Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo and Amaldi, U.

Nozioni di geometria [ad uso dei ginnasi inferiori]

Zanichelli, Bologna, 1910. (Edizioni successive varie.)

FEDERIGO ENRIQUES e UGO AMALDI

NOZIONI DI GEOMETRIA

AD USO

DEI GINNASI INFERIORI

LABORAVI · FIDENTER

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
FIRENZE - ROMA - MILANO - PISA - R. Bemporad & F.
TORINO - S. Lattes & C. — GENOVA - Edoardo Spiotti
NAPOLI - Fratelli Treves — PALERMO - Alberto Reber

BOLOGNA - TIP. CACCIARI, VII, 1910.

PREFAZIONE

Noi riteniamo che l'insegnamento della Geometria, nel suo primo stadio, debba avere carattere operativo; *e questa veduta cercammo di attuare, pur avendo riguardo alle diverse esigenze dei due ordini di Scuole, tanto nelle* Nozioni di Geometria ad uso delle Scuole complementari, *quanto nel trattato pei Ginnasi inferiori, che ora presentiamo ai colleghi delle Scuole medie.*

Per l'ordine della materia e per la distribuzione di essa fra le tre classi del Ginnasio inferiore, noi, per evidenti ragioni di oppurtunità pratica, ci attenemmo ai vigenti Programmi, che non intendiamo qui certo nè discutere nè giudicare.

Ma, per quanto il Programma rimandi alla fine del terzo anno i rudimenti di disegno geometrico, noi, in accordo con l'accennato criterio fondamentale, introducemmo sin dal principio gli strumenti geometrici, ado-

perati, nelle loro operazioni fondamentali, alla costruzione delle figure, che mano mano si definiscono.

Così nella teoria della misura, destinata alla seconda classe, evitammo l'enunciazione dogmatica delle regole; ma, volta a volta, cercammo di chiarirle e di giustificarle in via induttiva con facili verifiche e con agevoli esperienze, le quali, come altrove notammo, oltre l'efficacia dimostrativa, offrono spesso il non trascurabile vantaggio di costituire un ottimo sussidio mnemonico.

Alla terza classe destinammo anzitutto un capitolo sulle regole di misura (inverse), che implicano estrazioni di radici quadrate, e sulle applicazioni del teorema di PITAGORA, *al quale guidammo gli alunni per via induttiva e sperimentale. E il libro si chiude con le prescritte costruzioni fondamentali del Disegno geometrico, a illustrare le quali noi, trovandoci oramai alla vigilia dello studio razionale della Geometria, credemmo opportuno di svolgere qualche semplice argomentazione di carattere deduttivo.*

Preoccupati dall'esiguità dell'orario, ci proponemmo di indicare un minimo sviluppo di programma, attuabile anche nelle classi meno mature; e questo è rappresentato dalle parti del libro impresse in carattere tipografico ordinario, le quali costituiscono da sole un tutto organico e ben connesso. Per le scolaresche meglio preparate, gli

Insegnanti troveranno, nelle parti in carattere minuto, argomento per qualche utile sviluppo ulteriore.

I tre gruppi di capitoli destinati rispettivamente alle tre classi sono seguiti ciascuno da una numerosa serie di esercizi. Deliberatamente scegliemmo esercizi semplicissimi, e speriamo che gli Insegnanti vorranno apprezzare la cura con cui li raggruppammo e graduammo, contrassegnandoli dell'ultimo numero del trattato cui si riferiscono.

Bologna-Modena, Maggio 1910.

F. Enriques - U. Amaldi

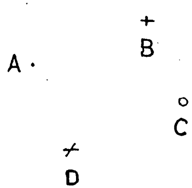
I

SEGMENTI E ANGOLI

Piano, punto, retta.

1. Distendiamo un foglio di carta da disegno su di un tavolo ben spianato e levigato. Sarà questo il **piano** su cui noi disegneremo.

Intorno a noi abbiamo altri *piani:* la lavagna, su cui disegneremo col gessetto, il pavimento della scuola, le pareti. E così ancora, la superficie di uno specchio, la superficie di un lago ecc. servono tutte a farci capire « che cos'è un *piano* ».



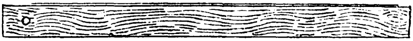
2. Con un lapis, ben acuminato, si possono segnare sul foglio del disegno quanti **punti** si vogliono. Per distinguerli l'uno dall'altro segneremo accanto a ciascuno di essi una lettera maiuscola e li chiameremo « punto A », « punto B », « punto C », ecc.

3. Se pieghiamo su sè stesso il nostro foglio di carta e poi di nuovo lo distendiamo sul tavolo, la traccia della ripiegatura ci dà l'immagine di una **linea retta** o, come diremo per semplicità, di una **retta**.

Così un orlo del cartone di un libro rilegato, un filo sottile ben teso, un raggio di sole che entri da un forellino in una stanza buia servono tutti a farci capire « che cosa è *una retta* ».

4. Per *disegnare una retta* si usa solitamente una

RIGA.

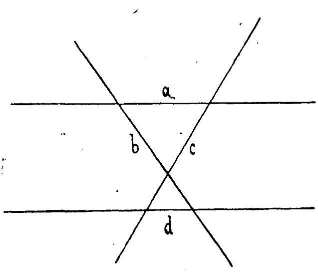


Appoggiata la riga sul foglio si fa scorrere lungo uno dei suoi orli la punta del lapis o della penna o del tiralinee. La traccia che così si ottiene sul foglio sarà più o meno lunga secondo la lunghezza della riga e l'ampiezza del foglio. Ma noi penseremo la retta **illimitata nei due sensi,** cioè indefinitamente proseguita nell'uno e nell'altro senso.

Per poter prolungare la retta quanto occorre penseremo il piano **illimitato.**

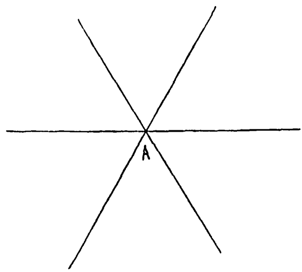
E perciò se il nostro foglio è troppo piccolo per il disegno che vogliamo eseguire, gliene incolleremo accanto un'altro, da quella parte, in cui ci sarà più comodo.

5. Sul nostro piano, usando la riga, possiamo disegnare quante rette vogliamo. Per distinguerle, segneremo accanto a ciascuna una lettera minuscola, e le chiameremo « retta *a* », « retta *b* », « retta *c* »...



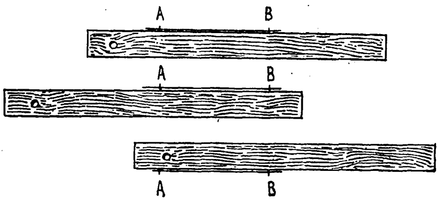
6. Nel piano, per un punto A, possiamo *condurre* quante rette vogliamo.

Ma preso un altro punto B *non possiamo condurre che una sola retta che passi per A e B; cioè due punti determinano una retta.*



Ciò si può verificare osservando che se fra i due punti A e B tendiamo sul foglio due fili, p. es. puntando in A e B due spilli, i due fili si adagiano l' uno sull' altro.

7. La retta che passa per due punti A, B si dice « retta AB ».

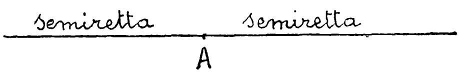


Per comodità si può adagiare la riga sul foglio in vari modi (vedi l' unita figura). Ma se la riga è esatta si deve sempre ottenere la medesima retta. Si ha così un modo per *verificare la riga*.

Semirette e segmenti.

8. Su di una retta possiamo segnare quanti punti vogliamo.

L' unita figura mostra che ogni punto A di una

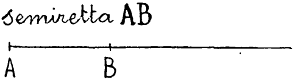


retta la divide in due parti, ciascuna delle quali è *illi-*

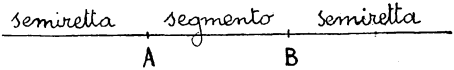
mitata in un sol senso. Queste due parti si chiamano **semirette** o **raggi** di *origine* A.

Le due semirette in cui una retta è divisa da un punto si dicono l'una il *prolungamento* dell'altra.

La semiretta che ha un'origine A e passa per un punto B si dice « semiretta AB ».

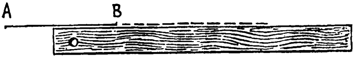


9. Si vede analogamente dall'annessa figura che una retta è divisa da due suoi punti A, B, *in tre parti.*



La parte intermedia si dice « **segmento** AB » (o segmento di *estremi* A e B); e le altre due parti sono due semirette (*prolungamenti del segmento* AB).

Il segmento AB si dice anche *distanza* dei due punti A, B.



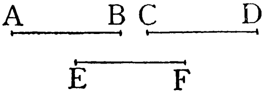
Dato sul foglio un segmento AB, se si vuol *prolungarlo*, p. es. dalla parte di B, si appoggia la riga sul foglio in modo che il suo orlo collimi con una parte di AB.

Confronto di segmenti.

10. *Due segmenti possono essere* **uguali** *o* **disuguali.**

11. *Due segmenti uguali ad uno stesso segmento sono uguali fra loro,* cioè se

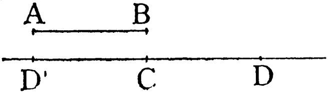
$$AB = EF \text{ e } CD = EF$$



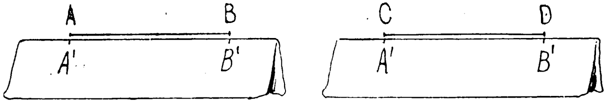
si ha

$$AB = CD.$$

12. *Data una retta e un punto* C *su di essa, si possono determinare sulla retta due segmenti aventi un estremo in* C *e uguali ad un segmento dato* AB.



13. Siano dati due segmenti AB, CD. Per verificare se essi siano *uguali* o *disuguali*, si ripieghi su sè stesso un pezzetto di carta in modo che l'orlo della ripiegatura risulti rettilineo e, appoggiato codesto orlo

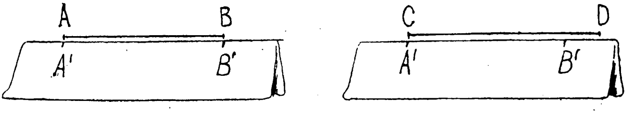


sul segmento AB, si segnino su di esso i due punti A′, B′ che coincidono con A, B rispettivamente.

Dopo ciò si trasporti codesta carta ripiegata, in guisa che il punto A′ vada a coincidere con C e l'orlo A′B′ della ripiegatura si adagi sulla semiretta CD. Se allora il punto B′ va proprio a coincidere con D, concludiamo che i segmenti AB, CD sono uguali; e scriveremo

$$AB = CD \quad , \quad CD = AB.$$

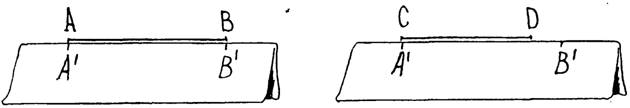
In caso contrario li diremo disuguali. Precisamente se B′ va a cadere fra C e D (cioè in un punto



interno al segmento CD) diremo che AB è *minore* di CD e CD è *maggiore* di AB e scriveremo

$$AB < CD \quad , \quad CD > AB.$$

Se invece B′ va a cadere sul prolungamento di CD (in un punto esterno a CD) diremo che AB è



maggiore di CD e che CD è *minore* di AB e scriveremo

$$AB > CD \quad , \quad CD < AB.$$

14. Nello stesso modo si verificano le affermazioni dei nn. 11, 12.

15. Nota. — Per *confrontare due segmenti* (n. 10) o per *trasportare un segmento da una retta su di un'altra* (n. 12) si adopra, solitamente invece della carta ripiegata, un COMPASSO *(a punte fisse)*.

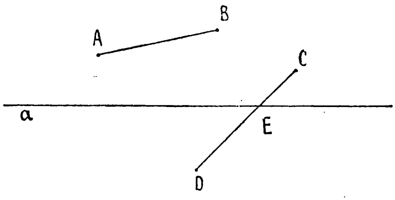
Parti di piano. Angoli.

16. Se sul foglio tracciamo una retta *a* e lo tagliamo lungo di questa, il foglio resta diviso in due parti.

Così il piano, pensato come una superficie illimitata, vien *diviso* da una retta, *a*, tracciata su di esso, in *due parti*.

Codeste due parti si dicono *semipiani*.

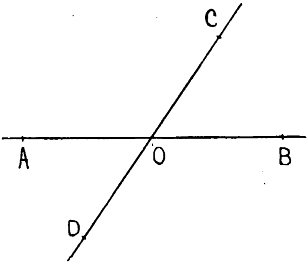
17. Se si è diviso il piano con una retta *a* in due semipiani e si prendono due punti A, B in uno stesso semipiano



il segmento AB giace tutto in quel semipiano. Se invece si prende un punto C in un semipiano e un punto D nell'altro, il segmento CD attraversa, o come si dice, *sega* la a in un punto E.

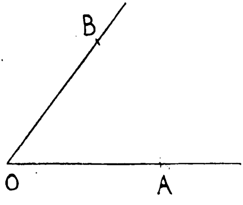
La parte CE di CD giace in un semipiano e la parte ED nell'altro.

18. Se per un punto O del piano conduciamo *due* rette AB, CD, vediamo che il piano vien diviso in *quattro parti.*

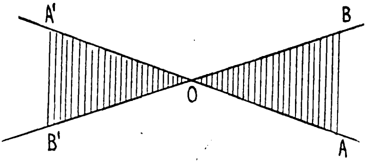


Codeste quattro parti di piano si chiamano **regioni angolari** o semplicemente **angoli.**

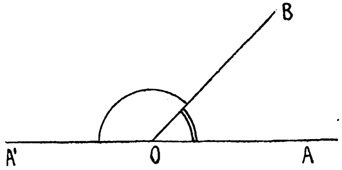
Un *angolo* è determinato da due semirette OA, OB aventi la stessa origine O. L'angolo si designa con $\widehat{AOB}$; il punto O si dice *vertice* e le semirette OA, OB *lati* dell'angolo.



19. Dato un angolo $\widehat{AOB}$ si conducano i prolungamenti OA', OB', dei due lati. Queste due semirette determinano un angolo $\widehat{A'OB'}$, che si dice *opposto al vertice* all'angolo dato $\widehat{AOB}$.

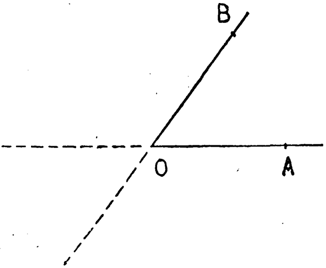


20. Se invece, dato un angolo $\widehat{AOB}$, si conduce il prolungamento di un solo lato, p. es. il prolungamento OA′ di OA, si ottiene un angolo $\widehat{BOA'}$ che si dice *adiacente* di $\widehat{AOB}$.



Angoli concavi e piatti.

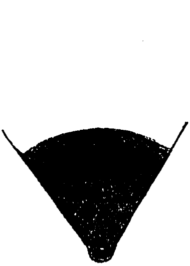
21. Dato un angolo AOB, le due semirette OA, OB dividono il piano in due parti di cui una è l'angolo $\widehat{AOB}$ e l'altra è l'insieme dei due angoli adiacenti ad esso e dell'opposto al vertice. Per brevità, anche questa seconda parte di piano si chiama *angolo*.

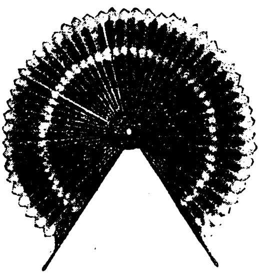


Per distinguerla dalla prima, si dice *angolo concavo* $\widehat{AOB}$, mentre l'altra parte si dice *angolo convesso* $\widehat{AOB}$.

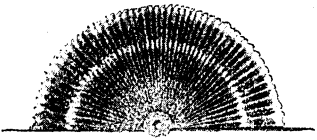
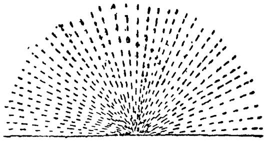
Vediamo sulla figura che i prolungamenti dei lati sono fuori dell'angolo convesso $\widehat{AOB}$ (*esterni*) e sono invece dentro l'angolo concavo $\widehat{AOB}$ (*interni*).

22. Un ventaglio giapponese, secondo che è o quasi chiuso o quasi del tutto aperto, ci dà l'idea di un angolo convesso o concavo.





Se poi l'apriamo a metà, in modo che le due stecche si dispongano in linea retta, otteniamo l'immagine di un angolo,

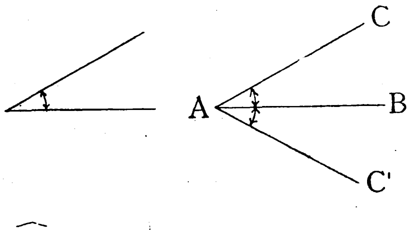
in cui i due lati sono l'uno il prolungamento dell'altro, e che perciò non si può dire nè convesso nè concavo. Un angolo siffatto si dice *piatto*.

23. AVVERTENZA. — D'or innanzi, quando nomineremo un « angolo $\widehat{AOB}$ » senza dire nulla di più, intenderemo parlare dell'angolo $\widehat{AOB}$ convesso.

Confronto di angoli.

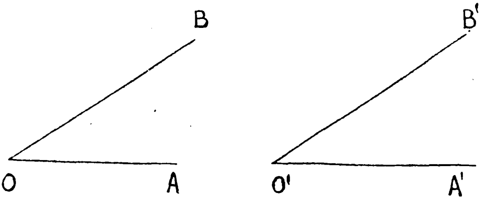
24. *Due angoli* $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ *possono essere* **uguali** o **disuguali.**

25. *Angoli uguali ad uno stesso angolo sono uguali fra loro.*



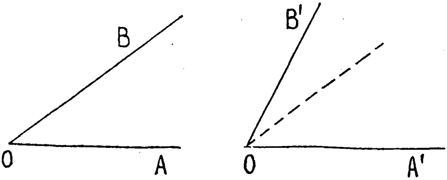
26. *Dato un angolo e fissata una semiretta* AB *si possono condurre per* A *due semirette* AC, AC' *che formino colla* AB *due angoli* $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAC'}$ *uguali all'angolo dato.*

27. Dati due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, per verificare se essi siano *uguali* o *disuguali*, si ritagli uno di essi, p. es. $\widehat{AOB}$, o si ricalchi in lapis su carta trasparente; e poi si trasporti sull'altro angolo $\widehat{A'O'B'}$, facendo coincidere il vertice O con O' e il lato OA con O'A'.



Se il lato OB va a cadere precisamente su O′B′, i due angoli sono *uguali* e scriveremo

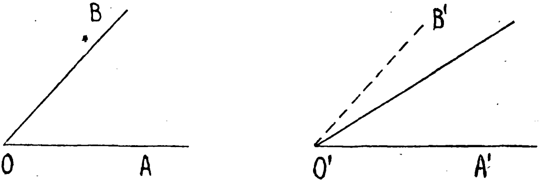
$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} \quad \text{o} \quad \widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}.$$



Se invece il lato OB va a cadere internamente a $\widehat{A'O'B'}$, l'angolo $\widehat{AOB}$ è *minore* di $\widehat{A'O'B'}$, e $\widehat{A'O'B'}$ è *maggiore* di $\widehat{AOB}$, il che si scrive

$$\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'} \quad , \quad \widehat{A'O'B'} > \widehat{AOB}.$$

Se poi infine il lato OB cade esternamente ad

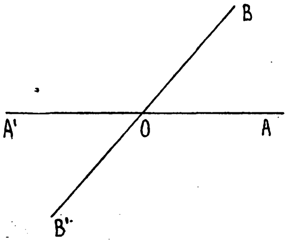


$\widehat{A'O'B'}$, l'angolo $\widehat{AOB}$ è *maggiore* di $\widehat{A'O'B'}$, e $\widehat{A'O'B'}$ è *minore* di $\widehat{AOB}$; ciò si scrive

$$\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B} \quad \text{o} \quad \widehat{A'O'B'} < \widehat{AOB}.$$

28. Nello stesso modo si verificano le affermazioni dei nn. 25, 26.

29. Preso sul foglio un angolo $\widehat{AOB}$, se ne disegni, prolungando i lati, l'opposto al vertice $\widehat{A'OB'}$.



Se si ritagliano i due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$, si verifica che essi possono sovrapporsi esattamente, cioè sono uguali.

Abbiamo dunque che:

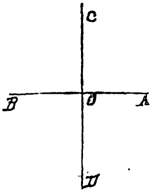
Angoli opposti al vertice sono uguali.

II

POSIZIONI NOTEVOLI DI DUE RETTE. SQUADRA

Rette perpendicolari. Angoli retti, acuti e ottusi.

30. Segnata sul foglio una retta AB e preso su di essa un punto O, si pieghi il foglio in modo da far combaciare le due semirette OA e OB.



Disteso ancora il foglio, la ripiegatura ottenuta dà una retta CD, tale che gli angoli $\widehat{AOC}$, $\widehat{DOA}$ sono uguali ai rispettivi adiacenti $\widehat{COB}$, $\widehat{BOD}$.

Avremo cioè

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB} \quad \text{e} \quad \widehat{BOD} = \widehat{DOA}.$$

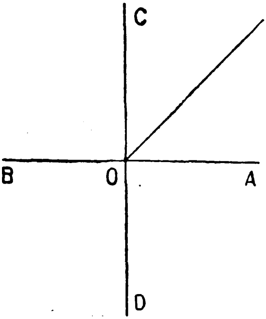
Ma siccome $\widehat{AOC}$ e $\widehat{BOD}$ sono opposti al vertice, anch'essi sono uguali (n. prec.); cosicchè sono uguali fra loro tutti e quattro gli angoli

$$\widehat{AOC},\ \widehat{COB},\ \widehat{BOD},\ \widehat{DOA},$$

in cui il piano è diviso dalle rette AB, CD.

Ciascuno di codesti quattro angoli si dice *retto*; e le due rette AB, CD si dicono *perpendicolari*.

Cioè si dice *retto* ogni angolo che sia uguale ai suoi adiacenti; e si dicono *perpendicolari* due rette, che, segandosi in un punto, dividono il piano in quattro angoli retti.

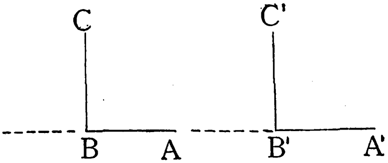


31. Se le due rette AB, CD, segantisi in un punto O, sono perpendicolari, ogni retta passante per O e diversa dalla CD forma colla AB angoli adiacenti disuguali e non è quindi perpendicolare alla AB.

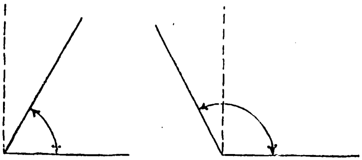
Vediamo così che: *Per un punto* O *di una retta* AB *passa una sola perpendicolare alla* AB.

32. *Tutti gli angoli retti sono uguali.*

Infatti se gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono entrambi retti, si trasporti $\widehat{ABC}$ su $\widehat{A'B'C'}$, in modo che il lato BA coincida col lato B′A′. Allora l'altro lato BC, che è perpendicolare a BA, andrà proprio a coincidere con B′C′, perchè la B′C′ è la sola retta che passi per B e sia perpendicolare alla BA.



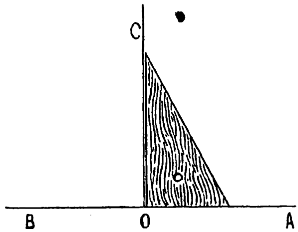
33. Un angolo minore di un angolo retto si dice *acuto*; un angolo maggiore di un retto si dice *ottuso*.



Angolo acuto. Angolo ottuso.

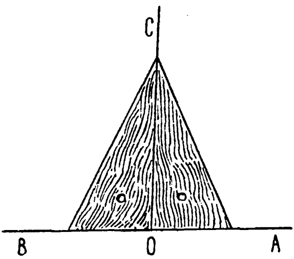
Se due angoli sono adiacenti ma non retti, uno di essi è acuto e l'altro ottuso.

34. Per condurre per un un punto O di una retta AB la perpendicolare alla AB basta, come vedemmo al numero 30, ripiegare il foglio in modo da far combaciare le due semirette OA, OB.



Nel disegno solitamente si adopera la SQUADRA, come indica l'unita figura.

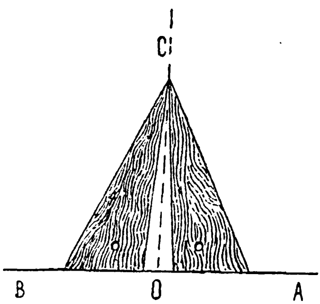
Gli angoli $\widehat{AOC}$ e $\widehat{BOC}$, entrambi retti, sono uguali; perciò se ribaltiamo la squadra sul foglio dall'altra parte della OC, essa deve sovrapporsi esattamente all'angolo $\widehat{BOC}$.

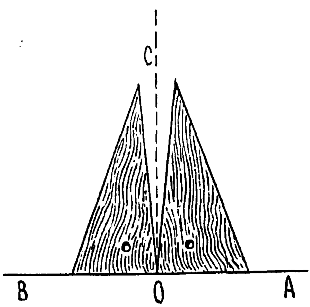


Abbiamo così un modo per *verificare* se la squadra sia esatta.

Quando si sia verificata *una volta* la squadra, si è sicuri che tutte le costruzioni che si eseguiranno con essa riusciranno esatte.

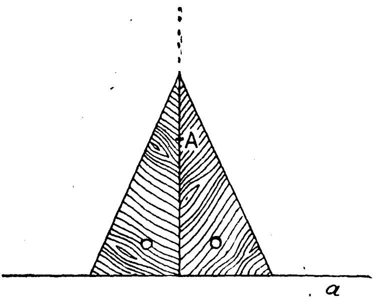
35. Nell'unita figura abbiamo esempio di squadre inesatte o, come si dice, *false*.





36. La squadra si può usare anche per condurre per un punto dato A una retta che sia perpendicolare ad una retta data *a*, non passante per esso.

Basta perciò far scorrere la squadra sul foglio, lungo la retta *a*, in modo che uno spigolo vada a combaciare col punto A.



La traccia di questo ultimo spigolo dà la perpendicolare cercata.

Il segmento di perpendicolare compreso fra A e il suo incontro con la retta *a* (*piede* della perpendicolare) dicesi semplicemente *perpendicolare* da A ad *a* o *distanza* del punto A dalla retta *a*.

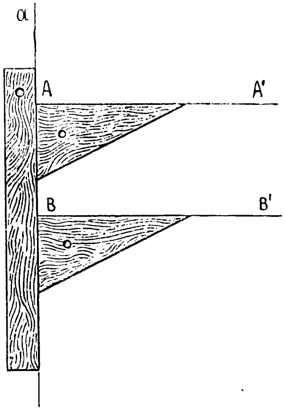
37. *Data una retta* a, *per un punto* A *fuori di essa, passa una sola perpendicolare alla retta* a.

Ciò si verifica come indica l'unita figura; e cioè ribaltando la squadra (supposta esatta) intorno alla perpendicolare ottenuta al n. prec.

Rette parallele.

38. Disegnata con la riga una retta *a*, e, tenuta ferma la riga lungo di essa, conduciamo con la squadra la perpendicolare AA′ alla *a* in un suo punto A.

Se, tenendo sempre ferma la riga, facciamo scorrere lungo di essa la squadra, vediamo che tutti i punti dello spigolo, che prima era lungo la AA′, si allontanano ugualmente dalla AA′; cosicchè la perpen-



dicolare BB′ alla *a* in un punto B diverso da A giace tutta da una stessa parte della retta AA′ e perciò non la può mai incontrare.

Le rette AA′, BB′ si diranno *parallele*.

Cioè due rette del piano si dicono *parallele*, se non hanno nessun punto comune.

39. Da quanto abbiamo visto pocanzi risulta che:

Tutte le perpendicolari ad una retta sono parallele fra loro.

40. Inoltre, ricordando come nel n. 38 abbiamo disegnato la retta BB′ parallela alla AA′, vediamo che tutti i punti della BB′ hanno la stessa distanza dalla AA′.

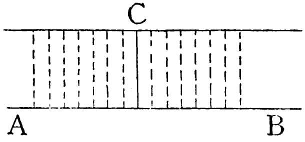
Abbiamo cioè che:

Se una retta è parallela ad un' altra, tutti i punti dell' una hanno ugual distanza dall' altra.

41. *Viceversa tutti i punti, che hanno una distanza data da una retta e giacciono da una parte prefissata di essa si trovano su di una parallela alla retta data.*

42. Date due rette parallele, dicesi *distanza* di esse la distanza di un punto qualsiasi dell' una dall' altra retta.

43. Risulta dai nn. 40, 41 che: *Data una retta AB e un punto C fuori di essa, per C passa una sola retta parallela alla data.*

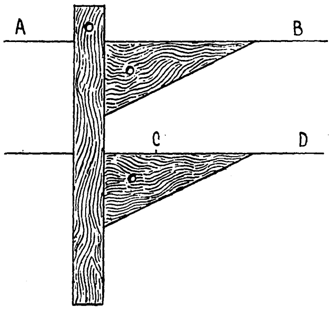


È questa la retta che

contiene tutti i punti che hanno dalla AB la stessa distanza del punto C.

44. Data una retta AB e un punto C fuori di essa, possiamo, colla riga e la squadra, *condurre per* C *la parallela alla* AB.

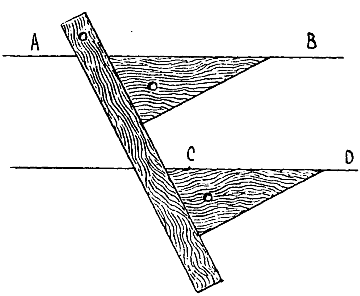
A questo scopo si collochi la squadra sul foglio



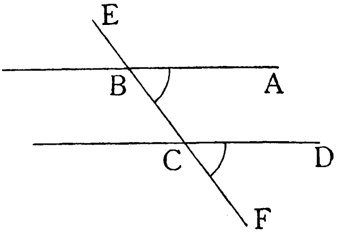
con uno spigolo dell'angolo retto lungo la AB e, fatta combaciare la riga collo spigolo della squadra perpendicolare alla AB, si faccia scorrere la squadra, tenendola a contatto della riga, finchè lo spigolo che prima era sulla AB passi per C.

La CD sarà parallela alla AB.

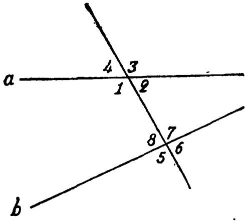
45. La stessa costruzione si può eseguire anche appoggiando sulla retta AB lo spigolo della squadra opposto all'angolo retto (vedi l'unita figura), e si ottiene sempre per C la retta parallela alla AB, *qualunque sia l'ampiezza dell'angolo della squadra, che scorre lungo la riga.*



Risulta di qui che se per due punti B e C di una retta EF si conducono due rette BA, CD tali che gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{FCD}$ siano uguali, le due rette BA, CD sono parallele.



Ora date due rette *a*, *b* segate da una trasversale, fra gli otto angoli che esse formano, gli angoli 2 e 6, si dicono *corrispondenti:* e così pure diconsi corrispondenti 3 e 7, 4 e 8, 1 e 5.



Premessa questa definizione possiamo dire, per l' osservazione fatta or ora, che: *Due rette, le quali formino con una trasversale due angoli corrispondenti uguali, sono parallele.*

III

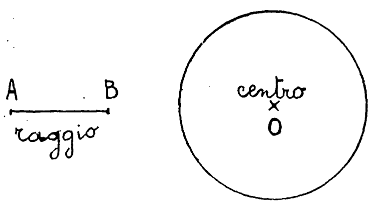
CIRCONFERENZA E CERCHIO. COMPASSO

Definizioni.

46. Puntato sul foglio con uno spillo in un punto O il capo di un filo, fissiamo al filo, ad una certa distanza da O, la punta del lapis.

Se col lapis, tenendo ben teso il filo, giriamo intorno al punto O, fino a tornare alla posizione di partenza, otteniamo sul foglio una **linea chiusa** i cui punti hanno tutti la stessa distanza da O.

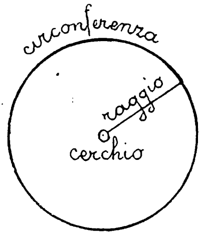
Questa linea si dice una *circonferenza*.



Cioè dati un punto O ed un segmento AB, si dice *circonferenza* di *centro* O e *raggio* AB, la linea dei punti che hanno da O distanza uguale ad AB.

Nel disegno, per descrivere una circonferenza, si usa un COMPASSO, di cui una punta è sostituibile con una matita o con un tiralinee.

47. Come risulta dalla figura, la circonferenza divide il piano in due parti:



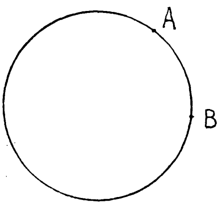
1.° il *cerchio* o regione piana dei punti *(interni)* la cui distanza da O è minore del raggio;

2.° la regione piana dei punti *(esterni)* la cui distanza da O è maggiore del raggio.

48. *Due circonferenze o due cerchi aventi ugual raggio sono uguali,* come si verifica sovrapponendoli.

Diametri e corde. Archi e settori.

49. Segnato un punto A su di una circonferenza, questa, diversamente da quanto accade per la retta, non resta divisa in due parti, perchè la circonferenza è una *linea chiusa.*

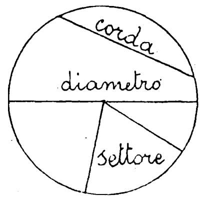


Ma se invece sulla circonferenza segniamo due punti A, B, essa resta divisa in *due* parti, che si chiamano *archi* (di circonferenza).

50. Un segmento AB, avente gli estremi sulla circonferenza, si dice *corda.*

Le corde passanti pel centro si chiamano *diametri.*

51. *I diametri di un cerchio sono tutti uguali,* perchè sono doppi del raggio.



52. Due raggi OA, OB di un cerchio, lo dividono in due parti, che si chiamano *settori* circolari.

I due angoli $\widehat{AOB}$, l'uno convesso e l'altro concavo, si dicono *angoli al centro.*

A ciascun arco AB o a ciascun settore ABO, *corrisponde* un determinato angolo al centro.

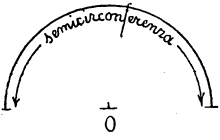
53. In modo simile a quello tenuto per i segmenti (n. 13) e per gli angoli (n. 27), si possono confrontare due archi (o settori) di una stessa circonferenza (o cerchio) o di circonferenze (o cerchi) uguali; e si può verificare se essi siano **uguali** o, in caso contrario, quale sia il *maggiore* e quale il *minore*.

Così si verifica che:

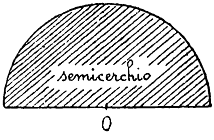
In una stessa circonferenza o cerchio e in circonferenze o cerchi uguali, ad archi o settori uguali corrispondono angoli al centro uguali, e ad archi o settori disuguali corrispondono angoli al centro disuguali nello stesso senso, e viceversa.

54. In particolare sono uguali i due archi in cui una circonferenza è divisa da un suo diametro e che corrispondono ad angoli al centro uguali ciascuno a due retti; perciò codesti archi diconsi *semicirconferenze*.

Così sono uguali i due settori in cui un cerchio è diviso da un suo diametro; e per questa ragione essi diconsi *semicerchi*.



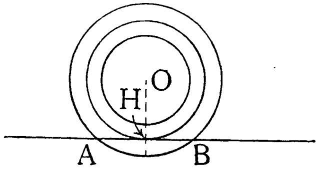
O



O

Posizioni relative di una retta e di una circonferenza.

55. Data una retta e preso un punto O fuori di essa, abbassiamo da O la perpendicolare OH sulla retta.



Se con centro in O descriviamo una circonferenza di raggio minore della distanza OH di O dalla retta vediamo che la circonferenza e la retta non hanno nessun punto comune, ossia, come si suol dire, la retta è *esterna* alla circonferenza.

Se invece, mantenendo il centro in O, prendiamo un raggio maggiore di OH, vediamo che la circonferenza attraversa due volte la retta, ossia la circonferenza e la retta *si segano* in due punti.

Se infine conduciamo la circonferenza di centro O che ha per raggio OH, vediamo che la circonferenza e la retta hanno comune soltanto il punto H o come si suol dire sono *tangenti* in H.

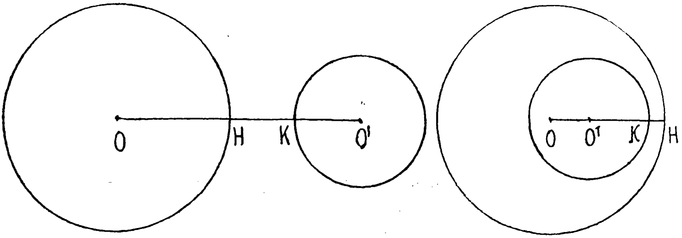
Insomma *una circonferenza e una retta non hanno punti comuni se la retta ha dal centro distanza maggiore del raggio; sono tangenti se la distanza della retta dal centro è uguale al raggio; si segano in due punti se la distanza della retta dal centro è minore del raggio.*

56. Risulta di qui che: *La perpendicolare ad un raggio di un cerhio nel suo estremo è tangente al cerchio.*

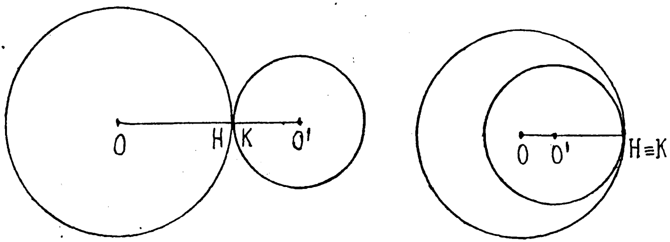
Posizioni relative di due circonferenze.

57. Due circonferenze possono o *non avere nessun punto comune* o *avere un sol punto comune* (cioè esser *tangenti,* o *segarsi in due punti.*

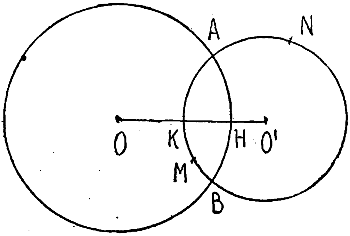
Le unite figure mostrano i vari casi possibili.



Circonferenze non aventi punti comuni.



Circonferenze tangenti.



Circonferenze secanti.

58. Notiamo che *quando due circonferenze si segano, i loro due punti di intersezione giacciono da parti opposte della retta che congiunge i due centri.*

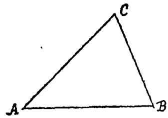
IV

TRIANGOLI E POLIGONI

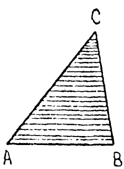
Triangoli.

59. Prendiamo nel piano tre punti A, B, C non giacenti su di una retta.

La figura costituita dai tre punti A, B, C e dai tre segmenti AB, BC, CA che li congiungono a due a due, dicesi *triangolo* ABC. I tre punti dati sono i *vertici*, e i tre segmenti sono i *lati* del triangolo.

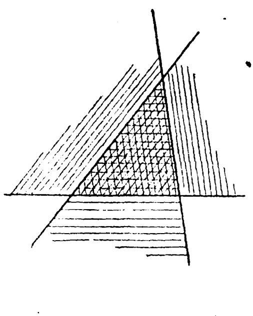


La linea chiusa costituita dai tre lati si chiama *contorno* del triangolo.



Gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$, si dicono *angoli (interni) del triangolo.*

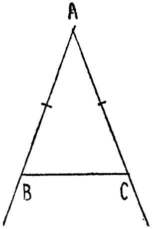
60. Il contorno di un triangolo divide il piano in due parti, di cui una è limitata, l' altra invece è illimitata. La parte limitata (che nell' unita figura è tratteggiata) si dice *superficie del triangolo* e talvolta anche semplicemente triangolo.



Nota. — La superficie di un triangolo ABC è la parte di piano comune ai tre angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ del triangolo.

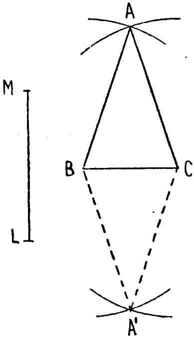
Triangoli isosceli.

61. Dato un angolo di vertice A si ponga la punta fissa del compasso in A, e colla punta a lapis si determinino sui due lati dell'angolo due segmenti uguali AB, AC. Se si congiunge B con C, si ottiene un triangolo ABC avente uguali i lati AB, AC. Questo triangolo si dice *triangolo isoscele* di *base* BC.



L'angolo $\widehat{BAC}$ opposto alla base si dice *angolo al vertice* e gli altri due si chiamano *angoli alla base*.

62. Per disegnare su di una data base BC un triangolo isoscele avente gli altri due lati uguali ad un segmento prefissato LM, si descrivano col compasso le circonferenze di centro B e C e di raggio uguale ad LM. Codeste due circonferenze si segano in due punti A, A′, giacenti da parte opposta della BC, i quali congiunti con B e C danno due triangoli isosceli aventi la base BC e gli altri due lati uguali ad LM.

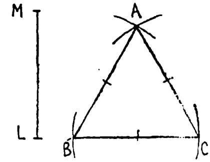


Nota. — Se si ripiega su sè stesso il segmento BC in modo che C vada a sovrapporsi a B, il segmento BC vien diviso in due parti uguali, ciascuna delle quali dicesi *metà* di BC.

Se nella costruzione precedente il raggio LM delle due circonferenze è uguale o minore della metà di BC, le due circonferenze non si segano, cosicchè non si ottengono più i due triangoli isosceli.

63. Se nella costruzione del n. prec. prendiamo

LM = BC, otteniamo dalle due parti di BC due triangoli ciascuno dei quali ha tutti e tre i lati uguali.

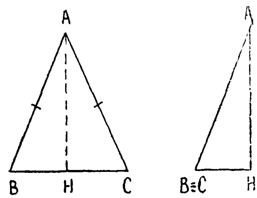


Un triangolo avente tutti e tre i lati uguali si dice *equilatero*.

Nota. — Un triangolo che non sia equilatero nè isoscele, che, cioè, abbia i tre lati disuguali, si dice *scaleno*.

64. Ritagliato in carta un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, cioè tale che sia

$$AB = AC,$$



pieghiamolo su sè stesso in modo che i due lati uguali vadano a coincidere. Allora i due angoli alla base si ricoprono esattamente l'un l'altro. Verifichiamo così che: *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali.*

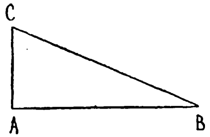
65. Viceversa *un triangolo avente due angoli uguali è isoscele,* ed ha uguali i lati opposti agli angoli uguali. Ciò si verifica ripiegando il triangolo come si è fatto pocanzi.

66. Siccome un triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualunque suo lato, preso come base, avremo che tutti e tre i suoi angoli sono uguali; abbiamo dunque che:

Ogni triangolo equilatero ha i tre angoli uguali o, come si suol dire, *è equiangolo.*

Triangoli rettangoli.

67. Se, disegnato un angolo retto di vertice A,

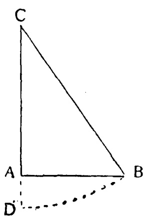


congiungiamo un punto B di un suo lato con un punto C dell' altro, otteniamo un triangolo in cui l'angolo A è retto.

Un triangolo siffatto si dice *rettangolo.*

I due lati AB, AC che comprendono l'angolo retto si dicono *cateti* e l' altro lato, opposto all' angolo retto, si dice *ipotenusa.*

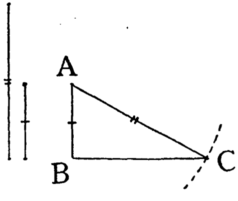
68. Dato un triangolo ABC rettangolo in A, si



riporti l' ipotenusa CB sulla retta del cateto CA a partire da C, ponendo in C una punta del compasso e descrivendo l' arco BD. Il punto D cade sul prolungamento di CA, cosicchè si vede che la ipotenusa è maggiore del cateto CA. Similmente si verifica che anche il cateto BA è minore dell' ipotenusa. E poichè la stessa verifica si può compiere per ogni triangolo rettangolo, potremo dire che:

In ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

69. *Costruire un triangolo rettangolo, avente l'ipotenusa e un cateto uguale rispettivamente a due segmenti dati.*



Il segmento cui deve essere uguale l' ipotenusa dovrà essere maggiore dell' altro (n. prec.).

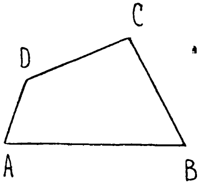
Osservato ciò, si disegni un angolo retto di vertice B e preso su di un lato il segmento BA uguale al minore dei due segmenti dati, si descriva, con centro in A e raggio uguale al segmento dato maggiore, un arco di circonferenza, il quale seghi in C l'altro lato dell'angolo retto.

Il triangolo ABC è il triangolo rettangolo cercato.

Poligoni.

70. Il triangolo non è che la prima e più semplice di tutta una serie di figure, che si chiamano *poligoni*.

Così dati nel piano quattro punti A, B, C, D, tali che ciascuna delle congiungenti AB, BC, CD, DA lasci gli altri due punti dalla stessa parte, la figura costituita dai quattro punti dati (*vertici*) e dai quattro segmenti AB, BC, CD, DA (*lati*) si dice poligono a quattro lati, o, più comunemente, *quadrangolo* (o *quadrilatero*).



L' insieme dei lati dicesi *contorno*.

Il segmento congiungente due vertici *opposti* (cioè non consecutivi), come A e C o B e D, si dice *diagonale*.

Il quadrilatero ha due diagonali.

71. Similmente si definiscono:

il poligono	a	5	lati	o	*pentagono*
»	»	6	»	o	*esagono*
»	»	7	»	od	*ettagono*
»	»	8	»	od	*ottagono*
»	«	9	»	od	*ennagono*
»	»	10	»	o	*decagono* ecc.

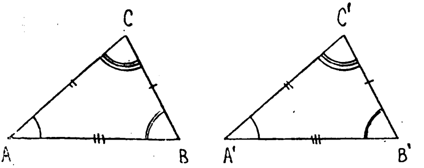
72. In ogni caso il poligono divide il piano in due parti, una finita e l'altra no. La prima si dice *superficie* del poligono.

Poligoni uguali.

73. *Due poligoni possono essere* **uguali** *o* **disuguali.**

Prendiamo per esempio due triangoli ABC, A'B'C'.

Per verificare se essi siano uguali, si ritaglia uno di essi o si ricalca su carta trasparente, e poi, collocandolo opportunamente sull'altro, si prova se esso sia *sovrapponibile* esattamente all'altro.



Se accade che A'B'C' si possa collocare su ABC in modo che i tre vertici A', B', C' del primo vadano proprio a cadere su A, B, C rispettivamente, diremo che i due triangoli sono uguali e scriveremo

$$ABC = A'B'C'.$$

Allora i lati A'B', B'C', C'A' di A'B'C' vanno a sovrapporsi esattamente ai lati AB, BC, CA di ABC; cioè fra gli *elementi* (*lati* ed *angoli*) dei due triangoli si hanno le seguenti uguaglianze

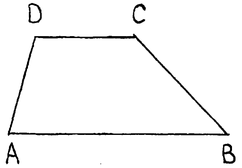
$$AB = A'B' \ , \ BC = B'C' \ , \ CA = C'A',$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \ , \ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \ , \ \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}.$$

74. Nello stesso modo si verifica se siano uguali due poligoni qualsiansi.

Due poligoni uguali hanno ordinatamente uguali i lati e gli angoli, compresi fra lati uguali.

Trapezi e parallelogrammi.

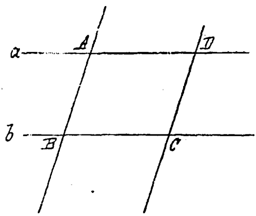
75. In un quadrangolo si dicono *opposti* due lati o due angoli non consecutivi. Così nel quadrangolo ABCD il lato AB è opposto a CD, il lato BC a DA, l'angolo di vertice A all'angolo di vertice C, l'angolo di vertice B all'angolo di vertice D.



76. Un quadrangolo in cui due lati opposti sono paralleli dicesi *trapezio*.

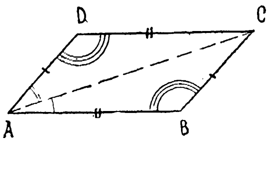
I due lati paralleli si chiamano *basi* del trapezio e la loro distanza dicesi *altezza*.

77. Date due rette *a*, *b* parallele intersecate da una trasversale nei punti A, B rispettivamente, se si conduce per un punto D di *a*, distinto da A, la parallela alla AB, questa incontra la *b* in un punto C e si ottiene un quadrilatero ABCD, in cui ogni lato è parallelo al lato opposto, e che può quindi considerarsi in due modi come trapezio, prendendo come basi due lati opposti oppure gli altri due.



Ogni quadrilatero in cui i lati opposti sono paralleli dicesi *parallelogramma*.

78. Un parallelogramma ABCD è diviso da una sua diagonale p. es. dalla AC, in due triangoli ABC, CDA. Se si ritagliano questi due triangoli, si verifica che essi sono esattamente sovrapponibili, cioè sono uguali.

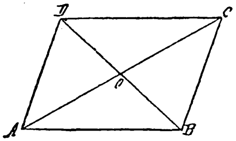


Lo stesso si può dire anche dei due triangoli in cui il parallelogramma è diviso dall'altra diagonale BD; cioè:

Ogni parallelogramma è diviso da ciascuna delle sue diagonali in due triangoli uguali.

79. Si vede così anche che:

In ogni parallelogramma i lati opposti e gli angoli opposti sono uguali.

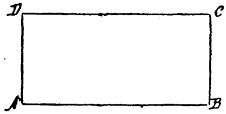


80. Osserviamo in fine che:

In ogni parallelogramma le due diagonali si dividono scambievolmente per metà.

Rettangoli, rombi, quadrati.

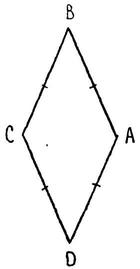
81. Condotte due parallele, da due punti A e B, dell'una si conducano le perpendicolari AD, BC all'altra. Queste due perpendicolari sono fra loro parallele (n. 39), cosicchè il quadrangolo ABCD, avendo i lati opposti paralleli, è un parallelogramma.



Siccome gli angoli in C e D sono, per costruzione, retti, saranno retti anche gli angoli opposti che sono rispettivamente uguali ad essi (n. 79).

Dunque il parallelogramma ABCD ha tutti e quattro gli angoli retti.

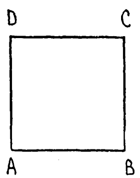
82. Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti dicesi *rettangolo*.



83. Se in un parallegramma ABCD sono uguali due lati consecutivi AB e BC, saranno uguali anche i due lati rispettivamente opposti CD e AD e tutti e quattro i lati del parallelogramma saranno uguali.

Un parallelogramma avente tutti e quattro i lati uguali dicesi *rombo* o *losanga.*

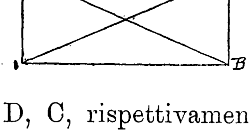
84. Un parallelogramma può essere allo stesso tempo rettangolo e rombo, cioè può avere tutti e quattro gli angoli retti e tutti e quattro i lati uguali.



Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti e tutti e quattro i lati uguali dicesi *quadrato.*

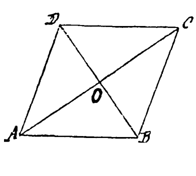
Nota. — Il quadrato si può anche definire come un rettangolo avente tutti e quattro i lati uguali, o come un rombo avente tutti e quattro gli angoli retti.

85. *Le due diagonali di un rettangolo sono uguali.*

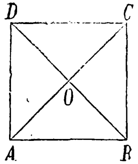


Si verifichi ritagliando un rettangolo A′B′C′D′ uguale ad ABCD e sovrapponendo A′B′C′D′ su ABCD in modo che A′, B′, C′, D′ vadano a cadere in B, A, D, C, rispettivamente.

86. *Le diagonali di un rombo sono fra loro perpendicolari e dividono in parti uguali gli angoli del rombo.*



Si verifichi ritagliando in carta un rombo e ripiegandolo due volte su sè stesso lungo le diagonali.



87. Siccome il quadrato è nello stesso tempo rettangolo e rombo avremo che:

Le diagonali di un quadrato sono uguali e perpendicolari.

Poligoni regolari.

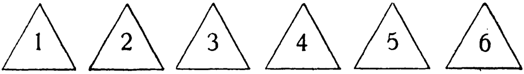
88. Un poligono si dice *regolare* se ha tutti il lati uguali e tutti gli angoli uguali.

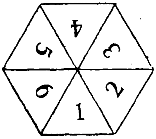
In altre parole si dice regolare un poligono equilatero ed equiangolo.

Nota. — Si osservi che vi sono poligoni equilateri ma non equiangoli, come p. es. i rombi (tolto il quadrato) e poligoni equiangoli ma non equilateri. come p.. es. i rettangoli (tolto ancora il quadrato).

89. Sono poligoni regolari il triangolo equilatero e il quadrato, che già conosciamo.

Possiamo procurarci un altro esempio di poligono regolare nel seguente modo. Ritagliamo in carta sei triangoli equilateri

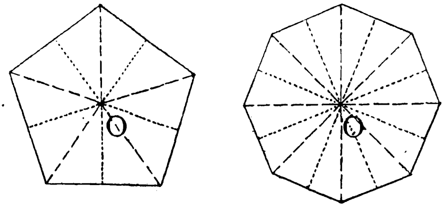




uguali e disponiamoli intorno ad un punto, come indica l'unita figura. Otteniamo così un esagono regolare.

Il punto, che è vertice comune ai sei triangoli equilateri, ha la medesima distanza (è equidistante) dai vertici e così pure dai lati dell'esagono. Esso dicesi *centro* dell'esagono regolare.

In ogni poligono regolare vi è un punto equidistante dai vertici e così pure dai lati e questo punto si chiama *centro* del poligono regolare.



La distanza del centro da un vertice qualsiasi si dice *raggio* del poligono regolare, e la distanza del centro da un lato qualsiasi si dice invece *apotema*.

Se si congiunge il centro di un poligono coi diversi vertici, il poligono resta diviso in tanti triangoli isosceli, fra loro uguali, quanti sono i lati.

V.

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO - DIEDRI

90. Sinora noi abbiamo considerato soltanto figure tutte situate sul piano su cui disegnavamo.

Ma si possono considerare anche figure non contenute ciascuna in un solo piano (*figure solide*), come p. es. la figura costituita dai dodici spigoli di un dado.

Proprietà del piano.

91. Si è già notato (n. 1) che nello **spazio,** oltre il piano su cui abbiamo disegnato sin qui, possiamo considerare quanti altri piani vogliamo: il piano del tavolo, il pavimento, le pareti, il piano della strada, ecc. E così, anche fuori del piano del disegno, passiamo considerare quante altre rette vogliamo.

In ogni caso vediamo che: *Se una retta congiunge due punti di un piano, anche tutti gli altri punti di quella retta si trovano sul piano*, o, come si suol dire, *la retta giace sul piano.*

Se p. es. tenendo teso un filo sottile, ne appoggiamo gli estremi sul piano del tavolo, o di una parete o del pavimento, vediamo che il filo vi si adagia tutto.

92. Per un punto A possiamo considerare quanti piani vogliamo.

Se fissiamo un altro punto B, vi sono quanti piani si vogliono che passano per A e per B, e tutti questi piani contengono l'intera retta AB o, come si suol dire, *si segano* l'un l'altro secondo la retta AB.

Ma se fissiamo un terzo punto C, che non si trovi sulla AB vi è un piano (ed uno solo) che passa per A, B, C.

Abbiamo dunque che: *Tre punti non situati su di una stessa retta determinano un piano.*

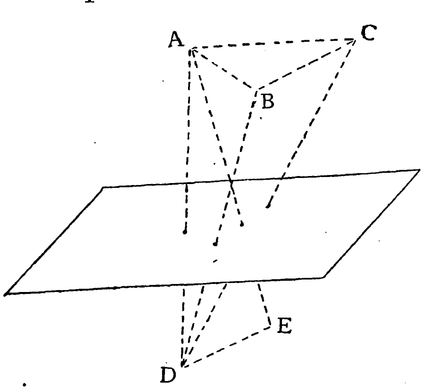
P. es. un imposta fissata al muro per mezzo di due cardini è girevole intorno a questi: ma resta fermata quando con un chiavistello si fissi in un terzo punto (non situato sulla retta dei cardini).

Il piano determinato da tre punti A, B, C, si chiama « il piano ABC ».

93. Similmente: *Una retta e un punto che non si trovi su di essa determinano un piano.*

Due rette passanti per un punto determinano un piano.

94. Notiamo infine che: *Un piano divide lo spazio in due parti.*



Queste due parti diconsi *semispazi* relativi al piano considerato.

Se si prendono due punti A, B in un medesimo semispazio, il segmento AB giace tutto in quel semispazio.

Se invece si prende un punto C in uno dei due semispazi relativi ad un certo piano e un punto D nell'altro, il segmento CD sega il piano considerato in un punto.

Posizioni relative di due rette nello spazio.

95. Due rette *a*, *b* dello spazio possono giacere in uno stesso piano oppure no.

Se giacciono in uno stesso piano esse si *segheranno* oppure saranno parallele.

Se poi non giacciono in uno stesso piano non possono nemmeno incontrarsi, perchè in tal caso giacerebbero in uno stesso piano (n. 93).

Due rette siffatte si dicono *sghembe.*

Tali sono, p. es., in un'aula a pianta rettangolare uno spigolo del pavimento e uno dei due spigoli verticali che non si trovano sulla stessa parete del primo.

96. Nota. — Risulta di qui che nello spazio per poter dire che due rette sono parallele non basta sapere che *esse non si incontrano,* ma bisogna inoltre aver constatato che *giacciono in un medesimo piano.*

Posizioni relative di una retta e di un piano nello spazio. Retta e piano perpendicolari.

97. Dato un piano, una retta può:

a) *giacere su di esso;*

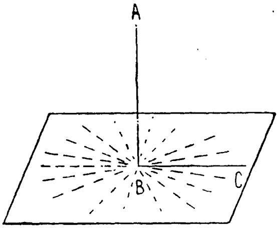
b) oppure *segare il piano in un punto*;

c) o infine *non aver comune col piano nessun punto.*

Una retta e un piano che non abbiano punti comuni si dicono *paralleli.*

P. es. uno spigolo di un tavolo a piano rettangolare è parallelo al piano del pavimento.

98. Fra le rette che segano un piano in un punto vi è la *perpendicolare*.



Per definirla prendiamo una retta e, condotta in un suo punto una semiretta BC perpendicolare alla retta AB, facciamo ruotare la BC intorno alla AB, tenuta ferma. La BC si muove allora in un piano, e la AB è perpendicolare a tutte le rette che giacciono in codesto piano e passano per A.

La retta *a* e il piano or ora ottenuto si dicono *perpendicolari.*

Cioè *una retta* e *un piano,* segantisi in un punto, si dicono perpendicolari, se tutte le rette giacenti nel piano e passanti per quel punto sono perpendicolari alla retta.

P. es. se su di una vaschetta piena d'acqua teniamo sospeso il filo a piombo, otteniamo l'immagine di una retta e di un piano perpendicolare.

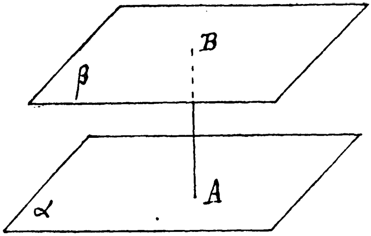
99. Abbassata da un punto la perpendicolare su di un piano, dicesi *distanza* del punto dal piano il segmento della perpendicolare compreso fra il punto stesso e l'interzione col piano (*piede* della perpendicolare).

Posizioni relative di due piani nello spazio. Piani paralleli.

100. Due piani o *si segano secondo una retta* oppure *non hanno nessun punto comune.*

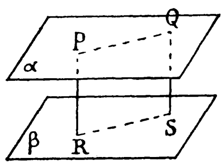
Due piani non aventi nessun punto comune si dicono *paralleli.*

Sono paralleli p. es. il piano del tavolo e il piano del pavimento.



101. *Se due piani sono paralleli, ogni retta perpendicolare all'uno è perpendicolare all'altro.*

102. *Se due piani sono paralleli tutti i punti dell'uno hanno ugual distanza dall'altro.*

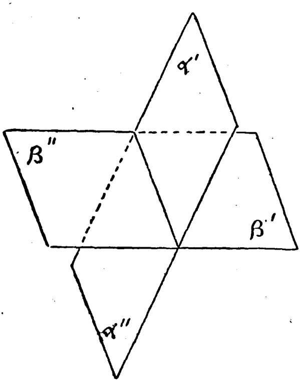


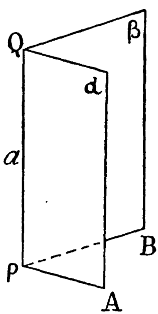
103. Si dice *distanza* di due piani paralleli la distanza di un punto qualsiasi di uno dei due piani dall'altro.

Diedri.

104. Due piani segantisi secondo una retta dividono lo spazio in quattro parti ciascuna delle quali dicesi *regione diedrica* o *diedro*.

105. Un diedro è determinato da due semipiani





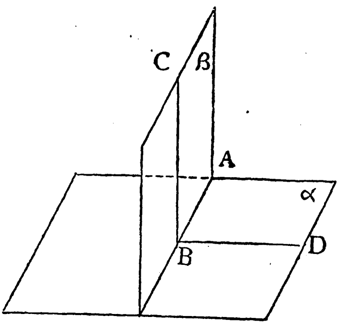
limitati da una medesima retta *a*: la retta *a* si dice *costola* o *spigolo* e i due semipiani *faccie* del diedro.

106. *Due diedri sono* **uguali** *o* **disuguali.**

Costruiti due diedri in cartoncino si verifica se siano *uguali* provando se essi possano sovrapporsi esattamente.

Piani perpendicolari.

107. Due piani, segantisi secondo una retta, si dicono *perpendicolari* se i quattro diedri in cui essi dividono lo spazio sono uguali.



108. *Ogni piano passante per una retta perpendicolare ad un piano è pur esso perpendicolare a questo piano.*

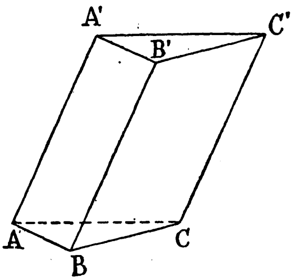
P. es. i muratori per costruire un muro verticale, cioè perpendicolare ad un suolo orizzontale, dispongono i mattoni secondo il filo a piombo.

VI

POLIEDRI

Prismi.

109. Preso un triangolo ABC, si conducano per i vertici, fuori del piano ABC, tre rette fra loro parallele, e con un piano parallelo ad ABC si seghino codeste tre parallele rispettivamente nei punti A′, B′, C′.



Il triangolo A′B′C′ è uguale ad ABC, e i quadrangoli ABB′A′, BCC′B′, CAA′C′ sono parallelogrammi.

La figura ABCC′A′B′, costituita da tre parallelogrammi (*facce laterali*) e da due triangoli paralleli ed uguali (*basi*) dicesi *prisma triangolare*.

L' insieme delle *facce* dicesi *superficie* del prisma.

Il prisma triangolare ha sei *vertici* (A, B, C, A′, B′, C′) e nove *spigoli* (AA′, BB′, CC′; AB, BC, CA; A′B′, B′C′, C′A′).

I tre spigoli paralleli AA′, BB′, CC′, diconsi *spigoli laterali;* e infine la distanza dei piani delle due basi si chiama *altezza* del prisma.

110. Prendendo, invece del triangolo ABC, un quadrangolo, o un pentagono ecc. si costruisce nello stesso modo un *prisma quadrangolare* o *pentagonale* ecc.

111. *Gli spigoli laterali di un prisma sono tutti uguali.*

112. Un prisma si dice *retto,* se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi.

Un prisma che non sia retto si dice *obliquo.*

In un prisma retto le facce laterali sono rettangoli, e gli spigoli laterali sono uguali all'altezza.

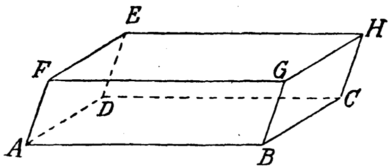
Invece in un prisma obliquo gli spigoli sono maggiori dell'altezza.

13. La superficie di un prisma divide lo spazio in due parti, di cui una è la regione di spazio comune ai semispazi limitati dai piani delle facce e contenenti il prisma.

Questa parte di spazio, che è *finita,* dicesi *solido del prisma.*

Parallelepipedo.

114. Un prisma le cui basi siano parallelogrammi dicesi *parallelepipedo.*

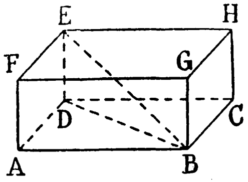


Il parallelepipedo ha otto vertici, dodici spigoli e sei facce.

Ogni vertice è comune a tre facce: le altre tre passano per un vertice, che si dice *opposto* al primo. Il segmento congiungente due vertici opposti si dice *diagonale.*

Ogni parallelepipedo ha quattro diagonali.

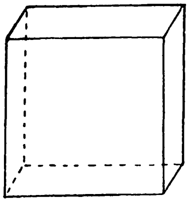
115. Un parallelepipedo retto, le cui basi siano



rettangoli, dicesi *parallelepipedo rettangolo*.

Un parallelepipedo rettangolo ha per facce sei rettangoli, uguali a due a due.

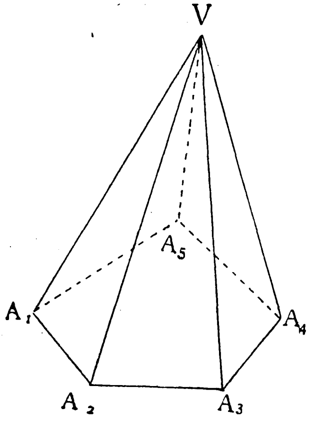
116. Dicesi infine *cubo* un parallelepipedo rettangolo, avente tutti gli spigoli uguali.



Il cubo ha per facce sei quadrati uguali.

Piramidi.

117. Dato un poligono, p. es. un pentagono $A_1A_2A_3A_4A_5$, e preso un punto V fuori del piano del poligono, la figura costituita dai triangoli A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, A_4A_5V, A_5A_1V e dal poligono $A_1A_2A_3A_4A_5$ dicesi *piramide pentagonale* di base $A_1A_2A_3A_4A_5$ e di *vertice* V.

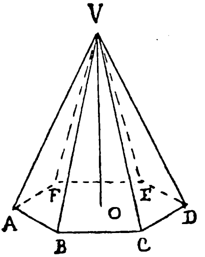


I cinque triangoli diconsi *facce laterali* e i lati di essi *spigoli* della piramide.

L'insieme delle facce laterali e della base costituisce la *superficie* della piramide.

118. Prendendo, invece del pentagono, un triangolo o un quadrangolo o un esagono ecc. si costruisce nello stesso modo una *piramide triangolare* (o *tetraedro*) o una *piramide quadrangolare* o *pentagonale* ecc.

119. Una piramide, di cui la base sia un poligono regolare e il vertice appartenga alla perpendicolare alla base nel suo centro, dicesi *piramide retta a base regolare.*



Le facce laterali di una piramide retta a base regolare sono *triangoli isosceli,* tutti uguali.

120. La superficie di una piramide divide lo spazio in due parti, di cui una è la regione di spazio comune a tutti i semispazi limitati dai piani delle facce e della base e contenenti la piramide.

Questa parte di spazio dicesi *solido* della piramide.

Poliedri.

121. I prismi e le piramidi sono *poliedri* speciali.

Si dice *poliedro* ogni figura costituita da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ognuno dei lati sia comune a due di essi e il piano di ciascun poligono lasci tutti gli altri da una stessa parte.

In un poliedro si notano i *vertici*, le *facce*, gli *spigoli* e i *diedri*.

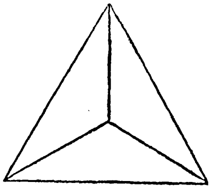
122. Fra i poliedri sono notevoli quelli *regolari*.

Si dice *regolare* un poliedro avente tutte le facce regolari ed uguali e tutti i diedri uguali.

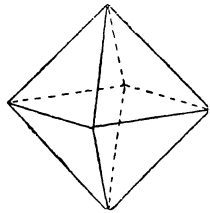
Per es. il cubo è un poliedro regolare.

Oltre i cubi vi sono altri quattro tipi di poligoni regolari che qui enunziamo:

1) *Tetraedro regolare.* Esso ha quattro vertici e ha per facce quattro triangoli equilateri (uguali).



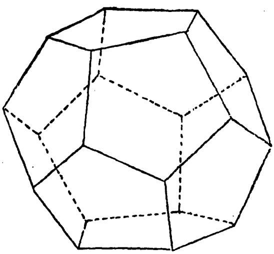
Tetraedro regolare.



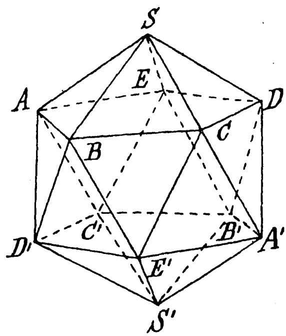
Ottaedro regolare.

2) *Ottaedro regolare*. Ha otto vertici e ha per facce otto triangoli equilateri. Gli angoloidi sono a quattro facce.

3) *Dodecaedro regolare*. Ha venti vertici e ha per facce dodici pentagoni regolari (uguali).



Dodecàedro regolare.



Icosaedro regolare.

4) *Icosaedro regolare*. Ha dodici vertici e per facce venti triangoli equilateri (uguali).

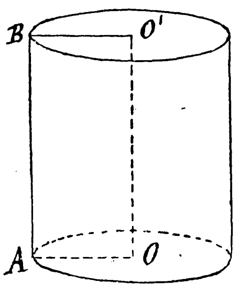
VII

CILINDRO, CONO E SFERA

Cilindro.

123. Si faccia ruotare un rettangolo ABO′O intorno ad un suo lato OO′ fino a quando il lato opposto AB ritorna nella sua posizione iniziale.

La figura descritta in codesto movimento dalla poligonale OABO′, si dice *cilindro circolare retto* od anche semplicemente *cilindro*, di *asse* OO′.



I due lati opposti O′B, OA descrivono due cerchi uguali e giacenti i due piani paralleli e perpendicolari alla retta OO′ che congiunge i due centri.

Codesti due cerchi si chiamano *basi*, e il segmento OA (od O′B) si dice *raggio* del cilindro.

La superficie descritta dal segmento AB si chiama *superficie laterale*. Aggiungendo alla superficie laterale le due basi si ottiene la *superficie totale*.

Il segmento AB, in ciascuna delle infinite posizioni che successivamente occupa, si dice *lato* del cilindro.

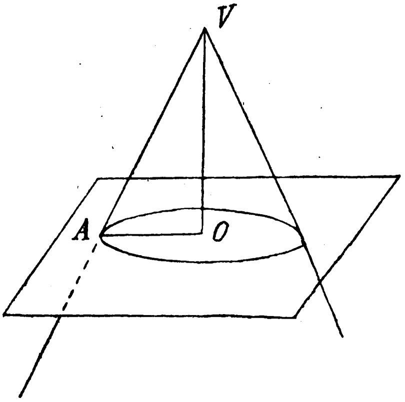
Infine si chiama *altezza* la distanza dei piani delle due basi.

L'altezza del cilindro è uguale al lato.

124. La superficie del rettangolo ABO'O descrive, nel movimento suaccennato, il *solido* del cilindro.

Cono.

125. Si faccia ruotare un triangolo rettangolo AOV intorno ad un suo cateto OV, fino a ricondurlo nella sua posizione iniziale.



La figura descritta in codesto movimento dall'ipotenusa VA e dall'altro cateto OA dicesi *cono circolare retto* o semplicemente *cono* di *asse* VO e di *vertice* V.

Il cateto OA descrive un cerchio il cui piano è perpendicolare nel suo centro all'asse. Questo cerchio si dice *base* del cilindro.

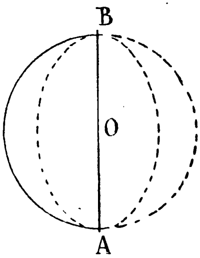
L'ipotenusa VA, in ciascuna delle infinite posizioni che successivamente assume, dicesi *lato* o *apotema* del cono; la superficie descritta da VA, si chiama *superficie laterale*. Aggiungendo alla superficie laterale la superficie della base, si ottiene la *superficie totale*.

La distanza VO del vertice V del cono dalla base si dice *altezza* del cono.

126. La superficie del triangolo AOV descrive, nel movimento di rotazione indicato nel n. prec., il *solido* del cono.

Sfera.

127. Una semicirconferenza che ruoti intorno al suo diametro AB, fino a riprendere la sua posizione iniziale, descrive una *superficie sferica* o *sfera.*



La superficie del semicerchio descrive nello stesso movimento il *solido della sfera* o *solido racchiuso dalla sfera.*

Se O è il centro della semicirconferenza, tutti i punti della sfera hanno da O una distanza uguale al raggio della semicirconferenza.

Il punto O dicesi *centro* della sfera e tutti i segmenti uguali che congiungono O coi varî punti della sfera si dicono *raggi.*

128. Una superficie sferica divide lo spazio in due parti:

1) il *solido* della sfera o regione (finita) dei punti della sfera e dei punti che hanno dal centro distanza *minore* del raggio (*punti interni*);

2) la regione (infinita) dei punti la cui distanza dal centro è maggiore del raggio *(punti esterni).*

129. Ogni retta passante per il centro O di una sfera, ne incontra la superficie in due punti P e Q, situati da parte opposta rispetto al centro O e aventi ciascuno dal centro una distanza uguale al raggio della sfera.

Il segmento PQ, che è doppio del raggio, si dice *diametro.*

130. *I diametri di una sfera sono tutti uguali.*

131. *Ogni piano passante pel centro di una sfera ne interseca la superficie secondo una circonferenza di **raggio uguale a quello della sfera e divide la sfera stessa in due parti uguali*** (sovrapponibili).

Ciascuna delle due parti in cui la sfera è divisa da un piano passante per il centro dicesi *emisfero*.

ESERCIZI SUI CAPITOLI I-VII.

(Prima classe)

---

1. L'alunno conduca sul foglio, a mano libera, una retta e poi verifichi con la riga l'esattezza del disegno.

2. Segnato sul foglio un punto A l'alunno conduca per A a mano libera tre rette diverse. Verifica con la riga.

3. Segnati sul foglio più punti A, B, C, D,..., l'alunno disegni a mano libera la retta AB, la semiretta BC, il segmento CD.

4. Disegnate a mano libera più rette (in diverse direzioni) e segnato su di una un segmento, si segni, a vista, su ciascuna delle altre un segmento uguale al primo. Si verifichi poi con una strisciolina di carta ripiegata o col compasso a punte fisse se i segmenti segnati siano uguali.

5. Disegnati a mano libera un segmento e una retta si segnino su questa, a vista, i due segmenti uguali al dato, che hanno un estremo comune in un punto prefissato della retta considerata.

6. Disegnare a mano libera un angolo.

7. Disegnare a mano libera un angolo e il suo opposto al vertice.

8. Disegnare a mano libera un angolo e un suo adiacente.

9. Disegnare a mano libera e a vista due angoli uguali.

10. Dato un angolo e fissata una semiretta AB, condurre per A a mano libera e a vista le due semirette che formano colla AB due angoli uguali al dato.

11. Disegnare a mano libera, in varie posizioni, due rette perpendicolari.

12. Disegnare a mano libera, in varie posizioni un angolo retto.

13. Disegnata con la riga una retta, innalzare in un suo punto la perpendicolare, servendosi della squadra (n. 34).

14. Disegnata con la riga una retta, abbassare da un punto esterno, servendosi della squadra la perpendicolare (n. 36).

15. Disegnare a mano libera, in varie posizioni, due rette parallele.

16. Disegnata una retta, condurre con la retta e la squadra, la parallela alla retta data, che passa per un punto prefissato (n. 44).

17. Condotte a mano libera due parallele e una loro trasversale, designare con uno stesso numero (1, 2, 3, 4) le quattro coppie di angoli corrispondenti.

18. Condotta su di un foglio di carta quadrellata la congiungente di due vertici della quadrellatura (non situati su di una stessa retta della quadrellatura) condurre a mano libera per un altro vertice la parallela alla retta considerata.

---

19. Esercitarsi a disegnare a mano libera delle circonferenze.

20. Disegnare col compasso e la squadra un settore corrispondente ad un angolo al centro retto (*quadrante*).

21. Disegnare col compasso una circonferenza e condurre una retta esterna e una secante.

22. Descritta col compasso una circonferenza, condurre ad essa in un suo punto la tangente, servendosi della squadra.

23. Descrivere col compasso;

a) due circonferenze disuguali esterne fra loro;

b) due circonferenze uguali alle precedenti e tangenti esternamente;

c) due circonferenze uguali alle precedenti interne l'una all'altra;

d) due circonferenze uguali alle precedenti e tangenti l'una internamente all'altra;

e) due circonferenze uguali alle precedenti e secantisi.

---

24. Disegnare a mano libera:

a) un triangolo scaleno;
b) un triangolo isoscele;
c) un triangolo equilatero.

25. Disegnare colla riga e il compasso su di una data base BC un triangolo isoscele avente gli altri due lati uguali ad un segmento prefissato (n. 62).

26. Disegnare colla riga e il compasso un triangolo equilatero, avente il lato uguale ad un segmento dato (n. 63).

27. In un triangolo isoscele abbassare con la squadra la perpendicolare dal vertice sulla base. Verificare che codesta perpendicolare divide in parti uguali l'angolo al vertice e la base.

28. Disegnare a mano libera un triangolo rettangolo isoscele.

29. Disegnare con riga e compasso un triangolo rettangolo, avente l'ipotenusa e un cateto uguali a due segmenti dati (n. 69).

30. Disegnare a mano libera un quadrangolo, un pentagono, un esagono e condurne tutte le diagonali. Quante sono in ciascuno dei tre poligoni?

31. Disegnare a mano libera due triangoli uguali.

32. Disegnare a mano libera due quadrangoli uguali.

33. Disegnare a mano libera:

a) un trapezio;
b) un parallelogramma;
c) un rettangolo;
d) un rombo;
e) un quadrato.

È interessante eseguire le stesse costruzioni su di un foglio di carta quadrellata, scegliendo, nei vari modi possibili i vertici nei vertici della quadrellatura.

34. Su di un foglio di carta quadrellata disegnare un ottagono regolare.

35. Col compasso, disegnare su di un segmento dato come lato l'esagono regolare. [Sul segmento dato AB si costruisca il triangolo equilatero ABO (n. 63); e poi si costruiscano nello stesso modo successivamente altri cinque triangoli equilateri BOC, COD,... (n. 89)].

---

36. Disegnare a mano libera l'immagine:
a) di un prisma obliquo triangolare o quadrangolare,...;
b) di un prisma retto, triangolare o quadrangolare,...;
c) di un parallelepipedo obliquo;
d) di un parallelepipedo rettangolo;
e) di un cubo.

37. Disegnare a mano libera l'immagine:
a) di un tetraedro;
b) di una piramide pentagonale;
c) di una piramide retta a base esagonale regolare.

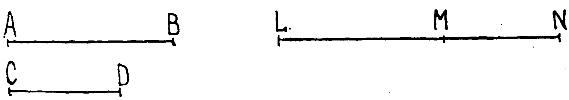
38. Disegnare a mano libera l'immagine:
a) di un cilindro;
b) di un cono.

VIII

MISURA DEI SEGMENTI E DEGLI ANGOLI

Somma e differenza di segmenti.

132. SOMMA DI DUE O PIÙ SEGMENTI. — Per *som-*

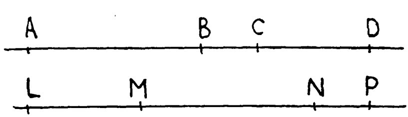


mare due segmenti AB, CD, si portino su di una retta due segmenti *consecutivi* LM, MN rispettivamente uguali ad AB, CD. Il segmento LN si dice *somma* di AB e CD (*addendi* o parti) e si scrive

$$LN = AB + CD$$

Analogamente si trova la *somma di tre o più segmenti.*

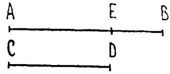
133. In ogni caso, *anche se si cambia l'ordine in cui si prendono i segmenti da sommare, si ottiene sempre come somma il medesimo segmento.*



Si guardi p. e. la unita figura dove si è preso

$$LM = CD, \ MN = AB, \ NP = BC.$$

134. DIFFERENZA DI DUE SEGMENTI. — Per *sottrarre*



da un segmento AB un segmento minore CD, si prenda su AB a partire da A il segmento AE uguale a CD; il segmento EB si dice *differenza* di AB e CD e si scrive

$$EB = AB - CD.$$

Similmente AE si dirà differenza di AB ed EB e si scriverà

$$AE = AB - EB.$$

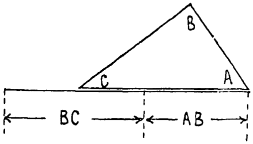
135. Si verifica senz'altro che: *Sommando a segmenti uguali segmenti uguali si ottengono segmenti uguali.*

Sottraendo da segmenti uguali segmenti uguali, si ottengono segmenti uguali.

Relazioni fra i lati di un poligono.

136. Come applicazione del concetto di somma di segmenti, osserviamo alcune notevoli relazioni che si hanno fra i lati di un qualsiasi poligono.

Considerato per semplicità un triangolo distendiamo un filo da A a C lungo gli altri due lati AB e BC. Se lo stesso tratto di filo si distende su AC a partire da A, esso ricopre il lato AC e ne sopravanza una parte.



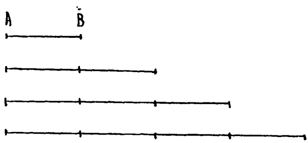
Lo stesso si può ripetere anche per il lato AB e per il lato BC, cosicchè abbiamo che: *In un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.*

137. Nello stesso modo si verifica che:

In un poligono ciascun lato è minore della somma di tutti gli altri.

Multipli e summultipli di un segmento.

138. Dato un segmento AB, la somma di due segmenti uguali ad AB dicesi *segmento doppio* di AB o *multiplo di* AB *secondo* 2. Così le somme di tre, quattro, cinque... segmenti uguali ad AB diconsi rispettivamente *multipli di* AB *secondo* 3, 4, 5,...



I multipli di AB si indicano con 2AB, 3AB, 4AB,...

139. Si segni un segmento AB sull' orlo rettilineo di una strisciolina di carta. Ripiegando questa su sè stessa in modo che B vada a coincidere con A, dividiamo il segmento AB in due *parti* uguali, ciascuna delle quali si dice *metà* di AB (od anche *summultiplo* o *parte aliquota* di AB secondo 2).

Ripiegando ancora la strisciolina di carta, possiamo dividere il segmento AB in 4 parti uguali e poi in 8 o così via.

Similmente, ripiegando opportunamente, possiamo dividere il segmento AB in 3 parti uguali, ecc.

In ogni caso, quando AB è diviso in un certo numero di parti uguali, ciascuna di queste si dice *parte aliquota* o *summultiplo* di AB.

Queste diverse parti aliquote si indicano con

$$\frac{AB}{2}, \frac{AB}{3}, \frac{AB}{4}, \ldots$$

Si legga « una metà di AB », « un terzo di AB », « un quarto di AB », ecc.

140. *Se due segmenti sono uguali, sono pure uguali i loro multipli secondo* 2, *o* 3, *o* 4,... *e così pure le loro metà, i loro terzi, i loro quarti*, ecc.

Misura dei segmenti. Riga graduata.

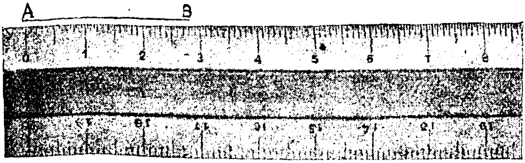
141. Nel disegno, per confrontare segmenti, trasportarli, sommarli, ecc., si adopera solitamente una RIGA GRADUATA.

Si hanno righe graduate di varia lunghezza; ma la più usata nel disegno è il *doppio-decimetro.*

Il doppio decimetro è una piccola riga, di cui lo spigolo è diviso (*graduato*) in venti tratti uguali fra loro, e numerati da 0 a 20, ognuno dei quali è un *centimetro*, cioè la centesima parte aliquota del *metro*, che, come sappiamo fino dalle Scuole elementari, è l'*unità di misura fondamentale delle lunghezze.*

Ciascuno poi di codesti 20 centimetri è diviso in dieci parti uguali o *millimetri* e talvolta ogni millimetro è suddiviso per metà.

142. Per misurare un segmento AC, si appoggi il doppio decimetro sul foglio in modo che lo spigolo graduato collimi colla retta AB e l' estremo A coincida collo 0 della graduazione. Se l' altro estremo B coincide con una delle divisioni della graduazione, p. es.

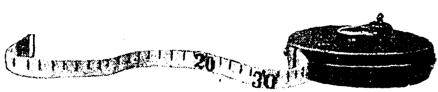


colla 27ª (escluso lo 0) si dice che 27 mm. è la *misura* (o *lunghezza*) del segmento AB.

Se poi B non coincide con alcuna divisione, sarà compreso fra due divisioni successive, p. es., fra la 27ª e la 28ª: allora si dirà che 27 mm. è la *misura* (o *lunghezza*) *approssimata* per difetto (a meno di 1 mm.) di AB e 28 mm. è la *misura approssimata* per eccesso del segmento dato.

Se in questo secondo caso si volesse conoscere in modo più preciso la lunghezza del segmento AB, bisognerebbe poter disporre di una riga graduata, a graduazione più minuta: ma come già dicemmo, le righe graduate che si usano nel disegno sono, tutt'al più, suddivise in mezzi millimetri.

143. Nella pratica per misurare le lunghezze si usano, invece delle righe graduate del disegno, altri strumenti (metri pieghevoli a regoletti di legno o di ottone, regoli graduati, metri a nastro ecc.).



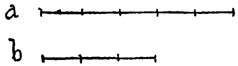
In ogni caso i metri usati nella pratica sono uguali al *metro-campione*, il quale è segnato sullo spigolo d'un regolo di platino, che si conserva dal 1799 negli Archivi dello Stato Francese a Parigi, ed è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, secondo le determinazioni della Commissione geodetica francese nominata dall'Assemblea Nazionale nel 1790.

144. Per misurare le grandi lunghezze che si presentano nella pratica (p. es. la lunghezza di una strada) si considerano altre unità ausiliari: il *decametro*, (1 *dam.*) che è uguale a 10 m., l'*ettometro*, (1 *hm.*) uguale a 100 m., il *kilometro*, (1 *km.*) uguale a 1000 m.

145. MISURAZIONE DEI SEGMENTI RISPETTO AD UNA UNITÀ QUALSIASI. — Abbiamo veduto come si misuri un segmento in metri, decimetri, centimetri,...

In modo più generale si può misurare un segmento per mezzo di un altro qualsiasi, assunto come *unità*.

Misurare un segmento a per mezzo di un segmento b significa trovare un summultiplo di b che sia pure summultiplo di a o, come si dice comunemente, sia contenuto in a un numero esatto di volte.



Si trovi p. es. che il 3° summultiplo di b è contenuto esattamente 5 volte in a; si abbia cioè

$$a = 5\,\frac{b}{3},$$

o, come si suole scrivere,

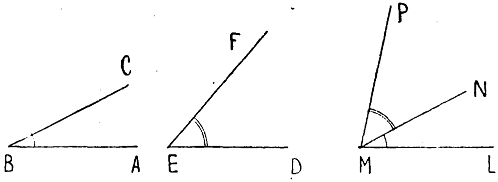
$$a = \frac{5}{3}\,b.$$

[Si legga « a uguale a cinque terzi di b »]

Allora si dice che $\frac{5}{3}$ è la « *misura* di a rispetto all'unità di misura b ».

Somma e differenza di angoli.

146. SOMMA DI DUE O PIÙ ANGOLI. — Per *sommare*



due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$, si portino a partire da un raggio ML e da una parte di esso, due angoli *conse-*

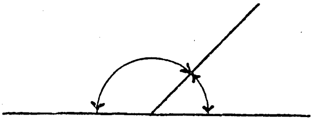
cutivi $\widehat{LMN}$, $\widehat{NMP}$, uguali rispettivamente ai dati. (Ciò si può fare ritagliando gli angoli dati o ricalcandoli su carta trasparente).

L'angolo $\widehat{LMP}$ così ottenuto dicesi *somma* di $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ (*addendi* o *parti*) e si scrive

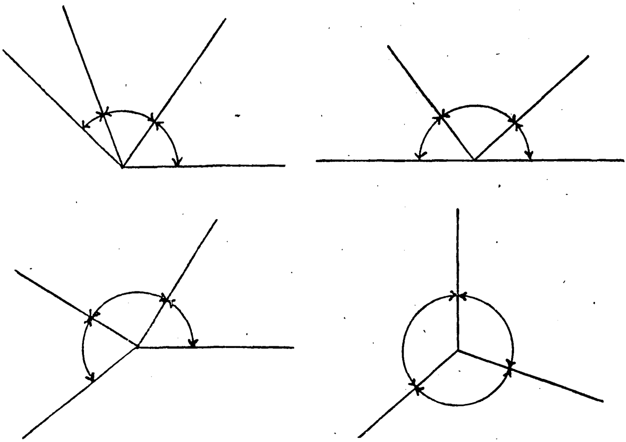
$$\widehat{LMP} = \widehat{ABC} + \widehat{DEF}.$$

In modo analogo si definisce la *somma di tre o più angoli.*

147. *La somma di due angoli adiacenti è un angolo piatto.*

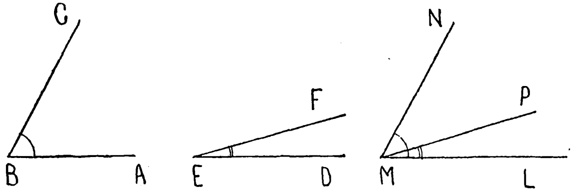


148. La somma di più angoli convessi può essere uguale a un angolo convesso o piatto o concavo od anche a due angoli piatti (*angolo di un giro*).



E si verifica che *la somma di più angoli non muta se si cambia l'ordine degli addendi.*

149. DIFFERENZA DI DUE ANGOLI. — Per trovare la *differenza* di due angoli disuguali $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ o, come si suol dire, per *sottrarre* dall' angolo maggiore $\widehat{ABC}$ il minore $\widehat{DEF}$, si prenda un angolo $\widehat{LMN}$ uguale al maggiore, cioè ad $\widehat{ABC}$, e si porti il minore in $\widehat{LMP}$.



L' angolo $\widehat{PMN}$ si dice *differenza* di $\widehat{ABC}$ e $\widehat{DEF}$; e si scrive

$$\widehat{PMN} = \widehat{ABC} - \widehat{DEF}.$$

150. Ritagliando degli angoli di carta si verifica che: *Se a due angoli uguali si sommano o si sottraggono angoli uguali, si ottengono angoli uguali.*

Multipli e summultipli di un angolo.

151. Dato un angolo $\widehat{AOB}$, la somma di due angoli uguali ad esso si dice *angolo doppio* di $\widehat{AOB}$ (o *multiplo* di $\widehat{AOB}$ *secondo* il numero 2).

Così le somme di tre o quattro o cinque,... angoli uguali ad $\widehat{AOB}$ si dicono *multipli* di $\widehat{AOB}$ secondo 3, o 4, o 5,...

I multipli di $\widehat{AOB}$ si indicano con

$$2\,\widehat{AOB}\ ,\ 3\,\widehat{AOB}\ ,\ 4\,\widehat{AOB},...$$

152. Dato un angolo $\widehat{AOB}$, dopo averlo ritagliato o ricalcato in lapis su carta trasparente, si ripieghi su sè stesso in modo che i due lati si sovrappongano l'uno all'altro. La ripiegatura dà una semiretta, che divide l'angolo $\widehat{AOB}$ in due parti uguali.

Codesta semiretta si chiama *bisettrice* dell'angolo e ciascuna delle due parti si dice *metà* di $\widehat{AOB}$.

In ogni caso, quando $\widehat{AOB}$ è diviso in un certo numero di parti uguali, ciascuna di queste si dice *parte aliquota* o *summultiplo* dell'angolo dato.

Codeste diverse parti aliquote si rappresentano con

$$\frac{\widehat{AOB}}{2}, \frac{\widehat{AOB}}{3}, \frac{\widehat{AOB}}{4}, \ldots$$

153. *Se due angoli sono uguali, sono pure uguali i loro doppi, i loro tripli, ecc. e così pure le loro metà, i loro terzi ecc.*

Misura degli angoli. Rapportatore.

154. Per misurare gli angoli si assume come unità fondamentale la 90^{ma} parte aliquota dell'angolo retto, la quale si chiama *grado* e si scrive 1°.

Se un angolo è multiplo di un grado secondo un certo numero, p. es. secondo il numero 27, si dice che « la *misura* o *ampiezza* dell'angolo dato è di 27 gradi » e si scrive « 27° ».

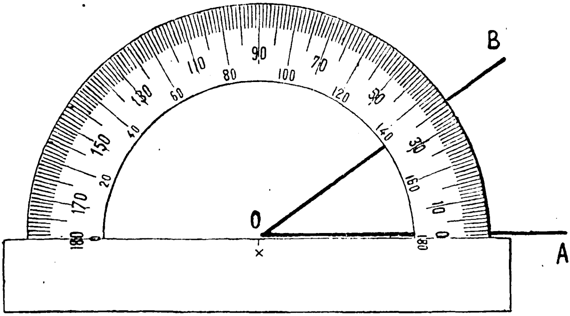
Avremo quindi che l'ampiezza di un angolo retto è di 90°; quella di un angolo acuto è minore di 90°, quella di un angolo ottuso maggiore di 90°.

155. Per misurare un angolo, che non sia multiplo esatto di un grado, si prendono come unità ausiliarie il *minuto* che è la 60^{ma} parte aliquota di 1° e il *secondo* che è la 60^{ma} parte aliquota del minuto, ossia la 3600^{ma} parte aliquota di 1°.

Un minuto si scrive « $1'$ » e un secondo » $1''$ ».

Così si dirà p. es. che l'ampiezza di un angolo è 35° 26′ 13″, cioè 35 gradi, 26 primi, 13 secondi, se l'angolo è uguale alla somma di 35 angoli uguali ad un grado, più 26 angoli uguali ad un minuto, più 13 angoli uguali ad un secondo.

156. Nel disegno per misurare gli angoli, come pure per confrontarli, sommarli ecc., si usa il SEMICIRCOLO GRADUATO O RAPPORTATORE, che è rappresentato nell' unita figura.



L' orlo curvo esterno del rapportatore è suddiviso in 180 intervalli per mezzo di tante intaccature rettilinee, le quali prolungate passano tutte per il punto medio O dell' orlo rettilineo interno e corrispondono alla divisione in 180 gradi dell' angolo di due retti (piatto) che ha il vertice in codesto punto e i lati su codesto orlo rettilineo. Le divisioni del rapportatore sono numerate di 10 in 10 tanto in un senso quanto nell' altro, affinchè si possano misurare gli angoli in entrambi i sensi.

Per misurare un angolo $A\widehat{O}B$ col rapportatore si adagia questo sull' angolo come è indicato dalla precedente figura, e la graduazione numerata permette subito di assegnare l' ampiezza in gradi di $A\widehat{O}B$.

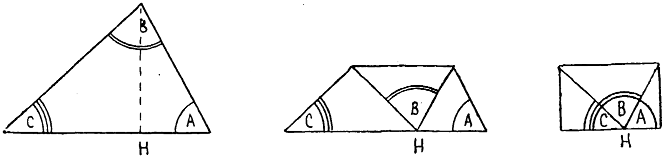
Per es. nel caso della figura l'ampiezza di $\widehat{AOB}$ è di 36°.

Somma degli angoli di un poligono.

157. La somma degli angoli di un poligono, che abbia un certo numero di lati, ha sempre la stessa ampiezza, qualunque sia la lunghezza dei lati e la forma del poligono.

Cominciamo dai triangoli.

Ritagliato nella carta un triangolo ABC, guardiamo quale sia il suo lato maggiore [1].



Se, come nella nostra figura, cotesto lato è AC abbassiamo da B la perpendicolare BH su AC servendoci della squadra o piegando la carta in modo che la piega passi per B e il lato AC si ripieghi su sè stesso.

Se allora pieghiamo le tre pnute del triangolo in maniera che i tre vertici risultino riuniti in H, vediamo che la somma dei tre angoli del triangolo dà un angolo di due retti (piatto) ossia di 180°.

Poichè questa verifica si può ripetere per ogni triangolo, abbiamo che: *In ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a* 180°.

---

[1] Questa verifica si può compiere anche se AB non è il lato maggiore, purchè non sia adiacente ad un angolo ottuso.

158. Risulta di qui che se in un triangolo si conoscono le ampiezze di due angoli si trova l'ampiezza del terzo sottraendo da 180° la somma delle ampiezze dei primi due.

159. Abbiamo inoltre che:

a) *In ogni triangolo rettangolo, gli angoli adiacenti all'ipotenusa sono entrambi acuti e sommati insieme danno* 90° o, come si dice, *sono complementari.*

b) *Se in un triangolo un angolo è ottuso, gli altri due sono entrambi acuti.*

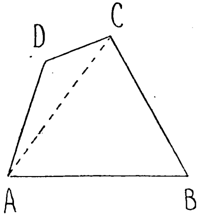
160. Infine notiamo che, siccome in un triangolo equilatero i tre angoli sono uguali fra loro e sommati insieme debbono dare 180°:

In ogni triangolo equilatero ciascun angolo è uguale a 60°.

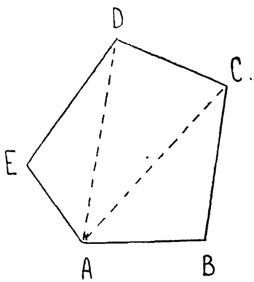
161. Ricordando il risultato del n. 157 possiamo trovare la somma degli angoli di un poligono qualsiasi.

Prendiamo anzitutto un quadrangolo ABCD.

Condotta una sua diagonale, p. es. la AC, il quadrangolo resta diviso in due triangoli ABC, ACD e la somma degli angoli del quadrangolo è uguale alla somma degli angoli di cotesti due triangoli. Poichè in ciascuno di cotesti triangoli la somma degli angoli è uguale a 180°, (n. 157), concludiamo che *la somma degli angoli del quadrangolo è uguale a* 360°.



Se invece di un quadrangolo consideriamo un



pentagono ABCDE e conduciamo in esso le congiungenti di un vertice A coi vertici non consecutivi C e D (*diagonali*) il pentagono resta diviso in *tre* triangoli, e poichè la somma degli angoli del pentagono è uguale alla somma degli angoli dei tre triangoli concludiamo che essa è uguale *a sei angoli retti cioè a* 180×3 *gradi.*

Analogamente si trova che *la somma degli angoli*

per un *esagono* è 180×4 gradi
» » *ettagono* » 180×5 »
» » *ottagono* » 180×6 »

e così via.

Abbiamo in tal modo che:

La somma degli angoli di un poligono qualsiasi è uguale a tante volte 180° *quanti sono i lati meno due.*

162. Siccome in un poligono regolare tutti gli angoli sono uguali, potremo facilmente determinare l'ampiezza di ciascun angolo di un poligono regolare che abbia un certo numero di lati.

P. es. in un pentagono regolare ciascun angolo avrà l'ampiezza di $\frac{180 \times 3}{5}$ gradi cioè di 108°; in un esagono regolare ciascun angolo avrà l'ampiezza di $\frac{180 \times 4}{6}$ gradi cioè di 120°, ecc.

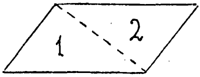
IX

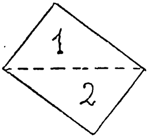
MISURA DELLE SUPERFICIE DEI POLIGONI.

Poligoni equivalenti.

163. Due poligoni possono avere **superficie uguali**, anche senza essere uguali (sovrapponibili).

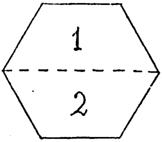
P. es. i due parallelogrammi dell' annessa figura



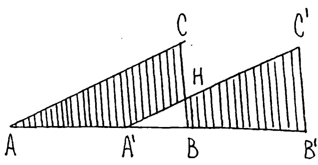


hanno superficie uguali in quanto sono entrambi *somme* degli stessi triangoli 1, 2.

Similmente hanno superficie uguali l' esagono e il



parallelogramma qui accanto disegnati perchè sono *somme* di trapezi uguali.



E infine hanno superficie uguali i due trapezi AA'HC, BB'C'H, perchè si ottengono *sottraendo* il medesimo triangolo A'BH dai due triangoli uguali ABC, A'B'C'.

164. Due poligoni aventi superficie uguali si dicono *equivalenti*.

165. Abbiamo allora che:

I. *Poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.*

II. *Somme di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti.*

III. *Differenze di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti.*

Misurazione della superficie di un poligono.

166. Per *misurare* la superficie di un poligono bisogna anzitutto fissare la *unità di misura*.

Solitamente si assume come *unità* il quadrato che ha per lato l' unità di misura dei segmenti. Così, quando si prende come unità delle lunghezze il *metro*, si assume come unità fondamentale per la misura delle superficie il *metro quadrato* cioè la superficie del *quadrato che ha per lato il metro* (1 m.^{2}).

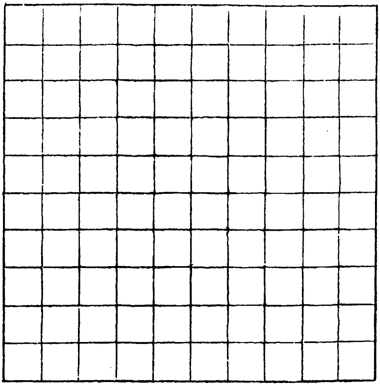
Come unità ausiliari si assumono allora il *decimetro quadrato* (1 dm.^{2}), il *centimetro quadrato* (1 cm.^{2}), il *millimetro quadrato* (1 mm.^{2}), e così pure il *decametro quadrato* (1 dam.^{2}), l' *ettometro quadrato* (1 km.^{2}), il *chilometro quadrato* (1 km.^{2}), cioè le superficie dei quadrati che hanno per lato rispettivamente un decimetro, un centimetro, un millimetro o un decametro, un ettometro, un chilometro (1).

167. Se, preso il metro quadrato ABCD, ne di-

---

(1) Per misurare le superficie dei terreni si usano come unità il decametro quadrato e l' ettometro quadrato, che si chiamano, in tal caso, rispettivamente *ara* (1 *a.*) ed *ettara* (1 *ha.*).

D C



A B

vidiamo i due lati AB, BC in decimetri e conduciamo pei 9 punti di divisione segnati su AB le parallele a BC e pei punti di divisione di BC le parallele ad AB, il metro quadrato vien diviso in 100 quadrati, di cui ciascuno ha per lato 1 dm.

Dunque il metro quadrato contiene esattamente 100 dm.^{2}.

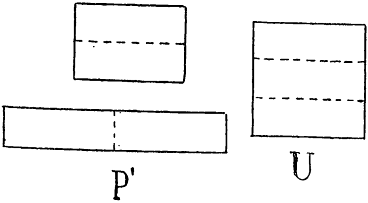
Così il decimetro quadrato contiene 100 cm.^{2} e il centimetro quadrato 100 mm.^{2}; onde risulta che il metro quadrato contiene 10.000 cm.^{2} e 1.000.000 mm.^{2}.

168. Misurare la superficie di un poligono vuol dire trovare quante volte il poligono contenga il metro quadrato, o il decimetro quadrato, o il centimetro quadrato,...

Se p. es. il poligono contiene esattamente 23 dm.^{2} si dice che la *misura* o *area* di esso è dm.^{2} 23.

Si può anche dire che l'area del poligono considerato è m.^{2} 0,23, o cm.^{2} 2300, o dam.^{2} 0,0023, o millimetri quadrati 230,000 ecc.

P



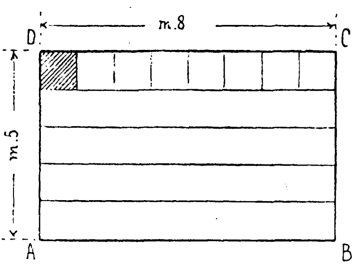
P' U

169. MISURAZIONE RISPETTO AD UNA UNITÀ QUALSIASI. — Si può misurare la superficie di un poligono P rispetto ad un qualsiasi altro, preso come *unità*. *Misurare* la superficie di P rispetto ad un qualsiasi poligono U vuol dire trovare una parte aliquota di U che sia contenuta un numero esatto di volte in P.

Se, come accade pel rettangolo P (o P') dell' unita figura, la 3ª parte di U è contenuta esattamente 2 volte in P, si dice che la *misura* di P (o P') rispetto ad U è $\frac{2}{3}$.

Area del rettangolo e del quadrato.

170. Per trovare l'area di un rettangolo ABCD, supponiamo dapprima che ciascuno dei due lati contenga un numero esatto di volte l'unità di misura.



P. es., i lati AB, AD siano rispettivamente di m. 8 e m. 5.

Se, dopo aver segnato su AD i metri, conduciamo pei punti di divisione le parallele ad AB, il rettangolo resta diviso in 5 rettangoli uguali. Ciascuno di questi poi è divisibile in 8 quadrati, ognuno dei quali è un metro quadrato. Abbiamo dunque che ABCD contiene 5 volte 8 metri quadrati, cioè la sua area è 40 m.².

171. Supponiamo in secondo luogo che i due lati del rettangolo non contengano un numero esatto di metri. Siano essi, p. es., di m. 3,4 e m. 2,6. Ciò vuol dire che i due lati sono rispettivamente di dm. 34 e dm. 26; cosicchè, nello stesso modo tenuto dianzi, il rettangolo si può decomporre in 34 rettangoli uguali, ciascuno dei quali contiene esattamente 26 dm.².

Perciò il rettangolo contiene 34 volte 26 dm.^{2} e la sua area è di

dm.^{2} 884

ossia di

m.^{2} 8,84.

Quest' ultimo numero si ottiene moltiplicando fra loro 3,4 e 2,6.

Siccome ciò che si è detto or ora si può ripetere per ogni rettangolo, possiamo enunciare la seguente

Regola. — *Per trovare l'area di un rettangolo si moltiplicano fra loro le lunghezze dei lati* (dimensioni del rettangolo).

172. Nell'applicare la regola precedente bisogna badare che le due dimensioni del rettangolo siano misurate rispetto alla stessa unità, cioè tutte e due in *metri*, o tutte due in *decimetri* e così via. E l'area risulta allora misurata rispettivamente in *metri quadrati* o in *decimetri quadrati* ecc.

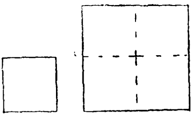
173. Dalla regola del n. 171 risulta quest'altra

Regola. — *Data l'area di un rettangolo e una sua dimensione per trovare l'altezza si divide l'area per la dimensione che si conosce.*

174. Il quadrato è un rettangolo avente le due dimensioni uguali. Abbiamo quindi la

Regola. — *Per trovare l'area di un quadrato si moltiplica per sè stessa la lunghezza del lato* o, come si dice, *si fa la seconda potenza o quadrato della lunghezza del lato.*

175. Preso un quadrato qualsiasi, p. es. di mm. 5 di lato e, perciò, di mm.^{2} 25 di area, consideriamo il quadrato di lato

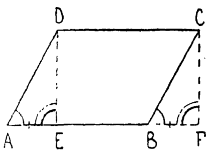


doppio ossia di mm. 10 di lato; la sua area è di mm.^{2} 100, ossia è *quadrupla* di quella del quadrato primitivo come del resto risulta dall' unita figura, in cui abbiamo due quadrati, cui l' uno ha il lato doppio dell' altro.

Cioè: *se il lato di un quadrato* Q *è doppio del lato di un altro quadrato* Q', *l' area di* Q *è quadrupla di quella di* Q'*; così se il lato di* Q *è multiplo secondo* 3, 4,... *del lato di un altro quadrato* Q', *il quadrato* Q *è multiplo di* Q' *secondo* 9, 16,...

Area del parallelogramma.

176. Disegnato un parallelogramma ABCD e presone un lato AB come *base*, si dice *altezza* la distanza di AB e DC.



Ciò premesso cerchiamo l' area di ABCD.

A tale scopo supponiamo che AD non sia maggiore di AB (se fosse AD > AB prenderemmo come base AD anzichè AB) e da D e C conduciamo le perpendicolari DE, CF alla AB.

I due triangoli BFC, AED sono uguali, cosicchè se dal parallelogramma ABCD tagliamo via il triangolo AED e lo portiamo in BFC, otteniamo il rettangolo EFCD. Vediamo così che il parallelogramma ABCD e il rettangolo EFCD si ottengono sommando allo stesso trapezio EBCD triangoli uguali e perciò hanno superficie uguali o, come si dice, sono equivalenti.

Perciò l' area del parallelogramma sarà uguale a quella del rettangolo, la quale si ottiene moltiplicando la lunghezza della base EF per quella dell'altezza DE.

Poichè EF è uguale alla base AB del parallelogramma e DE ne è l'altezza, otteniamo la seguente

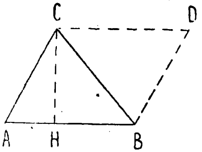
Regola. — *Per trovare l'area di un parallelogramma si moltiplicano le lunghezze della sua base e della sua altezza,* o, come si dice brevemente, *si moltiplicano fra loro la base e l'altezza.*

177. Abbiamo di qui quest' altra

Regola. — *Date l'area e la base di un parallelogramma, per trovare l'altezza si divide l'area per la base.*

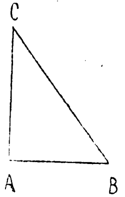
Area del triangolo.

178. Dato un triangolo ABC e fissato un suo lato AB come *base*, si dice *altezza* la distanza CH del vertice opposto C dalla base.



Ciò premesso, conduciamo da B la parallela ad AC e da C la parallela ad AB fino ad incontrarsi in D. Otteniamo così un parallelogramma ABCD, il quale è diviso dalla diagonale BC in due triangoli uguali. Poichè uno di questi è ABC, questo triangolo è la metà del parallelogramma; e noi per trovare l'area di ABC dovremo dividere per 2 l'area di ABCD.

Poichè questo parallelogramma ha la stessa base e la stessa altezza del triangolo troviamo la seguente



Regola. — *Per trovare l'area di un triangolo si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) della base e dell'altezza.*

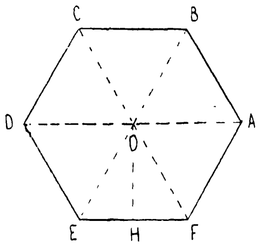
179. Se in un triangolo rettangolo si prende come base un cateto, l'altezza è data dall'altro cateto.

Perciò *l'area di un triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto* (delle lunghezze) *dei cateti.*

180. Dalla regola del n. 178 ricaviamo la seguente

Regola. — *Data l'area di un triangolo e la sua altezza (o la sua base) si trova la base (o l'altezza) moltiplicando per 2 l'area e dividendo il risultato per la base (o per l'altezza).*

181. Se vogliamo costruire un triangolo doppio o triplo o quadruplo di un dato, basta costruire un triangolo avente la stessa altezza del dato e la base doppia o tripla o quadrupla...



Si consideri allora un poligono regolare ABCDE e si congiunga il centro O coi vertici. Il poligono resta diviso in tanti triangoli isosceli quanti sono i lati, e questi triangoli, tutti uguali fra loro, hanno per base il lato e per altezza l'apotema del poligono.

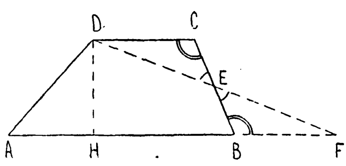
Il poligono è equivalente alla somma di codesti triangoli, ossia, per quanto si disse or ora, ad un triangolo avente per base il perimetro e per altezza l'apotema del poligono.

Abbiamo così la

Regola. — *Per trovare l'area di un poligono regolare si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) del perimetro e dell'apotema.*

Area del trapezio.

182. Nel trapezio ABCD congiungiamo il punto medio E del lato BC col vertice D.



Se tagliamo via dal trapezio il triangolo ECD e lo portiamo in EBF, vediamo che il trapezio è equivalente al triangolo AFD, che ha la stessa altezza DH del trapezio e la base AF uguale alla somma delle due basi AB, CD; cioè:

Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e di base uguale alla somma delle basi del trapezio.

183. Di qui, ricordando la regola del n. 178, ricaviamo la seguente:

Regola. — *Per trovare l'area di un trapezio si divide per 2 il prodotto (della lunghezza) dell'altezza per la somma (delle lunghezze) delle basi.*

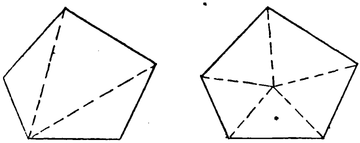
184. Da questa regola si ricavano le seguenti regole inverse:

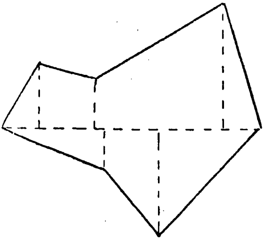
Regola. — a) *Per trovare l'altezza di un trapezio di cui si conoscono l'area e le (lunghezze delle) basi, si divide il doppio dell'area per la somma (delle lunghezze) delle basi.*

b) *Data l'area di un trapezio e data l'altezza e la lunghezza di una delle basi, si trova (la lunghezza de) l'altra base, dividendo il doppio dell'area per (la lunghezza de) l'altezza e sottraendo (la lunghezza de) la base data dal quoziente ottenuto.*

Area di un poligono qualsiasi.

185. Per determinare l'area di un poligono qualsivoglia esso si decompone per lo più in triangoli per mezzo delle diagonali uscenti da un vertice oppure congiungendo un punto interno coi singoli vertici; indi si misurano i vari triangoli così ottenuti e la somma delle aree di essi dà l'area del poligono.





Talvolta invece il poligono si suddivide in trapezi e triangoli rettangoli conducendo in esso una diagonale detta *base* (possibilmente nel senso della massima dimensione) e abbassando sulla base le perpendicolari dai vertici.

Così per lo più procedono gli agrimensori nel *rilievo* dei terreni.

X

LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA E AREA DEL CERCHIO.

Lunghezza della circonferenza.

186. Data una circonferenza, immaginiamo di averne costruito un modello concreto per es. mediante un filo di ottone. Se, dopo averlo tagliato in un punto, noi distendiamo il filo su di una retta, otteniamo un segmento c, che noi chiameremo *lunghezza della circonferenza data.*

Misurando questo segmento troveremo la *misura* della lunghezza della circonferenza [1].

In tal modo si trova per es. che la circonferenza di 1 m. di diametro è lunga

m. 3,14

o, se si vuol giungere ai decimillimetri,

m. 3,1416.

Se il diametro anzichè di 1 m., è di 2 m., si trova che la lunghezza della circonferenza è di

m. 6,2832,

ossia di

m. $(3{,}1416 \times 2)$.

[1] Questa misura si può del resto trovare direttamente servendosi di un metro a nastro comune o meglio ancora di un *metro clinico* (a nastro metallico flessibile).

Abbiamo così che quando si raddoppia il diametro, si raddoppia anche la lunghezza della circonferenza.

E così pure se il diametro è di m. 3 o m. 4, o m. 5, ecc.; la lunghezza della circonferenza è rispettivamente di

m. (3,1416 × 3) = m. 9,4248
m. (3,1416 × 4) = m. 12,5664
m. (3,1416 × 5) = m. 15,7080,

ecc.

Vale cioè la seguente

Regola. — *La lunghezza di una circonferenza si ottiene moltiplicando la lunghezza del diametro per il numero fisso* 3,14 o, *se si vuole una maggior precisione,* 3,1416.

Nota. — Risulta di qui che la lunghezza di una semicirconferenza si trova moltiplicando la lunghezza *del raggio* per 3,14 (o 3,1416).

Il numero fisso 3,14 (o 3,1416) pel quale si deve moltiplicare il diametro di una circonferenza per averne la lunghezza, si suole indicare in Matematica colla lettera greca π (*pi greco*).

187. Segue dalla regola del n. prec. quest'altra

Regola. — *Il diametro di una circonferenza si ottiene dividendo la lunghezza di essa per il numero* 3,14 *o* 3,1416.

188. Determinata la lunghezza di una circonferenza si può agevolmente trovare la lunghezza di un suo arco, che corrisponda ad un angolo al centro di data ampiezza

Si voglia, p. es., la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio di m. 1, che corrisponda all'angolo al centro di 43°.

Siccome la lunghezza della circonferenza è di m. 6,28, la lunghezza dell'arco corrispondente all'angolo al centro di 1° sarà di

m. (6,28 : 360)

e infine la lunghezza dell'arco corrispondente ad un angolo al centro di 43° sarà di

$$\text{m.}\frac{6{,}28 \times 43}{360} = \text{m. } 0{,}75.$$

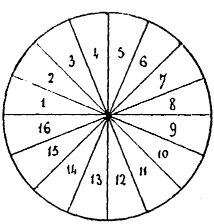
Abbiamo cioè che *la lunghezza dell'arco si trova moltiplicando la lunghezza dell'intera circonferenza per il numero dei gradi del corrispondente angolo al centro e dividendo il prodotto per 360.*

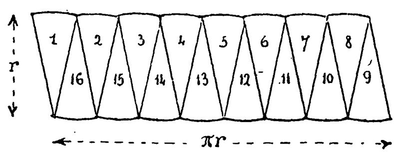
189. Se l'ampiezza dell'angolo al centro è dato in gradi minuti e secondi, essa si riduce anzitutto a secondi e poi per avere la lunghezza dell'arco corrispondente si moltiplica la lunghezza della circonferenza per il numero dei secondi ottenuto e si divide il prodotto per 1.296.000 (numero dei secondi contenuti in 360°).

Area del cerchio.

190. Sia dato un cerchio C di cui indichiamo con r la lunghezza del raggio.

Per determinarne l'area si divida la circonferenza in 4 parti uguali, per mezzo di due diametri perpendicolari: poi si divida in 8 parti uguali, conducendo i due diametri che dividono per metà gli angoli (retti) dei due primi; e così si suddivida il cerchio in 16 parti uguali e poi in 32 ecc. Se ci fermiamo ad un numero abbastanza grande, ciascuno degli archetti uguali, in cui è divisa la circonferenza, finisce quasi col confondersi con la corda rispettiva.





Allora ritagliamo i settori corrispondenti a codesti archetti, in cui vien diviso il cerchio C e disponiamoli come indica l'unita figura, in cui ci siamo limitati a dividere la circonferenza in 16 parti uguali. Otteniamo così una figura, la quale, se gli archetti sono abbastanza piccoli da potersi confondere praticamente colle corde rispettive, si riduce a un parallelogramma, avente per base la semicirconferenza e per altezza il raggio r del cerchio dato.

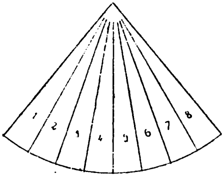
In base a ciò concludiamo che *la superficie del cerchio è uguale a quella di un parallelogramma avente la base uguale alla lunghezza della semicirconferenza e l'altezza uguale al raggio.*

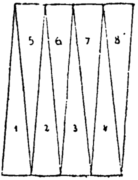
Ora l'area di un parallelogramma si trova moltiplicando la base per l'altezza (n. 176), e la base del nostro parallelogramma si trova moltiplicando il raggio per 3,14 (o, 3,1416), mentre l'altezza è il raggio stesso; cosicchè troviamo la seguente

Regola. — *L'area del cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per* 3,14 (o 3,1416).

191. Risulta dal n. prec. che se un cerchio C′ ha raggio doppio di un altro cerchio C, l'area di C′ è quadrupla di quella di C. Così se il raggio di C′ è multiplo di quello di C secondo 3,4,.., l'area di C′ è multipla di quella di C secondo 9,16,...

192. In modo analogo a quello tenuto pocanzi pel cerchio (n. 190) si trova (vedi figura) che: *la super-*





ficie di un settore è uguale a quella di un parallelogramma avente l'altezza uguale al raggio e la base uguale alla metà della lunghezza dell'arco corrispondente.

Risulta di qui, pel n. 176, la seguente

Regola. — *L'area di un settore circolare si trova dividendo per metà il prodotto del raggio per la lunghezza dell'arco corrispondente.*

193. Determinata l'area di un cerchio è facile trovar direttamente l'area di un suo settore che corrisponda ad un angolo al centro di nota ampiezza.

P. es. in un cerchio di dm. 5 di raggio si voglia trovar l'area di un settore corrispondente ad un angolo al centro di 27°.

L'area del cerchio è di

$$\text{dm.}^2\ (5 \times 5 \times 3{,}14) = \text{dm.}^2\ 78{,}50\,;$$

cosicchè un settore corrispondente ad un angolo al centro di 1° avrà l'area di

$$\text{dm.}^2\ (78{,}50 : 360)$$

e il settore prefissato avrà l'area di

$$\text{dm.}^2\ \frac{78{,}50 \times 27}{360} = \text{dm.}^2\ 5{,}88.$$

Insomma *l'area di un settore si trova moltiplicando l'area dell'intero cerchio per il numero di gradi del corrispondente angolo al centro e dividendo il prodotto per 360.*

Nota. — Se l'ampiezza dell'angolo al centro è data in gradi, minuti e secondi, si opera similmente a quanto si è detto al n. 189.

XI.

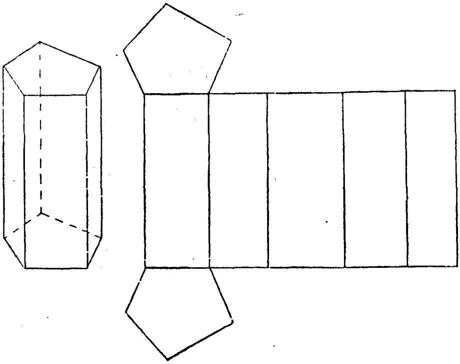
MISURA DELLE SUPERFICIE E DEI SOLIDI DEI POLIEDRI

Superficie di un poliedro.

194. L'area della superficie di un poliedro si trova sommando le aree delle sue facce.

Per trovare le aree delle superficie laterali del prisma retto e della piramide regolare vi sono delle regole molto facili da ricordare.

195. SUPERFICIE DEL PRISMA RETTO. — Supponiamo di avere un prisma retto, p. e. pentagonale, di cartoncino. Dopo averlo tagliato lungo gli spigoli delle basi (tranne due della stessa faccia) e lungo uno spigolo laterale, distendiamo il cartoncino su di un piano, p. es. sul foglio del disegno.



Otteniamo così lo *sviluppo* della superficie del prisma.

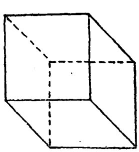
Codesto sviluppo è composto delle due basi e di un rettangolo avente per altezza l'altezza del prisma e per base la somma dei lati di una base del prisma. Questo rettangolo è lo *sviluppo della superficie laterale* del prisma.

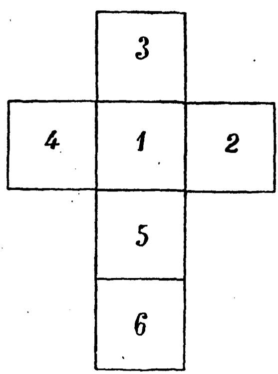
Ricordando la regola per trovare l'area di un rettangolo (n. 171) troviamo la seguente

Regola. — *Per trovare l'area della superficie laterale di un prisma retto si fa il prodotto (delle lunghezze) dell'altezza e della somma dei lati di una delle basi.*

Per avere l'area della superficie totale, bisogna aggiungere a quella della superficie laterale l'area delle due basi.

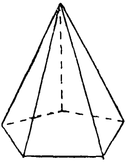
196. Lo sviluppo del cubo è formato da sei quadrati uguali.

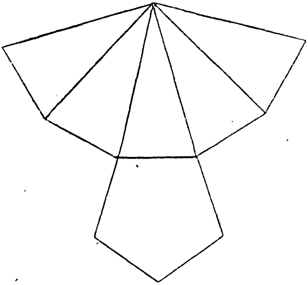




L'area della superficie (totale) di un cubo si trova moltiplicando per 6 la seconda potenza (della lunghezza) del lato.

197. SUPERFICIE DELLA PIRAMIDE REGOLARE. — Lo sviluppo di una piramide regolare è composto del po-





ligono base e di tanti triangoli isosceli uguali quanti sono i lati della base, e aventi per altezza l'*ipotenusa* della piramide.

Ora si noti che per trovare l'area della somma di più triangoli di uguale altezza basta moltiplicare la somma delle basi per l'altezza e dividere il prodotto per 2 (n. 178). Giungiamo così alla seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di una piramide regolare è data dal semiprodotto dell'apotema per la somma dei lati della base.*

Unità di misura e volume dei poliedri.

198. Per misurare i solidi si assume come *unità* il cubo che ha per spigolo l'unità di misura dei segmenti. Così, in generale, prendendosi come unità delle lunghezze il *metro*, si assume come unità fondamentale per la misura dei solidi il *metro cubo* cioè *il solido del cubo che ha per spigolo il metro* (1 m.^{3}).

Si assumono poi come unità ausiliari il *decimetro* *cubo* (1 dm.^{3}) (1), il *centimetro cubo* (1 cm.^{3}), il *millimetro cubo* (1 mm.^{3}), cioè i solidi dei cubi che hanno per spigolo rispettivamete un decimetro, un centimetro, un millimetro, e talvolta anche il *decametro cubo*, *l' ettometro cubo*, ecc.

Se immaginando di avere collocato sul pavimento un metro cubo ne dividiamo tre spigoli concorrenti in un vertice in decimetri e pei punti di divisione conduciamo i piani paralleli alle facce, il metro cubo vien diviso dai nove piani paralleli alle due facce orizzontali in 10 parallelepipedi rettangoli aventi la base di 1 m.^{2} e l' altezza di 1 dm.

Ciascuno poi di questi parallelepipedi è suddiviso dai piani condotti perpendicolarmente alla base in 100 dm.^{3}. Cioè il metro cubo contiene esattamente 1000 dm.^{3}.

Così il decimetro cubo contiene 1000 cm.^{3} e il centimetro cubo 1000 mm.^{3}; onde risulta che il metro cubo contiene 1.000.000 cm.^{3} e 1.000.000.000 mm.^{3}.

199. Similmente a quanto vale pei segmenti e per le superficie dei poligoni, *misurare* il solido di un poliedro P vuol dire trovare quante volte P contenga il metro cubo, o il decimetro cubo, o il centimetro cubo, ecc.

Se p. es. P contiene 45 cm.^{3} (e non 46 cm.^{3}) si dice che la *misura* o *volume* di P è cm.^{3} 45. Si può anche dire che il volume di P è dm.^{3} 0,045 o m.^{3} 0,000045 ecc.

200. MISURAZIONE RISPETTO AD UNA UNITÀ QUALSIASI. — Si

(1) È noto che il decimetro cubo è solitamente assunto come unità di misura dei liquidi e in tal caso si chiama più precisamente *litro* (1 l.); e si usano anche i suoi multipli: *decalitro* (10 litri), *ettolitro* (100 litri) e i summultipli; *decilitro* (0,1 di litro) *centilitro* (0,01 di litro).

può misurare il solido di un poliedro P rispetto ad un qualsiasi altro preso come unità.

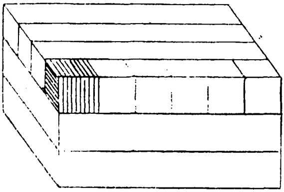
Misurare il solido di P rispetto ad un qualsiasi altro U preso come unità (fondamentale) vuol dire trovare una parte aliquota di U, che sia contenuta un numero esatto di volte in P. Se p. es., la 5ª parte di U sta 4 volte in P, si dice che

$$\frac{4}{5}$$

è la *misura* di P rispetto all'unità U.

Volume del prisma.

201. VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO. — Consideriamo un parallelepipedo rettangolo P e in primo luogo supponiamo che le tre dimensioni siano ciascuna uguale ad un numero intero di metri. P. es. le dimensioni siano di



$$\text{m. } 4, \text{ m. } 6, \text{ m. } 3.$$

Allora si vede dall'unita figura come P si possa dividere in 3 parallelepipedi rettangoli uguali, aventi la stessa base di P e l'altezza di m. 1. Ciascuno di questi è decomponibile in 4 parallelepipedi rettangoli fra loro uguali, alti e larghi 1 m. e lunghi 6 m.

Infine ognuno di questi ultimi parallelepipedi è divisibile in 6 cubi uguali, ognuno dei quali è 1 m.^{3}.

Concludiamo che P contiene esattamente

$$3 \times 4 \times 6$$

metri cubi, cioè il suo volume è di

$$\text{m.}^3 \, (3 \times 4 \times 6) = \text{m.}^3 \, 72,$$

e si ottiene moltiplicando fra loro le tre dimensioni.

b) Questa stessa regola vale anche nel caso, in cui le dimensioni siano frazionarie.

Siano esse p. es. di

m. 0,12; m. 0,23; m. 0,09.

Possiamo anche dire che le tre dimensioni sono di

cm. 12, cm. 23, cm. 9;

e allora si vede, come pocanzi, che il parallelepipedo contiene esattamente

$$12 \times 23 \times 9$$

centimetri cubi; cioè il suo volume è di

$$\text{cm.}^3\ 2484$$

ossia di

$$\text{m.}^3\ 0{,}002484.$$

E questo stesso numero si sarebbe ottenuto moltiplicando le tre dimensioni del parallelepipedo rettangolo, espresse in metri.

Abbiamo dunque la seguente

Regola. — *Il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto delle misure degli spigoli* (dimensioni del parallelepipedo), o, come si suol dire brevemente, *dal prodotto degli spigoli.*

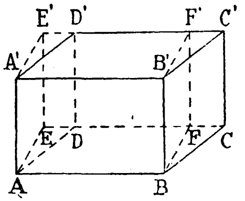
202. Siccome il prodotto delle due dimensioni della base dà l'area di questa (n. 171), la regola precedente si può anche enunciare dicendo che il *volume di un parallelepipedo è dato dal prodotto* (*dell'area*) *della base per l'altezza.*

203. VOLUME DEL CUBO. — Siccome il cubo è un parallelepipedo rettangolo avente le tre dimensioni uguali, risulta dalla regola del n. 201 che il *volume* *del cubo è dato dalla terza potenza* (della misura) *dello spigolo.*

204. Preso un cubo, p. es. di cm. 3 di spigolo il suo volume è di cm.^{3} 27. Il cubo che ha lo spigolo doppio, cioè di cm. 6, ha il volume di cm.^{3} 216, cioè appunto 8 volte maggiore del cubo dato: cioè *quando in* un *cubo si raddoppia lo spigolo, il volume si moltiplica per* 8.

Così se lo spigolo di un cubo si moltiplica per 3, 4,..., il *volume vien moltiplicato rispettivamente per* 27, 64, ...

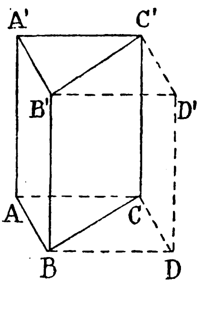
205. VOLUME DEL PRISMA RETTO. — La regola del n. 201 per trovare il volume di un parallelepipedo rettangolo vale anche per *un prisma qualsiasi.*



Cominciamo qui col dimostrarlo per il prisma retto, e in primo luogo consideriamo un parallelepipedo retto ABCDD'A'B'C'.

Conducendo per lo spigolo BB' il piano perpendicolare alla faccia ABB'A', tagliamo via dal parallelepipedo il prisma triangolare BCFF'B'C'. Portando questo prisma triangolare in ADEE'A'D', otteniamo un parallelepipedo rettangolo ABFEE'A'B'F'E'.

I due parallelepipedi hanno la stessa altezza e basi equivalenti (o di area uguale) (n. 176). Siccome essi hanno manifestamente lo stesso volume, avremo

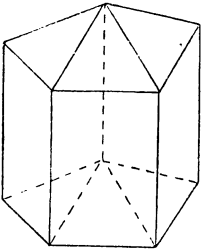


pel n. 201 che *per trovare il volume del parallelepipedo retto basta moltiplicarne l'area della base per (la lunghezza de) l'altezza.*

206. La stessa regola vale anche per un prisma retto triangolare ABCC'A'B'. Infatti si noti che esso, come risulta dall'unita figura, si può riguardare come la *metà* di un parallelepipedo retto avente la stessa altezza e la base *doppia* di quella del prisma triangolare.

Perciò *il volume di questo sarà dato appunto dal prodotto (dell'area) della relativa base per la (lunghezza dell') altezza.*

207. Considieriamo infine un prisma retto qualsiasi, p. es. pentagonale. I piani determinati da uno

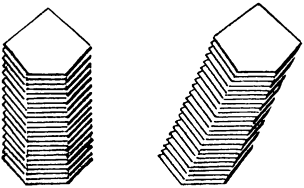


spigolo laterale fisso e da ciascuno degli altri spigoli laterali dividono il prisma dato in tre prismi retti triangolari, la cui altezza è quella stessa del dato e le tre basi, sommate, danno la base del prisma primitivo.

Il volume di questo si otterrà sommando i volumi dei tre prismi triangolari.

Ma evidentemente otterremo lo stesso resultato, prendendo addirittura l'area della base del prisma dato e moltiplicandola per la relativa altezza.

208. VOLUME DEL PRISMA QUALSIASI. — Ritagliando



in cartoncino sottile un numero abbastanza grande di poligoni uguali e disponendoli l' uno sull' altro, possiamo costruire il modello di un prisma retto, e disponendoli poi obliquamente (vedi la figura) possiamo, cogli stessi cartoncini, formare un qualsiasi prisma obliquo, avente la stessa base e la stessa altezza del primitivo.

È così reso manifesto, in via intuitiva, che *due prismi qualsiansi, aventi basi ed altezze uguali, hanno lo stesso volume.*

Di qui, ricordando il numero prec., ricaviamo la regola seguente che comprende come casi particolari tutte quelle che abbiamo enunciate prima d'ora (nn. 201, 206, 208):

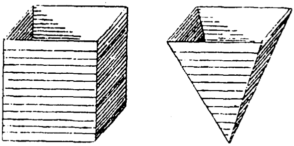
Regola. — *Il volume di un prisma qualsiasi è uguale al prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

209. Risulta di qui la seguente

Regola. — *Dividendo il volume di un prisma qualsiasi per l'area della base (o per l'altezza) si trova l'altezza (o l'area della base).*

Volume della piramide.

210. Per trovare una regola che insegni a calcolare il volume di una piramide possiamo eseguire la seguente verifica.



Presa una scatoletta della solita forma di parallelepipedo rettangolo, costruiamo in cartone la superficie laterale di una qualsiasi piramide avente la base e l'altezza uguali a quelle rispettivamente della scatola.

Se, tenendo la piramide colla bocca in alto come un imbuto, la riempiamo tre volte di arena, e ciascuna volta vuotiamo codesta arena nella scatola, verifichiamo che questa si riempie esattamente. Cioè il solido del parallelepipedo rettangolo è triplo di quello della piramide.

Una simile verifica si può eseguire per ogni piramide; cosicchè abbiamo che *il volume di una piramide qualsiasi è uguale alla terza parte di quello di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.*

211. Risulta di qui per il n. 208 la

Regola. *Il volume di una piramide è uguale ad un terzo del prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

212. Avremo ancora dal n. prec. la

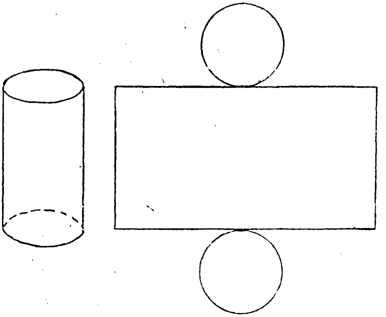
Regola. — *Dividendo il triplo del volume di una piramide per l'area della base (o per l'altezza) si ottiene l'altezza (o l'area della base).*

XII

MISURA DELLE SUPERFICIE E DEI SOLIDI DEL CILINDRO, DEL CONO E DELLA SFERA.

Misura della superficie e del solido del cilindro.

213. AREA DELLA SUPERFICIE DEL CILINDRO. — Immaginiamo di avere un cilindro, costruito in cartoncino. Se dopo averlo tagliato lungo le circonferenze di base e lungo una generatrice, distendiamo il cartoncino sul foglio otteniamo lo *sviluppo* del cilindro, il quale è costituito da due cerchi (basi) e da un rettangolo, che ha per altezza l'altezza del cilindro primitivo e per base quel lembo, che dianzi era disposto secondo la circonferenza base del cilindro.



Perciò *l'area della superficie laterale del cilindro è uguale a quella del rettangolo avente per altezza quella del cilindro e per base il segmento uguale alla lunghezza della circonferenza base del cilindro.*

Abbiamo quindi (n. 171) la seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di un cilindro si ottiene moltiplicando la lunghezza della circonferenza di lato per l'altezza.*

La superficie totale si ottiene aggiungendo alla superficie laterale il doppio dell'area della base.

Se per brevità indichiamo con r il raggio della base, con h l'altezza, con s la superficie laterale del cilindro e con π il solito numero fisso 3,14 (o 3,1416) la prima parte della regola precedente si potrà scrivere

$$s = 2\pi rh.$$

Se poi S indica la superficie totale abbiamo

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

ossia

$$S = 2\pi r(h + r).$$

214. Risulta dalla regola del n. prec. che:

a) *Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per l'altezza si ottiene la lunghezza della circonferenza della base.*

b) *Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per la lunghezza della circonferenza della base, si ottiene l'altezza.*

215. VOLUME DEL CILINDRO. — Dato un cilindro C, prendiamo un poligono P che abbia tutti i vertici sulla circonferenza di una delle basi dal cilindro (*poligono iscritto nella base*) e consideriamo il prisma retto che ha per base codesto poligono e la stessa altezza del cilindro. È chiaro che il volume del prisma è minore di quello del cilindro; e la differenza fra i due solidi è tanto più piccola, quanto più piccola è la differenza fra la superficie del cerchio base del cilindro e quella del poligono P, base del prisma.

Anzi codesta differenza sarà praticamente trascurabile se il poligono P ha un numero tanto grande di lati da potersi sensibilmente confondere col cerchio base del cilindro.

È così reso manifesto che *il volume del cilindro è uguale a quello di un prisma della medesima altezza avente per base un poligono che abbia superficie uguale a quella del cerchio base del cilindro.*

Avremo dunque pel n. 208 la

Regola. — *Il volume del cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza.*

Se si indica con V il volume del cilindro potremo scrivere

$$V = \pi r^2 h$$

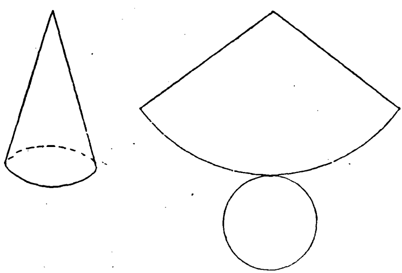
216. Risulta dalla regola del n. prec. che:

a) *Dividendo il volume del cilindro per l'altezza si ottiene l'area della base.*

b) *Dividendo il volume del cilindro per l'area della base si ottiene l'altezza.*

Misura della superficie e del solido del cono.

217. AREA DELLA SUPERFICIE DEL CONO. — Immaginiamo di avere un cilindro, costruito in cartoncino.



Se, dopo averlo tagliato lungo una generatrice e la circonferenza di base, distendiamo su di un piano il cartoncino, otteniamo lo *sviluppo* del cono, il quale è costituito da un cerchio (*base*) e da un settore, in cui il raggio è uguale all'apotema del cono e l'arco è il lembo che dianzi era incurvato in modo da formare la circonferenza base del cono.

Perciò *l'area della superficie laterale del cono è uguale a quella di codesto settore circolare, la quale* (n. 192) *è data dal semiprodotto dell'apotema del cono per la lunghezza della circonferenza base.*

Troviamo così la seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di un cono si ottiene dividendo per 2 il prodotto (delle lunghezze) dell'apotema e della circonferenza di base.*

L'area della superficie totale si ottiene aggiungendo l'area del cerchio base all'area della superficie laterale.

Se, per brevità, indichiamo con r il raggio della base, con a l'apotema, e con s, S le superficie laterale e totale del cono, possiamo scrivere

$$s = \frac{2\pi r \times a}{2}$$

ossia

$$s = \pi r a$$

ed

$$S = \pi r a + \pi r^2$$

ossia

$$S = \pi r(a + r).$$

218. Dalla regola del n. prec. ricaviamo che:

a) *Dividendo il doppio dell'area della superficie laterale del cono per l'apotema si ottiene la lunghezza della circonferenza della base.*

b) *Dividendo il doppio dell'area della superficie laterale del cono per la lunghezza della circonferenza della base, si ottiene l'apotema.*

219. VOLUME DEL CONO. — Dato un cilindro C di vertice V, si prenda un poligono P avente i vertici sulla circonferenza base (*poligono iscritto nella base*), e si consideri la piramide di base P e vertice V.

È chiaro che il volume di codesta piramide è minore di quello del cono e che la differenza fra i due solidi è tanto più piccola, quanto minore è la differenza fra la superficie della base del cono e quella del poligono iscritto P. Anzi, la differenza fra i due solidi sarà praticameute trascurabile se il poligono P ha un numero così grande di lati da potersi sensibilmente confondere col cerchio base.

È quindi evidente *che il volume del cono è uguale a quello di una piramide della medesima altezza, avente per base un poligono la cui superficie sia uguale a quella del cerchio base del cono.*

Così, ricordando la regola per trovare il volume di una piramide (n. 211), giungiamo alla seguente

Regola. — *Il volume di un cono si ottiene dividendo per 3 il prodotto (dell'area) della base per l'altezza.*

Se indichiamo con V il volume e con h l'altezza del cono potremo scrivere (si ricordi il n. 190)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

220. Inversamente, dalla regola del n. prec. ricaviamo che:

a) *Dividendo il triplo del volume del cono per l'area della base, si ottiene l'altezza.*

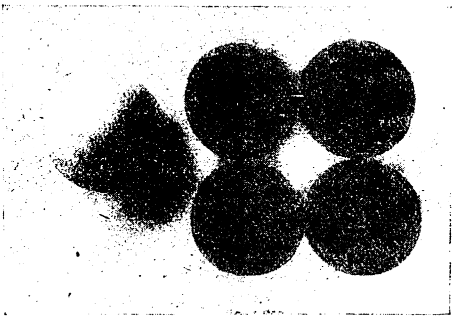
b) *Dividendo il triplo del volume del cono per l'altezza, si ottiene l'area della base.*

Misura della superficie e del solido della sfera.

221. AREA DI UNA SUPERFICIE SFERICA. — Il problema di misurare la superficie della sfera è più difcile che gli analoghi problemi pel cilindro e pel cono, perchè la sfera, non si può distendere sopra il piano neppure tagliandola opportunamente, come si è fatto pel cilindro e pel cono. Cioè la sfera non è una *superficie sviluppabile.*

Considerazioni, che sarebbe troppo difficile spiegare qui chiaramente, conducono ad ammettere che *la superficie della sfera è uguale al quadruplo di quella del suo cerchio massimo.*

Se vogliamo verificare questo fatto possiamo eseguire il seguente esperimento.

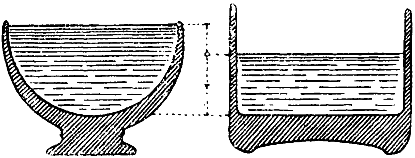


Presa una sfera di lamiera, p. es. in ottone, si ritaglino da una lamina piana di ottone di identico spessore quattro dischi circolari di diametro uguale a quello della sfera. Ponendo sui piatti di una bilancia da una parte la sfera e dall'altra i quattro dischi, si verifica che i due pesi sono esattamente uguali: cosicchè concludiamo che la sfera e i quattro dischi hanno anche ugual superficie.

Ricordando la regola per trovar l'area di un cerchio di dato raggio (n. 190), possiamo enunciare la seguente

Regola. — *L'area della superficie di una sfera è uguale al quadruplo del prodotto del quadrato del raggio per* 3,14 (*o* 3,1416).

222. VOLUME DELLA SFERA. — Per trovare il volume di una sfera, prendiamo un recipiente emisferico, p. es. una scodella, e un altro recipiente cilindrico avente lo stesso raggio.



Se dopo avere riempito di acqua la scodella, la vuotiamo nel recipiente cilindrico, verifichiamo che l'acqua vi giunge ad un'altezza che è esattamente due terzi del raggio dei due recipienti.

Verifichiamo, cioè, che il volume dell'emisfero è uguale a quello di un cilindro di raggio uguale a quello dell'emisfero e avente per altezza i due terzi del raggio stesso.

Raddoppiando questo cilindro, troviamo il volume della sfera, cioè:

Il volume della sfera è uguale a quello di un cilindro, avente lo stesso raggio e l'altezza uguale ai $\frac{4}{3}$ *del raggio stesso.*

Ora indicando con r la lunghezza del raggio della sfera e con π il solito numero 3,14 (o 3,1416), l'area della base del cilindro or ora definito è

$$\pi r^2$$

e l'altezza è $\frac{4}{3}r$, cosicchè il volume del cilindro, e quindi anche della sfera, sarà (n. 215)

$$\pi r^2 \times \frac{4}{3}r$$

ossia

$$\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Poichè la terza potenza di un numero si dice anche suo *cubo*, avremo la seguente

Regola. — *Il volume di una sfera si ottiene moltiplicando il cubo del raggio pei* $\frac{4}{3}$ di 3,14 *(o* 3,1416) [1].

223. Il volume

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

di una sfera di raggio r si può immaginare ottenuto, moltiplicando

$$4\pi r^2$$

per $\frac{1}{3}$ r. - Ricordando che $4\pi r^2$ è l'area della superficie della sfera (n. 221), troviamo che *il volume di una sfera si ottiene moltiplicando l'area della superficie per* $\frac{1}{3}$ *del raggio.*

---

[1] Siccome $\frac{4}{3} \times 3{,}141$ è uguale a 4,188, basta moltiplicare il cubo del raggio per 4,188 o 4,19.

224. A questa stessa regola si giunge direttamente colle seguenti osservazioni.

Sulla sfera si prenda un pezzetto piccolissimo di superficie limitato da archetti di circonferenza massima. Congiungendo i vertici di questo pezzetto di superficie sferica col centro otteniamo una piramide che è parte del solido sferico e si può approssimatamente considerare a base piana. Tutto il solido della sfera si può immaginare ottenuto sommando un numero grandissimo di siffatte piramidi e così vediamo come esso abbia lo stesso volume di un' unica piramide avente la base uguale alla superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio. Di qui appunto risulta la regola del n. prec.

ESERCIZI SUI CAPITOLI VIII-XII.

(Seconda classe)

---

[144] **39**. Si disegnino due segmenti lunghi cm. 2 e cm. 3,5 e la loro somma.

40. Si disegnino due segmenti lunghi cm. 7,3 e cm. 3,9 e la loro differenza.

41. Si disegnino un segmento lungo cm. 2,3 e il suo quintuplo.

42. Si disegnino un segmento lungo cm. 13,5 e il suo terzo.

[156] **43**. Qual'è l'ampiezza di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ di retto?

44. Di quanti gradi si gira un soldato che fa « *fianco dest* » o « *fianco sinistr* » o « *dietro front* »?

45. Qual'è l'ampiezza dell'angolo che colla direzione del Nord forma una banderuola girevole intorno a un pernio verticale, quando il vento soffia da Est o da Sud-Ovest o da Nord o da Nord-Nord-Est?

46. Che angolo formano le lancette di un orologio alle 1^h, alle 3^h, alle 4^h, alle 6^h, alle 12^h, alle $3^h30'$, alle $5^h10'$?

47. Si disegnino col rapportatore due angoli di 19° e 27° e la loro somma.

48. Si disegnino col rapportatore tre angoli di 39°, 43°, 33° e la loro somma.

49. Si disegnino col rapportatore due angoli di 73° e 39° e la loro differenza.

50. Si disegnino col rapportatore un angolo di 21° e il suo triplo.

51. Si disegnino col rapportatore un angolo di 72° e il suo terzo.

52. Un angolo è la 5ª parte del suo adiacente. Qual'è la sua ampiezza?

53. Qual'è l'ampiezza di due angoli adiacenti, di cui l'uno è multiplo secondo 5 del summultiplo secondo 4 dell'altro?

54. Un angolo supera di 15'48'' il suo adiacente: qual'è l'ampiezza dell'angolo considerato?

55. Disegnate due rette parallele (con riga e squadra) si conduca (servendosi del rapportatore) una trasversale che con una delle parallele formi un angolo di 35° e per ciascuno degli altri sette angoli si segni la relativa ampiezza.

56. Uno degli angoli interni determinati da due rette parallele con una trasversale è di 68°43'25'': si calcolino gli altri angoli.

57. Due rette parallele sono segate da una terza retta in modo che ciascuna di esse forma colla trasversale due angoli adiacenti di cui l'uno è i $\frac{4}{5}$ dell'altro. Qual parte di retto è ciascuno degli angoli che fa questa secante colle parallele?

58. Qual'è l'ampiezza del supplementare dell'angolo di 57°?

59. Qual'è l'ampiezza del supplementare dell'angolo di 120°46'?

60. Qual'è l'ampiezza del supplementare della somma di due angoli di 37° e 45°?

61. Qual'è l'ampiezza del supplementare della somma di due angoli di 37°51' e 42°38'?

62. Chiamando *complementari* due angoli la cui somma sia di un angolo retto, si trovi l'ampiezza del complementare di 50°, 30°, 70°, 25°, 13°, 89°, 7 $^1/_2$°, 45°, 36 $^1/_4$°, 30 $^1/_4$°.

63. Qual'è l'ampiezza di un angolo che sia doppio del suo complementare?

64. Un angolo è uguale a $\frac{2}{5}$ del suo complementare. Quali sono le ampiezze dell'angolo e del suo complementare?

65. Disegnati un angolo $\widehat{ABC}$ di 42° e il suo adiacente, si determini l'ampiezza dell'angolo delle bisettrici dei due angoli considerati.

66. Le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

[157] **67.** In un triangolo due angoli sono di 37° e 45°. Qual'è l'ampiezza del terzo angolo?

68. In un triangolo due angoli sono uguali rispettivamente a 47°25′16″, 84°13′28″. Determinare il terzo angolo.

69. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{A}$ è triplo e $\widehat{B}$ è quadruplo di $\widehat{C}$.

70. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{A}$ è triplo di $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ è uguale alla sesta parte di $\widehat{C}$.

71. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{A}$ è quintuplo di $\widehat{B}$ e $\widehat{B}$ è quadruplo di $\widehat{C}$.

72. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{C} - \widehat{A} = 44°$ e $\widehat{C} - \widehat{B} = 25°$.

73. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ di un triangolo, sapendo che $\widehat{A}$ supera $\widehat{B}$ di 69° e $\widehat{B}$ supera $\widehat{C}$ di 51°.

74. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è di 39°: qual'è l'ampiezza dell'altro angolo acuto?

75. In un triangolo rettangolo un angolo è di 65°43′: qual'è l'ampiezza dell'altro angolo acuto?

76. Determinare l'ampiezza dell'angolo alla base di un triangolo rettangolo isoscele.

77. In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è doppio dell'altro: qual'è l'ampiezza dei due angoli?

[161] **78.** Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ di un

quadrilatero, sapendo che $\widehat{B}$ è doppio, $\widehat{C}$ triplo e $\widehat{D}$ quadruplo di $\widehat{A}$.

79. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ di un quadrilatero, sapendo che $\widehat{B}$ è doppio di $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ è doppio di $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ è doppio di $\widehat{C}$.

80. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ di un quadrilatero, sapendo che $\widehat{A}$ è doppio di $\widehat{B}$, $\widehat{B}$ è la terza parte di $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ è la quarta parte della somma di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$.

81. Calcolare le ampiezze degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ di un quadrilatero sapendo che $\widehat{A}$ supera $\widehat{B}$ di 3°, $\widehat{B}$ supera $\widehat{C}$ di 6° e $\widehat{C}$ supera $\widehat{D}$ di 9°.

82. La somma di tre angoli di un pentagono è uguale a 427°49′15″ : degli altri due uno è doppio dell'altro. Quanto valgono questi due angoli?

83. Calcolare la somma degli angoli di un poligono a 12 lati o a 30 lati o a 52 lati.

84. In quale poligono la somma degli angoli è di 2340° o di 3240° o di 4320°?

85. Un poligono equiangolo ha 36 lati: qual'è l'ampiezza di ciascun angolo esterno?

86. L'angolo esterno di un poligono equiangolo è uguale a 12°: quanti lati ha il poligono?

87. In un poligono equiangolo ciascun angolo è di 174° (o di 157,5° o di 175° o di 175,5°). Quanti lati ha il poligono?

88. Qual'è l'ampiezza dell'angolo del decagono regolare? [162]

89. Qual'è l'ampiezza dell'angolo dell'ottagono regolare?

90. Perchè si può costruire un pavimento con mattonelle, tutte uguali, a forma di triangoli equilateri o di quadrati o di esagoni regolari?

91. Si può costruire un pavimento si possono adoperare uguali a forma di pentagoni regolari?

92. Per costruire un pavimento si possono adoperare delle mattonelle tutte uguali a forma di ottagoni regolari e delle altre mattonelle fra loro uguali, quadrate, aventi lo stesso lato degli ottagoni. Perchè?

93. Per costruire un pavimento si possono combinare dei dodecagoni regolari uguali con dei triangoli equilateri uguali di ugual lato: perchè?

[171] **94**. Calcolare l'area di un rettangolo che ha m. 36 di perimetro (somma dei lati) e un lato doppio del consecutivo.

95. In un rettangolo il perimetro è di cm. 26 e la base supera l'altezza di cm. 3. Qual'è l'area del rettangolo?

96. Calcolare l'area di un rettangolo, avente il perimetro di m. 60 e l'altezza uguale ai $^2/_3$ della base.

97. Si vuol seminare a frumento un campo rettangolare le cui dimensioni sono di m. 294,6 e m. 300,5. Quanta sementa occorrerà, posto che se ne vogliano seminare El. 2,5 per ogni ha?

98. In un appartamento si vogliono tappezzare alcune stanze; la superficie totale da ricoprire è di m.^{2} 120 e i rotoli di carta da parati che si vuol usare hanno m. 12 di lunghezza per m. 0,50 di larghezza e costano L. 3,50 l'uno. Quanti rotoli occorrono e quanto si deve spendere?

99. Si vuol pavimentare con mattonelle di cemento una stanza lunga m. 4,50 e larga m. 3,75. Quanto si spenderà se il prezzo pattuito coll'imprenditore è, compresa la mano d'opera, di L. 5,60 al m.^{2}?

100. Si vuol coprire di *linoleum* il pavimento di una stanza di m. 5,80 $\times$ m. 4,20, lasciando scoperto, per collocarvi una stufa, un rettangolo di cm. 80 $\times$ cm. 55. Quanto si spenderà, se il costo del *linoleum*, compresa la messa in opera è di L. 3,50 al m.^{2}?

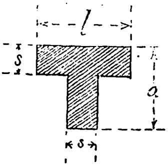
101. Si vogliono intonacare le pareti e il soffitto di una cucina lunga m. 4, larga m. 3,75 e alta m. 3,50 e di più si vogliono verniciare ad olio le pareti fino all'altezza di m. 1,60. Quanto si spenderà se il prezzo pattuito per l'intonaco è di cm. 35 al m.^{2} e quello per la verniciatura è di cm. 70 al m.^{2}?

102. Una tavola rettangolare è lunga m. 1,50 e larga m. 1,20. Quanti dm.^{2} di tela cerata occorrono per ricoprirla, se per fissare con borchie la copertura agli orli occorre che essa sopravanzi da tutti e quattro le parti di 3 cm.?

103. Si vuol piantare a frutteto un campo rettangolare lungo m. 760 e largo m. 270. Quanti alberi da frutta vi si potranno piantare se si vuole che vi sia un albero ad ogni 16 m.^{2}?

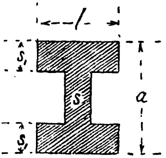
104. Un giardino rettangolare di m. 28,4 di lunghezza e m. 15,8 di larghezza è traversato parallelamente ai lati da una strada nel senso della lunghezza, larga dm. 11,5 e da due sentieri nel senso della larghezza, larghi cm. 95. Qual'è l'area delle strade? Quale quella del terreno coltivato?

105. Un'incisione lunga cm. 84 e alta cm. 64 ha una cornice piana, larga cm. 13. Qual'è la superficie della cornice?



106. Si calcoli l'area della sezione di una trave in ferro a T, posto che le dimensioni siano (vedi figura dove a indica l'altezza, l la larghezza delle ali, s lo spessore dell'anima, e dell'ala):

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$l =$ mm.	60	100	180	25	80	140
$a =$ mm.	30	50	90	25	80	140
$s =$ mm.	5,5	8,5	14,5	3,5	9	15



107. Si calcoli l'area della sezione di una trave in ferro a doppio T, posto che le dimensioni siano (vedi figura dove a indica l'altezza, l la larghezza delle ali, s lo spessore dell'anima, s_1 lo spessore delle ali):

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$l =$ mm.	70	90	110	113	116	125
$a =$ mm.	140	200	250	260	270	300
$s =$ mm.	6	7,5	9	9,4	9,7	10,8
$s_1 =$ mm.	9	11,3	13,6	14,1	14,7	16,2

108. Qual'è l'altezza di un rettangolo di m.^{2} 19280 di
[173] area se la base è di m. 705,60?

109. Un rettangolo ha l'area di un'ettara, e un lato di m. 285. Qual'è la lunghezza dell'altro lato?

110. Qual'è la base di un rettangolo di m.^{2} 19280, se l'altezza è di m. 352,80?

111. Di due rettangoli equivalenti l'uno è lungo m. 117 e largo m. 35, l'altro è lungo m. 65: quanto è largo questo secondo rettangolo?

112. Calcolare l'area del quadrato che ha m. 29 di perimetro. [174]

113. Quando con un certo istrumento si è praticamente misurato un segmento e si dice che esso è lungo cm. 13, si intende che la lunghezza del segmento considerato è compresa fra cm. 12,5 e cm. 13,50. Fra quali limiti è compresa l'area del quadrato del segmento anzidetto?

114. Quante piastrelle quadrate di cm. 20 di lato occorrono per pavimentare un corridoio di 8 m. di lunghezza e di 80 cm. di larghezza?

115. Ciascuno scacco di una scacchiera ha cm. 3,8 di lato. Qual'è l'area della scacchiera? [Si ricordi che su ciascun lato si hanno 8 scacchi].

116. Si vuol inghiaiare una piazza quadrata di m. 78 di lato. Quanto si spende se si è convenuto coll'imprenditore il prezzo di L. 0,15 al m.^{2}?

117. Quanti m.^{2}, Dm.^{2}, Hm.^{2}, Km.^{2} sono contenuti in un miglio geografico quadrato, se la lunghezza del miglio geografico è di m. 7420 (o più esattamente m. 7420,44)?

118. Un quadrato ha il lato di m. 18; quale sarà il lato di un quadrato di superficie doppia?

[176] **119**. Calcolare l'area di un parallelogramma, avente la base di m. 105,75 e l'altezza di m. 86,95.

120. Un parallelogramma ha base doppia dell'altezza e la somma della base e dell'altezza è di m. 3,75. Qual'è l'area del parallelogramma?

121. Le vetrate alle finestre di una chiesa sono formate ciascuna da 25 rombi di vetro rosso e 36 rombi di vetro azzurro e ciascun rombo ha cm. 12 di lato e cm. 8 di altezza. Quanti m.^{2} di vetro rosso e quanti di vetro azzurro si sono adoperati per le vetrate di otto finestre?

122. Un parallelogramma di m.^{2} 16,92 d'area ha la base di m. 7,20. Qual'è l'altezza?

123. Un parallelogramma di m.^{2} 20,02 ha l'altezza di m. 3,25. Qual'è la base?

[178] **124**. Trovare l'area di un triangolo avente m. 94,70 di base e m. 137,90 di altezza.

125. L'area di un rombo è uguale al semiprodotto delle sue diagonali. [Si considerino i triangoli in cui il rombo è diviso dalle due diagonali].

126. Calcolare l'area di un rombo le cui diagonali sono m. 6 e m. 8.

127. Calcolare l'area di un rombo, in cui la somma delle diagonali sia di m. 535,50 e una diagonale sia uguale ai $^4/_5$ dell'altra.

128. L'area di un quadrangolo è uguale al semiprodotto di una diagonale per la somma delle distanze da questa degli altri due vertici.

129. Qual'è la base di un triangolo di m.^{2} 28728 di area se l'altezza è di m. 42? [180]

130. Quali sono la base e l'altezza di un triangolo di m.^{2} 875 di area, se la base è uguale ai $\frac{2}{5}$ dell'altezza?

131. Qual'è l'altezza di un triangolo che ha m. 12 di base ed è equivalente a un altro triangolo, in cui la base è di m. 20 e l'altezza è di m. 6?

132. Qual'è la base di un triangolo isoscele di m. 20 di altezza, equivalente a un triangolo rettangolo di cateti di m. 30 e m. 18?

133. Un triangolo ha l'area di 3 ettare e la base di m. 485,6. Qual'è l'altezza?

Tabella degli apotemi e delle aree di alcuni poligoni regolari di m. 1 di lato. [181]

Poligono	Apotema	Area
Triangolo . . .	m. 0,2887	m.^{2} 0,4330
Quadrato . . .	» 0,5000	» 1,0000
Pentagono . .	» 0,6882	» 1,7205
Esagono . . .	» 0,8660	» 2,5981
Ottagono . . .	» 1,2071	» 4,8284
Decagono . . .	» 1,5388	» 7,6942
Dodecagono . .	» 1,8660	» 11,1962

La tabella precedente serve per trovare l'apotema o l'area di un poligono regolare di una delle specie indicate nella prima colonna, che ha un lato di lunghezza data qualsiasi. Per aver l'apotema basta moltiplicare la lunghezza del lato (in metri) per l'apotema del corrispondente poligono di m. 1 di lato. Per avere l'area (in m.²) basta moltiplicare il quadrato della lunghezza (in m.) del lato per l'area del corrispondente poligono di m. 1 di lato.

[183] **134**. Calcolare l'area di un trapezio, avente l'altezza di m. 20,15 e le basi di m. 34,25 e m. 62,41.

135. Un fanale a gas è formato da otto vetri di forma trapezoidale connessi da un'intelaiatura metallica. I quattro vetri inferiori sono più grandi e hanno le due basi di cm. 55 e cm. 60 e sono alti cm. 45. Gli altri quattro hanno le basi di cm. 55 e cm. 50 e sono alti cm. 25. Qual'è l'area totale degli otto vetri?

136. Da un rettangolo ABCD di m. 25 di lunghezza (AB) su m. 16 di larghezza (BC), si taglia via un triangolo CBE, in modo che il segmento BE sia uguale al quarto di AB. Qual'è l'area del triangolo? Quale quella del trapezio?

[184] **137**. In un trapezio, in cui le basi sono di m. 30 e m. 40, l'area è di m.² 700. Si calcoli l'altezza.

138. Determinare l'altezza di un trapezio, la cui area è m.² 223,875 e i cui lati paralleli sono rispettivamente di m. 13,5 e di m. 6,4.

139. Calcolare la base minore di un trapezio, in cui l'area è di m.² 200, la base maggiore di m. 18 e l'altezza di m. 12.

140. L'area di un trapezio è m.² 542,5 l'altezza è m. 21,7 e la differenza dei due lati paralleli è m. 11,2. Quali sono codesti due lati?

141. Calcolare le basi e l'altezza di un trapezio di m.² 100, sapendo che la base minore è la metà della base maggiore e l'altezza è uguale a $^1/_5$ della somma delle basi.

---

[186] **142**. Il diametro di una moneta d'oro da 100 lire è di mm. 35. Quale ne è la lunghezza dell'orlo?

143. Trovare la lunghezza dell'orlo di una moneta d'oro da 20 o 10 o 5 lire, sapendo che i diametri rispettivi sono di mm. 21, mm. 19, mm. 17.

144. Quanti chilometri ha percorso un ciclista se le ruote della sua bicicletta, aventi il diametro di cm. 72 hanno compiuto 3250 giri?

145. In un orologio da tasca le lancette dei minuti, delle ore e dei secondi sono lunghe rispettivamente mm. 19, mm. 9, mm. 6. Qual'è il cammino che l'estremo di ciascuna di esse descrive in 12 ore?

146. Si vuole attaccare una frangia all'orlo di un tavolino rotondo di cm. 60 di diametro. Quanti metri di frangia occorreranno?

147. In quanto tempo un cavallo da corsa che batte m. 12,6 al secondo, percorre un cammino circolare di m. 112 di diametro?

148. Qual'è il cammino percorso in ogni secondo da un punto dell'equatore terrestre per fatto della rotazione della terra? (Il raggio equatoriale terrestre è di km. 6370). Quale è il cammino percorso in un giorno?

149. Quale cammino percorre in un secondo la terra nella sua rivoluzione intorno al sole, se il suo movimento si riguarda circolare ed uniforme? (La distanza dalla terra al sole è di 150 milioni di chilometri, e l'anno solare è di giorni 365 e $^{1}/_{4}$).

150. Data una semicirconferenza di cm. 7 di diametro, si divida codesto diametro in due parti di cm. 2 e cm. 5, e su ciascuna si descriva una semicirconferenza. Si verifichi che la lunghezza della semicirconferenza maggiore è uguale alla somma delle lunghezze delle altre due.

151. Una semicirconferenza ha il diametro di m. 5,25. Codesto diametro è diviso in 5 parti uguali e su ciascuna, presa come diametro, è descritta una semicirconferenza. Quale è la lunghezza della somma di queste cinque semicirconferenze? Si confronti questa somma colla lunghezza della semicirconferenza maggiore.

152. Quale è il raggio dell'equatore terrestre se la sua [187]
lunghezza è di km. 40000?

153. Se, come si suole, si assume come raggio dell'equatore terrestre 860 miglia geografiche e come lunghezza dello equatore stesso 5400 miglia geografiche, vi è accordo fra le due cifre?

[189] **154.** Quale dev' essere la lunghezza del diametro di una circonferenza, perchè su di essa l' arco di 1′ sia uguale ad 1 mm.?

155. Quale sarà la lunghezza dell' arco della circonferenza lunga m. 3,8, corrispondente all' ampiezza di 47°56′39″? [Cfr. es. prec.].

[190] **156.** Calcolare l' area del cerchio, la cui circonferenza è di m. 15,79.

157. Qual' è l' area del cerchio che ha m. 7,5 di raggio?

158. Qual' è il raggio di un cerchio, la cui superficie è di m.^{2} 12,64?

159. In una lamina di latta, avente le dimensioni di cm. 80 e cm. 64, quanti dischi si possono ritagliare di cm. 4 di raggio, se le loro circonferenze debbono essere tangenti? Qual' è in decimetri quadrati l' area della superficie restante?

160. Si è fatta costruire una porta, avente la forma di un rettangolo di m. 4,50 di larghezza per m. 6,50 di altezza, sormontata da un semicerchio: e si è convenuto di dare al legnaiolo L. 45 al m.^{2} e al verniciatore L. 4,35 al m.^{2} per l' esterno, e L. 3 al m.^{2} per l' interno. Quanto costa la porta?

161. Qual' è l' area della corona circolare compresa fra due circonferenze concentriche, aventi rispettivamente il raggio di m. 3 e m. 5?

162. Si misuri la superficie della figura racchiusa dalle tre semicirconferenze dell' esercizio n. 150, supposte descritte tutte e tre dalla stessa parte del diametro comune (*Arbelo* = trincetto da calzolaio).

163. L' autore del papiro *Rhind* (1700 av. Cr.) dice che l' area di un cerchio è uguale a quella del quadrato di lato uguale agli $\frac{8}{9}$ del diametro del cerchio considerato. Che differenza dà questa regola rispetto a quella assegnata nel testo (n. 190) per un cerchio di diametro uguale a m. 1?

[193] **164.** Qual' è l' area di un settore di 30° in un cerchio di m. 6,40 di raggio?

165. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual' è la lunghezza dell' arco corrispondente ad un settore di m.^{2} 3,60 di area?

166. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual'è l'angolo al centro di un settore di m.² 4,76?

---

167. Un prisma triangolare retto è alto cm. 12 e gli spigoli della base sono di cm. 15, cm. 9, cm. 8. Si calcoli l'area della superficie laterale. |195|

168. Si calcoli la superficie totale di un prisma retto alto m. 0,75 e avente per base un triangolo rettangolo i cui cateti siano di cm. 15 e cm. 23.

169. I tre spigoli concorrenti in un vertice di un parallelepipedo rettangolo sono lunghi dm. 8, dm. 11. dm. 13. Calcolare l'area della superficie del parallelepipedo.

170. Un lattoniere deve costruire un tubo di lamiera di zinco a sezione quadrata di cm. 15 di lato e lungo m. 2,25. Quanti dm.² di lamiera occorreranno, se per la saldatura si debbono contare 2 cm. in più?

171. Calcolare l'area della superficie di un cubo di m. 2,5 di spigolo. |196|

172. Quanti cm.² di carta dorata occorrono per rivestire un cubo di 15 cm. di spigolo?

173. Qual'è l'area della superficie laterale di una piramide retta a base triangolare equilatera, in cui lo spigolo di base sia di m. 8 e l'apotema di m. 10? |197|

174. In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base è di m. 5 e l'apotema è di m. 8: qual'è l'area totale?

175. Una tenda da campo ha forma di piramide retta a base quadrata, di cui il lato di base è di m. 2,75 e l'altezza di ciascuna faccia è di m. 3,50. Di quanti m.² è la superficie della tenda?

176. Una piramide retta a base esagonale regolare ha l'apotema di dm. 26 e lo spigolo di base di cm. 48. Si calcolino le aree della superficie laterale e della superficie totale. [Cfr. la tabella della pag. 107].

TABELLA delle aree delle superficie dei poliedri regolari di spigolo uguale a m. 1.

Poliedro	Superficie
Tetraedro regolare .	$m.^2$ 1,7320...
Cubo	» 6,0000...
Ottaedro regolare .	» 3,4141....
Dodecaedro regolare	» 20,6457...
Icosaedro regolare .	» 8,6602...

Analogamente a quanto si disse in Geometria piana (pag. 108) sull'area dei poligoni regolari, l'area (in m^2), di un poliedro regolare di spigolo l (dato in m.) si ottiene moltiplicando per il quadrato l^2 di l l'area del poliedro regolare omonimo di spigolo uguale ad 1.

177. Qual'è l'area della superficie totale di un tetraedro regolare avente lo spigolo di cm. 4?

178. Calcolare l'area della superficie di un ottaedro regolare di m. 1 di spigolo.

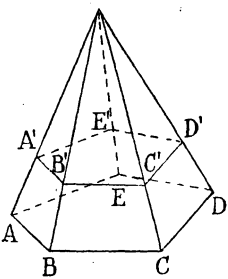
179. Calcolare l'area della superficie di un dodecaedro regolare di m. 3,2 di spigolo.

180. Calcolare l'area della superficie di un icosaedro regolare di m. 1,5 di spigolo.

Tronco di piramide (a basi parallele).

Una piramide ABCDEV, è divisa da un piano parallelo alla base e compreso fra questa e il vertice, in due parti, di cui quella dalla parte del vertice è una piramide. L'altra dicesi *tronco di piramide* (a basi parallele).

I due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E', aventi gli angoli ordinatamente uguali diconsi *basi* del tronco, e i trapezi ABB'A', BCC'B',.... E'AAE' diconsi *facce laterali*. Se la piramide è retta e a base regolare, codeste facce laterali sono uguali e la loro altezza si dice *apotema* o *lato* del tronco. *Altezza* del tronco è la distanza delle due basi.



Infine il *solido* del tronco è quella parte del solido della piramide data, che è compresa fra le due basi del tronco.

Lo sviluppo di un tronco di piramide (a basi parallele) sarà dato da due poligoni (basi) e da tanti trapezi (facce laterali) quanti sono i lati delle due basi. Se il tronco appartiene ad una piramide regolare tutti i trapezi sono isosceli ed uguali ed hanno per altezza l'apotema del tronco.

Ricordando la regola che dà l'area di un trapezio (n. 183) troviamo la seguente

Regola. — *L'area della superficie laterale di un tronco di piramide regolare è dato dal semiprodotto (delle lunghezze) dell'apotema e della somma dei perimetri delle basi.*

181. — Un tronco di piramide regolare a basi quadrate ha l'apotema di m. 2 e i lati delle due basi di m. 3,25 e m. 1,50. Trovare l'area della superficie laterale.

182. Un tronco di piramide regolare a base quadrata ha il lato di una base di cm. 53 e l'area della superficie laterale di dm.^{2} 12,16. Trovare il lato dell'altra base.

183. Un tronco di piramide regolare a base quadrata ha la superficie totale di dm.^{2} 13,94 e i lati delle due basi di cm. 11 e cm. 25. Trovare l'apotema.

184. Quanto pesa 1 cm.^{3} di mercurio se il peso specifico del mercurio è di 13,59?

185. Quanto pesa un m.^{3} d'aria, se il suo peso specifico è di $\frac{1}{773}$?

186. Quanto pesa una nave che sposta 8000 m.^{3} d'acqua?

187. Un pallone, pesante Kg. 300, ha la capacità di m.^{3} 1000. Quando esso sia gonfiato con un gas il cui peso specifico sia uguale alla metà di quello dell'aria al livello del mare, quale forza ascensionale avrà appunto a codesto livello?

188. Quanti ettolitri contiene 1 m.^{3}? Si ricordi che la capacità di un ettolitro è di 100 litri.

[201] **189.** Quanti litri di petrolio contiene una delle solite latte, che hanno come base un quadrato di cm. 24 di lato e sono alte cm. 35?

190. Calcolare il volume di una cassa avente le dimensioni di

$$\text{m. } 1{,}10 \times \text{cm. } 70 \times \text{cm. } 60.$$

191. Calcolare la capacità della medesima cassa, sapendo che lo spessore delle pareti e del coperchio è di cm. 2.

192. Un'aula scolastica lunga m. 10, larga m. 5 e alta cm. 350 sarà sufficiente per 50 scolari, se l'igiene richiede per ogni scolaro m.^{3} 2,3 d'aria?

193. Si vuol costruire un muro lungo m. 16,38, alto m. 2,40 e avente lo spessore di cm. 24. Quanti mattoni occorrono, tenuto conto che il mattone usuale ha le dimensioni di

$$\text{cm. } 28 \times \text{cm. } 14 \times \text{cm. } 6 ?$$

194. Con 100 dm.^{3} di ferro si deve costruire una sbarra a sezione quadrata di cm. 5 di lato. Quanto sarà lunga la sbarra?

195. Un decimetro cubo di legno di faggio pesa g. 852. Calcolare il peso di una tavola dello stesso legno avente le dimensioni di

$$\text{m. } 4{,}5 \times \text{dm. } 3{,}7 \times \text{cm. } 6{,}5.$$

196. Un pilastro alto m. 3,5 ha per base un quadrato di cm. 35. Qual'è il suo volume?

197. Quanti m.^{3} di terra si devono asportare per scavare una cantina lunga m. 7, larga m. 4,50 e alta m. 2,60?

[203] **198.** Quanto pesa un cubo di ferro di cm. 8 di spigolo se 1 cm.^{3} di ferro pesa g. 7,8?

199. Quanto pesa un cubo di arenaria di m. 0,80 di spigolo se un cm.^{3} di arenaria pesa g. 2,4?

200. Quanto pesa un dado massiccio di avorio di cm. 4 di spigolo? (Peso specifico dell'avorio 1,9).

201. L'area della superficie laterale di un prisma retto a base triangolare equilatera è di m.^{2} 3,41; posto che il lato della base è di dm. 13 si calcoli il volume del prisma. [208]

[Si tenga conto della tabella a pag. 107].

202. Un prisma regolare esagonale alto cm. 23 ha il lato di base di cm. 4,5. Trovarne il volume. [Cfr. la tabella della pag. 107].

203. Qual'è il volume di una piramide triangolare alta m. 2,55, in cui il triangolo di base ha un lato di m. 0,75 e l'altezza relativa di m. 0,80? [211]

204. Qual'è il volume di una piramide alta cm. 13, la cui base è un triangolo rettangolo avente i cateti di cm. 4 e cm. 70?

205. La grande piramide di Cheope, in Egitto, ha per base un quadrato di m. 230 di lato. Le facce laterali sono triangoli equilateri. Qual'è il volume?

206. Qual'è il volume di una piramide alta m. 4, la cui base è un trapezio avente le basi di m. 3,72 e m. 5,20 e l'altezza di m. 2,13?

207. Qual'è il volume di una piramide retta a base triangolare equilatera, alta m. 5,4 e avente lo spigolo di base di m. 8? [Cfr. la tabella della pag. 107].

208. L'apotema di una piramide retta a base esagonale regolare è di cm. 35 e il lato della base è di cm. 21. Si calcoli il volume della piramide. [Cfr. la tabella della pag. 107].

TABELLA dei volumi dei poliedri regolari di spigolo uguale a m. 1.

Poliedro	Volume
Tetraedro regolare .	m.^{3} 0,1178...
Cubo	» 1,0000
Ottaedro regolare .	» 0,4714...
Dodecaedro regolare	» 7,6631...
Icosaedro regolare .	» 2,1816...

Per avere il volume di un poliedro regolare di spigolo l si moltiplica per l^3 il volume del poliedro regolare omonimo di spigolo 1.

Si avverta che se la lunghezza l del lato si prende in *metri*, il volume risulta in m.^{3}, ecc.

209. Calcolare il volume di un tetraedro regolare di cm. 7,5 di spigolo.

210. Calcolare il volume di un ottaedro regolare di cm. 3,2 di spigolo.

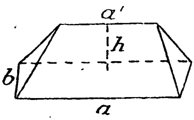
211. Calcolare il volume di un ottaedro regolare di cm. 7,1 di spigolo.

212. Calcolare il volume di un dodecaedro regolare di dm. 5,2 di spigolo.

Misura del volume dei mucchi di ghiaia.

Due sono le forme che più solitamente si danno ai mucchi di ghiaia.

a) Il *mucchio triangolare* (tronco di prisma triangolare)



ha come base un rettangolo di cui indichiamo con a, b le dimensioni, ed ha quattro facce laterali, di cui due triangolari e due trapezoidali.

Se a' è la lunghezza dello spigolo superiore e h è la distanza di questo dal piano di base (*altezza del mucchio*) il volume è dato da

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a').$$

b) Il cosidetto *mucchio piramidale* è limitato in basso e in alto da due rettangoli di dimensioni a, b e a', b' e lateralmente da quattro trapezi (tronco di una piramide a base rettangolare avente il vertice sulla perpendicolare alla base nel suo centro). Se h è l'altezza del mucchio il volume è dato da

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a') + \frac{b'h}{6}(2a' + a).$$

213. Calcolare il volume di un mucchio triangolare di ghiaia, in cui la base ha le dimensioni di m. 2 e m. 0,80, lo spigolo superiore è di m. 1,20 e l'altezza di m. 0,45.

214. Calcolare il volume di un mucchio piramidale di ghiaia in cui la base e la faccia superiore hanno le dimensioni di m. 4,50 $\times$ m. 3,20 e di m. 3,90 $\times$ m. 2,70 e l'altezza è di cm. 40.

---

215. Qual'è la superficie laterale di un cilindro di m. 4 [213]
di diametro e di m. 3,75 di altezza?

216. L'area della base di un cilindro è di m.^{2} 12,56. Qual'è la superficie laterale del cilindro se la sua altezza è uguale a $^3/_2$ del raggio di base?

217. Qual'è la superficie totale di un cilindro, in cui il raggio è di m. 0,35 e l'altezza è doppia del diametro della base?

218. Un rettangolo ha le dimensioni di m. 2 e m. 3. Calcolare le superficie laterali dei due cilindri circolari retti generati dal rettangolo, quando ruota intorno all' uno o all'altro dei due suoi lati consecutivi?

219. Le superficie sviluppate dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono uguali.

220. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie laterale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

221. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie totale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

222. L'altezza di un cilindro circolare retto è di m. 4 e l'area del rettangolo, che si ottiene segando il cilindro con un piano passante per l'asse è di m.^{2} 26,45. Si calcolino il raggio e l'area della superficie laterale del cilindro.

[214] **223.** Calcolare l'altezza di un cilindro circolare retto, il cui raggio è di m. 0,5 e la superficie laterale è di m.^{2} 13,27.

224. Calcolare l'altezza e il raggio di un cilindro circolare retto, di cui la superficie totale è di m.^{2} 0,758 e la superficie laterale è uguale ai $^3/_2$ della base.

[215] **225.** Calcolare il volume di un cilindro circolare retto alto cm. 9,3 e avente il raggio di cm. 2,5.

226. Qual'è il volume di un cilindro, in cui la circonferenza di base è di m. 3,08 e l'altezza è di m. 1,50?

227. In un pozzo di m. 0,90 di diametro vi è acqua fino a m. 2,50 dal fondo. Quanti litri di acqua contiene il pozzo?

228. Un pozzo, compreso il rivestimento in muratura, ha m. 1,86 di diametro e m. 12 di profondità. Qual'è il volume della terra che si è dovuto scavare per costruire il pozzo?

229. In un vaso cilindrico di m. 0,8 di diametro, contenente acqua, si getta una pietra. Qual'è il volume della pietra, se dopo l'immersione, il livello dell'acqua si innalza di m. 0,483?

230. In un pozzo la circonferenza esterna del rivestimento in muratura è di m. 5, la circonferenza interna è di m. 3 e la profondità è di m. 15. Quanto costa il lavoro di muratura, calcolato a L. 18 il metro cubo?

231. Qual'è il peso di un tubo di piombo lungo m. 2,50, avente il diametro interno di m. 0,36 e lo spessore di m. 0,008? La densità del piombo è di 11,4.

232. Qual'è la pressione in Kg. esercitata sul fondo di una cisterna cilindrica di m. 5,75 di diametro dall'acqua, che ha l'altezza di m. 3,4?

233. Si è scavato un pozzo profondo m. 9 e avente il diametro interno di m. 0,90. Quale sarà la cubatura totale del muro di rivestimento, posto che lo spessore di questo sia di cm. 30?

234. Un tubo barometrico ha un diametro interno di mm. 11 e il mercurio vi raggiunge un'altezza di cm. 76. Quanto pesa il mercurio della colonna barometrica se la densità del mercurio è 13,568? Qual'è la pressione atmosferica per cm.^{2}?

235. I volumi dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono inversamente proporzionali ai lati fissi.

236. Il tubo di una conduttura d'acqua ha una sezione di 3 cm.^{2} e l'acqua vi scorre colla velocità di m. 1 al secondo. Quanti litri di acqua passano pel tubo in un'ora?

237. Quale sezione ha un tubo per il quale scorrono 300 litri di acqua in un'ora alla velocità di m. 0,6 al secondo?

238. Quale velocità deve avere l'acqua in un tubo cilindrico di cm. 4 di diametro, se in un'ora debbono passare m.^{3} 18?

239. In quanti secondi passano 100 litri di acqua alla velocità di m. 0,9 al secondo per un tubo cilindrico di cm. 2 di diametro?

240. La densità del vapor d'acqua è uguale ai $^5/_8$ di quella dell'aria e un litro d'aria pesa g. 1,293. Quale sarà il peso del vapore contenuto nel cilindro di una macchina, avente m. 0,50 di diametro e m. 0,80 di lunghezza?

241. Il vapor d'acqua a 100° e alla pressione di una atmosfera occupa un volume 1700 volte maggiore dell'acqua a 0°, che l'ha generato. Quant'acqua a 0° occorre per riempire di vapore a 100° e alla pressione di una atmosfera un cilindro di m. 0,52 di lunghezza su m. 0,52 di diametro?

242. Quanta acqua solleva a ciascun colpo di stantuffo una pompa, in cui il diametro interno del corpo di pompa è di m. 0,16 e l'altezza al di sotto dello stantuffo è di m. 0,46?

243. La ruota di ghisa di un volano ha forma di un cilindro cavo, i cui raggi sono di m. 1,8 e m. 2 e l'altezza è di cm. 30. Quanto pesa codesta ruota se il peso specifico della ghisa è di 7,5?

244. Da un serbatoio cilindrico, avente m. 8,8 di diametro, sgorgano 2 litri d'acqua al secondo. Di quanto si abbassa il livello dell'acqua in tre quarti d'ora?

[216] **245.** Qual'è la superficie della base di un cilindro circolare retto, in cui il volume è di $m.^3$ 3,60 e l'altezza di m. 1,50?

246. In un recipiente cilindrico di m. 0,10 di diametro, interno si versano Kg. 4,04481 di latte, la cui densità è 1,03. A quale altezza giungerà il liquido?

247. Una botte cilindrica per inaffiare le strade contiene 1800 litri e ha un diametro di 90 cm. Quanto è lunga la botte?

248. Un pluviometro cilindrico ha un diametro di cm. 24. Dopo una pioggia l'acqua di esso, defluendo in un vaso cilindrico di cm. 3 di diametro, vi raggiunge l'altezza di mm. 166. Che altezza avrebbe raggiunto codesta acqua rimanendo nel pluviometro? Quanti ettolitri di acqua sono caduti per chilometro quadrato?

[217] **249.** Calcolare l'area della superficie totale di un cono circolare retto, la cui altezza è di dm. 8 e il raggio di base di dm. 3,5.

250. Qual'è la superficie laterale di un cono retto che ha m. 3 di diametro e m. 5 di lato?

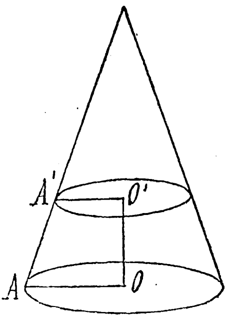
251. Qual'è la superficie totale di un cono circolare retto in cui il lato è di m. 3,75 e il raggio di base è di m. 1,89?

252. Un cono circolare retto, di m. 12,6 di lato ha la circonferenza della base lunga m. 3,49. Si calcolino il raggio e la superficie totale del cono.

253. Qual'è la superficie totale di un cono, il cui lato è di m. 4,50 e la circonferenza di base è di m. 6,25?

254. Quanto pesa il tetto in lamiera di zinco di una torricella, che finisce con un cono di m. 2,70 di diametro e di m. 3 di lato, supposto che la lamiera abbia lo spessore di un millimetro e ricordando che la densità dello zinco è 6,86?

TRONCO DI CONO. — Se, dato un cono, conduciamo un piano parallelo alla base, compreso fra questa e il vertice, il cono vien segato secondo un cerchio e resta diviso in due parti, di cui una è un nuovo cono e l'altra dicesi *tronco di cono* a basi parallele).



I due cerchi O, O' diconsi *basi* del tronco e la distanza OO' dei loro piani dicesi *altezza* del tronco di cono.

I segmenti AA' di generatrici del cono compresi fra i detti due piani diconsi *apotemi* del tronco di cono.

Qui ci limitiamo ad enunciare la regola seguente, della quale gioverà notare la analogia con quella che dà la superficie laterale di un tronco di piramide regolare.

Regola. — *La superficie laterale di un tronco di cono (a basi parallele) si ottiene dividendo per 2 il prodotto dell'apotema e della somma delle lunghezze delle circonferenze delle due basi.*

255. Qual'è la superficie laterale di un tronco di cono avente il lato di m. 3 e i raggi delle due basi di m. 2,1 e m. 2,08?

256. Qual'è la superficie totale di un tronco di cono avente il lato di dm. 7,3 e i raggi delle due basi di dm. 2,5 e dm. 1,8?

257. Trovare il lato di un tronco di cono la cui superficie laterale è di dm.^{2} 18,1492 e i raggi delle basi sono di cm. 11,5 e cm. 22,5.

258. In un barattolo a forma di tronco di cono il lato è di cm. 15, il raggio del fondo è di cm. 17,5 e la superficie laterale e del fondo è di cm.^{2} 2892,725. Quale sarà la superficie del coperchio?

259. Qual'è il volume di un cono in cui l'altezza è di [219]
m. 5 e il raggio della base di m. 2?

260. Quanto costa un pan di zucchero, avente il diametro di base di m. 0,25 e l'altezza di m. 0,50, se il prezzo dello zucchero è di L. 1,60 al Kg. e la sua densità è di 1,20?

261. Una bica di fieno è alta m. 6; la sua parte inferiore è cilindrica ed ha m. 3,80 di altezza e m. 5 di diametro. La parte superiore è conica. Qual'è il volume della bica?

262. Una bica di fieno, di forma conica, misura alla base m. 44 di circuito ed è alta m. 15. Quanti quintali pesa se 1 m.³ di fieno pesa due quintali?

263. Un vaso conico, alto cm. 18 e avente il raggio di base di cm. 24 è pieno d'acqua, e quest'acqua si versa in un vaso cilindrico di cm. 10 di diametro. A che altezza giungerà l'acqua?

[220] **264**. Qual'è l'altezza di un cono, in cui il volume è di m.³ 4 e la base è di m² 3,60?

265. Qual'è l'altezza di un cono in cui il volume è di m.³ 3,077 e il raggio di base di m. 0,35?

266. Qual'è l'altezza di un cono in cui il volume è di m.² 0,18865 e la circonferenza di base è di m. 1,54?

267. Qual'è il raggio della base di un cono, il cui volume è di m.³ 20,944 e l'altezza è di m. 5?

268. Qual'è il diametro della base di un cono di stagno alto m. 0,25 e pesante gr. 19,114? La densità dello stagno è 7,03.

[221] **269**. Una sfera ha m. 3,08 di raggio: si domanda l'area di un cerchio massimo e quella della sfera.

270. Calcolare il raggio di un cerchio, la cui area sia uguale a quella della superficie di una sfera di raggio di m. 3,6. (Cfr. n. 191).

271. Qual'è la misura in miglia quadrate della superficie della terra, tenuto conto che il suo equatore è lungo 5400 miglia geografiche?

272. Calcolare l'area della superficie interna ed esterna di una sfera cava avente lo spessore di cm. 3,5 e avente il diametro esterno di m. 1,05.

273. Una caldaia di forma cilindrica finisce a ciascuna delle sue estremità con un emisfero di cm. 40 di raggio. Il cilindro, avente lo stesso raggio, ha una lunghezza doppia del diametro. Qual'è l'area della superficie esterna della caldaia?

274. Confrontare l'area della superficie totale del cilindro circolare retto equilatero (cioè avente il lato uguale al diametro della base) circoscritto ad una sfera di dm. 4 di raggio con quella della superficie della sfera.

Si faccia lo stesso confronto per una sfera di raggio qualsiasi.

275. Qual'è il volume di una sfera di m. 0,84 di raggio? [222]

276. Qual'è il peso di una palla da bigliardo di avorio avente il diametro di cm. 8, se la densità dell'avorio è di 1,9?

277. Qual'è il volume di una sfera in cui la circonferenza massima è lunga m. 4,62?

278. La densità media della Terra è di 5,44. Qual'è il peso della Terra in milioni di tonnellate? (Diametro terrestre medio = Km. 12735).

279. Qual'è il volume della crosta terrestre, il cui spessore si considera uguale a $\frac{1}{100}$ del raggio?

280. Qual'è il volume dello strato atmosferico che avviluppa la Terra, e che si calcola sia uguale a $\frac{1}{60}$ del raggio terrestre.

281. Se indichiamo con *d* il raggio della Terra, il Sole e la Luna, considerati come sfere, hanno diametri che sono uguali a $108d$, $0{,}27d$ e la distanza dei centri della Luna e della Terra è uguale a $60d$. Si domanda:

a) Quante sfere uguali alla Terra si potrebbero formare col Sole?

b) Quante sfere si potrebbero costruire col Sole, le quali fossero uguali alla sfera tangente esternamente tanto alla Terra quanto alla Luna?

282. Qual'è il peso di una palla di legno di m. 0,2 di diametro, per la quale si è verificato che, quando si getta nell'acqua, il livello del liquido segna sulla palla una circonferenza massima?

XIII

APPLICAZIONI DELLE REGOLA DI MISURA.

Abbiamo imparato in Aritmetica a *estrarre la radice quadrata di un numero.* Studieremo ora alcune regole, relative alla misura di grandezze geometriche, le quali richiedono appunto la estrazione della radice quadrata di un numero.

Regole di misura inverse.

226. LATO DEL QUADRATO DI DATA AREA. — Sappiamo che l'area di un quadrato si trova calcolando la seconda potenza della lunghezza) del lato (n. 174).

Perciò avremo la

Regola. — *Data l'area di un quadrato si trova la lunghezza del lato estraendo la radice quadrata dell'area.*

227. RAGGIO DEL CERCHIO DI DATA AREA. — L'area del cerchio si ottiene (n. 190) moltiplicando il quadrato del raggio per 3,14 (o 3,1416). Avremo quindi la seguente

Regola. — *Per trovare il raggio di un cerchio, di cui è data l'area, si divida questa per* 3,14 (*o,* 3,1416) *e si estragga la radice quadrata del quoziente ottenuto.*

228. Nota. — Quest'ultima regola serve anche a trovare il raggio della base di un cilindro o di un cono, di cui si conoscano il volume e l'altezza (cfr. nn. 216, 220).

229. RAGGIO DELLA SFERA DI DATA AREA. — Dalla regola del n. 221 risulta quest'altra

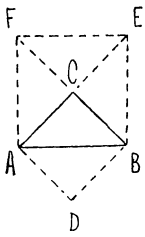
Regola. — *Per trovare il raggio di una sfera, di cui si conosce l'area, si divida questa per il quadruplo di* 3,14 (*o* 3,1416) *e si estragga la radice quadrata del quoziente ottenuto.*

E' opportuno applicare le regole precedenti a numerosi esercizi. [Si vedano gli eserc. nn. 296-313 alla fine del libro].

Teorema di Pitagora.

230. Se di un triangolo rettangolo si conoscono le lunghezze dei due cateti, si può agevolmente trovare la lunghezza dell'ipotenusa; come pure, note le lunghezze dell'ipotenusa e di un cateto, si può trovare la lunghezza dell'altro cateto.

Per giungere alle regole che insegnano a far questo, dobbiamo premettere un'osservazione geometrica.

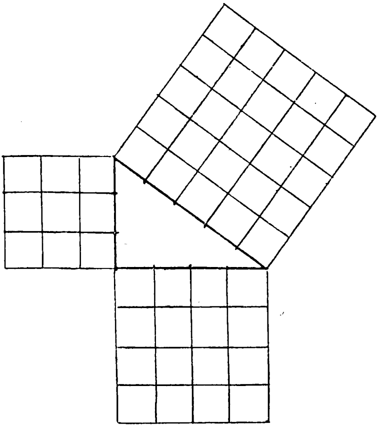


231. Consideriamo dapprima un triangolo rettangolo ABC, *isoscele sull'ipotenusa* AB.

Se ritagliamo altri quattro triangoli uguali ad ABC e li disponiamo come indica la figura, otteniamo il quadrato ABEF dell'ipotenusa AB e il quadrato ADBC del cateto AC (o BC); e vediamo che mentre il primo quadrato è equivalente alla somma di quattro volte il triangolo dato ABC, il secondo quadrato equivale alla somma di due volte lo stesso triangolo ABC.

In altre parole:

In un triangolo rettangolo isoscele il quadrato della ipotenusa è equivalente al doppio del quadrato di un' cateto, ossia alla somma dei quadrati dei due cateti.



Così costruiamo un triangolo rettangolo, i cui cateti siano rispettivamente lunghi

cm. 3 e cm. 4.

Si verifica col doppio decimetro che l'ipotenusa è lunga esattamente cm. 5. (Nell' unita figura abbiamo per comodità ridotto alquanto le dimensioni).

Costruiti i quadrati dei cateti e dell' ipotenusa, avremo che le aree rispettive sono

$$\text{cm.}^2\ 9,\ \text{cm.}^2\ 16,\ \text{cm.}^2\ 25$$

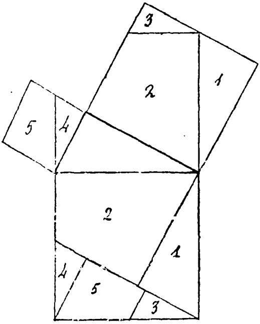
e poichè

$$9 + 16 = 25$$

concludiamo che *il quadrato dell' ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti.*

Abbiamo verificato che questa relazione vale per due triangoli rettangoli diversi. Nasce quindi il sospetto che essa valga anche per *ogni* triangolo rettangolo.

Per verificare che così è veramente, prendiamo un triangolo rettangolo qualsiasi e costruiamo sull'ipotenusa e sui due cateti i rispettivi quadrati.



Se ritagliamo il quadrato dell'ipotenusa nei due trapezi 2 e 5 e nei tre triangoli 1, 3 e 4 indicati dall'unita figura, vediamo che, come risulta dalla figura stessa, codeste cinque parti in cui è diviso il quadrato dell'ipotenusa si possono disporre sui quadrati dei cateti, in modo da ricoprirli esattamente.

Poichè questa verifica si può ripetere per ogni triangolo rettangolo, abbiamo il seguente resultato (*teorema di* PITAGORA):

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

232. Ricordando che si dice *quadrato* o *seconda potenza* di un numero il prodotto del numero per sè stesso, avremo dal n. prec. che *in un triangolo rettangolo il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti.*

Discendono di qui le due regole seguenti:

Regola. — a) *Per trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze de) i cateti, si estrae la radice quadrata della somma dei quadrati (delle lunghezze) dei cateti.*

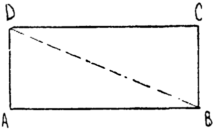
b) *Per trovare (la lunghezza di) un cateto di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze de) l'ipotenusa e (de) l'altro cateto, si estrae la radice qua-*

drata della differenza dei quadrati (delle lunghezze) dell' ipotenusa e del cateto noto.

Applicazioni del teorema di Pitagora.

Le regole del n. prec. tornano assai spesso utili nelle applicazioni. Qui ci limiteremo a indicare alcuni facili problemi in cui si trae profitto da esse.

233. DIAGONALE DEL RETTANGOLO. — Un rettangolo ABCD è diviso da una sua diagonale, p. es. la BD, in due triangoli rettangoli uguali (n. 78), aventi per cateti due lati consecutivi del rettangolo e per ipotenusa comune la diagonale considerata.



Sia p. es.:

$$AB = \text{cm. } 3{,}5 \ , \ AD = \text{cm. } 1{,}2.$$

La lunghezza in centimetri della diagonale BD sarà per la regola a) del n. prec.,

$$\sqrt{3{,}5 \times 3{,}5 + 1{,}2 \times 1{,}2} = 3{,}7,$$

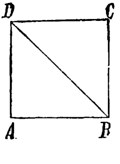
cioè cm. 3,7.

Abbiamo dunque che:

La lunghezza della diagonale di un rettangolo è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni.

234. Analogamente ricaviamo dalla regola b) del n. 191 che: *In ogni rettangolo, una delle due dimensioni è uguale alla radice quadrata della differenza fra il quadrato della diagonale e il quadrato dell' altra dimensione.*

235. DIAGONALE DEL QUADRATO. — I triangoli rettangoli in cui un quadrato ABCD è diviso da una diagonale sono isosceli.



Abbiamo perciò che:

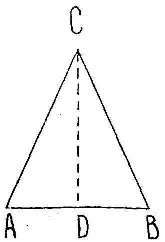
La lunghezza della diagonale di un quadrato è uguale alla radice quadrata del doppio del quadrato della lunghezza del lato; e la lunghezza del lato è uguale alla radice quadrata della metà del quadrato della diagonale.

236. Risulta di qui che *per trovare la lunghezza della diagonale di un quadrato, basta moltiplicare la lunghezza del lato per*

$$\sqrt{2} = 1,4142... ;$$

e per trovare il lato basta dividere la diagonale per codesto numero.

237. LATO, ALTEZZA E BASE DEL TRIANGOLO ISOSCELE. — Un triangolo ABC isoscele sulla base AB è diviso dall'altezza CD in due triangoli rettangoli uguali, aventi un cateto uguale alla metà della base AB e l'altro uguale all'altezza CD di ABC. Potremo allora valerci delle regole del n. 232 per trovare il lato o l'altezza o la base quando si conoscano gli altri due elementi.



1) Si conoscano in primo luogo la base e l'altezza e si voglia trovare il lato: sia p. es.

$$AB = m.\ 10\ ,\ CD = m.\ 12$$

sarà

$$AD = m.\ 5$$

e allora per la regola *a*) del n. 232 la lunghezza in metri del lato AC sarà data da

$$\sqrt{5 \times 5 + 12 \times 12}$$

cioè

$$m.\ 13.$$

2) Si conoscano in secondo luogo il lato e la base, e si voglia trovare l'altezza: sia p. es.

$$AB = dm.\ 5,6 \qquad CD = dm.\ 5,3.$$

Allora sarà

$$AD = dm.\ 2,8$$

e per la regola *b*) del n. 232 la lunghezza in decimetri dell'altezza CD sarà data da

$$\sqrt{5,3 \times 5,3 - 2,8 \times 2,8}$$

cioè da

dm. 4,5.

3) Infine si conoscano il lato e l'altezza, e si voglia trovare le base.

Se p. es. è

$$AC = \text{cm. } 65 \ , \ CD = \text{cm. } 63,$$

avremo, per la regola *b*) del n. **232** che la lunghezza in cm. di AD è data da

$$\sqrt{65 \times 65 - 63 \times 63}$$

ossia da

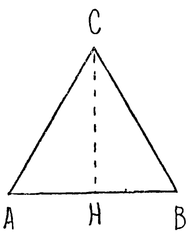
cm. 16;

e la base cercata sarà di

cm. 32.

238. Nota. — In modo analogo si procede se per un poligono regolare si conoscono due dei tre elementi: *raggio*, *apotema* e *lato* e si vuol trovare il terzo; come pure se di un cono si vuol trovare l'*apotema*, o l'*altezza*, o il *raggio di base*, conoscendo gli altri due elementi indicati.

239. LATO E ALTEZZA DI UN TRIANGOLO EQUILATERO. — Un triangolo equilatero ABC è diviso dall'altezza CH in due triangoli rettangoli uguali, in cui l'ipotenusa è doppia di uno dei cateti. L'altro cateto è l'altezza del triangolo equilatero.



Il quadrato di CH sarà equivalente alla differenza dei quadrati di AC e AH. Ma poichè AH è metà di AC il suo quadrato sarà la quarta parte del quadrato di AC: cosicchè avremo che:

In ogni triangolo equilatero il quadrato dell'altezza è equi-

valente ai $\frac{3}{4}$ *del quadrato del lato, e quindi il quadrato del lato è equivalente ai* $\frac{4}{3}$ *del quadrato dell' altezza.*

Se p. es., in un triangolo equilatero il lato è di m. 6, l'area in metri quadrati del quadrato dell' altezza sarà

$$\frac{3}{4} \times 6 \times 6 = 27$$

e la lunghezza del lato sarà

$$\text{m. } \sqrt{27} = \text{m. } 5{,}19\,;$$

così, se l'altezza di un triangolo equilatero è di

cm. 12

l'area del quadrato del lato sarà data in cm.^{2} da

$$\frac{4}{3} \times 12 \times 12 = 192$$

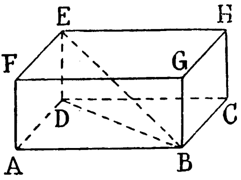
e la lunghezza del lato sarà di

$$\text{cm. } \sqrt{192} = \text{cm. } 13{,}85.$$

240. Siccome l'altezza del triangolo equilatero avente un lato dato è uguale all' apotema dell'esagono regolare che ha il medesimo lato, così *dato il lato di un esagono regolare potremo calcolarne l' apotema e viceversa.*

241. DIAGONALE DEL PARALLELEPIDO RETTANGOLO. — Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo siano

$$\text{DA} = \text{m. } 2{,}73,\ \text{DC} = \text{m. } 3{,}64,\ \text{DE} = \text{m. } 1{,}56.$$



Vogliamo trovare la lunghezza della diagonale BE.

Perciò osserviamo che, se si conduce la diagonale DB della base, i triangoli DAB, EDB sono rettangoli rispettivamente in A e D.

Avremo perciò (n. 232) che il quadrato della lunghezza di BD sarà dato da

$$2{,}73 \times 2{,}73 + 3{,}64 \times 3{,}64.$$

E allora il quadrato della lunghezza di BE si otterrà aggiungendo al quadrato or ora ottenuto di BD il quadrato di DE; cioè il quadrato di BE sarà dato da

$$2{,}73 \times 2{,}73 + 3{,}64 \times 3{,}64 + 1{,}55 \times 1{,}55$$

e quindi avremo

$$\mathrm{BE} = \mathrm{m.}\ \sqrt{2{,}73 \times 2{,}73 + 3{,}64 \times 3{,}64 + 1{,}55 \times 1{,}55}$$
$$= \mathrm{m.}\ 4{,}81.$$

Cioè per trovare la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, si deve estrare la radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni.

242. ALTEZZA, RAGGIO E APOTEMA DEL CONO. — Il cono è generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo, in cui l'ipotenusa è l'*apotema* del cono e i due cateti sono l'*altezza* e il *raggio della base* (n. 125).

Perciò se si conoscono due fra i tre elementi: *apotema*, *altezza* e *raggio*, si trova il terzo, applicando una delle due regole del n. 232.

P. es. un cono abbia l'altezza di cm. 63 e il raggio di base di cm. 16. Allora la lunghezza dell'apotema sarà data in cm. da

$$\sqrt{63 \times 63 + 16 \times 16} = 65.$$

Così se l'altezza è di m. 0,99 e l'apotema di m. 1,01 la lungezza del raggio di base sarà data in metri da

$$\sqrt{1{,}01 \times 1{,}01 - 0{,}99 \times 0{,}99} = 0{,}20$$

Se infine l'apotema è di m. 1,25 e il raggio di base di m. 0,44, l'altezza, sarà in metri,

$$\sqrt{1{,}25 \times 1{,}25 - 0{,}44 \times 0{,}44} = 1{,}17.$$

XIV

COSTRUZIONI FONDAMENTALI CON RIGA E COMPASSO.

---

243. Nel nostro corso abbiamo imparato a conoscere vari strumenti geometrici: *riga, squadra, compasso, riga graduata, rapportatore;* e di ciascuno ci siamo serviti qua e là in vari facili problemi di costruzione.

Ora qui da ultimo considereremo di nuovo i più importanti fra quei problemi, e altri ne aggiungeremo in modo da imparare tutte le *costruzioni fondamentali del disegno geometrico.*

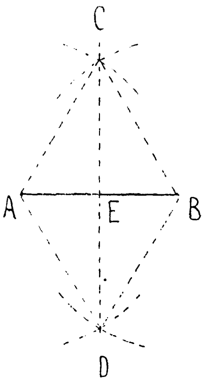
Vedremo così come codeste costruzioni si possano eseguire tutte *col solo uso della riga e del compasso,* cioè senza ricorrere agli altri strumenti (squadra, riga graduata, rapportatore) di cui ci siamo serviti sin qui.

Costruzioni di perpendicolari.

244. *Condurre la perpendicolare ad un segmento dato nel suo punto medio, o,* come si suol dire, *l'asse* del segmento dato.

Dato un segmento AB, si descrivano le due circonferenze uguali, di centro A e B, e di raggio uguale al dato segmento AB.

Queste due circonferenze si segano in due punti



C, D cadenti da bande opposte rispetto alla AB (n. 58).

La retta CD, la quale interseca il segmento in un punto E, è l'asse di AB; essa è cioè perpendicolare ad AB e il punto E è il punto medio del segmento AB medesimo.

Infatti se la figura si ribalta su sè stessa (p. es. ricalcandola su carta trasparente) portando B in A e A in B, le due circonferenze uguali di centri A e B, dianzi descritte, si scambiano una con l'altra, e le loro intersezioni C e D non cambiano di posizione e quindi la retta CD si adagia su sè stessa. Risulta di qui che BE è uguale ad AE e gli angoli adiacenti $\widehat{AEC}$ e $\widehat{CEB}$ si sovrappongono l'uno all'altro e perciò sono retti (n. 30).

245. Nota. — La costruzione precedente riesce ugualmente quando il raggio delle due circonferenze uguali di centro A e B si assuma uguale, anzichè ad AB, ad un qualsiasi segmento maggiore della metà di AB.

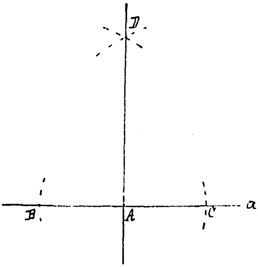
Abbiamo dunque che *tutte le coppie di circonferenze uguali, aventi il centro negli estremi di un segmento e il raggio maggiore della metà del segmento, si segano in coppie di punti situati sull'asse del segmento dato*; o, in altre parole, *tutti i punti equidistanti dagli estremi di un segmento si trovano sull'asse di esso.*

246. *Condurre da un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

Bisogna distinguere due casi secondo che il punto dato appartiene o no alla retta data.

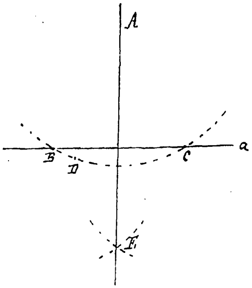
1) Sia data la retta *a* e il punto A su di essa.

Descritta, centro in A, una circonferenza di raggio arbitrario, questa interseca la a in due punti B, C, tali che A è il punto medio del segmento BC. Allora, centro in B e in C, si descrivano due circonferenze di raggio uguale ad un segmento maggiore di AB. Codeste due circonferenze si intersecano in due punti situati da parti opposte della a. Se D è uno di essi, la AD è la perpendicolare cercata.



Infatti il punto D giace sull'asse di BC (n. prec.) e quindi la AD, congiungente di D col punto medio di BC, è appunto l'asse di questo segmento, cioè la perpendicolare alla a in A.

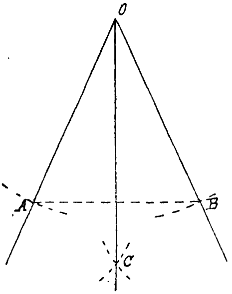
2) Data la retta a e il punto A fuori di essa, si prenda un punto D che cada rispetto alla a da banda opposta di A, e, centro in A, si descriva la circonferenza di raggio AD. La circonferenza tracciata interseca in due punti B e C la a. Le due circonferenze di centri B e C, e di raggio BA = CA si intersecano oltre che in A in un secondo punto E (che cade rispetto ad a dalla parte opposta di A): e la retta AE è la perpendicolare cercata.



Essa è infatti l'asse del segmento BC (n. 244).

247. Nota. — La costruzione precedente permette di sostituire l'uso della riga e del compasso a quella della squadra, in quanto questa serve ad abbassare perpendicolari su di una retta (nn. 34, 36).

248. *Dividere per metà un angolo dato.*



Dato l'angolo $\widehat{O}$, si descriva, centro in O, una circonferenza di raggio arbitrario, la quale intersecherà i due lati di $\widehat{O}$ in due punti A, B.

Facendo centro in A e B, con raggio uguale ad $OA = OB$, si descrivano due circonferenze le quali si segheranno in due punti. Se C è uno di questi punti, la OC è la *bisettrice* dell'angolo dato, cioè lo divide per metà.

Infatti se si ribalta l'angolo dato su sè stesso, portando OA su OB e OB su OA, i punti A e B si scambiano fra loro e quindi si scambiano fra loro anche le due circonferenze uguali descritte dianzi con centro in A e in B. Perciò il punto C non muta posizione e la retta OC si riadagia su sè stessa, cosicchè resta verificato che gli angoli $A\widehat{O}C$, $B\widehat{O}C$ sono uguali.

249. Come ulteriore applicazione della osservazione del n. 245 possiamo:

Determinare il centro della circonferenza passante per tre punti dati (non giacenti su di una retta).

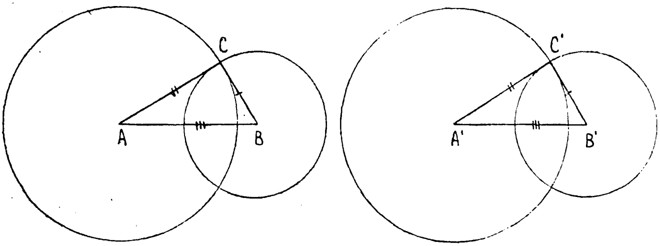
Se una circonferenza deve passare pei tre punti A, B, C, il suo centro dovrà essere equidistante anzitutto da A e B e perciò trovarsi sull'asse di BA (n. 245), e poi dovendo essere equidistante anche da B e C, si troverà sull'asse di BC. Quindi basterà condurre gli assi di AB e BC e il loro punto di intersezione O sarà il centro cercato.

Copia di un triangolo e trasporto di un angolo.

250. *Dato un triangolo* ABC, *costruire su di un segmento* A′B′ *uguale ad* AB *e da una parte prefissata di esso un triangolo* A′B′C′ *uguale ad* ABC.

Con centro in A′ e B′ si descrivano le due circonferenze di raggi uguali rispettivamente ad AC, BC.

Queste due circonferenze si segano in due punti situati da parti opposte della retta A′B′.



Se C′ è quello che cade dalla parte prefissata di A′B′, il triangolo A′B′C′ è il triangolo cercato.

Per vedere che il triangolo A′B′C′, è uguale ad ABC si trasporti la figura or ora descritta in modo che A′B′ si sovrapponga al segmento uguale AB e C′ cada dalla stessa parte di AB da cui cade C. Allora le circonferenze dianzi descritte con raggi rispettivamente uguali ad AC, BC, andranno a passare entrambe pel punto C; cioè in questo punto andrà a cadere il punto C′ e i due triangoli A′B′C′ e ABC si sovrapporranno esattamente.

251. Risulta dal n. prec. che ogni triangolo avente i lati ordinatamente uguali a quelli di ABC è ad esso sovrapponibile: abbiamo così la seguente osservazione fondamentale (*criterio di uguaglianza dei triangoli*):

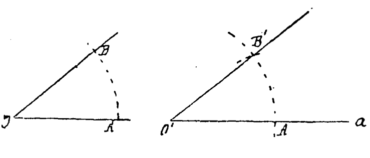
Se due triangoli hanno uguali rispettivamente i tre lati, essi sono uguali: e quindi hanno uguali anche gli angoli opposti ai lati uguali.

252. La costruzione del n. 250 permette anche di *copiare* un poligono qualsiasi. A tale scopo *decomporremo* il poligono in triangoli, conducendo per un vertice tutte le possibili diagonali, e poi, copieremo i triangoli così ottenuti, l'uno accanto all'altro, come si trovano nel poligono dato.

253. La stessa costruzione del n. 250 ci permette di *trasportare un angolo* senza ricorrere al rapportatore e servendoci solo di riga e compasso.

Costruire sopra una semiretta data e da una banda assegnata rispetto ad essa, un angolo uguale ad un angolo dato (trasporto dell'angolo).

Dati la semiretta a d'origine O′ e un angolo di vertice O, si descriva con centro in O e raggio arbitrario, un arco che intersechi in A, B i due lati dell'angolo dato.

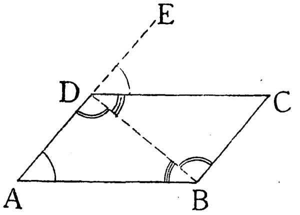


Allora, centro in O′ si descriva il cerchio di raggio uguale ad OA, il quale intersechi a nel punto A′, e dal punto A′ come centro, e con apertura di compasso uguale ad AB si tagli sulla circonferenza O′ dalla banda prefissata rispetto ad a la corda A′B′. L'angolo $A'\widehat{O'}B'$ è uguale all'angolo dato $A\widehat{O}B$.

Infatti i due triangoli isosceli ABO, A′B′O′ hanno uguali per costruzione le basi AB, A′B′ e i lati AO, A′O′ (e BO, B′O′) e quindi sono uguali (n. 251) ed hanno uguali gli angoli al vertice.

Costruzione della parallela.

254. Sappiamo condurre la parallela ad una retta per un punto dato, servendoci della squadra (n. 44). Ora la stessa costruzione si può eseguire servendosi soltanto di riga e compasso. Ma è necessario premettere la seguente osservazione: *Un quadrangolo avente i lati opposti uguali è un parallelogramma*, cioè ha i lati opposti paralleli.



Sia ABCD un quadrangolo in cui sia

$$AB = CD, \quad AD = CB.$$

Allora, condotta una diagonale, p. es. la BD, il quadrangolo risulta diviso in due triangoli aventi il lato BD comune e gli altri due angoli ordinatamente uguali. Perciò questi due triangoli sono uguali (n. 251) e hanno uguali gli angoli.

Di qui si conclude che nel quadrangolo ABCD sono uguali gli angoli opposti $\widehat{BAD}$, $\widehat{DCB}$ ed anche gli altri due $\widehat{ADC}$, $\widehat{CBA}$, come somme di angoli uguali.

Allora la somma degli angoli in A e D sarà uguale alla somma degli altri due; e poichè tutti e quattro danno insieme 360° (n. 161), avremo

$$\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Ma, se prolunghiamo AD in DE, abbiamo anche

$$\widehat{CDE} + \widehat{ADC} = 180^\circ,$$

onde risulta

$$\widehat{BAD} = \widehat{CDE}$$

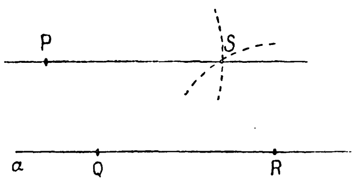
e le due rette AB, DC, che colla AD formano angoli corrispondenti uguali, saranno parallele (n. 45).

Similmente si trova che sono parallele le AD, BC e si conclude che il quadrangolo ABCD è veramente un parallelogramma.

255. Ciò permesso possiamo:

Condurre da un punto P *la parallela ad una retta data* a.

Presi sulla *a* due punti ad arbitrio Q, R, si descrivano la circonferenza di centro P e raggio uguale a QR, e la circonferenza di centro R e raggio uguale a QP. Queste due circonferenze si intersecheranno in due punti situati da bande opposte rispetto alla PR. Se S è quello che cade dalla banda opposta di Q, la PS è la parallela cercata.

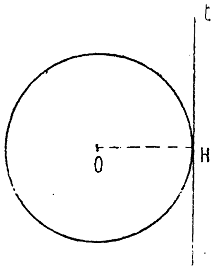


Infatti il quadrangolo PQRS ha, per costruzione, i lati opposti PQ, SR e PS, QR uguali, e perciò è un parallelogramma (n. prec.): onde risulta che le rette PS, QR sono parallele.

Nota. — Vediamo così veramente come riga e compasso si possano sostituire alla squadra per la costruzione di parallele.

Tangenti al cerchio.

256. *Data una circonferenza condurre la tangente in un suo punto.*



Basta condurre per il dato punto H la perpendicolare al raggio OH.

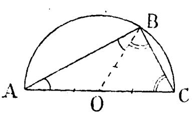
257. Per poter condurre le tangenti al cerchio da un punto esterno è necessario premettere un' osservazione, che è di per sè importante e che del resto torna utile in molte costruzioni.

Data una semicirconferenza, ogni angolo avente il vertice sulla semicirconferenza e i lati passanti per gli estremi di essa dicesi *iscritto nella semicirconferenza.*

Ciò premesso è facile vedere che:

Gli angoli iscritti in una semicirconferenza sono tutti retti.

Sia $\widehat{ABC}$ un angolo iscritto in una semicirconferenza di centro O. Per mostrare che esso è retto, congiungiamo O con B e consideriamo i due triangoli ABO e BCO.



Essi sono entrambi isosceli perchè i raggi OA, OB, OC sono tutti uguali; cosicchè avremo (n. 64)

$$\widehat{ABO} = \widehat{OAB}\ ,\ \widehat{OBC} = \widehat{BCO}$$

e sommando gli angoli $\widehat{ABO}$, $\widehat{OBC}$ otterremo

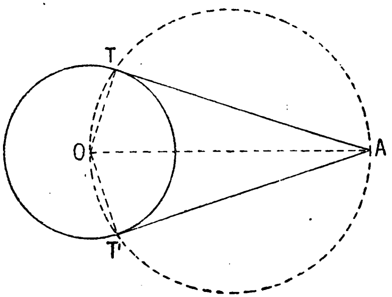
$$\widehat{ABC} = \widehat{OAB} + \widehat{BCO}.$$

Ma i tre angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{OAB}$, $\widehat{BCO}$ presi insieme danno 180° (n. 157); cosicchè l'angolo $\widehat{ABC}$ sarà uguale alla metà di 180° cioè a 90°.

258. In base alla precedente osservazione possiamo:

Condurre le tangenti ad un cerchio dato da un punto esterno.

Se O è il centro del cerchio dato e A è il dato punto esterno, si descriva la circonferenza che ha per diametro il segmento OA. Se T, T′ sono le intersezioni di essa con la circonferenza data, le rette AT, AT′ sono le tangenti cercate, perchè ciascuno degli angoli $A\widehat{T}O$, $A\widehat{T'}O$, come iscritto in una semicirconferenza è retto, e sappiamo che la perpendicolare ad un raggio nel suo estremo è tangente al cerchio (n. 56).

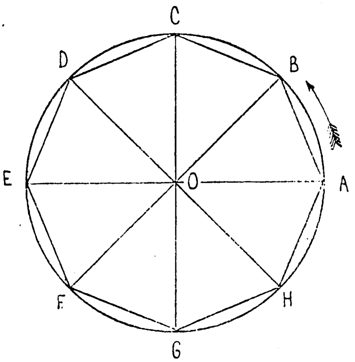


259. Nota. — Se arrovesciamo la figura, facendola ruotare intorno alla OA, la figura si sovrappone a sè stessa e in particolare AT si sovrappone ad AT′. Abbiamo dunque che:

Condotte ad un cerchio da un punto esterno le due tangenti, i segmenti di esse, compresi fra il punto esterno e i punti di contatto, sono uguali.

Poligoni regolari.

260. Se una circonferenza di centro O è divisa in un certo numero di archi uguali, p. es., in 8: AB, BC, CD,.... e conduciamo le rispettive corde, otteniamo un poligono, che nel caso della nostra figura è un ottagono. *Codesto poligono è regolare.*



Se infatti facciamo girare la figura intorno al centro O del cerchio in modo da portare A in B, il vertice B andrà in C, C in D,... ed H in A; cosicchè ciascun lato del poligono si sovrapporrà al lato successivo e ciascun angolo all'angolo successivo. Verifichiamo così che sono uguali tutti i lati e tutti gli angoli, vale a dire che il poligono è regolare.

261. Il poligono considerato or ora si dice *iscritto* nella circonferenza O. Viceversa la circonferenza si dice *circoscritta* al poligono.

Il centro O e il raggio OA (od OB, od OC, ecc.) del cerchio circoscritto sono il *centro* e il *raggio* del poligono regolare (n. 89).

262. Condotti i raggi che passano pei vertici del poligono regolare considerato, questo resta diviso in tanti triangoli isosceli aventi per vertice comune il centro O e per basi i lati del poligono.

Codesti triangoli isosceli sono tutti uguali, perchè hanno le basi uguali e i lati uguali.

Perciò i loro angoli al vertice sono uguali; e siccome la loro somma è di 360°, così l'ampiezza in gradi di ciascuno di essi si otterrà dividendo 360 per il numero dei lati.

Nel caso della figura precedente, in cui abbiamo un ottagono, l'ampiezza di ciascuno degli otti angoli $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$,..., $H\widehat{O}A$ sarà di $\frac{360}{8}$ gradi, cioè di 45°.

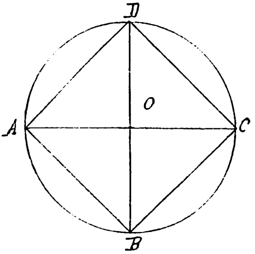
Così indichiamo qui gli angoli al centro corrispondenti ai lati di alcuni poligoni regolari:

triangolo equilatero	120°
quadrato	90°
pentagono	72°
esagono	60°

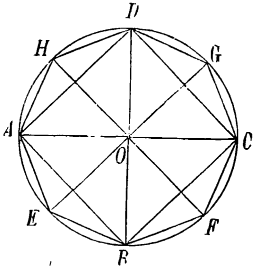
263. Ciò premesso, eseguiamo alcune facili costruzioni.

Iscrivere in un cerchio dato un quadrato.

Fissato sulla circonferenza data un punto A come vertice del quadrato, si conducano il diametro AC passante per A e il diametro BD perpendicolare al primo. Condotte le corde AB, BC, CD, DA, notiamo che i quattro angoli $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$, $C\widehat{O}D$, $D\widehat{O}A$ sono retti e perciò uguali. Saranno quindi uguali anche gli archi corrispondenti AB, DC, CD, DA e il quadrangolo ABCD sarà un quadrato.



264. Iscritto nel cerchio dato O il quadrato ABCD, si conducano per O i due diametri EG, FH, che bisecano gli angoli retti. formati dai due diametri AC, BD.

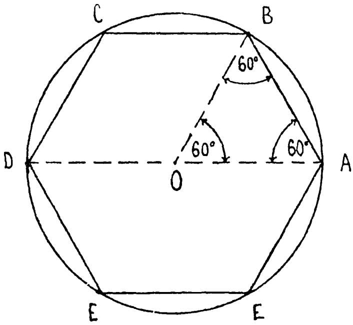


La circonferenza resta divisa in otto archi uguali; cosicchè l'ottagono AEBFCGDH sarà regolare.

Similmente potremo iscrivere successivamente un poligono regolare a 16 lati, a 32 lati, ecc.

265. *Iscrivere in una circonferenza un esagono regolare.*

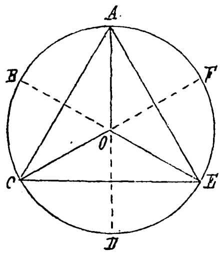
Per iscrivere in una circonferenza O un esagono regolare notiamo che, se AB è un suo lato, il triangolo isoscele AOB ha l'angolo al vertice in O di 60° (n. 262): onde risulta che anche gli angoli alla base, essendo uguali e dovendo insieme sommare a 120°



hanno l'ampiezza di 60° cosicchè il triangolo AOB è equiangolo e quindi equilatero (n. 65).

Cioè *il lato dell'esagono regolare è uguale al suo raggio.*

Allora per iscrivere nella circonferenza data O un esagono regolare, basta far centro in un suo qualsiasi punto A (preso come vertice) e con un'apertura di compasso uguale al raggio OA segare la O in due punti B, F; e poi, facendo centro nell'altro estremo D del diametro passante per A, segare la O con la stessa apertura di compasso in due punti C, E; l'esagono ABCDEF è regolare.



266. Divisa una data circonferenza in sei parti uguali, AB, BC, CD, DE, EF, FA a partire dal punto A assegnato ad arbitrio, gli archi AC, CE, EA, doppi di archi uguali saranno uguali e il poligono ACE sarà un triangolo equilatero. Resta così risolto il problema:

Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero.

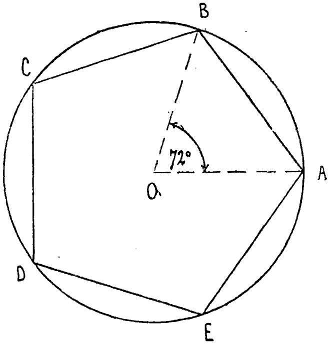
267. Iscritto in una circonferenza O un esagono regolare ABCDEF si conducano i tre diametri che bisecano gli angoli al centro, formati dai diametri AD, BE, CD. Si divide così la circonferenza in dodici archi uguali, le cui corde determinano un dodecagono *regolare.*

Analogamente potremo iscrivere nel cerchio dato un *poligono regolare di 24 lati* e così via.

268. Le costruzioni dei nn. 263-267, come tutte le precedenti, si possono eseguire col solo uso della riga e del compasso.

Cogli stessi strumenti si può anche *iscrivere in un cerchio dato un pentagono regolare.*

Ma per semplificare la costruzione, che con sola riga e compasso sarebbe complicata, ci serviremo anche del rapportatore.



Con questo strumento si descriva nel cerchio O un angolo al cerchio $\widehat{AOB}$ di 72°. Come $\widehat{AOB}$ è la quinta parte di 360°, così l'arco AB è la quinta parte della circonferenza.

Presi gli archi BC, CD, DE uguali ad AB, risulta uguale ai precedenti anche EA e il pentagono ABCDE è regolare.

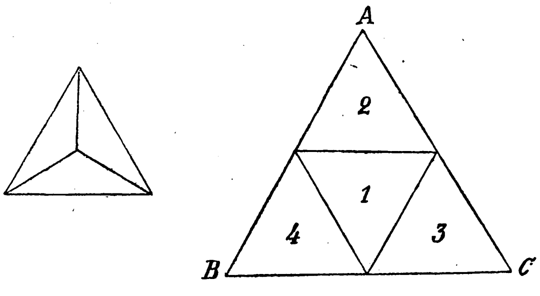
Sviluppo dei poliedri regolari.

269. Abbiamo dato al n. 196 lo *sviluppo del cubo.*

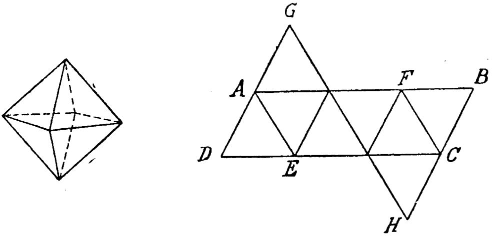
Daremo qui analogamente *gli sviluppi degli altri quattro poliedri regolari.*

L'alunno, disegnando su di un cartoncino codesti sviluppi e ritagliandoli potrà costruirsi i modelli dei poliedri regolari.

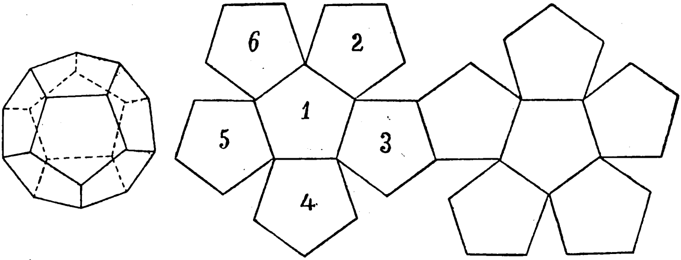
1) *Tetraedro regalare.*



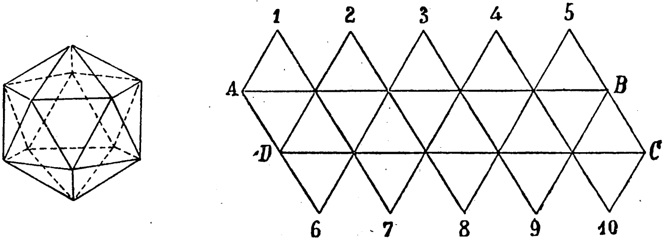
2) *Ottaedro regolare.*



3) *Dodècaedro regolare.*



4) *Icosaedro regolare.*



ESERCIZI SUI CAPITOLI XIII-XIV.

(Terza Classe)

VOLUME DEL TRONCO DI PIRAMIDE. — **Regola** (¹). — *Per trovare il volume di un tronco di piramide (a basi parallele) si addizionano le aree delle basi colla radice quadrata del loro prodotto, e la somma si moltiplica per l' altezza e si divide per 3.*

Se per brevità si indicano con b, B le aree delle basi, con h l' altezza e con V il volume del tronco, si può esprimere la regola precedente, scrivendo

$$V = \frac{1}{3} h \left(b + B + \sqrt{b\ B}\right).$$

283. Un tronco di piramide ha per base maggiore un triangolo rettangolo: i cateti sono di m. 12 e m. 16: il lato della base minore, corrispondente al primo di codesti cateti è di m. 3 e l' altezza è di m. 2,75. Si calcoli il volume del tronco.

284. Le basi di ùn tronco di piramide retta a base quadrata hanno rispettivamente dm. 9 e dm. 4 di lato e l' altezza del tronco è di dm. 15. Qual' è il volume?

285. Si scava una fossa a forma di tronco di piramide retta a base quadrata, arrovesciata. Il lato dell' apertura è di metri 2,3 e quella del fondo è di m. 1,4 e il volume della terra scavata è di m.³ 36,4. Qual' è la profondità della fossa?

286. Calcolare il peso di un blocco di granito avente la forma di un tronco di piramide, avente le basi di m.² 3,55 e m.² 0,78 e l' altezza di m. 2,80. La densità del granito è 2,780.

(¹) Enunciamo qui dapprincipio le Regole per la determinazione del volume del tronco di piramide e del tronco di cono, che danno occasione a utili esercizi sull' estrazione di radice quadrata.

287. Un obelisco di granito ha la forma di un tronco di piramide retta a base quadrata, sormontato da una piccola piramide. La base inferiore ha m. 2,42 di lato, la superiore m. 1,50; l'altezza del tronco è di m. 21,60 e quella della piramide è di m. 1,20. Quanto pesa l'obelisco, se la densità del granito è 2,75?

288. Il fumaiolo in muratura di una fornace ha forma di tronco di piramide retta a base quadrata. Le due basi hanno esternamente il lato di m. 1,40 e m. 0,60 rispettivamente, e internamente i lati di m. 0,44 e m. 0,38. Calcolare il volume della muratura, tenendo conto del fatto che l'altezza del camino è di m. 12,50.

VOLUME DEL TRONCO DI CONO. — **Regola.** — *Per trovare il volume di un tronco di cono (a basi parallele) si addizionano le aree delle basi alla radice quadrata del loro prodotto, e la somma si moltiplica per l'altezza e si divide per 3.*

289. Qual'è il volume di un tronco di cono, in cui le due basi hanno l'area rispettivamente di $m.^2$ 2,25 e $m.^2$ 1,41 e l'altezza è di m. 0,90?

290. Qual'è il volume di un tronco di cono, alto m. 2,1, e avente i raggi delle due basi di m. 0,63 e m. 0,42?

291. Calcolare in ettolitri la capacità di un tino alto m. 1,75 e in cui i diametri (interni) del fondo e della bocca sono rispettivamente di m. 1,90 e di m. 1,15.

292. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e l'altezza è doppia della media geometrica dei due raggi. Calcolare il volume del tronco di cono.

293. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e il lato è uguale alla somma dei raggi. Qual'è il volume del tronco di cono?

294. Qual'è l'altezza di un tronco di cono di $m.^3$ 84, in cui le due basi sono rispettivamente di $m.^2$ 3 e $m.^2$ 12?

295. Un recipiente a forma di tronco di cono deve avere il diametro inferiore di m. 0,24 e quello superiore di m. 0,20 e deve avere la capacità di litri 12. Quale deve essere la sua profondità?

[226] **296**. Qual'è il lato di un quadrato di m.^{2} 179,56 di area?

297. Il lato di un quadrato è di mm. 27 [oppure di cm. 3,8, oppure di m. 2,08]: qual'è il lato del quadrato doppio o quintuplo o metà del dato?

298. Qual'è il lato del quadrato che ha la stessa area del cerchio di m. 2,5 di diametro?

299. Calcolare il volume del cubo, la cui superficie sia uguale a quella della superficie di un tetraedro regolare di dm. 8,4 di spigolo. (Cfr. la tabella a pag. 107).

[227] **300**. Calcolare il raggio del cerchio la cui area è di m.^{2} 22,8906.

301. Calcolare il raggio del cerchio che ha la stessa area di un quadrato di m. 2,35 di lato.

302. Calcolare il raggio del cerchio che ha area tripla di quella del cerchio di m. 1,25 di raggio.

303. Calcolare il raggio del cerchio la cui area è uguale alle somme delle somme delle aree dei due cerchi di m. 1,2 e m. 3,5 di raggio.

304. Calcolare il raggio del cerchio la cui area è uguale alla differenza delle aree dei due cerchi di dm. 32,3 e dm. 32,5 di raggio.

305. Una corona circolare, in cui la circonferenza minore ha m. 12 di diametro, ha un'area di m.^{2} 120. Qual'è il diametro maggiore? [Si aggiunga all'area della corona l'area del cerchio minore: si ottiene così....].

306. Intorno ad una circonferenza di m. 11 di lunghezza, si vuol costruire una corona di m.^{2} 20 di area. Quale sarà la lunghezza della circonferenza esterna? [Cfr. la traccia dell'eserc. prec.].

307. Qual'è il volume di una sfera in cui l'area del cerchio massimo è di m.^{2} 6,16?

[228] **308**. Un cilindro alto dm. 7 ha il volume di dm.^{3} 87,92. Trovare il raggio.

309. Un cilindro alto cm. 5 ha il volume di cm.^{3} 214,933. Trovarne l'area della superficie laterale.

310. Calcolare il raggio interno di un tubo di vetro cilindrico, che pesa 90 gr. quando è vuoto e 200 gr. quando vi si introduce una colonna di mercurio di 9 cm., posto che la densità del mercurio è 13,568.

311. Un cono alto dm. 15 ha il volume di dm.^{3} 641.799. Trovare il raggio della base.

312. Qual'è lo spessore di una sfera cava, le cui superficie interne ed esterne hanno l'area di m.^{2} 3 e m.^{2} 3,12 rispettivamente? [229]

313. Qual'è il volume di una sfera la cui area è di m.^{2} 55,44?

314. Dati due quadrati, costruire il quadrato equivalente alla loro somma. [231]

315. Dato un quadrato, costruire il quadrato equivalente al triplo del dato.

316. Dati due quadrati, costruire il quadrato equivalente alla loro differenza.

317. Dato un triangolo rettangolo la superficie del cerchio che ha per diametro la ipotenusa è uguale alla somma dei cerchi che hanno per diametro i cateti. [Si ricordi il teorema di Pitagora e si applichi la formula per l'espressione della superficie di un cerchio].

318. Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti siano rispettivamente di cm. 5 e cm. 12. [232]

319. Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di cm. 29 e un cateto di cm. 20. Qual'è la lunghezza dell'altro cateto?

320. Verificare che il triangolo, i cui lati sono rispettivamente di cm. 8, cm. 15, cm. 17 è rettangolo.

321. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale ai $\frac{3}{2}$ dell'altro e l'ipotenusa è lunga m. 30: quali sono le lunghezze dei cateti?

322. Una scala deve essere appoggiata ad un muro a m. 4 dal piede di esso: quale deve essere la lunghezza della scala perchè essa possa giungere a m. 6 dal suolo?

323. A quale distanza dal piede di un muro deve essere appoggiata una scala di m. 10, perchè essa giunga all'altezza di m. 6?

324. Una scala di m. 7,25 è appoggiata a m. 3,40 dal piede di un muro: a quale altezza giunge?

325. Qual' è il lato del rombo avente le diagonali di m. 6 e m. 8?

326. Calcolare il perimetro di un trapezio avente due angoli retti, in cui le basi siano di m. 8,5 e m. 12,4 e l'altezza sia di m. 5,2. [Da un vertice della base minore si abbassi l'altezza sulla base maggiore...].

327. L'area di un trapezio, che ha due angoli retti è di m.^{2} 300; l'altezza è di m. 9,8 e una delle basi è di m. 20. Calcolare le lunghezze delle due diagonali.

328. Calcolare, eseguendo un disegno e servendosi di un doppio decimetro la radice quadrata di un numero, per esempio 164 o 65,... Si decomponga il numero nella somma o nella differenza di due quadrati e si tenga conto del n. 232: p. es. $194 = 13^2 + 5^2$, $65 = 9^2 - 4^2$,...].

[233] **329.** Qual' è la diagonale del rettangolo che ha le dimensioni di m. 46 $\times$ m. 25?

330. La diagonale di un rettangolo è di m. 30, e l'altezza è uguale ai $\frac{3}{4}$ della base. Quali sono le due dimensioni?

[235] **331.** Qual' è la diagonale del quadrato il cui lato è di m. 46,75?

332. Qual' è il lato del quadrato, la cui diagonale è di m. 12?

333. Qual' è l'area di un quadrato, la cui diagonale è di cm. 36?

334. Due lati consecutivi di un parallelogramma sono di m. 14 e m. 5,8; mentre l'angolo compreso è di 45°. Si calcoli l'area del parallelogramma. [L' altezza abbassata da un vertice su di un lato determina un triangolo rettangolo isoscele e quindi...].

[237] **335.** Qual' è l'altezza del triangolo isoscele che ha la base di m. 12 e il lato di m. 26?

336. In un triangolo rettangolo isoscele l'altezza abbassata dal vertice dell'angolo retto divide l'ipotenusa in due segmenti di cm. 6 ciascuno. Calcolare l'altezza e il cateto.

337. Calcolare l'area di un rombo di cui un lato è di m. 3,6 e una delle diagonali è di m. 4,9.

338. In un cerchio di m. 2,4 di raggio, calcolare la distanza del centro da una corda di m. 0,60 di lunghezza.

339. A quale distanza dal centro si trova una corda di m. 2,72 in un cerchio di m. 3,65 di raggio?

340. In un cerchio di m. 2,25 di raggio, si dà una corda di m. 3. Calcolare la corda che sottende l'arco metà.

341. In un cerchio di raggio di m. 4,20 si hanno due corde parallele, lunghe rispettivamente m. 3,12 e m. 6,80. Calcolare la distanza delle due corde.

342. L'area del triangolo isoscele che ha la base a e il lato b è uguale ad

$$\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

343. Qual'è l'altezza del triangolo equilatero, che ha il lato di m. 26? [239]

344. Calcolare l'area della superficie del solido generato da un triangolo equilatero che ruota intorno ad un suo lato, la cui lunghezza è di m. 0,36.

345. Qual'è il lato del triangolo equilatero che ha l'altezza di m. 5,8?

346. L'area di un triangolo equilatero è di m.^{2} 1000. Quale ne è il lato?

347. Qual'è il perimetro di un rombo di m.^{2} 60 di area se la diagonale minore è uguale al lato?

348. Gli agrimensori romani assumevano come area del triangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}a^2$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo Erone, come area il numero $\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{10}a^2$?

349. L'apotema di un esagono regolare è di m. 2,80; qual'è il suo perimetro? [240]

350. Qual'è l'apotema di un esagono regolare, che ha m. 120 di perimetro?

351. Qual'è la lunghezza della diagonale di un parallelepipedo rettangolo avente le dimensioni di m. 3,5, m. 8,4, [241]

m. 5,88 (o di cm. 35, cm. 120, cm. 1560; o di dm. 5,6, dm. 10.5, dm. 100,8; o di m. 0,12, m. 0,35, m. 6,84)?

[242] **352.** Qual'è il lato del cono avente per altezza m. 7 e per raggio della base m. 3?

353. Qual'è l'altezza del cono avente il lato di m. 6 e il raggio di base di m. 5?

354. Qual'è la superficie laterale di un cono circolare retto che ha m. 9 di raggio e m. 12 di altezza?

355. Qual'è la superficie totale di un cono, in cui l'altezza è di m. 4 e il lato di m. 5?

356. Un cono equilatero (cioè tale che le sue sezioni per l'asse sono triangoli equilateri) è alto cm. 32. Se ne determini prima la superficie laterale, poi la superficie totale.

357. Qual'è il lato di un cono avente la superficie laterale di m.^{2} 30,8 e il raggio di base di m. 2,109?

358. Qual'è la circonferenza della base di un cono, in cui la superficie laterale è di m.^{2} 28 e il lato di m. 7?

399. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 2,5 e il raggio della base di m. 1,5?

360. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 4,5 e l'altezza di m. 3,6?

361. Qual'è il volume di un cono equilatero di cm. 15 di lato?

362. Una lamina quadrata di latta avente il lato di cm. 18, si taglia lungo l'arco di circonferenza avente il centro in un vertice e il raggio uguale al lato della lamina; col settore, che così si ottiene, si costruisce un cono. Qual'è l'altezza di questo e quale il suo volume?

363. Qual'è la superficie totale di un tronco di cono avente l'altezza di m. 0,21 e i diametri delle basi di m. 1,19 e m. 0,91?

364. In un tronco di cono circolare retto il lato è di dm. 9,5, l'altezza è di dm. 6,8 e il raggio della base minore è di cm. 8. Si calcoli l'area della superficie totale del tronco.

365. Le basi di un tronco di cono circolare retto sono di dm.^{2} 42 e dm.^{2} 86; l'apotema del tronco è di dm. 15. Si calcolino l'altezza del tronco e la superficie laterale.

366. Un fumaiolo tronco conico in muratura è alto m. 22; i raggi interno ed esterno della base sono rispettivamente di

m. 1 e m. 1,20; quelli dell'apertura superiore sono di m. 0,30 e m. 0,45 rispettivamente. Calcolare la superficie interna e la esterna della muratura.

367. Il tetto di una torre rotonda è formato anzitutto da un tronco di cono, il cui raggio della base inferiore è di m. 2,5 e la cui altezza è di m. 1, mentre poi l'apotema forma col raggio della base un angolo uguale a mezzo retto: e al disopra del tronco di cono appoggia un cono alto m. 5. Qual'è la superficie del tetto?

368. Qual'è il raggio della base inferiore di un tronco di cono, in cui la superficie laterale è di m.^{2} 24,5, il lato è di m. 1,95 e il raggio della base inferiore è di m. 1,4?

---

369. In quale rapporto stanno gli spigoli di un ottaedro e di un icosaedro regolari aventi ugual superficie? [Cfr. la tabella della pag. 107].

370. In quale rapporto stanno gli spigoli di un tetraedro regolare e di un cubo aventi ugual volume [pag. 116]?

371. In quale rapporto stanno i volumi di un cubo e di un icosaedro regolare aventi ugual superficie?

372. In quale rapporto stanno le superficie di un ottaedro e di un dodecaedro regolari aventi ugual volume?

373. In quale rapporto stanno le aree e i volumi dei due cilindri generati da un rettangolo che ruota intorno a due suoi lati diversi?

374. Le superficie laterali e i solidi dei coni generati dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ai cateti sono inversamente proporzionali ai cateti fissi.

375. In quale rapporto stanno fra loro i volumi di due coni di uguale altezza, le cui basi hanno rispettivamente i diametri di m. 0,56 e m. 1,12?

376. Qual'è il rapporto dei volumi di un cilindro e di un cono, aventi basi ed altezze uguali?

377. Come stanno fra loro la superficie di una sfera, di un cilindro e di un cono, tali che il cilindro e il cono abbiano come altezza il diametro della sfera e come raggio delle basi il raggio della sfera?

378. In quale rapporto stanno fra loro il volume della sfera di raggio r e quello del cilindro avente l'altezza $2r$ e il diametro $2r$? In quale rapporto stanno la superficie della sfera e la superficie totale del cilindro?

379. Un cubo ed una sfera hanno entrambi la superficie di m.^{2} 2,4: qual'è il rapporto dei due volumi?

Questo rapporto cambia, se si prendono un cubo e una sfera di area uguale, ma diversa da quella fissata dianzi?

---

[244] **380.** Costruire il quadrato che ha una data diagonale. [Se AC è la diagonale data, si prendano sull'asse di AC da una parte e dall'altra del punto medio O di AC, i due segmenti OB, OD uguali alla metà di AC. Il quadrangolo ABCD è un quadrato, come si verifica facendolo ruotare intorno ad O di 90° gradi].

[248] **381.** Dividere per metà un arco dato. [Se AB è l'arco ed O ne è il centro, basta dividere per metà l'angolo al centro $A\widehat{O}B$ (n. 248)].

[249] **382.** Condurre una circonferenza tangente ad una retta a in un suo punto A e passante per un altro punto B.

[Il centro della circonferenza cercata è il punto di intersezione della perpendicolare alla a in A e dell'asse AB].

[250] **383.** Disegnare un triangolo ABC in cui sia

$$AB = \text{mm. } 37, \; BC = \text{mm. } 25, \; CA = \text{mm. } 30.$$

384. Costruire un rombo che abbia una diagonale e il lato rispettivamente uguali a due segmenti dati. [Su di un segmento uguale al maggiore dei dati, preso come base, si costruiscano dalle due parti di esso i triangoli isosceli che hanno il lato uguale all'altro segmento dato (n. 62)].

[255] **385.** Condurre da un punto P la parallela ad una retta data a [*Costruzione diversa da quella del* n. 255]. [Centro in un punto di a, si descriva la semicirconferenza passante per P e limitata dalla a. Se A, B sono gli estremi della semicir-

conferenza, si seghi questa colla circonferenza di centro B e raggio AP. Se Q è il punto di intersezione, la PQ è la parallela cercata].

386. Condurre la perpendicolare nell'estremo A di un segmento AB, senza prolungarlo. [Si descriva una circonferenza passante per A e segante la AB in un altro punto C: se D è l'altro estremo del diametro passante per C, la AD è la perpendicolare cercata]. [257]

387. Costruire il quadrato che ha un lato dato AB. [Innalzata in A la perpendicolare e preso su di essa AD = AB, si descrivano le due circonferenze di raggio AB e di centri D e B. Se C è quel loro punto di intersezione che cade nell'angolo $\widehat{BAD}$, il quadrangolo ABCD è il quadrato cercato].

388. Costruire un rettangolo in cui due lati consecutivi siano rispettivamente uguali a due segmenti dati. [Costruzione analoga a quella dell' esercizio prec.].

389. Costruire un rettangolo, in cui la diagonale e un lato siano uguali rispettivamente a due segmenti dati. [Agli estremi di un segmento AB, uguale al lato dato, si innalzino le due perpendicolari, e centro in A, B con raggio uguale alla diagonale data si taglino in D, C le due perpendicolari, da una stessa parte della AB. Il quadrangolo ABCD è il rettangolo cercato].

390. Descritta una circonferenza di mm. 16 di raggio si prenda un punto P distante mm. 34 dal centro e si conducano da esso le tangenti (n. 258). Qual'è la lunghezza dei segmenti di tangente compresi fra P e i punti di contatto n. 252? Eseguito il disegno si verifichi codesta lunghezza col doppio decimetro. [253]

391. Condurre a due circonferenze disuguali le tangenti comuni *esterne*. [Se O, O′ sono i centri ed O è la circonferenza maggiore si descriva, centro in O, la circonferenza che ha per raggio la differenza dei raggi delle due circonferenze date, e si conducano da O′ le tangenti O′A, O′B a questa terza circonferenza. Prolungati i raggi OA. OB fino ad incontrare in C e D la circonferenza maggiore si conducano in O′ i raggi O′E, O′F paralleli rispettivamente a OC, OD. Le rette EC, FD sono le tangenti cercate].

392. Condurre a due circonferenze le tangenti comuni *interne*. [Nelle due circonferenze si conducano due qualsiansi raggi paralleli OA, O'A' da parti opposte della OO'. Se B è il punto di intersezione di OO' e AA', le due rette per B, tangenti ad una delle due circonferenze, sono tangenti anche all'altra].

[263] **393.** Divisa una circonferenza in quattro parti uguali AB, BC, CD, DA (n. 263), si conducano le tangenti nei quattro punti A, B, C, D. Si ottiene così un *quadrato circoscritto alla circonferenza data.*

[265] **394.** Si *circoscriva* rd una data circonferenza un esagono regolare. [Cfr. n. 265 ed eserc. prec.].

[266] **395.** Si *circoscriva* ad una data circonferenza un triangolo equilatero. [Cfr. n. 266 ed eserc. 393].

[268] **396.** Si circoscriva ad una circonferenza data un pentagono regolare. [Cfr n. 268 ed eserc. 393].

397. Si iscriva in una circonferenza una stella a sei punte costituita da due triangoli equilateri. [Divisa la circonferenza in sei archi uguali : AB, BC,..., FA (n. 265), si costruiscàno i due triangoli ACE, BDF].

398. Si iscriva in una circonferenza una stella ad otto punte, costituita da due quadrati tali che le diagonali dell'uno bisechino gli angoli delle diagonali dell'altro. [Cfr n. 263].

399. Si iscriva in una circonferenza data l'*ottagono regolare stellato* che si ottiene dividendo la circonferenza in otto archi uguali nei punti A, B, C,..., G, H (n. 264) e conducendo le corde AD, DG, GB, BE, EH, HC, CF, FA.

400. Si iscriva in una data circonferenza il *pentagono regolare stellato*, che si ottiene dividendo la circonferenza in cinque archi uguali nei punti A, B, C, D, E (n. 268) e conducendo le corde AC, CE, EB, BD, DA.

INDICE

INDICE

IV. — Triangoli e poligoni.

V. — Rette e piani nello spazio. Diedri.

VI. — Poliedri.

VII. — Cilindro, cono e sfera.

Esercizi sui capitoli I-VII.
(Prima Classe)

VIII. — Misura dei segmenti e degli angoli.

IX. — Misura della superficie dei poligoni.

X. — Lunghezza della circonferenza e area del cerchio.

XI. — Misura delle superficie e dei solidi dei poliedri.

XII. — Misura delle superficie e dei solidi del cilindro, del cono e della sfera.

Esercizi sui capitoli VIII-XII.

(Seconda classe)

XIII. — Applicazioni delle regole di misura.

XIV. — Costruzioni fondamentali con riga e compasso.

Esercizi sui capitoli XIII-XIV.

(Terza Classe)