Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sulla definizione del continuo lineare

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **XV** (1911), pp. 39-43.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

5ª Sessione, 29 Gennaio 1911.

Presidenza del Prof. PIETRO ALBERTONI, Presidente.

Il Segretario legge le lettere dei Professori Carlo De Stefani, Sen. Lorenzo Camerano, Sen. Giovanni Celoria, Charles Richet, Albine Haller, Ivan Paulow che ringraziano per la loro nomina ad Accademici Corrispondenti.

Il Segretario notifica poi l'invito rivolto all'Accademia dal Rettore e dal Senato della Regia Università di Christiania ad assistere, nei giorni 5-6 Settembre 1911, alla celebrazione del primo centenario di fondazione di quella Università.

L'Accademico Benedettino Prof. FEDERIGO ENRIQUES legge la seguente sua Nota: **Sulla definizione del continuo lineare.**

Secondo G. Cantor (1) si può definire il continuo lineare (a una dimensione) mediante tre postulati.

Una serie di elementi Σ costituisce un continuo se:

1) gli elementi della serie sono disposti in un *ordine* tale che fra due elementi dati vi è sempre

(1) *Math Annalen*, Bd 46.

qualche elemento intermedio (che precede l'uno e segue l'altro);

2) quest'ordine è continuo, cioè: se gli elementi di Σ vengono partiti in due classi contigue, vi è sempre un elemento di separazione (1);

3) esiste un insieme di elementi numerabile e ovunque denso su Σ.

Il continuo così definito si può porre in corrispondenza biunivoca ordinata col continuo numerico, cioè colla serie dei numeri reali.

Ora si può osservare che data una serie continua Σ, è dato insieme (a meno d'una inversione) il suo ordine, soddisfacente alle condizioni 1) 2), ma la scelta d'un insieme numerabile denso su Σ non viene determinata. Perciò vi è luogo a generalizzare la definizione del continuo lineare ritenendo le condizioni 1) 2) e lasciando cadere la 3).

Allora nasce la domanda: *data una serie continua è sempre possibile porla in corrispondenza ordinata col continuo numerico?*

A questa questione abbiamo ammesso come probabile che debba darsi una risposta negativa e da tale presunzione siamo stati indotti a fondare una nuova teoria geometrica del continuo partendo dal continuo a più dimensioni (2). Ora si porge qui la dimostrazione del fatto presunto, cioè *si costruisce una serie continua di specie superiore che non può porsi in corrispondenza ordinata col continuo numerico.*

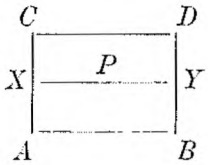
A questo scopo consideriamo un quadrato $A\ B\ C\ D$.

---

(1) Ci riferiamo sempre alla forma del postulato della continuità che non fa appello ad alcuna nozione di congruenza segmentaria e che corrisponde alla teoria degli irrazionali di Dedekind.

(2) « Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate.... » Rend. Circolo Matematico di Palermo, 1898.

I punti di questo quadrato verranno ordinati in guisa che :



1) dati due punti P, P' si dirà che P segue a P' se P si trova più alto di P' (più distante dal lato $A\ B$);

2) se P, P' appartengono ad uno stesso segmento $X\ Y$ parallelo ad $A\ B$, cioè sono ugualmente alti, si dirà che P segue a P' se P si trova a destra di P' (più lontano da $A\ C$)..

Si ottiene così una serie ordinata di punti Σ, che ha come primo elemento A e come ultimo elemento D.

L'ordine è tale che fra due punti vi è sempre qualche punto intermedio; ed è continuo nel senso di Dedekind perchè per ogni partizione della serie in classi contigue esiste un segmento $X\ Y$ parallelo ad $A\ B$ tale che;

a) la partizione stessa dà luogo ad una partizione analoga sopra $X\ Y$, e allora vi è su questo segmento un punto di separazione (ultimo elemento della classe inferiore o primo della superiore);

b) oppure i punti della classe superiore sono i punti più alti di $X\ Y$, e allora Y è l'ultimo elemento della classe inferiore;

c) oppure i punti della classe inferiore sono i punti più bassi di $X\ Y$, e allora Y è primo elemento della classe superiore.

L'ordine della serie, Σ, così costruita, gode delle proprietà che spettano all'ordine di un ordinario segmento $M\ N$; togliendo gli estremi A, B si ha un ordine analogo a quello dei punti d'una retta.

Si tratta di dimostrare che « non si può porre una corrispondenza ordinata tra i punti di Σ e i punti di un segmento $M\ N$, o fra i punti di Σ e i punti di una retta ».

La seconda tesi si riconduce alla prima perchè i punti d'una retta si possono projettare sui punti d'un semicerchio dal centro di questo, e quindi il semicerchio si lascia proiettare sopra un segmento rettilineo $M\ N$, da un punto del semicerchio complementare.

Supponiamo dunque che si abbia una corrispondenza ordinata fra i punti di Σ e i punti d'un segmento $M\ N$, avente una certa lunghezza l. Ad ogni segmento $X\ Y$ del quadrato $A\ B\ C\ D$, parallelo ad $A\ B$, corrisponde un segmento $X'\ Y'$ contenuto in $M\ N$; ed a segmenti $X\ Y$ che si succedono per altezza crescente nel quadrato, corrispondono segmenti $X'\ Y'$, successivi senza punti comuni, entro $M\ N$.

Ciò posto si consideri un intero positivo n arbitrariamente dato: fra le immagini di segmenti analoghi ad $X\ Y$ entro $M\ N$, ve ne sono certo *meno di* n la cui lunghezza è $\geq \frac{l}{n}$.

Pertanto i segmenti $X\ Y$ paratleli ad $A\ B$ si lasceranno classificare come segue:

1) un primo gruppo contenente al più 1 segmento la cui immagine in $M\ N$ è $\geq \frac{l}{2}$;

2) un secondo gruppo contenente al più 2 segmenti la cui immagine in $M\ N$ è $\geq \frac{l}{3}$;

. . . . . .

n) un n^0 gruppo contenente al più $n - 1$ segmenti la cui immagine in $M\ N$ è $\geq \frac{l}{n}$;

. . . . . .

La serie dei gruppi così formata comprende certo tutti i segmenti $X\ Y$ poichè ciascun di questi ha un'immagine non nulla in $M\ N$. Di più i segmenti dello n^0 gruppo si possono prendere in un determinato ordine di successione, per es. nell'ordine secondo cui si succedono in Σ. Con ciò la serie dei segmenti $X\ Y$ viene fatta corrispondere ordinatamente alla serie dei numeri naturali. Ma questa conclusione è assurda poichè l'anzidetta serie, come l'insieme dei punti X del segmento $A\ C$, ha una potenza superiore ad un gruppo numerabile.