi, sapendo che l'area della zona è di m.^{2} 12.

[326] **425.** Un settore circolare avente il raggio di m. 0,60 e l'angolo al centro di 30°, ruota intorno a uno dei suoi lati rettilinei. Calcolare la superficie totale del settore sferico che così si ottiene.

426. Una sfera di m. 1 di raggio è divisa in due calotte da un piano che dista dal centro dm. 4. Calcolare il volume dei segmenti sferici corrispondenti alle due calotte.

Def. — Si dice *fuso sferico* ciascuna delle due parti in cui una superficie sferica è divisa da due semicirconferenze massime, limitate dagli estremi di uno stesso diametro. I due semipiani uscenti da codesto diametro e contenenti le due semicirconferenze massime definiscono due diedri (uno convesso e l'altro concavo) che si dicono i *diedri del fuso.*

427. L'area di un fuso sferico si ottiene moltiplicando l'area della superficie sferica per il rapporto dell'ampiezza del diedro corrispondente al fuso a 360°.

Def. — Si dice *spicchio sferico* la parte di solido sferico compreso fra due semipiani uscenti da uno stesso diametro. Lo spicchio è limitato da un fuso e da due semicerchi massimi. Il diedro dei due semipiani si dice *diedro dello spicchio.*

428. Il volume dello spicchio sferico è dato dal prodotto del volume della sfera per il rapporto dell'ampiezza del diedro dello spicchio a 360°.

429. Qual'è il volume di uno spicchio sferico appartenente ad una sfera di dm. 12 di raggio e corrispondente ad un angolo di 51°39′45″?

430. Qual'è il volume di uno spicchio sferico, appartenente ad una sfera di m.^{3} 1 di volume e corrispondente ad un angolo di 25°?

Misura della capacità delle botti.

Le botti hanno forme diverse. Se si vuole accontentarsi di un'approssimazione molto grossolana, la botte si può considerare come uguale alla somma di due tronchi di cono uguali, uniti dalla parte delle basi maggiori.

Ma si hanno formole pratiche più esatte. Indichiamo con D il diametro massimo (corrispondente alla sezione mediana), con d il diametro minimo (corrispondente ai due fondi) e con l la lunghezza della botte (o distanza dei due fondi).

Allora la capacità della botte è data con sufficiente approssimazione dalla formola

$$V = 0{,}7854 \times l \times (d + 0{,}56\ (D - d)\ )^2$$

dove l, d, D vanno misurati in metri e V risulta calcolato in ettolitri.

481. Calcolare la capacità di una botte lunga m. 1,35 e avente i raggi massimo e minimo di cm. 65 e cm. 60.

482. Si ha una botte lunga m. 1,90 e avente i raggi massimo e minimo di m. 0,798 e m. 0,650. Calcolare la capacità, prima riguardando la botte come somma di due tronchi di cono, poi applicando la formola suindicata e confrontare i resultati.

INDICE

III. — Circonferenza e cerchio. Compasso.

IV. — Triangoli e poligoni.

Esercizi sui capitoli I-IV.

(Prima Classe)

V. — Uguaglianza dei triangoli e dei poligoni.

VI. — Parallelogrammi.

VII. — Poligoni regolari.

VIII. — Misura dei poligoni.

IX. — Teorema di Pitagora e sue applicazioni.

X. — Lunghezza della circonferenza e area del cerchio.

Esercizi sui capitoli V-X.
(Seconda Classe)

XI. — Rette e piani nello spazio.

XII. — Angoloidi e poliedri.

XIII. — Misura dei poliedri.

XIV. — Cilindro, Cono e sfera.

Esercizi sui capitoli XI-XIV.

(Terza Classe)